3. Grundbegriffe der Graphentheorie 1

Die Graphentheorie ist ein Teilgebiet der Mathematik, das die Eigenschaften von Graphen und ihre Beziehungen zueinander untersucht. In der Informatik spielt die Graphentheorie eine besondere Rolle, da z.B. Algorithmen mit Hilfe der Graphentheorie formalisiert und dargestellt werden können. Ein weiterer wichtiger Aspekt der Graphentheorie ist die Modellierung und Optimierung zahlreicher Alltagsprobleme, wie z.B. Ampelschaltungen oder „Kürzeste-Wege-Probleme“. Die Graphentheorie ist eine noch recht junge Wissenschaft. Erst im Siebzehnten Jahrhundert, als der deutsche Mathematiker Leonhard Euler das Königsberger Brückenproblem löste, ist diese Wissenschaft geboren.

3.1. Typen von Graphen

Ein Graph besteht aus Knoten und Kanten. Formal lässt sich ein Graph folgendermaßen beschreiben: $G = (V, E)$, wobei V für die Menge der Knoten steht und E für die Menge der Kanten.

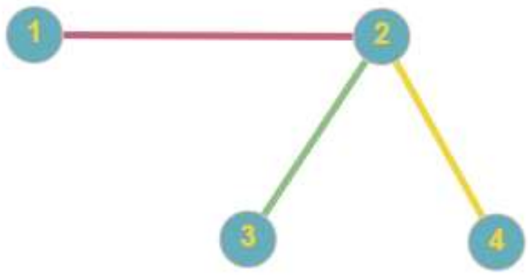
3.1.1. Ungerichteter Graph

(un)gerichteter Graph

Bei einem **ungerichteten Graphen** haben die Kanten keine Richtung.

Beispiel

$G = (V, E)$ mit $V = \{1,2,3,4\}$ und $E = \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\}$. Graphisch dargestellt:

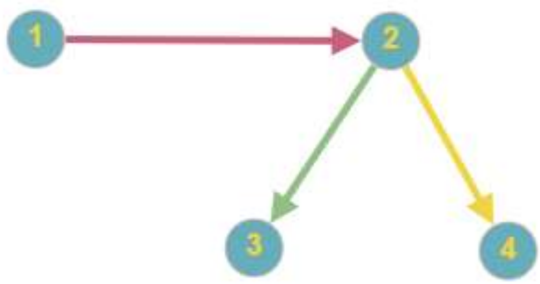


3.1.2. Gerichteter Graph

Bei einem **gerichteten Graphen** haben die Kanten eine Richtung.

Beispiel

$G = (V, E)$ mit $V = \{1,2,3,4\}$ und $E = \{(1,2), (2,3), (2,4)\}$. Graphisch dargestellt:



Bei gerichteten Graphen werden also Kanten als geordnete Knotenpaare dargestellt und bei ungerichteten Graphen als Menge von zwei Knoten.

Wichtig: $(a, b) \neq (b, a)$ und $\{a, b\} = \{b, a\}$

42. Aufgabe

Aufgabe Graphen zeichnen

Stelle die folgenden Graphen mit einem Bild dar:

a) $(\{1,2,3\}, \{\{1,1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,3\}\})$

b) $(\{a, b, c, d, e\}, \{(b, c), (d, c), (a, c)\})$

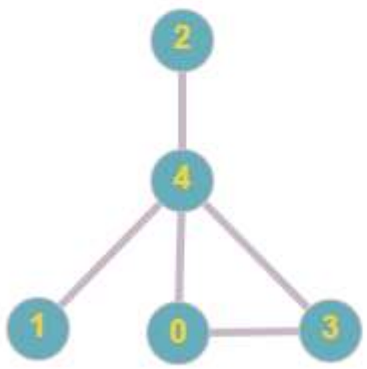
c) $(\{0,1,2,3,4\}, \{\{0,1\}, \{0,2\}, \{0,3\}, \{2,1\}, \{3,1\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\})$

