GUIDA COMPLETA: CINEMATICA DIFFERENZIALE E DINAMICA DEI ROBOT

INDICE

1. Cinematica Differenziale - Teoria
2. Equazioni di Chiusura
3. Statica dei Manipolatori
4. Dinamica dei Robot
5. Esempi Generici
6. Esempio Completo RRP
7. Formule di Riepilogo

---

1. CINEMATICA DIFFERENZIALE - TEORIA

1.1 Atto di Moto di un Rigido sul Piano

Definizione

L'atto di moto descrive lo stato cinematico istantaneo di un corpo rigido, caratterizzato da:

- Velocità lineare di un punto di riferimento
- Velocità angolare del corpo

Legge Fondamentale della Cinematica

```
V_B = V_A + ω × (B - A)
```

Dove:

- V_B, V_A: velocità dei punti B e A
- ω: velocità angolare del corpo rigido
- $(B - A)$: vettore posizione relativo

Centro di Velocità (CIR - Centro Istantaneo di Rotazione)

Definizione: Punto C del piano che ha velocità nulla all'istante considerato

Proprietà:

- $V_C = 0$
- Tutti i punti del rigido ruotano istantaneamente attorno a C
- Determinazione grafica: intersezione delle normali ai vettori velocità di due punti

Caso particolare: Moto traslatorio → CIR all'infinito ($\omega = 0$)

1.2 Legge di Composizione delle Velocità

Velocità Lineari (moto relativo)

```
V_assoluta = V_trascinamento + V_relativa
V_P(a) = V_P(t) + V_P(r)
```

Velocità Angolari

```
ω_assoluta = ω_trascinamento + ω_relativa
```

Nota: Le velocità angolari si sommano vettorialmente

1.3 Accelerazione di un Punto di un Rigido

Formula Generale

```
a_B = a_A + α × (B - A) + ω × (ω × (B - A))
```

Dove:

- a_A: accelerazione del punto A
- α: accelerazione angolare
- $\omega \times (\omega \times (B - A))$: accelerazione centripeta

Componenti

- **Accelerazione tangenziale:** $a_t = \alpha \times r$ (dovuta ad α)
- **Accelerazione normale:** $a_n = \omega^2 \times r$ (dovuta a ω)

1.4 Teorema di Rivals

Enunciato: In un corpo rigido, le accelerazioni di due punti qualsiasi hanno la stessa componente lungo la congiungente i due punti.

Formula:

$$a_B \cdot (B - A) = a_A \cdot (B - A)$$

Applicazione: Utile per determinare accelerazioni quando si conosce la direzione del moto di un punto.

1.5 Teorema di Coriolis

Accelerazione Assoluta in Moto Relativo

$$a_P(a) = a_P(t) + a_P(r) + a_P(c)$$

Dove:

- **$a_P(c) = 2\omega \times V_P(r)$**: accelerazione di Coriolis
- $a_P(t)$: accelerazione di trascinamento
- $a_P(r)$: accelerazione relativa

Quando si manifesta: Nei sistemi con moto relativo rispetto a un riferimento rotante (es. giunto prismatico su membro rotante)

Forma Vettoriale Completa (coordinate polari)

In un riferimento polare ($\hat{r}$, $\hat{\theta}$):

$$a_P = \underbrace{[\ddot{r} - \omega^2 r]\,\hat{r}}_{\text{componente radiale}} + \underbrace{[\alpha r + 2\omega\dot{r}]\,\hat{\theta}}_{\text{componente tangenziale}}$$

1.6 Atto di Moto di un Rigido nello Spazio

Rappresentazione

$$V = \begin{array}{ll} [v] & \text{(velocità lineare, } 3\times1\text{)} \\ [\omega] & \text{(velocità angolare, } 3\times1\text{)} \end{array}$$

Teorema di Mozzi

Ogni atto di moto nello spazio può essere rappresentato come **moto elicoidale** (rotazione + traslazione lungo lo stesso asse)

Asse centrale: Luogo dei punti con velocità parallela a ω

1.7 Jacobiano Geometrico

Definizione Concettuale

Lo Jacobiano geometrico è la matrice che dice come le velocità dei giunti influenzano la velocità dell'end effector.

Equazione Fondamentale

```
V = J(q) · q̇
```

Dove:

- V: velocità dell'end effector (lineare + angolare)
- J(q): matrice Jacobiana geometrica (6×n)
- $\dot{q}$: velocità dei giunti (n×1)

Interpretazione Fisica

- Ogni **colonna** dello Jacobiano rappresenta come il movimento di UN singolo giunto influenza la velocità dell'end effector
- Ogni **riga** rappresenta una componente della velocità dell'end effector (x, y, z, ω_x, ω_γ, ω_u)

Proprietà Fondamentali

- **Dimensione:** 6×n (6 componenti di velocità, n giunti)
- **Dipendenza dalla configurazione:** J(q) cambia con la posizione dei giunti
- **Singolarità:** Quando det(J) = 0, il robot perde gradi di libertà
- **Dualità cinetostatica:** J^T trasforma forze dell'end effector in coppie ai giunti

Forma Esplicita dello Jacobiano Geometrico

```
    [ṗ]
V =  [ω]  = J(q) · q̇
```

```
J(q) = [z₀×(P - P₀)  z₁×(P - P₁)  ...  zₙ₋₁×(P - Pₙ₋₁)]
       [z₀           z₁           ...  zₙ₋₁          ]
```

Come Ricavare i Termini dal Prodotto T

z_{i-1}: Si prende dalla terza colonna della matrice R_{i-1} (parte rotazionale 3×3 di $T_{0,i-1}$)

P: Primi tre elementi della quarta colonna di T_{0n} (posizione end effector)

P_{i-1}: Primi tre elementi della quarta colonna di $T_{0,i-1}$ (posizione giunto i-1)

Struttura della matrice $T_{0,i-1}$:

```
T₀,ᵢ₋₁ = [Rᵢ₋₁  Pᵢ₋₁]
         [0     1  ]
```

Dove R_{i-1} è la sottomatrice rotazionale 3×3 e P_{i-1} è il vettore posizione 3×1.

1.8 Inversione della Cinematica Differenziale

Problema

Dato V desiderato, trovare $\dot{q}$

Soluzione

```
q̇ = J⁻¹(q) · V
```

Casi

- **n = 6** (manipolatore non ridondante): J quadrata → inversione diretta
- **n > 6** (ridondante): $J^+ = (J^T J)^{-1} J^T$ (pseudoinversa)
- **n < 6** (sotto-attuato): soluzione non esiste sempre

1.9 Singolarità Cinematiche

Definizione

Configurazioni dove det(J) = 0

Conseguenze

1. Perdita di gradi di libertà

2. Impossibilità di generare velocità in certe direzioni
3. Coppie ai giunti tendono all'infinito

Tipi di Singolarità

- **Singolarità al contorno:** configurazioni limite (braccio completamente esteso/retratto)
- **Singolarità interne:** configurazioni particolari all'interno dello spazio di lavoro
- **Singolarità di polso:** allineamento di assi del polso

