Quadratische Funktionen

Kantonsschule Wettingen, Klasse G1D

18. Februar 2024

Sehr geehrte Gymnasiastinnen und Gymnasiasten

Ihr Mathematiklehrer Herr Aldenhoff engagiert sich in der Ausbildung angehender Lehrpersonen an der Pädagogischen Hochschule Luzern. Aufgrund dessen habe ich die Ehre, insgesamt achtzehn Lektionen Unterricht mit Ihnen erleben zu dürfen, wovon ich sechzehn selbst unterrichten werde. Ich bin dreissig Jahre alt, verheiratet, von Beruf Mathematiker und Software Ingenieur und in der letzten Phase meiner Ausbildung zum Gymnasiallehrer, welche ich ich berufsbegleitend absolviere.

Unser Unterricht findet vom 19. Februar bis zum 12. März, jeweils Montags und Dienstags statt. Wir werden gemeinsam quadratische Funktionen und quadratische Gleichungen erkunden.

Dieses Dokument soll Ihnen und mir als Referenzpunkt dienen und hat zum Zweck, möglichst umfassend unterrichtsrelevante Theorie und Aufgaben festzuhalten. In diesem Dokument werden sich mit hoher Wahrscheinlichkeit Fehler eingeschlichen haben - sollten Ihnen welche auffallen, so bin ich dankbar, wenn Sie mir diese im Unterricht oder per E-Mail kommunizieren könnten (kevin.deforth@gmail.com).

Es ist damit zu rechnen, dass dieses Dokument im Verlaufe der nächsten vier Wochen noch weiterentwickelt wird. Damit Änderungen transparent sind, findet sich auf jeder Seite dieses Dokumentes eine Versionsnummer (Version 0.0.0) und die Änderungen können auf meinem öffentlichen Github Repository nachvollzogen werden https://github.com/kevindeforth/quadratische-funktionen. Dort finden Sie auch die jeweils aktuellste Version.

Ich freue mich auf den gemeinsamen Unterricht mit Ihnen und bedanke mich bei Ihnen, dass Sie einen Teil Ihrer mathematischen Ausbildung mit mir absolvieren werden. Für Fragen stehe ich Ihnen gerne im Klassenzimmer und per E-Mail zur Verfügung.

Inhaltsverzeichnis

Terminologie

Diese Tabelle dient als Referenz für häufig verwendete mathematische Grössen. Sie wird fortlaufend entwickelt.

$\mathbb{R}$	Die Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_{>0}$	Die Menge aller positiven reellen Zahlen (grösser als Null)
$\mathbb{R}^-, \mathbb{R}_-, \mathbb{R}_{<0}$	Die Menge aller negativen reellen Zahlen (kleiner als Null)
$\mathbb{R}_{\geqslant 0}$	Die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen (grösser oder gleich null)
$\mathbb{R}_{\leqslant 0}$	Die Menge aller nicht-positiven reellen Zahlen (kleiner oder gleich null)
$[a, b]$	Das Intervall der reellen Zahlen grösser oder gleich a und kleiner oder gleich b.
$[a, b[$	Das Intervall der reellen Zahlen grösser oder gleich a und kleiner als b.
$]a, b]$	Das Intervall der reellen Zahlen grösser als a und kleiner oder gleich b.
$]a, b[$	Das Intervall der reellen Zahlen grösser als a und kleiner als b.
$A \cap B$	Die Schnittmenge der Menge A mit der Menge B: Jedes Element in $A \cap B$ gehört sowohl zu A, wie auch zu B.
$A \cup B$	Die Vereinigung der Menge A mit der Menge B: jedes Element der Menge $A \cup B$ gehört zu A oder zu B.
$A \setminus B$	Die Menge A abzüglich der Menge B: jedes Element in $A \setminus B$ gehört zu A, aber nicht zu B.

Bemerkung: Die Zahl Null ist per Definition weder positiv noch negativ.

1 Funktionen

Ziel dieser Lerneinheit ist es, dass Sie am Ende dieses Kapitels im Umgang mit Funktionen soweit versiert sind, dass Sie die in Lernziele A aufgeführten Tätigkeiten und Fähigkeiten beherrschen. Im Kapitel finden Sie immer wieder Aufgaben, welche Ihnen helfen können, einzelne Aspekte zu üben. Am Ende des Kapitels findet sich eine Aufgabensammlung und im letzten Kapitel dieses Dokumentes findet sich für die meisten Aufgaben ein Lösungsschlüssel. Bitte schreiben Sie mir eine e-mail, oder melden Sie sich im Unterricht, wenn Sie Fehler entdecken oder Ihnen einzelne Aufgaben Mühe bereiten.

Lernziele A.

i) Sie kennen die Definition für das mathematische Objekt der Funktion und können diese in wenigen Sätzen mündlich und schriftlich wiedergeben. Sie kennen die Bedeutung der Begriffe *(Funktions-)Argument*, *Ursprungsmenge*, *Definitionsmenge*, *Bildmenge*, *Zielmenge*, *(Funktions-)Variabel* und können diese erklären.

ii) Sie nutzen die mathematisch korrekte Schreibweise, um spezifische Funktionen zu definieren. Darüber hinaus verstehen Sie den Unterschied zwischen dem Objekt der Funktion selbst und seiner Repräsentation (siehe Bemerkung 1.3).

iii) Sie können die Definitionen der Begriffe *injektiv, surjektiv* und *bijektiv* mündlich und schriftlich erklären.

iv) Sie können das Verhalten von Funktionen nach den Begriffen *injektiv, surjektiv* und *bijektiv* klassifizieren.

v) Sie können die Begriffe *Wertepaar* und *Wertetabelle* mündlich und schriftlich erklären.

vi) Sie können aufgrund der mathematischen Definition einer Funktion deren Graphen visuell annähern. Sie wissen, wie sich die *Wertetabelle* in diesem Kontext nutzen lässt.

vii) Sie können Funktionen miteinander addieren, subtrahieren, multiplizieren, dividieren und verketten. Sie können erklären, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit jede dieser Operationen durchgeführt werden darf.

1.1 Wiederholung Definition

Aufgabe 1.1.

a) Formulieren Sie jetzt in eigenen Worten, was eine Funktion ist. Schreiben Sie Ihre persönliche Definition hier auf:

b) Tauschen Sie sich nun in Gruppen aus und einigen Sie sich auf eine Definition. Scheiben Sie diese auf die Wandtafel und hier hin.

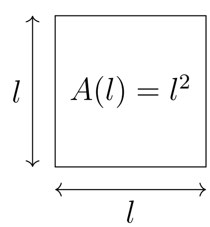
c) Inwiefern unterscheidet sich Ihre Definition von Defintion 1 auf Seite 6?

1.2 Begrifflichkeit

In diesem Kapitel werden kurz die wichtigsten Definitionen und Eigenschaften von Funktionen repetiert.

Definition 1. Eine Funktion ist eine **Beziehung zwischen zwei Mengen**: der **Definitionsmenge** und der **Zielmenge**. Damit eine Funktion gut definiert ist, muss sie jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element aus der Zielmenge zuordnen.

Beispiel 2. Die Beziehung zwischen der Seitenlänge eines Quadrates und seiner Fläche ist eine Funktion. Die Definitionsmenge ist die Menge aller nicht-negativen[1] reellen Zahlen, die Zielmenge ist die Menge der reellen Zahlen.