d) $(\{a, 4, b, 8\}, \{(a, b), (b, a), (8,4), (4,4)\})$

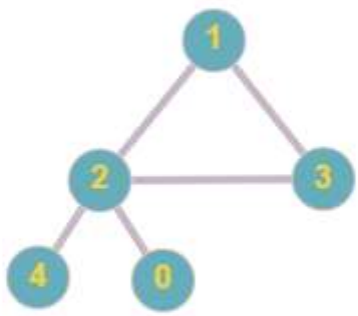
43. Aufgabe

Aufgabe Graphen notieren

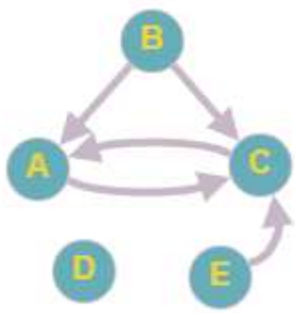
Notiere die Folgenden Graphen in der Form (V, E).



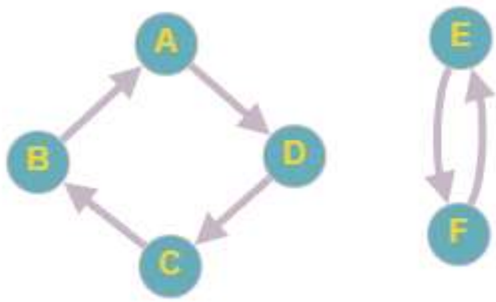
a)



c)



b)



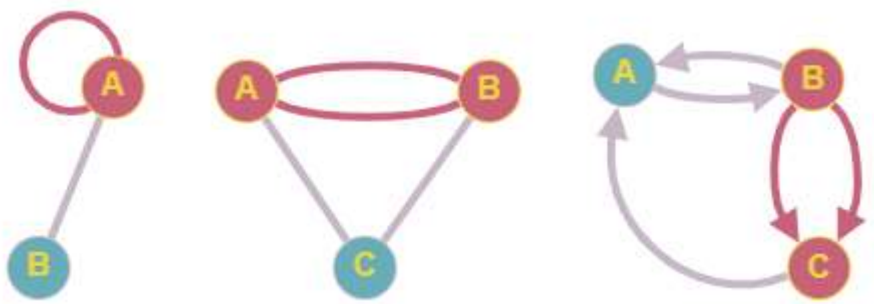
d)

3.1.3. Schlichter Graph und Multigraph

Schlichter Graph und Multigraph

Ein Graph heißt **schlicht** oder **einfach**, wenn er keine Mehrfachkanten (mehrfach genau sie selbe Kante) besitzt und keine Schlingen (Kanten der Form (a, a) oder $\{a, a\}$). Ein Graph in dem auch Mehrfachkanten und Schlingen erlaubt sind, heißt **Multigraph**.

Beispiel für nicht schlichte Graphen bzw. Multigraphen:



In rot ist markiert, welche Kanten den Graphen nicht schlicht machen.

3.1.4. Gewichteter Graph

Gewichteter Graph

Ein **kantengewichteter Graph**, kurz **gewichteter Graph**, ist ein Graph $G = (V, E, d)$ mit einer Kantengewichtsfunktion $d: E \to \mathbb{R}$, die jeder Kante eine reelle Zahl – ihr Gewicht - zuordnet.

Beispiel

Sei $G = (V, E, d)$ ein Graph mit

$V = \{A, B, C, D\}$,

$E = \{(D, B), (B, A), (A, B), (A, C), (C, C)\}$,

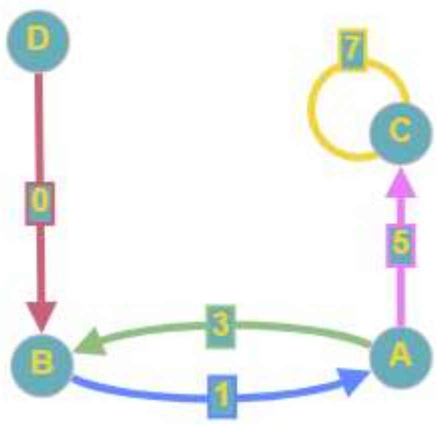
$d(D, B) = 0$,

$d(B, A) = 1$,

$d(A, B) = 3$,

$d(A, C) = 5$,

$d(C, C) = 7$.