Indice di Manipolabilità

Misura "quanto lontano" dalle singolarità:

```
μ = √det(J · J^T)
```

---

2. EQUAZIONI DI CHIUSURA

2.1 Quando Servono le Equazioni di Chiusura?

✅ SERVONO per Catene Cinematiche CHIUSE

Esempi:

- Quadrilatero articolato
- Biella-manovella
- Pantografo
- Robot paralleli (Delta robot, Stewart platform)

❌ NON SERVONO per Catene Aperte

Esempi:

- Manipolatori RRP, RRR, SCARA
- Quando tutti i giunti sono indipendenti

2.2 Differenza Fondamentale

Catena Aperta (es. RRP)

```
    E (end effector libero)
```

```
      /
     / Link 3
    /
   A
  /
 / Link 2
/
O (base fissa)

- Giunti indipendenti
- m = n (DOF = numero giunti)
- NO equazioni di chiusura necessarie
```

Catena Chiusa (es. Quadrilatero)

```
   B ———————————— C
  /              \
 / L1         L3  \
/ θ1          θ3   \
A                   D
(fisso)          (fisso)

- Giunti vincolati tra loro
- m < n (Grübler: m = 3b - 2r per 2D)
- SERVONO equazioni di chiusura!
```

2.3 Gradi di Mobilità

Meccanismi Planari (2D)

```
m = 3b - 2(r + p)
```

Dove:

- b = numero di membri mobili
- r = giunti rotoidali
- p = giunti prismatici

Meccanismi Spaziali (3D)

```
m = 6b - 5(r + p)
```

2.4 Procedimento con Equazioni di Chiusura

Step 1: Sistema di Riferimento

Definire un sistema di riferimento fisso

Step 2: Vettori

Associare un vettore a ogni membro che congiunge coppie cinematiche

Step 3: Poligono Chiuso

Disporre i vettori per ottenere un poligono chiuso

Step 4: Angoli θ

Mettere angoli θ antiorario positivi dalla coda di riferimento al sistema di riferimento

Step 5: Equazioni Vettoriali di Chiusura

$$L_1 + L_2 + L_3 + ... + L_n = 0$$

Step 6: Scomposizione

Scomporre lungo x e y:

$$\Sigma L_i\cos(\theta_i) = 0$$
$$\Sigma L_i\sin(\theta_i) = 0$$

Step 7: Risoluzione

Risolvere il sistema (lunghezze note, angoli incogniti dipendenti)

2.5 Metodo Newton-Raphson

Quando Usarlo

Per risolvere sistemi non lineari del tipo:

$$f(\theta) = 0$$

Procedimento

1. Identificare parametri noti e incogniti

2. Teorema di Carnot (se necessario)

In un triangolo con lati a, b, c e angolo γ opposto al lato c:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\gamma)$$

oppure

$$\cos(\gamma) = (a^2 + b^2 - c^2)/(2ab)$$

Applicazioni:

- Triangoli nel meccanismo
- Equazioni di vincolo aggiuntive
- Risoluzione di configurazioni

3. Costruire il sistema $f(\theta) = 0$

4. Calcolare lo Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial\theta_1 & \partial f_1/\partial\theta_2 & \dots \\ \partial f_2/\partial\theta_1 & \partial f_2/\partial\theta_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

5. Iterazione di Newton-Raphson

$$\theta_{k+1} = \theta_k - J^{-1}(\theta_k) \cdot f(\theta_k)$$

Ripetere finché $|f(\theta_k)| < \varepsilon$ (tolleranza)

6. Derivazione per Velocità e Accelerazioni

Derivare le equazioni di chiusura rispetto al tempo

2.6 Analisi delle Velocità con Equazioni di Chiusura

Derivazione delle Equazioni di Chiusura

Se ho:

$$f(\theta_1, \theta_2, \theta_3) = 0$$

Derivo rispetto al tempo:

```
∂f/∂θ₁ · θ̇₁ + ∂f/∂θ₂ · θ̇₂ + ∂f/∂θ₃ · θ̇₃ = 0

In forma matriciale:
J · θ̇ = 0  (se tutti vincolati)

oppure

J_dipendenti · θ̇_dipendenti = -J_indipendenti · θ̇_indipendenti
```

Questo mi dà le velocità dei parametri dipendenti!

---

3. STATICA DEI MANIPOLATORI

3.1 Classificazione delle Forze

Forze Esterne vs Interne

- **Forze esterne:** Agiscono dall'ambiente esterno sul sistema
- **Forze interne:** Agiscono tra i componenti del sistema (si elidono nell'equilibrio globale)

Forze Motrici vs Resistenti

- **Motrici:** Favoriscono il moto del sistema
- **Resistenti:** Si oppongono al moto del sistema

Forze Attive vs Reattive

- **Attive:** Applicate dall'esterno o generate internamente
- **Reattive vincolari:** Generate dai vincoli
  - Coppia prismatica: Forza lungo l'asse, momento perpendicolare
  - Coppia rotoidale: Momento lungo l'asse, forza perpendicolare

---

3.2 Forza d'Inerzia (Principio di d'Alembert)

Definizione

```
F' = -ma
```

Principio di d'Alembert

$$F + F' = 0$$

Dove F sono le forze applicate e F' le forze d'inerzia.

Interpretazione: Posso trattare un problema dinamico come un problema statico aggiungendo le forze d'inerzia

---

3.3 Equazioni Cardinali della Statica

Prima Equazione Cardinale

$$\Sigma F = 0 \quad \text{(equilibrio delle forze)}$$

Seconda Equazione Cardinale

$$\Sigma M = 0 \quad \text{(equilibrio dei momenti)}$$

In Forma Componenti (2D)

$$\Sigma F_x = 0$$
$$\Sigma F_\gamma = 0$$
$$\Sigma M_u = 0$$

3.4 Principio dei Lavori Virtuali

Enunciato

Un sistema è in equilibrio se il lavoro virtuale delle forze attive è nullo per ogni spostamento virtuale compatibile con i vincoli.

Formula

$$\delta W = \Sigma(F_i \cdot \delta r_i) + \Sigma(M_i \cdot \delta\theta_i) = 0$$

Vantaggi

- ✅ Non richiede calcolo delle reazioni vincolari
- ✅ Utile per sistemi con molti vincoli
- ✅ Metodo sistematico

3.5 Statica dei Manipolatori - Dualità Cinetostatica

Equazione Fondamentale

$$\tau = J^T(q) \cdot F$$

Dove:

- τ: vettore delle coppie/forze ai giunti ($n \times 1$)
- $J^T(q)$: trasposta dello Jacobiano ($n \times 6$)
- F: forze/momenti applicati all'end effector (6×1)

Interpretazione Fisica

- **$\tau = J^T(q) \cdot \gamma$:** "Forza che il TCP applica all'esterno"
- **$\tau = J^T(q) \cdot f_{ext}$:** Forze esterne trasformate ai giunti

---

3.6 Principio di Dualità Cinetostatica

Il Principio

Esiste una dualità tra cinematica e statica tramite lo Jacobiano:

Cinematica:

$$V = J(q) \cdot \dot{q}$$

Statica:

$$\tau = J^T(q) \cdot F$$

Dimostrazione tramite Lavoro Virtuale

Lavoro fatto dai giunti:

$$\delta W_{giunti} = \tau^T \cdot \delta q$$

Lavoro fatto all'end effector:

$$\delta W_{ee} = F^T \cdot \delta x$$

Conservazione dell'energia:

$$\tau^T \cdot \delta q = F^T \cdot \delta x$$

Usando $\delta x = J \cdot \delta q$:

$$\tau^T \cdot \delta q = F^T \cdot J \cdot \delta q$$

Per ogni δq:

$$\tau = J^T \cdot F \quad ✓$$

3.7 Calcolo del Momento

Formula Generale

$$M = r \times F$$

Dove:

- r: vettore posizione dal punto di applicazione al centro di rotazione
- F: forza applicata
- ×: prodotto vettoriale

Forma Scalare (2D)

$$M = r \cdot F \cdot \sin(\theta)$$

Dove θ è l'angolo tra r e F

Braccio della forza:

$$b = r \cdot \sin(\theta) \quad \text{(distanza perpendicolare)}$$
$$M = b \cdot F$$

3.8 Equilibrio delle Catene Chiuse Planari

Notazione

- **f_{e,2}:** Forza dall'esterno verso l'interno (membro 2)
- **f_{2,e}:** Forza dal membro 2 verso l'esterno

Principio

Per ogni nodo, la somma delle forze deve essere zero:

```
Σ F_nodo = 0
```

Procedimento

1. Disegnare il diagramma di corpo libero per ogni membro
2. Identificare forze esterne e reazioni vincolari
3. Applicare equazioni cardinali a ogni membro
4. Risolvere il sistema

---

4. DINAMICA DEI ROBOT

4.1 Due Problemi Fondamentali

1. Dinamica Diretta

Input: Coppie ai giunti τ
Output: Accelerazioni dei giunti $\ddot{q}$
Equazione: $\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \tau)$

Applicazione: Simulazione del comportamento del robot

2. Dinamica Inversa

Input: Traiettoria desiderata $q, \dot{q}, \ddot{q}$
Output: Coppie necessarie τ
Equazione: $\tau = f(q, \dot{q}, \ddot{q})$

Applicazione: Controllo del robot

4.2 Equazione di Lagrange

Forma Standard

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Dove:

- **$M(q)$:** matrice d'inerzia ($n \times n$)
- **$C(q,\dot{q})$:** matrice dei termini centrifughi e di Coriolis ($n \times n$)
- **$G(q)$:** vettore delle forze gravitazionali ($n \times 1$)

Proprietà Importanti

1. **$M(q)$** è simmetrica e definita positiva
2. **$\dot{M} - 2C$** è antisimmetrica (proprietà fondamentale per il controllo)
3. **$G(q)$** deriva da un potenziale gravitazionale

4.3 Dinamica del Manipolatore Planare a Due Bracci (RR)

Configurazione

```
        E
       /
      / L_2, m_2
     / θ_2
    A
   /
  / L_1, m_1
 / θ_1
O (base)
```

Matrice d'Inerzia M(q)

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12} & M_{22} \end{bmatrix}$$

Elementi:

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 r_1^2 + m_2[L_1^2 + r_2^2 + 2L_1 r_2 \cos(\theta_2)]$$
$$M_{12} = M_{21} = I_2 + m_2[r_2^2 + L_1 r_2 \cos(\theta_2)]$$
$$M_{22} = I_2 + m_2 r_2^2$$

Dove:

- I_i: momento d'inerzia del link i
- m_i: massa del link i
- r_i: distanza dal giunto al centro di massa
- L_i: lunghezza del link i

Termini Centrifughi e di Coriolis $C(q,\dot{q})$

$$C(q,\dot{q})\dot{q} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = -m_2 L_1 r_2 \sin(\theta_2)[2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_2^2]$$
$$c_2 = m_2 L_1 r_2 \sin(\theta_2)\dot{\theta}_1^2$$

Interpretazione:

- Proporzionali a $\dot{\theta}^2$ (forze centrifughe)
- Proporzionali a $\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2$ (forze di Coriolis)

Termini Gravitazionali $G(q)$

$$G = \begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}$$

$$G_1 = [m_1 r_1 + m_2 L_1] g \cdot \cos(\theta_1) + m_2 r_2 g \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$G_2 = m_2 r_2 g \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2)$$

Interpretazione:

- Dipendono da $\sin(\theta_i)$ o $\cos(\theta_i)$
- Coppie necessarie per sostenere il peso dei link

4.4 Relazione con la Statica

Caso Statico ($\dot{q} = 0$, $\ddot{q} = 0$)

L'equazione dinamica si riduce a:

```
τ = G(q)
```

Solo i termini gravitazionali rimangono!

Questo coincide con:

```
τ = J^T(q) · F_gravità
```

---

5. ESEMPI GENERICI

5.1 Centro di Velocità - Biella-Manovella

Configurazione

```
      B (pistone) ──→ V_B (solo orizzontale)
       │
       │ L₂ (biella)
       │
      A (cerniera)
     /
    / L₁ (manovella)
   /
  O (centro fisso)
  ↻ ω₁
```

Procedimento

Step 1: Velocità del punto A

```
V_A = ω₁ × L₁
Direzione: perpendicolare a OA (tangente alla rotazione)
```

Step 2: Identificare il CIR della biella

Il CIR si trova all'intersezione delle rette perpendicolari alle velocità:

- Retta 1: passa per A, perpendicolare a V_A

- Retta 2: passa per B, verticale (perpendicolare a V_B orizzontale)

Step 3: Trovare ω_2 (velocità angolare biella)

Una volta trovato il CIR (punto C):

$$\omega_2 = V_A / |CA|$$

oppure

$$\omega_2 = V_B / |CB|$$

Step 4: Velocità del pistone

$$V_B = \omega_2 \times |CB|$$

Interpretazione Fisica

- **$\theta_1 = 0°$ o $180°$:** biella allineata, $\omega_2 \to 0$, V_B massima
- **$\theta_1 = 90°$ o $270°$:** configurazione intermedia
- Il CIR si sposta continuamente durante il moto!

5.2 Teorema di Coriolis - Slider su Braccio Rotante

Configurazione

```
  ┌──────────→ P (slider in movimento radiale)
  │       V_rel = ḋ (velocità relativa)
══════╪═════
  │
  ↻ ω (braccio ruota)
```

Analisi delle Accelerazioni

Accelerazione assoluta:

$$a_P(\text{assoluta}) = a_P(\text{trascinamento}) + a_P(\text{relativa}) + a_P(\text{Coriolis})$$

1. Accelerazione di trascinamento:

$a_{trascinamento} = a_{tangenziale} + a_{centripeta}$

$a_{tangenziale} = \alpha \times d$ (dovuta all'accelerazione angolare α)
Direzione: tangenziale (perpendicolare al raggio)
Modulo: $|a_t| = \alpha \cdot d$

$a_{centripeta} = -\omega^2 \cdot d$ (dovuta alla rotazione)
Direzione: radiale verso il centro
Modulo: $|a_n| = \omega^2 \cdot d$

2. Accelerazione relativa:

$a_{relativa} = \ddot{d}$ (accelerazione lungo il raggio)
Direzione: radiale

3. Accelerazione di Coriolis:

$a_{Coriolis} = 2\omega \times V_{relativa}$

Modulo: $|a_c| = 2\omega \cdot \dot{d}$
Direzione: perpendicolare sia a ω che a V_{rel} (tangenziale)

Forma Vettoriale Completa

In un riferimento polare $(\hat{r}, \hat{\theta})$:

$$a_P = \underbrace{[\ddot{d} - \omega^2 d]\,\hat{r}}_{\text{componente radiale}} + \underbrace{[\alpha d + 2\omega\dot{d}]\,\hat{\theta}}_{\text{componente tangenziale}}$$

Quando è Importante?