Mathematisch wird diese Funktion gerne mit $A(.)$ benannt - der Buchstabe A stammt aus dem Englischen *area* und entspricht dem Deutschen *Flächeninhalt*. Die Klammern $(.)$ signalisieren, dass es sich bei A um eine Funktion handelt, welche ein **Funktionsargument** aufnimmt (in diesem Fall die Seitenlänge l) und diesem einen **Funktionswert** zuweist (in diesem Fall das Quadrat der Seitenlänge l^2). Mathematisch korrekt kann man diese Funktion so definieren:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ l &\mapsto l^2. \end{aligned}$$

Das lässt sich so aussprechen: *"A ist eine Funktion von den nicht-negativen reellen Zahlen ($\mathbb{R}_{\geqslant 0}$), nach den reellen Zahlen ($\mathbb{R}$). Jedem Element l aus $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ wird das Quadrat von l in $\mathbb{R}$ zugeordnet."* ◊

[1] Da die Zahl null weder positiv noch negativ ist, bezeichnet der Begriff *'nicht-negativ'* die Menge aller positiven Zahlen **einschliesslich** der Zahl Null. Andersherum bezeichnet *'nicht-positiv'* die Menge aller negativen Zahlen einschliesslich der Zahl Null. Siehe auch Seite 3.

Bemerkung 3. Manchmal wird die Definitionsmenge auch **Ursprungsmenge** und genannt. Die Zielmenge ist die Menge, in welcher der Funktionswert angenommen wird. Manchmal wird diese auch **Bildmenge** genannt. Im Englischen spricht man von *domain* für die Definitionsmenge und *codomain* für die Zielmenge.

Das Funktionsargument wird auch **Funktionsvariabel** oder kurz **Variabel** genannt (um darauf aufmerksam zu machen, dass dieser Wert variieren kann).

Ein (x, y) ist ein **Wertepaar** einer Funktion f, wenn $f(x) = y$ gilt. Im Deutschen Sprachraum wird manchmal auch die Notation $(x \mid y)$ verwendet. $\triangle$

Aufgabe 1.2.
Es sei die Funktion A wie aus Beispiel 2.

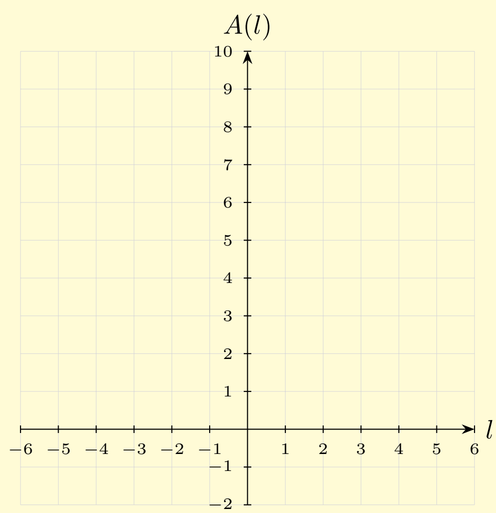
a) Was ist die Definitionsmenge? Was ist die Zielmenge?

b) Für welche Funktionsargumente ist die Funktion definiert?

c) Berechnen Sie die Flächen der Quadrate für folgende Seitenlängen:

Seitenlänge l	0 cm	1 cm	2 cm	3 cm
Fläche $A(l)$				

d) Stellen Sie die Fläche als Funktion der Seitenlänge graphisch dar:



e) Gibt es Werte aus der Zielmenge, die von der Funktion nicht angenommen werden?

1.3 Der Unterschied zwischen der Repräsentation und dem Objekt

Die Wahl des Buchstaben, mit dem das Funktionsargument bezeichnet wird, steht der Person offen, die die Funktion definiert. Ebenso darf diese Person den Namen der Funktion wählen. Im obigen Beispiel hätte man die Funktion selbst auch mit $\texttt{Fläche}(.)$ benennen können und das Argument mit $\texttt{Länge}$:

$$\begin{aligned} \texttt{Fläche}: \quad \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \texttt{Länge} &\mapsto (\texttt{Länge})^2. \end{aligned}$$

Es liegt nahe, Funktionen und deren Argumente mit einzelnen Buchstaben zu bezeichnen, um den Text übersichtlich zu gestalten. Häufige Buchstaben zur Bezeichnung von Funktionen sind f, g und h. Funktionsargumente werden häufig mit den folgenden Buchstaben beschrieben:

- t, wenn es sich um zeitliche Grössen handelt (vom Englischen *time*);
- n, wenn es sich um diskrete (zählbare) Grössen handelt (vom Englischen *number*, im Sinne einer ganzen Zahl);
- x, y, z, wenn mit einem kartesischen Koordinatensystem gearbeitet wird (um Grössen der x, y oder z -Koordinaten zu beschreiben);
- θ, wenn es sich um Winkel handelt.

Bedenken Sie, dass diese Buchstaben immer nur eine **Repräsentation** des mathematischen Objektes sind. In Beispiel 2 steht l repräsentativ für *ein Element aus der Definitionsmenge*. Die Funktion nimmt nicht den Buchstaben "l" als Argument, sondern das Element, das durch l repräsentiert wird.

In Aufgabe 1.3 haben Sie Gelegenheit, Ihr Abstraktionsvermögen zu trainieren: Entdecken Sie, welche Schreibweisen das gleiche mathematische Objekt repräsentieren?

Bemerkung 4. Häufig werden Funktionen gerne etwas kompakter beschrieben. So liesse sich die Funktion A aus Beispiel 2 auch folgendermassen umschreiben:

$$A(l) = l^2, \forall\, l \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}.$$

Dies liest sich als *"A von l ist gleich l hoch zwei für jedes l der nicht-negativen reellen Zahlen."*.

Diese Art der Definition ist allerdings **ungenau**, da die Zielmenge nicht explizit definiert ist!

In Beispiel 2 ist die Zielmenge die Menge *aller* reellen Zahlen. Aber was ist sie hier? die Menge aller reellen Zahlen? Die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen? Die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen und die Menge aller Äpfel, die Im Jahr 1913 im Thurgau produziert wurden?

Um Ungenauigkeiten zu vermeiden, müssen deshalb immer Definitionsmenge *und* Zielmenge definiert werden. In Kapitel 1.4 wird dieses Thema nochmals aufgegriffen. $\triangle$

Aufgabe 1.3.
Welche der folgenden Definitionen beschreiben die gleiche Funktion?

a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto 3\theta + 3. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto y^2. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} r : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto 3(z+1). \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} K : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 3t + 3. \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} \blacktriangle : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ v &\mapsto v^2. \end{aligned}$$

g)
$$\begin{aligned} \blacksquare : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \blacklozenge &\mapsto 3\blacklozenge + 3. \end{aligned}$$

h)
$$\begin{aligned} \nabla : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \spadesuit &\mapsto \spadesuit^2. \end{aligned}$$

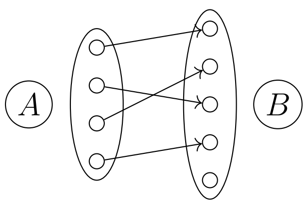
i)
$$\begin{aligned} \bigstar : \quad \mathbb{R} \quad &\to \mathbb{R} \\ \blacktriangledown\square\spadesuit &\mapsto (\blacktriangledown\square\spadesuit)^2 + 1 - 1. \end{aligned}$$

j)
$$\begin{aligned} \S : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ \blacklozenge &\mapsto 3\blacklozenge + 3. \end{aligned}$$

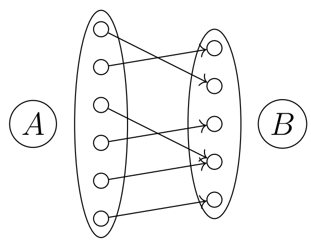
1.4 Eindeutigkeiten von Funktionen

Ihnen ist vielleicht aufgefallen, dass die Definition einer Funktion verlangt, dass sie *jedem* Element der Definitionsmenge *genau ein* Element der Zielmenge zuordnet. Es ist aber durchaus möglich, dass die Funktion mehreren Elementen der Definitionsmenge das gleiche Element aus der Zielmenge zuordnet, und einem oder mehreren Elementen der Zielmenge kein Element zuordnet.

