Solución a la tarea 3, Física computacional I

Kevin Albeiro Zapata Ciro

1 El oscilador armonico

Se tiene un resorte ideal de longitud natural l_0 y constante k, una masa m es suspendida verticalmente a traves del resorte, lo cual hace que este se estire hasta una nueva posicion de equilibrio D debido al peso mg. Todas las variables se pueden ver en la figura 1.

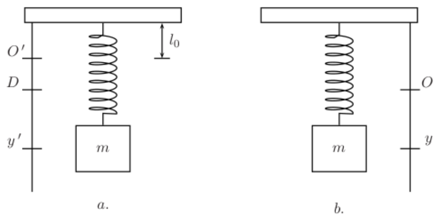

Figure 1: Sistema masa resorte vertical. En a. se toma como origen la longitud l_0; en b. se toma como origen $l_0 + D$. Imagen sacada de [1].

En el sistema primado, tomando como origen O' la longitud natural l_0 (parte a. de la figura 1) se tiene que si se deforma el resorte hasta una posicion y' se cumple que la energia cinetica y potencial son $T = \frac{1}{2}m\dot{y'}^2$ y $U = -\frac{1}{2}ky'^2 + mgy'$, respectivamente. Usando el lagrangiano $L = T - U$ y la ecuacion de Euler-Lagrange $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{y'}}) - \frac{\partial L}{\partial y'} = 0$ se tiene la ecuacion de movimiento $m\ddot{y'} = mg - ky'$, la cual tiene como solucion:

$$y' = A\cos(\omega_0 + \delta) + D \tag{1}$$

Donde $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ es conocida como la frecuencia natural de vibracion, A es la amplitud de la vibracion, δ es un desface y D es la nueva posicion de equilibrio. Esta ecuacion solo se diferencia de un MAS debido al factor D, el cual puede ser hallado igualando la fuerza a cero (derivando la energia potencial e igualando a cero, ya que $F = -\nabla U$ y se iguala a cero para hallar los puntos de equilibrio), obteniendo:

$$D = \frac{mg}{k} \tag{2}$$

Si definimos un nuevo sistema de refencia O, en el nuevo punto de equilibrio D y hacemos una deformacion y (parte b. de la figura 1), obtenemos que $T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2$ y $U = -\frac{1}{2}k(y+D)^2 + mgy$ son la energia cinetica y potencial medidas desde este nuevo origen O. Usando de nuevo el lagrangiano y la ecuacion de Euler-Lagrange (esta vez derivando con respecto a y) se obtiene que la nueva ecuacion de movimiento es $m\ddot{y} = mg - ky - kD$ y usando la ecuacion 2 (debido a que esta distancia no cambia) se llega a que $m\ddot{y} = -ky$ cuya solucion es

$$y = A\cos(\omega_0 + \delta) \tag{3}$$

Donde se observa los parametros son los mismos que en la ecuacion 1 pero sin el D. Esto lo que nos dice es que el punto de equilibrio se deplaza debido a la gravedad y es como si tuvieramos un resorte de longitud natural $l_0 + D$ en vez de uno de longitud natural l_0. O en otras palabras se tiene una oscilacion armonica al rededor del punto de equilibrio $l_0 + D$.

La velocidad se puede hallar derivando y con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\dot{y} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \delta) \tag{4}$$

2 El oscilador armonico amortiguado

Para el oscilador amortiguado tendre en cuenta una fuerza de friccion de la forma $\vec{F_{fric}} = -b\vec{v} = -b\dot{\vec{y}}$, obteniendo la ecuacion de movimiento $\ddot{y} = -\omega_0^2 y - \frac{b}{m}\dot{y}$ cuya solucion general es:

$$y = Ae^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{\sqrt{(\frac{\Gamma}{2})^2-\omega_0^2}t} + Be^{-\frac{\Gamma}{2}t}e^{-\sqrt{(\frac{\Gamma}{2})^2-\omega_0^2}t} \tag{5}$$

En el cual solo tendre en cuenta el caso subamortiguado $\frac{\Gamma}{2} < \omega_0$, y definiendo:

$$\sqrt{(\frac{\Gamma}{2})^2 - \omega_0^2} = i\sqrt{\omega_0^2 - (\frac{\Gamma}{2})^2} = i\omega' \tag{6}$$

Usando la ecuacion 6 en la ecuacion 5 se obtiene la solucion:

$$y = Ce^{-\frac{\Gamma}{2}t}\cos(\omega' t + \delta) \tag{7}$$

Con parametros C que es la amplitud, Γ que es el factor asociado al amortiguamiento, ω' la nueva frecuencia y δ que es un desface.

