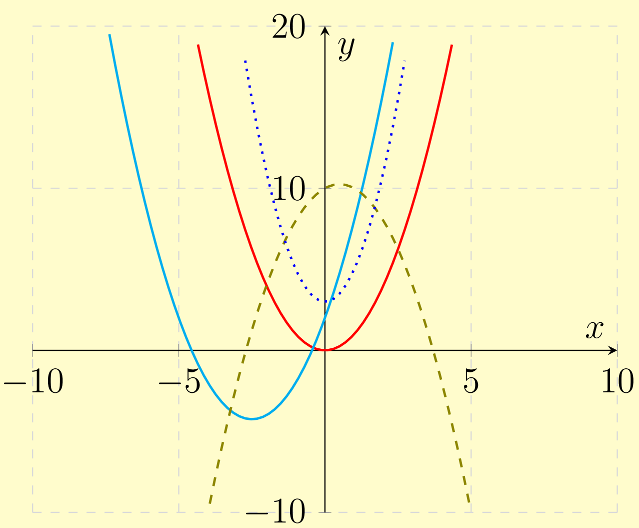
3 Quadratische Funktionen

Aufgabe 3.1.
Es seien folgende Funktionen gegeben:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} & w:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto x^2 & x&\mapsto x^2+5x+2\\ h:\mathbb{R}&\to\mathbb{R} & u:\mathbb{R}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto -x^2+x+10 & x&\mapsto 2x^2+3 \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie den Ordinatenabschnitt für jede der Funktionen (das ist der Funktionswert im Punkt Null. Das ist auch die Distanz zwischen dem Ursprung und dem Schnittpunkt vom Funktionsgraphen mit der vertikalen Achse).

b) Bestimmen Sie, welcher der Funktionsgraphen in unterer Abbildung jeweils zu f, h, w und u gehört. Begründen Sie Ihre Aussage.



c) Aufgrund des Funktionsgraphen, äussern Sie eine Vermutung zu jeder Funktion, ob diese nach oben oder unten begrenzt ist, das heisst, ob der Funktionswert zwingend kleiner, respektive grösser, als ein gewisser Wert sein muss. Können Sie ihre Vermutung mathematisch begründen? Was passiert mit dem Funktionswert, wenn das Funktionsargument gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt?

d) Welche Funktionen vermuten Sie als injektiv? Welche glauben Sie, sind surjektiv?

3.1 Allgemeine Form

Funktionen wie in Aufgabe 3.1 werden als **quadratische Funktionen** bezeichnet. Ihr Funktionsgraph ist ein ist einem "u" oder einem auf den Kopf gedrehten "u" ähnlich. Quadratische Funktionen sind dadurch erkennbar, dass sie das Funktionsargument quadrieren.

Definition 21. *Es seien A und B zwei Teilmengen der reellen Zahlen.*
*Eine Funktion $f : A \to B$ heisst **quadratische Funktion**, wenn drei reelle Konstanten $a, b, c \in \mathbb{R}$ existieren, so dass $a \neq 0$ und so dass gilt:*

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad \forall\, x \in A. \tag{1}$$

*Diese Schreibweise für quadratische Funktionen heisst **allgemeine Form**.*

Bemerkung 22. Eine Menge S ist eine **Teilmenge** der Menge M, wenn jedes Element in S auch ein Element in M ist (S *ist* "ein Teil" *aus* M. Symbolisch lässt sich das als "$S \subseteq M$" abkürzen).

Zum Beispiel ist die Menge der nicht-positiven reellen Zahlen $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ eine Teilmenge der reellen Zahlen. Eine Menge ist immer auch eine Teilmenge seiner selbst (z.B. ist $\mathbb{R}$ eine Teilmenge von $\mathbb{R}$, nämlich *"der ganze Teil"* von $\mathbb{R}$).

Das Symbol $\forall$ bedeutet ***"für alle"* oder *"für jedes"***. Gleichung 1 lässt sich also wie folgt aussprechen: *Der Funktionswert von f im Punkt x ist gleich dem Wert des Terms $ax^2 + bx + c$, und zwar für jedes Element x aus der Definitionsmenge A.* △

Beispiel 23. a) Funktion A aus Beispiel 2, welche die Seitenlänge eines Quadrates seiner Fläche zuordnet, ist eine quadratische Funktion. Hier ist nochmals ihre Definition:

$$\begin{aligned} A : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ l &\mapsto l^2. \end{aligned}$$

Die Funktion A ist quadratisch, weil Gleichung 1 für $a = 1, b = 0$ und $c = 0$ hält. Wir finden nämlich, für jedes $x \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$:

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 \\ &= ax^2 + 0 \cdot x + 0 \end{aligned}$$

b) Die Funktion v, wie folgt definiert, ist quadratisch:

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 5t^2 + 6t + 10, \end{aligned}$$

da Geichung 1 erfüllt wird mit $a = 5, b = 6$ und $c = 10$.

c) Es seien g und h reelle lineare Funktionen, wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & \qquad h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 4x + 1 & y &\mapsto -6y + 10, \end{aligned}$$

Das Produkt der Funktionen g und h ist wiederum eine Funktion, $f = g \cdot h$, die wie folgt definiert ist:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g(x) \cdot h(x). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist eine quadratische Funktion, denn es gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \cdot h(x) \\ &= (4x + 1)(-6x + 10) \\ &= 4x \cdot (-6x + 10) + 1 \cdot (-6x + 10) \\ &= -24x^2 + 40x - 6x + 10 \\ &= -24x^2 + 34x + 10, \end{aligned}$$

somit ist Gleichung 1 für $a = -24, b = 34$ und $c = 10$ erfüllt.

$\Diamond$

Aufgabe 3.2.
Es seien f, h, w und u wie aus Aufgabe 3.1. Bestimmen Sie für jede der Funktionen die Parameter a, b, c, so dass ihre Zuordnung als $ax^2 + bx + c$ geschrieben werden kann.

Aufgabe 3.3.
Greifen Sie auf das vorbereitete Geogebra Arbeitsblatt zu und verbringen Sie einige Minuten damit, ein Gefühl für die Parameter a, b und c zu erhalten.

- Welchen Parameter müssen Sie ändern, wenn Sie den Funktionsgraphen vertikal nach oben oder unten verschieben möchten?
- Welche Rolle spielt das Vorzeichen von a für die Form des Funktionsgraphen?

Bemerkung 24. Eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ausgedrückt in der allgemeinen Form wie in Gleichung 1, hat ihren Ordinatenabschnitt immer in c, denn es gilt: $f(0) = c$. (Der Ordinatenabschnitt einer Funktion ist der Funktionswert im Punkt 0.)

Das Vorzeichen des Parameters a informiert über die Öffnung der Funktion: ist dieser positiv, so ist die Funktion nach oben geöffnet, ist dieser negativ, so ist die Funktion nach unten geöffnet. Dieser Sachverhalt wird in den nächsten Unterkapiteln noch formell bewiesen. △

Aufgabe 3.4.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

1. Verändern Sie die Funktion, so dass sich der Funktionsgraph um 4 Einheiten nach oben verschiebt.
2. Verändern Sie die Funktion, so dass sich der Funktionsgraph um 2 Einheiten nach unten verschiebt.

3.2 Scheitelpunktform

Aufgabe 3.5.
Es seien folgende Funktionen gegeben:

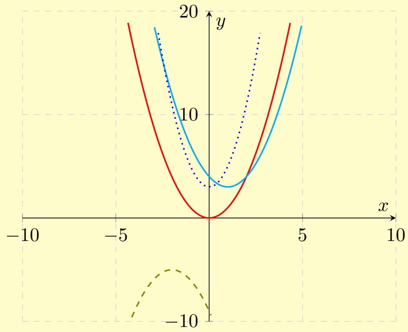
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 & x &\mapsto (x-1)^2+3 \\ h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} & u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -(x+2)^2-5 & x &\mapsto 2x^2+3 \end{aligned}$$

a) Sind das quadratische Funktionen? Weshalb? Falls ja, bestimmen Sie die allgemeine Form der Funktionen.

b) Bestimmen Sie für jede Funktion den Minimal und Maximalwert, den diese Funktion annehmen kann. Begründen Sie.

Funktion	Funktionsargument & Minimalwert	Funktionsargument & Maximalwert
$f(x) = x^2$		
$w(x) = (x-1)^2+3$		
$h(x) = -(x+2)^2-5$		
$u(x) = 2x^2+3$		

c) Bestimmen Sie, welcher der Funktionsgraphen in unterer Abbildung jeweils zu f, h und w und u gehört. Begründen Sie Ihre Aussage.