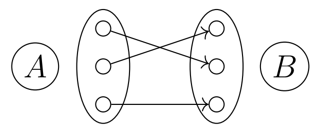
In der Mathematik wird dieses Verhalten einer Funktion mit spezifischen Begriffen bezeichnet. Man spricht von *injektiven*, *surjektiven* oder *bijektiven* Funktionen.



(a) injektiv, nicht surjektiv



(b) surjektiv, nicht injektiv



(c) bijektiv

Abbildung 1: Ikonische Darstellung von Injektivität, Surjektivität und Bijektivität

Aufgabe 1.4.

a) Betrachten Sie Abbildung 1 auf Seite 11. Was bedeutet es Ihrer Meinung nach, wenn eine Funktion *injektiv*, *surjektiv* oder *bijektiv* ist? Schreiben Sie hier eine Definition für jeden der drei Begriffe auf.

b) Gibt es Unterschiede zwischen Ihrer Definition und Definition 5 auf Seite 13?

Definition 5.

a) Eine Funktion ist **injektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge **höchstes** ein Urbild hat. Sprich, eine Funktion $f : A \to B$ ist injektiv, wenn für alle $x_1, x_2 \in A$, so dass $x_1 \neq x_2$, gilt $f(x_1) \neq f(x_2)$.

b) Eine Funktion ist **surjektiv**, wenn jedes Element der Zielmenge **mindestens** ein Urbild hat. Sprich, eine Funktion $f : A \to B$ ist **surjektiv**, wenn für jedes $y \in B$, mindestens ein $x \in A$ existiert, so dass $f(x) = y$.

c) Eine Funktion ist **bijektiv**, wenn sie **injektiv und surjektiv** ist. Mit anderen Worten: für jedes Element der Zielmenge, gibt es genau ein Urbild. Sprich, eine Funktion $f : A \to B$ ist surjektiv, wenn für jedes $y \in B$, genau ein $x \in A$ existiert, so dass $f(x) = y$.

Bemerkung 6. Anstatt *injektiv* sagt man auch **linkseindeutig**. △

Aufgabe 1.5.
Bestimmen Sie für jede der folgenden Funktionen, ob diese injektiv, surjektiv oder bijektiv ist:

a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x. \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto z^2. \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ y \quad &\mapsto y^2. \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 2t^2. \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ x \quad &\mapsto x^2. \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 4t + 2 \end{aligned}$$

1.5 Operationen mit Funktionen

Man darf Operationen wie Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division mit Funktionen durchführen, wenn die Definitionsmengen dies zulassen.

1.5.1 Addition und Subtraktion

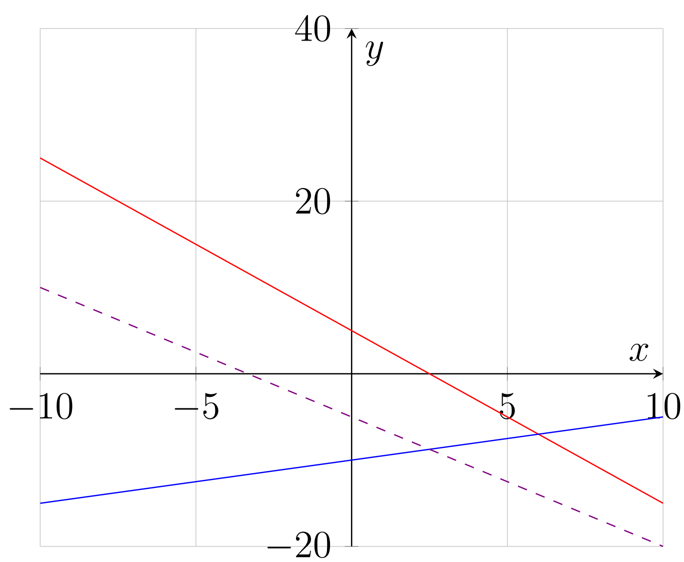
Beispiel 7. Es seien die Funktionen f und g wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -2x + 5 & y &\mapsto 0.5y - 10 \end{aligned}$$

Dann ist die Summe $f + g$ beider Funktionen wiederum eine Funktion:

$$\begin{aligned} (f+g) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (-2x+5) + (0.5x - 10) = -1.5x - 5 \end{aligned}$$

Gleich kann man mit $f - g$ und sogar $f \cdot g$ verfahren.



◊

Definition 8. Es seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, dann gilt:

Addition zweier Funktionen: $f + g$ ist wiederum eine Funktion, mit Definitionsmenge $A \cap B$ und Zielmenge $\mathbb{R}$, definiert als:

$$\begin{aligned}(f+g) : A \cap B &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) + g(x)\end{aligned}$$

Subtraktion zweier Funktionen: $f - g$ ist wiederum eine Funktion, mit Definitionsmenge $A \cap B$ und Zielmenge $\mathbb{R}$, definiert als:

$$\begin{aligned}(f-g) : A \cap B &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) - g(x)\end{aligned}$$

Bemerkung 9. $A \cap B$ ist die Schnittmenge der Menge A mit der Menge B, sie auch Seite 3. △

Aufgabe 1.6.

a) Es seien f und g wie in Beispiel 7.

   i) Welcher der Graphen aus Beispiel 7 gehört zu f, welcher zu g, welcher zu $f + g$? Schreiben Sie die Graphen an.

   ii) Definieren Sie die Funktion $f - g$ und zeichnen Sie diese in den Graphen ein.

b) Es seien v und u zwei Funktionen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}v :]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[&\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto \frac{1}{x}\end{aligned} \qquad \begin{aligned}u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}\\ y &\mapsto 1 + y\end{aligned}$$

   i) Definieren Sie die Funktion $v + u$.

   ii) Definieren Sie die Funktion $v - u$.

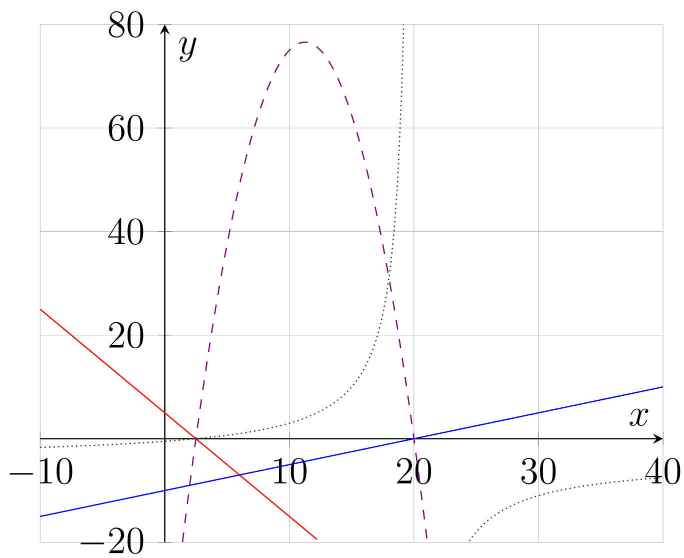
   iii) Was passiert mit dem Funktionswert von v, wenn man den Definitionsbereich auf das Intervall $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ausweiten würde?

