2. Lineare Algebra II

2.1. Matrix

Einführung Matrix

Eine Matrix ist eine mit Zahlen gefüllte Tabelle. Der Plural von „Matrix“ ist „Matrizen“. Matrizen sind einer der wichtigsten Grundlagen der Mathematik und der Informatik. Mit ihnen lassen sich große Datenmengen geordnet Darstellen und schnell verarbeiten. Jede Matrix hat Zeilen (waagerecht) und Spaten (senkrecht). Man umklammert die Zahlen dann mit großen Klammern links und rechts.

Beispiel

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$$

Da die Matrix A drei Zeilen und zwei Spalten hat, ist sie eine 3x2 Matrix (gelesen: “drei kreuz zwei Matrix”). Da alle Einträge aus den ganzen Zahlen sind wird $A \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$ notiert. Hat eine Matrix genauso viele Zeilen wie Spalten, so nennt man sie *quadratisch*.

15. Aufgabe

Aufgabe Matrix Dimensionen

Notiere zu jeder der folgenden Matrizen, aus welchem Raum sie stammen. Mögliche Zahlenbereiche sind $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$. Markiere, welche Matrizen Quadratisch sind.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \end{pmatrix} \in$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ e^4 & 6 \end{pmatrix} \in$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in$

d) $\begin{pmatrix} 3{,}5 & -5 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{17}{2} \end{pmatrix} \in$

e) $(5) \in$

Der Matrixeintrag an der Position (i, j) einer Matrix A wir mit A_{ij} notiert.

Beispiel

$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ -1 & 12 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}$, dann ist $A_{12} = 2$, $A_{21} = 0$ usw.

16. Aufgabe

Aufgabe Matrix-einträge

Gegeben seien folgende Matrizen. Gebe die einzelnen gesuchten Matrixeinträge an:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} -7 & -8 \\ -9 & -10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \pi \\ e \end{pmatrix}$$

$A_{23} = 6 \qquad A_{12} = \qquad B_{12} = \qquad C_{12} = \qquad A_{22} = \qquad A_{21} =$

17. Aufgabe

[Matrizen in Java](#)

Welche Datenstruktur eignet sich in Java besonders gut, um einfach eine Matrixstruktur zu implementieren? Wie können dabei auf einzelne Einträge der Matrix zugegriffen werden?

2.2. Matrixaddition

[Matrix-addition](#)

Wie Zahlen können auch Matrizen addiert werden. Das funktioniert denkbar einfach. Um zwei Matrizen zu addieren, müssen sie genau die gleiche Größe haben. Um die neue Matrix zu erhalten, werden immer die Einträge an der gleichen Position addiert.

Beispiel

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+5 & 2+6\\3+7 & 4+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 8\\10 & 12\end{pmatrix}$$

18. Aufgabe

[Aufgabe Matrix-addition](#)

Bestimme die folgenden Summen:

a) $\begin{pmatrix}3 & -5\\2{,}5 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7 & 5\\2{,}5 & 0\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1 & 6 & 2{,}6\\9 & 10 & 22{,}5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3 & 4 & 0{,}4\\-9 & 5 & 12{,}5\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\4e\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2{,}5\\3e\\\frac{5}{3}\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 10\\100 & 1000\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -8\\-103 & -996\end{pmatrix}$

19. Aufgabe

[Aufgabe Matrix-addition Gesetze](#)

a) Finde eine Matrix B, sodass $A + B = A$ für alle Matrizen A ergibt.

b) Gilt für alle Matrizen A und B mit gleicher Größe $A + B = B + A$?

2.3. Skalarmultiplikation

[Skalarmulti-plikation](#)

Es ist möglich eine Matrix A mit einer Zahl $\alpha \in \mathbb{R}$ zu skalieren. Bei dieser Skalierung werden alle Einträge der Matrix mit α multipliziert.

Beispiel

$$3\cdot\begin{pmatrix}4 & \frac{2}{3}\\-1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 4 & 3\cdot\frac{2}{3}\\3\cdot -1 & 3\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 2\\-3 & 0\end{pmatrix}$$

20. Aufgabe

Aufgabe Skalarmultiplikation

Sei $A \coloneqq \begin{pmatrix} 10 & -15 \\ -5 & 20 \end{pmatrix}$. Berechne:

a) $5 \cdot A$

b) $\frac{1}{5} \cdot A$

c) $0 \cdot A$

d) $1 \cdot A$

2.4. Transponieren

Transponieren

Eine weitere wichtige und einfache Operation auf Matrizen ist das Transponieren. Hierbei werden die Zeilen und die Spalten der Matrix vertauscht. Die Operation wird durch ein hochgestelltes „t“ angezeigt.