Definition 25. *Es seien A und B zwei Teilmengen der reellen Zahlen und $f : A \to B$ eine quadratische Funktion, so dass zwei reelle Konstanten d und e existieren und so dass gilt:*

$$f(x) = a(x-d)^2 + e, \quad \forall\, x \in A. \tag{2}$$

Diese Schreibweise für quadratische Funktionen heisst ***Scheitelpunktform****.*

Aufgabe 3.6.
Greifen Sie auf das vorbereitete Geogebra Arbeitsblatt zu, um ein Gefühl für die Rolle der Parameter a, d und e aus Gleichung 2 zu bekommen.

1. Vervollständigen Sie folgende Sätze:

   - Wenn ich den Funktionsgraphen vertikal nach oben verschieben möchte, ________________ den Parameter ___
   - Wenn ich den Funktionsgraphen vertikal nach unten verschieben möchte, ________________ den Parameter ___
   - Wenn ich den Funktionsgraphen horizontal nach rechts verschieben möchte, ________________ den Parameter ___
   - Wenn ich den Funktionsgraphen horizontal nach links verschieben möchte, ________________ den Parameter ___

2. Auf dem Graphen steht ein Punkt mit **Scheitelpunkt** angeschrieben. Was sind die Koordinaten dieses Punktes? Man nennt den zugehörigen Funktionswert auch **Extremwert**, können Sie sich erklären, weshalb er so genannt wird?

Wir werden im Kapitel 3.3 sehen, dass jede quadratische Funktion in der Scheitelpunktform geschrieben werden kann. Gegenüber der allgemeinen Form bietet diese Vorteil, dass der Scheitelpunkt hervorgehoben wird und einfach erkennbar ist. Sie lässt ausserdem erkennen, dass der Funktionsgraph einer quadratischen Funktion eine **Symmetrieachse** erlaubt, die durch den Scheitelpunkt verläuft. Diesen Umstand werden wir in Satz 26 noch formal beweisen.

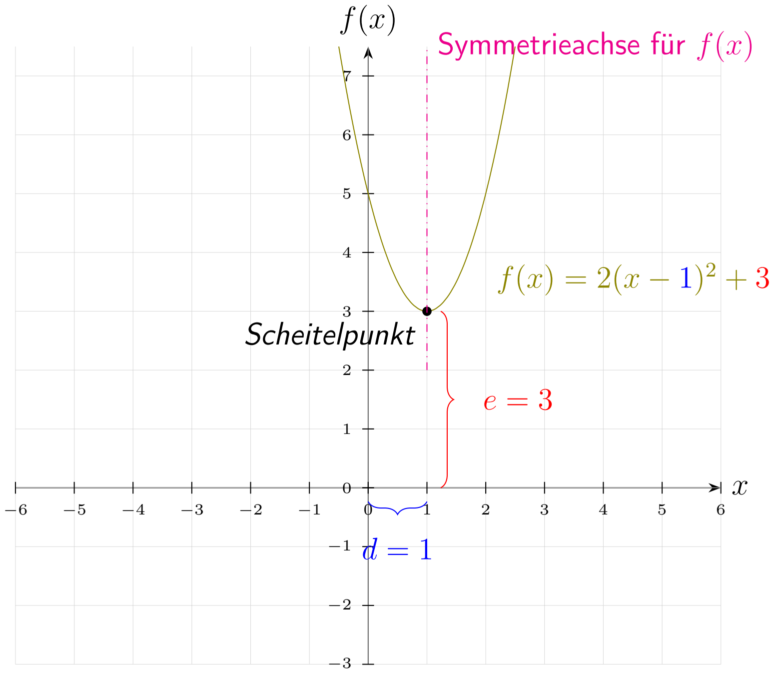


Abbildung 3: Funktionsgraph für $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ mit Scheitelpunkt $(1, 3)$.

Satz 26. *Eine quadratische Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in Scheitelpunktform mit Parametern a, d und e, so dass $f(x) = a(x-d)^2 + e$, $\forall\, x \in A$, erfüllt folgende Eigenschaften:*

1. *Wenn $a > 0$, dann erreicht die Funktion im Punkt d ihr **Minimum** und nimmt dort den Funktionswert e an.*
2. *Wenn $a < 0$, dann erreicht die Funktion im Punkt d ihr **Maximum** und nimmt dort den Funktionswert e an.*

3. *Es gilt* $f(d+x) = f(d-x)$*, für alle* $x \in \mathbb{R}$. Das bedeutet, dass der Funktionsgraph von f um die vertikale Achse, die durch den Punkt d verläuft, symmetrisch ist. Man nennt diese Achse auch **Symmetrieachse**.

Beweis. **Aussage 1:** Da wir mit den reellen Zahlen arbeiten, ist der Term $(x-d)^2$ für jedes $x \neq d$ positiv, also grösser als Null Wir wissen deshalb, dass der Term $a(x-d)^2$ grösser als Null sein muss, wenn $a > 0$ und $x \neq d$ gilt. Deshalb finden wir, dass gilt:

$$f(x) = a(x-d)^2 + e > e.$$

Entsprechend wissen wir, dass der Funktionswert von f für jedes $x \neq d$ strikt grösser als e sein muss, dass also $f(x) > e, \ \forall x \neq d$ gilt. Wir finden ausserdem, dass der Funktionswert von f im Punkt d genau e ist, denn es gilt:

$$f(d) = a(d-d)^2 + e = a \cdot 0^2 + e = e. \tag{3}$$

Wir schlussfolgern dass $f(x) \geqslant e$, für jedes $x \in \mathbb{R}$, womit Aussage 1 beweisen ist.

Aussage 2: Für den Fall dass a negativ ist, dreht sich das Vorzeichen in den obigen Gleichungen um. Wir wissen dann, dass der Funktionswert von f für $x \neq d$ strikt kleiner als e ist. Wir sehen, dass Gleichung 3 auch für negative a gültig ist und können deshalb schlussfolgern, dass wenn a negativ ist, $f(x) \leqslant e, \forall x \in \mathbb{R}$ gilt, womit Aussage 2 beweisen ist.

Aussage 3: Wir sehen, dass gilt:

$$\begin{aligned} f(d+x) &= a((d+x)-d)^2 + e \\ &= a(x)^2 + e \\ &= a(-x)^2 + e \\ &= a(-x+d-d) + e \\ &= a((d-x)-d) + e \\ &= f(d-x), \end{aligned}$$

womit Aussage 3 bewiesen ist. □

3.3 Quadratische Ergänzung

Es ist zwar einfach, von der Scheitelpunktform auf die allgemeine Form zu schliessen, es ist jedoch etwas schwieriger, den umgekehrten Weg zu gehen. Also von der allgemeinen Form ausgehend, die Scheitelpunktform zu finden.

Das erreicht man mit der Methode der **quadratischen Ergänzung**: die Idee, ist, dass man den Term $ax^2 + bx + c$ "zum Quadrat ergänzt", um danach einen Term der Form $a(x - d)^2 + e$ zu erhalten. Das Ziel hierbei ist es, alle von x abhängigen Terme in einem Term zusammenzufassen, der ins Quadrat gesetzt wird.

Beispiel 27. Anbei einige Beispiele zur quadratischen Ergänzung.

a) Der Term $x^2 + 2x + 1$ ist bereits ein perfektes Quadrat, denn es gilt:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2.$$

b) Der Term $x^2 + 2x + 2$ ist kein perfektes Quadrat, aber er lässt sich zum Quadrat ergänzen:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x + 2 &= (x^2 + 2x + 1) + 1 \\ &= (x + 1)^2 + 1. \end{aligned}$$

c) Der Term $x^2 + 6x + 10$ ist kein perfektes Quadrat, man kann es jedoch vervollständigen:

$$\begin{aligned} x^2 + 6x + 10 &= (x^2 + 6x + 9) + 1 \\ &= (x + 3)^2 + 1. \end{aligned}$$

d) Der Term $2x^2 + 4x + 2$ schaut komplizierter aus, als er tatsächlich ist. Man kann ihn nämlich ziemlich geschickt faktorisieren:

$$\begin{aligned} 2x^2 + 4x + 2 &= 2(x^2 + 2x + 1) \\ &= 2(x + 1)^2. \end{aligned}$$

$\Diamond$

Bemerkung 28. Es gibt Muster, die sich in der Quadratischen Ergänzung immer wiederholen. Damit man diese erkennt, hilft es, wenn man die binomischen Formeln kennt. Die wichtigsten zwei sind hier nochmals kurz aufgelistet:

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= x^2+2xy+y^2 \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.\\ (x-y)^2 &= x^2-2xy+y^2 \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}.\end{aligned}$$

△

Beispiel 29. Wenn es kein offensichtliches Muster gibt, kann man algorithmisch vorgehen. Als Beispiel nehmen wir den Term $5x^2 - x + 12$.

