



**VARENNE
CAPITAL**

Rapport Projet d'Approfondissement en Finance
Année Scolaire 2021-2022

Trading Simulation

Rédigé par :

Alan BLAZER

Kevin KUHL

Felipe MONTENEGRO

Élèves-ingénieurs, M2

Sous l'encadrement de :

Florent BERSANI

Analyste Gérant, Varrene Capital Partners

Sous la supervision de :

Peter TANKOV

Référent Pédagogique de l'ENSAE

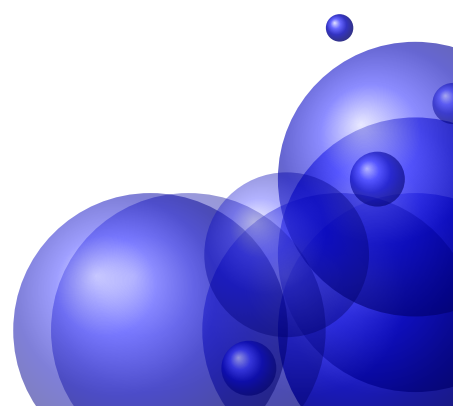
Oct 2021 - Mai 2022

VARENNE CAPITAL PARTNERS

42, avenue Montaigne

75008 Paris

FRANCE



Avertissement

Les auteurs sont seuls responsables des avis exprimés dans ce document, lesquels ne sauraient aucunement engager l'École Nationale de la Statistique et de l'Administration Économique (ENSAE), ni Varenne Capital Partners.

Table des matières	ii
Introduction	1
1 Contexte du Business	1
1.1 Long Equity	1
1.2 Short Equity	2
1.3 Merge Arbitrage	3
1.4 Tail Risk Hedging	3
1.5 Trading à VCP	4
2 Approche théorique	5
2.1 Eléments de compréhension théoriques	5
2.2 Le modèle d'Almgren	6
2.3 Le crash du 6 mai 2010 - Flash Crash	7
3 Simulation	10
3.1 Les lois simulées	10
3.2 La création de notre modèle simplifié	13
4 Estimation	16
4.1 Estimation des points de changement	17
4.1.1 Détection du point de changement basée sur la somme cumulative des premiers et seconds moments	17
4.1.2 Détection du point de changement basée sur le changement des para- mètres estimés	18
4.2 Estimation de la classe de processus	25
4.3 Estimation des paramètres	27
4.4 Le modèle simplifié en pratique	31
5 Conclusions et prochaines étapes	36
Bibliographie	37

NOTRE projet s'insère dans les activités de trading de la société Varenne Capital Partners. L'enjeu du projet est ambitieux et enthousiasmant : il s'agit de s'intéresser à l'impact de marché qui résulte d'une opération d'achat ou de vente massive sur le marché.

Initialement, le projet se définissait selon les quatre volets suivantes :

1. **Générer un simulateur de marché** : Cette première étape doit effectivement consister à sélectionner des familles de processus aléatoires dont les caractéristiques correspondent aux faits stylisés observés sur les marchés. Une fois ces processus choisis, il s'agit de les simuler précisément et, dans l'idéal, de les associer grâce à des coefficients de corrélation.
2. **Générer un simulateur d'achat / vente** : Cette deuxième étape doit permettre à l'utilisateur d'agir sur ce marché - opération d'achat ou de vente - en opérant une pression sur tel ou tel actif. L'utilisateur doit être capable de visualiser, dans les limites de ce cadre, l'effet de son action sur les prix des actifs du marché. Précisons néanmoins qu'il n'est pas envisagé de simuler un carnet d'ordre.
3. **Détecter tout changement de régime** : Cette troisième étape vise à définir le moment où, l'utilisateur ayant appliqué une pression à la hausse ou à la baisse sur un certain actif, un observateur tiers peut soupçonner l'existence d'une telle pression. En d'autres termes, il s'agit de savoir pour l'utilisateur si son action est rendue perceptible au regard d'un autre acteur sur le marché.
4. **Adapter le processus d'achat / vente de telle sorte qu'il ne soit pas détectable par toute tierce personne**) : Dans cette dernière étape, un algorithme de *reinforcement learning* doit aboutir à l'établissement de la meilleure stratégie d'opération sur le marché en ce sens qu'elle rend indétectable l'opération menée par VCP, ce qui garantit l'impact de marché le plus faible et minimise les coûts de l'opération.

Le cadre de ce projet est donc très ambitieux, aussi il a été nécessaire d'opérer des choix et de concentrer l'ensemble des recherches possibles sur certains aspects. Par conséquent, et ce sur les conseils avisés de notre encadrant, nous avons défini un jeu, organisé de la manière suivante :

1. **Création du modèle simplifié - Simulation** : Cette première partie consiste en l'élaboration du cadre du jeu et reprend la première étape définie ci-dessus. Au terme de cette partie, nous produisons des trajectoires qui sont elles-mêmes divisibles en trois sous-trajectoires : une première section est simulée à partir d'un mouvement brownien géométrique (MBG), la deuxième section à partir d'un *mean-reverting (MR) process*, et la troisième section à partir d'un autre mouvement brownien géométrique. Au total, une fois cette partie effectuée, nous disposons d'une série temporelle qui est au fondement de notre jeu.
2. **Résolution du modèle simplifié - Estimation** : Dans cette deuxième partie, il s'agit d'effectuer l'opération inverse et de retrouver les trois processus initiaux (MBG - MR - MBG)

à partir de la série temporelle construite l'issue de la première partie. Trois étapes sont alors à distinguer :

- (a) **Déterminer les points de changement de régime** : Dans un premier temps, nous déterminons quels sont les moments où les changements de régime ont lieu. Une fois ces deux points déterminés, la série temporelle est scindée en trois séries temporelles distinctes.
- (b) **Déterminer les processus aléatoires des trois segments** : Chacune de ces trois séries temporelles est soumise à un modèle de *machine learning* - en l'occurrence ici, une *random forest* - qui déterminera le processus aléatoire qui l'a générée.
- (c) **Estimer les paramètres des processus aléatoires** : Enfin, une fois le processus aléatoire déterminé, les paramètres de ce processus sont estimés grâce à l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Le projet ainsi réalisé sera donc présenté et explicité tout au long de ce rapport, ainsi que les nombreux éclairages théoriques et académiques qui ont permis sa bonne conduite et complété son intérêt pédagogique.

1) Contexte du Business

VARENNE Capital Partners est une société de gestion de portefeuille indépendante dont l'ambition est de fournir aux investisseurs des performances d'excellence avec le minimum de prise de risque nécessaire pour les obtenir. Pour ce faire, ils développent et associent plusieurs moteurs de performance : Long Actions, Short Actions, Situations Spéciales (Merge et Arbitrage), et Couvertures Macro-économiques.

- **Long Equity** : Stratégie coeur de la gestion qui vise à sélectionner des entreprises de très bonne qualité économique achetées à une décote importante par rapport à leur estimation de valeur. L'équipe de gestion applique des techniques proches de celles du Private Equity pour construire un portefeuille concentré d'entreprises présentant un avantage concurrentiel durable et une décote à l'achat de plus de 50%. La poche Long Actions compte sur 3 stratégies de décorrélation et couverture (les trois prochains items) pour ne pas piloter sur les expositions au risque. Ces stratégies peuvent être soit activées, soit neutralisées selon les configurations des marchés et les opportunités identifiées par ses équipes ;
- **Short Equity** : La stratégie de Short Action a pour but de générer de la performance en prenant des positions vendeuse sur des entreprises identifiées comme pouvant détruire de la valeur pour l'investisseur ;
- **Situations Spéciales (Merge Arbitrage)** : Il s'agit de la situation d'arbitrage des fusions et acquisitions, en se concentrant uniquement sur les opérations annoncées et amicales. L'arbitrage de fusions-acquisitions et restructurations de capital fournit un rendement supplémentaire au fonds et réduit la corrélation du portefeuille aux indices, notamment en cas de marchés baissiers ;
- **Couvertures Macroéconomiques (Tail Risk Hedging)** : Il s'agit des stratégies mises en place pour couvrir les risques résiduelles de la poche Long Action en visant à la protéger contre des risques extrêmes. Pour ce faire, ils utilisent 1,5% du budget pour constituer des positions qui tirerait avantage de ces scénarios peu probables. Une crise économique majeure peut entraîner tout actif risqué dans une baisse difficilement remédiable. La gestion utilise des instruments au profil de rendement/risque asymétrique, comme les options, afin de couvrir le portefeuille contre cette éventualité. Les stratégies de couverture macro offrent une très bonne protection en cas de réalisation du scénario négatif, sans amputer les performances générales pour autant

Varenne Capital Partners compte sur une équipe de 35 employés dont 14 gestionnaires.

1.1 Long Equity

Dans le cadre de la poche Long Equity, l'univers de l'investissement est composé d'environ 10.000 entreprises. Le meta-univers est d'environ 60000 entreprise et, après l'application de filtres selon le secteur et la liquidité par exemple, l'univers est réduit à environ 10.000 entreprises.

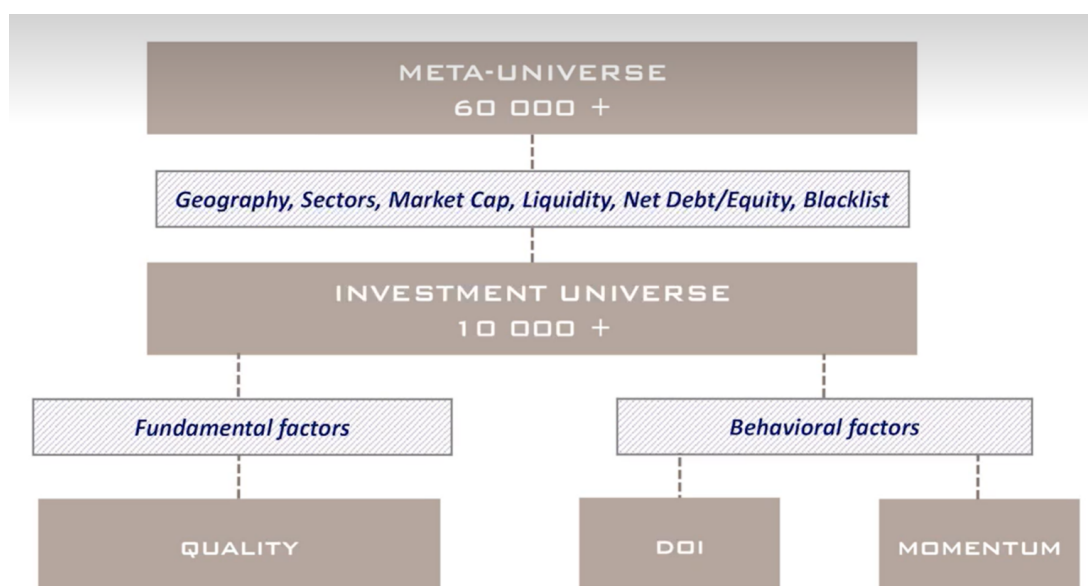
Dans ce cadre, VCP applique des filtres de caractère fondamentaux et comportementaux pour isoler les entreprises dans 2 catégories :

- **Entreprises de qualité** (fruit des facteurs fondamentaux) : entre 400 et 500 sociétés. Normalement ces sociétés ont des actions très chères, donc il est nécessaire de croiser différents critères pour réussir à dénicher des opportunités susceptibles de traiter avec une décote ;
- **DOI et Momentum** (fruit des facteurs comportementaux) : il s'agit des entreprises qui ne représentent pas encore les caractéristiques d'excellence économique comme dans la première catégorie, mais qui ont de chance de la démontrer prochainement.

DOI = Dealing Of Insiders. Il s'agit des transactions des dirigeants actionnaires qui attirent l'attention d'une possible opportunité d'investissement. VCP a une base de données des transactions et un code derrière qui donne un score à des transactions pour identifier des possibles opportunités comme des achats disproportionnés qui peuvent caractériser un DOI.

Exemple de DOI : PANDORA, les directeurs ont profité d'une chute de 45% au prix et ils ont acheté €2.5M d'actions. La valeur de l'entreprise a beaucoup montée après.

Le groupe d'entreprises **Momentum** cherche à isoler des tendances à court terme liées à des situations de retournement ou de repositionnement de l'entreprise.



GRAPHIQUE 1 – LONG EQUITY - Structure pour la recherche d'actions.

1.2 Short Equity

Une position vendeuse en action a toujours l'objectif de générer de la performance absolue et non de couvrir les positions longues chez VCP. Les stratégies de Short Equity sont structurées pour identifier des entreprises qui sont susceptibles à faire face à un capital évent d'un horizon de 18 à 24 mois.

Un capital événement se caractérise par :

- Augmentation en capital très décote ;
- Vend équipe stratégique ;
- Faillite.

Dans le contexte des stratégies de Short Equity, il existe la capacité de rester en retraite, c'est-à-dire désactiver temporairement la stratégie si l'environnement n'est pas considéré propice et, à l'inverse, la stratégie peut être réactivée, avec une allocation de capital au fur de la mesure que les opportunités sont identifiées à nouveau.

1.3 Merge Arbitrage

La typologie de ces opérations s'adapte dans des fusion et acquisitions annoncées et amicales qui ont lieu sur le marché développé, ainsi que des situations spéciales comme des restructurations de capital. VCP n'a pas d'obligation d'investissement et, donc, la participation dans une stratégie de ce type arrive lorsqu'elle a du sens et les exigences de rentabilité et qualité d'opération sont remplies.

Les stratégies de Merge et Arbitrage ont donc deux rôles :

- Décorréler les fonds ;
- Rajouter un rendement supplémentaire afin de financer les stratégies de couverture macroéconomiques.