1.5.2 Multiplikation und Division

Man darf Funktionen auch miteinander multiplizieren und sogar dividieren (allerdings mit viel Sorgfalt!).

Beispiel 10. Es seien f und g wie aus dem Beispiel 7, dann sind folgende Funktionen gut definiert:

$$(f \cdot g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \left(\frac{f}{g}\right) : \mathbb{R} \setminus \{20\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) \cdot g(x) \qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$



◊

Definition 11. Es seien $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, dann gilt:

Multiplikation zweier Funktionen: $f \cdot g$ ist wiederum eine Funktion, mit Definitionsmenge $A \cap B$ und Zielmenge $\mathbb{R}$, definiert als:

$$\begin{aligned}(f \cdot g) : A \cap B &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto f(x) \cdot g(x)\end{aligned}$$

Quotient zweier Funktionen: Es sei $\{x \in B \mid g(x) = 0\}$ die Menge aller Punkte von B, in denen g den Funktionswert Null annimmt. Dann ist $\frac{f}{g}$ wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right) : A \cap B \setminus \{x \in B \mid g(x) = 0\} &\to \mathbb{R}\\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}\end{aligned}$$

Bemerkung 12. Die Menge $\{x \in B \mid g(x) = 0\}$ entspricht allen Werten x aus der Menge B, für welche $g(x)$ gleich null ist.

Die Schreibweise mit dem Senkrechten Strich lässt sich ungefähr so lesen: $\{$*Startmenge* | *Bedingung*$\}$

Der erste Teil in der Mengenklammer, vor dem senkrechten Strich | beschreibt jeweils die Menge aller Elemente, welche in Frage kommen. In diesem Fall sind das alle x aus der Menge B. Der zweite Teil in der Mengenklammer, nach dem senkrechten Strich | beschreibt jeweils eine **Bedingung**, die erfüllt sein muss, damit x in der Menge bleiben darf.

Anbei ein Paar Beispiele:

- $\{x \in A \mid x \neq B\}$: alle Elemente aus A, welche nicht gleichzeitig ein Element in B sind. Das ist äquivalent zu der Menge $A \setminus B$
- $\{x \in A \mid x \in B\}$: alle Elemente aus A, die gleichzeitig ein Element aus B sind. Das ist äquivalent zu der Menge $A \cap B$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$: alle Elemente aus $\mathbb{R}$, die gleich Null sind. Diese Menge ist gleich der Menge $\{0\}$
- $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$: alle Elemente aus $\mathbb{R}$, welche grösser oder gleich null sind.

Falls Sie den Umgang mit dieser Notation und Mengen im allgemeinen noch etwas üben möchten, melden Sie sich bitte bei mir und ich werde weitere Übungsaufgaben und Beispiele verfassen. △

Aufgabe 1.7.
Es seien f und g wie in Beispiel 10.

a) Bestimmen Sie die Formel für die Funktion $f \cdot g$

b) Bestimmen Sie die Formel für die Funktion $\frac{f}{g}$

c) Ordnen Sie die abgebildeten Funktionsgraphen in Beispiel 10 den vier Funktionen f, g, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ zu.

d) Es seien v und u zwei Funktionen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, & \qquad u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} & y &\mapsto 1 + y \end{aligned}$$

   i) Bestimmen Sie $u \cdot v$

   ii) Bestimmen Sie $\frac{u}{v}$

   iii) Bestimmen Sie $\frac{v}{u}$

1.5.3 Verkettung

Funktionen dürfen auch miteinander *verkettet* werden.

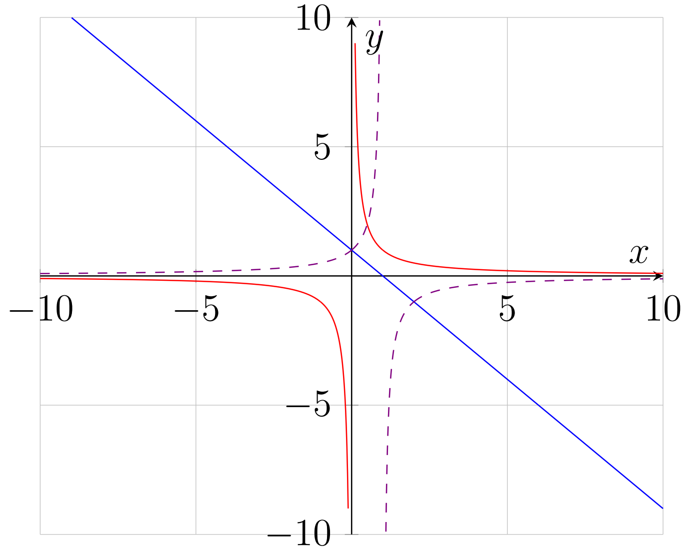
Beispiel 13. Es seien f und g zwei Funktionen definiert als:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, & \qquad g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} & y &\mapsto 1 - y \end{aligned}$$

Dann kann ich f und g folgendermassen *verketten*:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

Das heisst, der Funktionswert von f im Punkt x wird mein Funktionsargument für g. Das lässt sich noch weiter ausschreiben: $g(f(x)) = 1 - \frac{1}{x}$



◊

Definition 14. In der Mathematik spricht man von einer **Funktionsverknüpfung**, **Funktionsverkettung** oder **Komposition**, wenn mehrere Funktionen miteinander verknüpft werden, indem der Funktionswert der einen Funktion als Funktionsargument in der nächsten Funktion genutzt wird.

Wenn $f : A \to B$ und $g : B \to C$ zwei Funktionen sind, so kann man diese wie folgt verknüpfen:

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to C \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

f ist in diesem Fall die **innere Funktion**, während g als die **äussere Funktion** bezeichnet wird.

Bemerkung 15. Bei der Funktionsverkettung wie auch anderen Operationen zwischen Funktionen, muss man darauf Acht geben, dass die Definitionsmengen eingehalten werden. **Die Zielmenge der inneren Funktion muss immer**

komplett in der Definitionsmenge der äusseren Funktion enthalten sein, ansonsten riskiert man, schlecht definierte Funktionen zu erhalten.

Das kann an folgendem Beispiel verdeutlicht werden. Es seien f und g wie folgt:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\to \mathbb{R}, & \qquad g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} & y &\mapsto y + 1 \end{aligned}$$

Offensichtlich darf man die Funktion $g \circ f$ konstruieren, da die Zielmenge $\mathbb{R}$ von f komplett in der Definitionsmenge von g enthalten ist.

Allerdings muss man aufpassen, wenn man die Reihenfolge der Verkettung ändert. Die Zielmenge von g enthält die Zahl Null. **Wenn man die Definitionsmenge nicht anpasst, riskiert man, durch Null zu dividieren!** Man muss darum $\{-1\}$ aus der Definitionsmenge ausschliessen:

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x+1} \end{aligned}$$

△

Aufgabe 1.8.
Es seien f und g wie aus Beispiel 13

a) Ordnen Sie die abgebildeten Funktionsgraphen in Beispiel 13 den drei Funktionen f, g und $g \circ f$ zu.

b) Dürfen Sie die Verknüpfungsfolge ändern? Also mit $f \circ g$ anstatt $g \circ f$ arbeiten?