Hinweis: In gerichteten Graphen können Schleifen auch ohne eine Pfeilspitze eingezeichnet werden.

3.2. Darstellungen von Graphen

Es ist möglich alle Informationen eines Graphen auch in einer Matrix darzustellen.

3.2.1. Adjazenzmatrix

Adjazenz-matrix

Wenn zwei Knoten durch eine Kante verbunden sind, heißen sie **adjazent** oder **benachbart**. Sei G ein Graph ohne Mehrfachkanten mit $n = |V|$ Knoten. In der $n \times n$ **Adjazenzmatrix** A werden im Eintrag A_{ij} notiert, ob es eine Kante zwischen dem Knoten i und j gibt:

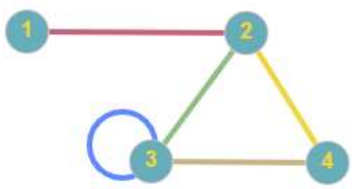
Bei ungewichteten, ungerichteten Graphen $G = (V, E)$: $A_{ij} = \begin{cases} 1, & \{i,j\} \in E \\ 0, & \{i,j\} \notin E \end{cases}$

Bei ungewichteten, gerichteten Graphen $G = (V, E)$: $A_{ij} = \begin{cases} 1, & (i,j) \in E \\ 0, & (i,j) \notin E \end{cases}$

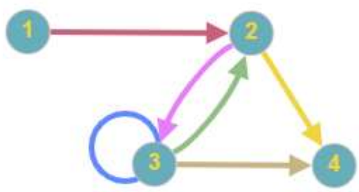
Bei gewichteten, gerichteten Graphen $G = (V, E, d)$: $A_{ij} = \begin{cases} d(i,j), & (i,j) \in E \\ -, & (i,j) \notin E \end{cases}$

Beispiele

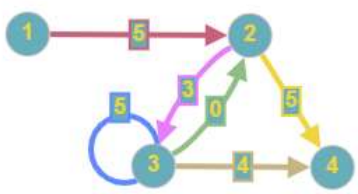
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A = \begin{pmatrix} - & 5 & - & - \\ - & - & 3 & 5 \\ - & 0 & 5 & 4 \\ - & - & - & - \end{pmatrix}$$



Hinweis: Es gibt Autoren, die bei den Schleifen eine 2 und keine 1 in die Adjazenzmatrix schreiben.

44. Aufgabe

Erstelle die Adjazenzmatrix für Aufgabe 42a, 42b, 43a und 43b.

Aufgabe Adjazenz-matrix 1

45. Aufgabe

Aufgabe Adjazenz-matrix 2

Zeichne den ungerichteten Graphen zu folgenden Adjazenzmatrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) (0)

46. Aufgabe

Aufgabe Adjazenz-matrix 3

Zeichne den gerichteten Graphen zu folgenden Adjazenzmatrizen:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) (1)

47. Aufgabe

Aufgabe Adjazenz-matrix Multigraph

Wie müsste die Definition der Adjazenzmatrix für ungewichtete Graphen erweitert werden, damit auch Mehrfachkanten erlaubt sind? Notiere dann auch die Adjazenzmatrix für die obigen Beispiele von Multigraphen.

Aufgabe

Aufgabe Adjazenz-matrix Symetrie

Wahr oder falsch?

a) Sei A die Adjazenzmatrix eines gerichteten Graphen G. Dann ist $A = A^T$.

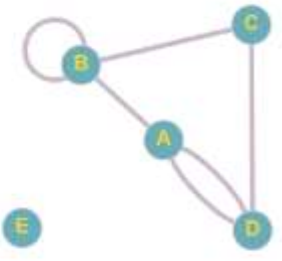
b) Sei A die Adjazenzmatrix eines <u>un</u>gerichteten Graphen G. Dann ist $A = A^T$

3.2.2. Adjazenzliste

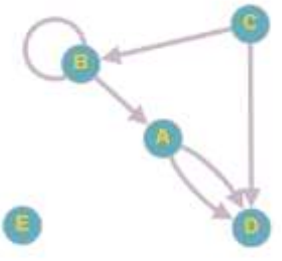
Adjazenzliste

Die **Adjazenzliste** ist eine alternative Darstellung von ungewichteten Graphen. Hierbei wird in einer Liste von Listen notiert, welche Nachbarn jeder Knoten besitzt.

