Nullstellen Quadratischer Funktionen

10. März 2024

Aufgabe 1: Wurzeln reeller Zahlen

Bestimmen Sie für jede der folgenden Zahlen die Anzahl reeller Quadratwurzeln und geben Sie diese an.

Beispiel: Die Zahl 1 hat genau zwei Wurzeln in $\mathbb{R}$, nämlich $+1$ und -1.

a) 4

b) 0

c) -1

d) 3

e) Eine positive reelle Zahl p

f) Eine negative reelle Zahl q

Lösung:

a) 4 hat genau zwei Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$, nämlich 2 und -2.

b) 0 hat genau eine Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$, nämlich 0.

c) -1 hat keine Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$.

d) 3 hat genau zwei Quadratwurzeln in $\mathbb{R}$, nämlich $\sqrt{3}$ und $-\sqrt{3}$.

e) Eine positive Zahl $p \in \mathbb{R}_+$ hat genau zwei reelle Quadratwurzeln, nämlich $\sqrt{p}$ und $-\sqrt{p}$.

f) Eine negative Zahl $q \in \mathbb{R}_-$ hat keine reellen Quadratwurzeln.

Aufgabe 2: Wurzeln bestimmen

Bestimmen Sie für folgende Gleichungen die Lösungsmenge für $\blacktriangle \in \mathbb{R}$:

a) $\blacktriangle^2 = 0$

b) $\blacktriangle^2 = 1$

c) $\blacktriangle^2 = 3$

d) $\blacktriangle^2 = -1$

e) $\blacktriangle^2 = e$, für $e \in \mathbb{R}$ gilt.

f) $(\blacktriangle + 1)^2 = 0$

g) $(\blacktriangle + 1)^2 = 1$

h) $(\blacktriangle + 1)^2 = 3$

i) $(\blacktriangle + 1)^2 = -1$

j) $(\blacktriangle - d)^2 = e$, für $e, d \in \mathbb{R}$.

Lösung:

a) Die reelle Lösungsmenge für $\blacktriangle^2 = 0$ ist $\{0\}$

b) Die reelle Lösungsmenge für $\blacktriangle^2 = 1$ ist $\{1, -1\}$

c) Die reelle Lösungsmenge für $\blacktriangle^2 = 3$ ist $\{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$

d) Die reelle Lösungsmenge für $\blacktriangle^2 = -1$ ist $\emptyset$ (das ist die leere Menge)

e) Die reelle Lösungsmenge für $\blacktriangle^2 = e$, für einen reellen Parameter e, ist $\{\sqrt{e}, -\sqrt{e}\}$ wenn e positiv ist, $\{0\}$ wenn e gleich null ist und $\emptyset$ wenn e negativ ist.

f) Die reelle Lösungsmenge für $(\blacktriangle + 1)^2 = 0$ ist $\{-1\}$.

g) Die reelle Lösungsmenge für $(\blacktriangle + 1)^2 = 1$ ist $\{0, -2\}$

h) Die reelle Lösungsmenge für $(\blacktriangle + 1)^2 = 3$ ist $\{-1 + \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3}\}$.

i) Die reelle Lösungsmenge für $(\blacktriangle + 1)^2 = -1$ ist $\emptyset$

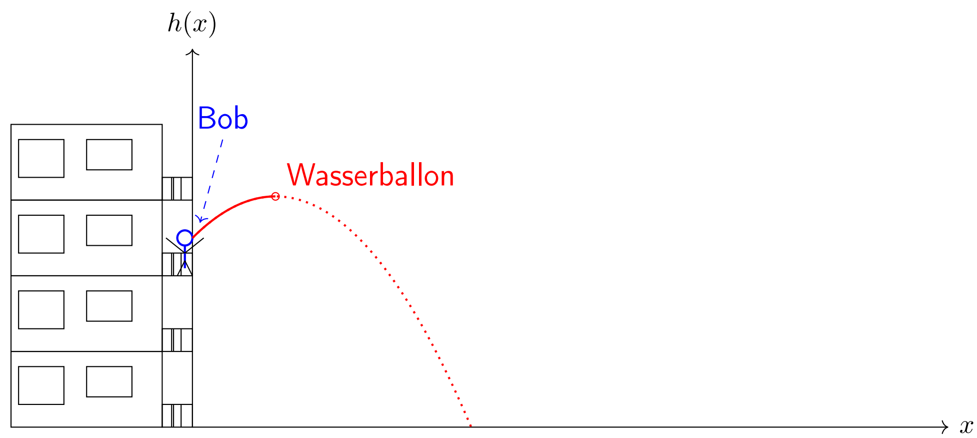
j) Die reelle Lösungsmenge für $(\blacktriangle - d)^2 = e$, für reelle Parameter e und d ist $\{d + \sqrt{e}, d - \sqrt{e}\}$, wenn e positiv ist, $\{d\}$ wenn e gleich null ist und $\emptyset$ wenn e negativ ist.

