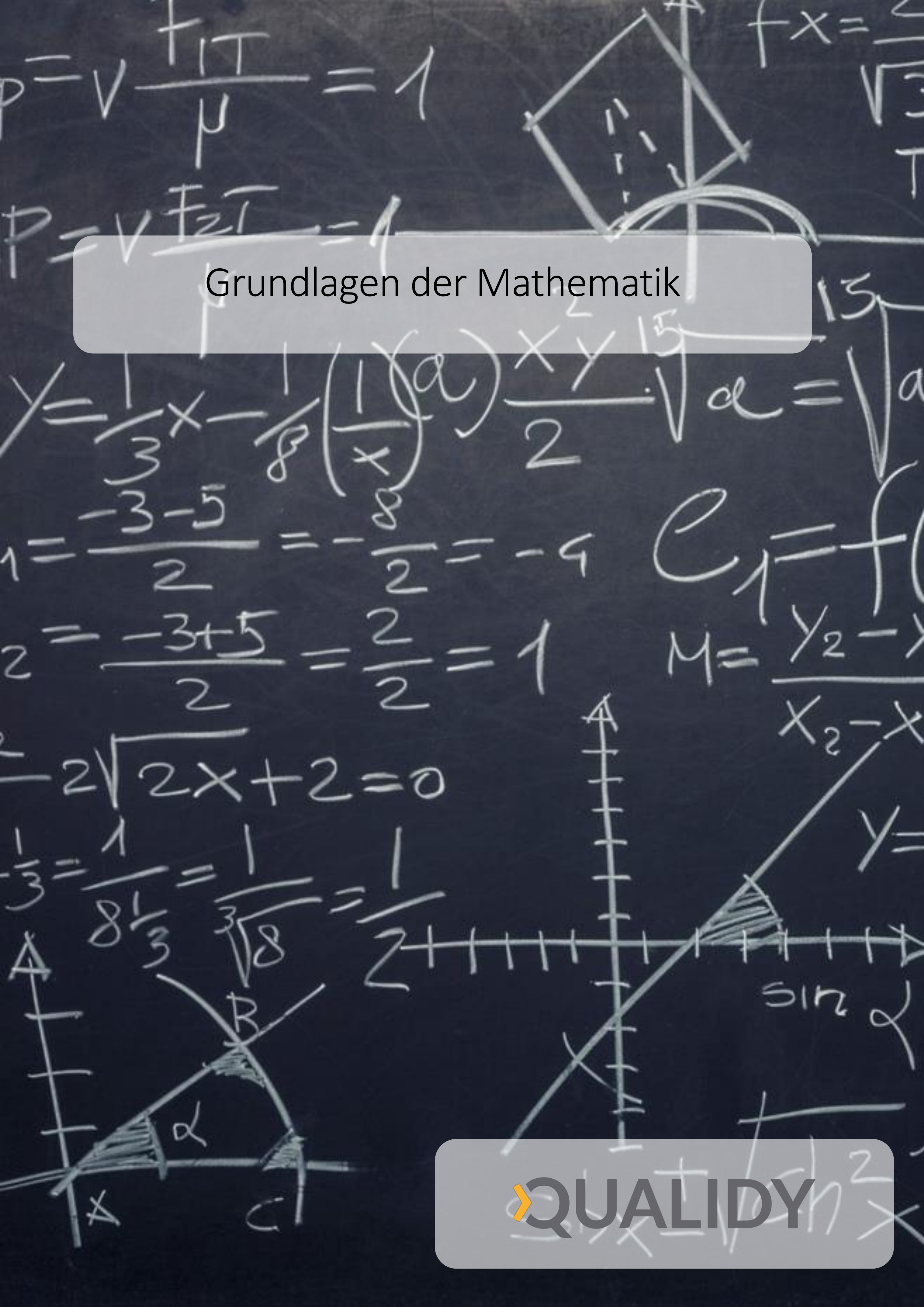


Grundlagen der Mathematik

QUALIDY

Vorwort

Lieber Teilnehmer der Fakultät 73,

wir möchten Dich im Namen der Firma Qualidy herzlich begrüßen und Dir zur erfolgreichen Bewerbung gratulieren. Du hast zwei sehr spannende Jahre vor Dir und wir freuen uns sehr darauf, Dich auf diesem Weg zu begleiten. Neben dem Mathematikunterricht werden wir uns auch in anderen Fächern über den Weg laufen. Wir freuen uns auf die gemeinsame Zeit mit Dir.

Mit diesem Skript wollen wir Dir die Grundlagen der Mathematik vermitteln. Da die Teilnehmer der F73 für gewöhnlich aus ganz verschiedenen Bereichen kommen und deshalb die mathematische Vorbildung stark variiert, ist unser erstes gemeinsames Ziel, alle auf einen Wissenstand zu bringen. Wenn das mathematische Fundament erst einmal gegossen und getrocknet ist, werden wir uns aufbauende mathematische Inhalte anschauen bzw. mathematische Modelle programmieren und uns der Graphentheorie und den Algorithmen zuwenden.

Jedes Thema in diesem Skript, das vorgestellt wird, besteht aus den Bausteinen: Definition, Beispiel und Aufgabe. Die Aufgaben gibt es auf vier verschiedenen Niveaus, die durch blaue Chilis markiert sind ( ) .

Es gibt außerdem noch rote Chilis. Diese sollen Aufgaben kennzeichnen, die nicht prüfungsrelevant sind, aber trotzdem sehr interessant für Dich als Softwareentwickler sein können ( ) . Die Aufgabenstellung bezieht sich auf Java, aber auch in anderen Programmiersprachen können die Aufgaben bearbeitet werden, sprich dafür bitte mit deinem jeweiligen Trainer in Embedded oder Python.

Die QR-Codes am linken Rand führen euch zu einem Video, dass entweder die entsprechende Lektion oder die Aufgabe erklärt. Du musst dafür nicht dein Handy zur Hand nehmen, es reicht, auf den QR-Code zu klicken. Wir hoffen dir damit im Selbststudium das Lernen zu erleichtern. Wenn du Fragen oder Anregungen hast, dann freuen wir uns auf deine Mail an f73@qualidy.de.