1. Als erstes klammert man die von x abhängigen Terme aus:

   $$5x^2 - x + 12 = (5x^2 - x) + 12.$$

2. Als nächstes klammert man den Faktor für x^2 aus (in diesem Fall 5) und passt den Faktor für x entsprechend an, so dass die Gleichung stimmt:

   $$\begin{aligned}(5x^2 - x) + 12 &= (5x^2 - \frac{5}{5}x) + 12\\ &= 5(x^2 - \frac{1}{5}x) + 12.\end{aligned}$$

3. Wenn man jetzt den Faktor $\bigstar$ vor dem x hat, kann man diesen als $2\frac{\bigstar}{2}$ schreiben, (in unserem Fall ist $\bigstar = \frac{1}{5}$).

   $$5(x^2 - \frac{1}{5}x) + 12 = 5(x^2 - 2\frac{1}{10}x) + 12.$$

   Jetzt weiss man, dass der quadratische Term die Form $\left(x - \frac{1}{10}\right)^2$ annehmen wird.

4. Jetzt ergänzt man den Term in der Klammer zum Quadrat:

   $$5(x^2 - 2\frac{1}{10}x) + 12 = 5\left(x^2 - 2\frac{1}{10}x + \left(\frac{1}{10}\right)^2 - \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) + 12.$$

5. Als letztes klammert man den negativen ergänzten Faktor aus:

$$\begin{aligned}5\left(x^2 - 2\frac{1}{10}x + \left(\frac{1}{10}\right)^2 - \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) + 12 &= 5\left(x^2 - 2\frac{1}{10}x + \left(\frac{1}{10}\right)^2\right) - 5\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 12\\ &= 5\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 - \frac{1}{20} + 12\\ &= 5\left(x - \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{239}{240}.\end{aligned}$$

Somit finden wir $5x^2 - x + 12 = 5\big(x - \frac{1}{10}\big)^2 + \frac{239}{240}$.

◊

Aufgabe 3.7.
Ergänzen Sie folgende Terme zum Quadrat.

a) $x^2 - 2x + 1$

b) $3x^2 + 4x + 9$

c) $x^2 + 5x + 1$

d) $\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{4}$

e) $-4x^2 - 3x + 1$

f) $-\frac{1}{2}x^2 - 10x + 100$

Theorem 30. *Es seien A und B zwei Teilmengen von $\mathbb{R}$. Es sei $f : A \to B$ eine quadratische Funktion in der allgemeinen Form mit Parametern a, b, c und $a \neq 0$, so dass gilt: $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in A$. Dann lässt sich f in Scheitelpunktform mit Parametern a, d, e schreiben, wobei $d = -\frac{b}{2a}$ und $e = c - \frac{b^2}{4a}$.*

Beweis. Wir beweisen das Theorem, indem wir "das Quadrat ergänzen". Es sei $x \in A$, dann gilt:

$$\begin{aligned}f(x) &= ax^2 + bx + c\\ &= ax^2 + \frac{2a}{2a}bx + c\\ &= ax^2 + 2a\frac{b}{2a}x + c\\ &= ax^2 + 2a\frac{b}{2a}x + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 + c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\\ &= \left(ax^2 + 2a\frac{b}{2a}x + a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \left(c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + \left(c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - a\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) \\
&= a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right).
\end{aligned}
$$

Man erkennt, dass Gleichung 2 auf Seite 38 für Parameter $d = -\frac{b}{2a}$ und $e = c - \frac{b^2}{4a}$ hält. □

3.4 Zur Eindeutigkeit von quadratischen Funktionen

Lemma 31. *Quadratische Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{R}$ und Zielmenge $\mathbb{R}$ sind weder injektiv noch surjektiv. Die vertikale Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft bildet im Funktionsgraphen von quadratischen Funktionen zudem eine* ***Symmetrie-Achse****.*

Beweis. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion f mit Parameter a, d und e wie in Gleichung 2. Dann folgt aus Punkt 3 in Satz 26, dass f nicht injektiv ist, denn es gilt $f(d + x) = f(d - x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Aus Punkt 1 und 2 von Satz 26 folgt, dass f nicht surjektiv sein kann. Angenommen a ist positiv, dann gilt $f(x) \geqslant e$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Das heisst, die Zahlen kleiner als e werden von der Funktion nie als Funktionswert angenommen und deshalb ist f nicht surjektiv. Wenn a negativ ist, dann sind alle Funktionswerte von f kleiner oder gleich e, und die Werte grösser als e werden nie als Funktionswerte angenommen. □

Lemma 32. *Alle quadratischen Funktionen besitzen einen Extremwert.*

Beweis. Aus Satz 26 folgt, dass jede quadratische Funktion in Scheitelpunktform mit Parameter a, d, e in Punkt d ihren Maximalwert (wenn a negativ) oder ihren Minimalwert (wenn a positiv) einnimmt. Das heisst, jede quadratische Funktion in Scheitelpunktform nimmt einen Extremwert an.

Aus Satz 30 folgt, dass jede quadratische Funktion in Scheitelpunktform geschrieben werden kann.

Somit ist klar, dass jede quadratische Funktion einen Extremwert besitzt. □

3.5 Übungen

Aufgabe 3.8.
Bestimmen Sie für folgende Funktionen, ob diese quadratisch sind. Falls ja, geben Sie die Parameter a, b, c für die allgemeine Form an.

a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -3x^2 - 10x - 0.5 + x - 2x^2 + x^2 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 + 5x - 10 + 4x - x^2 + 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} u : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto t^2 + 5t - 10 + 4t - t^3 + 0 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto (y-1)(y+4) + 3 \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x+2)(x-5)(x+10) + 1 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ q &\mapsto f(q) + g(q) \end{aligned}$$

Aufgabe 3.9.
Bestimmen Sie die Scheitelpunktform folgender quadratischer Funktionen, indem Sie quadratisch ergänzen:

a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - 40x + 20 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto 5y^2 - \frac{1}{2}y + 40 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto -3z^2 - \frac{3}{5}z + 10 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ r &\mapsto -10r^2 - 20r + 10 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.10.
Welche der folgenden Funktionen haben Nullstellen?

a)
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (x-3)(x+10) \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ y &\mapsto 4(y-3)^2 + 10 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ z &\mapsto -(z-3)^2 - 10 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto (t+1)(t-1) \end{aligned}$$

e)
$$\begin{aligned} w : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ s &\mapsto -(s-6)^2 + 10 \end{aligned}$$

f)
$$\begin{aligned} p : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ i &\mapsto (i+1)^2 - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 3.11.
Zeichnen Sie den Funktionsgraphen von f und g. Bestimmen Sie den Ordinatenabschnitt und den Scheitelpunkt.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto (x+1)^2 - 3 \qquad\qquad t \mapsto -t^2 + 2t - 3$$

Aufgabe 3.12.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a(x-d)^2 + e,\ \forall x \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion in Scheitelpunktform. Vervollständigen Sie folgende Sätze und beweisen Sie die Aussagen:

a) Wenn das Vorzeichen von a positiv ist, hat die Funktion als Extremwert ein ______________ und es gilt $f(x)$ ___ $e,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Andernfalls, wenn das Vorzeichen von a negativ ist, hat die Funktion als Extremwert ein ______________ und es gilt $f(x)$ ___ $e,\ \forall x \in \mathbb{R}$.
Hinweis: die Wörter und Symbole, die in die Lücke gefüllt werden müssen, sind "Maximum", "Minimum" *und "$\geqslant$", "$\leqslant$".*

b) Wenn e gleich Null ist, hat f genau _____ Nullstelle(n).

c) Wenn e ungleich Null ist und sich das Vorzeichen von a und e unterscheidet, hat f genau _____ Nullstelle(n).

d) Wenn e ungleich Null ist und a und e das gleiche Vorzeichen haben, hat f genau _____ Nullstelle(n).

Aufgabe 3.13.
In dieser Aufgabe erhalten Sie jeweils die Koordinaten des Scheitelpunkts und eines weiteren Punktes, der auf dem Funktionsgraphen einer quadratischen Funktion liegt. Bestimmen Sie jeweils die Zuordnungsvorschrift der entsprechenden Funktion.

a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Funktionsgraphen durch den Punkt

$(5, 12)$ verläuft und deren Scheitelpunkt in $(2, 3)$ liegt.

b) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Funktionsgraphen durch den Punkt $(0, 1)$ verläuft und deren Scheitelpunkt in $(1, 9)$ liegt.

