

LES CERCLES DE VILLARCEAU

POLISANO KÉVIN
MP* AU LYCÉE FABERT

TIPE 2009-2010

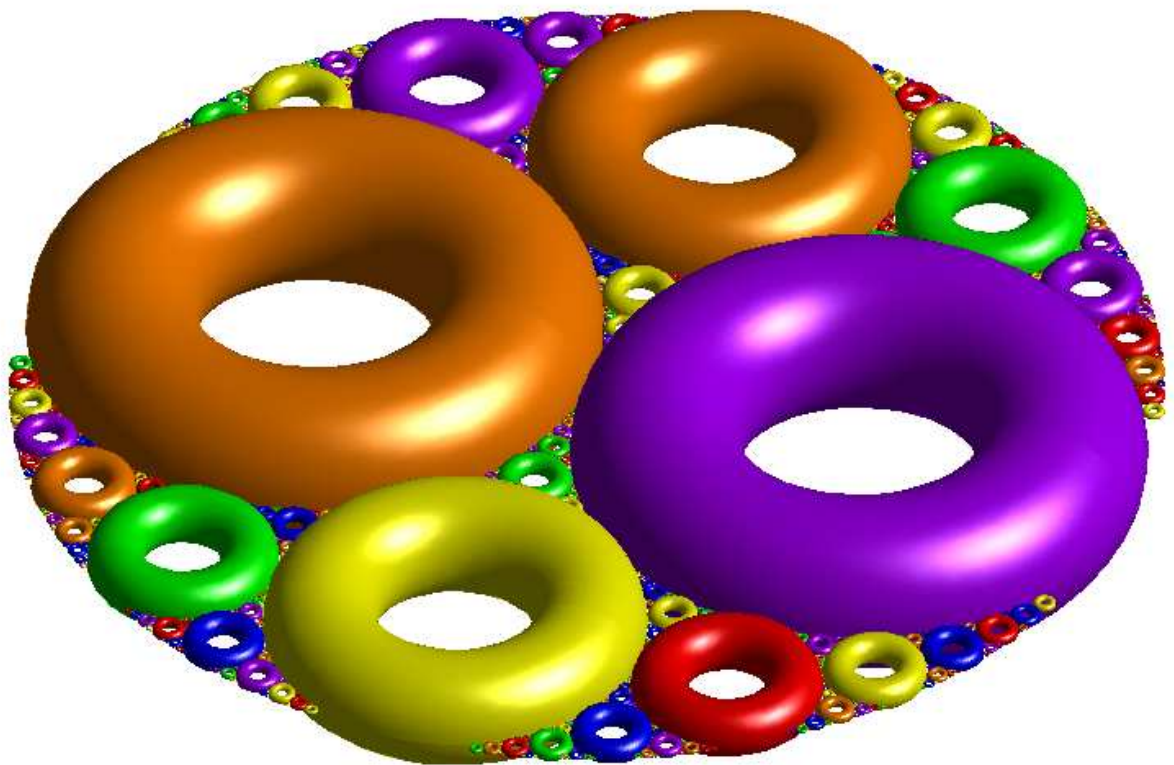


Table des matières

1	Préliminaires	3
1.1	Construction du tore de \mathbb{R}^3	3
1.2	Plan tangent	3
1.3	Equation cartésienne	5
2	Etude analytique des cercles de Villarceau	6
2.1	Présentation du problème	6
2.2	Plan bitangent	6
2.3	Equation des cercles	7
2.4	Représentation dans l'espace	9
3	Construction d'une épure	10
3.1	Présentation de l'épure	10
3.2	Explications de la construction	10
3.3	Vision plane des cercles de Villarceau	12
4	Démonstration algébrique	12
4.1	Espace projectif	12
4.2	Points cycliques	14
4.3	Courbes algébriques et théorème de Bézout	15
4.4	Preuve du théorème de Villarceau	16
5	Loxodromie du tore	17
5.1	Présentation du problème	17
5.2	Mise en equation	17
5.3	Résolution	18
5.4	Conclusion	20
6	Construction réelle des cercles de Villarceau	21
6.1	Note historique et exemples architecturaux	21
6.2	Réalisation pratique	22
7	Références	29

1 Préliminaires

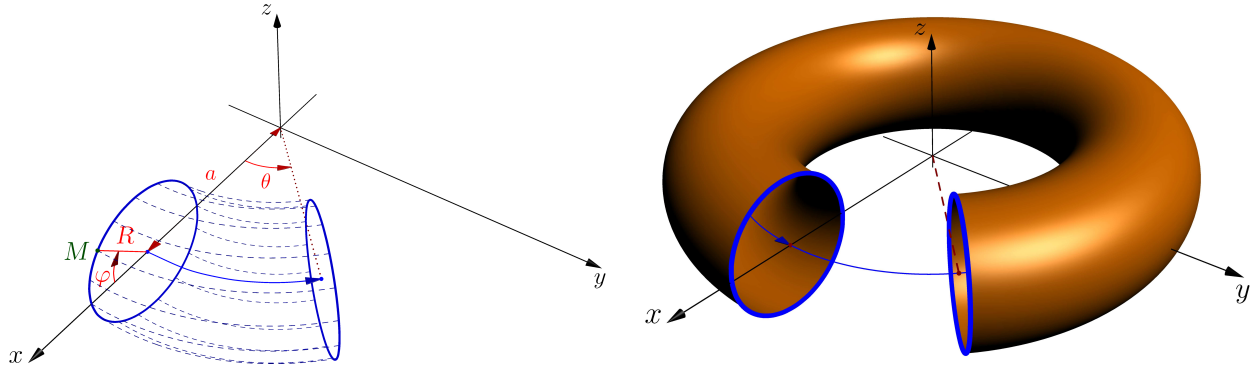
1.1 Construction du tore de \mathbb{R}^3

Définition : Un tore est la surface $\Sigma_{a,R}$ engendrée par la rotation d'un cercle C de rayon R autour d'une droite affine située dans son plan à une distance a de son centre. On prendra $R < a$.

$M \in C$ est paramétré par $\varphi \mapsto \begin{pmatrix} a + R \cos \varphi \\ 0 \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$. On obtient le tore complet par rotation :

$$(\varphi, \theta) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a + R \cos \varphi \\ 0 \\ R \sin \varphi \end{pmatrix}$$

Donc $\Sigma_{a,R}$ paramétré par $(\varphi, \theta) \mapsto M = O + (a + R \cos \varphi)\vec{u} + R \sin \varphi \vec{k}$ où $\begin{cases} \vec{u} = \cos \theta \vec{i} + \sin \theta \vec{j} \\ \vec{v} = \sin \theta \vec{i} - \cos \theta \vec{j} \end{cases}$.



1.2 Plan tangent

On va déterminer l'équation du plan tangent au tore en un point de sa surface, et nous caractériserons les points de la surface où le plan tangent traverse ou non celle-ci.

On calcule les dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = R(-\sin \varphi \vec{u} + \cos \varphi \vec{k}) \in \text{Vect}(\vec{u}, \vec{k})$$

$$\frac{\partial M}{\partial \theta} = (a + R \cos \varphi) \vec{v} \in \text{Vect}(\vec{v})$$

On en déduit que $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}, \frac{\partial M}{\partial \theta}\right)$ est libre pour tout (φ, θ) , et l'équation du plan dans $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$:

$$\begin{vmatrix} X - (a + R \cos \varphi) & -\sin \varphi & 0 \\ Y - 0 & 0 & a + R \cos \varphi \\ Z - R \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = 0$$

En développant on obtient :

$$T_m : X \cos \varphi + Z \sin \varphi - (a \cos \varphi + R) = 0$$

Comme l'équation ne dépend pas de θ on peut se limiter à $\theta_0 = 0$, $m(\lambda_0, \theta_0)$.

$$T_m : \underbrace{X \cos \varphi_0 + Z \sin \varphi_0 - (a \cos \varphi_0 + r)}_{\Phi(X,Y,Z)} = 0$$

$$F(\varphi, \theta) = \Phi(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) = \underbrace{(a + R \cos \varphi) \cos \theta \cos \varphi_0}_{x(\varphi, \theta)} + \underbrace{R \sin \varphi \sin \varphi_0}_{z(\varphi, \theta)} - (a \cos \varphi_0 + R)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = -R \sin \varphi \cos \theta \cos \varphi_0 + R \cos \varphi \sin \varphi_0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial \theta} = -(a + R \cos \varphi) \cos \varphi_0 \sin \theta.$$

$$\rho = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} = -R(\cos \varphi \cos \theta \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0)$$

$$\sigma = \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi \partial \theta} = R \sin \varphi \cos \varphi_0 \sin \theta$$

$$\tau = \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} = -(a + R \cos \varphi) \cos \varphi_0 \cos \theta$$

On effectue $\theta \leftarrow 0$, $\varphi \leftarrow \varphi_0$, $\rho \leftarrow -R$, $\sigma \leftarrow 0$ et $\tau \leftarrow -(a + R \cos \varphi_0) \cos \varphi_0$.

$$\rho\tau - \sigma^2 = R \cos \varphi_0 (a + R \cos \varphi_0)$$

Comme $R < a$ on a $a + R \cos \varphi_0 > 0$ donc le signe de cette quantité ne dépend que de celui de $\cos \varphi_0$.

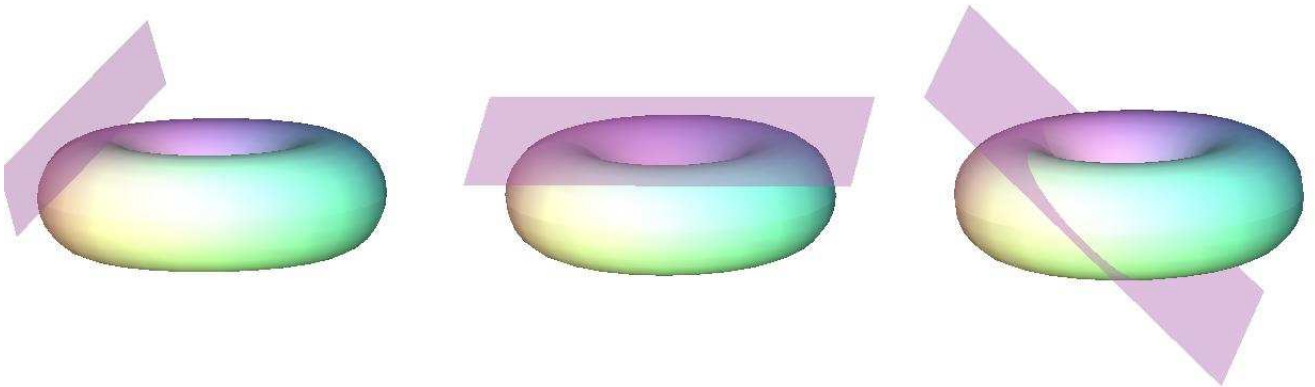
Par conséquent pour :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{\pi}{2} \implies \text{points } \textit{elliptiques}$$

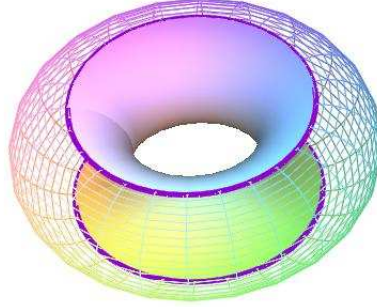
$$\varphi_0 = \pm \frac{\pi}{2} \implies \text{points } \textit{paraboliques}$$

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_0 < \frac{3\pi}{2} \implies \text{points } \textit{hyperboliques}$$

Voici trois types de situations possibles (respectivement pour $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$) :



Conclusion : Les points *elliptiques* se situent dans la zone quadrillée, les points *hyperboliques* se situent dans la zone pleine et les points *paraboliques* sur les cercles violets.



1.3 Equation cartésienne

$$\begin{aligned}
 M(x, y, z) \in \Sigma_{a,R} &\iff \exists(\theta, \varphi) \in]-\pi, \pi]^2, \begin{cases} x = (a + R \cos \varphi) \cos \theta \\ y = (a + R \cos \varphi) \sin \theta \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \\
 &\iff \exists \varphi \in]-\pi, \pi], \begin{cases} x^2 + y^2 = (a + R \cos \varphi)^2 \\ z = R \sin \varphi \end{cases} \\
 &\iff \exists \varphi \in]-\pi, \pi], \begin{cases} R \cos \varphi = \pm \sqrt{x^2 + y^2} - a \\ R \sin \varphi = z \end{cases} \\
 &\iff (\sqrt{x^2 + y^2} \pm a)^2 + z^2 = R^2 \\
 &\iff x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + a^2 = \pm 2a\sqrt{x^2 + y^2} \\
 &\iff (x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + a^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2)
 \end{aligned}$$

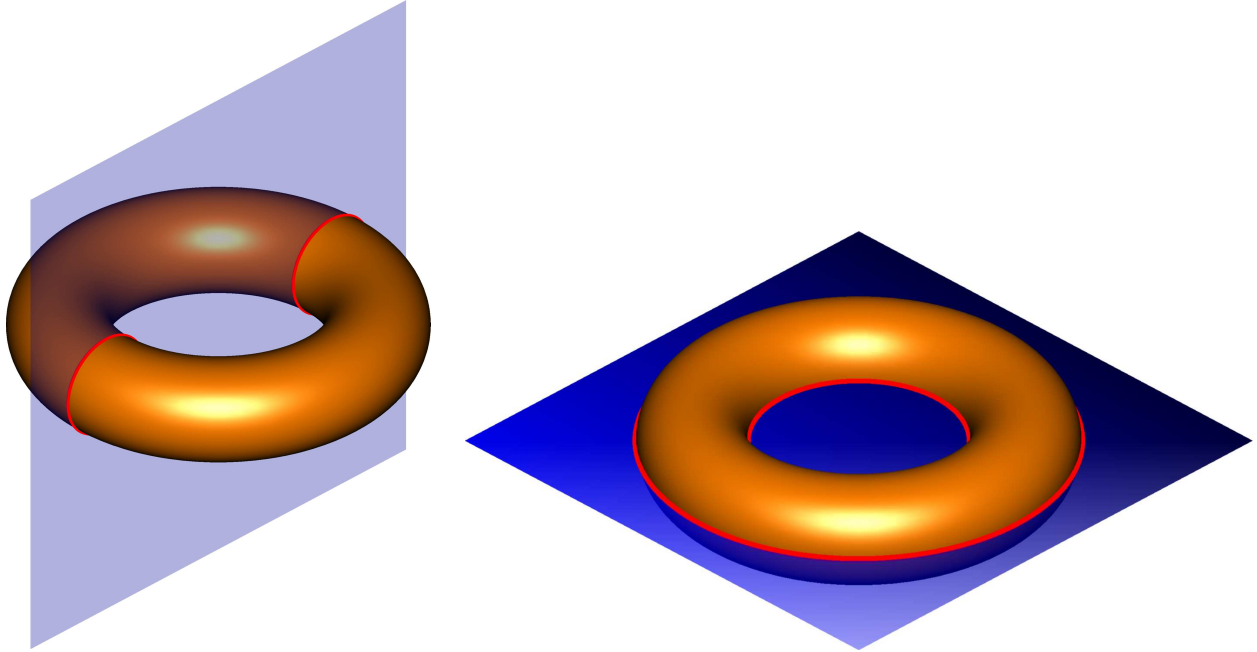
Une équation cartésienne du tore $\Sigma_{a,R}$ est donc :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

2 Etude analytique des cercles de Villarceau

2.1 Présentation du problème

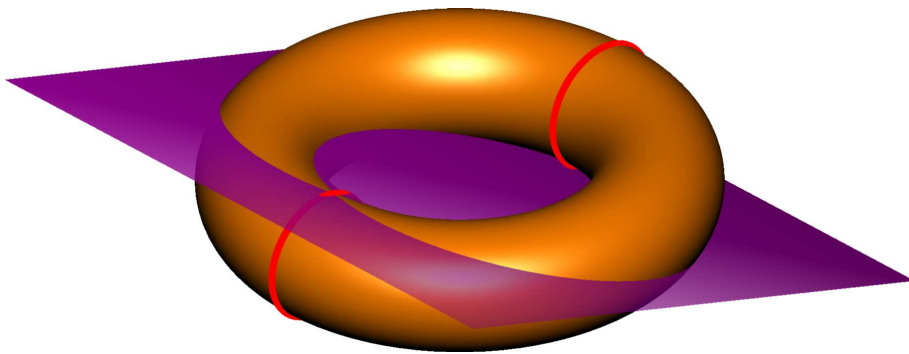
Les *méridiens* et *parallèles* du tore sont des cercles (par construction même du tore) :



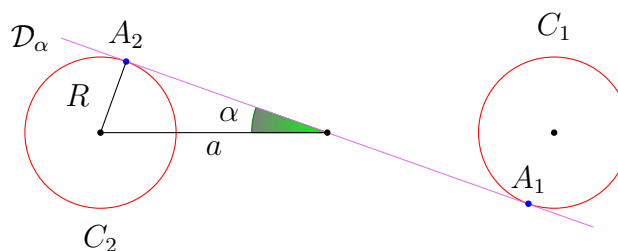
✎ Mais il existe une autre famille de cercles sur la surface du tore : les cercles de Villarceau. Ces cercles sont obtenus en coupant le tore par un plan bitangent.

2.2 Plan bitangent

On souhaite déterminer un plan qui soit tangent en 2 points au tore (en mauve ci-dessous) :



Puisque le tore est invariant par rotation on se place dans le plan $x = 0$:



On prendra donc $\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{a}\right)$ et comme plan $\mathcal{P}_\alpha : z = \tan(\alpha)y$ (les autres se déduiront par rotation). En effet les cercles C_1 et C_2 ont pour équation dans $(O; \vec{j}, \vec{k}) : (y - a)^2 + z^2 = R^2$ et $(y + a)^2 + z^2 = R^2$, la droite \mathcal{D}_α intersection des plans \mathcal{P}_α et $x = 0$ a pour équation dans $(O; \vec{j}, \vec{k}) : z = \tan(\alpha)y$, ainsi :

$$\begin{aligned}
M(y, z) \in \mathcal{D}_\alpha \cap C_1 &\iff \begin{cases} (y - a)^2 + z^2 = R^2 \\ z = y \tan \alpha \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = y \tan \alpha \\ \frac{y^2}{\cos^2 \alpha} - 2ay - R^2 + a^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = y \tan \alpha \\ \left(\frac{y}{\cos \alpha} - a \cos \alpha\right)^2 + a^2 \sin^2 \alpha - R^2 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} z = y \tan \alpha \\ y = a \cos^2 \alpha \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y = a \cos^2 \alpha \\ z = a \sin \alpha \cos \alpha \end{cases}
\end{aligned}$$

La droite \mathcal{D}_α , intersection de \mathcal{P}_α et du plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$, rencontre donc le cercle C_1 en un unique point. Elle est donc tangente à C_1 en ce point A_1 , de coordonnées dans $(O, \vec{j}, \vec{k}) : (a \cos^2 \alpha, a \sin \alpha \cos \alpha)$. De même, \mathcal{D}_α est tangente à C_2 en A_2 , de coordonnées dans $(O, \vec{j}, \vec{k}) : (-a \cos^2 \alpha, -a \sin \alpha \cos \alpha)$.

2.3 Equation des cercles

On munit le plan \mathcal{P}_α du repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k})$. Si un point M de \mathcal{P}_α est de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il est de coordonnées $(x, \frac{y}{\cos \alpha})$ dans \mathcal{R} ; en effet:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + y \tan \alpha \vec{k} = x\vec{i} + \frac{y}{\cos \alpha} (\sin \alpha \vec{j} + \cos \alpha \vec{k})$$

Soit M un point de \mathcal{P}_α de coordonnées (x, y, z) dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, de coordonnées (X, Y) dans \mathcal{R} .

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R} &\iff \begin{cases} z = y \tan \alpha \\ (x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(x^2 + y^2) \end{cases} \\
&\iff (X^2 + Y^2 + a^2 - R^2)^2 = 4a^2(X^2 + Y^2 \cos^2 \alpha) \\
&\iff (X^2 + Y^2)^2 - 2(a^2 + R^2)X^2 + 2(a^2 - R^2 - 2a^2 \cos^2 \alpha)Y^2 + (a^2 - R^2)^2 = 0 \\
&\iff (X^2 + Y^2)^2 - 2(a^2 + R^2)X^2 + 2(-a^2 + R^2)Y^2 + (a^2 - R^2)^2 = 0
\end{aligned}$$

Réécrivons l'équation obtenue sous la forme:

$$(X^2 + Y^2 + uX + vY + w)(X^2 + Y^2 + u'X + v'Y + w') = 0$$

Pour cela, u, v, w, u', v', w' doivent vérifier le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} u + u' = 0 \\ v + v' = 0 \\ uw' + u'w = 0 \\ vw' + v'w = 0 \\ w + w' + uu' = -2(a^2 + R^2)X^2 \\ w + w' + vv' = 2(-a^2 + R^2) \\ ww' = (a^2 - R^2)^2 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} u' = -u = 2R \\ v' = -v = 0 \\ w' = w = -a^2 + R^2 \end{array} \right.$$

$\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$ est donc la réunion de deux cercles d'équations dans \mathcal{R} :

$$(X - R)^2 + Y^2 = a^2 \quad \text{et} \quad (X + R)^2 + Y^2 = a^2$$

Ces deux cercles sont de rayon a . A_1 et A_2 sont de coordonnées dans \mathcal{R} $(0, \pm a \cos \alpha)$. On en déduit facilement que A_1 et A_2 appartiennent à chacun des deux cercles de $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$.

remarque : On a vu que le plan tangent à $\Sigma_{a,R}$ en un point M est le plan tangent à la méridienne passant par M . Or, on a vu que le plan \mathcal{P}_α coupe le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ (plan méridien contenant les points A_1 et A_2) suivant une droite tangente commune aux deux cercles C_1 et C_2 (méridienne contenant les points A_1 et A_2). Donc, \mathcal{P}_α est le plan tangent à la méridienne contenant les points A_1 et A_2 en A_1 et A_2 . Le plan tangent à $\Sigma_{a,R}$ en A_1 et A_2 est donc bien \mathcal{P}_α .

► On peut également donner une **paramétrisation** des cercles de Villarceau :

Celle du tore est : $\left\{ \begin{array}{l} x = (a + R \cos \varphi) \sin \theta \\ y = (a + R \cos \varphi) \cos \theta \\ z = R \sin \varphi \end{array} \right.$ et l'équation du plan $z = \tan \alpha y \Leftrightarrow z = \frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2}} y$, d'où :

$$R \sin \varphi \sqrt{a^2 - R^2} - R(a + R \cos \varphi) \cos(\theta) = 0 \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - R^2} \sin \varphi}{a + R \cos \varphi}$$

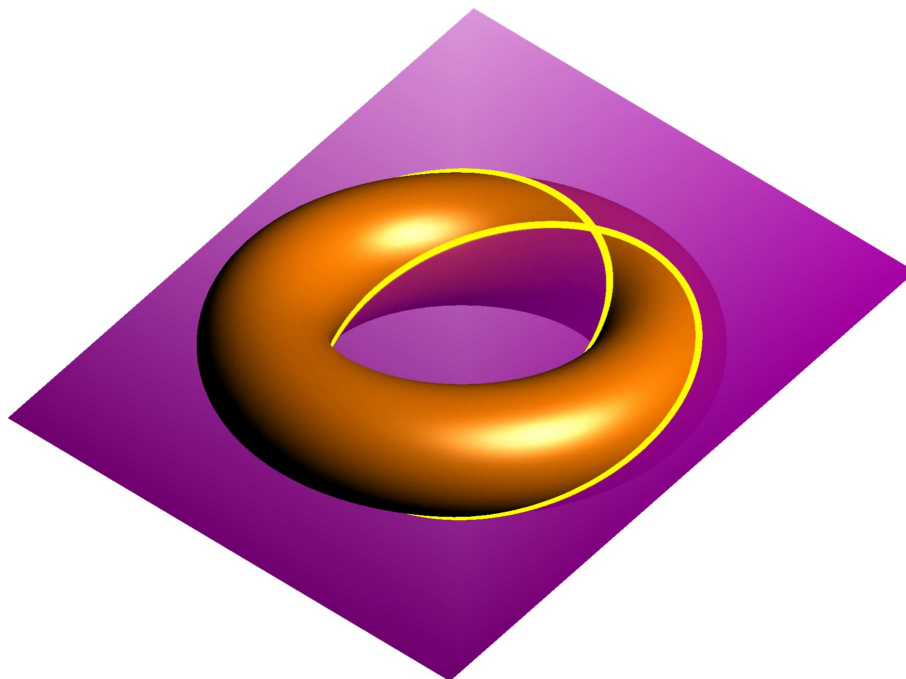
$$\sin \theta = \varepsilon \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \varepsilon \sqrt{\frac{(a + R \cos \varphi)^2 - (a^2 - R^2) \sin^2 \varphi}{(a + R \cos \varphi)^2}} = \varepsilon \sqrt{\frac{a^2(1 - \sin^2 \varphi) + 2aR \cos \varphi + R^2}{(a + R \cos \varphi)^2}}$$

En remplaçant $\cos \theta = \frac{\sqrt{a^2 - R^2} \sin \varphi}{a + R \cos \varphi}$ et $\sin \theta = \varepsilon \frac{a \cos \varphi + R}{a + R \cos \varphi}$ dans la paramétrisation du tore :

$$\gamma_\varepsilon(\varphi) = \left\{ \begin{array}{l} x = \varepsilon(a \cos \varphi + R) \\ y = \sqrt{a^2 - R^2} \sin \varphi \\ z = R \sin \varphi \end{array} \right.$$

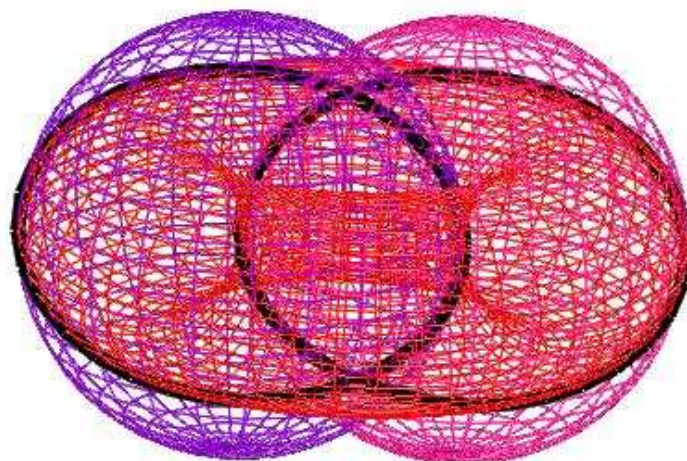
2.4 Représentation dans l'espace

Voici en jaune l'intersection du plan bitangent mauve avec le tore :



👉 Les cercles de Villarceau peuvent également être obtenus comme intersection du tore avec les sphères de centres $\Omega_\varepsilon(\varepsilon R, 0, 0)$ et de rayon a . En effet γ_ε appartient bien à cette shère :

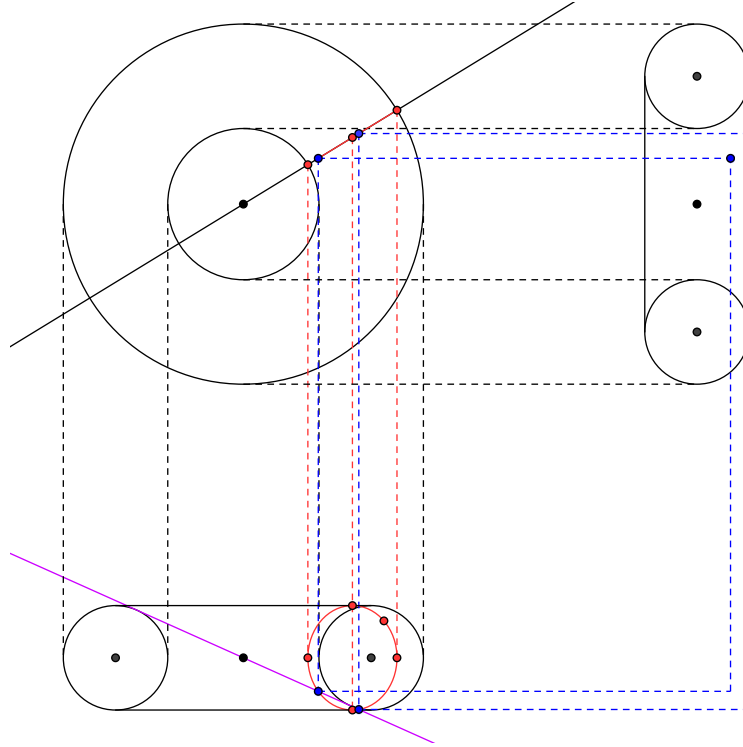
$$\Omega_\varepsilon \gamma_\varepsilon(\varphi)^2 = a^2 \cos^2 \varphi + (a^2 - R^2) \sin^2 \varphi + R^2 \sin^2 \varphi^2 = a^2$$



3 Construction d'une épure

3.1 Présentation de l'épure

Disséquons le tore de façon à visualiser les cercles de Villarceau sur les plans de bases. Ainsi au centre on voit le tore vue de dessus (i.e sa projection sur (Oxy) , dite « horizontale »), et de part et d'autre les vues de côtés (en bas sa projection sur (Oyz) et à droite sur (Oxz) , dites « frontales »).



3.2 Explications de la construction

☞ On se préoccupe seulement de la vue de dessus (VD) et de la vue de côté (VC) représentée en dessous. Coupons le tore suivant un plan contenant l'axe (Oz) qui coupe donc celui-ci suivant un méridien, on obtient en VD la droite noire coupant la couronne suivant un segment (en rouge). Puisque la section est un cercle, on voit en VC une ellipse (en rouge), en effet si la droite noire était horizontale alors en VC on verrait un vrai cercle (dessiné en noir), mais lorsque la droite pivote légèrement, le cercle se déforme et on voit effectivement l'ellipse rouge.

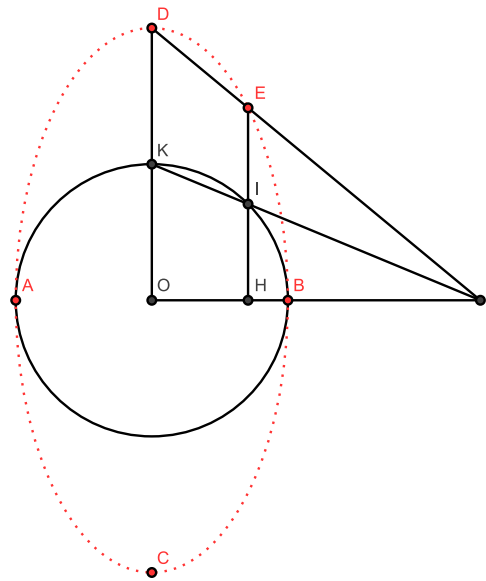
☞ *Comment construire l'ellipse rouge ?*

Les deux points rouges issus de l'intersection de la droite noire avec les cercles concentriques sont eux véritablement dans le plan (Oxy) (car à hauteur $z = 0$ dans l'espace), donc leur projection en VC est aussi à hauteur $z = 0$ comme représentés. Le troisième point rouge en VD lui se situe soit « au dessus » du tore, à hauteur maximum, soit « en dessous » du tore, à hauteur minimum, d'où les deux projections en VC. On a donc quatre points de la conique, or il en faut cinq pour avoir une unique conique passant par ces cinq points.

🔍 *Comment obtenir le cinquième point ?*

Soit A, B, C et D les quatre points dont nous disposons (voir ci-dessous). On construit le cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$ (de rayon $a = OB$, posons $b = OC$). \mathcal{C} a pour équation $x^2 + y^2 = a^2$, et l'image de \mathcal{C} par la transformation $\mathcal{A} : (x, y) \mapsto (x, \frac{a}{b}y)$ (une *affinité* de rapport $\frac{a}{b}$) est l'ellipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ qui contient bien les quatre points. Pour obtenir un cinquième point sur l'ellipse il suffit donc de prendre un point de \mathcal{C} (distinct des points ordinaux) et de considérer son image par \mathcal{A} .

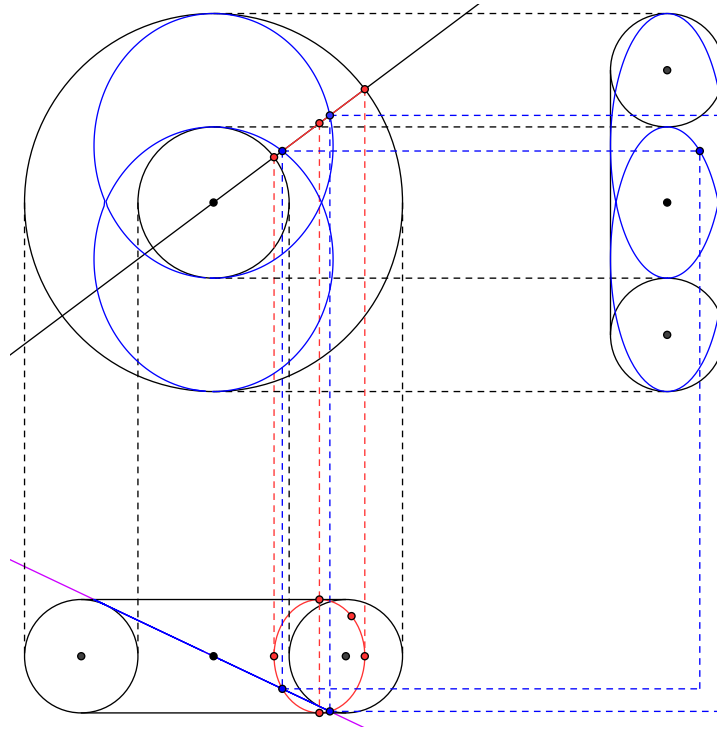
Géométriquement, on trace (par exemple) la première bissectrice qui coupe \mathcal{C} en I , puis on trace (KI) qui coupe l'axe des abscisses en J . Enfin on trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par I qui coupe la droite (DJ) en E . On vérifie que E est bien l'image de I par \mathcal{A} puisque d'après le théorème de Thalès $\frac{HI}{OK} = \frac{HE}{OD} \Leftrightarrow y_E = \frac{a}{b}y_I$. E est le cinquième point recherché. On demande ensuite à Geogebra de tracer l'ellipse passant par ces cinq points.



🔍 Considérons maintenant le plan bitangent en mauve que nous avons présenté *supra* (pour le construire géométriquement c'est simple on trace le cercle de diamètre les deux premiers points noirs et celui de diamètre les deux derniers en VC, et l'intersection avec le cercle noir donne les points de tangence). Ce plan coupe l'ellipse rouge en au plus deux points (repérés en bleu), et en faisant pivoter la droite noire on obtient donc tous les points d'intersections du plan avec le tore, ainsi en traçant le lieu des points bleus (projetés en VD) on visualise les cercles de Villarceau.

🔍 Reste à projeter les points bleus sur l'autre vue de côté, pour cela on trace la médiatrice des centres du tore des deux vues de côtés, et l'on s'en sert comme rabattement.

3.3 Vision plane des cercles de Villarceau



4 Démonstration algébrique

4.1 Espace projectif

Définition : Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$. On définit sur $E - \{0\}$ la relation :

$$x\mathcal{R}y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, x = \lambda y$$

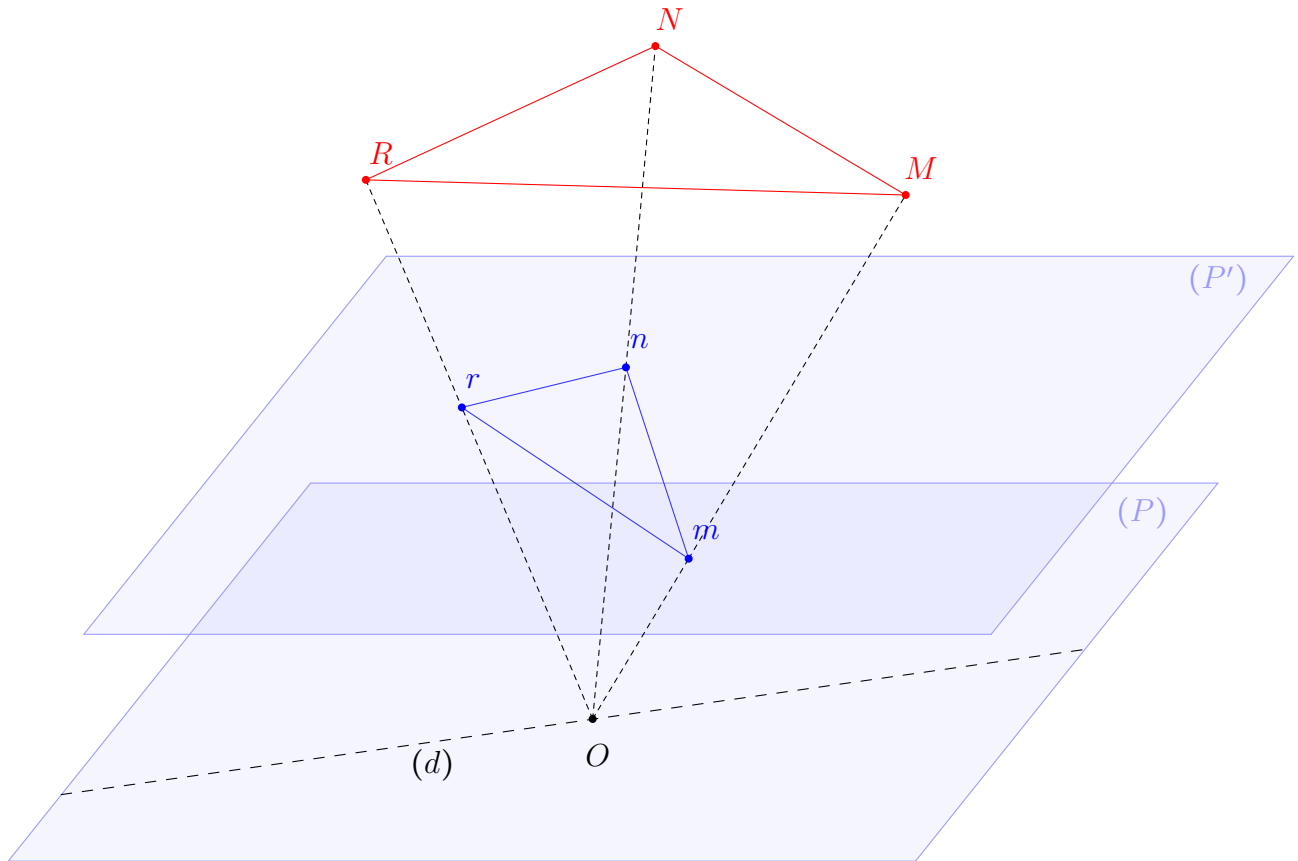
L'espace **projectif** sur E est l'ensemble quotient de $E - \{0\}$ par la relation d'équivalence \mathcal{R} :

$$\mathcal{P}(E) = (E - \{0\})/\mathcal{R}$$

Si E est de dimension n on dira que $\mathcal{P}(E)$ est de dimension $n - 1$.

Exemple : l'espace projectif de \mathbb{R}^3 .

Soit un plan (P) contenant l'origine, et (P') un plan parallèle comme ci-dessous :



☞ Les points m, n, r appartiennent au plan (P') . Imaginons un observateur placé à l'origine (au point O), d'ici cet observateur voit tous les points de la droite (OM) en m (resp. ceux de la droite (ON) en n et ceux de la droite (OR) en r). Et les droites (d) du plan (P) ne sont pas vues comme point du plan (P') . Il y a donc bijection entre les droites vectorielles de \mathbb{R}^3 non parallèles à (P) et les points du plan (P') .

☞ L'espace projectif de \mathbb{R}^3 est donc en bijection avec le plan affine (P') auquel on ajoute l'ensemble des droites vectorielles de (P) . Un plan projectif \tilde{P}' est donc constitué d'un plan affine (P') qui contient l'ensemble des points propres de \tilde{P}' auquel on adjoint toutes les droites vectorielles (ou directions) de (P') (« points à l'infini »)

remarque : Cette notion se généralise à tout espace projectif \tilde{P} de dimension n : c'est un espace affine (P) de dimension n auquel on adjoint l'ensemble des directions de (P) .

☞ Dans un espace projectif de dimension n (donc associé à E de dimension $n+1$), chaque point $m \in \mathcal{P}(E)$ est associé à une famille de vecteurs de E tous colinéaires. Si E est muni d'une base, on appelle *coordonnées homogènes* de m les coordonnées d'un vecteur x quelconque issue de cette famille. Un point possède donc une famille de coordonnées toutes proportionnelles entre elles, autrement dit si $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ est un système de coordonnées homogènes de m il en est de même pour $(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_{n+1})$. Parmi tous ces représentants on privilégie celui dont la dernière composante vaut 1 : $(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \frac{x_2}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{n+1}}, 1)$. Quant aux points à l'infini leur dernière composante est nulle.

4.2 Points cycliques

Définition : Les *points cycliques* d'un plan sont les points à l'infini de tous ses cercles.

Propriété n°1 : Les coordonnées (projectives) des points cycliques sont $(1, i, 0)$ et $(1, -i, 0)$.

Preuve : Soit (P) un plan, un cercle (C) de (P) a pour équation cartésienne

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

On homogénéise en posant $x = \frac{X}{Z}$ et $y = \frac{Y}{Z}$:

$$(X - aZ)^2 + (Y - bZ)^2 = R^2 Z^2$$

Puis les points à l'infini sont obtenus en faisant $Z = 0$ donc sont solutions de

$$X^2 + Y^2 = 0 \Rightarrow \{(1, i, 0); (1, -i, 0)\}$$

Définition : L'ensemble de tous les points cycliques de tous les plans est l'ombilicale.

Propriété n°2 : L'ombilicale est la courbe du plan à l'infini d'équation $X^2 + Y^2 + Z^2 = 0$ (et $T = 0$).

Preuve : De même que précédemment une sphère a pour équation cartésienne :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$

On passe aux coordonnées projectives en homogénéisant $x = \frac{X}{T}$, $y = \frac{Y}{T}$ et $z = \frac{Z}{T}$:

$$(X - aT)^2 + (Y - bT)^2 + (Z - cT)^2 = R^2 T^2$$

Puis en faisant $T = 0$ (intersection avec l'hyperplan à l'infini) :

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 0 \\ T = 0 \end{cases}$$

Tout cercle est contenu dans une sphère, donc on a tous les points à l'infini de tous les cercles.

Propriété n°3 : L'intersection d'un tore avec le plan à l'infini est l'ombilicale (comptée 2 fois).

Preuve : D'après la partie I.3 on a montré que l'équation cartésienne du tore $\Sigma_{a,R}$ est :

$$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 + a^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0$$

On homogénéise et on obtient $(X^2 + Y^2 + Z^2 + (a^2 - R^2)T^2)^2 - 4a^2T^2(X^2 + Y^2) = 0$ puis $T = 0$:

$$(X^2 + Y^2 + Z^2)^2 = 0$$

remarque : la présence du carré explique pourquoi on compte deux fois la courbe.

4.3 Courbes algébriques et théorème de Bézout

Définition : Une surface est dite **algébrique** de degré k si son équation peut se ramener à la forme $F(x, y, z) = 0$ où F est de degré k en x , y et z , c'est-à-dire que tout monôme de la forme $\lambda x^m y^n z^p$ vérifie $m + n + p \leq k$ et il existe au moins un monôme vérifiant $m + n + p = k$.

Propriété n°4 : L'intersection d'un plan tangent en un point régulier à une surface algébrique et de cette surface est une courbe algébrique de même degré que la surface, admettant un point double au point de tangence.

Preuve :

Le résultat sur le degré est immédiat en substituant l'équation du plan.

Quitte à changer de repère supposons que le point régulier M_0 est l'origine $(0, 0, 0)$ et le plan tangent (Oxy) soit $z = 0$ (donc $F(0, 0, 0) = 0$). L'équation du plan tangent en M_0 est :

$$(x - 0) \frac{\partial F}{\partial x} + (y - 0) \frac{\partial F}{\partial y} + (z - 0) \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

Et en identifiant avec l'équation de plan $z = 0$ (et puisque M_0 est régulier) :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 0) = 0 \text{ et } \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0) \neq 0$$

En utilisant la formule de Taylor on a :

$$F(x, y, z) = F(0, 0, 0) + \frac{\partial F}{\partial x}(0, 0, 0)x + \frac{\partial F}{\partial y}(0, 0, 0)y + \frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 0)z + \text{termes de degrés } \geq 2$$

Soit en tenant compte de ce qui précède :

$$F(x, y, z) = \alpha z + \text{termes de degrés } \geq 2 \Rightarrow F(x, y, 0) = 0 + \text{termes de degrés } \geq 2$$

Donc en $(0, 0)$ on a $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, d'où le point double.

Théorème de Bézout : L'intersection de deux courbes algébriques de degrés m et n (n'ayant pas de composante commune) se fait en mn points (en comptant les multiplicités).

La démonstration de ce résultat n'est pas simple, elle s'appuie sur la notion de résultant de deux polynômes, nous admettrons donc ce théorème par la suite.

4.4 Preuve du théorème de Villarceau

Théorème de Villarceau : *L'intersection d'un tore avec un de ses plans bitangents est la réunion de deux cercles.*

Preuve : ► *L'intersection est une quartique admettant quatre points doubles.*

En effet d'après la **propriété n°4** la courbe intersection est de degré 4 (car le tore est de degré 4) et admet 2 points doubles réels (un à chaque point de tangence). Par ailleurs d'après la **propriété n°3** les points à l'infini du tore sont l'ombilicale, et les 2 points cycliques d'un plan sont par définition situés sur l'ombilicale (en pointillée cf schéma), donc on compte aussi 2 autres points doubles (D et D') comme intersection du plan bitangent (projectif) avec le tore (projectif), ils sont doubles car l'ombilicale est comptée deux fois.

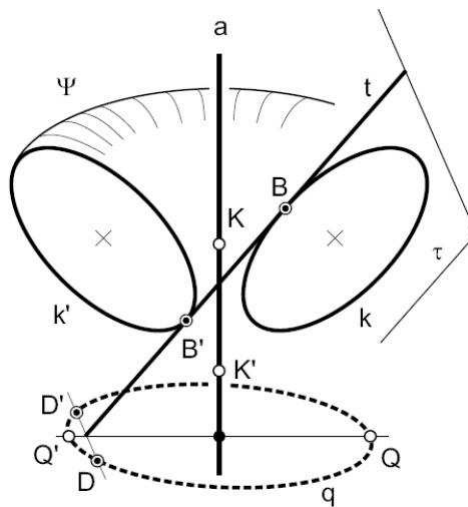
► *Une quartique admettant quatre points doubles est la réunion de deux coniques.*

Notons M_1, M_2, M_3, M_4 les quatre points doubles sus-cités, et M_5 un autre point de la quartique \mathcal{Q} . On sait qu'il existe une conique \mathcal{C} passant par ces cinq points. Tenant compte des multiplicités cela signifie que $\mathcal{C} \cap \mathcal{Q}$ contient au moins 9 points, donc les hypothèses du **théorème de Bézout** ne s'appliquent pas, on en déduit qu'ils ont une composante commune c'est-à-dire $\mathcal{C} \subset \mathcal{Q}$. On recommence avec un point $M'_5 \in \mathcal{Q} \setminus \mathcal{C}$ et une conique \mathcal{C}' passant par M_1, M_2, M_3, M_4, M'_5 ce qui montre aussi que $\mathcal{C}' \subset \mathcal{Q}$. Donc $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' \subset \mathcal{Q}$ et par suite $\mathcal{Q} = \mathcal{C} \cup \mathcal{C}'$.

► *Une conique passant par les points cycliques est un cercle.*

Soit une conique d'équation $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, en homogénéisant il vient $aX^2 + bXY + cY^2 + dXZ + eYZ + fZ^2 = 0$ et on fait $Z = 0$: $aX^2 + bXY + cY^2 = 0$ et en remplaçant par $(1, \pm i)$ on obtient $a = c$ et $b = 0$ soit $X^2 + Y^2 = 0$ qui est l'équation d'un cercle.

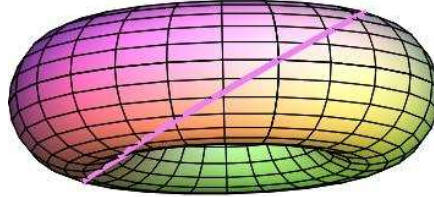
Conclusion : On vient de voir que l'intersection du tore avec un plan bitangent est une quartique admettant quatre points doubles, ce qui montre qu'elle est dégénérée en deux coniques se recoupant aux points cycliques et qui sont donc deux cercles. ■



5 Loxodromie du tore

5.1 Présentation du problème

Définition : les *loxodromies* d'une surface sont les courbes \mathcal{C}^1 tracées sur celle-ci, qui coupent les parallèles selon un angle constant (et donc également les méridiens).



On se propose dans un premier temps de déterminer les loxodromies du tore pour un angle β quelconque, puis dans un deuxième temps d'identifier une telle famille de courbes pour un angle β bien choisi.

On définit donc ces courbes par $\overrightarrow{OM} = \vec{G}(\theta) = \vec{F}(\theta, \varphi(\theta))$ où φ est \mathcal{C}^1 , qui coupent les cercles de $\Sigma_{a,R}$ d'axe (O, \vec{k}) (les *parallèles* du tore) suivant un angle β constant.

5.2 Mise en equation

L'angle de deux courbes en un point M est l'angle que forment en M leurs tangentes. Déterminons donc d'une part des vecteurs tangents à la courbe $\overrightarrow{OM} = \vec{F}(\theta, \varphi(\theta))$ et d'autre part au parallèle de $\Sigma_{a,R}$ qui passe par M (un tel parallèle étant défini par $\varphi = \text{constante}$).

- Un vecteur tangent à la courbe $\vec{G}(\theta)$ est : $\frac{d\vec{G}}{d\theta} = (a + R \cos \varphi) \vec{v}(\theta) + \frac{d\varphi}{d\theta} (-R \sin \varphi \vec{u}(\theta) + R \cos \varphi \vec{k})$.
- Un vecteur tangent au parallèle de $\Sigma_{a,R}$ passant par M est : $(a + R \cos \varphi) \vec{v}(\theta)$.

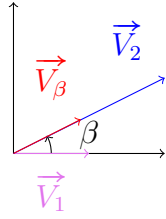
L'angle entre la courbe $\vec{G}(\theta)$ et le parallèle de $\Sigma_{a,R}$ passant par M est l'angle des droites de vecteurs directeurs $\vec{V}_1 = \vec{v}(\theta)$ et $\vec{V}_2 = (a + R \cos \varphi) \vec{v}(\theta) + R \frac{d\varphi}{d\theta} (-\sin \varphi \vec{u}(\theta) + \cos \varphi \vec{k})$.

Remarquons que la base $(\vec{v}(\theta), -\sin \varphi \vec{u}(\theta) + \cos \varphi \vec{k})$ est orthonormée, dans cette base :

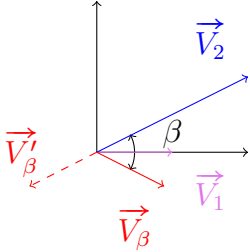
$$\vec{V}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} a + R \cos(\theta) \\ R \frac{d\varphi}{d\theta} \end{pmatrix}$$

On veut que $(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = \beta$. Posons $\vec{V}_\beta = \begin{pmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$ et $\vec{V}'_\beta = \begin{pmatrix} -\cos \beta \\ \sin \beta \end{pmatrix}$.

On a alors deux situations possibles :



$$\det(\vec{V}_2, \vec{V}_\beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a + R \cos \theta & \cos \beta \\ R \frac{d\varphi}{d\theta} & \sin \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a + R \cos \theta) \sin \beta = R \frac{d\varphi}{d\theta} \cos \beta$$



$$\det(\vec{V}_2, \vec{V}'_\beta) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a + R \cos \theta & \cos \beta \\ R \frac{d\varphi}{d\theta} & \sin \beta \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (a + R \cos \theta) \sin \beta = -R \frac{d\varphi}{d\theta} \cos \beta$$

On en déduit que φ est solution de l'équation différentielle:

$$(a + R \cos \varphi)^2 \sin^2 \beta = \left(R \frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 \cos^2 \beta$$

Puis comme par définition de α : $R = a \sin(\alpha)$ il vient :

$$\cos^2 \beta \sin^2 \alpha \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 = \sin^2 \beta (1 + \sin \alpha \cos \varphi)^2$$

5.3 Résolution

On choisit maintenant $\beta = \alpha$, φ est solution de l'équation différentielle :

$$\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \left(\frac{d\varphi}{d\theta} \right)^2 = \sin^2 \alpha (1 + \sin \alpha \cos \varphi)^2$$

Comme $\sin(\alpha) = \frac{R}{a} < 1$ on en déduit que $\frac{d\varphi}{d\theta}$ ne s'annule pas donc garde un signe constant d'où :

$$\cos \alpha \frac{d\varphi}{d\theta} = \varepsilon (1 + \sin \alpha \cos \varphi), \quad \varepsilon \in \{-1, 1\}$$

Prenons $\varepsilon = 1$. C'est une équation à variables séparables, $\cos(\alpha)$ n'est pas nul et il n'y a pas de solution constante, toutes les autres solutions s'obtiennent par la méthode formelle habituelle :

$$\frac{\cos \alpha d\varphi}{1 + \sin \alpha \cos \varphi} = d\theta, \quad \varphi(0) = 0$$

On effectue le changement de variable $t = \tan\left(\frac{\varphi}{2}\right)$, $dt = \frac{1}{2}(1 + t^2)d\varphi$ on a alors :

$$\begin{aligned}
\int \cos \alpha \frac{d\varphi}{1 + \sin \alpha \cos \varphi} &= \cos \alpha \int \frac{2}{1+t^2} \frac{dt}{1 + \sin \alpha \frac{1-t^2}{1+t^2}} \\
&= 2 \cos \alpha \int \frac{dt}{(1 + \sin \alpha) + (1 - \sin \alpha)t^2} \\
&= \frac{2 \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \operatorname{Arctan} \left(t \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right) \\
&= 2 \operatorname{Arctan} \left(t \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \right)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\theta = 2 \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}} \tan \frac{\varphi}{2} \right) \text{ puis } \varphi(\theta) = 2 \operatorname{Arctan} \left(\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} \tan \frac{\theta}{2} \right)$$

remarque : on prolonge φ en π en posant $\varphi(\pi) = \pi$. Notons L la courbe représentative de φ .

Un système d'équations paramétriques dans \mathcal{R}_0 de L est:

$$\begin{pmatrix} x = (a + R \cos(\varphi(\theta))) \cos \theta \\ y = (a + R \cos(\varphi(\theta))) \sin \theta \\ z = R \sin \varphi(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\text{Avec } t = \tan \left(\frac{\varphi(\theta)}{2} \right): \cos(\varphi(\theta)) = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1 - \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \tan^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2} - \sin \alpha (1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} - \sin \alpha (1 - \tan^2 \frac{\theta}{2})}$$

$$\cos(\varphi(\theta)) = \frac{\cos \theta - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \theta}$$

$$\text{Donc, } a + R \cos(\varphi(\theta)) = a \left(1 + \sin \alpha \frac{\cos \theta - \sin \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \theta} \right) = \frac{a \cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \theta}. \text{ De même :}$$

$$\sin(\varphi(\theta)) = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2 \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \tan^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cos \alpha \tan \frac{\theta}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} - \sin \alpha (1 - \tan^2 \frac{\theta}{2})} = \frac{\cos \alpha \sin \theta}{1 - \sin \alpha \cos \theta}$$

Un système d'équations paramétriques dans \mathcal{R}_0 de L est:

$$\begin{pmatrix} x = \frac{a \cos^2 \alpha \cos \theta}{1 - \sin \alpha \cos \theta} \\ y = \frac{a \cos^2 \alpha \sin \theta}{1 - \sin \alpha \cos \theta} \\ z = \frac{R \cos \alpha \sin \theta}{1 - \sin \alpha \cos \theta} \end{pmatrix} \text{ pour } \theta \in]-\pi, \pi]$$

5.4 Conclusion

La projection orthogonale de la courbe sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est d'équation polaire:

$$r(\theta) = \frac{a \cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha \cos \theta}$$

C'est donc une ellipse de foyer O , d'excentricité $\sin \alpha = \frac{R}{a} < 1$.

On remarque que, pour tout point $M(x, y, z)$ de L , on a: $z = y \tan \alpha$. On en déduit que L est inclus dans \mathcal{P}_α , et donc dans l'un des deux cercles de $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$ (ceci parce que les deux cercles ne sont pas tangents et parce que L est de classe C^1).

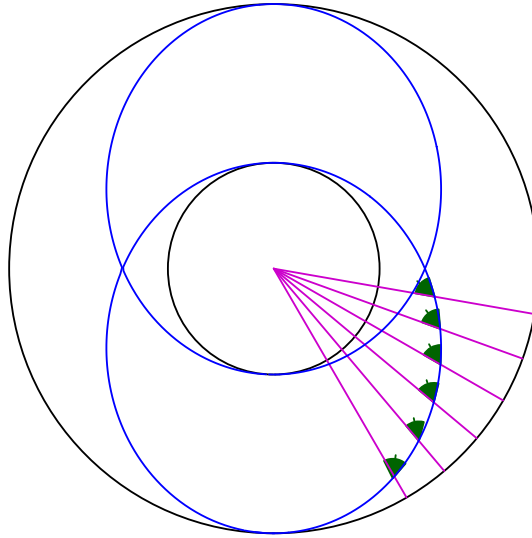
Puisque la projection de L sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est une ellipse, on en déduit que L est l'un des deux cercles de $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$. Pour déterminer lequel des deux cercles L est, on considère le point de paramètre $\theta = 0$, de coordonnées dans \mathcal{R}_0

$$\left(\frac{a \cos^2 \alpha}{1 - \sin \alpha}, 0, 0 \right) = (a(1 + \sin \alpha), 0, 0) = (a + R, 0, 0)$$

Ce point appartient au cercle d'équation dans \mathcal{R} : $(X - R)^2 + Y^2 = a^2$. L est donc le cercle de $\mathcal{P}_\alpha \cap \Sigma_{a,R}$, d'équation dans \mathcal{R} : $(X - R)^2 + Y^2 = a^2$. Pour $\varepsilon = -1$ on obtient le cercle d'équation $(X + R)^2 + Y^2 = a^2$ dans le plan $\mathcal{P}_{-\alpha}$.


Conclusion : les loxodromies d'angle α sont les **cercles de Villarceau**.

remarque : on a au passage retrouver une paramétrisation de ces cercles.



6 Construction réelle des cercles de Villarceau

6.1 Note historique et exemples architecturaux

 Les cercles de Villarceau étaient connus bien avant celui qui leur a donné leur nom, puisqu'on les trouve dans l'escalier du musée de la cathédrale de Strasbourg, oeuvre de Thomas Uhlberger vers 1580 :

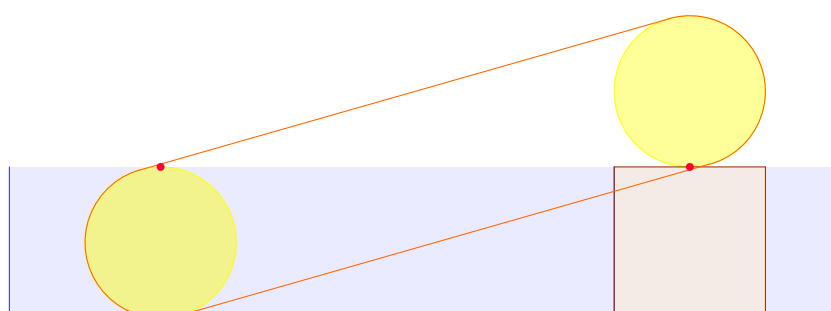


6.2 Réalisation pratique

Dans cette partie je réalise la construction des cercles de Villarceau qu'avait tenté d'expérimenter Marcel Berger [3] muni de sa scie sur un anneau de tringle à rideaux. Pour ma part j'ai utilisé un tore en polystyrène qu'on achète habituellement pour faire de la décoration, le voici :



La première difficulté a été de tracer les cercles de Villarceau à la surface du tore. On a vu qu'ils s'obtiennent en coupant le tore par un plan bitangent incliné d'un certain angle. J'ai eu l'idée d'inverser le problème, au lieu d'incliner le plan on va incliner le tore et le plonger dans une bassine d'eau, un dessin valant mieux qu'un long discours :



Ce schéma résume toute cette première partie de tracé : la surface de l'eau va jouer le rôle du plan bitangent, en effet si on incline la tête de façon à voir le tore à l'horizontale on voit bien le plan bitangent aux points rouges.

J'ai donc commencé par prendre un support de même hauteur que le tore :



Je l'incline comme ceci :



Je place l'ensemble dans une bassine :



Et je stabilise le tout avec une plaque en métal de façon à éviter que le tore n'oscille lors du remplissage :



Je remplis une bouteille d'eau mélangée à de l'encre rose afin de visualiser la trace :



Puis je verse minutieusement le mélange dans la bassine...



... jusqu'au niveau du point de tangence :



Je vide à la seringue avant de retirer le tore pour que la trace soit nette :



On va maintenant devoir ré-effectuer cette opération pour l'autre face, mais étant donné que celle-ci est colorée uniformément en rose j'utilise une coloration plus prononcée pour y voir quelque chose : une teinture pour vêtements dissoute dans de l'eau avec du sel.



Et j'ajuste au niveau comme précédemment :



Je suis ensuite repassé au feutre sur les frontières délimitées par l'encre (et la teinture) pour faire apparaître entièrement les deux cercles de Villarceau. J'ai pris soin de vérifier que j'obtenais bel et bien des cercles, pour cela j'ai préalablement mesuré les caractéristiques du tore R et a puis j'ai pointé un compas à une distance $\pm R$ du centre du tore (en plaçant une cale de hauteur la moitié de celle du tore) avec un écartement a et j'ai regardé si en traçant les cercles ces derniers coïncidaient avec ceux obtenus par le niveau d'encre, c'était effectivement le cas.

Pourquoi ne pas avoir directement employé cette méthode ?

Parce que la détermination du centre du tore, du report $\pm R$, de l'écartement a et du tracé engendrent simultanément des imprécisions qui auraient pu fausser les cercles, j'ai donc préféré utiliser la première méthode présentée et utiliser la seconde en guise de vérification.

La deuxième difficulté consistait à effectuer la découpe, car ce tore était plein donc il a fallu que je coupe en inclinant la scie tout en m'appuyant sur les contours dessinés (les cercles de Villarceau) comme ceci :



Et voici en images le résultat obtenu après découpe :





7 Références

- [1] J-D. Eiden, *Géométrie analytique classique*, Calvage et Mounet, 2009.
- [2] D. Feldmann, <http://denisfeldmann.fr/PDF/cercles.pdf>.
- [3] M. Berger, <http://www.bibnum.education.fr/files/villarceau-analyse.pdf>, 2010.
- [4] Article Wikipédia, http://fr.wikipedia.org/wiki/Géométrie_projective.
- [5] Sujet de concours, *Mathématiques MP II*, TPE, 1996.