Zeitplan

Datum	Kapitel	Thema
KW 4	1	Arithmetik
KW 5	2	Aussagenlogik
KW 6	3	Mengenlehre I
KW 7	4	Mengenlehre II
KW 8	5	Gleichungen & Ungleichungen
KW 9	6	Summen & Produkte
KW 10	Projektwoche	
KW 11	7	Grundlagen der Analysis I
KW 12	8	Grundlagen der Analysis II
KW 13	9	Grundlagen der Analysis III
KW 14	Urlaubskorridor	
KW 15	10	Lineare Algebra I
KW 16	11	Lineare Algebra II
KW 17	12	Primzahlen als Verschlüsselungsgrundlage
KW 18	Projektwoche	
KW 19	SOL & Matheprüfung	
KW 20	13	Grundbegriffe der Graphentheorie I
KW 21	14	Grundbegriffe der Graphentheorie II
KW 22	15	Baumstrukturen
KW 23	16	Matching
KW 24	17	Wegealgorithmen
KW 25	18	Laufzeiten
KW 26	19	Weitere Inhalte

Inhaltsverzeichnis

1. Arithmetik

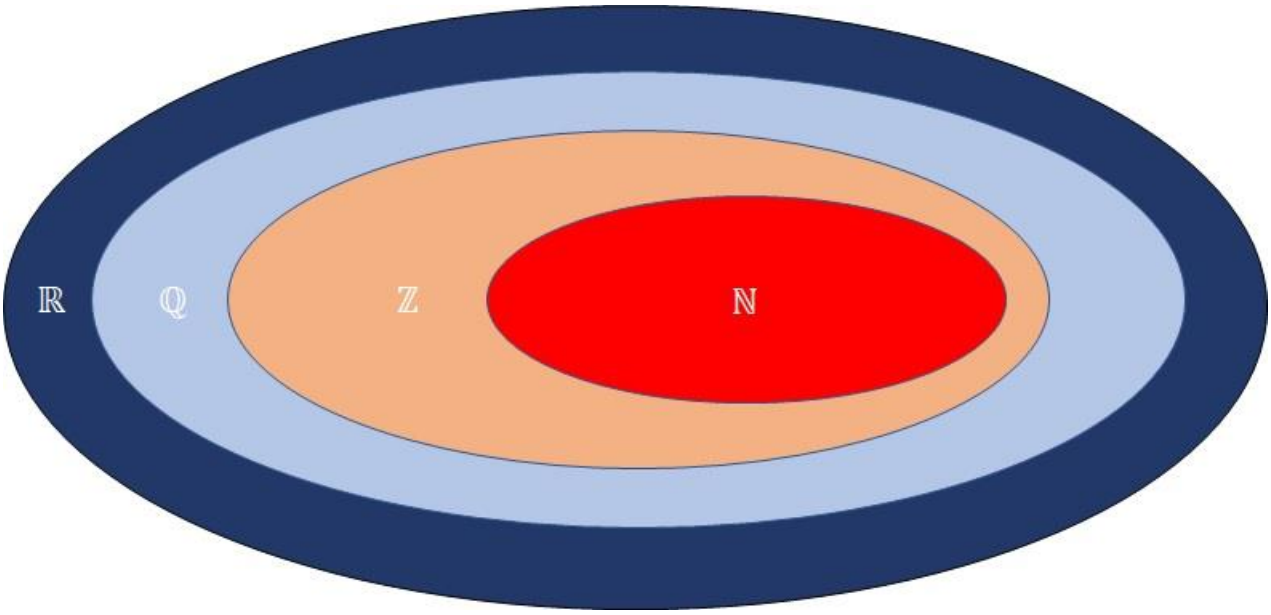
In diesem Kapitel lernst Du das grundlegende Rechnen mit Zahlen.

Nach Abschluss dieses Kapitels kannst Du…

- eine beliebige Zahl ihrem Zahlenbereich zuordnen
- mit Begriffen wie „Assoziativgesetz“, „Kommutativgesetz“ oder auch Distributivgesetz etwas anfangen
- die „Punkt vor Strich“-Rechnung sicher anwenden
- mit Brüchen rechnen
- Zahlen schnell mit Hilfe der Teilbarkeitsregeln auf Teilbarkeit prüfen
- mit Potenzgesetzen rechnen

1.1. Zahlenmengen

Eine Zahlenmenge beinhaltet eine fest definierte Menge an Zahlen. Die folgende Grafik zeigt die elementaren Zahlenmengen detailliert in einer Übersicht. Die Menge der **natürlichen Zahlen** $\mathbb{N}$ ist dabei vollständig in der Menge der **ganzen Zahlen** $\mathbb{Z}$ enthalten. $\mathbb{Z}$ ist in den **rationalen Zahlen** $\mathbb{Q}$ enthalten und diese Menge bildet wiederum eine Teilmenge der **reellen Zahlen**. $\mathbb{R}$



Zahlenmenge	Symbol		Schreibweise
Natürliche Zahlen	$\mathbb{N}$	=	$\{1,2,3,4,5,\dots\}$
Ganze Zahlen	$\mathbb{Z}$	=	$\{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\}$
Rationale Zahlen	$\mathbb{Q}$	=	$\left\{\frac{z}{n}\middle\vert z \in \mathbb{Z} \wedge n \in \mathbb{N}\right\}$
Reelle Zahlen	$\mathbb{R}$	=	$(-\infty,\infty)$

Das Element -1 gehört z.B. zur Menge $\mathbb{Z}$. Die mathematische Schreibweise dazu ist $-1 \in \mathbb{Z}$.

Wenn a ein Element der natürlichen Zahlen ist, dann ist a auch ein Element der ganzen Zahlen.