Aufgabe 3.14.
Bestimmen Sie für folgende quadratische Funktionen den Scheitelpunkt und den Ordinatenabschnitt. Eventuell müssen Sie die Zuordnungsvorschriften quadratisch ergänzen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = (x-1)^2 + 2, \ \forall x \in \mathbb{R}$

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = (x+1)^2 + 3, \ \forall x \in \mathbb{R}$

c) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, h(t) = (t-3)^2 + 4, \ \forall t \in \mathbb{R}$

d) $i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, i(y) = y^2 - 8y + 7, \ \forall y \in \mathbb{R}$

e) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, j(l) = l^2 + 2l + 3, \ \forall l \in \mathbb{R}$

f) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, k(m) = m^2 - m + 6, \ \forall l \in \mathbb{R}$

Aufgabe 3.15.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion mit Extremwert -2 und Nullstellen für die Funktionsargumente -1 und 3 (d.h. $f(-1) = f(3) = 0$). Bestimmen Sie die Parameter der Scheitelpunktform für f.

Aufgabe 3.16.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = a(x-d)^2 + e, \ \forall x \in \mathbb{R}$ eine quadratische Funktion in Scheitelpunktform. Vervollständigen Sie folgenden Satz und beweisen Sie die Aussage.
Der Funktionsgraph von f ist symmetrisch um die vertikale Achse, die durch den Punkt _____ verläuft. Anders ausgedrückt, für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f(\_\_\_\_\_) = f(\_\_\_\_\_)$.

4 Lösungen

4.1 Zu Kapitel 1

Lösung zu Aufgabe 1.3 auf Seite 10: Es sind nur zwei unterschiedliche Funktionen abgebildet: $f, \blacktriangle, h, \nabla$ und $\bigstar$ repräsentieren alle die gleiche mathematische Funktion. $g, \blacksquare, r, K$ und $\S$ beschreiben ebenfalls die gleiche Funktion.

Lösung zu Aufgabe 1.5 auf Seite 13: Die Funktionen f, v und u sind bijektiv. Die Funktion h ist injektiv, aber nicht surjektiv. Die Funktionen g und w sind weder injektiv, noch surjektiv.

Lösung zu Aufgabe 1.6 auf Seite 15: Wir haben

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto -2x + 5 \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad y \mapsto 0.5y - 10 \qquad (f+g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto -1.5x - 5$$

a) i) Es gibt mehrere Strategien, die Funktionsgraphen der Funktionen zu identifizieren:

Variante 1: Wir berechnen den Ordinatenabschnitt jeder Funktion: $f(0) = 5$, $g(0) = -10$, $(f+g)(0) = -5$. Das heisst, wir finden $g(0) < (f+g)(0) < f(0)$. Entsprechend müssen wir, wenn wir unten im Graphen, an der Position $(0, -20)$ anfangen und den Graphen vertikal an der y-Achse entlang hoch laufen, zuerst g antreffen, dann $(f+g)$ und zum Schluss f. Da wir als erstes die blaue Gerade antreffen, wissen wir, dass diese g sein muss. Als nächstes treffen wir die gestrichelte Gerade an, diese muss also $(f+g)$ entsprechen. Als letztes finden wir die rote Gerade, welche f entsprechen muss.

Variante 2: Wir observieren, dass der Funktionswert von f und $f+g$ abnimmt, wenn das Funktionsargument grösser wird, da die Koeffizienten vor dem x jeweils negativ sind (für f ist der Koeffizient -2, für $f+g$ ist der Koeffizient -1.5). g hat als einzige Funktion einen positiven Koeffizienten vor dem Funktionsargument, deshalb muss die einzige Gerade die steigt (die blaue Gerade), dem Funktionsgraphen von g entsprechen.
Wir bemerken, dass die durchgezogene Gerade steiler nach unten abfällt als die gestrichelte Gerade. Das heisst, der Steigungskoeffizient der durchgezogenen Geraden muss kleiner sein, als der Steigungskoeffizient der gestrichelten Geraden. Da der Steigungskoeffizient von f gleich -2 ist und da -2 kleiner als -1.5 ist, wissen wir, dass f

die rote Gerade f entspricht. (Alternativ kann man hier auch mit dem Ordinatenabschnitt arbeiten: f hat als einzige Funktion einen positiven Ordinatenabschnitt, daraus folgt, dass die rote Gerade f entspricht.

ii) wir finden:

$$(f-g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x) - g(x) = -2x + 5 - (0.5x - 10) = -2.5x + 15$$

b)

$$v :]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad y \mapsto 1 + y$$

i) Die Funktion $v + u$ ist für die Definitionsmenge $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$ gut definiert und wir finden

$$(v+u) :]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto v(x) + u(x) = \frac{1}{x} + 1 + x$$

ii) Die Funktion $v - u$ ist für die Definitionsmenge $]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$ gut definiert und wir finden

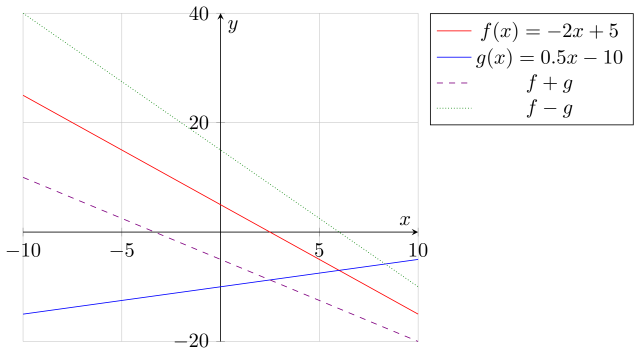
$$(v-u) :]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto v(x) - v(x) = \frac{1}{x} - (1 + x) = \frac{1}{x} - x - 1$$

iii) Der Term $\frac{1}{x}$ explodiert, wenn x nahe gegen unendlich strebt: wenn x eine positive Zahl, nahe an Null ist, dann ist $\frac{1}{x}$ sehr gross. Wenn x eine negative Zahl, nahe an Null ist, dann ist $\frac{1}{x}$ eine sehr grosse negative Zahl.

Wir können das veranschaulichen: Für positive x kleiner als eins gibt es eine natürliche Zahl N_x, so dass $\frac{1}{N_x+1} \leqslant x < \frac{1}{N_x}$ gilt (Das lässt sich mit dem Zahlenstrahl verdeutlichen).

dann finden wir $\frac{1}{x} > \frac{1}{\frac{1}{N_x}} = N_x$. Je näher x an Null liegt, desto grösser muss das N_x sein, damit $\frac{1}{N_x+1} \leqslant x < \frac{1}{N_x}$ noch gilt. Und da der Term $\frac{1}{x}$ immer grösser als N_x ist, wird der Term $\frac{1}{x}$ grösser, je näher x an Null liegt.

Für negative x funktioniert die Argumentation ebenfalls, für diese gilt dann aber dass $-\frac{1}{N_x+1} \geqslant x > -\frac{1}{N_x}$ und $\frac{1}{x} < \frac{1}{-\frac{1}{N_x}} = -N_x$.



Lösung zu Aufgabe 1.7 auf Seite 18:

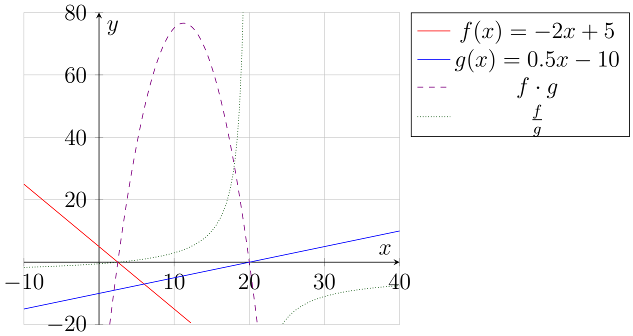
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}, & g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -2x + 5 & y &\mapsto 0.5y - 10 \end{aligned}$$

a)

$$\begin{aligned} (f \cdot g) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x) &= (-2x + 5) \cdot (0.5x - 10) \\ &= -2x(0.5x - 10) + 5(0.5x - 10) \\ &= -x^2 + 22.5x - 50 \end{aligned}$$

b) Der Funktionswert von g ist Null genau dann, wenn das Funktionsargument gleich 20 ist: $g(20) = 0.5 \cdot 20 - 10 = 0$. Entsprechend passen wir die Definitionsmenge an:

$$\begin{aligned} (\frac{f}{g}) : \mathbb{R} \setminus \{20\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-2x + 5}{0.5x - 10} \end{aligned}$$

c) 

d)

$$v : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \qquad u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{1}{x} \qquad y \mapsto 1 + y$$

i)

$$(u \cdot v) : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto u(x) \cdot v(x) = (1 + x) \cdot (\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} + 1$$

ii) Der Funktionswert von v beträgt nie Null, deshalb finden wir:

$$\frac{u}{v} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{1 + x}{\frac{1}{x}} = x^2 + x$$

iii) Der Funktionswert von u beträgt Null im Punkt -1. Somit finden wir:

$$\frac{v}{u} : \mathbb{R} \setminus \{0, -1\} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \frac{v(x)}{u(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1 + x} = \frac{1}{x^2 + x}$$

Lösung zu Aufgabe 1.10 auf Seite 22: Die Funktionen f, g, und w sind schlecht definiert. $f(0)$ und $g(2)$ liegen nicht in der jeweiligen Zielmenge $\mathbb{R}_+$, respektive $[0,1]$ (siehe Seite 3 für die Definition von Mengen und Intervallen). Die Funktion w ist schlecht definiert, weil dem Funktionsargument ♣ zwei verschiedene Werte zugewiesen werden.