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

21. Aufgabe

Aufgabe Transponieren

Berechne die Matrizen und gebe die Dimensionen an.

a) $(1 \quad 2)^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^{2\times1}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t$

c) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3{,}5 \end{pmatrix}^t$

d) $\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}^t\right)^t$

2.5. Matrixmultiplikation

Matrixmultiplikation

Seien A und B zwei Matrizen. A und B können nur dann multipliziert werden, wenn A genau so viele Spalten hat, wie B Zeilen. Die Ergebnismatrix $C = A * B$ hat dann so viele Zeilen wie A und so viele Spalten wie B. Um den (i, j)-ten Eintrag der Matrix C zu ermitteln muss die i-te Zeile von A mit der j-ten Spalte von B verknüpft werden. Dazu werden die Einträge zuerst paarweise multipliziert und dann addiert. Also allgemein:

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times k}, B \in \mathbb{R}^{k\times m}$ dann ist $A + B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und der (i, j)-te Eintrag von $A \cdot B$ ist

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{j=1}^{k} A_{ik} B_{kj}$$

Beispiel

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19 & 22\\43 & 50\end{pmatrix}$$

Um für mehr Übersicht zu sorgen, wird oft eine Rechenhilfe verwendet, bei der man die erste Matrix unten links und die zweite Matrix oben rechts notiert:

$$\begin{array}{cc|cc} & & 5 & 6\\ & & 7 & 8\\ \hline 1 & 2 & 1\cdot5+2\cdot7 & 1\cdot6+2\cdot8\\ 3 & 4 & 3\cdot5+4\cdot7 & 3\cdot6+4\cdot8\end{array}$$

22. Aufgabe

Aufgabe Matrixmultiplikation

Berechne:

a) $\begin{pmatrix}2 & 6\\4 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}5 & 1\\-1 & 2\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 4\\0.25 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & -8\\8 & 0\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\2 & 5 & -1\\4 & 8 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}33 & -2 & -7\\-14 & 1 & 3\\-4 & 0 & 1\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}$

23. Aufgabe

Aufgabe Matrixmultiplikation Größe

Gegeben seien folgende Matrizen:

$$A:=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\4 & 5 & 6\end{pmatrix},\qquad B:=\begin{pmatrix}-7 & -8\\-9 & -10\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}\pi\\e\end{pmatrix}$$

Bestimme, welche Multiplikationen mit den Matrizen A, B, C, A^t, B^t, C^t erlaubt sind und welche Dimension die Ergebnisse haben. Die Multiplikation muss nicht ausgerechnet werden. (Die Tabelle enthält bereits die Ergebnisse für $A \cdot A$ und $B \cdot A$)

	A	B	C	A^t	B^t	C^t
A	Nicht möglich					
B	2×3					
C						
A^t						

B^t						
C^t						

2.6. Einheitsmatrix

Einheits-matrix

Die Einheitsmatrix ist der Name für eine quadratische Matrix, die nur auf der Diagonalen Einsen hat und sonst nur Nullen. Die Einheitsmatrizen der Größe $n \in \mathbb{N}$ werden mit I_n oder E_n bezeichnet (oder auch I bzw. E, wenn die Dimension aus dem Kontext klar ist). Das Besondere: $A \cdot E = A$ für alle Matrizen A. Sie verhält sich also so wie die Eins bei den Zahlen: $5 \cdot 1 \ = \ 5$.

$$E_1 = \ (1), \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.7. Matrixinverse

Matrix-inverse

Es ist nun möglich Matrizen zu Addieren, skalieren und multiplizieren. Außerdem ist das additiv neutrale Element (Matrix nur mit Nullen) und multiplikativ neutrale Element (Einheitsmatrix) bekannt. Es stellt sich nun die Frage, ob sich zu jeder Matrix A die sog. *multiplikativ inverse Matrix* A^{-1} finden lässt, sodass gilt:

$$\boxed{A \cdot A^{-1} = E = A^{-1} \cdot A}$$

Alle Zahlen x außer der Null haben ein multiplikativ Inverses, nämlich $\frac{1}{x}$ (z.B. $5 \cdot \frac{1}{5} = 1$). Bei Matrizen ist das nicht der Fall. **Nicht jede Matrix kann multiplikativ invertiert werden.** Dazu müssen zwei Bedingungen erfüllt sein: Erstens muss die Matrix quadratisch sein und zweitens muss die *Determinante* der Matrix ungleich Null sein (was die Determinante ist, wird später eingeführt).