Aufgabe 1.9.

a) Es seien v und u zwei Funktionen wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} \setminus \{-1\} &\to \mathbb{R}, & \qquad u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x+1} & y &\mapsto 4 + 3y \end{aligned}$$

i) Ist die Funktion $u \circ v$ gut definiert? Was ist die Definitionsmenge? Was ist die Zielmenge? Was ist der Funktionswert im Punkt 5?

ii) Können Sie die Definitionsmenge so anpassen, dass die Funktion $v \circ u$ gut definiert ist?

1.6 Übungen

Aufgabe 1.10.
Welche dieser Funktionen sind gut definiert? Welche sind schlecht definiert?

i)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g : [0,2] &\to [0,1] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 4t + 10 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} \bigstar : [0,1] &\to [1,2] \\ x &\mapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} h : \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\} &\to \{0,1,2,3\} \\ \clubsuit &\mapsto 0 \\ \diamondsuit &\mapsto 1 \\ \heartsuit &\mapsto 2 \\ \spadesuit &\mapsto 3 \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} w : \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\} &\to \{0,1,2,3\} \\ \clubsuit &\mapsto 0 \\ \diamondsuit &\mapsto 1 \\ \clubsuit &\mapsto 2 \\ \spadesuit &\mapsto 3 \end{aligned}$$

vii)

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.11.
Bestimmen Sie für jede dieser Funktionen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv ist.

i)

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to [-1,4] \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x+1 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} w : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 4t+10 \end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned} \bigstar : [0,1] &\to [1,2] \\ x &\mapsto x^2+1 \end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned} h : \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\} &\to \{0,1,2,3\} \\ \clubsuit &\mapsto 0 \\ \diamondsuit &\mapsto 1 \\ \heartsuit &\mapsto 2 \\ \spadesuit &\mapsto 3 \end{aligned}$$

Aufgabe 1.12.
Die Temperatur in Grad Fahrenheit entspricht der Temperatur in Grad Celsius multipliziert mit dem Faktor 1.8 und addiert zu der Konstanten 32:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ c &\mapsto \frac{9}{5}c + 32, \end{aligned}$$

Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f, der vom absoluten Nullpunkt (-273.15°C) bis zu 100°C reicht.

Aufgabe 1.13.
Verändern Sie die Definitions- und Zielmenge der folgenden Funktionen so, dass diese bijektiv werden. Eine der Funktionen erfordert keine Veränderungen, welche?

i)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ii)

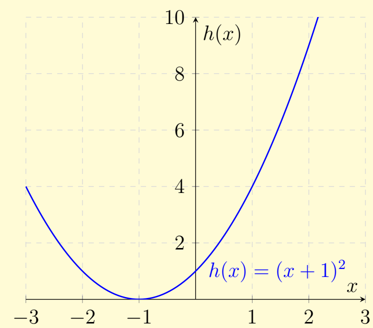
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x+1)^2 \end{aligned}$$



Aufgabe 1.14.
Definieren Sie die Funktionen $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$. Wenn möglich, definieren Sie zudem die Funktionen $f \circ g$ und $g \circ f$ mit einem adäquaten Definitionsbereich.

i)

$$\begin{aligned} f : [0,1] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : [1,2] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t+1 \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto 5x+4 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 6t+1 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} f : [0,5] &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g :]-1,10] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t+1} \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto x^2 - 1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g :]0,10] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \frac{1}{t} \end{aligned}$$

1.7 Reflexion zum Begriff der Funktion

Bitte lesen Sie die Lernziele dieses Kapitels auf Seite 4 aufmerksam durch. Gibt es Dinge, mit denen Sie sich nochmal auseinandersetzen möchten? Schreiben Sie diese jetzt hier auf. Sie dürfen mir übrigens auch e-mails schreiben, falls Sie Fragen zum Unterrichtsinhalt haben.

Möchte ich noch vertiefen

Ich würde Sie bitten, sich hier kurz zu notieren, welche Aspekte an diesem Kapitel Ihnen gefallen haben und welche Sie lieber anders erlebt hätten.

Hat mir gefallen	**Hat mir nicht gefallen**

2 Lineare Funktionen

Sie dürften mit dem Begriff der linearen Funktion bereits vertraut sein. Der Vollständigkeit wegen wird er hier noch einmal definiert.

Definition 16. Eine Funktion von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen heisst *linear*, wenn ihr Graph eine Gerade abbildet.
Eine lineare Funktion f mit Funktionsargument x entspricht der folgenden Form

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto ax + b, \end{aligned}$$

wobei a und b reelle konstanten sind.

Folgende Begriffe werden benutzt, um lineare Funktionen zu charakterisieren:

- Die **Steigung** entspricht dem Multiplikator des Funktionsarguments. Im gegebenen Fall also a. Manchmal wird a auch **Steigungskoeffizient** genannt.
- Der **Ordinatenabschnitt** (oder auch y-Achsenabschnitt), entspricht dem Wert der Funktion mit Argument null. Im gegebenen Fall ist das die Konstante b, da $f(0) = b$.

  Graphisch entspricht der Ordinatenabschnitt der Höhe, in welcher der Funktionsgraph die vertikale Achse schneidet (siehe Abbildung 2).
- Sofern die Steigung nicht gleich Null ist, weist f genau eine **Nullstelle** auf. Das ist der Punkt x_0, in dem der Funktionswert Null ist, also für welchen gilt $f(x_0) = 0$.

  Graphisch entspricht der Nullpunkt dem Schnittpunkt des Funktionsgraphen mit der horizontalen Achse (siehe Abbildung 2).

Lemma 17. *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine lineare Funktion und x_1, x_2 zwei reelle Zahlen, so dass $x_1 \neq x_2$. Dann ist die Steigung von f gegeben durch $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.*

Geometrisch entspricht dieses Ermittlungsverfahren dem Steigungsdreieck (sie-

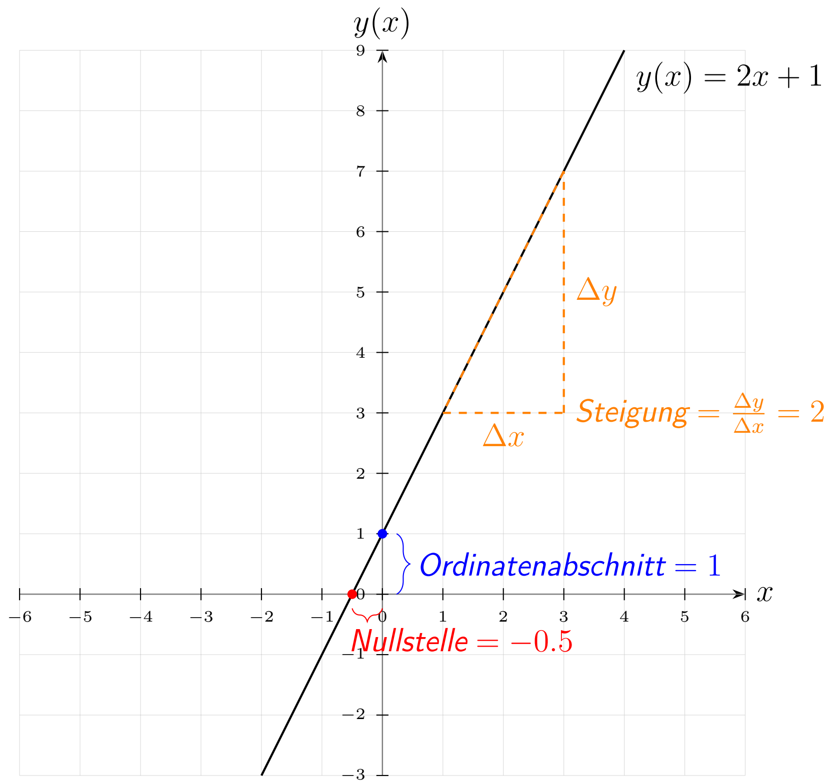


Abbildung 2: Funktionsgraph für $y(x) = 32 + 1$

he Abbildung 2, in orange eingezeichnet).