Lösung zu Aufgabe 1.11 auf Seite 23:
Funktionen f, g, v, ★ und h sind injektiv. Das kann man so beweisen:

i) Es seien x_1, x_2 Elemente von $[0,1]$, dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

somit ist $f(x_1) - f(x_2)$ genau dann null, wenn einer der beiden Terme $(x_1 - x_2)$ oder $(x_1 + x_2)$ null ergibt. Da x_1 und x_2 grösser oder gleich null sind, ist der Term $(x_1 + x_2)$ nur dann null, wenn x_1 und x_2 beide null sind. Der Term $(x_1 - x_2)$ ist nur dann null, wenn x_1 gleich x_2 ist. Somit ist $f(x_1)$ gleich $f(x_2)$ nur dann, wenn x_1 gleich x_2 ist, womit bewiesen ist, dass f **injektiv** ist. f ist **nicht surjektiv**, da der Wert -1 in der Zielmenge liegt, von der Funktion aber nie angenommen werden kann (x^2 ist immer positiv, wenn x eine reelle Zahl ist).

ii) g ist **bijektiv**: Für alle reellen Zahlen x_1, x_2 gilt:

$$\begin{aligned} g(x_1) - g(x_2) &= 2x_1 + 1 - (2x_2 + 1) \\ &= 2x_1 - 2x_2 \\ &= 2(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Somit ist $g(x_1)$ gleich $g(x_2)$ nur dann, wenn $x_1 = x_2$ ist, womit bewiesen ist, dass g **injektiv** ist.

g ist ausserdem **surjektiv**, da für jede reelle Zahl y gilt: $f\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$.

iii) w ist **nicht injektiv**, da $w(-1) = 1 = w(1)$. w ist **nicht surjektiv**, da der Wert 16 in der Zielmenge liegt, deren Wurzel, 4 liegt jedoch nicht in der Definitionsmenge der Funktion.

iv) v ist **injektiv**, da für alle $t_1, t_2 \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ gilt:

$$\begin{aligned} v(t_1) - v(t_2) &= 4t_1 + 10 - (4t_2 + 10) \\ &= 4t_1 - 4t_2 \\ &= 4(t_1 - t_2) \end{aligned}$$

Somit ist $v(t_1)$ nur dann gleich $v(t_2)$, wenn t_1 gleich t_2 ist. v ist **nicht surjektiv**, da Funktion v nur Werte grösser gleich 10 annimmt, jedoch auch Werte kleiner als 10 in der Zielmenge liegen.

v) ★ ist **bijektiv**: Es seien $x_1, x_2 \in [0, 1]$, dann gilt:

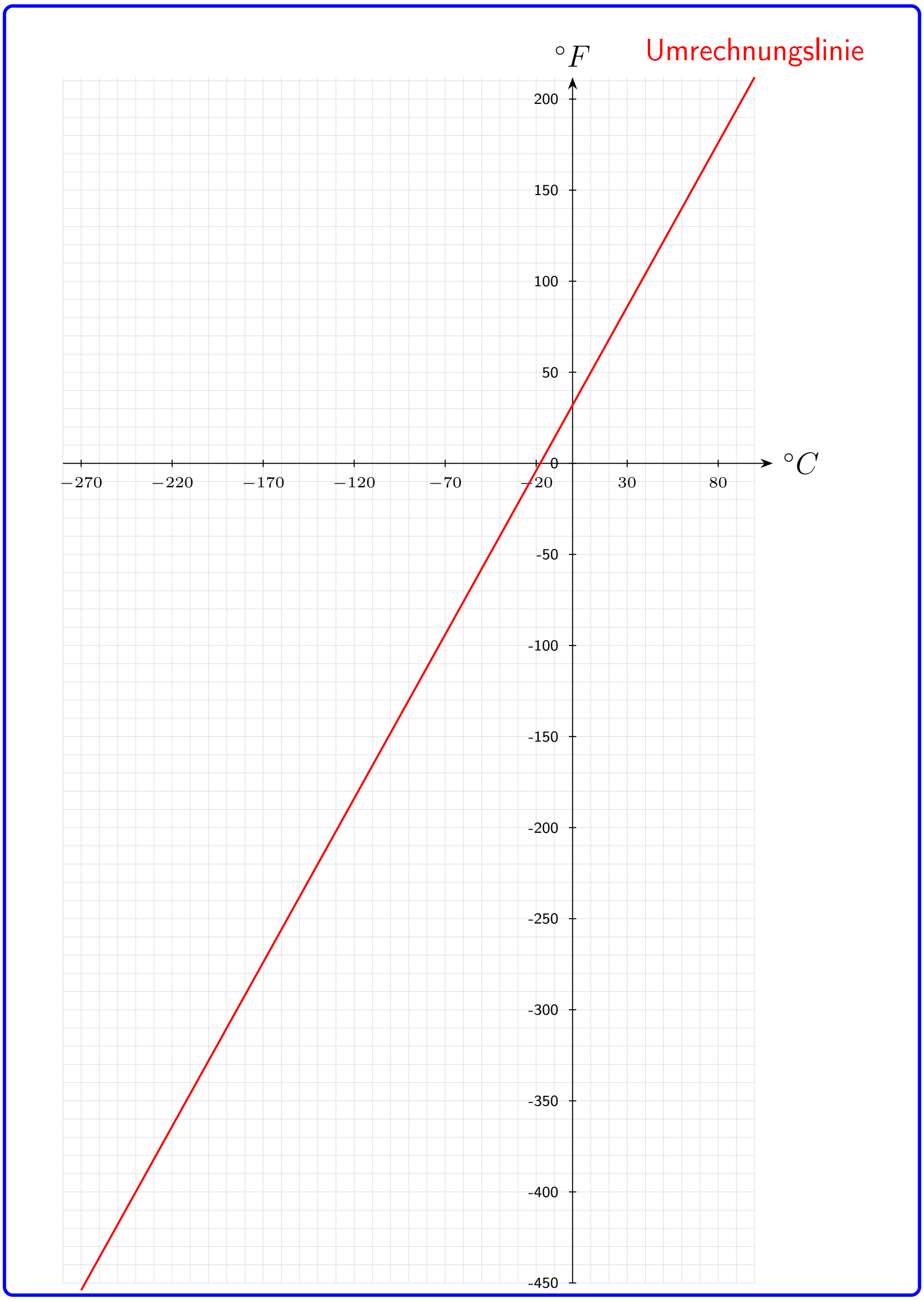
$$\begin{aligned} \bigstar(x_1) - \bigstar(x_2) &= x_1^2 + 1 - (x_2^2 + 1) \\ &= x_1^2 - x_2^2 \\ &= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) \end{aligned}$$

Dieser Term ist nur dann Null, wenn x_1 gleich x_2 ist, oder wenn x_1 gleich minus x_2 ist. Da der Definitionswert der Funktion positiv ist, ist letzteres nur dann der Fall, wenn x_1 und x_2 beide gleich Null sind. Somit ist der Term nur dann null, wenn x_1 gleich x_2 ist, womit die **Injektivität** der Funktion bewiesen ist.

Die **Surjektivität** lässt sich feststellen, da die Funktion jedem y des Intervalls $[1, 2,]$ den Ursprungswert $\sqrt{y-1}$ zuweist.

vi) Die Funktion h ist **bijektiv**: alle vier Elemente der Definitionsmenge werden unterschiedlichen Elementen der Zielmenge zugewiesen und jedes der vier Elemente der Zielmenge hat ein Ursprungsbild.

