1 Identifikation Parameter

Definition 1. *Es seien A und B zwei Teilmengen der reellen Zahlen.*

*Eine Funktion $f : A \to B$ heisst **quadratische Funktion**, wenn drei reelle Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $a \neq 0$ und so dass gilt:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \forall\, x \in A. \tag{1}$$

*Diese Schreibweise für quadratische Funktionen heisst **allgemeine Form**.*

Bestimmen Sie für folgende Funktionsterme die Parameter a, b, c, so dass der Funktionsterm die Form $ax^2 + bx + c$ annimmt.

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-2)^2 & x &\mapsto (x-1)^2 + 3 \\ h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -(x+2)^2 - 5 & x &\mapsto 2x^2 + 3 \end{aligned}$$

Beispiel 2. Der Funktionsterm von $h(x)$ lautet $-(x+2)^2 - 5$. Dieser lässt sich wie folgt umformen

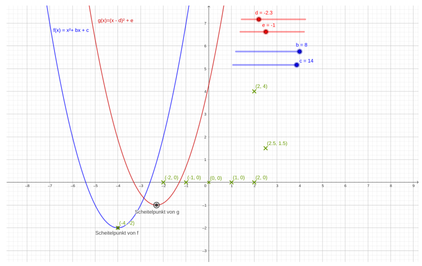
$$\begin{aligned} -(x+2)^2 - 5 &= -(x^2 + 4x + 4) - 5 \\ &= -x^2 - 4x - 4 - 5 \\ &= -x^2 - 4x - 9. \end{aligned}$$

Somit gilt $h(x) = ax^2 + bx + c$, für $a = -1$, $b = -4$ und $c = -9$. ◊

Funktion	Parameter a	Parameter b	Parameter c
g			
w			
h	-1	-4	-9
u			

2 Geogebra

Greifen Sie auf das vorbereitete Geogebra Arbeitsblatt *Parameter* zu.



Die blaue Kurve entspricht dem Graphen der parametrisierten Funktion f

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + bx + c. \end{aligned}$$

Mit den blauen Schiebereglern können Sie die Werte der Parameter b und c verändern.

Die rote Kurve entspricht dem Graphen der parametrisierten Funktion g

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x - d)^2 + e. \end{aligned}$$

Mit den roten Schiebereglern können Sie die Werte der Parameter d und e verändern.

Bestimmen Sie die Parameter b und c, so dass der Scheitelpunkt von f jeweils auf den grünen Kreuzen zu liegen kommt. Notieren Sie sich die Parameter, die zur gewünschten Konfiguration führen. Machen Sie anschliessend das gleiche für die Funktion g, indem Sie die Parameter d und e modifizieren. Halten Sie Ihre Resultate in Tabelle 1 fest. (Tipp: arbeiten Sie mit anderen Personen zusammen, dann geht es schneller).

Scheitelpunkt	Funktion g		Funktion f	
	d	e	b	c
(-4,-2)				
(-2,0)				
(-1,0)				
(0,0)				
(1,0)				
(2,0)				
(2,4)				
(2.5,1.5)				

Tabelle 1: Parameter

3 Der Zusammenhang der Parameter

Sie haben vielleicht bemerkt, dass die Verschiebung des Funktionsgraphen von g wesentlich einfacher zu verlaufen scheint, als die des Funktionsgraphen von f. Wir werden in den folgenden Paragraphen erkennen, dass man quadratische Funktionen mit Funktionsterm $ax^2 + bx + c$ auch als $(x - d)^2 + e$ schreiben kann.

a) Was ist der Zusammenhang zwischen den Parametern d, e und dem Scheitelpunkt? Welche Werte müssen d und e annehmen, wenn Sie den Scheitelpunkt von g in $(-200, 10)$ positionieren wollten?

b) Sie haben wahrscheinlich bemerkt, dass sich die beiden Funktionen überlagern, wenn Sie den gleichen Scheitelpunkt haben. Können Sie eine Regelmässigkeit in den Parametern d und b erkennen? Vervollständigen Sie folgenden Satz:

> Wenn die quadratischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + bx + c$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = (x - d)^2 + e$ den gleichen Scheitelpunkt haben, dann ist b gleich ______ mal d.

c) Ziehen Sie e von c ab und schreiben Sie den Wert in folgende Tabelle:

	(-4,-2)	(-2,0)	(-1,0)	(0,0)	(1,0)	(2,0)	(2,4)	(2.5,1.5)
c-e								

Vervollständigen Sie folgenden Satz:

Wenn die quadratischen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + bx + c$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = (x - d)^2 + e$ den gleichen Scheitelpunkt haben, dann ist $c - e$ gleich ______.

4 Von der Normalform zur Scheitelpunktform

a) Nutzen Sie die vorangegangenen Antworten und bestimmen Sie nun die Parameter d und e, so dass der Funktionsterm der Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ gleich $(x - d)^2 + e$ ist.

Testen Sie Ihre Formel: es sei h eine quadratische Funktion mit Parameter $a = 1, b = 2$ und $c = -5$. Wo liegt ihr Scheitelpunkt? Wenn Sie $(-1, -6)$ erhalten haben, dann scheinen Sie richtig zu liegen. Vervollständigen Sie folgenden Satz:

Eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + bx + c$, lässt sich auch als $f(x) = (x - d)^2 + e$ schreiben, wobei $d =$ ______ und $e =$ ______ gesetzt wird.

b) Wie verhält sich das ganze, wenn jetzt plötzlich der Term a hinzukommt? Wenn also $f(x) = ax^2 + bx + c$ und $g(x) = a(x - d)^2 + e$, mit $a \neq 0$ gilt? Vervollständigen den Satz:

Eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$, lässt sich auch als $f(x) = a(x - d)^2 + e$ schreiben, wobei $d =$ ______ und $e =$ ______ gesetzt wird.