- Gru rotanti: oggetto sollevato mentre la gru ruota
- Robot con giunti prismatici rotanti: termine dominante ad alte velocità
- Turbine con palette mobili

Se ω è molto grande e $\dot{d}$ è significativo, $a_{Coriolis}$ può dominare!

5.3 Jacobiano e Singolarità - Manipolatore RR

Configurazione

```
        E (end effector)
       /
      / L₂
     / θ₂
    A
   /
  / L₁
 / θ₁
O (base)
```

Cinematica Diretta

$$x = L_1\cos(\theta_1) + L_2\cos(\theta_1 + \theta_2)$$
$$y = L_1\sin(\theta_1) + L_2\sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Jacobiano (derivando)

$$J = \begin{bmatrix} \partial x/\partial\theta_1 & \partial x/\partial\theta_2 \\ \partial y/\partial\theta_1 & \partial y/\partial\theta_2 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} -L_1\sin(\theta_1) - L_2\sin(\theta_1+\theta_2) & -L_2\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos(\theta_1) + L_2\cos(\theta_1+\theta_2) & L_2\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

Forma Compatta

$$J = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - L_2 s_{12} & -L_2 s_{12} \\ L_1 c_1 + L_2 c_{12} & L_2 c_{12} \end{bmatrix}$$

Dove: $s_1 = \sin(\theta_1)$, $c_1 = \cos(\theta_1)$, $s_{12} = \sin(\theta_1+\theta_2)$, $c_{12} = \cos(\theta_1+\theta_2)$

Determinante e Singolarità

$$\det(J) = L_1 L_2 \sin(\theta_2)$$

Singolarità quando:

$\sin(\theta_2) = 0$
$\rightarrow \theta_2 = 0°$ (braccio esteso)
$\rightarrow \theta_2 = 180°$ (braccio ripiegato)

Interpretazione delle Singolarità

$\theta_2 = 0°$ (braccio esteso):

```
   E
  /
 /—————————————— (lunghezza totale L1+L2)
/
O
```

- End effector può muoversi solo su un arco
- Impossibile generare velocità radiale (allontanamento/avvicinamento)
- Perdita di 1 DOF

$\theta_2 = 180°$ (braccio ripiegato):

```
 E———\
     \ L2
      \
/ L1   A
O
```

- Configurazione "gomito indietro"
- Stessa perdita di DOF
- End effector su arco di raggio $|L_1 - L_2|$

Indice di Manipolabilità

$\mu(q) = |\det(J)| = |L_1 L_2 \sin(\theta_2)|$

Massimo quando: $\theta_2 = \pm 90°$ (braccio a L)
Minimo quando: $\theta_2 = 0°$ o $180°$ (singolarità)

Interpretazione: μ misura "quanto bene" il robot può muoversi in tutte le direzioni.

5.4 Principio dei Lavori Virtuali - Quadrilatero Articolato

Configurazione

```
    B ——————————— C
   /             \
  / L₁        L₃  \
 / θ₁         θ₃   \
A                   D
(fisso)          (fisso)
```

Forza F applicata nel punto medio di BC

Procedimento Generale

Step 1: Gradi di libertà

$m = 3b - 2r$ (per meccanismi planari)

$b = 3$ (membri mobili: AB, BC, CD)
$r = 4$ (coppie rotoidali: A, B, C, D)

$m = 3(3) - 2(4) = 1 \implies$ un solo parametro libero (es. θ_1)

Step 2: Cinematica del punto di applicazione

Coordinate del punto medio M di BC:

$x_M = (x_B + x_C)/2$
$y_M = (y_B + y_C)/2$

Dove:
$x_B = L_1\cos(\theta_1)$
$y_B = L_1\sin(\theta_1)$

x_C, y_C dipendono da θ_3, che dipende da θ_1 (vincolo di chiusura)

Step 3: Spostamento virtuale

$\delta y_M = \partial y_M/\partial\theta_1 \cdot \delta\theta_1$

Step 4: Equazione PLV

$$\delta W = 0$$
$$M\_A \cdot \delta\theta_1 - F \cdot \delta y\_M = 0$$
$$M\_A \cdot \delta\theta_1 = F \cdot (\partial y\_M/\partial\theta_1) \cdot \delta\theta_1$$

$$M\_A = F \cdot (\partial y\_M/\partial\theta_1)$$

Vantaggi del PLV

✅ **Non servono le reazioni vincolari** in B, C, D
✅ **Metodo sistematico** per sistemi complessi
✅ **Facile da automatizzare** (derivate parziali)

---

6. ESEMPIO COMPLETO RRP

6.1 Configurazione del Sistema

```
          ↓ F(e,2) = [0, -F0]
           |
R1──────────────┼──────────────P3
|          2         |
|                    | d3
|                    |
|                    ├──┤
R2
|
⊗ (base fissa)
```

Legenda:

- R_1: giunto rotoidale (θ_1)
- R_2: giunto rotoidale (θ_2)
- P_3: giunto prismatico (d_3)
- Link 2: connette R_1 a P_3
- F(e,2): forza esterna verticale applicata sul link 2

6.2 Parametri del Sistema

L_1: lunghezza link 1 (da base a R_1)
L_2: lunghezza link 2 (da R_1 al punto di attacco prismatico)
d_3: estensione del giunto prismatico

$F(e,2) = [0, -F_0]$: forza verticale verso il basso

Punto di applicazione: distanza 'a' da R_1 lungo il link 2

6.3 CASO A: Forza sul Link 2

Posizioni dei Punti Chiave

Punto R_1 (fine del link 1):

$$P_1 = \begin{bmatrix} L_1\cos(\theta_1) \\ L_1\sin(\theta_1) \end{bmatrix}$$

Punto di applicazione della forza F (sul link 2):

$$P\_F = P_1 + a\cdot\begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

$$P\_F = \begin{bmatrix} L_1\cos(\theta_1) + a\cdot\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1\sin(\theta_1) + a\cdot\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}$$

Jacobiano del Punto F

$$J\_F = [\partial P\_F/\partial\theta_1 \quad \partial P\_F/\partial\theta_2 \quad \partial P\_F/\partial d_3]$$

Derivando P_F:

$$\partial P\_F/\partial\theta_1 = \begin{bmatrix} -L_1\sin(\theta_1) - a\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos(\theta_1) + a\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\partial P\_F/\partial\theta_2 = \begin{bmatrix} -a\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) \\ a\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}$$

$$\partial P\_F/\partial d_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(il punto F sul link 2 non dipende da } d_3\text{)}$$

Jacobiano completo:

$$J\_F = \begin{bmatrix} -L_1\sin(\theta_1) - a\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) & -a\cdot\sin(\theta_1+\theta_2) & 0 \\ L_1\cos(\theta_1) + a\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) & a\cdot\cos(\theta_1+\theta_2) & 0 \end{bmatrix}$$

Calcolo delle Coppie/Forze ai Giunti

```
τ = J_F^T · F(e,2)

τ = [-L₁sin(θ₁) - a·sin(θ₁+θ₂)    L₁cos(θ₁) + a·cos(θ₁+θ₂)]   [  0 ]
    [-a·sin(θ₁+θ₂)                 a·cos(θ₁+θ₂)             ] × [-F₀]
    [0                             0                        ]
```

Risultati:

```
τ₁ = -F₀·[L₁cos(θ₁) + a·cos(θ₁+θ₂)]
      └──────────────┬──────────────┘
        braccio della forza

τ₂ = -F₀·a·cos(θ₁+θ₂)
      └────┬────┘
  braccio rispetto a R₁

τ₃ = 0  ← IMPORTANTE!
```

Perché τ_3 = 0?

