**LAPORAN TUGAS BESAR**

***SISTEM PERSAMAAN LINIER, DETERMINAN DAN APLIKASINYA***

**Aljabar Linier dan Geometri (IF2123)**

**Dosen Pengajar: Dr. Judhi Santoso, M.Sc.**

****

**Disusun Oleh:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Kevin John Wesley Hutabarat** | **(13521042)** |
| **Manuella Ivana Uli Sianipar** | **(13521051)** |
| **Jericho Russel Sebastian** | **(13521107)** |

**SEKOLAH TEKNIK ELEKTRO DAN INFORMATIKA**

**INSTITUT TEKNOLOGI BANDUNG**

**BANDUNG**

**SEPTEMBER 2022**

# DAFTAR ISI

[DAFTAR ISI 1](#_Toc115435178)

[BAB 1 2](#_Toc115435179)

[BAB 2 3](#_Toc115435180)

[A. Metode Eliminasi Gauss 3](#_Toc115435181)

[B. Metode Eliminasi Gauss-Jordan 4](#_Toc115435182)

[C. Determinan 4](#_Toc115435183)

[D. Matriks Balikan 5](#_Toc115435184)

[E. Matriks Kofaktor 5](#_Toc115435185)

[F. Matriks Adjoin 6](#_Toc115435186)

[G. Kaidah Cramer 6](#_Toc115435187)

[H. Interpolasi Polinom 6](#_Toc115435188)

[I. Interpolasi Bicubic 7](#_Toc115435189)

[J. Regresi Linier Berganda 7](#_Toc115435190)

[BAB 3 8](#_Toc115435191)

[BAB 4 10](#_Toc115435192)

[BAB 5 14](#_Toc115435193)

[DAFTAR REFERENSI 15](#_Toc115435194)

# BAB 1

**DESKRIPSI MASALAH**

Sistem persamaan linier (SPL) banyak ditemukan di dalam bidang sains dan rekayasa. Anda sudah mempelajari berbagai metode untuk menyelesaikan SPL, termasuk menghitung determinan matriks. Sembarang SPL dapat diselesaikan dengan beberapa metode, yaitu metode eliminasi Gauss, metode eliminasi Gauss-Jordan, metode matriks balikan (*x = A-1b*), dan kaidah Cramer (khusus untuk SPL dengan *n* peubah dan *n* persamaan). Solusi sebuah SPL mungkin tidak ada, banyak (tidak berhingga), atau hanya satu (unik/tunggal).

Di dalam Tugas Besar 1 ini, mahasiswa diminta membuat satu atau lebih *library* aljabar linier dalam Bahasa Java. Library tersebut berisi fungsi-fungsi seperti eliminasi Gauss, eliminasi Gauss-Jordan, menentukan balikan matriks, menghitung determinan, kaidah Cramer (kaidah Cramer khusus untuk SPL dengan *n* peubah dan *n* persamaan). Selanjutnya, gunakan *library* tersebut di dalam program Java untuk menyelesaikan berbagai persoalan yang dimodelkan dalam bentuk SPL, menyelesaikan persoalan interpolasi, dan persoalan regresi.

# BAB 2

**TEORI SINGKAT**

## I. Metode Eliminasi Gauss

Metode eliminasi Gauss, atau reduksi baris, merupakan sebuah algoritma yang digunakan untuk menyelesaikan sebuah sistem persamaan linear. Dinamai menurut matematikawan asal Jerman Carl Friedrich Gauss, metode ini terdiri dari serangkaian operasi baris elementer yang dilakukan pada sebuah matriks augmented hingga matriks berbentuk eselon baris (*row echelon*). Selain untuk menentukan solusi sistem persamaan linear, metode reduksi baris juga digunakan untuk menghitung determinan dan balikan matriks.