Wir können die Behauptung auch formell beweisen.

Beweis. Wenn f eine lineare Funktion ist, dann gibt es reelle Koeffizienten a und b, so dass $f(x) = ax + b$, für alle $x \in \mathbb{R}$.

Es seien x_1, x_2 zwei unterschiedliche reelle Zahlen. Dann finden wird:

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{(ax_2 + c) - (ax_1 + c)}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{ax_2 + c - ax_1 + c}{x_2 - x_1} \\
&= \frac{ax_2 - ax_1}{x_2 - x_1}
\end{aligned}$$

$$= \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$
$$= a,$$

somit ist bewiesen, dass $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ dem Steigungskoeffizienten entspricht. □

Bemerkung 18. Lemma 17 impliziert, dass die Steigung a gegeben ist durch $f(x+1) - f(x)$, für jedes beliebige $x \in \mathbb{R}$. △

Aufgabe 2.1.
Es sei f eine lineare Funktion und $(-112, 854), (-12.3, 10)$ zwei Wertepaare der Funktion. Bestimmen Sie den Ordinatenabschnitt, die Steigung und die Nullstelle der Funktion.

2.1 Lineare Funktionen graphisch darstellen

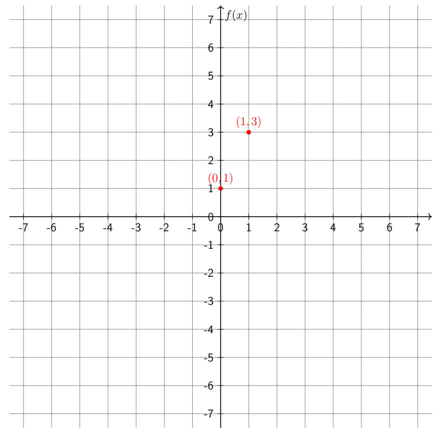
Lineare Funktionen gehören zu den Funktionen, die sich graphisch am einfachsten darstellen lassen, da sie eine gerade Linie sind.

Man braucht nur zwei Punkte einzeichnen, die auf der Geraden liegen, und dann beide Punkte mit dem Dreieck verbinden.

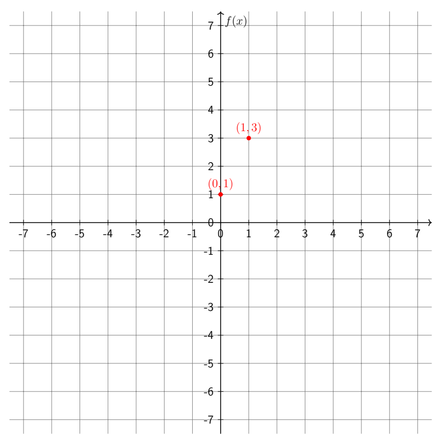
Einen Punkt, den Ordinatenabschnitt, bekommt man gratis. Den zweiten Punkt kann man ermitteln, indem man die Funktion mit einem geeigneten Argument evaluiert.

Beispiel 19. a) Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 2x + 1$ lässt sich z.B. in folgenden Schritten darstellen:

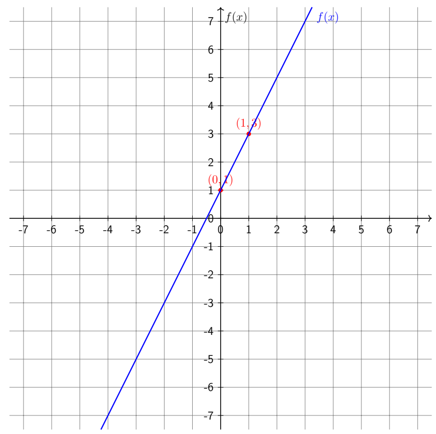
1) Der Ordinatenabschnitt ist 1, deshalb weiss ich, dass die Gerade durch den Punkt $(0, 1)$ verläuft und kann diesen im Koordinatensystem markieren:



2) Wenn ich die Funktion im Wert 1 evaluiere, erhalte ich den Funktionswert $f(1) = 2 + 1 = 3$. Somit weiss ich, dass der Punkt $(1, 3)$ ebenfalls auf der Geraden liegt. Diesen Punkt kann ich nun ebenfalls im Koordinatensystem einzeichnen



3) anschliessend lassen sich beide Punkte durch eine gerade Linie verbinden:



◊

Bemerkung 20. Manchmal sind der Steigungskoeffizient oder der Ordinatenabschnitt keine ganzen Zahlen. In einem solchen Fall ergibt obige Strategie auch keine Punkte, die auf dem Koordinatenraster liegen. Dann muss ich entweder mit dem Geodreick oder Masstab messen, oder aber, ich versuche andere Punkte zu finden, die auf der Gerade und dem Raster liegen. △

2.2 Übungen

Aufgabe 2.2.

a) Es sei f eine lineare Funktion, zu der zwei Wertepaare $(0, 5)$ und $(1, -2)$ gehören. Bestimmen Sie:

   i) die Steigung der Funktion;

   ii) den Ordinatenabschnitt der Funktion;

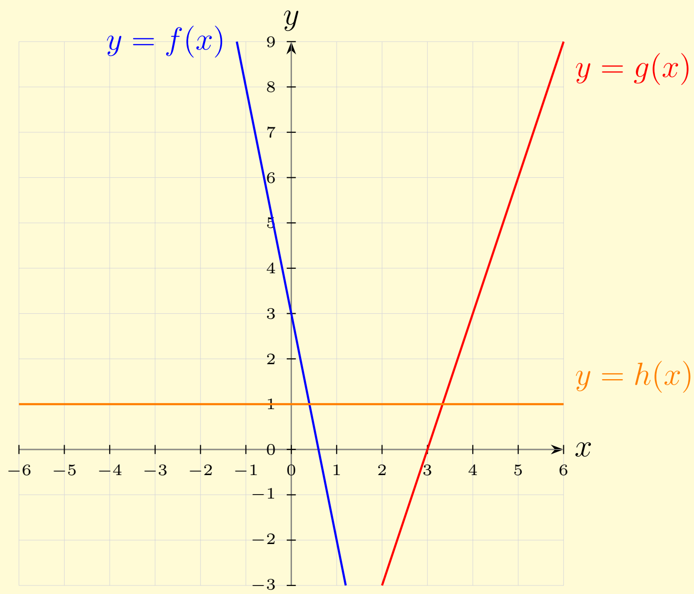
   iii) den Nullpunkt der Funktion.

   Definieren Sie die Funktion formal.

b) Es seien f, g und h drei lineare Funktionen, wie im Graphen abgebildet.

   i) Definieren Sie die Funktionen f, g und h mathematisch;

ii) Bestimmen Sie den Schnittpunkt von f und g;



c) In Aufgabe 1.12 wird erklärt, wie man Grad Celsius in Grad Fahrenheit umrechnen kann. Bestimmen Sie die inverse Funktion, also die Funktion, die Grad Fahrenheit in Grad Celsius umrechnet. Was ist der Ordinatenabschnitt, was ist die Steigung, wo ist der Nullpunkt? Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

3 Lösungen

Lösung zu Aufgabe 1.3 auf Seite 10: Es sind nur zwei unterschiedliche Funktionen abgebildet: $f, \blacktriangle, h, \nabla$ und $\bigstar$ repräsentieren alle die gleiche mathematische Funktion. $g, \blacksquare, r, K$ und $\S$ beschreiben ebenfalls die gleiche Funktion.