Spiegazione:

- La forza è applicata sul link 2, NON sul link 3
- Il giunto prismatico si muove lungo il link 2
- La forza F_0 è perpendicolare all'asse prismatico
- Il giunto prismatico non "trasmette" questa forza esterna

6.4 CASO B: Forza sull'End Effector (TCP)

Configurazione

```
              ↓ F = [0, -F₀]
              │
R₁─────────────────────────────●───→ TCP (end effector)
│       Link 2      │d₃
│                  │
│                  ├─┤ Giunto Prismatico P₃
R₂
```

```
  |
  ⊗ (base)
```

Posizione del TCP

$$
P\_TCP = \begin{bmatrix} L_1\cos(\theta_1) + (L_2 + d_3)\cos(\theta_1 + \theta_2) \\ L_1\sin(\theta_1) + (L_2 + d_3)\sin(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix}
$$

Jacobiano dell'End Effector

Derivazione colonna per colonna:

Colonna 1 (θ_1):

$$
\partial P\_TCP/\partial \theta_1 = \begin{bmatrix} -L_1\sin(\theta_1) - (L_2+d_3)\sin(\theta_1+\theta_2) \\ L_1\cos(\theta_1) + (L_2+d_3)\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}
$$

Colonna 2 (θ_2):

$$
\partial P\_TCP/\partial \theta_2 = \begin{bmatrix} -(L_2+d_3)\sin(\theta_1+\theta_2) \\ (L_2+d_3)\cos(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}
$$

Colonna 3 (d_3):

$$
\partial P\_TCP/\partial d_3 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1+\theta_2) \\ \sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \leftarrow \text{CHIAVE!}
$$

Interpretazione: Il prismatico sposta il TCP nella direzione del link 2!

Jacobiano Completo

$$
J\_TCP = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - (L_2+d_3)s_{12} & -(L_2+d_3)s_{12} & \cos(\theta_1+\theta_2) \\ L_1 c_1 + (L_2+d_3)c_{12} & (L_2+d_3)c_{12} & \sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix}
$$

Calcolo $\tau = J^T \cdot F$

$$
\tau = J\_TCP^T \cdot F
$$

$$
\tau = \begin{bmatrix} -L_1 s_1 - (L_2+d_3)s_{12} & L_1 c_1 + (L_2+d_3)c_{12} \\ -(L_2+d_3)s_{12} & (L_2+d_3)c_{12} \\ \cos(\theta_1+\theta_2) & \sin(\theta_1+\theta_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -F_0 \end{bmatrix}
$$

Risultati:

$\tau_1 = -F_0[L_1\cos(\theta_1) + (L_2+d_3)\cos(\theta_1+\theta_2)]$

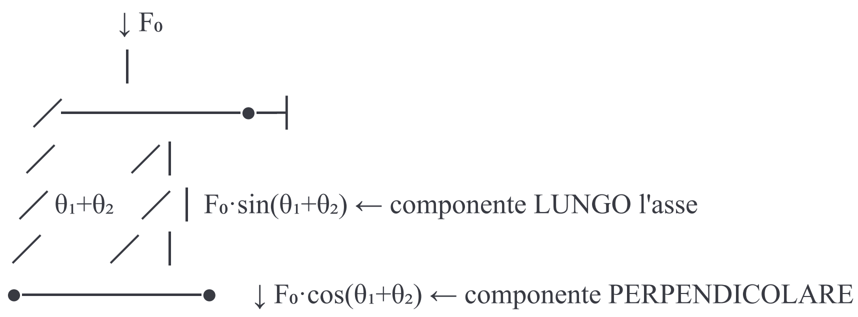
$\tau_2 = -F_0(L_2+d_3)\cos(\theta_1+\theta_2)$

$\tau_3 = \underbrace{-F_0 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)}_{\text{componente lungo asse prismatico}}$ ← ORA NON È PIÙ ZERO!

6.5 Schema Dettagliato: Perché $\tau_3 \neq 0$ sul TCP?

PASSO 1: Decomposizione della Forza

Forza F sul TCP inclinato:



F = F_parallelo + F_perpendicolare

F_parallelo = $F_0 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)$ (lungo l'asse del prismatico)
F_perpendicolare = $F_0 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2)$ (perpendicolare all'asse)

PASSO 2: Prodotto Scalare

τ_3 = F · direzione_prismatico
$= [0, -F_0] \cdot [\cos(\theta_1+\theta_2), \sin(\theta_1+\theta_2)]$
$= 0 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2) + (-F_0) \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)$
$= -F_0 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)$

Il giunto prismatico SENTE la componente della forza lungo il suo asse!

PASSO 3: Casi Limite (Verifica)

Caso 1: Link Orizzontale ($\theta_1+\theta_2 = 0°$)

```
    ──────────────────●───→
    │         ↓ F₀
    ⊗

τ₃ = -F₀·sin(0°) = 0 ✓

PERCHÉ? La forza è PERPENDICOLARE all'asse prismatico!
```

Caso 2: Link Verticale ($\theta_1+\theta_2 = 90°$)

```
       │
       │
       ●
       ↓ F₀
       │
    ───────┘
    ⊗

τ₃ = -F₀·sin(90°) = -F₀  (massimo!)

PERCHÉ? La forza è PARALLELA all'asse prismatico!
Il prismatico deve fornire tutta la forza F₀.
```

Caso 3: Link a 45° ($\theta_1+\theta_2 = 45°$)

```
         ●
        ╱↓ F₀
       ╱
      ╱ 45°
    ────────●
    │
    ⊗

τ₃ = -F₀·sin(45°) = -F₀·0.707 ≈ -0.7F₀

PERCHÉ? Circa 70% della forza va lungo il prismatico,
30% è assorbito dalla rotazione di R₂.
```