Operasi baris elementer yang digunakan dalam proses reduksi baris adalah:

1. menukar dua baris
2. mengalikan suatu baris dengan bilangan skalar
3. menjumlahkan suatu baris dengan kelipatan skalar dari baris lainnya

Untuk menggunakan metode eliminasi Gauss untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear, sistem persamaan tersebut diubah ke dalam bentuk matriks augmented dengan koefisien masing-masing variabel menjadi elemen dalam matriks tersebut. Suatu sistem persamaan linear variabel dapat dinyatakan dalam bentuk perkalian matriks sebagai berikut:

Bentuk di atas dapat ditulis sebagai perkalian matriks dan matriks augmented:

Pada matriks ini dilakukan eliminasi maju (*forward elimination*), yaitu rangkaian operasi baris elementer untuk mengeliminasi elemen di bawah diagonal utama matriks, sehingga terbentuk matriks segitiga atas di ruas kiri:

Setelah terbentuk matriks eselon baris seperti di atas, dilakukan penyulihan mundur (*back substitution*) untuk menentukan solusi akhir sistem persamaan linear. Penyulihan mundur dilakukan sebagai berikut: baris terakhir menyatakan bahwa . Kemudian, nilai disulihkan ke baris di atasnya, sehingga menghasilkan . Nilai dan kemudian disulihkan ke baris selanjutnya untuk mendapatkan nilai , dan seterusnya hingga baris pertama tercapai dan semua nilai variabel ditemukan.

Jika setelah melakukan eliminasi maju ditemukan baris nol, maka disimpulkan bahwa sistem persamaan linear memiliki banyak solusi. Solusi ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan parametrik dengan banyak parameter sama dengan banyak baris nol.

Sebaliknya, jika ditemukan baris dengan ruas kiri nol namun ruas kanan bukan nol, sistem persamaan linear tidak memiliki solusi, karena baris tersebut berkorespondensi dengan persamaan yang merupakan pernyataan salah.

## II. Metode Eliminasi Gauss-Jordan

Metode eliminasi Gauss-Jordan merupakan perlanjutan dari metode eliminasi Gauss, di mana setelah melakukan eliminasi Gauss hingga menghasilkan matriks segitiga atas, matriks direduksi lebih lanjut dengan operasi baris elementer sehingga menghasilkan matriks eselon baris tereduksi (*reduced row echelon*). Sehingga, solusi sistem persamaan linear dapat ditemukan tanpa melakukan penyulihan mundur.

Setelah melakukan eliminasi Gauss, elemen-elemen di atas diagonal utama dieliminasi menggunakan operasi baris elementer sehingga menghasilkan matriks eselon tereduksi seperti di bawah:

Ketika mencapai bentuk ini, solusi sistem persamaan disimpulkan sebagai , , , …, .

## III. Determinan

Determinan adalah salah satu properti matriks matriks yang sering dipakai dalam berbagai operasi matriks.

Cara mencari determinan ada 2 yaitu:

1. Reduksi baris

Matriks diubah menjadi matriks segitiga bawah atau segitiga atas dengan menggunakan OBE. Determinan matriks tersebut dapat dicari dengan mengalikan elemen-elemen diagonalnya.

Misalkan sebuah matriks A berdimensi yang sudah menjadi matriks segitiga atas

Maka determinan matriks A adalah

2. Ekspansi kofaktor

## IV. Matriks Balikan

Matriks balikan adalah suatu matriks yang jika dikalikan dengan matriks awalnya akan menghasilkan matriks identitas. Jika matriks awalnya adalah matriks A, biasanya matriks balikan dinyatakan dengan A-1. Untuk memperoleh matriks balikan, dapat digunakan beberapa metode, yaitu metode reduksi baris dan metode adjoin.

Metode reduksi baris dapat dilakukan dengan menambahkan matriks identitas di sebelah kanan matriks, kemudian mereduksi barisnya dengan OBE sehingga matriks di sisi kiri menjadi matriks identitas dan matriks di sebelah kanan merupakan matriks balikannya. Metode adjoin dapat dilakukan dengan membuat matriks kofaktor, kemudian menghitung transposenya dan membaginya dengan determinan matriks tersebut. Sebuah matriks dikatakan memiliki matriks balikan apabila determinannya tidak sama dengan nol.

## V. Matriks Kofaktor

Matriks kofaktor adalah hasil perkalian minor dengan suatu angka (-1)i+j, dengan i merupakan representasi dari indeks baris dan j merupakan representasi dari indeks kolom. Minor adalah determinan suatu matriks yang diperoleh dengan cara menghilangkan elemen-elemen dari suatu matriks, misalnya matriks A, pada baris ke-i dan kolom ke-j. Misalnya untuk minor M11 dapat diperoleh dengan menghapus elemen-elemen matriks pada kolom ke-1 dan baris ke-1 dan menghitung determinan dari matriks yang diperoleh.