Beispiele



A: B, D, D
B: A, B, C
C: B, D
D: A, A, C
E:



A: D, D
B: A, B
C: B, D
D:
E:

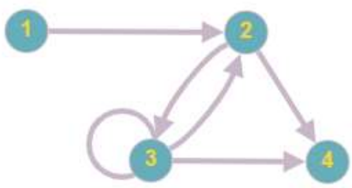
48. Aufgabe

Aufgabe Adjazenzliste

Erstelle zu folgenden Graphen die Adjazenzliste:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b) $(\{a, b, c, d, e\}, \{(b, c), (d, c), (a, c), (e, e), (e, d), (b, d), (d, b)\})$



c)

d) $(\{r, s\}, \{\{r, r\}, \{s, s\}, \{r, s\}\})$

3.2.3. Inzidenzmatrix

Inzidenz-matrix

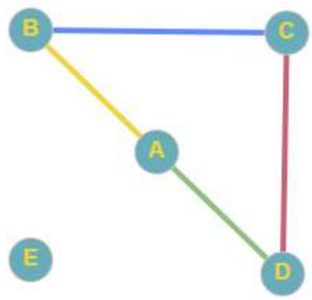
Ein Knoten und eine Kante heißen **inzident**, wenn der Knoten End-(Start-)Knoten der Kante ist. Die **Inzidenzmatrix** beschreibt, wie die Knoten und die Kanten zusammenhängen. Die Zeilen stehen dabei für die Knoten und die Spalten für die Kanten. Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter, **schlichter** Graph und $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ und $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Also existieren n Knoten und m Kanten. Dann ist die Inzidenzmatrix $A \in \{0,1\}^{n \times m}$ gegeben durch:

$$A_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i \in e_j \\ 0, & sonst \end{cases}$$

für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und $j \in \{1, \dots, m\}$.

Beispiel

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

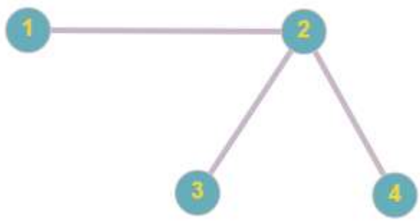


49. Aufgabe

Aufgabe Inzidenz-matrix

Erstelle die Inzidenzmatrix für folgende Graphen:

a) $(\{a, b, c, d, e\}, \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{e, a\}, \{e, b\}, \{b, d\}, \{e, c\}, \{a, c\}\})$

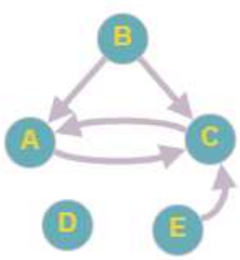


b)

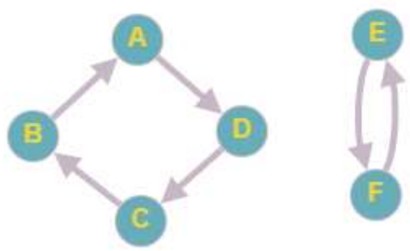
50. Aufgabe

Aufgabe Inzidenz-matrix gerichtet

Erweitere die Definition der Inzidenzmatrix, sodass diese auch für *schlichte*, *gerichtete* Graphen verwendet werden kann. Erstelle die Inzidenzmatrix für folgende Graphen:



a)



b)

51. Aufgabe

Diskutiere die verschiedenen Vor- und Nachteile einen Graphen in der Form (V, E), als Adjazenzmatrix, Adjazenzliste oder Inzidenzmatrix zu speichern.

3.3. Knotengrad

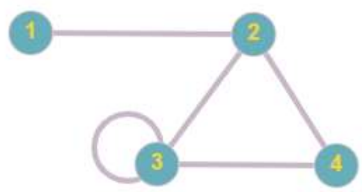
Knotengrad

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $v \in V$ ein Knoten. Der **Knotengrad $\boldsymbol{\gamma(v)}$** beschreibt, wie viele Kanten an einem Knoten anliegen. Bei gerichteten Graphen sind die Anzahl der ausgehenden Kanten $\gamma^+(v)$ und die Anzahl der eingehenden Kanten $\gamma^-(v)$. Es gilt $\gamma^+(v) + \gamma^-(v) = \gamma(v)$.