Lösung zu Aufgabe 1.12 auf Seite 23:


°F
Umrechnungslinie
200
150
100
50
0
-50
-100
-150
-200
-250
-300
-350
-400
-450
°C
−270
−220
−170
−120
−70
−20
30
80

Lösung zu Aufgabe 1.13 auf Seite 24:

i) Die Funktion f nimmt als Argument eine reelle Zahl und setzt dieses ins Quadrat. Somit ist der Funktionswert nie negativ. Damit die Funktion surjektiv wird, muss der Zielbereich deshalb auf die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beschränkt werden.

Umgekehrt ist es gemeinhin bekannt, dass für jede reelle Zahl x, gilt, dass x^2 gleich $(-x)^2$ ist. Damit die Funktion injektiv wird, muss der Definitionswert deshalb entweder auf die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ oder auf die nicht-positiven Zahlen $\mathbb{R}_{\leqslant 0}$ beschränkt werden. Man erhält dann zum Beispiel:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} &\to \mathbb{R}_{\geqslant 0} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

ii) Die Funktion g nimmt nur einen Wert aus dem Zielbereich an. Der Zielbereich muss deshalb auf diesen Wert beschränkt werden, damit sie surjektiv wird. Damit die Funktion injektiv wird, muss der Definitionsbereich auf beliebiges Element beschränkt werden. Eine mögliche Lösung lautet deshalb:

$$\begin{aligned} g : \{0\} &\to \{2\} \\ x &\mapsto 2 \end{aligned}$$

iii) Die Funktion v ist bereits injektiv und surjektiv.

iv) Grafisch können wir feststellen, dass wir den Definitionsbereich auf $[-1, +\infty[$ beschränken müssen, um die Injektivität zu garantieren (oder auf $]-\infty, -1]$). Wir merken ausserdem, dass wir die Zielmenge auf die nicht-negativen Zahlen $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ beschränken müssen, um Surjektivität zu garantieren. Mathematisch können wir das Folgendermassen beweisen:

Beweis. Damit die Funktion injektiv ist, dürfen zwei unterschiedliche Elemente der Definitionsmenge nicht den selben Funktionswert annehmen. Es seien x_1, x_2 zwei reelle Zahlen. Dann finden wir

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(x_2) &= (x_1+1)^2 - (x_2+1)^2 \\ &= ((x_1+1) + (x_2+1))((x_1+1) - (x_2+1)) \\ &= (x_1 + x_2 + 2)(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

Dieser Term ergibt nur dann null, wenn entweder x_1 gleich x_2 ist, oder wenn $x_1 + x_2 + 2$ gleich Null ist, was genau dann der Fall ist, wenn x_2 gleich $-x_1 - 2$ ist.

Wir merken, dass gilt:

$$\begin{aligned} x_1 &> -1 \\ \iff -x_1 &< 1 \\ \iff -x_1 - 2 &< -1 \end{aligned}$$

Das heisst, wenn x_1 grösser als -1 ist, ist $-x_1 - 2$ kleiner als -1. Somit wissen wir, dass wir entweder $]-\infty, -1[$, oder $]1, +\infty[$ von der Definitionsmenge ausschliessen müssen, wenn wir möchten, dass f injektiv ist. Zudem bemerken wir, dass wenn $x_1 = -1$ gilt, $x_2 = -(-1) - 2 = -1 = x_1$ gilt. Somit dürfen wir -1 in der Definitionsmenge behalten.

Das heisst, damit die Funktion injektiv ist, beschränken wir die Definitionsmenge auf $[-1, +\infty[$

Damit die Funktion surjektiv ist, müssen wir die Zielmenge auf diejenigen Werte beschränken, für die es ein Urbild gibt. Wir merken, dass $(x+1)^2$ ganz bestimmt grösser oder gleich null ist, deshalb können wir die Zielmenge bereits auf die nicht-negativen reellen Zahlen beschränken.

Jetzt beweisen wir noch, dass es für alle Zahlen in $\mathbb{R}_{\geqslant 0}$ ein Urbild in der Definitionsmenge gibt, und dann haben wir die Aufgabe gelöst: Es sei y eine reelle Zahl grösser oder gleich Null. Dann suchen wir ein x, so dass gilt $(x+1)^2 = y$. Wir können diese Gleichung nach x auflösen:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= y \\ \iff \pm(x+1) &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

Da wir x auf die reellen Zahlen grösser oder gleich -1 beschränkt haben, wissen wir, dass $(x+1)$ immer positiv sein wird. Deshalb können wir fortfahren:

$$\begin{aligned} (x+1)^2 &= y \\ \iff \pm(x+1) &= \sqrt{y} \\ \iff \quad x+1 &= \sqrt{y} \\ \iff \quad x &= \sqrt{y}-1 \end{aligned}$$

Da $y \geqslant 0$ gilt, ist dieses $\sqrt{y}-1$ immer ein Element unserer Definitionsmenge $[-1, +\infty[$. $\square$

Lösung zu Aufgabe 1.14 auf Seite 24:

i)

$$\begin{aligned} f+g:\{1\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto x^2+x+1\\ f-g:\{1\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto x^2-x-1\\ f\cdot g:\{1\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto x^3+x^2\\ \frac{f}{g}:\{1\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto \frac{x^2}{x+1}\\ g\circ f:\{1\}&\to\mathbb{R}\\ x&\mapsto x^2+1 \end{aligned}$$

$f\circ g$ lässt sich nicht definiert, da g keine Werte in der Definitionsmenge von f annimmt.

ii)

$$\begin{aligned} f+g:\quad &\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto 11x+5\\ f-g:\quad &\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto -x+3\\ f\cdot g:\quad &\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto (5x+4)(6x+1)\\ \frac{f}{g}:\quad &\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto \frac{5x+4}{6x+1}\\ f\circ g:\quad &\mathbb{R}_{\geqslant 0}\to\mathbb{R}\\ &x\mapsto 30x^2+9\\ g\circ f:\quad &\left[-\frac{4}{5},+\infty\right[\to\mathbb{R}\\ &t\mapsto 30t^2+25 \end{aligned}$$

iii)

$$\begin{aligned} f+g:\quad &[0,5] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x^2+\frac{1}{x+1}\\ f-g:\quad &[0,5] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x^2-\frac{1}{x+1}\\ f\cdot g:\quad &[0,5] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto \frac{x^2}{x+1}\\ \frac{f}{g}:\quad &[0,5] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x^3+x^2\\ f\circ g:\ &]-\frac{4}{5},10] &&\to\mathbb{R}\\ &t &&\mapsto \frac{1}{t^2+2t+1}\\ g\circ f:\quad &[0,\sqrt{10}] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto \frac{1}{x^2+1} \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} f+g:\quad &]0,10] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x^2+\frac{1}{x}-1\\ f-g:\quad &]0,10] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x^2-\frac{1}{x}-1\\ f\cdot g:\quad &]0,10] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x-\frac{1}{x}\\ \frac{f}{g}:\quad &]0,10] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto x^3-x\\ f\circ g:\quad &]0,10] &&\to\mathbb{R}\\ &t &&\mapsto \frac{1}{t^2}-1\\ g\circ f:\ &[-\sqrt{11},-1[\cup]1,\sqrt{11}] &&\to\mathbb{R}\\ &x &&\mapsto \frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

4.2 Zu Kapitel 3

Lösung zu Aufgabe 3.1 auf Seite 33:

a) Wir bestimmen den Ordinatenabschnitt. Das bedeuted, wir müssen den Funktionswert im Punkt Null berechnen. Für die Funktion f wir haben:

$$f(0) = 0^2 = 0.$$

Somit ist der Ordinatenabschnit für die Funktion f gleich Null. Wir machen das Gleiche für die andere Funktionen:

$$h(0) = -0^2 + 0 + 10 = 10.$$

$$w(0) = 0^2 + 5 \cdot 0 + 2 = 2.$$

$$u(0) = 2 \cdot 0^2 + 2 = 3.$$

b) Wir wissen aus Aufgabe a), dass $f(0) < w(0) < u(0) < h(0)$ gilt. Wenn wir der vertikalen Achse entlang nach hochgehen, finden wir also zuerst f, dann w, dann u und danach h. Daraus ergibt folgendes:

- der Graph der Funktion f ist in rot;
- der Graph der Funktion w ist in hellblau;
- der Graph der Funktion u ist in blau gepunktet;
- der Graph der Funktion h ist in olive gestrichelt;

c)
- Aufgrund des Funktionsgraphen können wir vermuten, dass die Funktion f keine negativen Werte annimmt. Wir können ausserdem vermuten, dass das Funktionsargument gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt, strebt der Funktionswert gegen $+\infty$.
- Die Funktion w scheint zwar negative Werte anzunehmen, allerdings keine die kleiner sind als -5 (ungefähr). Nach

oben scheint die Funktion nicht begrenzt zu sein: wenn das Funktionsargument gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt, strebt der Funktionswert gegen $+\infty$.