2.7.1. Inverse bestimmen

Inverse bestimmen Matrix

Um die Inverse zu bestimmen, kann eine Variante des Gauß-Jordan-Algorithmus angewandt werden. Dabei wird die Matrix links und die Einheitsmatrix rechts in einer großen Matrix notiert. Dann wird, die linke Matrix zur Einheitsmatrix durch Zeilenmanipulationen umgeformt, wie man es vom Gauß-Jordan-Algorithmus mit Gleichungen kennt. Die Matrix, die dann auf der rechten Seite stehen bleibt ist die gesuchte Inverse. Dieses Verfahren kann für beliebig große quadratische Matrizen genutzt werden.

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{r} I \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} I \\ II - 2 \cdot I \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 8 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} I \\ II \\ III - 4 \cdot I \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} I \\ II + 3 \cdot III \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} I - III \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{r} I - 2 \cdot II \\ II \\ III \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 33 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Also ist $A^{-1} = \begin{pmatrix} 33 & -2 & -7 \\ -14 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Auch die Probe zeigt dies:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 33 & -2 & -7 \\ -14 & 1 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24. Aufgabe

Aufgabe Inverse bestimmen

Bestimme von den folgenden Matrizen die Inverse, wenn möglich.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 5 & 0{,}5 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) (5)

f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.7.2. Existenz der Inversen prüfen

Um herauszufinden, ob für eine Matrix A eine Inverse A^{-1} existiert, wird die Determinante $det(A)$ berechnet. Dabei gilt:

Determinante 2x2

Um herauszufinden, ob für eine Matrix A eine Inverse A^{-1} existiert, wird die Determinante $det(A)$ berechnet (Determinante wird auch $det(A) = |A|$ notiert). Dabei gilt:

$$\boxed{det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ ist invertierbar}}$$

Hier wird nur vorgestellt, wie die Determinante von bei 2x2 und 3x3 berechnet wird:

$$\boxed{det\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = wz - xy}$$

Beispiel

Gegeben sei die Matrix $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Dann ist $det(B) = 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot 4 = -6$. Also existiert B^{-1}, da $det(B) \neq 0$ ist.

25. Aufgabe

Aufgabe Determinante 2x2

Bestimme von den Folgenden Matrizen die Determinante und notiere, welche ein Inverses besitzen.

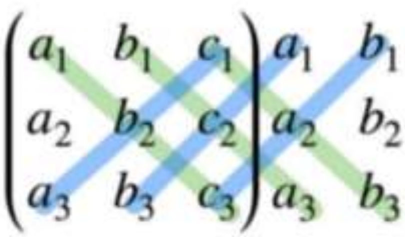
a) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{14}{2} \\ 0{,}5 & 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Determinante 3x3

Die Determinante von 3x3 Matrizen wird wie folgt berechnet:

$$\boxed{det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - (a_3b_2c_1 + b_3c_2a_1 + c_3a_2b_1)}$$

Um sich diese Formel leichter zu merken gibt es ein bestimmtes Muster (Sarrus-Regel):



1. Die ersten zwei Spalten der Matrix neben die Matrix schreiben.

2. Die Werte auf der Diagonalen - von oben links nach unten rechts - werden multipliziert.
3. Die Werte auf der Diagonalen - von unten links nach oben rechts - werden multipliziert.
4. Von der Summe der drei grünen Produkte wird anschließend die Summe der drei blauen Produkte abgezogen.

Beispiel

Es soll $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ bestimmt werden. Wir verwenden die Sarrusregel und notieren:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{matrix}$$

$$det(A) = (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \cdot 4 - 0 \cdot 3 \cdot 2$$

$$det(A) = (-14) + 0 + 36 - 42 - (-8) - 0$$

$$det(A) = -12$$

Die Matrix ist also invertierbar, da $det(A) = -12 \neq 0$ ist.