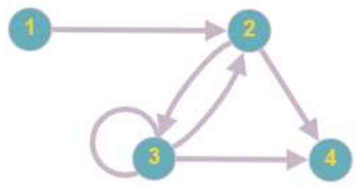
Wichtig: Schleifen zählen beim Knotengrad γ immer doppelt und bei γ^+ und γ^- jeweils eins.

Beispiele

$$\gamma(1) = 1,$$
$$\gamma(2) = 3,$$
$$\gamma(3) = 4,$$
$$\gamma(4) = 2$$



$\gamma^+(1) = 1,$	$\gamma^-(1) = 0,$	$\gamma(1) = 1,$
$\gamma^+(2) = 2,$	$\gamma^-(2) = 2,$	$\gamma(2) = 4,$
$\gamma^+(3) = 3,$	$\gamma^-(3) = 2,$	$\gamma(3) = 5,$
$\gamma^+(4) = 0,$	$\gamma^-(4) = 2,$	$\gamma(4) = 2$



In einem gerichteten Graphen werden Knoten v mit $\gamma^-(v) = 0$ **Quellen** genannt, da keine Kanten in sie hineinführen, sondern höchsten hinaus. Andererseits werden Knoten mit $\gamma^+(v) = 0$ **Senken** genannt, da keine Knoten herausführen, höchsten hinein. Im vorherigen Beispiel ist 1 eine Quelle und 4 eine Senke.

52. Aufgabe

Aufgabe Knotengrad

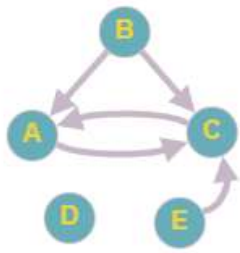
Berechne für alle Knoten der folgenden Graphen den Knotengrad und wenn möglich auch den Ein- und Ausgangsgrad. Welche Knoten sind dabei Quellen bzw. Senken?. Überlege, ob es sich bei den Matrizen um Adjazenz- oder Inzidenzmatrizen handelt.

a) $(\{a,b,c,d\},\{(a,c)(a,b)(c,d)(d,c)\})$

b) $(\{1,2\},\{\{1,2\}\})$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$



e)

f) Ist es möglich, dass ein Knoten gleichzeitig Quelle und Senke ist?

53. Aufgabe

Aufgabe Knotengrad erkennen

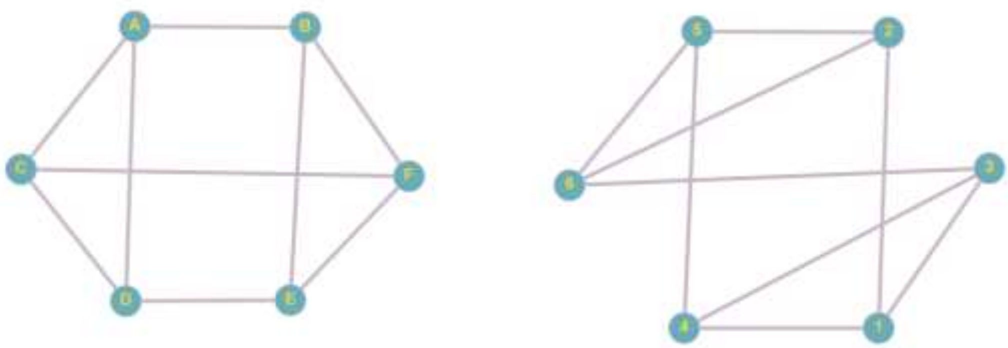
Wie kann man an der Adjazenzmatrix, Adjazenzliste bzw. Inzidenzmatrix den Knotengrad (bzw. die Ein- und Ausgangsgrade) erkennen? Wie erkennt man, ob ein Knoten eine Quelle oder Senke ist?

