MUNI
ARCHIV

Solución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales con el método de diferencias finitas en C++

Juan felipe zapata arenas
Kevin Zapata
juan.zapata97@udea.edu.co
albeiro.zapata@udea.edu.co

Universidad de Antioquia

Planteamiento del problema

Sea la siguente ecuación diferencial de segundo orden:

$$\begin{aligned} y'' &= f(x, y, y') \quad : \quad a \leq x \leq b \\ y(a) &= \alpha \ y \ \ y(b) = \beta \end{aligned} \tag{1}$$

Suponemos que la función f y las primeras derivadas parciales $f_y, f_{y'}$ son contínuas en el siguiente conjunto:

$$D = \left\{(x, y, y') | a \leq x \leq b, -\infty \leq y, y' \leq \infty\right\} \tag{2}$$

Decimos que la ecuación diferencial de segundo orden es no lineal si tiene la siguiente forma [1]:

$$A(x, y)(y''(x))^k + B(x, y)(y'(x))^\mu + C(x, y)y^\eta(x) = F(x, y) \tag{3}$$

Método numérico para la solución

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en $N + 1$ puntos con N subintervalos del mismo ancho $h = \frac{b-a}{N+1}$, cuyos extremos a izquierda se encuentran en las posiciones:

$$x_i = a + ih \quad 0 \leq i \leq N + 1 \tag{4}$$

Tal que:

$$y(x_0) = \alpha \quad ; \quad y(x_{N+1}) = \beta \tag{5}$$

Suponemos que la función solución exacta tiene cuarta derivada acotada lo cual nos permite reemplazar $y''(x_i)$ y $y'(x_i)$ en cada una de las ecuaciones:

$$y''(x_i) = f(x_i, y(x_i), y'(x_i)) \tag{6}$$

Método numético para la solución

Aplicando el teorema del valor medio y diferencias finitas podemos aproximar la primera y la segunda derivada de la siguiente forma:

$$y''(x_i) = \frac{1}{h^2}\left[y(x_{i+1}) - 2y(x_i) + y(x_{i-1})\right] \tag{7}$$

$$y'(x_i) = \frac{1}{2h}\left[y(x_{i+1}) - y(x_{i-1})\right] \tag{8}$$

Con lo anterior y usando la notación $\omega_i = y(x_i)$ la ecuación (6) la podemos escribir así:

$$f\left(x_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right) - \frac{\omega_{i+1} - 2\omega_i + \omega_{i-1}}{h^2} = 0 \tag{9}$$

Para $1 \leq i \leq N$

Método numérico para la solución

El sistema de ecuaciones que obtenemos es $N \times N$:

$$\begin{cases} h^2 f\left(x_1, \omega_1, \frac{\omega_2 - \alpha}{2h}\right) - \omega_2 + 2\omega_1 - \alpha = 0 \\ h^2 f\left(x_2, \omega_2, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2h}\right) - \omega_3 + 2\omega_2 - \omega_1 = 0 \\ \vdots \\ h^2 f\left(x_N, \omega_N, \frac{\beta - \omega_{N-1}}{2h}\right) - \beta + 2\omega_N - \omega_{N-1} = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Método numérico para la solución

Lo que queremos al final de todo es generar una sucesión de iteraciones:

$$(\omega_1^{(k)}, \omega_2^{(k)}, \ldots, \omega_N^{(k)}) \; \textit{k es el orden de iteracion} \tag{11}$$

Que convergen a la solución aproximada del problema a partir de una solución propuesto que llamamos de orden cero.

$$(\omega_1^{(0)}, \omega_2^{(0)}, \ldots, \omega_N^{(0)}) \tag{12}$$

Método numérico para la solución

Las componentes de la matriz jacobiana (no singular-invertible) tridiagonal evaluada en una solución son:

$$J(\omega_1, ..., \omega_N)_{ij} =$$
$$\begin{cases} -1 + \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right) & ; \quad i = j-1 \;\; y \;\; j = 2, ..., N \\ \\ 2 + h^2 f_y \left(x_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right) & ; \quad i = j \;\; y \;\; j = 1, ..., N \\ \\ -1 - \frac{h}{2} f_{y'}\left(x_i, \omega_i, \frac{\omega_{i+1} - \omega_{i-1}}{2h}\right) & ; \quad i = j+1 \;\; y \;\; j = 1, ..., N-1 \end{cases} \tag{13}$$

Método numérico para la solución

En este método para cada iteración se debe resolver la siguiente ecuación matricial:

$$J(\omega_1, ..., \omega_N)[v_1, ..., v_N]^T = \begin{bmatrix} h^2 f\left(x_1, \omega_1, \frac{\omega_2 - \alpha}{2h}\right) - \omega_2 + 2\omega_1 - \alpha \\ h^2 f\left(x_2, \omega_2, \frac{\omega_3 - \omega_1}{2h}\right) - \omega_3 + 2\omega_2 - \omega_1 \\ \vdots \\ h^2 f\left(x_N, \omega_N, \frac{\beta - \omega_{N-1}}{2h}\right) - \beta + 2\omega_N - \omega_{N-1} \end{bmatrix} \tag{14}$$

Para los elementos v_i, pues:

$$\boxed{\omega_i^{(k)} = \omega_i^{(k-1)} + v_i \ \ ; \ \ 1 \leq i \leq N \, ; \ k \geq 1} \tag{15}$$

Algoritmo

Nonlinear Finite-Difference

To approximate the solution to the nonlinear boundary-value problem

$$y'' = f(x, y, y'), \quad \text{for } a \le x \le b, \text{ with } y(a) = \alpha \text{ and } y(b) = \beta :$$

INPUT endpoints a, b; boundary conditions α, β; integer $N \ge 2$; tolerance TOL; maximum number of iterations M.