6.6 Confronto Finale: F su Link 2 vs F su TCP

```
┌───────────────────────┬──────────────────────────────┐
│ F su Link 2           │ F su TCP (end effector)      │
```

```
│  (distanza 'a' da R₁) │  (distanza L₂+d₃ da R₁)        │
├──────────────────────────┼────────────────────────────────────────┤
│                  │                            │
│  τ₁ = -F₀(L₁c₁+ac₁₂) │  τ₁ = -F₀[L₁c₁+(L₂+d₃)c₁₂]     │
│                  │                            │
│  τ₂ = -F₀·a·c₁₂      │  τ₂ = -F₀(L₂+d₃)c₁₂            │
│                  │                            │
│  τ₃ = 0  ← CHIAVE!    │  τ₃ = -F₀·s₁₂  ← CHIAVE!        │
│                  │                            │
│  Il prismatico NON    │  Il prismatico SENTE la forza!   │
│  sente la forza       │  (componente lungo il suo asse)  │
│  (F non sul TCP)      │                            │
└──────────────────────────┴────────────────────────────────────────┘

Notazione: c₁ = cos(θ₁), s₁₂ = sin(θ₁+θ₂), ecc.
```

6.7 Verifica con Principio dei Lavori Virtuali

Spostamento Virtuale del TCP

```
δP_TCP = ∂P_TCP/∂θ₁·δθ₁ + ∂P_TCP/∂θ₂·δθ₂ + ∂P_TCP/∂d₃·δd₃

Componente y:
δy_TCP = [...]·δθ₁ + [...]·δθ₂ + sin(θ₁+θ₂)·δd₃
         └──────────────┬──────────────┘ └────┬────┘
         contributo rotazioni      contributo prismatico
```

Lavoro Virtuale

```
δW = τ₁·δθ₁ + τ₂·δθ₂ + τ₃·δd₃ - F₀·δy_TCP = 0

Termine con δd₃:
τ₃·δd₃ = F₀·sin(θ₁+θ₂)·δd₃

Quindi:
τ₃ = F₀·sin(θ₁+θ₂)  (come forza motrice)

O τ₃ = -F₀·sin(θ₁+θ₂)  (come forza resistente)
```

Il PLV conferma il risultato dello Jacobiano! ✓

---

7. FORMULE DI RIEPILOGO

7.1 Cinematica

Legge Fondamentale

$V_B = V_A + \omega \times (B - A)$

Accelerazione

$a_B = a_A + \alpha \times (B - A) + \omega \times (\omega \times (B - A))$

Accelerazione di Coriolis

$a_{Coriolis} = 2\omega \times V_{relativa}$

Jacobiano

$V = J(q) \cdot \dot{q}$

$\dot{q} = J^{-1}(q) \cdot V$ [se $\det(J) \neq 0$]

Singolarità

$\det(J) = 0 \rightarrow$ perdita di DOF

7.2 Equazioni di Chiusura

Gradi di Mobilità

2D: $m = 3b - 2(r + p)$

3D: $m = 6b - 5(r + p)$

Equazione Vettoriale

$L_1 + L_2 + \ldots + L_n = 0$

Componenti:

$\Sigma L_i \cos(\theta_i) = 0$

$\Sigma L_i \sin(\theta_i) = 0$

Velocità (derivando)

$$J\_vincoli \cdot \dot{\theta} = 0$$

7.3 Statica

Equazioni Cardinali

$$\Sigma F = 0$$
$$\Sigma M = 0$$

Principio dei Lavori Virtuali

$$\delta W = \Sigma F_i \cdot \delta r_i + \Sigma M_i \cdot \delta\theta_i = 0$$

Dualità Cinetostatica

Cinematica: $V = J(q) \cdot \dot{q}$
Statica: $\tau = J^T(q) \cdot F$

Momento

$$M = r \times F$$
$M = r \cdot F \cdot \sin(\theta)$ (forma scalare 2D)

7.4 Dinamica

Equazione di Lagrange

$$\tau = M(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q)$$

Dove:

- $M(q)$: matrice d'inerzia
- $C(q,\dot{q})$: termini centrifughi e Coriolis
- $G(q)$: termini gravitazionali

Forza d'Inerzia

```
F_inerzia = -ma
```

Caso Statico

$\dot{q} = 0, \ddot{q} = 0 \rightarrow \tau = G(q)$

7.5 Quick Reference - Quando Usare Cosa

Problema	Metodo Consigliato
Velocità meccanismi semplici	Centro di velocità (CIR)
Velocità meccanismi complessi	Equazioni di chiusura + derivazione
Accelerazioni con rotazioni	Teorema di Coriolis
Velocità manipolatori	Jacobiano geometrico
Forze ai giunti (statica)	τ = J^T · F
Coppie senza reazioni vincolari	Principio lavori virtuali
Controllo robot	Modello dinamico completo
Catene chiuse	Equazioni di chiusura
Singolarità	det(J) = 0

7.6 Checklist per Esercizi

Analisi Cinematica

- [ ] Identificare tipo di catena (aperta/chiusa)
- [ ] Calcolare gradi di libertà
- [ ] Scrivere cinematica diretta
- [ ] Derivare per ottenere Jacobiano
- [ ] Verificare singolarità (det(J) = 0)

Analisi Statica

- [ ] Identificare forze esterne
- [ ] Calcolare Jacobiano nella configurazione data
- [ ] Applicare $\tau = J^T \cdot F$
- [ ] Verificare con calcolo diretto del momento

Analisi Dinamica

- [ ] Calcolare matrice d'inerzia $M(q)$
- [ ] Calcolare termini $C(q,\dot{q})$
- [ ] Calcolare termini gravitazionali $G(q)$
- [ ] Assemblare $\tau = M\ddot{q} + C\dot{q} + G$

Catene Chiuse

- [ ] Scrivere equazioni di chiusura
- [ ] Derivare per velocità
- [ ] Derivare ancora per accelerazioni
- [ ] Risolvere con Newton-Raphson se necessario

---

8. CALCOLO DELLE FORZE INTERNE

8.1 Concetto di Forze Interne

Definizione

Le **forze interne** sono le forze che si trasmettono tra i link del manipolatore per bilanciare le forze esterne applicate.

Notazione Standard

```
f_{i,j}: forza che il link i esercita sul link j
f_{j,i}: forza che il link j esercita sul link i (reazione)

Per il principio di azione-reazione:
f_{i,j} = -f_{j,i}
```

Perché Calcolarle?

- **Dimensionamento strutturale**: Sapere quali forze deve sopportare ogni link
- **Scelta degli attuatori**: Dimensionare motori e riduttori
- **Analisi delle sollecitazioni**: Verificare resistenza meccanica

- **Prevenzione rotture**: Identificare punti critici

8.2 Metodo: Propagazione delle Forze (Force Propagation)

Principio Generale

Le forze si propagano dalla punta (dove è applicata la forza esterna) verso la base, link per link.