3.4. Isomorphe Graphen

Isomorphe Graphen

Zwei Graphen heißen **isomorph** oder **äquivalent**, wenn sie strukturell gleich sind. Sie unterscheiden sich also höchstens durch die Knotenbenennung.

Beispiel



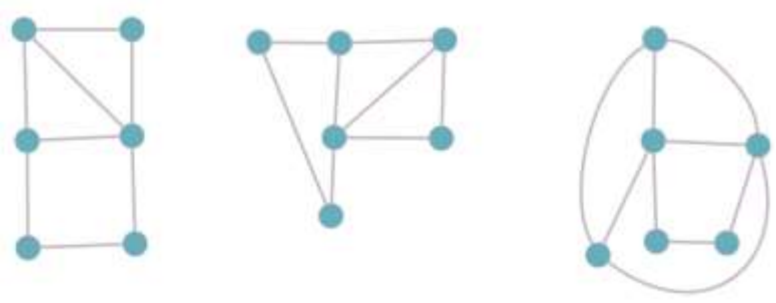
Vertausche die Position von 2 und 4, um zu sehen, dass die Graphen isomorph sind.
http://graphonline.ru/de/?graph=WxbZCEHdNinhAmuS

Die beiden Graphen sind isomorph. Die Zuordnung lässt sich durch eine Eins-zu-Eins-Abbildung (bijektiv) ausdrücken: $A \mapsto 5, B \mapsto 4, C \mapsto 6, D \mapsto 2, E \mapsto 1, F \mapsto 3$

54. Aufgabe

Aufgabe Isomorphe Graphen

Untersuche folgende drei Graphen auf Isomorphie. Wie können die Graphen verändert werden, damit alle Graphen isomorph sind?



55. Aufgabe

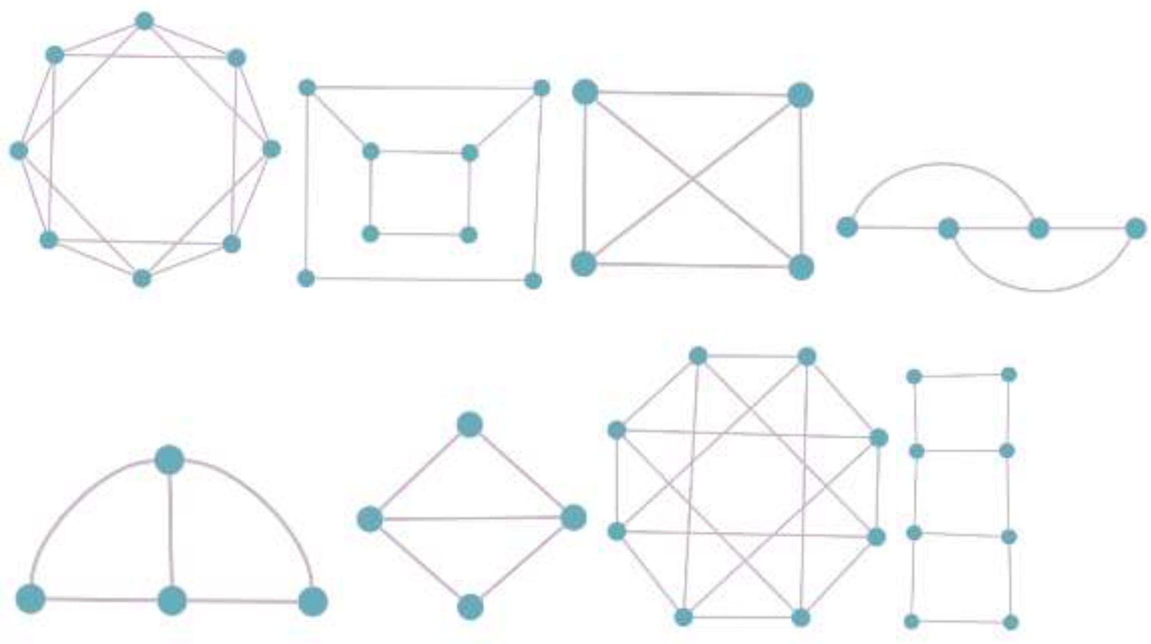
Aufgabe Isomorphie widerlegen

Wie kann an den Knotengraden aller Knoten erkannt werden, dass zwei Graphen nicht isomorph sind? Zeige an einem Beispiel, dass die Untersuchung der Knotengrade nicht genügt, um Isomorphie nachzuweisen. (Tipp: Es gibt ein Gegenbeispiel mit 3 Knoten.)