Se puede hallar la velocidad derivando y con respecto al tiempo, obteniendo:

$$\dot{y} = -C\omega' e^{-\frac{\Gamma}{2}t}\sin(\omega' t + \delta) + \frac{\Gamma}{2}y \tag{8}$$

3 Resultados computacionales

Se nos pidio crear graficas de posicion contra tiempo y de espacios de fase de minimo cinco MAS del tipo explicado en la seccion 1 y otros cinco (como minimo) con amortiguamiento como los de la seccion 2. Para los primeros use la ecuacion 3 con sus respectivos parametros y obtuve:

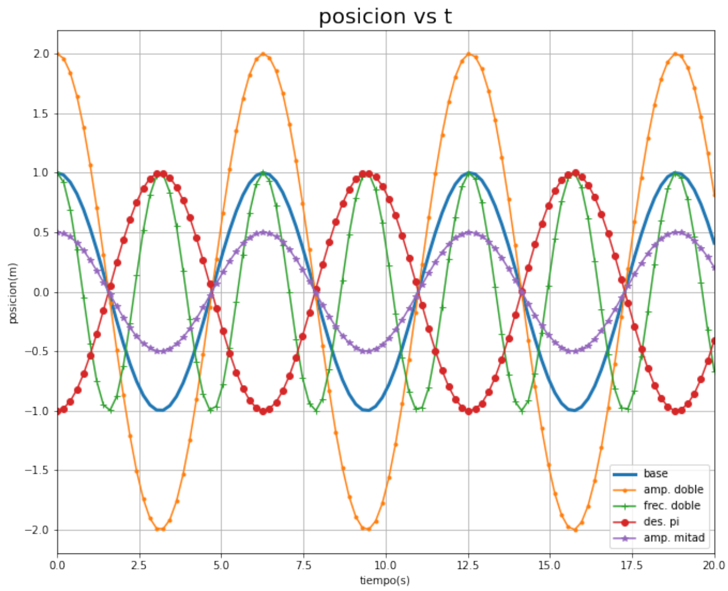

Figure 2: Posicion vs tiempo para 5 MAS

Para los espacios de fase use la ecuacion 3 y la ecuacion 4, obtuve:

Figure 3: Espacio de Fase de 5 MAS

Para los segundos use la ecuacion 7 y obtuve:

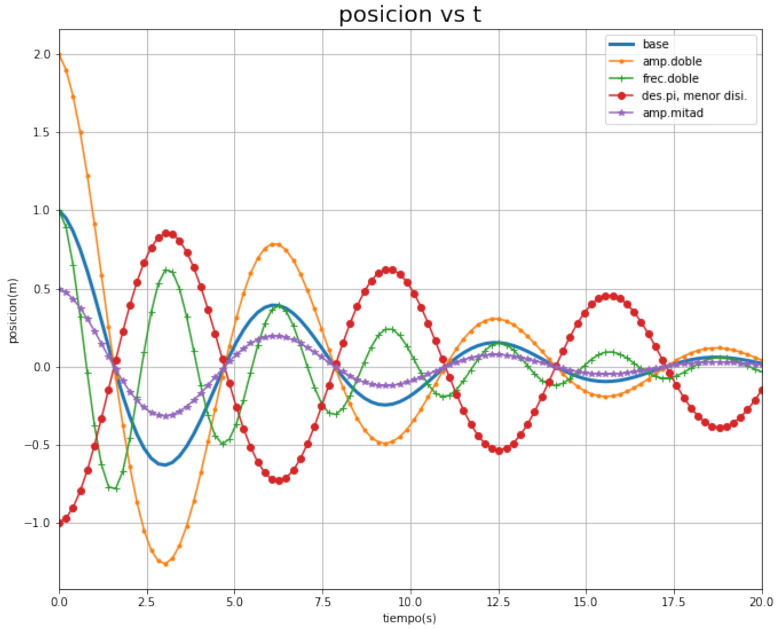

Figure 4: Posicion vs tiempo para 5 osciladores subamortiguados

Para los espacios de fase de estos use 7 y 8 y obtuve:

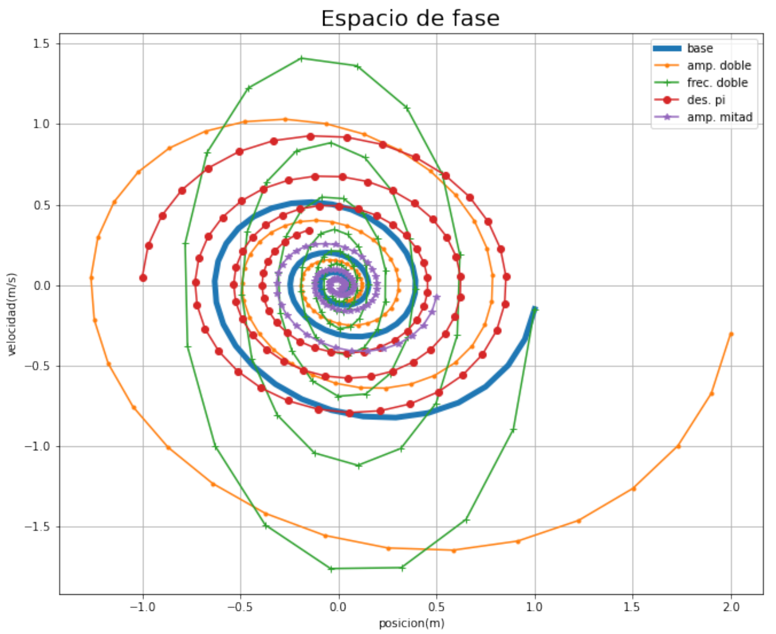

Figure 5: Espacio de fase de 5 osciladores subamortiguados

4 Conclusiones

En la figura 2 se ven 5 MAS, el primero (en azul) que lo llame base tiene una frecuencia natural de uno, una amplitud de uno y un desface de cero; para los demas fui cambiando estos valores, asi el segundo (en amarillo) tiene el doble de amplitud que la base y los demas parametros iguales; el tercero (en verde) tiene el doble de frecuencia que la base y el resto de parametros iguales; el cuarto (de rojo) tiene un desface de pi con respecto a la base y el resto de parametros iguales; el 5 (de morado) tiene la mitad de la amplitud del llamado base.

En la figura 3 mantuve el mismo codigo de colores que en la figura 2, pero esta es el espacio de fase, de nuevo el base es el azul; podemos concluir muy claramente que doblar la amplitud (amarillo) dobla tanto las posiciones que avarca como las rapideces a las que puede llegas; doblar la frecuencia (verde) mantiene las posiciones que avarca pero dobla las rapideces; los desfaces (rojo) no ocacionan ningun tipo de cambio a las posiciones ni a las rapideces; y por ultimo disminuir la amplitud (morado) disminuye tanto las posiciones como las rapideces.

En la figura 4 se ven 5 osciladores subamortiguados las refencias de colores las mantuve porque el unico parametro que cambiaba era Γ y lo mantuve igual a 0.03 para todos excepto para el rojo (el desfasado pi) donde lo hice igual a 0.01, se observa que a menos Γ menos se amortigua.

En la figura 5, se ve que los espacios de fase tienden al punto de equilibrio (que en nuestro caso no es cero sino D, aunque en las graficas aparece cero). Y se observa que siguen manteniendo los mismos aspectos de rapideces y velocidades que en la grafica 3; la unica que cambia es la roja, donde se ve una rotacion de pi en esa espiral. En conclusion los MAS y los osciladores subamortiguados comparten muchas caracteristicas, siendo los primeros un caso de los segundos como se puede ver haciendo Γ igual a cero en las ecuaciones.

References

[1] Guerrero de Mesa, A. (2008). Oscilaciones y ondas. Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos.