

## Formulario C1 Circuitos Electrónicos y Analógicos

### Energía de un fotón

La energía presente en un fotón de frecuencia  $f$ , corresponde a:

$$E = hf \quad (1)$$

Donde  $h$  es la constante de Planck, de valor  $4,136 \cdot 10^{-15}$  eV s (con  $1 \text{ eV} = 1,602 \cdot 10^{-19}$  J).

### Ecuación de efecto fotoeléctrico

La energía presente en un electrón liberado por la incidencia de fotones con frecuencia angular  $f$  en la superficie de un material con función de trabajo  $\phi$ , está dada por:

$$E_e = \hbar\omega - \phi \quad (2)$$

Donde  $\hbar$  es la constante de Planck reducida, de valor  $h/2\pi$ .

### Postulado de Einstein de equivalencia energía - momentum

La energía de una partícula de momentum  $p$  corresponde a:

$$E = pc \quad (3)$$

Con  $c$  la velocidad de la luz, de valor  $2,998 \cdot 10^8$  m/s.

### Longitud de onda de un cuerpo o partícula

Siguiendo el postulado de dualidad onda-partícula, la longitud de onda asociada a un cuerpo de momentum  $p$  es:

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{ch}{E} = \frac{ch}{pc} = \frac{h}{p} \quad (4)$$

### Función de onda asociada a una partícula

Suponiendo una partícula de momentum  $p$  y energía cinética  $K$  con  $A_0$  una constante genérica, se tiene que la función de onda asociada a la partícula corresponde a:

$$\psi = A_0 e^{-j(Kt - px)} \quad (5)$$

Aquí  $j$  es la unidad imaginaria. La deducción de esta expresión, nace al combinar 1 y 3 junto a la fórmula de energía cinética.

### Energía asociada a una partícula cualquiera

Para una partícula con energía cinética  $K$  y a una energía potencial  $U$ , cuya frecuencia asociada es  $f$  y frecuencia angular  $\omega$ , se tiene que:

$$E = hf = \hbar\omega = K + U \quad (6)$$

### Ecuación de onda de Schrödinger en una dimensión

La ecuación de Schrödinger en una dimensión nace de derivar y mezclar las ecuaciones 5 y 6, para extender esta a 3D se deben agregar las dobles derivadas de  $\psi$  respecto a  $y$  y  $z$  y hacer un cambio de coordenadas de ser necesario.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{2m}{\hbar^2} U \psi + j \frac{2m}{\hbar} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

### Ecuación de Schrödinger (ES) unidimensional e independiente del tiempo

Suponiendo que la ecuación es separable, es decir  $\psi(x, t) = \Psi(x)\Gamma(t)$ , es posible llegar a las ecuaciones:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\Psi = 0 \quad (8)$$

$$\Gamma(t) = \Psi(x)e^{-jEt/\hbar} \quad (9)$$

### Normalización de la ecuación de onda

Al interpretar  $|\Psi|^2$  como una distribución de probabilidad, se debe cumplir que:

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} |\Psi(\mathbf{r})|^2 dV = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x, y, z)|^2 dx dy dz = 1 \quad (10)$$

### Principio de incertidumbre

El principio de incertidumbre relaciona el error en la medición de la posición y el momentum de una partícula con un margen mínimo físicamente posible, siendo estos márgenes  $\Delta x$  y  $\Delta p$  respectivamente, este principio está dado por la desigualdad:

$$\Delta p \Delta x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (11)$$

### Definición de pozo potencial idealizado

Un pozo potencial corresponde a una simplificación de un potencial, dado por la siguiente igualdad:

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in I \\ \infty & \text{si } x \notin I \end{cases} \quad (12)$$

Donde  $I$  corresponde a un intervalo, generalmente de la forma  $I = [0, d]$ .

### Función de onda en un pozo potencial

La función de onda que soluciona la ES (ec. 8) con el pozo potencial en intervalo  $[0, d]$  es:

$$\Psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{d}} \sin\left(\frac{n\pi x}{d}\right), n \in \mathbb{N} & \text{si } x \in [0, d] \\ 0 & \text{si } x \notin [0, d] \end{cases} \quad (13)$$

Esta se obtiene asumiendo valor 0 de  $\Psi$  fuera del pozo, imponiendo la continuidad de la función en  $x = 0$  y  $x = d$  (condiciones de borde) y normalizándola.

### Cuantización de la energía en un pozo potencial

En el proceso de obtención de la ec. 13, se extrae de la ec. 8 el valor de  $E$  que resulta cuantizado como:

$$E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2md^2} = \frac{n^2h^2}{8md^2}, n \in \mathbb{N} \quad (14)$$

### Refinación de la función de onda de un electrón en un átomo de hidrógeno

Considerando el potencial dado en la ec. 15, donde  $q$  es la carga del electrón,  $\epsilon_0$  la permitividad eléctrica del vacío, de valor  $8,854 \cdot 10^{-12}$  F/m y  $r$  la distancia entre el electrón y su núcleo, se llega a que la solución de la ES solo para el primer nivel suponiendo simetría esférica (es decir en  $\theta$  y  $\phi$ ),

corresponde a la ec. 16, en donde el valor de  $r_0$  está dado por la expresión de 17 con una energía asociada expresada en 18 y  $m$  corresponde a la masa del electrón.

$$U = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (15)$$

$$\Psi_1(r) = \frac{e^{-r/r_0}}{\sqrt{\pi r_0^3}} \quad (16)$$

$$r_0 = \frac{4\pi\hbar^2\epsilon_0}{mq^2} \quad (17)$$

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2mr_0^2} = -\frac{mq^4}{8h^2\epsilon_0^2} \quad (18)$$

### Cuantización de la energía en un átomo de hidrógeno con supuestos realistas

Suponiendo un electrón sometido al mismo potencial de la ec. 15, pero esta vez no suponiendo simetría ni en  $\theta$  ni en  $\phi$ , es posible llegar a que la energía del  $n$ -ésimo nivel, está dada por:

$$E_n = \frac{E_1}{n^2} = -\frac{mq^4}{8h^2\epsilon_0^2 n^2} \quad (19)$$

### Distribución de probabilidad del electrón en el modelo con supuestos realistas

Si  $p$  es la función de densidad de probabilidad de encontrar un electrón a una distancia  $r$  con  $P$  la función de distribución acumulada bajo el modelo de la ec. 19 para el nivel 1, se tiene que:

$$p(r) = \frac{dP(r)}{dr} = |\Psi(r)|^2 4\pi r^2 = \frac{4r^2}{r_0^3} e^{-2r/r_0} \quad (20)$$

### Energía de la superposición de ondas

Siguiendo la ec. 14, se tiene que al superponer dos pozos potenciales de ancho  $\delta$ , tal que el ancho total del sistema sea  $r + \delta$  con un electrón por pozo respectivamente, se puede llegar a una superposición de ondas simétrica o antisimétrica, que tienen energía asociada por las ecs. 21 y 22 respectivamente.

$$E_{1,\text{sim}} = \frac{h^2}{8m(r + \delta)^2} \quad (21)$$

$$E_{1,\text{anti}} = \frac{2^2 \cdot h^2}{8m(r + \delta)^2} = \frac{h^2}{2m(r + \delta)^2} \quad (22)$$

Recordando que  $m$  es la masa del electrón y que esta superposición se puede extrapolar a  $n$  pozos potenciales.

### Teorema de Bloch

Considerando un sistema de potencial periódico, representado en la ec. 23, se tiene que la función de onda debe cumplir con la forma de la ec. 24, ahora suponiendo también que  $\Psi(x + Na) = \Psi(x)$  es decir forma un anillo de tamaño  $N$ , la función de onda está dada por la ec. 25.

$$U(x) = U(x + na), \forall n \in \mathbb{N} \quad (23)$$

$$\Psi(x + a) = C\Psi(x), C \in \mathbb{C} \quad (24)$$

$$\Psi(x) = e^{jkx} U_k(x) \quad (25)$$

En estas expresiones  $a$  es el periodo del potencial,  $k = 2\pi n/(Na)$ ,  $n \in \mathbb{N}$  y  $u_k(x)$  es una función de periodo  $a$ . La función  $\Psi$  corresponde a una onda plana modulada en el espacio.

### Modelo de Kroing-Penney

Considerando una cadena de  $N$  átomos, formando un potencial de periodo  $a$  con barreras de potencial  $V_0$  de ancho  $b$ , es posible insertar la función  $\Psi$  de la forma dada en 25 en la ES ind. del tiempo (ec. 8), imponer continuidad tanto de  $u_k(x)$  como de su derivada, llegando después de una tediosa resolución a la condición que:

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{2\alpha\beta} \sinh(\alpha b) \sin(\beta(a-b)) + \cosh(\alpha b) \cos(\beta(a-b)) = \cos(ka) \quad (26)$$

En donde  $\beta^2 = 2mE/\hbar^2$  y  $\alpha^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ , este modelo es el que explica la existencia de las bandas prohibidas y permitidas.

### Cantidad de portadores en función de valores termodinámicos

Considerando  $m_e^*$  y  $m_h^*$  como masas equivalentes de portadores n y p (electrones y huecos),  $T$  la temperatura del material,  $E_g$  la energía del gap, i.e., la diferencia de energía entre los niveles de valencia y de conducción y  $E_F$  la energía de Fermi, se tiene que el número de portadores está dado por  $n$  para los portadores negativos y  $p$  para los portadores positivos:

$$n = 2 \left( \frac{2\pi m_e^* k_b T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_g - E_F}{k_b T}} \doteq N_C e^{-\frac{E_g - E_F}{k_b T}} \quad (27)$$

$$p = 2 \left( \frac{2\pi m_h^* k_b T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{E_F}{k_b T}} \doteq N_V e^{-\frac{E_F}{k_b T}} \quad (28)$$

Donde  $k_b$  corresponde a la constante de Boltzmann de valor  $1,3806 \cdot 10^{-23}$  J/K.

### Relación entre la cantidad de portadores

La cantidad de portadores en un semiconductor intrínseco está dada por  $n = p = n_i$ , en general, se tiene que:

$$n_i = \sqrt{np} \quad (29)$$

### Ecuación para la energía de Fermi

La energía de Fermi es posible expresarla como:

$$E_F = \frac{1}{2} E_g - \frac{3}{4} k_b T \ln \left( \frac{m_e^*}{m_h^*} \right) \quad (30)$$

Una expresión simplificada para esta corresponde a :

$$E_F = \frac{nE_g + p \cdot 0}{n + p} = \frac{nE_g}{n + p} \quad (31)$$

### Relación entre la cantidad de portadores y la concentración de dopaje

Considerando  $N_D$  y  $N_A$  como la concentración de dopaje de donadores y aceptores respectivamente a temperatura  $T = 0$  K, esta cantidad varía para  $T \neq 0$  a  $N_D^+$  y  $N_A^-$  respectivamente, se supondrá que  $N_D \approx N_D^+$  y  $N_A \approx N_A^-$ , imponiendo neutralidad en el conductor se tiene que:

$$p + N_D^+ = N_A^- + n \quad (32)$$

### Velocidad de conducción de un portador

Para un portador con movilidad  $\mu$ , su velocidad al aplicársele un campo eléctrico  $E$  corresponde a:

$$v = -\mu E \quad (33)$$

### Densidad de corriente de conducción

Considerando  $J_c$  como la densidad de corriente de conducción de los portadores, con  $n$  la cantidad de portadores en un punto y  $q$  su carga, se tiene que esta corresponde a:

$$J_c = qn\mu E \quad (34)$$

### Densidad de corriente de conducción considerando ambos portadores

Si cada portador tiene una movilidad  $\mu_e$  y  $\mu_h$  respectivamente, ocurre que la densidad de corriente (que será separada en  $J_{c-e}$  y  $J_{c-h}$  por portador) corresponde a:

$$J_c = J_{c-e} + J_{c-h} = qn\mu_e E + qp\mu_h E \quad (35)$$

### Densidad de corriente de difusión

Las corrientes de difusión dependen de los gradientes de concentración, si consideramos  $n(x)$  y  $p(x)$  como la concentración de estos portadores en un punto  $x$  y  $D_e$  como  $D_h$  un coeficiente de movilidad, ocurre que las corrientes de difusión (siguiendo la notación de la ec. anterior) corresponden a:

$$J_d = J_{d-e} + J_{d-h} = qD_e \frac{dn}{dx} - qD_h \frac{dp}{dx} \quad (36)$$

### Relación de Einstein

La relación entre los coeficientes de movilidad descritos están dados por:

$$\frac{D_e}{\mu_e} = \frac{D_h}{\mu_h} = \frac{k_b T}{q} \equiv V_T \quad (37)$$

Donde  $V_T$  corresponde precisamente a un voltaje.

### Campo eléctrico de juntura p-n

En la situación de equilibrio se impone que las corrientes sean nulas, de lo que se obtiene un campo eléctrico en la juntura, este corresponde a:

$$E = \frac{D_h}{\mu_h} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = \frac{k_b T}{q} \frac{1}{p} \frac{dp}{dx} = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (38)$$

### Relación de la diferencia de potencial en función de la cantidad total de portadores

Considerando  $V_1$  y  $V_2$  como los potenciales en ambas zonas, se tiene que la forma en que estas

relacionan la concentración total de portadores positivos por zonas (equivalente respecto a los portadores negativos por zonas) está dada por:

$$q(V_1 - V_2) \doteq qV_0 = -k_b T \ln \left( \frac{p_n}{p_p} \right) \quad (39)$$

### Relación de portadores positivos y negativos entre zonas n y p

Considerando  $p_n$  como la cantidad de portadores positivos en la zona n y  $p_p$  como la cantidad de portadores positivos en la zona p, se tiene que:

$$p_p = p_n e^{\frac{qV_0}{k_b T}} \quad (40)$$

Asimismo, denotando  $n_n$  como la cantidad de portadores negativos en la zona n y  $n_p$  como la cantidad de portadores negativos en la zona p, se tiene que:

$$n_n = n_p e^{\frac{qV_0}{k_b T}} \quad (41)$$

### Concentración de portadores al borde de las zonas de agotamiento al existir un voltaje

Considerando que a la juntura n-p se le aplica un voltaje  $V$ , y denotando  $p_{n0}$  como la concentración de portadores positivos en la zona n al borde de la zona de agotamiento, se cumple que:

$$p_p = p_{n0} e^{-\frac{q(V_0 - V)}{k_b T}} \quad (42)$$

Al despejar el valor de  $p_p$  de la ec. 40 en función de  $p_n$  y reemplazarlo en la ec. 42, es posible obtener que:

$$p_{n0} = p_n e^{\frac{qV}{k_b T}} \quad (43)$$

Realizando un desarrollo análogo para los portadores negativos es posible llegar a que:

$$n_{p0} = n_p e^{\frac{qV}{k_b T}} \quad (44)$$

Debido a que los valores de  $p_p$  y  $n_n$  son órdenes de magnitud mayores que  $p_{n0}$  y  $n_{p0}$ , la variación de estos últimos con el voltaje afecta de forma despreciable los valores de los primeros, de esta forma se puede decir que  $p_{p0} = p_p$  y  $n_{n0} = n_n$ .

### Corriente de portadores positivos por la juntura

Dado que la corriente circulante por la juntura es proporcional a la concentración de portadores (modelo lineal), es decir, si se denota  $J_{h-p}$  la corriente de huecos por el final de la zona de agotamiento (desde p) y  $J_{h-n}$  la corriente de huecos desde la zona n, se tiene que  $J_{h-p} \propto p_{n0}$  y  $J_{h-n} \propto p_n$ , se puede extraer de la ec. 43 que:

$$J_{h-p} = J_{h-n} e^{\frac{qV}{k_b T}} \quad (45)$$

Estableciendo la diferencia de corrientes para establecer un flujo neto, se tiene que:

$$J_h = J_{h-p} - J_{h-n} = J_{h-n} (e^{\frac{qV}{k_b T}} - 1) \quad (46)$$

### Corriente neta por una juntura p-n

Considerando un desarrollo similar para los portadores negativos (electrones) es posible obtener la corriente neta en función del voltaje, esta corresponde a:

$$J_{\text{total}} = J_0 (e^{\frac{qV}{k_b T}} - 1) \quad (47)$$

La cual forma la curva característica V-I del diodo.