Kofaktor suatu elemen baris ke-i dan kolom ke-j dari matriks A dilambangkan dengan Cij dengan rumus:

Cij = (-1) i+j Mij

Sebagai contoh, untuk kofaktor C11 dari matriks A = adalah:

C11 = (-1)1+1

C11 = (-1)2

C11 =

Diperoleh kofaktor C11 dari matriks A adalah (ei – fh).

## VI. Matriks Adjoin

Matriks adjoin adalah matriks yang diperoleh dari hasil transpose suatu matriks A = [aij] nxn dimana elemen dari matriks tersebut merupakan kofaktor dari elemen aij. Adjoin dari matriks A dilambangkan dengan adj A. Untuk memperoleh adjoin dari suatu matriks, yang harus dilakukan pertama kali adalah menghitung kofaktor dari matriks yang diberikan, kemudian temukan transpose dari matriks kofaktor berikut.

Misalnya untuk matriks A = , matriks kofaktor dari matriks tersebut adalah

C =

Adjoin dari matriks A dapat diperoleh dengan mentranspose matriks c, yaitu:

Adj A =

## VII. Kaidah Cramer

Kaidah Cramer adalah salah satu metode yang dapat digunakan untuk memperoleh solusi dari sistem persamaan linear dengan memanfaatkan determinan matriks. Misalnya, jika diberikan sebuah sistem persamaan linear:

Solusi dari sistem persamaan linear di atas dapat diperoleh dengan membagi determinan matriks yang sudah diganti satu kolomnya dengan konstanta yang berada di sebelah kanan tanda sama dengan.

;

## VIII. Interpolasi Polinom

Interpolasi adalah metode menghasilkan titik-titik data baru dalam suatu jangkauan dari suatu set diskrit data-data yang diketahui. Sedangkan polinomial adalah pernyataan matematika yang melibatkan jumlah perkalian pangkat dalam satu atau lebih variabel dengan koefisien, biasa dinyatakan sebagai anxn + … +a2x2 + a1x + a0.

Dari pengertian di atas, dapat disimpulkan bahwa interpolasi polinomial adalah teknik interpolasi yang dilakukan dengan cara mengasumsikan pola data yang semula dimiliki mengikuti pola polinomial, baik yang berderajat satu maupun berderajat tinggi. Metode ini dilakukan dengan mensubstitusi titik ke sebuah persamaan polinomial untuk mencari nilai-nilai koefisien dari variabel suku-suku polinomial. Persamaan yang didapat kemudian digunakan untuk memperkirakan nilai dari titik yang diminta.

## IX. Interpolasi Bicubic

Interpolasi bicubic adalah suatu teknik interpolasi pada data 2 dimensi. Metode ini umumnya digunakan dalam pembesaran citra yang merupakan pengembangan dari interpolasi linear dan cubic.

Misalnya diketahui 16 buah titik , model interpolasinya adalah

Dari 16 titik yang diberikan akan dicari nilai dengan persamaan

## X. Regresi Linier Berganda

Regresi linear merupakan salah satu metode yang digunakan untuk memprediksi nilai, selain menggunakan interpolasi polinom. Terdapat rumus umum dari regresi linear yang dapat digunakan untuk regresi linear berganda, yaitu

Untuk memperoleh nilai dari setiap β, dapat digunakan *normal estimation equation for multiple linear regression*, yang kemudian dapat diselesaikan dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

# BAB 3

**IMPLEMENTASI**

## I. Library

### 1. Metode Eliminasi Gauss dan Gauss-Jordan

1. Fungsi elimGauss

Fungsi ini mengembalikan solusi SPL yang direpresentasikan oleh matriks ini, menggunakan metode eliminasi Gauss.

1. Fungsi elimGaussJordan

Fungsi ini mengembalikan solusi SPL yang direpresentasikan oleh matriks ini, menggunakan metode eliminasi Gauss-Jordan

### 2. Metode Matriks Balikan

1. Fungsi Balikan

Menerima input matriks dan mengembalikan matriks balikan dari matriks tersebut.

1. Fungsi SPL

Menerima input persamaan linier dalam bentuk matriks, dengan konstanta berada di matriks terpisah.