Wenn a ein Element der ganzen Zahlen ist, dann ist es auch ein Element der rationalen Zahlen und so weiter. Oder anders ausgedrückt: $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Q} \Rightarrow a \in \mathbb{R}$

1. Aufgabe

Zu welchen Zahlenmengen gehören die folgenden Zahlen? Kreuze an.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
-5				
$4{,}6$				
$\sqrt{9}$				
$\sqrt{2}$				
$0,\overline{3}$				

2. Aufgabe

Kreuze jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist.

	AUSSAGE	1	0
a)	Jede natürliche Zahl ist auch eine ganze Zahl		
b)	Jede ganze Zahl ist auch eine natürliche Zahl		
c)	Das Produkt aus zwei natürlichen Zahlen ist immer eine natürliche Zahl		
d)	Die Differenz aus zwei natürlichen Zahlen ist immer eine natürliche Zahl		
e)	Die Wurzel von einer natürlichen Zahl ist immer eine natürliche Zahl		
f)	Die Zahl Pi kann mit Hilfe eines Bruchs dargestellt werden		
g)	Die Menge der ganzen Zahlen ist in der Menge der reellen Zahlen enthalten		
h)	Eine Zahl mit unendlich Nachkommastellen kann nicht rational sein		
i)	Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen gibt es immer unendlich weitere reelle Zahlen		

1.2. Grundlegende Rechenregeln

Teil 1

Regel	Formel	Beispiel
Punkt vor Strich	$a + b \cdot c = a + (b \cdot c)$	$2 + 3 \cdot 4 = 2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12$
Potenz vor Punkt	$a^2 \cdot b = (a \cdot a) \cdot b$	$2^2 \cdot 3 = 4 \cdot 3$
Assoziativgesetz	$(a + b) + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$(2 + 3) + 4 = 2 + (3 + 4)$ $(2 \cdot 3) \cdot 4 = 2 \cdot (3 \cdot 4)$
Kommutativgesetz	$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$	$2 + 3 = 3 + 2$ $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$
Distributivgesetz	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ $(a + b) : c = a : c + b : c$	$(2 + 3) \cdot 4 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 4$ $(2 + 3) : 4 = 2 : 4 + 3 : 4$
Division durch Null	$a : 0 =$Error!	$2 : 0 =$Error!

Teil 2

Regel	Formel	Beispiel
Minus vor Klammer	$-(a + b - c) = -a - b + c$	$-(3 + 4 - 2) = -3 - 4 + 2$
Positives Produkt	$(+) \cdot (+) = (+)$ $(-) \cdot (-) = (+)$	$8 \cdot 9 = 72$ $(-8) \cdot (-9) = 72$
Negatives Produkt	$(+) \cdot (-) = (-)$ $(-) \cdot (+) = (-)$	$8 \cdot (-9) = -72$ $(-9) \cdot 8 = -72$
Neutrales Element der Addition	$a + 0 = a$	$9 + 0 = 9$
Neutrales Element der Multiplikation	$a \cdot 1 = a$	$9 \cdot 1 = 9$

! Die Regel für ein positives/ negatives Produkt lässt sich auf die Division übertragen. Zwei gleiche/ ungleiche Vorzeichen ergeben einen positiven/ negativen Quotientenwert.

3. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $12 + 7 + 8 + 3$

b) $4 \cdot (1{,}3 - 5{,}3) \cdot 1$

c) $(36 - 6) : (-30)$

d) $4 \cdot 7 + 9 \cdot 7 - 3 \cdot 7$

e) $-(120 - 24) : (-12)$

f) $3 \cdot 4{,}1 + 3 \cdot 5{,}9$

4. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $-(2{,}2 - 3{,}7) \cdot \frac{4}{2}$

b) $-(5 - 3 \cdot 3 - 5) : 3$

c) $2 : 10 + 18 : 10$

d) $-\left(3 - \frac{9}{3}\right) \cdot 14$

e) $3 \cdot 0{,}75 + 7 \cdot 0{,}75$

f) $-(1 - 3) + (4 - 6)$

5. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $-(2 + 4 + 6) + (2 + 4 + 6)$

b) $-2 \cdot (-5)^2 \cdot (-1)$

c) $3 \cdot 4{,}2 + 3 \cdot 5{,}8$

d) $(-1)^{31} \cdot (-4)^2$

e) $6 \cdot \left(\frac{5}{6} + 2 + \frac{21}{6} + 4\right)$

f) $1 \cdot (2 \cdot 5 + 5 \cdot (-2) + 3) \cdot 1$

1.3. Bruchrechnung

1.3.1. Multiplikation von Brüchen

Zwei Brüche werden multipliziert, indem jeweils die Zähler und Nenner miteinander multipliziert werden.

Regel	Formel	Beispiel
Bruch * Bruch	$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

1.3.2. Division von Brüchen

Zwei Brüche werden dividiert, indem vom „rechten" Bruch der Kehrwert gebildet und anschließend multipliziert wird.

Regel	Formel	Beispiel
Bruch : Bruch	$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$	$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{9}$

6. Aufgabe

Multipliziere die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3}$

b) $\frac{9}{5} \cdot \frac{8}{7}$

c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{30}{4}$

d) $\frac{11}{4} \cdot \frac{64}{44}$

e) $7 \cdot \frac{3}{14}$

f) $0{,}5 \cdot \frac{8}{3}$

7. Aufgabe

Dividiere die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{6}{5} : \frac{3}{5}$

b) $\frac{8}{45} : \frac{4}{15}$

c) $0{,}5 : \frac{1}{8}$

d) $\frac{6}{5} : 12$

e) $\frac{7}{18} : \frac{28}{27}$

f) $\frac{11}{11} : \frac{5}{5}$

1.4. Addition und Subtraktion von Brüchen

Um Brüche zu addieren oder zu subtrahieren, müssen diese zunächst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden (falls erforderlich). Anschließend werden nur die Zähler addiert/ subtrahiert. Der gemeinsame Nenner bleibt unverändert.

Regel	Formel	Beispiel
Bruch + Bruch	$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$	$\frac{4}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4+2}{3} = \frac{6}{3} = 2$
Bruch - Bruch	$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}$	$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Um einen gemeinsamen Nenner zu finden, können die Nenner der beiden Brüche multipliziert werden.