56. Aufgabe

Aufgabe Isomorphe Graphen 2

Untersuche welche der folgenden 8 Graphen isomorph zueinander sind.



57. Aufgabe (a) + (b-e)

Aufgabe Permutations matrix (a)

Zwei Graphen mit Adjazenzmatrizen G und H sind genau dann isomorph, wenn es eine Permutationsmatrix P gibt, mit $PG = HP$. Eine Permutationsmatrix ist eine quadratische Matrix, die in jeder Zeile und jeder Spalte genau eine Eins und sonst nur Nullen besitzt.

a) Gegeben sei

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeichne zu G und H einen gerichteten Graphen und betrachte P als eine Permutationsmatrix. Berechne PG und HP. Warum sind beide Ergebnisse gleich? Was ist das Ergebnis von PGP^{-1}?

b) Implementiere eine Funktion, die alle Permutationsmatrizen einer Größe n liefert. (Zur Prüfung: Es sind $n!$ viele)

c) Implementiere eine Funktion in Java, die prüft, ob zwei schlichte Graphen isomorph sind. Gehe dabei so vor, dass nacheinander verschiedene Permutationsmatrizen mit den beiden Graphen multipliziert werden.

d) Erweitere die Funktion um Prüfungen der Matrixgröße und der Knotengrade, um einfache Fälle schnell zu beantworten.

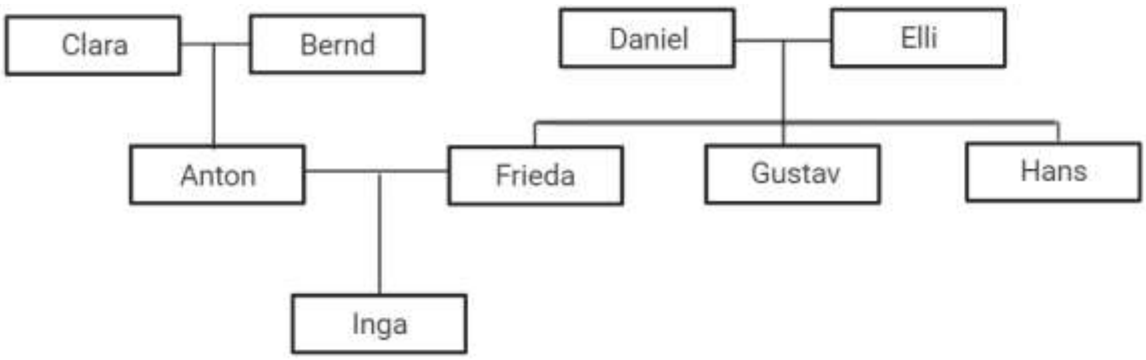
e) Überlege dir Möglichkeiten die Laufzeit des Programms zu verbessern.

3.5. Übungsaufgaben

58. Aufgabe

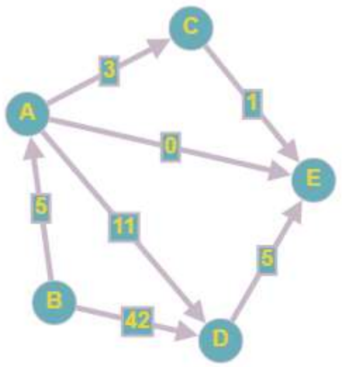
Aufgabe Hypergraph

Bei **Hypergraphen** können Kanten mehr als nur zwei Knoten miteinander verbinden. Stammbäume, bei denen beide Eltern eingetragen sind, sind ein Beispiel dafür. Wieso eignet sich für die Speicherung von Hypergraphen die Inzidenzmatrix besonders? Wie kann dann in der Inzidenzmatrix eines Stammbaums notiert werden, wer der Vater, die Mutter und das Kind sind? (Tipp: Es gibt hier verschiedene richtige Lösungen.)