Lösung zu Aufgabe 1.5 auf Seite 13: Die Funktionen f, v und u sind bijektiv. Die Funktion h ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Funktionen g und w sind weder injektiv, noch surjektiv.

Lösung zu Aufgabe 1.10 auf Seite 22: Die Funktionen f, g, und w sind schlecht definiert. $f(0)$ und $g(2)$ liegen nicht in der jeweiligen Zielmenge $\mathbb{R}_+$, respektive $[0, 1]$ (siehe Seite 3 für die Definition von Mengen und Intervallen). Die Funktion w ist schlecht definiert, weil dem Funktionsargument $\clubsuit$ zwei verschiedene Werte zugewiesen werden.

Lösung zu Aufgabe 1.11 auf Seite 23:
Funktionen f, g, v, $\bigstar$ und h sind injektiv. Das kann man so beweisen:

i) Es seien x_1, x_2 Elemente von $[0, 1]$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

somit ist $f(x_1) - f(x_2)$ genau dann null, wenn einer der beiden Terme $(x_1 - x_2)$ oder $(x_1 + x_2)$ null ergibt. Da x_1 und x_2 grösser oder gleich null sind, ist der Term $(x_1 + x_2)$ nur dann null, wenn x_1 und x_2 beide null sind. Der Term $(x_1 - x_2)$ ist nur dann null, wenn x_1 gleich x_2 ist. Somit ist $f(x_1)$ gleich $f(x_2)$ nur dann, wenn x_1 gleich x_2 ist, womit bewiesen ist, dass f **injektiv** ist. f ist **nicht surjektiv**, da der Wert -1 in der Zielmenge liegt, von der Funktion aber nie angenommen werden kann (x^2 ist immer positiv, wenn x eine reelle Zahl ist).

ii) g ist **bijektiv**: Für alle reellen Zahlen x_1, x_2 gilt:

$$g(x_1) - g(x_2) = 2x_1 + 1 - (2x_2 + 1)$$

$$\begin{aligned} &= 2x_1 - 2x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Somit ist $g(x_1)$ gleich $g(x_2)$ nur dann, wenn $x_1 = x_2$ ist, womit bewiesen ist, dass g **injektiv** ist.

g ist ausserdem **surjektiv**, da für jede reelle Zahl y gilt: $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$.

iii) w ist **nicht injektiv**, da $w(-1) = 1 = w(1)$. w ist **nicht surjektiv**, da der Wert 16 in der Zielmenge liegt, deren Wurzel, 4 liegt jedoch nicht in der Definitionsmenge der Funktion.

iv) v ist **injektiv**, da für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt:

$$\begin{aligned} v(t_1) - v(t_2) &= 4t_1 + 10 - (4t_2 + 10) \\ &= 4t_1 - 4t_2 \\ &= 4(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Somit ist $v(t_1)$ nur dann gleich $v(t_2)$, wenn t_1 gleich t_2 ist. v ist **nicht surjektiv**, da Funktion v nur Werte grösser gleich 10 annimmt, jedoch auch Werte kleiner als 10 in der Zielmenge liegen.

v) ★ ist **bijektiv**: Es seien $x_1, x_2 \in [0, 1]$, dann gilt:

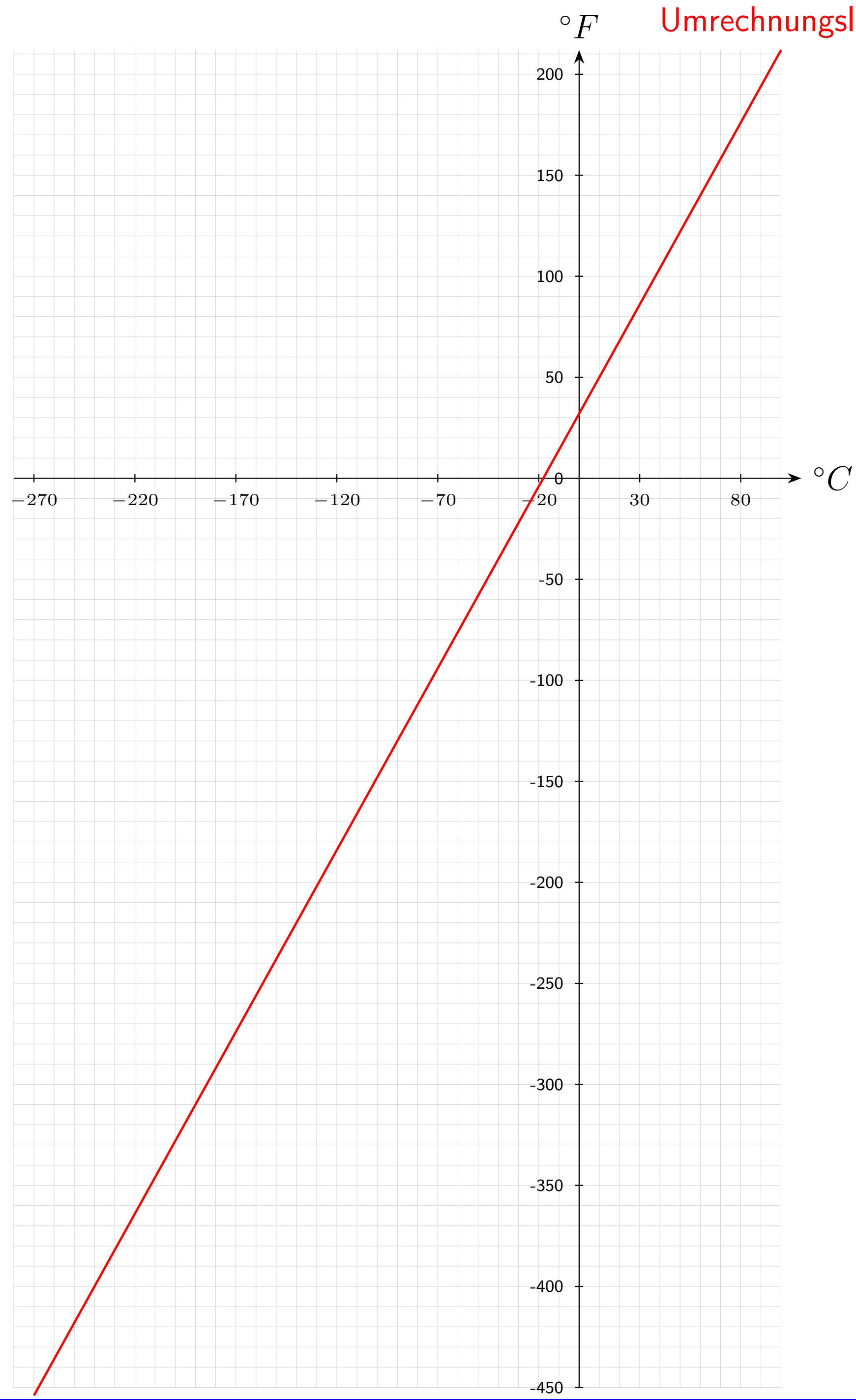
$$\begin{aligned} \bigstar(x_1) - \bigstar(x_2) &= x_1^2 + 1 - (x_2^2 + 1) \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Dieser Term ist nur dann Null, wenn x_1 gleich x_2 ist, oder wenn x_1 gleich minus x_2 ist. Da der Definitionswert der Funktion positiv ist, ist letzteres nur dann der Fall, wenn x_1 und x_2 beide gleich Null sind. Somit ist der Term nur dann null, wenn x_1 gleich x_2 ist, womit die **Injektivität** der Funktion bewiesen ist.