OUTPUT approximations w_i to $y(x_i)$ for each $i = 0, 1, \ldots, N+1$ or a message that the maximum number of iterations was exceeded.

Step 1 Set $h = (b-a)/(N+1)$;
$w_0 = \alpha$;
$w_{N+1} = \beta$.

Step 2 For $i = 1, \ldots, N$ set $w_i = \alpha + i\left(\dfrac{\beta-\alpha}{b-a}\right)h$.

Step 3 Set $k = 1$.

Step 4 While $k \le M$ do Steps 5–16.

Step 5 Set $x = a + h$;
$t = (w_2 - \alpha)/(2h)$;
$a_1 = 2 + h^2 f_y(x, w_1, t)$;
$b_1 = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_1, t)$;
$d_1 = -\left(2w_1 - w_2 - \alpha + h^2 f(x, w_1, t)\right)$.

Algoritmo

Step 6 For $i = 2, \ldots, N-1$

set $x = a + ih$;

$t = (w_{i+1} - w_{i-1})/(2h)$;

$a_i = 2 + h^2 f_y(x, w_i, t)$;

$b_i = -1 + (h/2) f_{y'}(x, w_i, t)$;

$c_i = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_i, t)$;

$d_i = -\left(2w_i - w_{i+1} - w_{i-1} + h^2 f(x, w_i, t)\right)$.

Step 7 Set $x = b - h$;

$t = (\beta - w_{N-1})/(2h)$;

$a_N = 2 + h^2 f_y(x, w_N, t)$;

$c_N = -1 - (h/2) f_{y'}(x, w_N, t)$;

$d_N = -\left(2w_N - w_{N-1} - \beta + h^2 f(x, w_N, t)\right)$.

Step 8 Set $l_1 = a_1$; (*Steps* 8–12 *solve a tridiagonal linear system using Algorithm* 6.7.)

$u_1 = b_1/a_1$;

$z_1 = d_1/l_1$.

Step 9 For $i = 2, \ldots, N-1$ set $l_i = a_i - c_i u_{i-1}$;

$u_i = b_i/l_i$;

$z_i = (d_i - c_i z_{i-1})/l_i$.

Step 10 Set $l_N = a_N - c_N u_{N-1}$;

$z_N = (d_N - c_N z_{N-1})/l_N$.

Step 11 Set $v_N = z_N$;

$w_N = w_N + v_N$.

Algoritmo

$w_N = w_N + v_N$.

Step 12 For $i = N - 1, \ldots, 1$ set $v_i = z_i - u_i v_{i+1}$;
$w_i = w_i + v_i$.

Step 13 If $\|\mathbf{v}\| \leq TOL$ then do Steps 14 and 15.

Step 14 For $i = 0, \ldots, N + 1$ set $x = a + ih$;
OUTPUT (x, w_i).

Step 15 STOP. (*The procedure was successful.*)

Step 16 Set $k = k + 1$.

Step 17 OUTPUT ('Maximum number of iterations exceeded');
(*The procedure was not successful.*)
STOP.

Resultado 1

Solución de :

$$y''(x,y,y') = \frac{1}{8}\left(32 + 2x^3 - yy'\right)$$
$$Para \;\; 1 \leq x \leq 3 \;\; con \;\; y(1) = 17 \;\; \& \;\; y(3) = \frac{43}{3} \qquad (16)$$

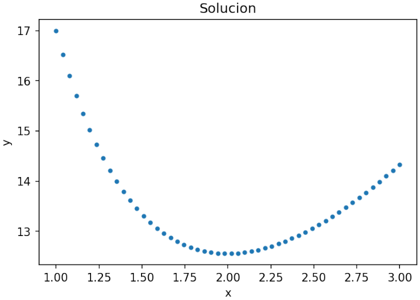

Figure: Solución de la ecuación (16)[1]

Resultado 2

Solución de :

$$w''(x,w,w') = \left[1 + (w'(x)^2\right]^{3/2}\left[\frac{S}{EI}w(x) + \frac{qx}{2EI}(x-l)\right]$$

$$Para \;\; 0 \leq x \leq 120 \leq \;\; con \;\; W(0) = 0 \;\; \& \;\; W(120) = 0 \qquad (17)$$

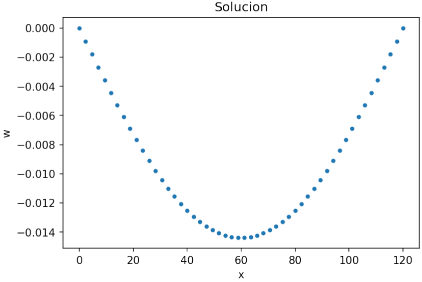

Figure: Solución de la ecuación (17)[2]

2

Solución 3

Solución de :

$$y''(x,w,w') = (y')^2x^{-3} - 9y^2x^{-5} + 4x$$
$$Para\ 1 \leq x \leq 2 \leq \quad con \;\; y(1) = 0 \;\; \& \; y(2) = ln256 \;\; ; \quad h = 0.05 \qquad (18)$$

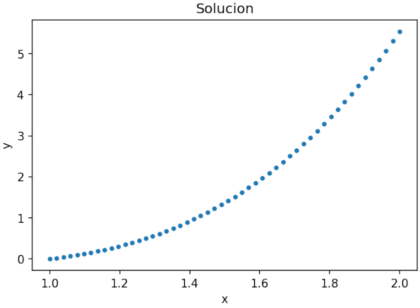

Figure: Solución de la ecuación (18)[3]

3

Bibliografía

[1] Richard L Burden et al. "Análisis numérico". In: (2017).

MASARYK UNIVERSITY