Aufgabe 3: Nullstelle bestimmen

Bob wirft einen Wasserballon vom 3. Stock. Die Flugbahn des Wasserballons entspricht dem Funktionsgraphen einer quadratischen Kurve. Die Höhe h des Wasserballons in Meter, in Abhängigkeit zur zurückgelegten horizontalen Distanz x ist gegeben als

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -\frac{1}{12}(x-6)^2 + 16.65. \end{aligned}$$

.



a) Bestimmen Sie die maximale Höhe, die der Wasserballon erreicht.

Lösung: Die Maximale Höhe entspricht dem Funktionswert im Scheitelpunkt. Die Funktion hat ihren Scheitelpunkt in $(6, 16.65)$, somit ist die maximale Höhe, die der Wasserballon erreicht 16.65 Meter.

b) Bestimmen Sie die Distanz vom Aufprallort zum Gebäude.

Lösung: Der Aufprallort entspricht dem Ort, an dem die Höhe des Wasserballons null ist, also für den $h(x) = 0$ gilt. Wir finden:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ \iff \quad -\frac{1}{12}(x-6)^2 + 16.65 &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iff \qquad & -\frac{1}{12}(x-6)^2 = -16.65 \\
\iff \qquad & (x-6)^2 = 12 \cdot 16.65 \\
\iff \qquad & x-6 = \pm\sqrt{199.8} \\
\iff \qquad & x = 6 \pm 14.14
\end{aligned}
$$

Das heisst, der Ball schlägt im Punkt $(20.14, 0)$ oder $(-8.14, 0)$ auf. Da Bob den Ball in die positive Richtung der $x-$Achse wirft, entspricht der Aufprallort $(20.14, 0)$. Die Distanz zum Gebäude beträgt somit 20.14 Meter.

Aufgabe 4: Nullstellen der Scheitelpunktform

a) Es sei g eine reelle quadratische Funktion mit Parameter $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $d, e \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto a(x-d)^2 + e. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion g:

i) wenn $e = 0$

ii) wenn $a > 0$ und $e < 0$ oder $a < 0$ und $e > 0$

iii) wenn $a > 0$ und $e > 0$ oder $a < 0$ und $e < 0$

Vervollständigen Sie die den Text:

Wenn e null ist, hat die Funktion g genau ___ Nullstellen. Wenn e ungleich null ist und das __________ Vorzeichen wie a hat, dann hat die Funktion g genau ___ Nullstellen. Wenn e ungleich null ist und ein __________ Vorzeichen als a hat, dann hat die Funktion g genau ___ Nullstellen.

Lösung:
Die Funktion g hat eine Nullstelle in $x \in \mathbb{R}$, wenn $g(x) = 0$ gilt, das heisst

$$\begin{aligned} && g(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow && a(x-d)^2 + e &= 0 \\ \Longleftrightarrow && a(x-d)^2 &= -e \\ \Longleftrightarrow && (x-d)^2 &= -\frac{e}{a} \end{aligned}$$

Aus Aufgabe 2j) wissen wir, dass diese Gleichung

- eine reelle Lösung hat, wenn $e = 0$ ist. In dem Fall lautet die Lösungsmenge für die Gleichung $\{d\}$;
- zwei Lösungen hat, wenn der Term $-\frac{e}{a}$ positiv ist. In diesem Fall finden wir:

$$
\begin{aligned}
& (x-d)^2 = -\frac{e}{a} \\
\iff \quad & x - d = \sqrt{-\frac{e}{a}} \quad \text{oder} \quad x - d = -\sqrt{-\frac{e}{a}} \\
\iff \quad & x = d + \sqrt{-\frac{e}{a}} \quad \text{oder} \quad x = d - \sqrt{-\frac{e}{a}}
\end{aligned}
$$

  und die Lösungsmenge für die Gleichung ist $\{d + \sqrt{-\frac{e}{a}}, d - \sqrt{-\frac{e}{a}}\}$;
- keine reelle Lösung hat, wenn der Term $-\frac{e}{a}$ negativ ist.