8. Aufgabe

Addiere oder subtrahiere die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5}$

b) $\frac{27}{45} - \frac{4}{15}$

c) $\frac{11}{11} - \frac{5}{5}$

d) $\frac{6}{5} + 12$

e) $\frac{7}{18} + \frac{28}{45}$

f) $0{,}5 - \frac{1}{8}$

9. Aufgabe

Wandle um in eine Dezimalzahl.

a) $\frac{14}{5}$

b) $\frac{15}{4}$

c) $\frac{21}{25}$

d) $\frac{125}{5}$

e) $\frac{8{,}5}{50}$

f) $\frac{31}{20}$

! *Wandle zunächst die Brüche auf den Nenner* 10 *oder* 100 *um. Z.B.* $\frac{6}{25} = \frac{24}{100} = 0{,}24$

10. Aufgabe

Wandle um in einen Bruch und vereinfache, wenn möglich.

a) $0{,}6$

b) $0{,}5$

c) $0{,}01$

d) $1{,}45$

e) $1{,}03$

f) $2{,}3$

! *Wandle zunächst um auf den Nenner* 10 *oder* 100 *und kürze anschließend, wenn möglich Z.B.* $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

11. Aufgabe

Berechne folgende Ausdrücke und vereinfache so weit wie möglich. Gib das Ergebnis als Bruch oder Dezimalzahl an.

a) $\frac{27}{30} - \frac{3}{30}$

b) $\frac{8}{5} + 9$

c) $0{,}625 - \frac{3}{8}$

d) $\frac{8}{15} \cdot \frac{30}{4}$

e) $1{,}2 \cdot \frac{10}{3}$

f) $\frac{6}{5} + \frac{3}{15}$

g) $\frac{18}{24} : 3$

h) $4 : \frac{28}{7}$

i) $\frac{8}{39} : \frac{64}{13}$

j) $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}$

12. Aufgabe

Berechne die folgenden Terme.

a) $-\frac{9}{2} - \frac{90}{40} - 3\frac{6}{8}$

b) $5\frac{1}{5} + \frac{1}{5} : \left(\frac{15}{4} - 3\frac{1}{2}\right)$

c) $6 + 5 \cdot \frac{5}{30} + \frac{5}{30}$

d) $\frac{6a}{3} + 6a - (3^2 a - a)$

! *Wandle die unechten Brüche in echte Brüche um Z.B.* $3\frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{7}{2}$

1.5. Teilbarkeitsregeln

Nachfolgend findest du eine Auflistung der Teilbarkeitsregeln für die Zahlen 2 bis 10. Die zentrale Frage in der Teilbarkeitslehre ist stets dieselbe und lautet: „Ist die Zahl x durch die Zahl y ohne Rest teilbar?“. Um solche Fragen zu beantworten, gibt es Regeln, die die Entscheidung über die Teilbarkeit erleichtern.

Teilbar durch…	wenn…	Beispiel
2	…die letzte Ziffer eine 0,2,4,6 oder 8 ist.	2|28 Da die letzte Ziffer von 28 eine 8 ist.
3	…die Quersumme der Zahl durch 3 teilbar ist.	3|324 Da die Quersumme von 124 $3 + 2 + 4 = 9$ durch 3 teilbar ist.
4	…die Zahl, die sich aus den letzten beiden Stellen ergibt, durch 4 teilbar ist.	4|944 Da die letzen beiden Stellen 44 sind und diese Zahl durch 4 teilbar ist.
5	…die letzte Ziffer eine 0 oder 5 ist.	5|970 Da die letze Ziffer eine 0 ist.
6	…die Zahl durch 2 und durch 3 teilbar ist.	6|282 Da die Zahl 282 sowohl durch 2 als auch durch 3 teilbar ist.
7	Die alternierende 3er Quersumme durch 7 teilbar ist.	7|627.725 Da $725 - 627 = 98$ und $98 = 70 + 28$ durch 7 teilbar ist.
8	…die Zahl, die sich aus den letzten drei Stellen ergibt, durch 8 teilbar ist.	8|11.864 Da die letzen drei Stellen 864 sind und diese Zahl durch 8 teilbar ist.
9	…die Quersumme der Zahl durch 9 teilbar ist.	9|801 Da die Quersumme von 801 $8 + 0 + 1 = 9$ durch 9 teilbar ist.
10	…die letzte Ziffer eine 0 ist	10|40.210 Da die letze Ziffer eine 0 ist.

! $a|b$ *übersetzt: a teilt b*

! $a \nmid b$ *übersetzt: a teilt b nicht*

13. Aufgabe

Kreuze jeweils an, wenn die Zahl teilbar ist.

	Zahl	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a)	2520									
b)	199									
c)	5040									
d)	1276									
e)	1451									
f)	396									
g)	1709									
h)	3418									
i)	5678									

14. Aufgabe

Setze für die leeren Stellen die passenden Ziffern ein und achte dabei auf die nebenstehenden Bedingungen.

a) 382_ kleinstmögliche Zahl teilbar durch 2

b) 874_ _ größtmögliche Zahl teilbar durch 2

c) 7535_ kleinstmögliche Zahl teilbar durch 3

d) 68_ _0 kleinstmögliche Zahl teilbar durch 8

e) 11_ _0 kleinstmögliche Zahl teilbar durch 6

f) 1_1_ durch 3, nicht aber durch 6 teilbar

1.6. Terme

Um Rechnungen übersichtlicher darzustellen, werden Terme (mathematische Gebilde aus Zahlen und Variablen) auf unterschiedliche Art und Weise vereinfacht.