- Die Funktion u erreicht ein Minimum in 3. Wenn das Funktionsargument gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt, strebt der Funktionswert gegen $+\infty$.
- Die Funktion h scheint keine Werte anzunehmen, die grösser als (ungefähr) 11 sind. Die Funktion scheint nach unten unbegrenzt, wenn das Funktionsargument gegen $+\infty$ oder gegen $-\infty$ strebt, strebt der Funktionswert gegen $-\infty$.

d) Die Funktionen sind offensichtlich nicht injektiv: wenn wir eine horizontale Linie, parallel zur x-Achse irgendwo zwischen Höhe 10 und Höhe 3 einzeichnen, dann schneidet diese Gerade jeden Funktionsgraphen in zwei Punkten. Somit gibt es je mindestens zwei Funktionsargumente, die zum gleichen Funktionswert führen.

Aus dem Punkt c) können wir vermuten, dass die Funktionen nicht surjektiv sind: sie scheinen alle entweder einen Maximal- oder einen Minimalwert zu haben.

Lösung zu Aufgabe 3.2 auf Seite 36:

- Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, wir haben $a = 1$ und $b = c = 0$.
- Für die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(x) = -x^2 + x + 10$, wir haben $a = -1$, $b = 1$ und $c = 10$.
- Für die Funktion $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $w(x) = x^2 + 5x + 2$, wir haben $a = 1$, $b = 5$ und $c = 2$.
- Für die Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $u(x) = 2x^2 + 3$, wir haben $a = 2$, $b = 0$ und $c = 3$.

Lösung zu Aufgabe 3.3 auf Seite 36: Wir müssen den Parameter c vergrössern, um den Funktionsgraphen vertikal nach oben zu verschieben und ihn verkleinern, um den Funktionsgraphen vertikal nach unten zu verschieben.
Das Vorzeichnen von a entscheidet, ob sich der Graph nach oben (wenn $a > 0$) oder unten (wenn $a < 0$) öffnet.

Lösung zu Aufgabe 3.4 auf Seite 36:

1. Wenn wir den Funktionsgraphen um 4 Einheiten nach oben verschieben wollen, müssen wir den Parameter c um vier Einheiten vergrössern. Es sei $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die verschobene Funktion, dann ist ihre Zuordnung definiert als $f'(x) = -x^2 + 2x + 5$

2. Wenn wir den Funktionsgraphen um 2 Einheiten nach unten verschieben wollen, müssen wir den Parameter c um zwei Einheiten verkleiner. Es sei $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die verschobene Funktion, dann ist ihre Zuordnung definiert als $f'(x) = -x^2 + 2x - 1$

Lösung zu Aufgabe 3.5 auf Seite 37:

a) Alle Funktionen sind quadratische Funktionen. Wir schreiben für jede ihre allgemeine Form:

   - Die allgemeine Form der Funktion f ist $f(x) = x^2$. Die Parameter lauten $a = 1$ und $b = c = 0$.

1. Die allgemeine Form der Funktion h ist $h(x) = -x^2 - 4x - 9$. Die Parameter lauten $a = 1$, $b = -4$ und $c = -9$.

2. Die allgemeine Form der Funktion w ist $w(x) = x^2 - 2x + 4$. Die Parameter lauten $a = 1$, $b = -2$ und $c = 4$.

3. Die allgemeine Form der Funktion u ist $u(x) = 2x^2 + 3$. Die Parameter lauten $a = 2$, $b = 0$ und $c = 3$.

b)

Funktion	Funktionsargument & Minimalwert	Funktionsargument & Maximalwert
$f(x) = x^2$	$(0, 0)$	$(\pm\infty, +\infty)$
$w(x) = (x-1)^2 + 3$	$(1, 3)$	$(\pm\infty, +\infty)$
$h(x) = -(x+2)^2 - 5$	$(\pm\infty, -\infty)$	$(-2, -5)$
$u(x) = 2x^2 + 3$	$(0, 3)$	$(\pm\infty, +\infty)$

c)
- Der Graph der Funktion f ist in rot.
- Der Graph der Funktion h ist in olive gestrichelt.
- Der Graph der Funktion w ist in blau.
- Der Graph der Funktion u ist in blau gepunktet.

Lösung zu Aufgabe 3.6 auf Seite 38:

1.
   - *vergrössere ich, e*
   - *verkleinere ich e*
   - *vergrössere ich, d*
   - *verkleinere ich d*
2. Die Koordinaten des Scheitelpunktes sind immer $(d, f(d) = e)$. Man nennt den zugehörigen Funktionswert **Extremwert**, weil die zugehörige Funktion ausserhalb von d immer grösser (wenn $a > 0$) oder immer kleiner (wenn $a < 0$) als e ist.

Lösung zu Aufgabe 3.7 auf Seite 43:

a) Wir ergänzen den Term $x^2 - 2x + 1$ zum Quadrat. Wir sehen dass:

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1 = (x-1)^2.$$

b) Für den Term $3x^2 + 4x + 9$ haben wir:

$$\begin{aligned} 3x^2 + 4x + 9 &= 3x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (3 \cdot x) + 9 \\ &= 3x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot (3 \cdot x) + 3 \cdot \frac{4}{9} - 3 \cdot \frac{4}{9} + 9 \\ &= 3\left(x^2 + 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot x + \frac{4}{9}\right) - \frac{4}{3} + 9 \\ &= 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{23}{9}. \end{aligned}$$

c) Für den Term $x^2 + 5x + 1$ haben wir:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 1 &= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + 1 \\ &= x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2} \cdot x + \frac{25}{4} - \frac{25}{4} + 1 \\ &= \left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{21}{5}. \end{aligned}$$

d) Für den Term $\frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{4}$ haben wir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x^2 - 4x + \frac{1}{4} &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2} \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 16 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16\right) - 8 + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}(x - 4)^2 - \frac{31}{4}. \end{aligned}$$

e) Für den Term $-4x^2 - 3x + 1$ haben wir:

$$\begin{aligned}
-4x^2 - 3x + 1 &= -4x^2 + 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot (-4x) + 1 \\
&= -4x^2 + 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot (-4x) - 4 \cdot \frac{9}{64} + 4 \cdot \frac{9}{64} + 1 \\
&= -4\left(x^2 + 2 \cdot \frac{3}{8} \cdot x + \frac{9}{64}\right) + \frac{9}{16} + 1 \\
&= -4\left(x + \frac{3}{8}\right)^2 + \frac{23}{9}.
\end{aligned}$$

f) Für den Term $-\frac{1}{2}x^2 - 10x + 100$ haben wir:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}x^2 - 10x + 100 &= -\frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) + 100 \\
&= -\frac{1}{2}x^2 + 2 \cdot 10 \cdot \left(-\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2} \cdot 100 + \frac{1}{2} \cdot 100 + 100 \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2 + 2 \cdot 10 \cdot x + 100\right) + 150 \\
&= -\frac{1}{2}(x + 10)^2 + 150.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 3.8 auf Seite 45:

a) Ja, die Funktion f ist quadratisch. Wir haben:

$$\begin{aligned}
f(x) &= -3x^2 - 10x - 0.5 + x - 2x^2 + x^2 \\
&= (-3x^2 - 2x^2 + x^2) + (-10x + x) - 0.5 \\
&= -4x^2 - 9x - 0.5;
\end{aligned}$$

d.h. $a = -4$, $b = -9$ und $c = 0.5$.

b) Nein, die Funktion g ist nicht quadratisch. Wir haben:

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^2 + 5x - 10 + 4x - x^2 + 0 \\
&= (x^2 - x^2) + (5x + 4x) + (-10 + 0) \\
&= 9x - 10.
\end{aligned}$$

c) Nein, die Funktion u ist nicht quadratisch. Wir haben:

$$\begin{aligned} u(t) &= t^2 + 5t - 10 + 4t - t^3 + 0 \\ &= -t^3 + t^2 + (5t + 4t) + (-10 + 0) \\ &= -t^3 + t^2 + 9t - 10. \end{aligned}$$

d) Ja, die Funktion w ist quadratisch. Wir haben:

$$\begin{aligned} w(y) &= (y-1)(y+4) + 3 \\ &= y^2 - y + 4y - 4 + 3 \\ &= y^2 + 3y - 1; \end{aligned}$$

d.h. $a = 1$, $b = 3$ und $c = -1$.

e) Nein, die Funktion w ist nicht quadratisch. Wir haben:

$$\begin{aligned} w(x) &= (x+2)(x-5)(x+10) + 1 \\ &= (x^2 + 2x - 5x - 10)(x + 10) + 1 \\ &= (x^2 - 3x - 10)(x + 10) + 1 \\ &= x^3 - 3x^2 - 10x + 10x^2 - 30x - 100 + 1 \\ &= x^3 + 7x^2 - 40x - 99. \end{aligned}$$

f) Ja, die Funktion v ist quadratisch. Wir haben:

$$\begin{aligned} v(q) &= f(q) + g(q) \\ &= (-4q^2 - 9q - 0.5) + (9q - 10) \\ &= -4q^2 + (-9q + 9q) + (-0.5 - 10) \\ &= -4q^2 - 10.5; \end{aligned}$$

d.h. $a = -4$, $b = 0$ und $c = -10.5$.