Die **Surjektivität** lässt sich feststellen, da die Funktion jedem y des Intervalls $[1, 2,]$ den Ursprungswert $\sqrt{y-1}$ zuweist.

vi) Die Funktion h ist **bijektiv**: alle vier Elemente der Definitionsmenge werden unterschiedlichen Elementen der Zielmenge zugewiesen und jedes der vier Elemente der Zielmenge hat ein Ursprungsbild.

Lösung zu Aufgabe 1.12 auf Seite 23:


°F
Umrechnungslinie
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
-400
-450
−270
−220
−170
−120
−70
−20
30
80
°C

Lösung zu Aufgabe 1.13 auf Seite 24:

i) Die Funktion f nimmt als Argument eine reelle Zahl und setzt dieses ins Quadrat. Somit ist der Funktionswert nie negativ. Damit die Funktion surjektiv wird, muss der Zielbereich deshalb auf die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beschränkt werden.

   Umgekehrt ist es gemeinhin bekannt, dass für jede reelle Zahl x, gilt, dass x^2 gleich $(-x)^2$ ist. Damit die Funktion injektiv wird, muss der Definitionswert deshalb entweder auf die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ oder auf die nicht-positiven Zahlen $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ beschränkt werden. Man erhält dann zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ii) Die Funktion g nimmt nur einen Wert aus dem Zielbereich an. Der Zielbereich muss deshalb auf diesen Wert beschränkt werden, damit sie surjektiv wird. Damit die Funktion injektiv wird, muss der Definitionsbereich auf beliebiges Element beschränkt werden. Eine mögliche Lösung lautet deshalb:

$$\begin{aligned} g : \{0\} &\to \{2\} \\ x &\mapsto 2 \end{aligned}$$

iii) Die Funktion v ist bereits injektiv und surjektiv.

iv) Grafisch können wir feststellen, dass wir den Definitionsbereich auf $[-1, +\infty[$ beschränken müssen, um die Injektivität zu garantieren (oder auf $]-\infty, -1]$). Wir merken ausserdem, dass wir die Zielmenge auf die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beschränken müssen, um Surjektivität zu garantieren. Mathematisch können wir das Folgendermassen beweisen:

   Beweis. Damit die Funktion injektiv ist, dürfen zwei unterschiedliche Elemente der Definitionsmenge nicht den selben Funktionswert annehmen. Es seien x_1, x_2 zwei reelle Zahlen. Dann finden wir

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(x_2) &= (x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 \\ &= ((x_1+1)+(x_2+1))((x_1+1)-(x_2+1)) \\ &= (x_1+x_2+2)(x_1-x_2) \end{aligned}$$

Dieser Term ergibt nur dann null, wenn entweder x_1 gleich x_2 ist, oder wenn $x_1 + x_2 + 2$ gleich Null ist, was genau dann der Fall ist, wenn x_2 gleich $-x_1 - 2$ ist.

Wir merken, dass gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &> -1 \\ \iff -x_1 &< 1 \\ \iff -x_1 - 2 &< -1 \end{aligned}$$

Das heisst, wenn x_1 grösser als -1 ist, ist $-x_1 - 2$ kleiner als -1. Somit wissen wir, dass wir entweder $]-\infty, -1[$, oder $]1, +\infty[$ von der Definitionsmenge ausschliessen müssen, wenn wir möchten, dass f injektiv ist. Zudem bemerken wir, dass wenn $x_1 = -1$ gilt, $x_2 = -(-1) - 2 = -1 = x_1$ gilt. Somit dürfen wir -1 in der Definitionsmenge behalten.

Das heisst, damit die Funktion injektiv ist, beschränken wir die Definitionsmenge auf $[-1, +\infty[$

Damit die Funktion surjektiv ist, müssen wir die Zielmenge auf diejenigen Werte beschränken, für die es ein Urbild gibt. Wir merken, dass $(x+1)^2$ ganz bestimmt grösser oder gleich null ist, deshalb können wir die Zielmenge bereits auf die nicht-negativen reellen Zahlen beschränken.

Jetzt beweisen wir noch, dass es für alle Zahlen in $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein Urbild in der Definitionsmenge gibt, und dann haben wir die Aufgabe gelöst: Es sei y eine reelle Zahl grösser oder gleich Null. Dann suchen wir ein x, so dass gilt $(x+1)^2 = y$. Wir können diese Gleichung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= y \\ \iff \pm(x+1) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

Da wir x auf die reellen Zahlen grösser oder gleich -1 beschränkt haben, wissen wir, dass $(x+1)$ immer positiv sein wird. Deshalb können wir fortfahren:

$$\begin{aligned} & (x+1)^2 = y \\ \iff & \pm(x+1) = \sqrt{y} \\ \iff & x+1 = \sqrt{y} \\ \iff & x = \sqrt{y}-1 \end{aligned}$$

Da $y \geqslant 0$ gilt, ist dieses $\sqrt{y}-1$ immer ein Element unserer Definitionsmenge $[-1, +\infty[$. $\square$

Lösung zu Aufgabe 1.14 auf Seite 24:

i)

$$\begin{aligned}
f+g:\{1\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2+x+1\\
f-g:\{1\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2-x-1\\
f\cdot g:\{1\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^3+x^2\\
\frac{f}{g}:\{1\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{x^2}{x+1}\\
g\circ f:\{1\} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2+1
\end{aligned}$$

$f\circ g$ lässt sich nicht definiert, da g keine Werte in der Definitionsmenge von f annimmt.

ii)

$$\begin{aligned}
f+g:\quad \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto 11x+5\\
f-g:\quad \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto -x+3\\
f\cdot g:\quad \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto (5x+4)(6x+1)\\
\frac{f}{g}:\quad \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{5x+4}{6x+1}\\
f\circ g:\quad \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto 30x^2+9\\
g\circ f:\left[-\frac{4}{5},+\infty\right[&\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto 30t^2+25
\end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned}
f+g:\quad [0,5] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2+\frac{1}{x+1}\\
f-g:\quad [0,5] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2-\frac{1}{x+1}\\
f\cdot g:\quad [0,5] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{x^2}{x+1}\\
\frac{f}{g}:\quad [0,5] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^3+x^2\\
f\circ g:\left]-\frac{4}{5},10\right] &\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto \frac{1}{t^2+2t+1}\\
g\circ f:\quad [0,\sqrt{10}] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{1}{x^2+1}
\end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned}
f+g:\quad]0,10] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2+\frac{1}{x}-1\\
f-g:\quad]0,10] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^2-\frac{1}{x}-1\\
f\cdot g:\quad]0,10] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x-\frac{1}{x}\\
\frac{f}{g}:\quad]0,10] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto x^3-x\\
f\circ g:\quad]0,10] &\to \mathbb{R}\\
t &\mapsto \frac{1}{t^2}-1\\
g\circ f:[-\sqrt{11},-1[\cup]1,\sqrt{11}] &\to \mathbb{R}\\
x &\mapsto \frac{1}{x^2-1}
\end{aligned}$$