	Zu vereinfachender Term		Ausführliche Darstellung		Vereinfachung
Addition und Subtraktion	$3x + 2x + x$	$=$	$(x + x + x) + (x + x) + x$	$=$	$6x$
Multiplikation	$3x \cdot 2x \cdot x$	$=$	$(3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot (x \cdot x \cdot x)$	$=$	$6x^3$
Division	$\frac{15x^4}{12x^3}$	$=$	$\frac{15}{12} \cdot \frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{x \cdot x \cdot x}$	$=$	$\frac{5}{4}x$

! $6x = 6 \cdot x$

! $x = 1 \cdot x$

Beispiel

$$3x^2 + \frac{3x^2y^3}{y} + 6 \cdot x \cdot x - x^2y^2$$

$$= 3x^2 + \frac{3x^2y^2}{1} + 6x^2 - x^2y^2$$

$$= 3x^2 + 6x^2 + 3x^2y^2 - x^2y^2$$

$$= 9x^2 + 3x^2y^2 - 1x^2y^2$$

$$= 9x^2 + 2x^2y^2$$

$$= x^2 \cdot (9 + 2y^2)$$

Alternatives Ergebnis durch Ausklammerung von x^2.

! *Nur gleichartige Ausdrücke zusammenfassen. x^2 gehört zu einer Art. x^2y^2 gehört zu einer anderen Art*

15. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $2a + (4b - 4c) - 2 \cdot (3a + 3c - b)$

b) $2a^2 + a - (a + 5) - (-3 + a^2)$

c) $2ab - (a^3 - 4ab) - (4b^2 - a^3 + 1)$

d) $3x^2 + 2y^2 - (x^2 - y^2) - (-5xy)$

16. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme.

a) $6a + (4b - 2c) - 2 \cdot (2a + 3c - b)$

b) $3a - 8b + (11a + 4) - (5b - a + 3)$

c) $2a^2 + 3a - (a + 5) - (1 - 3a^2)$

d) $3x^2 + y^2 - (x^2 - xy - y^2) + (5y^2 - 5xy)$

e) $3ab + 6 + (a^2 - 2ab - 5) - (4b^2 - a^2 + 1)$

17. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme.

a) $-\frac{6ba}{a} + \frac{2a^3 \cdot 4b}{8a^2b} + 7b - 2a$

b) $-3 + x \cdot x \cdot \left(\frac{3}{x^2} - 4\right) + 4x^2$

c) $(a^2b^3c^{-1})^2 \cdot (c^2)^2$

d) $4x \cdot 4x \cdot 4x + \frac{5y^2 - 5xy}{y - x} - 15y - \frac{128x^5}{2x^2}$

18. Aufgabe

Stelle eine Gleichung auf und bestimme anschließend die Lösungsmenge

a) Die Summe dreier fortlaufender Zahlen beträgt 12.

b) Die Summe dreier aufeinander folgender Zahlen ist gleich dem Vierfachen der größten der drei Zahlen vermindert um 11.

c) Jakob ist dreimal so alt wie Daniel. In vier Jahren sind sie zusammen 16 Jahre alt. Wie alt sind Jakob und Daniel heute?

d) Die Länge eines Rechtecks entspricht der dreifachen Breite vermindert um fünf Zentimeter. Der Umfang des Rechtecks beträgt 22cm. Berechne Länge und Breite des Rechtecks.

19. Aufgabe

Vereinfache folgende Terme so weit wie möglich.

a) $x^3 \cdot x^4$

b) $x^3 \cdot y^3$

c) $x^2 \cdot x^{-3}$

d) $(x^2)^3$

e) $\sqrt[4]{x\sqrt{y}}$

f) $(\sqrt{x^3})^2$

g) $\frac{x^2 \cdot y^{-4} \cdot z^3}{x^{-1} \cdot y^3 \cdot z^2}$

h) $\sqrt[3]{x^{2a} \cdot y^{9a} \cdot \sqrt[6]{x^{24a}}}$

20. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme so weit wie möglich.

a) $-\left(-\frac{6ba}{a}\right) + \frac{2a^3 \cdot 4b^2}{8a^3 b} + 7b$

b) $2x \cdot 2x + \frac{5y^2 - 5x^2}{y-x} - 5y - \frac{8x^5}{2x^3}$

1.7. Potenzgesetze

In Potenzen wird ausgedrückt, dass eine Zahl mehrere Male mit sich selbst multipliziert wird. Dies kann auf unterschiedliche Arten durchgeführt werden. Ein Ausdruck der Form $a \cdot x^n$ wird Potenz genannt. Diese Potenz besteht aus dem **Koeffizienten** a, der **Basis** x und dem **Exponenten** n.
Nachfolgend erhältst du eine Übersicht der wichtigsten Potenzgesetze.

Regel	Formel	Beispiel	Anmerkung
Gleiche Basis	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$	Exponenten werden addiert.
Gleicher Exponent	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$	$2^3 \cdot 4^3 = (2 \cdot 4)^3 = 8^3$	Basen werden multipliziert.
Potenzieren	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$	Exponenten werden multipliziert.
Radizieren	$\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[3]{2^{12}} = 2^{\frac{12}{3}} = 2^4$	$\frac{\text{Exponent}}{\text{Wurzelexponent}}$
Negativer Exponent	$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{1}{3^2} = 3^{-2}$	Exponent im Nenner-Ausdruck wird negativ. Dafür entfällt der Bruch.
Exponent Null	$x^0 = 1$	$8^0 = 1$	Gilt für $x \in \mathbb{R}$ beliebig.

Beispiel

$$\left(\frac{2^{x+1}}{2^x \cdot 2}\right)^{1000}$$

$= \left(\frac{2^x \cdot 2^1}{2^x \cdot 2}\right)^{1000}$ Gesetz der gleichen Basis

$= 1^{1000}$ Da im Zähler und Nenner dasselbe steht ist der Wert des Bruchs 1

$= 1$ Es gilt: $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$

21. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen

a) $\frac{1}{x^{-3}}$

b) $4^2 \cdot 4^9 \cdot 4^{-11}$

c) $x^{-1}y^3xy^{-1}$

d) $\frac{a^{-2}}{a^3}$

e) $\frac{x^{-4}}{x^3}$

22. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen.

a) $4^2 : 2^3 - 9 \cdot 3^{-2}$

b) $\frac{a^{-4}b^2}{a^3b^2}$

c) $\left(\frac{x^4}{x^3}\right)^2$

23. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke zu vereinfachen.

a) $\frac{18a^9b^7}{35x^3y^2} : \frac{12a^5b^3}{21x^4y^6}$

b) $\frac{(2^{x+y})^2}{2^{2y}}$

c) $\frac{a^{n+1} \cdot b^{n-1}}{a^n b^n}$

d) $\left(\frac{\sqrt{y^{-5}}x^0 \cdot y^3}{x \cdot \sqrt[6]{y^3}}\right)^2$

e) $\sqrt[4]{a^6 \cdot b^{-4} \cdot \sqrt{a^4} \cdot (b^4)^4}$

24. Aufgabe (Klausur Generation 1)

Ordne die folgenden Terme richtig zu.

*<u>Hinweis</u>: falsche Antworten geben **keinen Minuspunkt**.*

a)	$\frac{x^5}{x^2}$			$x^{\frac{5}{2}}$
b)	$(\frac{1}{x^1})^{-2}$			$(x^5 \cdot x^1)^{\frac{1}{3}}$
c)	$x^5 \cdot x$			$((\frac{1}{x^{-4}})^{-1})^{-1}$
d)	$\sqrt[4]{x^{10}}$			$\frac{x^{-3}}{x^{-9}}$
e)	x^4			$(((\frac{1}{x^{-4}})^{-1})^{-1})^{-1}$
f)	x^{-4}			$\frac{1}{x^{-3}}$

1.8. Übungsaufgaben

25. Aufgabe

Füge das richtige Symbol $>$, $<$oder $=$ ein.

5^0		$\sqrt{5}$
$\sqrt{\frac{1}{4}}$		$0{,}5$
-4		-8
$(-1)^{100}$		$(-1)^{99}$
$\sqrt[3]{2^4}$		$\sqrt[4]{2^3}$
$1-3+5-7$		$-\sqrt[3]{8}\cdot 2$
$5^{\frac{1}{3}}$		$\sqrt[3]{5}$

26. Aufgabe

Kreuze jeweils an welche der Zahlen von 2 bis 10 die folgenden Zahlen in der Tabelle teilen.

Zahl	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
550									
234									
957									
134									
112.719									
31.031									
714									
585									

27. Aufgabe

Berechne die Brüche und vereinfache, wenn möglich.

a) $\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}$

b) $\frac{1}{6}:\frac{1}{12}$

c) $\frac{1}{6}:\frac{1}{12}$

d) $\frac{11}{4}-\frac{64}{44}$

e) $3\frac{1}{3}:5$

f) $\frac{1}{2}a-\frac{a}{4}+\frac{6a}{8}$

28. Aufgabe

Wandle um in eine Dezimalzahl.

a) $\frac{13}{4}$

b) $\frac{17}{3}$

c) $\frac{60}{12}$

d) $\frac{65}{13}$

e) $\frac{3}{4}+\frac{7}{8}$

f) $\frac{10}{15}+\frac{8}{10}$

29. Aufgabe

Wandle um in einen Bruch und vereinfache, wenn möglich.

a) 0,87

b) 0,35

c) 0,02

d) 1,21

e) 12,42

f) 3,3

30. Aufgabe

Berechne die mathematischen Terme.

a) $-\frac{2}{3}-\frac{50}{30}-2\frac{8}{6}$

b) $2\frac{3}{2}+\frac{4}{7}:\left(\frac{2}{7}-2\frac{3}{2}\right)$

c) $2+4\cdot\frac{5}{15}+\frac{5}{15}$

d) $\frac{2a}{5}+2a-(4^2a-a)$

! *Wandle die gemischten Brüche in unechte Brüche um. Z.B.* $3\frac{1}{2}=\frac{3\cdot 2+1}{2}=\frac{7}{2}$

31. Aufgabe

Berechne vorteilhaft.

a) $-4\cdot(-2)^{-2}\cdot(-\pi)$

b) $7\cdot 2{,}2+7\cdot 7{,}8$

c) $(-2)^6\cdot(-4)^{-2}$

d) $(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)$

e) $-\left(\frac{5}{4}-\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{4}{5}-\frac{5}{6}\right)$

f) $0\cdot\left(\frac{\frac{24}{23}+1}{\frac{22}{21}-1}\right)$

32. Aufgabe

Vereinfache die folgenden Terme.

a) $3b+5b-5c-(3a-10b+a-7b)$

b) $-7b+7a-2b+9a-(3b-2b-3c)$

c) $7x^2-[x-x(3x+1)]$

d) $2\cdot 4x\cdot 3y+5x\cdot 2y-18xy$

33. Aufgabe

Forme in ein Produkt um. Klammere dazu möglichst viel aus

a) $8xy+4y$

b) $9x^2-45x$

c) $26xyz+13zy-39xy$

d) $7x^2-7y^2+7z^3$

e) $-(3xy-24x^2y)+6x$

34. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\frac{1}{x^{-2}}$

b) $3^2\cdot 3^{10}\cdot 3^{-11}$

c) $\frac{a^{-4}}{a^2}$

d) $x^2y^3xy^{-3}$

e) $\frac{a^{-1}b^2}{a^3b^{-1}}$

f) $((a^2)^2)^2$

35. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\left(\frac{x^4}{x}\right)^2$

b) $\frac{3^{x+5}}{3^{x-2}}$

c) $\frac{x^5y^4}{x^{-4}y^3}$

d) $\frac{(2^x)^2}{2^{2x}}$

36. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke wo weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $8^2 : 4^3 - 8 \cdot 4^{-2}$

b) $\frac{a^4b^{-2}}{a^3b^{-2}}$

c) $\sqrt{\left(\frac{x^8}{x^5}\right)^2}$

d) $\left(\frac{2^{x+1}}{2^x \cdot 2}\right)^{1000}$

e) $\frac{x^{-4}y^{-3}}{x^4y^{-2}} \cdot y \cdot x^8$

37. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\frac{a^{n+2} \cdot b^{n-2}}{a^n b}$

b) $\frac{12a^9b^7}{35x^3y^2} : \frac{12a^5b^3}{7x^4y^6}$

c) $\left(y^3x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt[6]{y^3}\right)^2$

d) $\frac{24a^4b^4}{105x^3y^3} : \frac{6a^7b^3}{15x^4y^2}$

38. Aufgabe

Wende die Potenzgesetze an, um folgende Ausdrücke so weit wie möglich zu vereinfachen.