### 3. Kaidah Cramer

1. Fungsi cramer

Menerima input sebuah matriks yang berisi koefisien dan matriks yang berisi konstanta secara terpisah atau matriks augmented yang berisi koefisien dan konstanta secara bersamaan. Kemudian, fungsi menghitung solusi system persamaan linear dengan menggunakan determinan matriks. Nilai yang dikembalikan fungsi berupa tipe bentukan SolusiSPL yang berupa list yang berisi solusi persamaan linear.

1. Fungsi determinan

Menerima input sebuah matriks kemudian mengembalikan nilai determinan nya dengan menggunakan metode reduksi baris. Nilai yang dikembalikan fungsi berupa float.

## II. Program Utama

1. Interpolasi Polinom
2. Fungsi interpolasipolinom

Fungsi ini dilakukan dengan meminta input berupa sebuah integer. Kemudian pengguna diminta memasukkan titik sebanyak nilai yang telah dimasukkan sebelumnya. Kemudian prosedur mengolah titik-titik yang sudah dimasukkan dan mengembalikan SolusiSPL yang berupa koefisien dari persamaan polinomial yang dicari.

Fungsi ini juga dapat dijalankan dengan menggunakan parameter berupa matriks yang sudah berisi titik-titik sebelumnya, kemudian diproses sehingga diperoleh SolusiSPL.

1. Prosedur printfungsi

Prosedur ini dilakukan dengan parameter berupa SolusiSPL yang sudah didapat dari fungsi interpolasipolinom, kemudian mencetak fungsi polinomial dengan koefisien yang didapat dari parameter SolusiSPL tersebut.

1. Fungsi nilaifungsi

Fungsi ini dijalankan dengan parameter berupa SolusiSPL yang sudah didapat dari fungsi interpolasipolinom. Kemudian fungsi ini menerima input berupa x dan menghitung nilai fungsi polinom nya.

1. Bicubic Interpolation
2. Fungsi bicubic

Fungsi ini menggunakan parameter berupa sebuah matriks yang berisi nilai z, dengan indeks baris merupakan nilai x dan indeks kolom merupakan nilai y.Fungsi ini mengembalikan matriks yang berisi elemen berupa konstanta persamaannya.

1. Regresi Linear Berganda

Fungsi ini menerima input berupa matriks kemudian mengembalikan SolusiSPL dengan menggunakan metode Gauss-Jordan.

# BAB 4

**EKSPERIMEN**

# I. SPL Ax = B

a. Text

Description automatically generated

b. Chart

Description automatically generated with medium confidence

c.A picture containing table

Description automatically generated

d.A blue screen with white text

Description automatically generated with low confidenceA picture containing text

Description automatically generated

# II. SPL Augmented

1. Text

   Description automatically generated

# III. SPL Berbentuk

1. Text

   Description automatically generated

# IV. Interpolasi Polinom

1. Studi Kasus 1









1. Studi Kasus 2

Shape

Description automatically generated with medium confidence

Text

Description automatically generated with medium confidence

Text

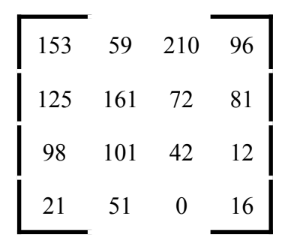
Description automatically generated

1. Studi Kasus 3

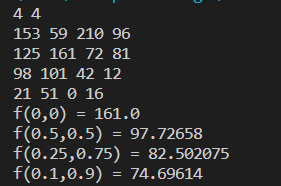


# V. Interpolasi Bicubic

Dengan input matriks



Didapatkan hasil yaitu



# VI. Regresi Linier

# BAB 5

**SIMPULAN, SARAN DAN REFLEKSI**

1. Simpulan

Interpolasi polinomial, bicubic interpolation, dan regresi linear berganda dapat diselesaikan dengan memanfaatkan fungsi-fungsi seperti mencari SPL, determinan, dan matriks balikan.

1. Saran

Untuk tugas selanjutnya, sebaiknya memisahkan semua fungsi yang dibuat kemudian dipanggil di program utama.

1. Refleksi

Dengan adanya tugas ini, kita dapat mengetahui seberapa berguna nya matriks dan metode-metode apa saja yang dapat dilakukan pada matriks

# DAFTAR REFERENSI

Howard Anton and Chris Rorres, Elementary Linear Algebra, 12th ed, John Wiley and Sons, 2019

Repository github: https://github.com/kevinjohn01/Algeo01-21042