Formatives Assessment, Funktionsbegriff

Dieses Assessment hat rein formativen Charakter. Das Resultat nimmt keinen Einfluss auf Ihre Zeugnisnote. Das Resultat dient einzig dazu, Lerninhalte zu identifizieren, die noch mehr Ihrer Aufmerksamkeit benötigen.

Hinweis

- $\mathbb{R}$ ist die Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{R}_+$ ist die Menge der positiven reellen Zahlen (grösser als null)
- $\mathbb{R}_-$ ist die Menge der negativen reellen Zahlen (kleiner als null)
- $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ist die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen (grösser gleich null)
- $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ ist die Menge der nicht-positiven reellen Zahlen (kleiner gleich null)

Aufgabe 1

Was ist eine Funktion?

Lösung:
Eine Funktion ist eine Beziehung zwischen zwei Mengen: der Definitionsmenge und der Zielmenge. Eine Funktion ordnet jedem Element der Definitionsmenge genau ein Element der Zielmenge zu.

Aufgabe 2

Es seien folgende Funktionen:

$$f : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto y + 1 \qquad h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad z \mapsto 0 \qquad \bigstar : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad t \mapsto \frac{1}{t} \qquad \square : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+, \quad \blacktriangle \mapsto \blacktriangle^2$$

Leider ist mir hier ein Fehler unterlaufen. Die Funktion $\square$ ist schlecht definiert, da der Funktionswert im Punkt 0 nicht in der Zielmenge enthalten ist.

a) Was ist der Funktionswert von $\square$ im Punkt 5?

> **Lösung:**Der Funktionswert von $\square$ im Punkt 5 lässt sich ermitteln, indem man 5 als Funktionsargument einsetzt: $\square(5) = 5^2 = 25$.

b) Was ist die Definitionsmenge der Funktion f?

> **Lösung:**Die Menge der negativen reellen Zahlen.

c) Was ist die Zielmenge der Funktion f?

> **Lösung:**Die Menge der reellen Zahlen.

d) Klassifizieren Sie jede der Funktionen als *(nicht-)injektiv*, *(nicht-)surjektiv*, *(nicht)-bijektiv*.

Funktion	injektiv ja / nein	surjektiv ja / nein	bijektiv ja / nein
f	ja	nein	nein
g	ja	ja	ja
h	nein	nein	nein
$\bigstar$	ja	ja	ja
$\square$	schlecht definiert		

Lösung:

$f:$ Die Funktion ist injektiv, da für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_-$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) &\iff x_1^2 = x_2^2 \\ &\iff x_1 = \pm x_2 \\ &\iff x_1 = x_2 \text{ (da } x_1 \text{ und } x_2 \text{ beide negativ sind)} \end{aligned}$$

Die Funktion ist nicht surjektiv, da kein Element der Definitionsmenge dem Element 0 der Zielmenge zugeordnet wird:

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0, \text{(aber } 0 \notin \mathbb{R}_-) \end{aligned}$$

Da die Funktion nicht surjektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

$g:$ Die Funktion g ist injektiv, denn es gilt für alle $y_1, y_2 \in \mathbb{R}:$

$$\begin{aligned} g(y_1) = g(y_2) &\iff y_1 + 1 = y_2 + 1 \\ &\iff y_1 = y_2. \end{aligned}$$

Die Funktion g ist ausserdem surjektiv, denn für jedes Element z der Zielmenge $\mathbb{R}$, gibt es das Element $z - 1$ der Definitionsmenge, dessen Funktionswert z ergibt:

$$g(z-1) = (z-1) + 1 = z, \forall\, z \in \mathbb{R}$$

Da die Funktion injektiv und surjektiv ist, ist sie bijektiv.

h Die Funktion h ist nicht injektiv, da zum Beispiel 1 und 2 in der Definitionsmenge liegen und beide Elemente den gleichen Funktionswert annehmen:

$$\begin{aligned} h(1) &= 0 \\ h(2) &= 0 \end{aligned}$$

Da h nicht injektiv ist, kann h nicht bijektiv sein.

h ist auch nicht surjektiv, da zum Beispiel 1 in der Zielmenge liegt, jedoch nie als Funktionswert angenommen wird.

$\bigstar$ Die Funktion $\bigstar$ ist injektiv, denn es gilt für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} \bigstar(t_1) = \bigstar(t_2) &\iff \frac{1}{t_1} = \frac{1}{t_2} \\ &\iff t_1 = t_2 \end{aligned}$$

Die Funktion $\bigstar$ ist ausserdem surjektiv, denn für jedes Element y der Zielmenge, existiert das Element $\frac{1}{y}$ der Definitionsmenge, dessen Funktionswert gleich y ist:

$$\begin{aligned} \bigstar(\frac{1}{y}) &= \frac{1}{\frac{1}{y}} \\ &= \frac{y}{y\frac{1}{y}} \text{ (Zähler und Nenner mit } y \text{ multiplizieren)} \\ &= \frac{y}{\frac{y}{y}} \\ &= \frac{y}{1} \\ &= y \end{aligned}$$

Da die Funktion injektiv und surjektiv ist, ist sie bijektiv.

$\square$ Die Funktion $\square$ ist leider schlecht definiert. Wenn $\square$ wie folgt definiert wäre:

$$\begin{aligned} \square : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ \blacktriangle &\mapsto \blacktriangle^2, \end{aligned}$$

dann wäre die Funktion nicht injektiv, denn wir finden $\square(1) = 1 = \square(-1)$. Da die Funktion nicht injektiv ist, kann sie nicht bijektiv sein.

Die Funktion wäre dann aber surjektiv, denn für jedes Element y der Zielmenge, existiert das Element $\sqrt{y}$ der Definitionsmenge, dessen Funktionswert gleich y gibt:

$$\square(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y.$$