Procedimento Standard

Step 1: Partire dall'end effector (o punto di applicazione forza esterna)

Step 2: Applicare equilibrio statico a ogni link, procedendo verso la base

Step 3: Per ogni link i:

```
Equilibrio delle forze:
Σ F_i = 0
f_{i-1,i} + f_{i,i+1} + f_{ext,i} + f_{gravità,i} = 0

Equilibrio dei momenti (rispetto al centro del link):
Σ M_i = 0
```

Step 4: Risolvere il sistema link per link

8.3 ESEMPIO RRP - CASO A: Forza sul Link 2

Configurazione Ripasso

```
        ↓ F(e,2) = [0, -F_0]
        |
R_1──────────────●──────────P_3
|    a    |     |
|   ←─→  2       | d_3
|              |
R_2            ├─┤
|
⊗ (base fissa)
```

Dati:

- Forza F_0 applicata a distanza 'a' da R_1 sul link 2
- End effector scarico (nessuna forza esterna su TCP)

Step 1: Equilibrio del Link 3 (Parte Prismatica)

```
├──┤ Link 3
│
│ d₃
│
●─────→ f_{2,3} (forza che link 2 esercita su link 3)
```

End effector scarico:

```
f_{3,TCP} = [0, 0]  (nessuna forza esterna all'estremità)
```

Equilibrio delle forze sul link 3:

```
f_{2,3} + f_{3,TCP} = 0
f_{2,3} = -f_{3,TCP} = [0, 0]
```

Risultato importante: Il link 3 NON trasmette forze perché la forza è applicata sul link 2, non su di lui!

Step 2: Equilibrio del Link 2

```
    f_{1,2} (da trovare)
     ↓
R₁────●──────────────●──────────────●
     │    a    │         │
     │    ←─→  │         │
     │       ↓ F₀      │
     │             ↓ f_{2,3} = [0,0]
    Link 2
```

Forze agenti sul link 2:

- f_{1,2}: forza dal link 1 (incognita)
- F(e,2) = [0, -F_0]: forza esterna applicata
- f_{2,3} = [0, 0]: forza verso link 3 (già trovata)
- Peso proprio (se considerato)

Equilibrio delle forze:

$$f_{1,2} + F(e,2) + f_{2,3} = 0$$
$$f_{1,2} + [0, -F_0] + [0, 0] = 0$$

$$f_{1,2} = [0, F_0] \quad \text{(verso l'alto)}$$

Interpretazione: Il giunto R_1 deve esercitare una forza F_0 verso l'alto per bilanciare la forza esterna.

Equilibrio dei momenti rispetto a R_1:

$$M_{R_1} + r_F \times F(e,2) = 0$$

$$\text{Dove } r_F = [a \cdot \cos(\theta_1+\theta_2),\ a \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)]$$

$$M_{R_1} = -r_F \times F(e,2)$$
$$M_{R_1} = -[a \cdot \cos(\theta_1+\theta_2),\ a \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)] \times [0, -F_0]$$
$$M_{R_1} = -[0, 0, -a \cdot F_0 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2)]$$
$$M_{R_1} = [0, 0, a \cdot F_0 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2)]$$

Questo è il momento che R_1 deve fornire! (coincide con τ_2 calcolato prima)

Step 3: Equilibrio del Link 1

```
f_{base,1} (da trovare)
   ↓
⊗───────●──────────────
R_2  |
    | L_1
    |
   ↓ f_{1,2} = [0, F_0]

   Link 1
```

Equilibrio delle forze:

$$f_{base,1} + f_{1,2} = 0$$
$$f_{base,1} + [0, F_0] = 0$$

$$f_{base,1} = [0, -F_0] \quad \text{(verso il basso)}$$

Interpretazione: La base deve reagire con una forza uguale e opposta alla forza esterna.

Equilibrio dei momenti rispetto alla base:

```
M_{base} + r_{R₁} × f_{1,2} + momento da R₁ = 0

Dove r_{R₁} = [L₁cos(θ₁), L₁sin(θ₁)]

M_{base} = momento totale che la base deve fornire
         = τ₁ (calcolato con Jacobiano)
```

8.4 ESEMPIO RRP - CASO B: Forza sul TCP

Configurazione Ripasso

```
                    ↓ F = [0, -F₀]
                    │
R₁──────────────────────────────────────●───→ TCP
│        Link 2      │d₃
│                   │
R₂                  ├─┤
│
⊗ (base)
```

Step 1: Equilibrio del Link 3 (Parte Prismatica)

```
    ├─┤ Link 3
    │
    │ d₃
    │
    ●────→ f_{2,3}
    │
    ↓ F = [0, -F₀] (forza sul TCP)
```

Equilibrio delle forze sul link 3:

```
f_{2,3} + F = 0
f_{2,3} + [0, -F₀] = 0

f_{2,3} = [0, F₀]  (verso l'alto)
```

ORA IL LINK 3 TRASMETTE FORZA! Perché la forza è applicata su di lui.

Verifica con componente prismatica:

La componente di F lungo l'asse prismatico è:

```
F_prismatico = F · direzione_asse
           = [0, -F₀] · [cos(θ₁+θ₂), sin(θ₁+θ₂)]
           = -F₀·sin(θ₁+θ₂)
```

Questo coincide con τ_3!

Step 2: Equilibrio del Link 2

```
    f_{1,2} (da trovare)
    ↓
R₁───●──────────────────────●
  |       Link 2      |
  |               ↓ f_{2,3} = [0, F₀]
```

Equilibrio delle forze:

```
f_{1,2} + f_{2,3} = 0
f_{1,2} + [0, F₀] = 0

f_{1,2} = [0, -F₀]  (verso il basso)
```

Aspetta! Questo sembra sbagliato... Ma non lo è!

Spiegazione: Il link 2 riceve da R_1 una forza verso il basso che poi trasmette al link 3 come forza verso l'alto (per azione-reazione).

Equilibrio dei momenti rispetto a R_1:

```
M_{R₁} + r_{TCP} × F = 0

Dove r_{TCP} = [(L₂+d₃)cos(θ₁+θ₂), (L₂+d₃)sin(θ₁+θ₂)]

M_{R₁} = -r_{TCP} × F
M_{R₁} = [0, 0, (L₂+d₃)·F₀·cos(θ₁+θ₂)]
```

Questo coincide con τ_2!

Step 3: Equilibrio del Link 1

```
  f_{base,1} (da trovare)
    ↓
⊗────●────────────
  | L₁
```

```
      |
      ↓ f_{1,2} = [0, -F₀]
```

Equilibrio delle forze:

```
f_{base,1} + f_{1,2} = 0
f_{base,1} = [0, F₀]
```

Ma questo non può essere giusto! La base dovrebbe reagire con $[0, -F_0]$...

ERRORE CONCETTUALE! Devo considerare meglio le forze...

Correzione: Analisi Completa delle Forze

Il problema è che stiamo dimenticando le **componenti orizzontali** e i **vincoli dei giunti rotoidali**.