Wenn e null ist, hat die Funktion g genau 1 Nullstellen. Wenn e ungleich null ist und das gleiche Vorzeichen wie a hat, dann hat die Funktion g genau 0 Nullstellen. Wenn e ungleich null ist und ein anderes Vorzeichen als a hat, dann hat die Funktion g genau 2 Nullstellen.

Aufgabe 5: Nullstellen der allgemeinen Form

Es sei f eine reelle quadratische Funktion der allgemeinen Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Sie wissen bereits, dass die Funktion f ihren Scheitelpunkt in $\left(-\frac{b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right)$ erreicht.

a) Nutzen Sie die Resultate aus Aufgabe 3b), um die Nullstellen der Funktion f zu bestimmen.

b) Was sind die Bedingungen, die erfüllt sein müssen, damit f genau null, eine oder zwei Nullstellen hat?

Lösung:

a) Aus Aufgabe 3 wissen wir, dass eine reelle quadratische Funktion mit Scheitelpunkt in (d, e) ihre Nullstellen in

- $x_1 = d + \sqrt{-\frac{e}{a}}$ und $x_2 = d - \sqrt{-\frac{e}{a}}$ hat, wenn e und a unterschiedliche Vorzeichen haben. Wir kürzen das ab mit $x_{1,2} = d \pm \sqrt{-\frac{e}{a}}$.
- $x_1 = d$ hat, wenn e gleich Null ist. Durch Substitution von d mit $-\frac{b}{2a}$, finden wir, dass die Funktion h eine Nullstelle in $x_1 = d = -\frac{b}{2a}$ hat.
- Keine Nullstellen hat, wenn e und a das gleiche Vorzeichen haben.

Im ersten Fall ersetzen wir d mit $-\frac{b}{2a}$ und e mit $c - \frac{b^2}{4a}$ und finden:

$$\begin{aligned} && x_{1,2} &= d \pm \sqrt{-\frac{e}{a}} \\ &\overset{d=-\frac{b}{2a}, e=c-\frac{b^2}{4a}}{\iff} & x_{1,2} &= \left(-\frac{b}{2a}\right) \pm \sqrt{-\frac{c - \frac{b^2}{4a}}{a}} \\ &\iff & x_{1,2} &= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{-\left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\iff x_{1,2} &= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{4ac-b^2}{4a^2}} \\
\iff x_{1,2} &= \frac{-b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} \\
\iff x_{1,2} &= \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\
\iff x_{1,2} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

b) Damit f genau eine Nullstelle hat, muss $e = 0$ sein, also muss $c - \frac{b^2}{4a} = 0$ gelten. In dem Fall ist auch der Term $b^2 - 4ac$ null, denn es gilt:

$$
c - \frac{b^2}{4a} = 0 \iff 4ac - b^2 = 0 \iff b^2 - 4ac = 0.
$$

Damit f genau zwei Nullstellen hat, müssen a und e unterschiedliche Vorzeichen haben. Das ist genau dann der Fall, wenn $a \cdot e < 0$ ist. Wir finden:

$$
\begin{aligned}
& a \cdot e < 0 \\
\iff & a \cdot \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) < 0 \\
\iff & ac - \frac{b^2}{4} < 0 \\
\iff & 4ac - b^2 < 0 \\
\iff & b^2 - 4ac > 0
\end{aligned}
$$

Abschliessend lässt sich sagen, dass der Term $\Delta = b^2 - 4ac$ folgenden Einfluss auf die Anzahl Nullstellen der reellen quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ nimmt:

- Wenn $\Delta > 0$, dann hat f genau zwei Nullstellen;
- Wenn $\Delta = 0$, dann hat f genau eine Nullstelle;
- Wenn $\Delta < 0$, dann hat f keine reellen Nullstellen.