1.4 Tail Risk Hedging

Il s'agit des stratégies de couverture macroéconomiques, qui sont normalement censées à identifier les risques ne pouvant pas être gérés par la construction de portefeuille. Une fois ces risques identifiés, la prochaine étape serait les isoler et les couvrir via des positions/instruments financiers au profil rendement/risque asymétrique.

Avec la crise Covid-19, l'utilité d'avoir ce type de stratégie dans le portefeuille a été démontrée. On a pu voir en pratique le besoin d'une protection contre la possibilité de perte permanent de capital afin de maintenir les positions ou même de réinvestir au cas d'une crise.

VCP compte sur deux types de couverture :

- **Proximale** : il s'agit d'être proche du risque porté par les stratégies de Long Equity, c'est-à-dire des couvertures sur le risque marché action en utilisant la couverture vanille (standard) à partir du critère de la décote des actions. Le soucis avec ces stratégies est qu'elles normalement sont trop chères ;
- **Distal** : ce type est plus loin du marché action et il porte sur la faiblesse de l'économie mondiale, en ayant comme critère de sélection la thèse macroéconomique. D'autres mots,

il s'agit d'identifier et de faire des actions dessus les premiers endroits où la détérioration des conditions économiques et de crédit pourraient se mettre à réaliser.

Ces stratégies pour se protéger des volatilités du marché sont mises en place à travers des options :

- **Put Volatility Knock-Out** : pour se protéger des chutes prolongées des marchés actions ;
- **Credit Default Swaps** : au cas d'une crise financière ou économique majeure ;
- **Call Options** : au cas des chocs inflationnistes ou des hausses des taux d'intérêt.

1.5 Trading à VCP

Pour mettre en œuvre les investissements de Long Equity, VCP doit acheter et vendre des quantités importantes d'actions. Les opérations de VCP sont donc confrontées de manière critique au compromis pratique entre le risque de prix et le coût d'exécution. En d'autres mots, acheter une nouvelle position pour l'allocation Long Equity trop rapidement peut entraîner des coûts d'exécution élevés, mais l'acheter trop lentement peut mener à une exposition à des variations de prix défavorables. Ce projet est dédié donc à l'étude pour trouver l'ordre optimal des échanges sous des contraintes de prix et de durée.

Pour ce faire, à partir de la compréhension du flux de stock de gros ordres de VCP à basse fréquence et des données de négociation disponibles, un simulateur de marché a été construit. Ce simulateur donne des signaux de récompense macro à utiliser dans un renforcement du cadre d'apprentissage pour le trading, qui peut être utilisé par exemple pour l'étalonnage du taux de participation.

2) Approche théorique

NOTRE étude a tout d'abord consisté en une revue de littérature, notamment au sujet de l'impact de marché occasionné par l'exécution de *metaorders*. Nous proposons donc, dans cette partie, de présenter les concepts fondamentaux relatifs à l'impact de marché ainsi que quelques modèles qui ont été développés afin de quantifier cet impact.

Enfin, nous terminerons cette partie en analysant un crash survenu sur le marché américain des actions le 6 mai 2010, crash sur lequel la SEC a grandement enquêté.

2.1 Éléments de compréhension théoriques

Lorsqu'il s'agit d'analyser les stratégies d'exécution d'opérations de marché de grands acteurs tels que Varenne Capital Partners, certains concepts méritent d'être gardés à l'esprit.

Metaorder

Le premier concept que nous définissons est celui de *metaorder* qui, selon Michael Benzaquen (?) correspond à *une succession de petits trades, tous exécutés dans la même direction et émanant d'un même et unique acteur de marché*.

Un tel *metaorder* vient se heurter à la question de la liquidité de cet actif. Toujours selon Michael Benzaquen (?), la liquidité d'un actif financier désigne sa résistance à la pression exercée sur son prix par des ordres d'achat ou de ventes. En pratique, la liquidité fait donc référence au volume d'ordres à cours limité (ie *limit orders*) proches de la meilleure cote. Ainsi, en raison des limites imposées par la liquidité d'un actif financier, si un *metaorder* est exécuté instantanément, alors l'acteur à l'origine de cette ordre subirait un impact de marché élevé, ce qui cause des coûts additionnels (*spread and slippage costs*¹). Par conséquent, les acteurs financiers scindent ces grands ordres en des ordres plus petits.

Impact de marché

Définissons désormais l'impact de marché. En premier lieu, nous devons préciser la formule d'un *metaorder*, qui est la suivante :

$$Q = \sum_{t=1}^T q_t = \int_0^T m_t dt$$

Un *metaorder* Q est donc égal à la somme des plus petits ordres (q_t), et à l'intégrale du ratio d'exécution (m_t).

Etant donné qu'il n'existe pas de formule parfaite pour mesurer l'impact sur le marché (car on ne peut pas avoir, simultanément, les résultats sans et avec l'exécution de l'ordre), nous

1. Ces derniers correspondent au *premium* payé par l'investisseur lorsqu'il exécute une séquence de *child orders* du fait de l'impact de marché.

devons l'estimer par le biais du **peak impact**, c'est-à-dire la moyenne de la différence de prix entre $t = 0$ et $t = T$:

$$I(Q, T) = \mathbb{E}[\epsilon(p_T - p_0)|Q]$$

où ϵ représente la direction du *metaorder* ($\epsilon = \pm 1$) car $I(Q, T)$ doit être une valeur positive.

Enfin, nous définissons le **coût d'exécution** (en nous concentrant uniquement sur les *slippage costs*, car les *spread costs* dépendent du volume de la commande, mais pas de l'impact), qui est mathématiquement donné par :

$$C(Q, T) := \mathbb{E} \left[\int_0^T m_t(p_t - p_0) dt | Q \right]$$

Problématisation et lien avec notre projet

L'optimisation des stratégies d'exécution a pour objectif principal la réduction des *slippage costs*, qui peuvent être considérés sous trois formes :

- Glissement « traditionnel » causé par une liquidité limitée ;
- Glissement causé par le comportement de suivi de tendance d'autres pairs du marché, qui sont attentifs aux exécutions de gros ordres ;
- Glissement dû aux mouvements de prix causés par la volatilité du marché (on remarque que plus la période d'exécution est longue, plus l'exposition est grande).

Dans cette optique, le projet a pour objectif de proposer des stratégies d'exécution plus proches de la stratégie optimale, en s'appuyant sur des **simulations de marché**, **détection de changement de régime** et enfin sur l'utilisation de **apprentissage par renforcement** pour entraîner un modèle de prise de décision (basé sur des récompenses négatives et positives).

2.2 Le modèle d'Almgren

Nos recherches sur l'impact de marché nous ont amenés à étudier plusieurs modèles et à comprendre les dynamiques que ces derniers cherchent à reproduire.

Aussi nous avons décidé de présenter ici le modèle d'Almgren qui constitue encore aujourd'hui une référence dans le domaine. Nous précisons que nous nous fondons sur le modèle développé par Almgren, Thum, Hauptmann et Li (2005)².

Ce modèle comporte des simplifications par rapport au modèle d'Almgren and Chriss (2000) et Almgren (2003), et c'est la raison pour laquelle nous le présentons. En effet, parmi les simplifications opérées, Almgren, Thum, Hauptmann et Li (2005) décident de considérer le taux de trading comme constant et de négliger l'impact croisé (*cross-impact*, ie l'impact de l'évolution des prix d'un actif du marché sur les autres actifs qui composent ce marché).

2. <https://www.cis.upenn.edu/~mkearns/finread/costestim.pdf>

Ces simplifications, et notamment la deuxième, sont pertinentes dans notre cas étant donné que nous n'avons finalement pas simulé un marché complet - dont les actifs sont plus ou moins corrélés les uns aux autres - mais un unique actif financier.

Revenons donc au modèle en tant que tel.

Almgren, Thum, Hauptmann et Li (2005) décomposent l'impact de marché en deux composantes :

- **Une composante permanente** : Elle reflète l'information transmise au marché par le déséquilibre achat/vente. Cette composante est considérée comme indépendante du temps d'exécution T (T désigne ici une durée, ie quelques minutes, quelques heures ou quelques jours).
- **Une composante temporaire** : Elle reflète la concession faite sur le prix pour attirer les contreparties dans un temps limité. Cette composante est, elle, très fortement dépendante du temps d'exécution T .

Au total, nous obtenons la formule suivante :

$$\text{Impact de marché réalisé} = \text{Impact de marché permanent} + \text{Impact de marché temporaire}$$

L'idée que l'impact de marché comporte deux composantes (temporaire et permanente) est particulièrement intéressante et cohérente avec ce qu'on observe sur le marché. Ce modèle est toujours largement utilisé aujourd'hui, et notre volonté initiale était de l'implémenter et de le conjuguer à des algorithmes de *reinforcement learning* afin de générer un simulateur capable d'indiquer au trader s'il devait accélérer ou ralentir la vitesse d'exécution de son *metaorder*.

Nous avons finalement opéré d'autres choix qui seront présentés plus bas dans ce rapport.

2.3 Le crash du 6 mai 2010 - Flash Crash

Tous ces éléments théoriques ne sauraient être parfaitement compris sans cet exemple de crash boursier survenu le 6 mai 2010 et sur lequel la *Securities and Exchange Commission* (SEC, organisme fédéral américain de réglementation et de contrôle des marchés financiers) a largement enquêté.

Cet après-midi du 6 mai 2010, sur le marché américain des actions, alors que les indices boursiers accusent déjà une baisse de 4% par rapport aux valeurs de fermeture de la veille, une brutale baisse de 5-6% supplémentaires est observée pendant une quinzaine de minutes avant que l'indice ne remonte à sa valeur initiale (ie. 15 minutes auparavant).

Pendant ce choc brutal observé vers 14h30, quasiment toutes les actions ont accusé une baisse de 5, 10 voire 15%. Les prix de certaines de ces actions ont même chuté de 60% pendant ces quelques minutes, avant de revenir à leur niveau précédant le choc.

Ces éléments ont donc incité la SEC à investiguer l'événement. Que s'est-il donc passé lors de cet après-midi du 6 mai 2010 ?

Un contexte favorable à la survenue du crash

Entrons donc davantage dans les détails de cet événement pour mieux comprendre les rouages du phénomène.

En début d'après-midi de ce 6 mai 2010, les marchés boursiers américains sont à la baisse. De surcroît, une pression à la baisse est exercée par des ordres de vente. Par ailleurs, et ceci dans une même dynamique, le *S&P 500 Volatility Index* (VIX, aussi surnommé indice de la peur) est en hausse de 22.5% par rapport à sa valeur d'ouverture le matin.

En outre, au cours de la matinée, la liquidité des contrats futures dits E-Mini s'effondre et passe de 6 milliards de dollars à l'ouverture à 2.65 milliards de dollars en début d'après-midi, soit une baisse de plus de 55%.

Enfin, dans ce contexte de haute volatilité et d'incertitude, un fonds mutuel - non nommé dans le rapport de la SEC - exécute un programme de vente de 75 000 contrats futures E-mini de maturité juin 2010 pour un montant total d'environ 4,1 milliards de dollars.

On voit donc le problème de liquidité qui va se poser ...

La faible liquidité d'un actif à l'origine d'un fort impact de marché

Le programme de vente choisi par le fonds mutuel consiste à atteindre un taux d'exécution de 9% du volume échangé lors de la minute précédente. Ce programme est exécuté automatiquement, sans intervention humaine, et ne prend en considération que le taux d'exécution précédemment défini, et ni le prix, ni le temps.

Aussi, lors de sa mise en exécution, ce programme engendre une baisse des prix de ce contrat, baisse d'autant plus brutale que la liquidité de cet actif (ie. sa profondeur de marché) est déjà faible. En outre, les premiers acheteurs de ces contrats vendus ont surtout été des traders haute fréquence qui, de manière générale, ne tiennent pas de positions longues ou courtes dans le temps. Par conséquent, une partie des contrats achetés par ces acteurs (c'est-à-dire les traders haute fréquence) sont aussitôt revendus, ce qui incite le programme à s'exécuter encore plus rapidement du fait de son paramétrage.

Alors que les traders haute fréquence s'échangent ces actifs à toute vitesse entre eux, leur liquidité diminue encore. En outre, des acteurs financiers dits "arbitrageurs" transfèrent opportunément cette pression exercée sur les E-Mini contrats futures en vendant massivement des actions incluses dans le SP 500, d'où la répercussion de l'impact sur le marché des actions.

Au total, alors que ce fonds mutuel avait déjà exécuté deux *metaorders* par le passé sur ce même actif, et ce, sur une durée de quelques heures, lors du 6 mai 2010, son programme s'est exécuté en l'espace de 20 minutes, engendrant le *flash crash*.

Les leçons à tirer de ce crash

Ce qu'on retient de cet événement, c'est surtout sa brutalité et son aspect éphémère.

Il illustre parfaitement ce qui se produit en cas de mauvaise stratégie d'exécution d'un *metaorder* sur les marchés : les dépendances des marchés les uns aux autres, la question de la

liquidité d'un actif, la volatilité et l'incertitude ... Toutes ces données expliquent ce crash aussi bref qu'intense.

En réaction à cet événement, la SEC a décidé la mise en place de nouveaux mécanismes de coupures des marchés ; aussi, lorsqu'une agitation inhabituelle et irrationnelle est constatée sur les marchés (en se fondant sur la volatilité, les mouvements brusques de prix ou la liquidité), des coupures sont effectuées afin d'inciter les acteurs financiers à se questionner et à reprendre leurs esprits.