26. Aufgabe

Aufgabe Determinante 3x3

Bestimme von den Folgenden Matrizen die Determinante und notiere, welche ein Inverses besitzen.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2.8. Matrixdarstellung des LGS

LGS als Matrix

Um weniger schreiben zu müssen werden LGS häufig als ein Matrix-Vektor-Produkt notiert. Jedes LGS lässt sich also als $A \cdot x = b$ notieren.

Beispiel

$$\begin{matrix} x_1 & + & 2x_2 & = & -2 \\ -6x_1 & - & 11x_2 & = & 2 \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Denn $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1x_1 + 2x_2 \\ -6 - 11x_2 \end{pmatrix}$.

Also ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

2.9. LGS mit Matrixinverse lösen

LGS mit Inverse lösen

Wir können jedes LGS also darstellen als $A \cdot x = b$. Wenn A^{-1} existiert, so kann die Lösung x durch eine einfache Matrixmultiplikation gelöst werden:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b & \mid \cdot A^{-1} \\ A^{-1} \cdot A \cdot x &= A^{-1} \cdot b \\ E \cdot x &= A^{-1} \cdot b \\ x &= A^{-1} \cdot b \end{aligned}$$

Beispiel

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. Wir betrachte das LGS $A \cdot x = b$. Mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus wird berechnet: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$. Dann lässt sich x ausrechnen:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x = A^{-1} \cdot b = \begin{pmatrix} -11 & -2 \\ 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -10 \end{pmatrix}$$

Damit ist die Lösung $x_1 = 18$ und $x_2 = -10$ des LGS bestimmt.

27. Aufgabe

Aufgabe LGS mit Inverser lösen

Notiere die folgenden LSG als Matrix-Vektor-Produkt $A \cdot x = b$ und berechne die Lösungsmenge mit der Matrixinversen

a) $$\begin{aligned} I:&\quad 2 = 2x + 4y \\ II:&\quad -y = 5x - 2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{array}{lrrrcr} I: & -2a & -b & & = & -1 \\ II: & 2a & +3b & -2c & = & 3 \\ III: & & -b & +2c & = & 7 \end{array}$$

28. Aufgabe -

Implementiere in Java Matrizen und folgende Methoden:

a) Matrixaddition

b) Matrixmultiplikation

c) Skalarmultiplikation

d) Transponieren

e) Berechnung der Determinante (bis 3x3)

f) Berechnung der Inversen

g) equal()

h) toString()

i) Lösen eines LGS mit Matrixinverse, Matrixpotenzierung (mehrfache Multiplikation hintereinander)

j) Berechnung der Determinante mit dem Entwicklungssatz von Laplace

2.10. Übungsaufgaben

29. Aufgabe

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \lambda = 3$$

Berechne falls möglich

a) $\lambda \cdot v$

b) $B \cdot v$

c) $\lambda \cdot B \cdot v$

d) $A \cdot B$

e) $B \cdot A$

f) $(A^t)^t$

g) CC^t

h) A^{-1}

i) B^{-1}

j) $det(vv^t)$

k) $B \cdot v^t$

l) B^2

30. Aufgabe

Bestimme eine Lösung für folgendes Gleichungssystem mit Hilfe eines bekannten Verfahrens

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 5 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

31. Aufgabe

Gegeben sind die Matrizen A und B. Überprüfe jeweils ob B die Inverse von A ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

32. Aufgabe

Gegeben sind die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Bestimme jeweils den Matrixausdruck.

a) $D = (AB)^{-1}$

b) $E = A^{-1}B^{-1}$

c) $F = B^{-1}A^{-1}$

d) $G = B(A - 3E)^{-1}$

33. Aufgabe

Bestimme die Determinanten der folgenden Matrizen

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} -2 & 3 & 6 \\ 0 & -1 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$

34. Aufgabe

Berechne die Inverse der folgenden Matrizen falls möglich

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -6 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 6 & 8 & 3 \\ 4 & 7 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