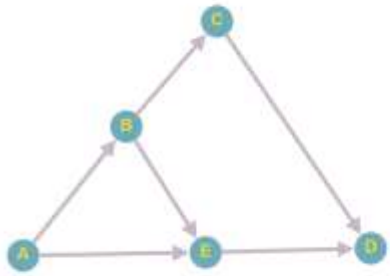


59. Aufgabe

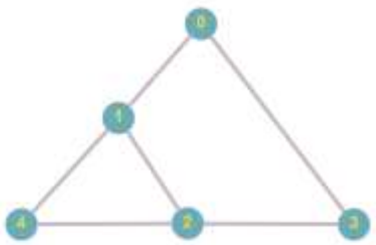
Notiere zu den folgenden Graphen, von welchem Typ sie sind, ihre Adjazenzmatrix, Adjazenzliste, Inzidenzmatrix (nutze auch die erweiterten Definitionen der Übungsaufgaben). Untersuche die Grade der Knoten, bestimme die Quellen und Senken und welche Graphen isomorph sind. Notiere bei isomorphen Graphen die Eins-zu-Eins-Zuordnung.



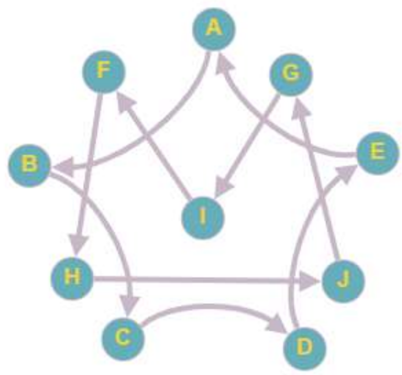
a)



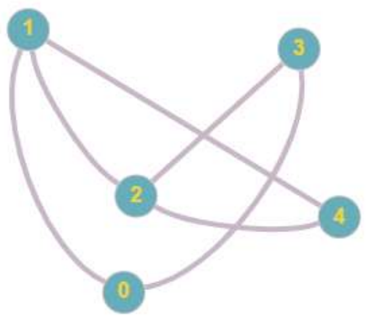
d)



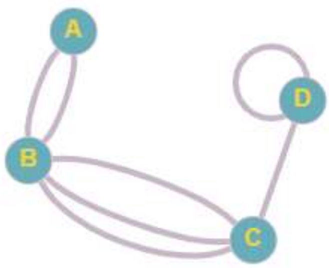
b)



e)



c)



f)

60. Aufgabe

Untersuche die Adjazenzmatrizen zweier isomorpher Graphen. Woran erkennt man die Isomorphie?

61. Aufgabe

Erstelle für das folgende Bild eines Straßennetzes einen gerichteten Graphen.

3.6. Graphen online zeichnen

Ein sehr gutes Tool, um Graphen zu zeichnen und verschiedene Algorithmen auf diesen durchzuführen ist https://graphonline.ru/de.

Graphen Tool

3.7. Checkliste

- ☐ Ich weiß was ein Graph ist.
- ☐ Ich kenne die verschiedenen Darstellungsweisen für Graphen. Dabei weiß ich auch, welche Darstellung für welche Art von Graphen erlaubt sind. Ich kenne auch die Erweiterungen der Darstellungen, die in den Übungsaufgaben gefunden werden.
    - $G = (V, E)$
    - Bild
    - Adjazenzmatrix
    - Adjazenzliste
    - Inzidenzmatrix
- ☐ Ich weiß, wie ich einen Darstellungstyp in einen anderen übersetze.
- ☐ Ich kenne die verschiedenen Typen von Graphen:
    - Gerichteter und ungerichteter Graph
    - Gewichteter Graph
    - Schlichter Graph und Multigraph
- ☐ Ich weiß, was der Knotengrad ist und kann diesen aus den verschiedenen Darstellungen der Matrix, soweit möglich, bestimmen.
- ☐ Ich weiß, was isomorphe Graphen sind und kann diese identifizieren. Weiterhin kann ich eine Eins-zu-Eins-Abbildung zwischen den Knoten des Graphen notieren.