Lösung zu Aufgabe 3.9 auf Seite 46:

a) Wir finden

$$x^2 - 40x + 20 = (x - 20)^2 - 380$$

Die Scheitelpunktform von f wird folglich mit $d = 20$ und $e = -380$ erreicht.

b)

$$\begin{aligned}5y^2 - \frac{1}{2}y + 40 &= 5y^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{1}{20}y + 40\\ &= 5y^2 - 2\cdot 5\cdot \frac{1}{20}y + 5\cdot\frac{1}{400} - 5\cdot\frac{1}{400} + 40\\ &= 5\left(y^2 - 2\cdot\frac{1}{20}y + \frac{1}{400}\right) - \frac{1}{80} + 40\\ &= 5\left(y - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{3199}{80}.\end{aligned}$$

Wir finden $g(y) = 5\left(y - \frac{1}{20}\right)^2 + \frac{3199}{80}$

c)

$$\begin{aligned}-3z^2 - \frac{3}{5}z + 10 &= -3z^2 + 2\cdot(-3)\cdot\frac{1}{10}z + 10\\ &= -3z^2 + 2\cdot(-3)\cdot\frac{1}{10}z + (-3)\cdot\frac{1}{100} + 3\cdot\frac{1}{100} + 10\\ &= -3\left(z^2 + 2\cdot\frac{1}{10}z + \frac{1}{100}\right) + \frac{1003}{100}\\ &= -3\left(z + \frac{1}{10}\right)^2 + \frac{1003}{100}.\end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform von h wird durch $d = -\frac{1}{10}$ und $e = \frac{1003}{100}$ erreicht.

d) Wir haben $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(r) = -10r^2 - 20r + 10$. Wir gehen wie oben und wie im Beweis des Theorems 31 vor:

$$\begin{aligned}-10r^2 - 20r + 10 &= -10(r^2 + 2r - 1)\\ &= -10(r^2 + 2r + 1 - 1 - 1)\\ &= -10\left[(r+1)^2 - 2\right]\\ &= -10(r+1)^2 + 20.\end{aligned}$$

Die Scheitelpunktform von v wird mit $d = -1$ und $e = 20$ erreicht.

Lösung zu Aufgabe 3.10 auf Seite 46:

a) Damit ein Produkt $a \cdot b$ Null ergibt, muss entweder $a = 0$, oder $b = 0$, oder $a = b = 0$ gelten.

Wir haben $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)(x+10)$. Wir sehen, dass der erste Term $(x-3)$ genau dann Null ergibt, wenn $x = 3$. Der zweite Term ergibt genau dann Null, wenn $x = -10)$ Die Funktion f hat also zwei Nullstellen: 3 und -10.

b) Wir haben $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = 4(y-3)^2 + 10$. Da der Term $4(y-3)^2$ immer nicht-negativ ist und der Term 10 positiv ist, kann g niemals nicht-positiv sein. Die Funktion g hat deshalb keine Nullstellen.

c) Wir haben $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(z) = -(-z-3)^2 - 10$.

Ähnlich wie b): Da der Term $-(z-3)^2$ für jedes z kleiner oder gleich null ist, und da der Term -10 strikt kleiner als Null ist, kann h niemals grösser oder gleich Null sein.

d) Wir haben $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $v(t) = (t+1)(t-1)$. Wir sehen dass $(t+1)$ für $t = -1$ Null ergibt und $(t-1)$ für $t = 1$ Null ergibt. Die Funktion v hat deshalb zwei Nullstellen: 1 und -1.

e) Wir haben $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Die Funktion w ist Null, wenn gilt $-(s-6)^2 + 10 = 0$. Wir können umformen:

$$\begin{aligned}
& -(s-6)^2 + 10 = 0 \\
\iff \quad & -(s-6)^2 = -10 \\
\iff \quad & (s-6)^2 = 10 \\
\iff \quad & (s-6) = \pm\sqrt{10} \\
\iff \quad & s = \pm\sqrt{10} + 6
\end{aligned}$$

Der Funktionswert ist deshalb in den Argumenten $s_1 = \sqrt{10} + 6$ und $s_2 = -\sqrt{10} + 6$ null.

f) Wir haben $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(q) = (q+1)^2 - 1$. Wir können sehen, dass $p(0) = 0 = p(-2)$. Die Funktion p hat also Nullstellen in 0 und -2.

Lösung zu Aufgabe 3.12 auf Seite 47:

a) Wenn das Vorzeichen von a positiv ist, hat die Funktion als Extremwert ein Minimum und es gilt $f(x) \geqslant e,\ \forall x \in \mathbb{R}$. Andernfalls, wenn das Vorzeichen von a negativ ist, hat die Funktion als Extremwert ein Maximum und es gilt $f(x) \leqslant e,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Wenn e gleich Null ist, hat f genau eine Nullstelle.

c) Wenn e ungleich Null ist und sich das Vorzeichen von a und e unterscheidet, hat f genau zwei Nullstelle(n).

d) Wenn e ungleich Null ist und a und e das gleiche Vorzeichen haben, hat f keine Nullstelle.

Lösung zu Aufgabe 3.13 auf Seite 47:

a) Der Scheitelpunkt der Funktion f ist $(2, 3)$. Das bedeutet, dass die Scheitelpunktform $f(x) = a(x-2)^2 + 3$, für ein $a \in \mathbb{R}$ lautet. Wir müssen nur a bestimmen. Für das nutzen wir die Tatsache dass $f(5) = 12$. Wir finden:

$$f(5) = a(5-2)^2 + 3 = 9a + 3$$

daraus folgt:

$$9a + 3 = 12$$

Und somit muss $a = 1$ gelten. Die Zuordnungsvorschrift für f lautet also: $f(x) = (x-2)^2 + 3$.

b) Der Scheitelpunkt der Funktion g ist $(1, 9)$. Das bedeutet, dass die Scheitelpunktform $g(x) = a(x-1)^2 + 9$ lautet, für ein $a \in \mathbb{R}$. Wir müssen nur a bestimmen. Wir finden:

$$g(0) = a(0-1)^2 + 9 = a + 9$$

darauf folgt:

$$a + 9 = 1 \Rightarrow a = -8$$

Somit finden wir $g(x) = -8(x-1)^2 + 9$.

Lösung zu Aufgabe 3.14 auf Seite 48:

a) Scheitelpunkt für f: $(1, 2)$ Ordinatenabschnitt: $f(0) = 3$

b) Scheitelpunkt für g: $(-1, 3)$, Ordinatenabschnitt: $g(0) = 4$

c) Scheitelpunkt für h: $(3, 4)$ Ordinatenabschnitt: $h = 0 = 13$

d) Scheitelpunkt für i: $(-4, 23)$, Ordinatenabschnitt: $i(0) = 39$

e) Scheitelpunkt j: $(-1, 2)$, Ordinatenabschnitt: $j(0) = 3$.

f) Scheitelpunkt k: $(\frac{1}{2}, \frac{23}{4})$, Ordinatenabschnitt: $k(0) = 6$

Lösung zu Aufgabe 3.15 auf Seite 48: Da die Symmetrieachse durch den Scheitelpunkt verläuft und beide Nullstellen die gleiche Distanz zur Symmetrieachse haben müssen, wissen wir, dass der Scheitelpunkt die x-Koordinate $x = 1$ hat. Da der Extremwert -2 als bereits gegeben ist, wissen wir somit, dass der Scheitelpunkt an der Stelle $(1, -2)$ ist. Das heisst, die Zuordnungsvorschrift für f lautet $f(x) = a(x-1)^2 - 2$, und wir müssen noch das a finden. Wir können eine der Nullstellen einsetzen und finden: $f(-1) = a(-2)^2 - 2 = 4a - 2$. Wir wissen also, dass $4a - 2 = 0$ gelten muss und finden deshalb, $a = 0.5$. Somit muss $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$.