En définitive, cet exemple nous permet de parfaitement saisir les enjeux relatifs à la bonne exécution d'un *metaorder* sur les marchés financiers.

FORT de tous les enseignements tirés de ces recherches, nous avons alors décidé, en partenariat avec notre encadrant VCP Capital Partners, de recentrer le projet et le sujet sur l'étude des changements de régime qui peuvent affecter un actif.

Aussi dans cette partie nous aborderons les choix que nous avons faits en termes de famille de lois aléatoires à simuler, ainsi que, dans un deuxième temps, la création de notre modèle simplifié sur Python.

3.1 Les lois simulées

Les processus en question

La première étape de notre projet consiste donc à simuler artificiellement et sur Python des trajectoires de processus aléatoires. Ce simulateur de trajectoires constitue la base de notre modèle simplifié.

Afin que nos simulations soient les plus adéquates par rapport à ce qui est observé empiriquement sur les marchés, il est nécessaire de créer différents types d'actifs en fonction de leur propriété. Idéalement, ces familles d'actifs doivent être aussi complètes que possible. Nous avons donc sélectionné des processus bien connus dans le domaine financier et dont les propriétés statistiques sont pertinentes.

Les processus que nous estimons pertinents sont donc les suivants :

- **Mouvement brownien géométrique** : Utilisé dans le modèle de Black-Scholes, le MBG est l'un des processus les plus célèbres utilisés en finance mathématique pour modéliser le prix des actions. En fait, on dit d'un sous-jacent S_t qu'il suit un MBG s'il satisfait à l'EDS suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t$$

Le MBG est largement utilisé en finance en raison de ses propriétés qui rendent largement compte de faits constatés dans la réalité.

En effet, les rendements attendus du MBG sont indépendants de la valeur du processus (prix de l'action), et le MBG ne prend que des valeurs positives - et les prix du marché sont, en l'occurrence, des valeurs positives.

Cependant, le MBG ne correspond pas à la réalité sur deux points importants :

- La volatilité des prix est supposée constante, alors qu'en fait, la volatilité des prix réels des actions varie dans le temps.
- Les prix des actions présentent souvent des sauts causés par la survenue d'événements imprévisibles, des stratégies de négociation agressives ou encore des changements de

prix nocturnes, ce qui n'est pas pris en compte dans le modèle MBG, où la trajectoire est considérée comme continue.

Ainsi, pour tenter de corriger ces imperfections du MBG, et afin de « coller » au mieux à la réalité des faits, les deux processus suivants ont également été envisagés :

- **Processus de retour à la moyenne (*Mean-Reverting - Vasicek*)** : Afin de modéliser un changement dans la dynamique du prix d'un actif, on peut considérer un processus de retour à la moyenne pour établir la " nouvelle réalité " de celui-ci.

Mathématiquement, dans notre simulateur de marché, un prix sous-jacent peut satisfaire pendant une période de temps l'EDS suivante :

$$dX_t = \tau(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

En fait, ce modèle peut capturer différents niveaux d'agressivité dans les stratégies de *métaorders* grâce à son paramètre τ , qui est défini comme étant la vitesse de réversion vers la "nouvelle moyenne".

Il peut donc être utile de s'en servir pour modéliser les impacts considérables à court terme qui sont sous-estimés par le MBG.

- **Processus de diffusion de sauts (*Jump-Diffusion Process*)** : Enfin, afin de modéliser les discontinuités naturelles des prix des actifs ainsi que les stratégies de trading très agressives (lorsque la liquidité le permet), l'utilisation d'un *Jump-Diffusion Process* peut être très utile.

Mathématiquement, ces sauts sont généralement caractérisés par un troisième terme en plus des termes déterministes et stochastiques dans l'équation différentielle stochastique. Ainsi, en le considérant, nous aurions le processus MBG modifié suivant (cas particulier d'un modèle Exponentiel de Lévy) :

$$X_t = X_0 \exp \left(\mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \right)$$

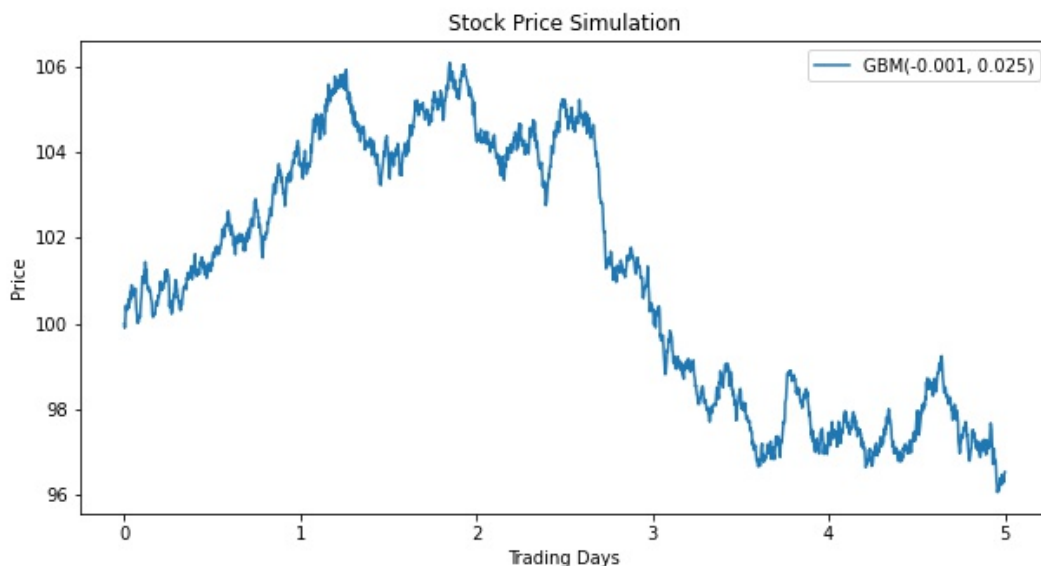
Où le terme en somme est un Processus de Poisson Composé (*Compound Poisson Process*) avec $N \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $\{Y_i\}_{i \geq 1}$ est une distribution normale représentant la taille de l'impact.

Au total, et si ces trois lois nous semblaient particulièrement pertinentes, nous avons fait le choix de ne retenir que le Mouvement Brownien Géométrique (MBG) et le *Mean-Reverting Process*. En effet, la conjugaison de ces deux processus nous permet de tracer une trajectoire vraisemblable en cas de chocs.

Aussi le troisième et dernier processus n'a pas été retenu, et ce, surtout pour des questions de temps. Il aurait présenté tout son intérêt dans notre analyse et nous aurions souhaité l'ajouter à notre bibliothèque de simulation.

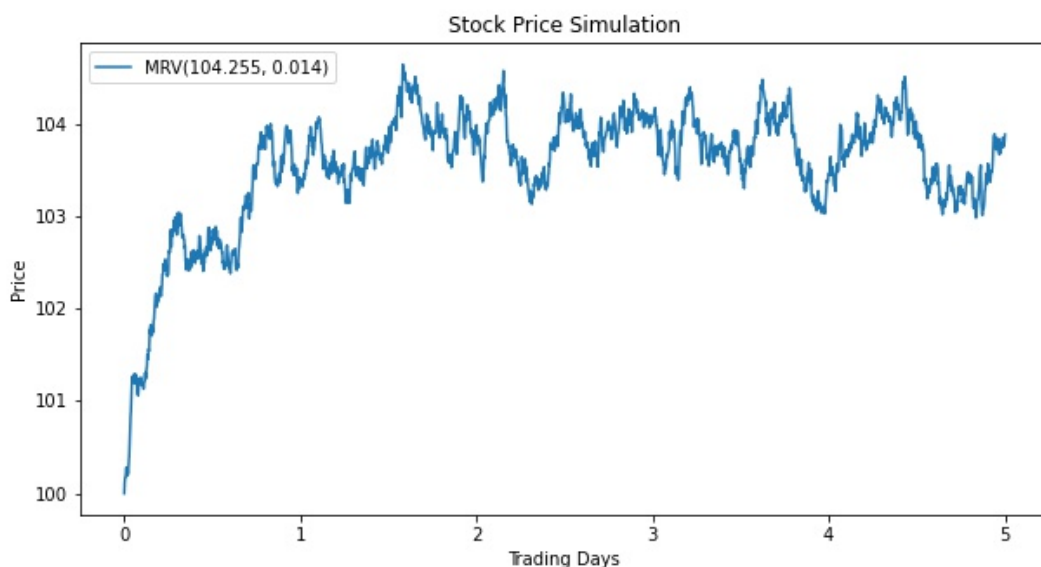
Quelques exemples de trajectoires

Comme nous l'avons indiqué, nous avons finalement conservé les deux premiers processus. Aussi, nous présentons ici quelques exemples de trajectoires qui ont été tracées.



GRAPHIQUE 1 – Mouvement Brownien Géométrique de *drift* -0.001 et de volatilité 0.025

A cet exemple, nous joignons celui de la trajectoire d'un processus de retour à la moyenne.



GRAPHIQUE 2 – Processus *mean-reverting* de moyenne 104.255 et de volatilité 0.014

Quelques éléments doivent être précisés ici. En premier lieu, les paramètres retenus sont tirés aléatoirement parmi des ensembles de valeurs vraisemblables. En outre, nous avons décidé de simuler ces processus sur une durée totale de 5 jours. Cette durée nous paraît pertinente car,

en 5 jours, un *trader* a le temps d'exécuter son *metaorder* et surtout de modifier son processus d'exécution en fonction de l'impact observé.

3.2 La création de notre modèle simplifié

L'idée générale de notre modèle simplifié

Une fois nos différents processus sélectionnés, nous avons décidé de les combiner afin d'obtenir des trajectoires semblables à celles que nous pourrions observer sur les marchés à la suite de l'exécution d'un *metaorder*.

L'objectif final est donc d'obtenir une trajectoire représentant l'évolution d'un actif pendant 5 jours de *trading*. Cette trajectoire résulte de la simulation de différents processus.

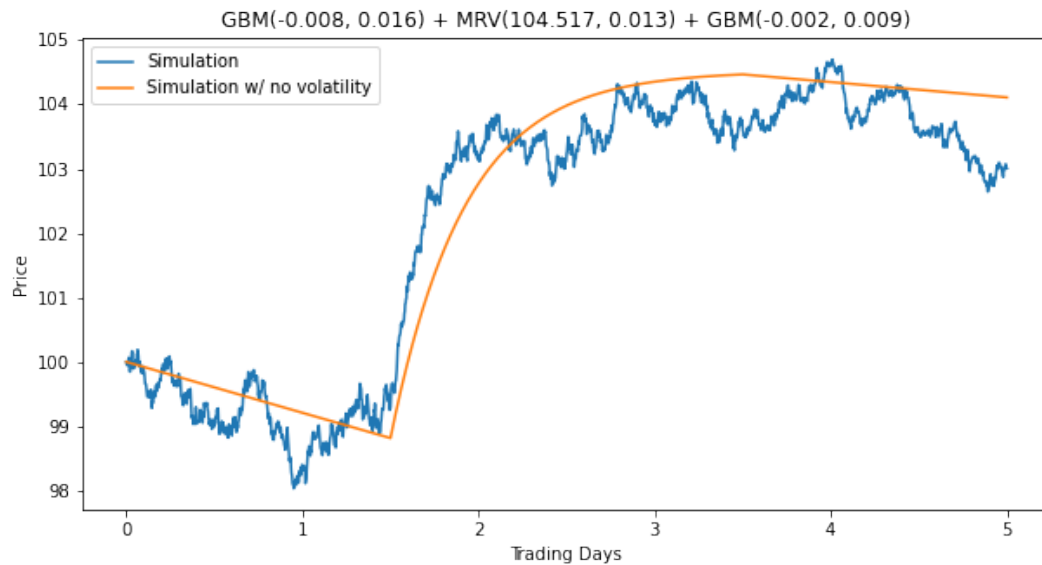
Par conséquent, nous avons décidé de procéder de la manière suivante :

- Nous simulons d'abord 30% de la trajectoire au moyen d'un mouvement brownien géométrique ;
- Les 40% suivants de la trajectoire sont simulés à l'aide d'un processus de retour à la moyenne.
- Les 30% restants de la trajectoire sont simulés au moyen d'un mouvement brownien géométrique.

Nous précisons à nouveau que tous les paramètres en jeu sont tirés aléatoirement parmi des ensembles de valeurs vraisemblables.

Des exemples de trajectoires

Présentons désormais quelques exemples de trajectoires. Comme indiqué ci-dessus, ces tracés constituent la base même de notre modèle simplifié. En effet, les séries temporelles sous-jacentes seront ensuite utilisées dans la quatrième partie de ce rapport.

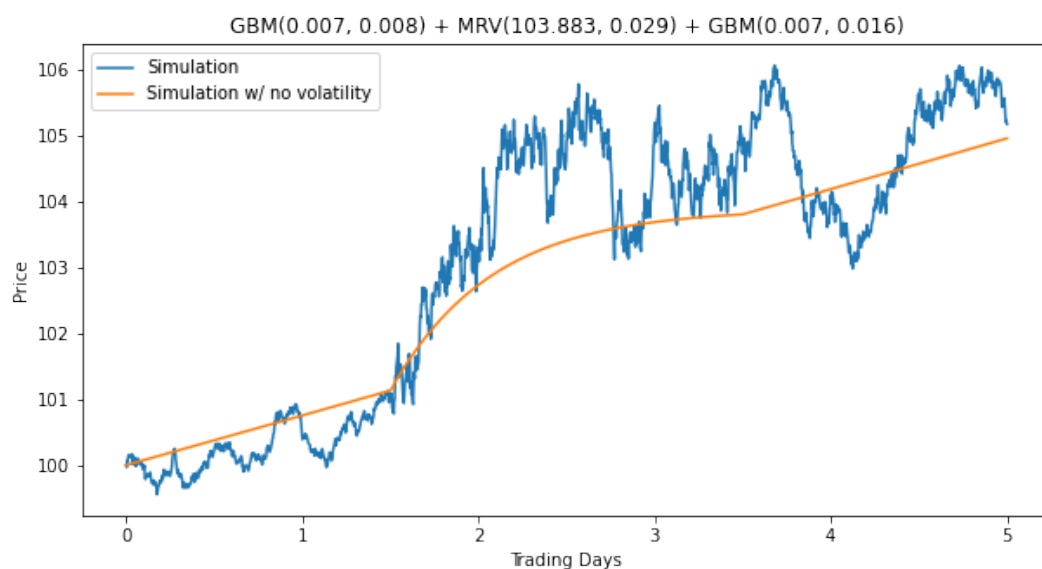


GRAPHIQUE 3 – Une belle trajectoire avec un changement de régime relativement clair ...

Les paramètres des différents processus simulés sont directement indiqués au-dessus du graphique.

Ici, nous observons donc assez nettement le premier changement de processus qui intervient entre le premier et le deuxième jour de *trading*. En revanche, le changement de régime qui intervient entre le troisième et le quatrième jour de *trading* est invisible sur le graphique.

Intéressons-nous désormais à un autre cas de figure.



GRAPHIQUE 4 – ... et une trajectoire moins explicite

Dans ce cas, on pourrait supposer qu'une pression à l'achat s'exerce sur l'actif. Toutefois, cette courbe est moins explicite et reflète les limites de l'approche purement visuelle.

Vers la résolution de notre modèle simplifié

Tout le but de notre recherche consiste donc en les questions suivantes :

- Comment identifier les moments où surviennent les changements de régime au cours des 5 jours de *trading* ?
- Comment identifier les différents processus qui entrent en jeu ?
- Comment identifier les paramètres des différents processus en jeu ?

L'enjeu est donc pour nous, en ayant comme seul *input* une trajectoire telle que celle présentée ci-dessus, d'être capable de scinder cette série temporelle en trois sous-séries, puis de caractériser ces trois sous-séries.

Les réponses que nous avons apportées à ces questions seront présentées dans la partie suivante de ce rapport.

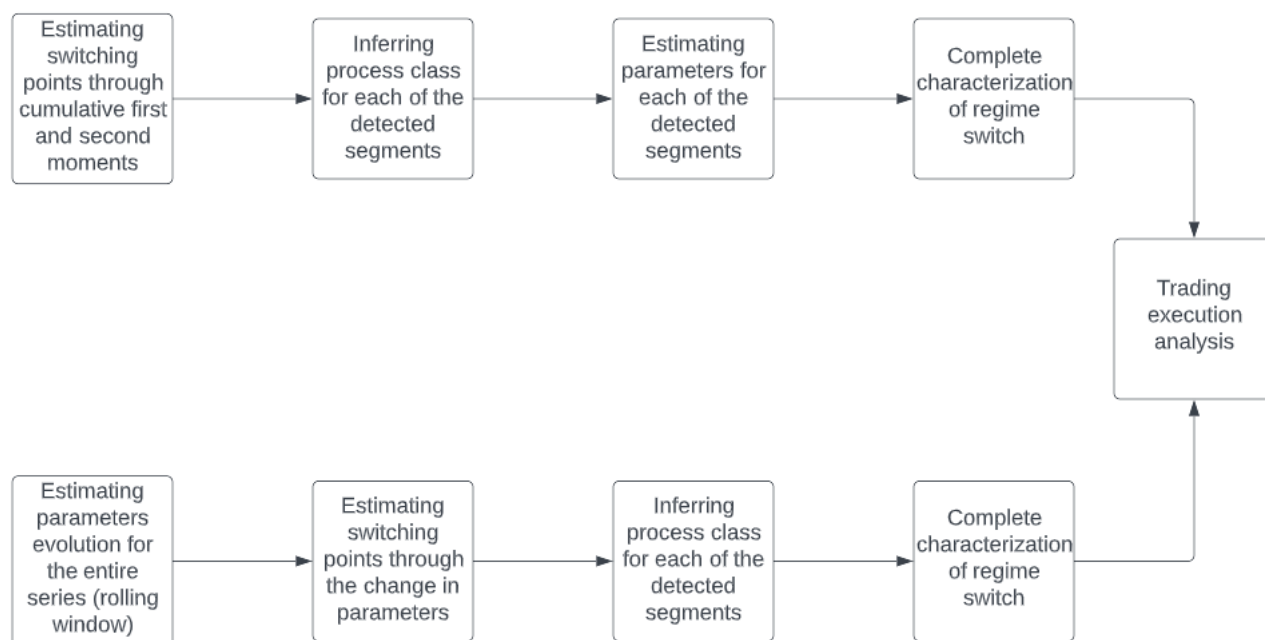
POUR procéder à la détection des changements de régime, nous proposons la formulation des types d'estimateurs suivants :

- **Estimateurs de points de *switch*** : chargés d'indiquer le moment où un changement de régime donné s'est produit. Ils peuvent être de deux types :
 - Basé sur les premiers et seconds moments cumulés des séries analysées
 - Basé sur le changement des paramètres estimés (dépendant de l'estimateur de paramètres discuté ci-dessous).
- **Estimateurs de processus** : chargés de spécifier une approximation de la classe de processus à laquelle appartient une série donnée (GBM, Mean-Reverting, ABM, etc.). Ici, ce sont principalement des méthodes ML qui ont été utilisées pour effectuer la classification.
- **Estimateurs de paramètres** : responsables du calcul de l'estimation d'un ensemble de paramètres d'une série (tels que les coefficients de dérive et de diffusion pour le GBM). Dans ce contexte, différentes caractérisations ont été testées, ainsi que différentes méthodes paramétriques (à savoir la méthode des moments et le maximum de vraisemblance).

Dans l'ensemble, après des discussions internes et selon notre organisation, nous pouvons observer les types de changement de régime suivants (chacun étant lié à un scénario de marché du monde réel)

- **GBM(θ_1) à GBM(θ_2)** : Représentation du cas d'une exécution de transaction capable de changer les paramètres de la série observée, mais suffisamment lisse et souple pour ne pas changer la classe du processus.
- **GBM(θ_1) à MR(θ_2)** : Représentation de l'événement d'une exécution de transaction qui a eu un impact suffisant sur le marché pour créer un changement dans la classe de processus (au moins temporairement), passant d'un simple GBM à une classe de processus de retour à la moyenne (avec une moyenne sur le prix final de l'actif impacté).
- **MR(θ_1) à GBM(θ_2)** : Représente le cas où le marché se remet d'un impact récent et retrouve sa dynamique normale.
- **MR(θ_1) à MR(θ_2)** : Représente l'ensemble séquentiel des transactions à fort impact (capables de changer deux fois la moyenne temporaire de la série en un court laps de temps).
- Modification existante mais non observée de l'ensemble des paramètres : Survient lorsque un acteur du marché peut suivre son programme d'exécution de *metaorder* sans modifier le comportement de l'action en question. **C'est tout l'enjeu de notre modèle simplifié.**

Pour caractériser correctement un changement de régime donné, nous pouvons suivre deux voies différentes (sur la base du type d'estimateurs décrits ci-dessus) :



GRAPHIQUE 1 – Chemins proposés

Dans les sections suivantes, nous apporterons plus de lumière sur chacune des méthodes proposées, ainsi que des exemples montrant leurs capacités à servir dans les changements éventuels mentionnés dans la liste précédente. De plus, nous nous fonderons principalement sur des cas de séries temporelles du type GBM - MR - GBM.

4.1 Estimation des points de changement

Le premier estimateur que nous présenterons est donc celui lié à la détection du point de changement de régime. Comme indiqué dans l'introduction de cette section, nous divisons cette partie en deux méthodes différentes, qui seront discutées en détail dans les paragraphes suivants.

4.1.1 Détection du point de changement basée sur la somme cumulative des premiers et seconds moments

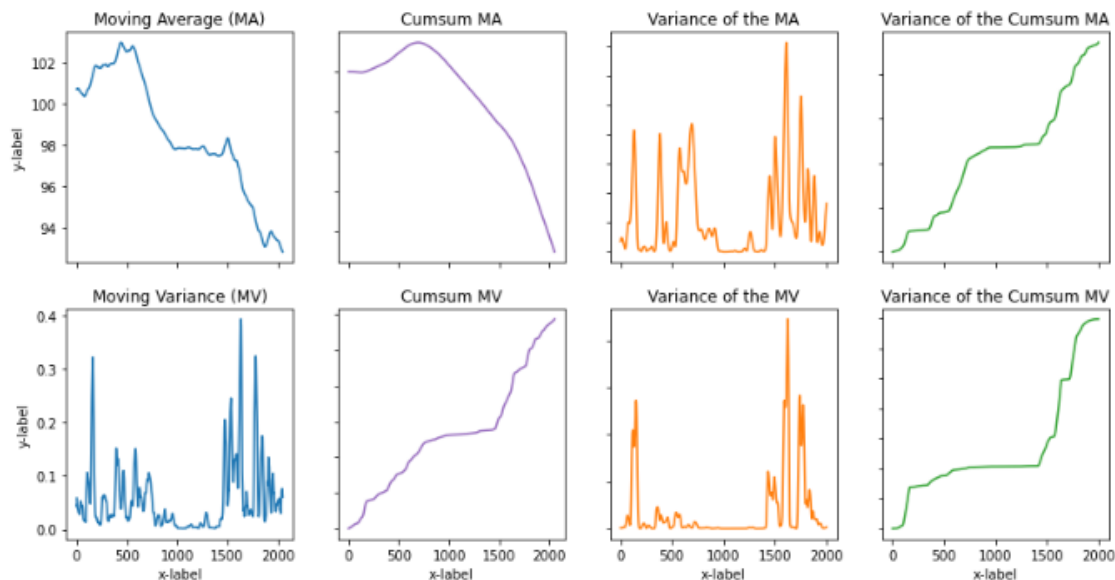
Après avoir lu plusieurs articles différents sur la détection du point de changement de régime dans des EDPs, nous n'avons pas trouvé de méthodes satisfaisant les conditions initiales définies dans notre modèle simplifié.

En effet, la majorité des méthodes scientifiques s'appuie sur plusieurs simulations différentes avec environ 100 000 points pour chaque série temporelle. Toutefois, ce n'est pas notre cas étant donné que nous ne disposons que d'une série temporelle sur 5 jours avec une granularité par minute, ce qui nous donne un total de 2100 points (on fait ici l'hypothèse que le marché est ouvert de 9h à 16h).

De ce fait, nous avons souhaité créer une méthode fondée empiriquement sur les observations issues de nos processus. Aussi, en simulant une série temporelle de type GBM - MR - GBM telle que précédemment décrit (Voir section 3.2), nous avons remarqué que la variance de la

somme cumulée des deux premiers moments (Moving Average et Moving Variance) change de manière brusque aux points de changement. Notre méthode consiste donc à tracer ces fonctions au cours du temps afin d'identifier toute variation excessive.

Ci-dessous, nous avons un exemple où les switching point sont placés dans les points 650 et 1.400 :



GRAPHIQUE 2 – Étude sur la Moving Average et la Moving Variance des simulations

Tout l'intérêt de cette première approche est de n'être fondée sur aucune hypothèse en ce qui concerne le processus ayant généré la série temporelle, ses paramètres etc. C'est donc une approche non-paramétrique.

4.1.2 Détection du point de changement basée sur le changement des paramètres estimés

Là où notre première approche ne nécessite aucune hypothèse, cette deuxième approche diffère car elle se fonde notamment sur des estimations des paramètres de la série au cours du temps.

Cette seconde approche s'appuie donc sur les méthodes d'estimation des paramètres, que nous décrivons plus loin dans le rapport, dans la section 4.3. Nous détectons le changement de régime en analysant l'évolution des paramètres estimés pour une trajectoire donnée. La méthode est décrite de manière générique dans les lignes suivantes, après quoi nous procédons à quelques exemples concrets qui visent à clarifier le propos.

Nous divisons la procédure en plusieurs étapes :

1. Estimer l'évolution des paramètres du processus par l'utilisation de méthodes d'estimation paramétriques dans un mécanisme de fenêtre glissante.
2. Observer un changement brusque dans l'ensemble des paramètres, indiquant un changement probable de la classe du processus et/ou un changement des paramètres à l'intérieur

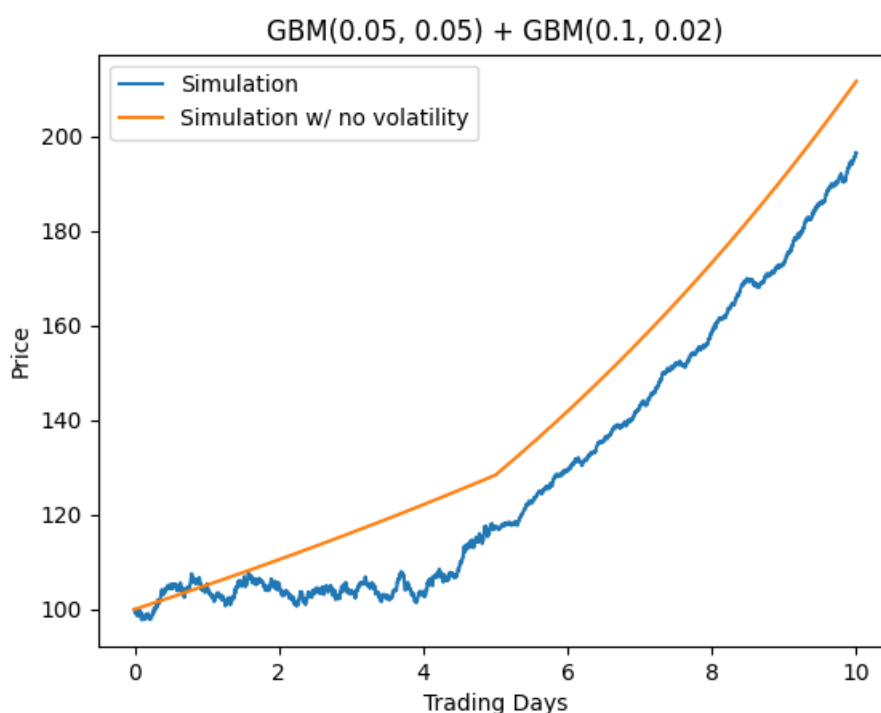
d'une même classe. Pour identifier correctement ces changements (objectivement parlant), nous nous basons sur les différences d'ordre l^{th} . Le choix de l dépend de la fréquence considérée dans le processus de génération des données. Pour les données dont la fréquence est inférieure à une minute, nous avons expérimenté avec l dans la gamme de 10-200.

3. Nous classons ensuite les voisinages qui présentent une forte probabilité de changement de régime (confirmations multiples de points proches avec un changement élevé des paramètres). Enfin, nous définissons un seuil, qui sera utilisé pour ignorer les plus petits changements dans les paramètres (qui se produisent souvent en raison de la nature bruyante du signal).

Les avantages de cette méthode incluent le fait qu'elle ne dépend pas de la définition du nombre de changements de régime que nous attendons dans un intervalle donné. En revanche, l'obtention de bonnes valeurs pour les paramètres l et le niveau de seuil constitue un défi dans ce cas.

Un premier exemple

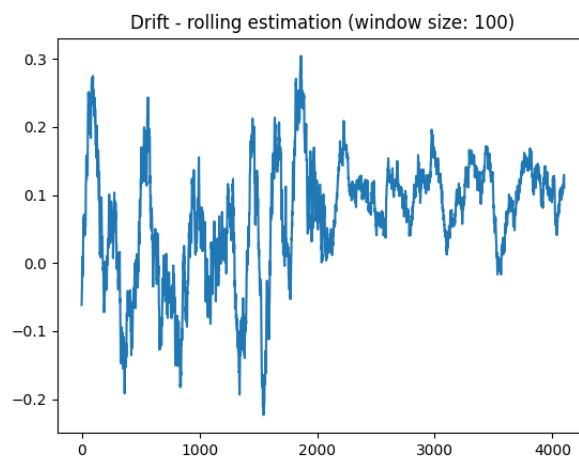
Le premier exemple pour illustrer cette méthode est un simple changement de paramètres (coefficients de dérive et de diffusion) sur un processus GBM. Le processus d'entrée peut être vu dans la figure suivante (ainsi que sa courbe sans volatilité)



GRAPHIQUE 3 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 1 - Série introduite

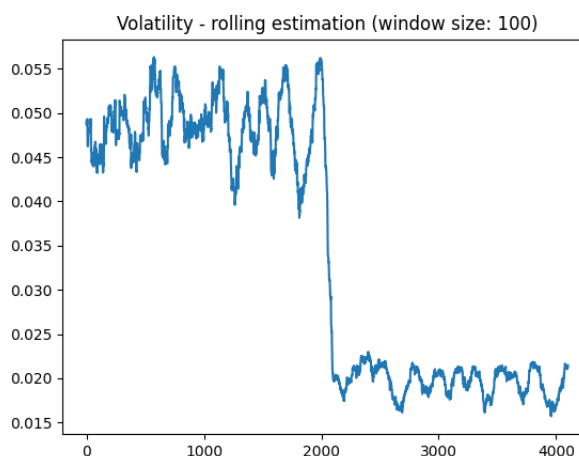
Sur la base d'un estimateur par la méthode des moments, associé à un mécanisme de fenêtre glissante, nous observons l'évolution des deux paramètres analysés dans les séries introduites.

Comme illustré ci-dessous, l'estimation de la dérive présente un bruit important, ce qui la rend peu utilisable pour l'objectif de cette méthode.



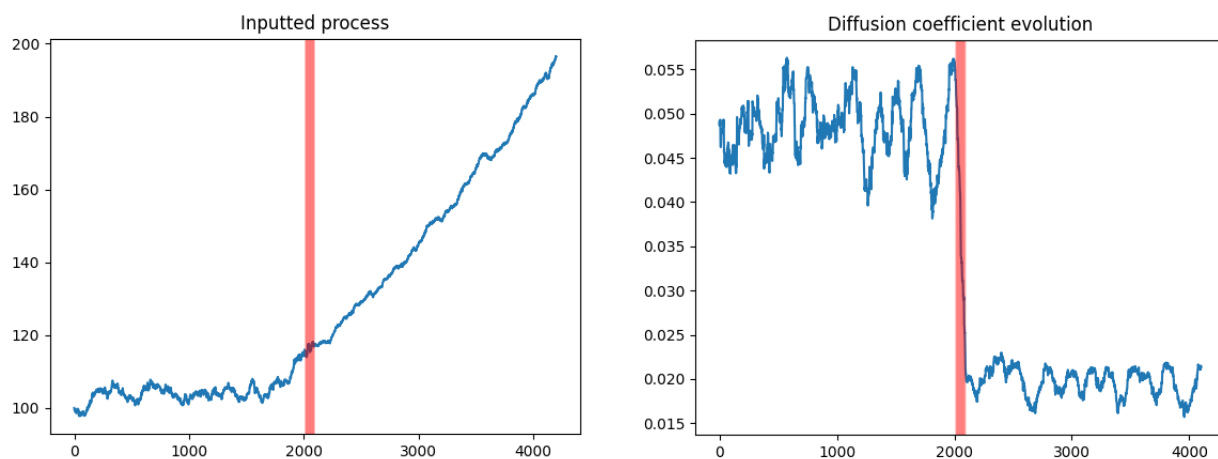
GRAPHIQUE 4 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 1 - Évolution de l'estimation de la dérive

En revanche, si nous examinons l'estimation du coefficient de diffusion, nous observons un changement beaucoup plus évident.



GRAPHIQUE 5 – Détection du changement par les paramètres - Exemple 1 - Évolution de l'estimation de la diffusion

Nous effectuons ensuite l'analyse de la différence d'ordre l^{th} sur le coefficient de diffusion estimé, avec un seuil spécifié. Pour l'exemple actuel, nous fixons $l = 80$ et le seuil à 50%, ce qui signifie que toute oscillation inférieure à 50% du plus grand changement observé sera ignorée. Les deux graphiques suivants illustrent les régions présentant une probabilité de changement plus élevée (dans ce cas, un seul changement observé). Plus la couleur rouge est concentrée dans une région, plus la probabilité qu'un changement de régime se produise dans cette région est élevée.

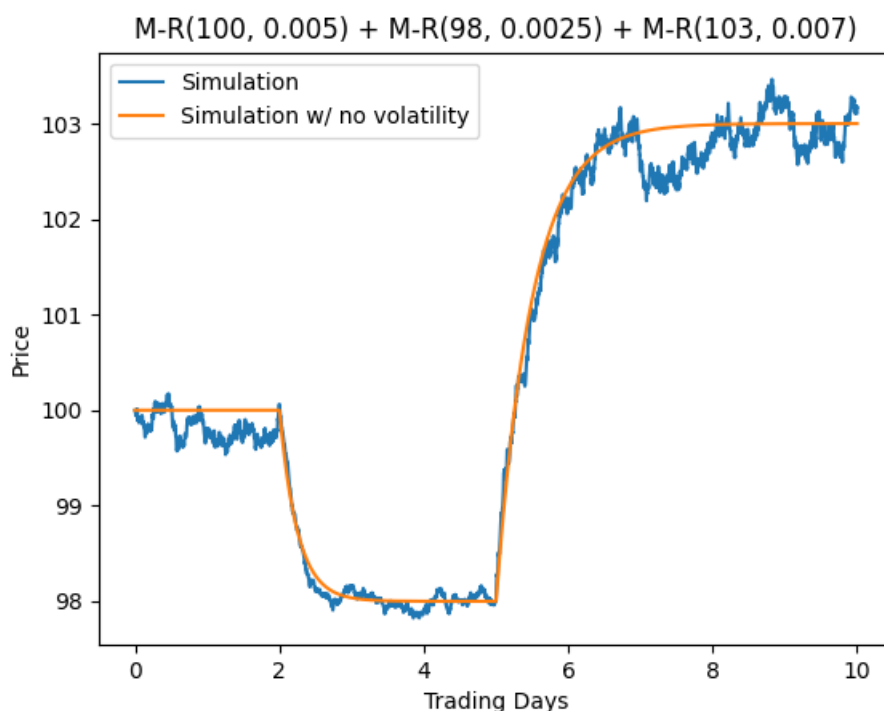


GRAPHIQUE 6 – Détection des changements par les paramètres - Exemple 1 - Estimation des points de changement

Ainsi, dans ce premier exemple, nous constatons visuellement que l'estimation mise en place est effective : le changement de régime est manifestement localisé.

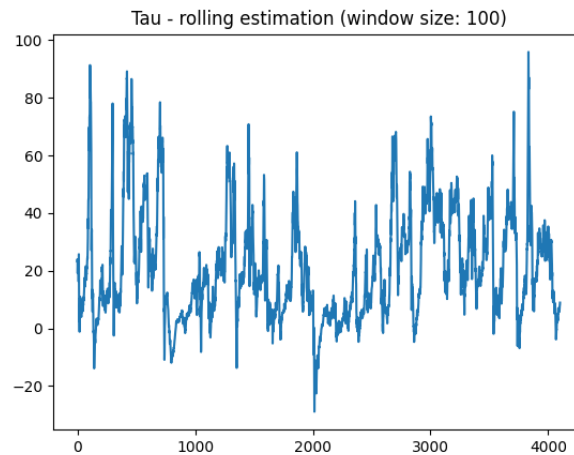
Un deuxième exemple

Le deuxième exemple présenté représente la même méthode appliquée à une autre classe de processus, le retour à la moyenne (Vasicek). Dans la dernière étape, nous utilisons $l = 90$, une taille de fenêtre de 200 périodes pour le processus d'estimation des paramètres et un seuil de 60%. Veuillez également noter qu'au lieu d'un seul changement de régime, nous avons maintenant 2 moments de changement.

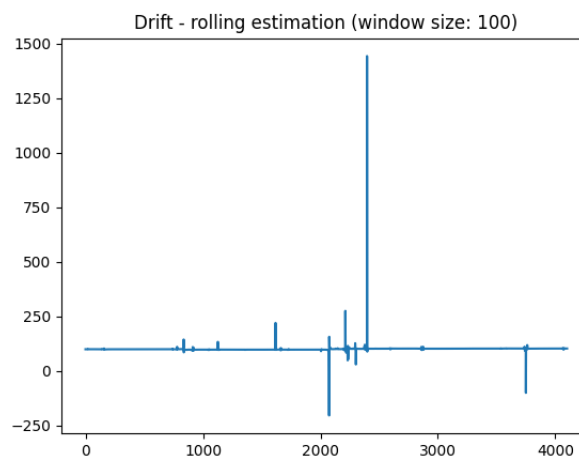


GRAPHIQUE 7 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 2 - Série introduite

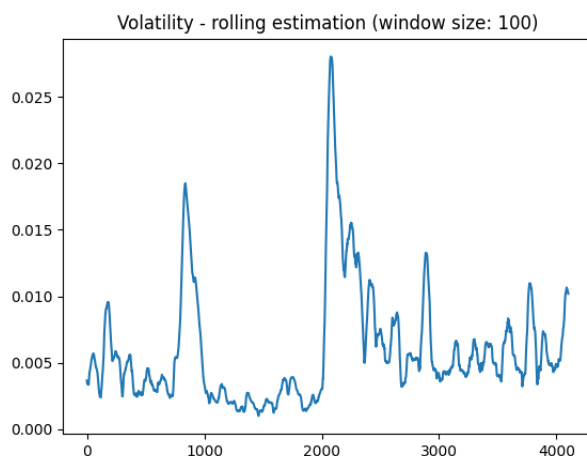
Ici, pour l'estimation des paramètres, nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance (à la manière d'une fenêtre glissante). A nouveau, ceci est explicitement décrit dans la section 4.3.



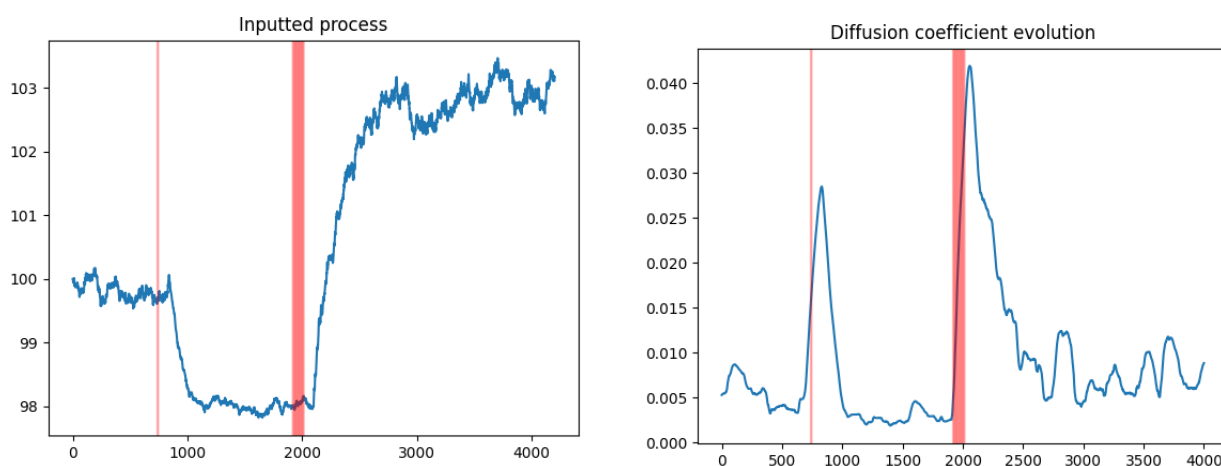
GRAPHIQUE 8 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 2 - Evolution de l'estimation de la vitesse de réversion



GRAPHIQUE 9 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 2 - Évolution de l'estimation de la dérive



GRAPHIQUE 10 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 2 - Evolution de l'estimation de la diffusion



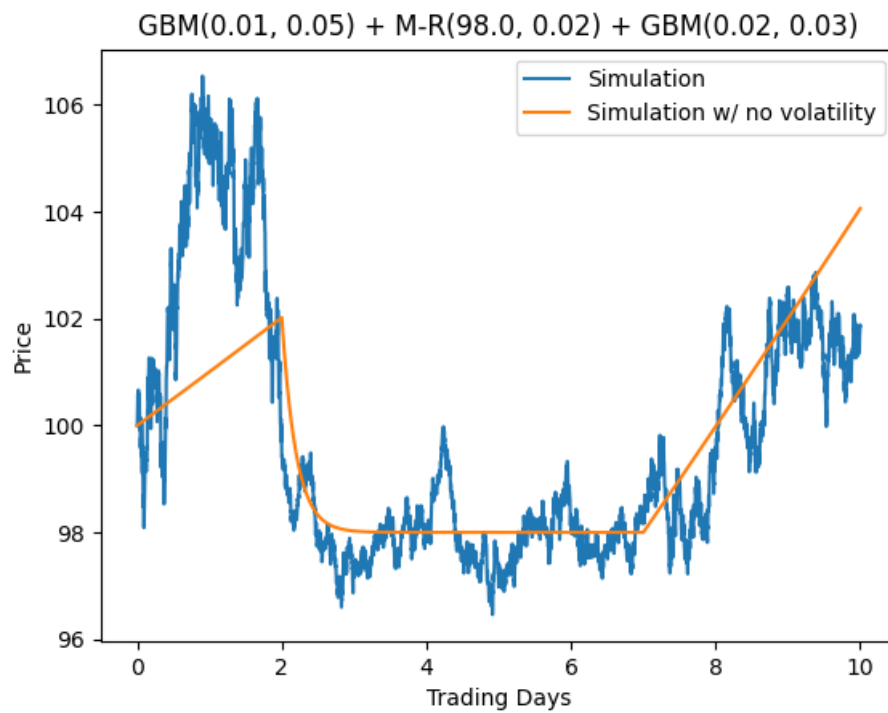
GRAPHIQUE 11 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 2 - Estimation des points de commutation

A nouveau, cette méthode démontre toute sa force ici dans le cadre des hypothèses initiales car elle détecte efficacement les deux points de changement de régime.

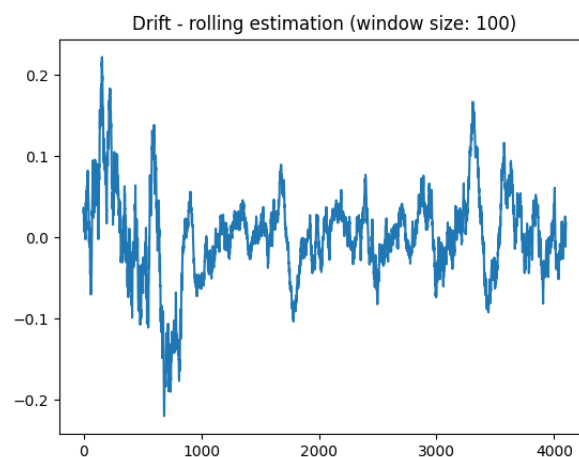
Un troisième et dernier exemple

Enfin, le dernier exemple couvre le cas non seulement d'un changement de paramètre, mais aussi d'un changement de la classe du processus (de GBM à Mean Reverting, par exemple). Ce cas met en évidence un des inconvénients de cette méthode, hérité du processus d'estimation des paramètres, qui est la spécificité de ce deuxième estimateur (nous y reviendrons plus loin).

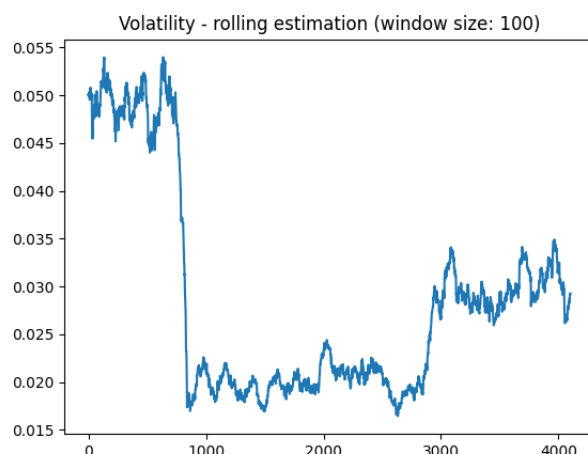
Dans cette configuration, nous continuons à utiliser une estimation des paramètres basée sur les moments, mais certains autres paramètres du modèle doivent être redéfinis pour observer la sensibilité d'un cas donné. Dans ce contexte, cela signifie que nous fixons $l = 200$ (pour pouvoir capturer les changements à plus long terme dans le coefficient de diffusion estimé), une taille de fenêtre de 300 (pour lisser la courbe d'évolution des paramètres) et enfin un seuil inférieur de 30% (pour capturer les plus petits changements dans le coefficient de diffusion). Le résultat est illustré ci-dessous :



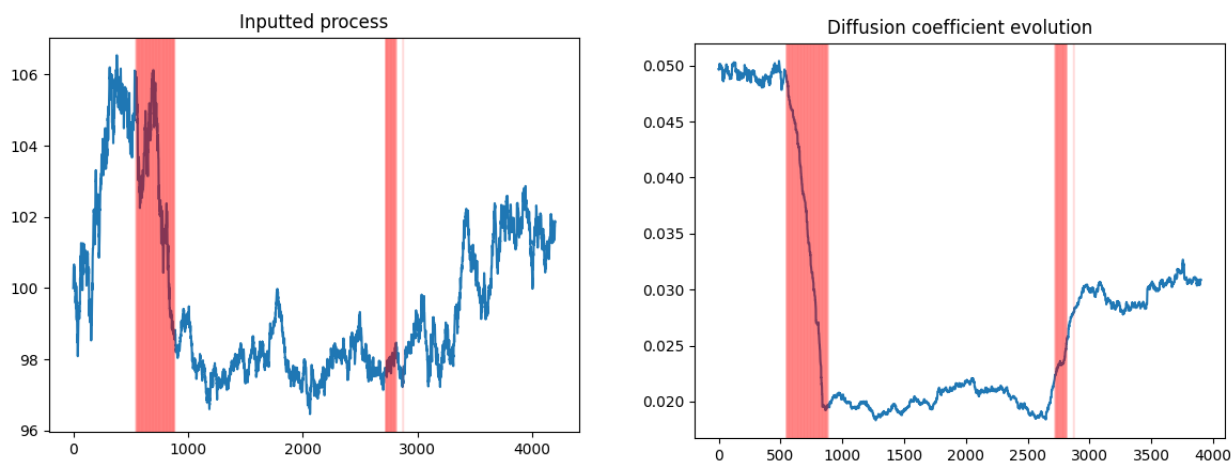
GRAPHIQUE 12 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 3 - Série introduite



GRAPHIQUE 13 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 3 - Évolution de l'estimation de la dérive



GRAPHIQUE 14 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 3 - Évolution de l'estimation de la diffusion



GRAPHIQUE 15 – Détection de changement par les paramètres - Exemple 3 - Estimation des points de commutation

Nous concluons cette sous-section en soulignant la performance de cette méthode sur les cas traités. Nous aurions évidemment souhaité généraliser notre étude afin de s'assurer de la précisions et de la fiabilité de notre méthode; ceci n'a malheureusement pas pu être traité par manque de temps.

Par ailleurs, nous devons également constater qu'elle présente l'inconvénient d'être sensible à la sélection des paramètres (à savoir l , la taille de la fenêtre et le niveau de seuil - question de la robustesse). La situation la plus fiable est en effet l'application d'une telle méthode pour les changements de type paramètre seulement, bien que le dernier exemple montre qu'elle est également performante pour les changements inter-classes, à condition qu'un bon ensemble de paramètres du modèle ait été choisi.

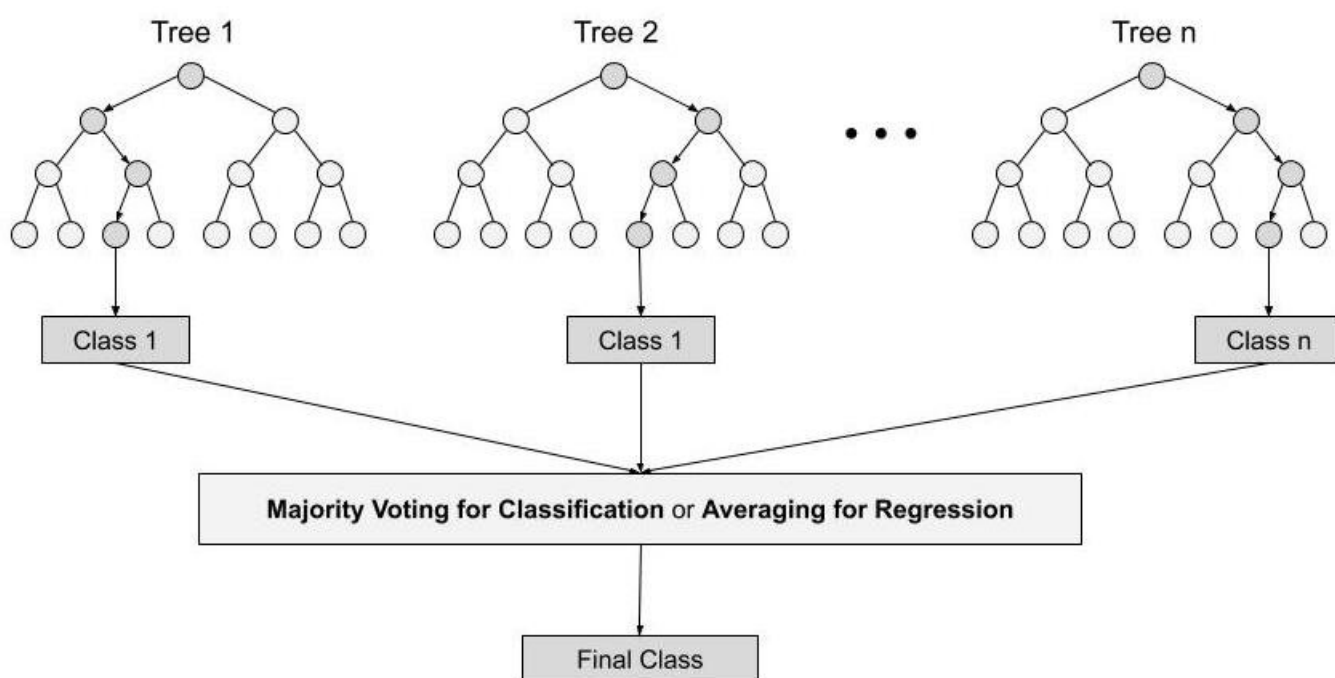
4.2 Estimation de la classe de processus

Le deuxième mécanisme d'estimation dont il sera question dans ce rapport est l'estimation des processus. Nous avons constaté que, lors de la description d'un changement de régime, il

peut être utile de fournir des indications sur les classes de processus impliquées. Cela est dû au fait que, comme décrit dans l'introduction de cette section, différents types de changements (qu'ils soient interclasses ou intraclasses) représentent différentes situations sur le marché.

L'objectif de l'estimateur actuel est de donner une prédiction de la classe d'une série donnée en entrée. Dans notre modèle restreint, nous considérons deux classes possibles : le GBM et le Mean-Reverting.

Pour réaliser cette tâche, nous proposons l'utilisation d'une approche basée sur l'apprentissage automatique, à savoir l'utilisation d'une *random forest* appliquée à un ensemble de caractéristiques d'un segment de série donné. La figure suivante résume la méthode :



GRAPHIQUE 16 – Classificateur Random Forest

Puisque nous avons créé un simulateur de prix de marché en acceptant deux types de processus (GBM et MRV), notre idée a été de générer un *dataset* contenant un total de 240 000 simulations (120 000 pour chaque processus), ou 200 000 ont été utilisées en tant que données d'entraînement et 40 000 comme données de test. Ensuite, on a défini un modèle de classification binaire supervisée où la variable cible a été $Y = \{GBM, MRV\}$. Le défi de ce modèle consiste à déterminer les *features* de notre *dataset*. Après plusieurs expérimentations, nous avons choisi les *features* suivantes :

- Moyenne, Variance, *Gross Evolution* (valeur finale - valeur initiale), *Gross Return* de la série temporelle originale ;
- Nous avons pris les mêmes indicateurs ci-dessus, mais pour des fractions de la série originale au lieu de prendre pour la série entière.

En effet, notre stratégie a été de diviser la série temporelle initiale en 5 sous-séries (choix arbitraire, fondé sur le nombre de jours de trading simulés) et calculer tous les métriques pour

chaque fraction. Nous avons utilisé cette stratégie pour que le modèle de ML puisse efficacement identifier les processus ayant des propriétés de *mean-reverting*.

Afin de clarifier le propos, imaginons par exemple un processus de *mean-reverting* avec la valeur initiale 100, un *drift* 105 et un τ agressif. Le retour de la première partie sera beaucoup plus intense que des autres parties, puisque la série temporelle a une tendance à se calmer après avoir atteint le drift 105.

Au total, nous avons obtenu les résultats suivants :

```
The Confusion Matrix of the model is: [[23192  838]
                                         [ 695 23275]]

The Classification Report of the model is:
```

	precision	recall	f1-score	support
geometric-brownian-motion	0.97	0.97	0.97	24030
mean-reverting-vasicek	0.97	0.97	0.97	23970
accuracy			0.97	48000
macro avg	0.97	0.97	0.97	48000
weighted avg	0.97	0.97	0.97	48000

GRAPHIQUE 17 – Confusion Matrix et Classification Report pour le modèle Random Forest.

Nous sommes satisfaits de ces résultats car le *F1-Score* est très haut pour la détection des deux classes distinctes. Par conséquent, nous considérons que cette partie de la résolution de notre modèle simplifié est effective et fonctionnelle.

4.3 Estimation des paramètres

Lorsque l'on caractérise un changement de régime dans une série, en plus des informations sur le moment où il se produit (sujet de la section 4.1) et sur la manière dont il se produit (sujet de la section 4.2), nous pensons qu'il est également pertinent de fournir des aspects quantitatifs des caractéristiques de la série avant et après le changement.

Pour ce faire, nous discutons dans cette section de la mise en œuvre d'estimateurs paramétriques pour les séries. Nous avons concentré notre travail sur les estimateurs paramétriques et nous les divisons en groupes, à savoir les estimateurs qui sont spécifiques à une classe de processus donnée (mais qui peuvent néanmoins fournir des indications lorsqu'ils sont appliqués à d'autres classes) et une tentative de généralisation avec une paramétrisation discutée dans le dernier groupe.

Nous décrivons chacun d'entre eux ci-dessous, ainsi que la base mathématique qui a motivé leur mise en œuvre. Les résultats de ces méthodes peuvent être observés dans les graphiques à fenêtre glissante de la section 4.1.2, étant donné qu'elles (les trois premières d'entre elles) ont été utilisées pour en déduire les points de changement de régime en série.

- Méthode des moments pour le mouvement brownien géométrique : En considérant la paramétrisation originale de cette classe de processus, nous avons

$$dX_t = X_t \mu dt + X_t \sigma dW_t$$

L'expression précédente peut être réécrite comme suit

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

Nous procédons de manière générale, en considérant un intervalle $(t, t+T]$, et intégrons, en obtenant

$$\Delta = \ln S(t+T) - \ln S(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W(T)$$

Nous observons que Δ suit une distribution normale avec une moyenne $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T$ et une variance $\sigma^2 T$.

Nous définissons

$$\hat{\mu}_\Delta = \frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i}{n}$$

$$\hat{\sigma}_\Delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (\Delta_i - \hat{\mu}_\Delta)^2}{n-1}$$

De cette manière, étant donné une valeur de T , si nous considérons n observations i.i.d. $\Delta_1, \Delta_2, \dots$ pour différentes valeurs de t , nous obtenons un estimateur sans biais pour μ et σ^2 .

$$\hat{\mu} = \frac{2\hat{\mu}_\Delta + \hat{\sigma}_\Delta^2}{2T}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\sigma}_\Delta^2}{T}$$

Nous procédons en prouvant la consistance d'un tel estimateur

Nous écrivons d'abord les variances des estimateurs suivants

$$Var(\hat{\mu}_\Delta) = \frac{Var(\Delta_1)}{n} = \frac{\sigma^2 T}{n}$$

$$Var(\hat{\sigma}_\Delta^2) = E(\hat{\sigma}_\Delta^4) - E(\hat{\sigma}_\Delta^2)^2 = \frac{nE[(\Delta_1 - \hat{\mu}_\Delta)^4] + n(n-1)E[(\Delta_1 - \hat{\mu}_\Delta)^2]^2}{(n-1)^2} - \sigma^4 T^2 = \frac{2\sigma^4 T^2}{n}$$

Et enfin, la variance de nos estimateurs d'intérêt peut être calculée en termes de valeurs réelles

$$Var(\hat{\mu}) = \frac{4Var(\hat{\mu}_\Delta) + Var(\hat{\sigma}_\Delta^2)}{4T^2} = \frac{\sigma^2(2 + \sigma^2 T)}{2nT}$$

Et enfin,

$$\text{Var}(\hat{\sigma}^2) = \frac{\text{Var}(\hat{\sigma}_{\Delta}^2)}{T^2} = \frac{2\sigma^4}{n}$$

Ce qui montre finalement la consistance des deux estimateurs.

- Maximum de vraisemblance pour le mouvement brownien géométrique : En gardant la même paramétrisation que précédemment, nous procédons à la dérivation de l'estimateur des paramètres pour la classe du mouvement brownien géométrique par une approche de maximum de vraisemblance.

Nous considérons le processus

$$Y_t = \log S_t$$

Ce qui donne

$$dY_t = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW_t$$

Nous définissons alors à nouveau (en utilisant maintenant des instants consécutifs) $\Delta Y_n = Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$, $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$, and $\Delta W_n = W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$. Nous écrivons

$$\Delta Y_n = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t_n + \sigma \Delta W_n$$

On note que ΔY_n a une distribution normale avec une moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)\Delta t_n$ et une variance $\sigma^2\Delta t_n$.

Enfin, si nous appelons f_n la fonction de densité de ΔY_n , nous voudrions maximiser la log-vraisemblance

$$\ell = \sum_{n=1}^N \log f_n(\Delta Y_n)$$

Mais nous pouvons écrire

$$\log f_n(\Delta Y_n) = -\ln(\sigma) - \frac{\left(\Delta Y_n - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t_n \right)^2}{2\sigma^2 \Delta t_n} + C$$

Où C est une constante.

De la dernière expression, nous pouvons dériver

$$\frac{\partial \log f_n(\Delta Y_n)}{\partial \mu} = \frac{\Delta Y_n - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) \Delta t_n}{\sigma^2}$$

Nous introduisons

$$\delta Y = Y_{t_N} - Y_{t_0}$$

Et

$$\delta t = t_N - t_0$$

Et pour finir

$$\frac{\partial \ell}{\partial \mu} = \frac{\delta Y - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right) \delta t}{\sigma^2}$$

A partir de la condition de premier ordre, nous la mettons à zéro et résolvons pour $\hat{\mu}$

$$\hat{\mu} = \frac{\delta Y}{\delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2$$

En procédant de la même manière pour $\hat{\sigma}$, on obtient

$$\frac{\partial \log f_n(\Delta Y_n)}{\partial \sigma} = \frac{\left(\mu^2 - \frac{1}{4}\sigma^4\right) \Delta t_n - \sigma^2 - 2\mu \Delta Y_n + \Delta Y_n^2 \Delta t_n^{-1}}{\sigma^3}$$

Encore une fois, à partir de la condition de premier ordre, nous la mettons à zéro et résolvons pour $\hat{\sigma}$.

$$\hat{\sigma}^2 = 2 \frac{\sqrt{\delta t (\mu^2 \delta t - 2\mu \delta Y + \sum_n \Delta Y_n^2 \Delta t_n^{-1}) + N^2 - N}}{\delta t}$$

Le processus d'utilisation des deux expressions ci-dessus est le suivant : nous résolvons d'abord $\hat{\mu}$ en remplaçant σ par $\hat{\sigma}$ (et sur l'expression $\hat{\sigma}$ nous remplaçons μ par $\hat{\mu}$) et finalement nous utilisons $\hat{\mu}$ sur la dernière expression pour obtenir $\hat{\sigma}$.

- Maximum de vraisemblance pour le processus de retour à la moyenne (Vasicek) : Pour dériver le maximum vraisemblance, nous considérons le modèle

$$dX_t = \tau(\mu - X_t)dt + \sigma dW_t$$

Nous procédons ensuite à la discrétisation du modèle décrit, ce qui donne (à partir de la discrétisation d'Euler-Maryuama aux temps $M\Delta t$, $M = 1, 2, 3, \dots$)

$$X_{k+1} - X_k = \tau\theta\Delta t - \tau X_k\Delta t + \sigma(W_{k+1} - W_k)$$

Si nous mettons $\sigma(W_{k+1} - W_k) = \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_k$

$$X_{k+1} = \tau\theta\Delta t - (\tau\Delta t - 1)X_k + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_k$$

Nous procédons alors en écrivant

$$X_{k+1} - X_k = \tau\theta\Delta t - (\tau\Delta t)X_k + \sigma\sqrt{\Delta t}\epsilon_k$$

Enfin, à partir de là, nous effectuons une régression linéaire sur le côté droit, qui aurait la forme suivante

$$\frac{dX}{dt} = a + bX + \epsilon$$

Et nous récupérons les paramètres comme

$$\begin{aligned}\tau &= -b \\ \theta &= -\frac{a}{b} \\ \sigma &= std(\epsilon dt)\end{aligned}$$

éthode du maximum vraisemblance pour une paramétrisation générale : Enfin, à la recherche d'une méthode plus générale, nous avons tenté de paramétrer un processus stochastique général comme suit

$$dX_t = \theta_1 X_t dt + \theta_2 (\theta_3 - X_t) dt + \sigma dW_t$$

Nous trouverions alors l'expression de la vraisemblance (avec θ un vecteur de paramètres, c'est-à-dire $\theta = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]$)

$$\theta \rightarrow \frac{dP_\theta^T}{dP^T}(x) = \exp \left[\int_0^T \frac{b(\theta, s)}{\sigma^2(s)} dX_s(x) - \frac{1}{2} \int_0^T \frac{b^2(\theta, s)}{\sigma^2(s)} ds \right] = L_T(\theta, x)$$

Nous procédons ensuite à l'optimisation numérique de la solution pour les intégrales ci-dessus en récupérant l'ensemble des paramètres recherchés.

Cette dernière méthode ne s'est pas révélée fructueuse dans le contexte de notre projet car, lors de l'analyse d'un changement de régime qui se produit entre deux classes différentes, nous n'avons pas pu obtenir une bonne précision en nous limitant à la condition d'une même structure de diffusion partagée entre les deux classes de processus.

En d'autres termes, nous avons besoin de plus de flexibilité pour que chaque classe de processus puisse avoir sa propre expression du coefficient de diffusion. Cette méthode, cependant, ne le permettait pas, car nous aurions dû introduire une paramétrisation de la partie diffusion de la dynamique.

Dans l'ensemble, les méthodes les plus efficaces ont été le maximum de vraisemblance traditionnel et la méthode des moments appliqués à leurs classes de processus respectives. De manière surprenante, nous avons pu appliquer la méthode dédiée au mouvement brownien géométrique en dehors de son domaine (avec le MR) et en tirer des enseignements (bien sûr, la récupération de ses paramètres n'a pas été possible, mais les informations capturées ont été utiles pour l'inférence de changement de régime).

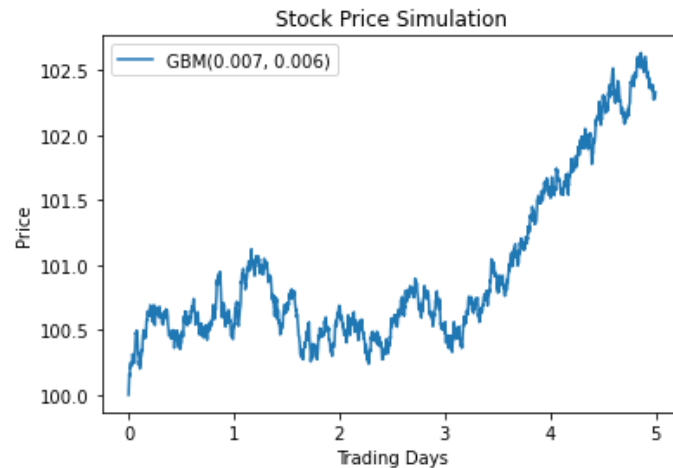
4.4 Le modèle simplifié en pratique

Pour finir ce chapitre et conclure le rapport, nous avons simulé quelques tours de notre modèle simplifié, en partant de la génération de la série temporelle (chapitre 3) jusqu'à sa

résolution (trois premières sections du chapitre 4).

- **Estimation d'un unique processus - GBM :** On commence en prenant une simulation d'un GBM, sans prendre en compte la détection du switching point puisqu'on n'a qu'un seul processus.

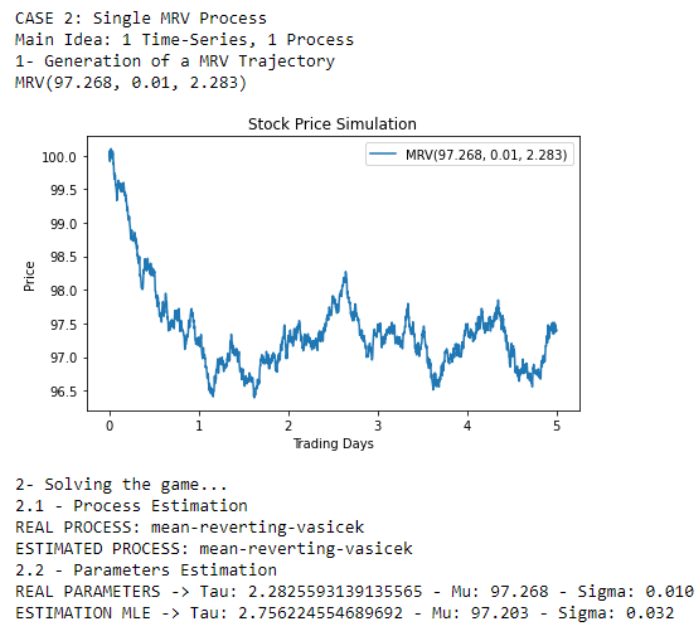
```
CASE 1: Single GBM Process
Main Idea: 1 Time-Series, 1 Process
1- Generation of a GBM Trajectory
GBM(0.007, 0.006)
```



```
2- Solving the game...
2.1 - Process Estimation
REAL PROCESS: geometric-brownian-motion
ESTIMATED PROCESS: geometric-brownian-motion
2.2 - Parameters Estimation
REAL PARAMETERS -> Mu: 0.007 - Sigma: 0.006
ESTIMATION MM -> Mu: 0.005 - Sigma: 0.006
ESTIMATION MLE -> Mu: 0.005 - Sigma: 0.006
```

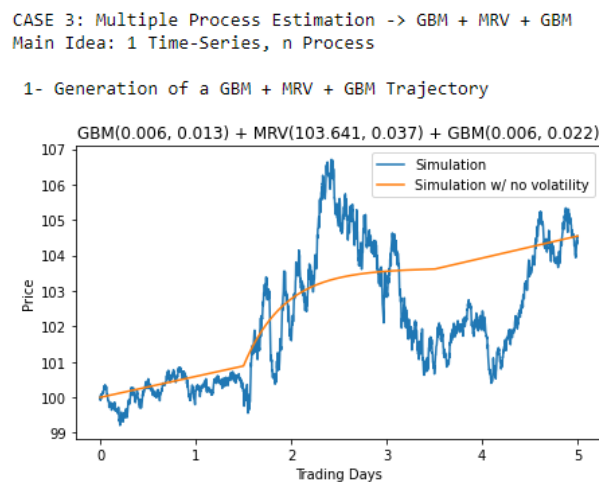
GRAPHIQUE 18 – Résolution du modèle simplifié pour un GBM.

- **Estimation d'un unique processus - MRV :** Maintenant, nous suivons la même procédure avec un processus de retour à la moyenne à la place du GBM.

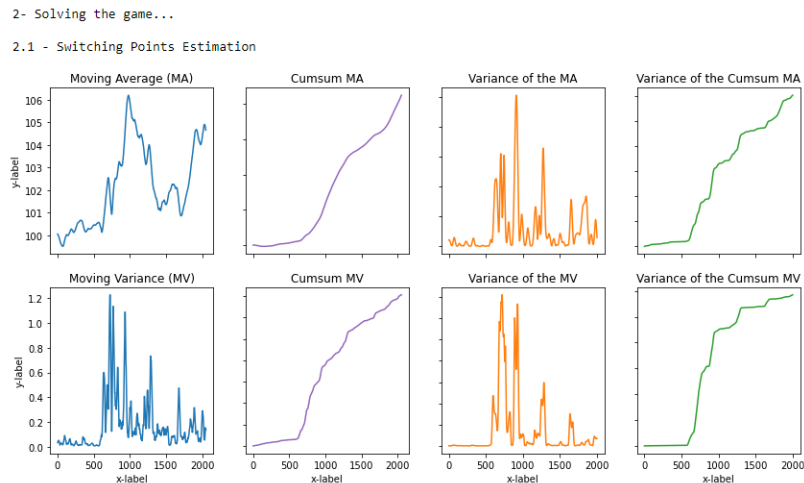


GRAPHIQUE 19 – Résolution du modèle simplifié pour un MRV.

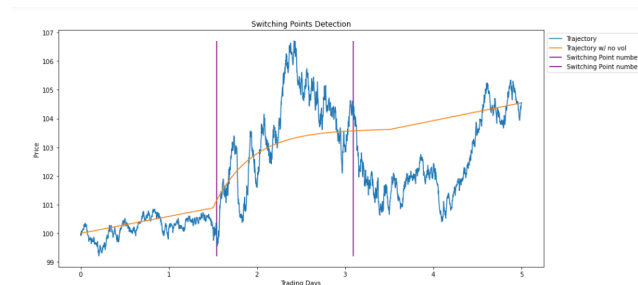
- **Estimation de processus multiples : GBM + MRV + GBM** Finalement, on arrive à l'exemple le plus intéressant qui est discuté tout au long de ce rapport. On commence avec un GBM, suivi par la simulation d'un impact de marché qui est représenté par le MR, et, à la fin, on revient à un GBM qui reflète l'adaptation du marché après l'impact.



GRAPHIQUE 20 – (Série Originale) Résolution du modèle simplifié pour un cas généré par des processus multiples : GBM + MRV + GBM.



GRAPHIQUE 21 – (Analyse des Moments) Résolution du modèle simplifié pour un cas généré par des processus multiples : GBM + MRV + GBM.



GRAPHIQUE 22 – (Détection de changement de régime) Résolution du modèle simplifié pour un cas généré par des processus multiples : GBM + MRV + GBM.

```

2.2 - Process Estimation
REAL PROCESS: ['geometric-brownian-motion', 'mean-reverting-vasicek', 'geometric-brownian-motion']
ESTIMATED PROCESS: ['geometric-brownian-motion', 'mean-reverting-vasicek', 'geometric-brownian-motion']

2.3 - Parameters Estimation

GBM1 Parameters Estimation
REAL PARAMETERS -> Mu: 0.006 - Sigma: 0.013
ESTIMATION MM -> Mu: 0.001 - Sigma: 0.014
ESTIMATION MLE -> Mu: 0.001 - Sigma: 0.014

MRV1 Parameters Estimation
REAL PARAMETERS -> Tau: 2.309354505077416 - Mu: 103.641 - Sigma: 0.037
ESTIMATION MLE -> Tau: 2.2825593139135565 - Mu: 104.197 - Sigma: 0.079

GBM2 Parameters Estimation
REAL PARAMETERS -> Mu: 0.006 - Sigma: 0.022
ESTIMATION MM -> Mu: 0.002 - Sigma: 0.027
ESTIMATION MLE -> Mu: 0.002 - Sigma: 0.027

```

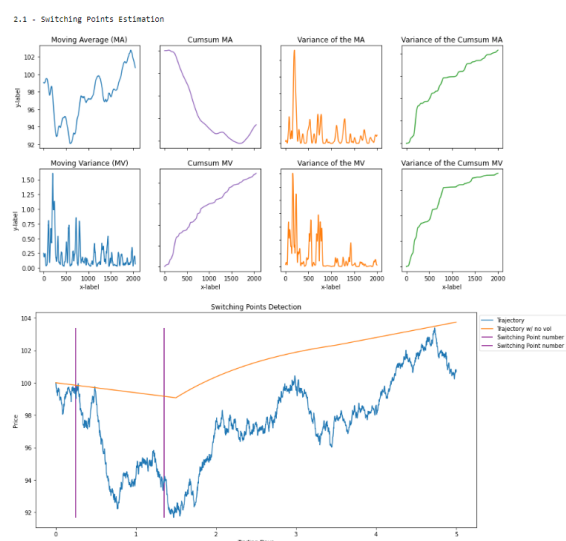
GRAPHIQUE 23 – (Estimation des processus et des paramètres) Résolution du modèle simplifié pour un cas généré par des processus multiples : GBM + MRV + GBM.

Comme on peut le voir sur les exemples ci-dessus, même avec une marge d'erreur, tous nos estimation semblent être cohérentes avec la « vrai solution ». Toutefois, ce n'est pas toujours le cas.

En effet, nous avons trouvé deux cas qui apparaissent suivant dans nos simulations :

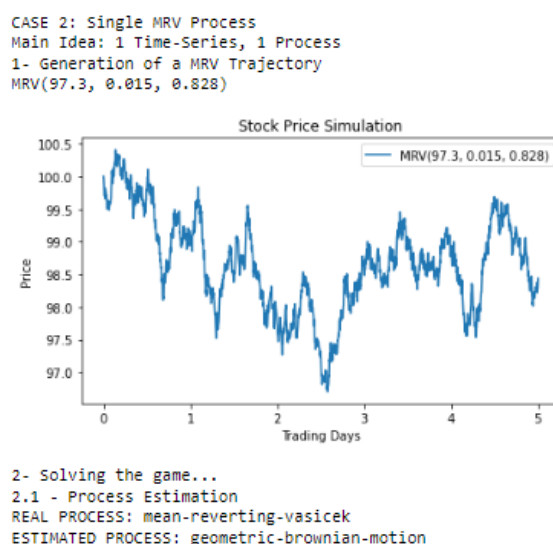
- Après plusieurs tests, nous avons remarqué que notre algorithme ne trouve pas les vrais *switching points* lorsque la partie aléatoire du processus prend les devants et finit par cacher la tendance déterministe (question du seuil).

Dans l'exemple ci-dessous, on voit que l'algorithme trouve un point de changement de régime dès que la série temporelle réelle (en bleu) s'éloigne de la série déterministe (en orange). Puisqu'un de nos méthodes se base sur les moments, c'est compréhensible l'occurrence de cette incompatibilité.



GRAPHIQUE 24 – Erreur détection switching points - Méthode des Moments.

- Nous avons aussi remarqué que quand le paramètre *drift* du processus *mean-reverting* est trop proche de la valeur initiale ou le *sigma* a une valeur proportionnellement élevée, l'algorithme de *machine learning* a des difficultés à distinguer le MRV du GBM. Ci-dessous un exemple pour illustrer ce cas particulier :



GRAPHIQUE 25 – Erreur estimation processus : GBM au lieu de MRV.

5) Conclusions et prochaines étapes

EN définitive, ce projet a été une véritable source d'enrichissement pour nous. Nous avons pu approfondir des notions étudiées en cours, notamment en cours d'*econophysics*. Nos multiples recherches sur l'impact de marché, même si elles ne nous ont pas toutes servis directement dans la création et la résolution de notre modèle simplifié, nous ont permis d'étudier un sujet d'importance majeure ces dernières années en finance de marché, comme l'a révélé le *flash crash* survenu le 6 mai 2010.

En outre, si le sujet de ce projet était très intéressant, il était aussi très ambitieux dans la mesure où c'est un sujet toujours d'actualité et vivement étudié en recherche scientifique. Par conséquent, nous remercions notre encadrant car il est parvenu à nous guider sur la mise en place de notre modèle simplifié et, au total, sur la problématisation et la réduction de ce vaste sujet, sans pour autant diminuer l'intérêt de ce projet.

Aussi, ce modèle simplifié, dont la résolution est fondée sur une approche empirique, présente un intérêt certain du fait de sa rigueur : la scission de ce problème initial en trois sous-problèmes dont l'enchaînement est logique est pertinent. En outre, les étapes 2 et 3 - à savoir l'estimation du processus à l'origine de la série temporelle et l'estimation des paramètres associés - sont deux étapes fiables et réussies.

De plus, notre ambition était que ce projet soit pertinent et surtout réutilisable au sein de Varenne Capital Partners. Nous avons donc industrialisé notre code, grâce notamment à l'outil PyCharm et GitHub. Car s'il reste évidemment des ajustements, des améliorations et des approfondissements à apporter, ceci est facilité par la propreté du code et sa clarté.

En effet, même si nous avons eu un plaisir certain à travailler ce projet et à approfondir des notions loin d'être évidentes, nous regrettons encore le manque de fiabilité et de stabilité des résultats produits à l'issue de l'étape 1 - à savoir la détermination des points de changements de régime. Les cas de figure présentés précédemment démontrent les limites de notre démarche.

Aussi, nous aurions souhaité préciser et améliorer cette première étape. Nous aurions également souhaité ajouter d'autres processus aléatoires à simuler afin d'enrichir notre simulateur et, dans le même champ, nous aurions apprécié constituer un marché plus complet en simulant les interactions entre les différents actifs constituant ce marché.

Notre satisfaction aurait été complète si nous avions eu suffisamment de temps pour ajouter ces éléments dont nous regrettons l'absence.

Néanmoins, nous demeurons ravis d'avoir eu l'opportunité de travailler sur ce projet en partenariat avec Varenne Capital Partners, et remercions à nouveau notre encadrant pour la clarté de son propos, sa méthode et sa bienveillance tout au long de notre projet.

- [1] U.S. Commodity Futures Trading Commission & U.S. Securities & Exchange Commission (2010), *Findings Regarding the market events of May 6, 2010*, <https://www.sec.gov/news/studies/2010/marketevents-report.pdf>.
- [2] Robert Almgren, Chee Thum, Emmanuel Hauptmann, and Hong Li (2005), *Direct Estimation of Equity Market Impact*, <https://www.cis.upenn.edu/~mkearns/finread/costestim.pdf>.
- [3] Benzaquen Michael (2020), *ECO 586 : Physics of Financial Markets*, Lecture Notes.
- [4] Almgren Robert (2012), *Optimal trading with stochastic liquidity and volatility*, SIAM Journal on Financial Mathematics.
- [5] Tankov Peter and Voltchkova Ekaterina (2009), *Jump-diffusion models : a practitioner's guide*, https://www.lpsm.paris/pageperso/tankov/tankov_voltchkova.pdf.