35. Aufgabe

Berechne die Inverse der folgenden Matrizen falls möglich

a) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

36. Aufgabe

Gegeben seinen folgende lineare Gleichungssysteme. Bestimme die Lösungsmenge, indem du die Inverse verwendest. Forme dafür zunächst die Gleichungssysteme jeweils in ein Matrix-Vektor-Produkt um.

a) $\begin{array}{llcccl} I & 4a & + & 2b & = & 6 \\ II & -3a & + & b & = & -12 \end{array}$

b) $\begin{array}{llcccl} I & 4a & + & 2b & = & 2 \\ II & -3a & + & b & = & 3 \end{array}$

c) $\begin{array}{llcccl} I & 4a & + & 2b & = & -3 \\ II & -3a & + & b & = & 4 \end{array}$

d) $\begin{array}{llcccl} I & 4a & + & 2b & = & -8 \\ II & -3a & + & b & = & 8 \end{array}$

37. Aufgabe

Gegeben seinen folgende lineare Gleichungssysteme. Bestimme die Lösungsmenge, indem du die Inverse verwendest. Forme dafür zunächst die Gleichungssysteme jeweils in ein Matrix-Vektor-Produkt um.

a) $\begin{array}{lcccccccc} I & 2a & - & b & & & = & 1 \\ II & a & + & 2b & - & 2c & = & 2 \\ III & & - & b & + & c & = & 3 \end{array}$

b) $\begin{array}{lcccccccc} I & 2a & - & b & & & = & 4 \\ II & a & + & 2b & - & 2c & = & 0 \\ III & & - & b & + & c & = & 2 \end{array}$

c) $\begin{array}{lcccccccc} I & 2a & - & b & & & = & 2 \\ II & a & + & 2b & - & 2c & = & 5 \\ III & & - & b & + & c & = & 0 \end{array}$

d) $\begin{array}{lcccccccc} I & 2a & - & b & & & = & 8 \\ II & a & + & 2b & - & 2c & = & 4 \\ III & & - & b & + & c & = & 3 \end{array}$

38. Aufgabe

Gegeben sei jeweils die Matrix A. Für welchen Wert von x existiert die Inverse A^{-1}? Gib die Inverse A^{-1} in Abhängigkeit von x an.

a) $\begin{pmatrix} 2^4 & x \\ e & ln(1) \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x & x \\ \sqrt{5} & ln(e) \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3^0 & \pi \\ 4 & x \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{e}{e} & 42 \\ 0 & \frac{x}{3} \end{pmatrix}$

39. Aufgabe

Bestimme a, so dass $det(A) = 0$ gilt

a) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & a & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & a \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 7 & 2 & -8 \\ 2 & 3 & a \end{pmatrix}$

40. Aufgabe

Begründe warum die folgende Matrix A nicht invertierbar ist

a) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 0 & -18 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

41. Aufgabe

Versichere dich mit Hilfe von Beispielen, dass die folgenden Regeln gelten. Seien A, B, C Matrizen.

a) $(A^T)^T = A$

b) $(AB)^T = B^T A^T$

c) $A \cdot B \neq B \cdot A$

d) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$

e) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

f) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$

2.11. Checkliste

- ☐ Ich weiß, was eine Matrix ist.
- ☐ Ich kann die Dimension einer Matrix bestimmen und aus welchem Raum sie kommt.
- ☐ Ich weiß, wie man auf einzelne Elemente der Matrix zugreift.
- ☐ Ich kann zwei Matrizen addieren.
- ☐ Ich kann eine Skalarmultiplikation durchführen.
- ☐ Ich kann eine Matrix transponieren.
- ☐ Ich kann zwei Matrizen multiplizieren.
- ☐ Ich kann feststellen welche Matrixoperationen erlaubt sind und welche nicht.
- ☐ Ich kann vorhersagen wie groß die Ergebnismatrix einer Multiplikation ist.
- ☐ Ich kann mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus die Inverse einer Matrix bestimmen.
- ☐ Ich kann die Determinante von 2x2 und 3x3 Matrizen bestimmen.
- ☐ Ich kann anhand der Determinante bestimmen, ob eine Matrix invertierbar ist.
- ☐ Ich kann ein LGS in der Form $A \cdot x = b$ notieren.
- ☐ Ich kann ein LGS durch Bestimmung der Inversen lösen.
- ☐ Ich kann verschiedene Matrixoperation hintereinander ausführen.