a) $\frac{6x \cdot y^2}{3y^3x} : \frac{(x^5)^2}{y}$

b) $\frac{\left((\sqrt{8})^y\right)^2}{2^{2y}}$

c) $\left(\frac{\sqrt{y^{-5}x^0 \cdot y^3}}{\sqrt[6]{y^{12}}}\right)^{\frac{1}{3}}$

d) $\frac{a^{n+1}}{a^n} \cdot \frac{b^{n-1}}{b^n}$

e) $\sqrt[3]{a^{1{,}5} \cdot b^{-3} \cdot \sqrt{a^3} \cdot (b^4)^0}$

39. Aufgabe

Kreuze jeweils wahr oder falsch an.

	Aussage	1	0
a)	Zwischen zwei verschiedenen reellen Zahlen befinden sich unendlich weitere reelle Zahlen		
b)	Die Zahl $\sqrt{2}$ kann auch als Bruch dargestellt werden		
c)	$\pi \notin \mathbb{Q}$		
d)	$\sqrt{-9} \in \mathbb{R}$		
e)	Die Anzahl der Elemente der Menge der natürlichen Zahlen ist 42		
f)	Die Anzahl der Elemente der Menge der reellen Zahlen ist endlich		
g)	1 ist eine ganze Zahl, aber keine Primzahl		
h)	$\forall n \in \mathbb{N}: 2^n > n^2$		
i)	$\pi < \sqrt{3}$		

1.9. Checkliste

- ☐ Ich weiß, welche Zahlenmengen es gibt
- ☐ Ich kenne das Assoziativgesetz
- ☐ Ich kenne das Kommutativgesetz
- ☐ Ich weiß, was das Distributivgesetz ist
- ☐ Ich beherrsche die „Punkt vor Strich“-Rechnung
- ☐ Ich weiß, wie Brüche addiert, subtrahiert, multipliziert und dividiert werden
- ☐ Ich kenne die Teilbarkeitsregeln
- ☐ Ich kann mit einem Minus vor einer Klammer umgehen
- ☐ Ich kenne die Potenzgesetze

2. Aussagenlogik

Das Ziel dieses Kapitels ist, dass du die Grundlagen der Aussagenlogik verstanden hast. Nach Abschluss des Kapitels kannst du…

- Entscheiden, ob es sich im mathematischen Sinne um eine Aussage handelt
- Aussagen verneinen.
- mithilfe von Wahrheitstabellen überprüfen, ob Aussagen logisch gleichwertig sind.
- ein verbales Sprachgebilde in eine mathematische Aussageform umwandeln.
- mithilfe von Regeln mathematische Aussageformen vereinfachen.

2.1. Mathematische Aussagen

Eine mathematische Aussage ist eine Aussage, die nur Wahr (1) oder Falsch (0) sein kann. Aussagen werden immer mit Großbuchstaben bezeichnet.

Beispiel

Für mathematische Aussagen:

• $A : 3 < 5$	Wahr
• B : „Die Leinwand ist grün."	Falsch
• C : „Das Smartboard ist quadratisch."	Falsch
• D : „VW ist eine Aktiengesellschaft."	Wahr

Für nicht mathematische Aussagen:

- A : „Hoffentlich gewinne ich im Lotto."
- B : „Hoch lebe die Regierung."
- C : „Der Kaffee schmeckt gut."
- D : „Gauß ist der beste Mathematiker."

40. Aufgabe

Welche der folgenden Sätze sind mathematische Aussagen?

a) Prost!

b) Morgen ist Sonntag

c) Das Auto ist drei Jahre alt

d) Es gibt keine gerade Primzahl

e) Mach doch bitte die Tür hinter dir zu

f) Das Regal wiegt 80kg

g) Es gibt eine gerade Primzahl

h) Es gibt gerade Primzahlen

41. Aufgabe

Welche der folgenden mathematischen Aussagen sind wahr?

a) Paris ist eine Hauptstadt

b) Alle Primzahlen sind gerade

c) 1970 ist eine ganze Zahl

d) $\sqrt{7} = 3$

e) $6 \leqslant 7 \leqslant 5$

2.2. Verbindungen von Aussagen

Zwei oder mehrere Aussagen können miteinander verbunden werden. Die folgende Tabelle zeigt die wichtigsten dieser Aussageverbindungen.

Negation	$\neg A := \bar{A}$	Sprich: “Nicht” oder “kein”
Konjunktion	$A \land B$	Sprich: “und”
Disjunktion	$A \lor B$	Sprich: “oder"
Implikation	$A \rightarrow B$	Sprich: “Wenn..., dann...”
Äquivalenz	$A \leftrightarrow B$	Sprich: “Genau wenn..., dann...”
Exklusiv oder	$A \oplus B$	Sprich: “entweder... oder...”

42. Aufgabe

Es seien die Aussagen A bis D gegeben.

- A: Anton geht auf die Kirmes.
- B: Anton trinkt ein Bier.
- C: Anton isst einen Crêpe.
- D: Anton trifft seinen Kumpel Dennis.

Beschreibe verbal:

a) $A \rightarrow C$

b) $A \wedge C$

c) $A \rightarrow B$

d) $(A \wedge D) \rightarrow B$

43. Aufgabe

Verneine die folgenden Sätze

a) Mein Hund heißt Charly

b) Pi ist eine rationale Zahl

c) Alle Polos sind Dieselfahrzeuge

d) Es gibt Autos mit mehr als 600PS

e) Kein Student liest Zeitung

2.3. Die Wahrheitstabelle

Für zwei Aussagen A, B gilt bei Verbindung folgende Wahrheitstabelle.