8.5 Metodo Corretto: Diagramma di Corpo Libero Completo

Principio

Ogni link è in equilibrio sotto l'azione di:

1. Forze/momenti dai giunti adiacenti
2. Forze esterne applicate
3. Peso proprio (se considerato)

Notazione Completa per Giunti

Giunto Rotoidale:

```
Trasmette: - Forza f (2 componenti: f_x, f_y)
           - Momento M (1 componente per robot planare)
```

Giunto Prismatico:

```
Trasmette: - Forza lungo l'asse F_assiale
           - Momento M_perp (perpendicolare all'asse)
           - Forza perpendicolare f_perp (se vincolo bilaterale)
```

8.6 ESEMPIO COMPLETO: RRP con F sul TCP (Metodo Corretto)

Configurazione con Forze e Momenti

```
              F = [0, -F_0]
              ↓
 ─────────────────────────────────● TCP
 |              |
 | f_2, M_2       | F_3 (forza assiale prismatico)
 ●────────────────────────────────┤
R_1             | M_3 (momento prismatico)
 |              |
 | f_1, M_1       Link 3
 ●─────────────
R_2
 |
 | f_0, M_0
 ●
Base
```

LINK 3 (Parte Prismatica + TCP)

Forze:

- $F = [0, -F_0]$ al TCP
- $f_{2,3} = [f_{2x}, f_{2y}]$ dal link 2
- M_2 momento dal link 2

Equilibrio traslazionale:

$$f_{2,3} + F = 0$$
$$f_{2,3} = [0, F_0]$$

Equilibrio rotazionale (rispetto al punto di attacco con link 2):

$$M_2 + r_{TCP} \times F = 0$$

Dove $r_{TCP} = [d_3 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2), d_3 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)]$

$$M_2 = -d_3 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2) \cdot F_0$$

LINK 2 (Braccio Principale)

Forze:

```
- f_{1,2} = [f₁ₓ, f₁ᵧ] dal link 1
- M₁ momento dal link 1
- f_{2,3} = [0, -F₀] verso link 3 (reazione)
- M₂ (calcolato sopra)
```

Equilibrio traslazionale:

```
f_{1,2} + f_{2,3} = 0
f_{1,2} = -f_{2,3} = [0, F₀]
```

NO! Questo ignora le componenti orizzontali create dai momenti!

Approccio Migliore: Usare le Coppie τ Già Calcolate

In realtà, il metodo più pratico è:

Le forze interne si ricavano da:

```
1. τ ai giunti (già calcolato con J^T)
2. Geometria del sistema
3. Equilibrio locale
```

8.7 Formula Pratica per Forze Interne

Metodo Semplificato

Forza che il giunto i deve trasmettere:

Per un manipolatore a catena aperta con forza F_ext sul TCP:

```
f_i = forza necessaria al giunto i per equilibrare tutto ciò che sta "dopo" di lui

Si calcola propagando dalla punta:
- Parti dal TCP con F_ext
- Ogni giunto accumula le forze dei giunti successivi
```

Algoritmo Ricorsivo (dalla punta alla base)

```
Per i = n, n-1, ..., 1:

1. f_{i,i+1} = f_{i+1,ext}  (forza verso il link successivo)

2. f_{i-1,i} = -f_{i,i+1} - F_{ext,i}  (equilibrio)
```

3. M_i = M_{i+1} + r_i × F_{i} (momento accumulato)

8.8 CALCOLO PRATICO: Forze Interne RRP

Dati di Input

Configurazione: $\theta_1 = 45°$, $\theta_2 = 90°$, $d_3 = 0.3$ m
Lunghezze: $L_1 = 0.5$ m, $L_2 = 0.4$ m
Forza: F = [0, -100 N] sul TCP

Calcolo τ (già fatto)

$\tau_1 = -100 \cdot [0.5 \cdot \cos(45°) + (0.4+0.3) \cdot \cos(135°)]$
$= -100 \cdot [0.354 - 0.495]$
$= 14.1$ Nm

$\tau_2 = -100 \cdot (0.7) \cdot \cos(135°)$
$= 49.5$ Nm

$\tau_3 = -100 \cdot \sin(135°)$
$= -70.7$ N

Forze sui Link

Link 3 (prismatico):

Forza assiale: $F_3 = \tau_3 = -70.7$ N (compressione)
Forza sul vincolo: [0, 100 N] (verso l'alto per equilibrare F)

Link 2:

Al giunto R_1 deve trasmettere:
- Momento: M = 49.5 Nm
- Forza risultante che equilibra tutto il sistema a valle

Componente lungo link 2: $F_3 = 70.7$ N
Componente perpendicolare: dipende dalla geometria

Link 1:

```
Deve trasmettere tutto alla base:
- Momento: M = 14.1 Nm
- Forza: [0, -100 N] (uguale e opposta a F_ext)
```

Forza alla Base (Reazione Vincolare)

```
f_base = -F_ext = [0, 100 N] (verso l'alto)
M_base = τ₁ = 14.1 Nm
```

Verifica: La base reagisce esattamente come previsto!

8.9 Schema Riassuntivo: Propagazione delle Forze

Direzione di Propagazione

```
TCP ──→ Link n ──→ Link n-1 ──→ ... ──→ Link 1 ──→ BASE

F_ext    accumula    accumula        accumula    f_base
         forze       forze           forze       (reazione)
```

Formule Ricorsive

Forze:

```
Link n (end effector):
f_{n-1,n} = F_ext

Link i (generico):
f_{i-1,i} = f_{i,i+1} + F_{ext,i} + m_i·g
```

Momenti:

```
Link i:
M_{i-1} = M_i + r_{i,com} × f_i + τ_i
```

Dove:

- r_{i,com}: vettore dal giunto i al centro di massa del link i
- τ_i: coppia fornita dal giunto i (calcolata con J^T)

8.10 Quando Considerare il Peso dei Link

Con Peso dei Link

Se i link hanno massa significativa:

```
Equilibrio del link i:
f_{i-1,i} + f_{i,i+1} + F_{ext,i} + m_i·g = 0

Dove:
m_i·g = [0, -m_i·g]  (forza peso verso il basso)
```

Modifica al calcolo:

```
τ = J^T·F_ext + G(q)

Dove G(q) sono i termini gravitazionali (peso dei link)
```

Senza Peso dei Link (Semplificazione)

Se i link sono leggeri rispetto alla forza esterna:

```
Ignoriamo m_i·g

τ = J^T·F_ext
```

8.11 Riepilogo Completo

Per Forza sul Link 2 (non TCP)

LINK 3: Scarico

f_{2,3} = [0, 0]

$\tau_3 = 0$

LINK 2: Riceve tutta la forza esterna

f_{1,2} = -F(e,2) = $[0, F_0]$

M_1 (al giunto R_1) = $a \cdot F_0 \cdot \cos(\theta_1+\theta_2) = \tau_2$

LINK 1: Trasmette alla base

f_{base,1} = -f_{1,2} = $[0, -F_0]$

M_base = τ_1

BASE: Reagisce

Forza: $[0, F_0]$
Momento: τ_1

Per Forza sul TCP

LINK 3: Riceve forza dal TCP
$f_{2,3} = [0, F_0]$
Forza assiale: $\tau_3 = -F_0 \cdot \sin(\theta_1+\theta_2)$

LINK 2: Trasmette forze e momenti
$f_{1,2} = [0, F_0]$ (componente verticale)
+ componente lungo l'asse
$M_1 = \tau_2$

LINK 1: Trasmette alla base
$f_{base,1} = [0, -F_0]$
$M_{base} = \tau_1$

BASE: Reagisce con forza e momento totali
Forza: $[0, F_0]$
Momento: τ_1

Formula Generale

Per qualsiasi configurazione:

1. Calcola $\tau = J^T(q) \cdot F_{ext}$

2. Le forze interne si propagano dalla punta:
   f_i = somma delle forze esterne su link i,i+1,...,n

3. La base reagisce con:
   $f_{base} = -\Sigma F_{ext}$ (somma di tutte le forze esterne)
   $M_{base} = \tau_1$

FINE DEL DOCUMENTO

Buono studio! 📚🤖