A	B	$A \vee B$	$A \wedge B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$	$A \oplus B$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

2.4. Negation

Eine Aussage A nimmt den umgekehrten Wahrheitswert an, wenn diese negiert wird.

Sprich: Nicht A

A	$\neg A$
1	0
0	1

! *Anstelle des Negationszeichen ¬ kann auch der zu negierende Bereich mit einer „Overline" markiert werden*

! $\neg A = \overline{A}$

2.5. Beweis durch Wahrheitstabelle

Mit Hilfe von Wahrheitstabellen kann man z.B. nachweisen, dass zwei Aussageformen logisch gleichwertig sind. In dem Fall darf ein "=" zwischen den Aussageformen gesetzt werden.

Beispiel

Es kann gezeigt werden, dass die Aussage: "Es ist nicht wahr, dass ich in Wolfsburg wohne und bei VW arbeite."

und die Aussage: "Ich wohne nicht in Wolfsburg oder ich arbeite nicht bei VW."

logisch gleichwertig sind. In der Wahrheitstabelle kann das folgendermaßen aussehen:

Es wird definiert: A: Ich wohne in Wolfsburg B: Ich arbeite bei VW

Daraus folgt:

"Es ist nicht wahr, dass ich in Wolfsburg wohne und bei VW arbeite." entspricht $\overline{A \wedge B}$

Und

"Ich wohne nicht in Wolfsburg oder ich arbeite nicht bei VW." entspricht $\overline{A} \vee \overline{B}$

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Da die Spalten übereinstimmen, sind die beiden Aussagen logisch gleichwertig. Es kann notiert werden: $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$

2.5.1. Regel von De Morgan

Die De Morganschen Regeln sind wichtige Bestandteile der Aussagenlogik. Mit Hilfe dieser Regeln lassen sich Und-Verneinungen in Oder-Verneinungen umformen (und umgekehrt).

> De Morgansche Regeln:
>
> $$\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$
>
> $$\overline{\mathrm{A} \wedge \mathrm{B}} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

Beispiel

„Es ist nicht wahr, dass das Bier warm oder alkoholfrei ist."

Umgewandelt nach der De Morganschen Regel:

"Das Bier ist weder warm noch alkoholfrei."

44. Aufgabe

Zeige mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass folgende Aussageformen logisch gleichwertig sind.

a) $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

b) $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$

c) $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

d) $\overline{A \wedge B \wedge C} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$

e) $A \wedge \overline{B} = \overline{A \rightarrow B}$

f) $\overline{\overline{A} \vee B} = A \wedge \overline{B}$

45. Aufgabe (Klausur Generation 1)

Untersuche mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Aussagen logisch gleichwertig sind.

a) $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{B} \rightarrow \mathrm{A}) = \overline{\mathrm{A} \oplus \mathrm{B}}$

b) $(\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B}) = (\neg\mathrm{B} \rightarrow \neg\mathrm{A})$

c) $\mathrm{A} \vee (\mathrm{B} \wedge \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) \wedge (\mathrm{A} \vee \mathrm{C})$

d) $\neg(\mathrm{A} \vee \mathrm{B}) = \neg\mathrm{A} \wedge \neg\mathrm{B}$

2.6. Wichtige Regeln

Teil 1

$A \vee \overline{A}$	$=$	1	Satz vom ausgeschlossenen Dritten
$A \wedge \overline{A}$	$=$	0	
$A \vee 1$	$=$	1	Absorption
$A \wedge 0$	$=$	0	
$A \vee 0$	$=$	A	Neutrales Element
$A \wedge 1$	$=$	A	
$A \rightarrow B$	$=$	$\overline{A} \vee B$	Regeln zur Implikation
$\overline{A \rightarrow B}$	$=$	$A \wedge \overline{B}$	

Teil 2

Konjunktion			Disjunktion		
$A \wedge B$	$=$	$B \wedge A$	$A \vee B$	$=$	$B \vee A$
$A \wedge (B \wedge C)$	$=$	$(A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C)$	$=$	$(A \vee B) \vee C$
$A \wedge (B \vee C)$	$=$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C)$	$=$	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$

46. Aufgabe

Negiere die Aussageformen und beschreibe die dazugehörigen Verneinungen verbal

a) $A \rightarrow C$

b) $A \wedge C$

c) $A \rightarrow B$

d) $(A \wedge D) \rightarrow B$

A: Anton geht auf die Kirmes.

B: Anton trinkt ein Bier.

C: Anton isst einen Crêpe.

D: Anton trifft seinen Kumpel Dennis.

47. Aufgabe

Schreibe die Ausdrücke als negierte Implikation.

a) $(A \wedge B) \wedge (\neg B)$

b) $(A \vee C) \wedge ((\neg B \vee (\neg C))$

48. Aufgabe

Gegeben sei die logische Formel $\alpha := \neg(\neg A \wedge B \rightarrow C \vee B)$

a) Forme α so um, dass kein Implikationspfeil mehr vorkommt und kein geklammerter Ausdruck negiert ist.

b) Was lässt sich über den Wahrheitswert von α sagen?

49. Aufgabe

Zeige mithilfe einer Wahrheitstafel, dass folgende Aussage stets wahr ist.

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\overline{B} \rightarrow \overline{A})$$

2.7. Vorrangregeln

Analog zur *Punkt vor Strich Rechnung* gibt es auch in der Aussagenlogik eine ähnliche Vorrangregel. Diese Regeln sind nützlich, um Klammern zu sparen.

1)	zuerst	$\neg$
2)	dann	$\wedge$, $\vee$
3)	zuletzt	$\rightarrow$, $\leftrightarrow$

50. Aufgabe

Vereinfache den Ausdruck unter Beachtung der Vorrangregeln.

$$(\neg A) \rightarrow (((\neg B) \vee C) \wedge (\neg(D \vee E)))$$

2.8. Prädikate

Die Prädikatenlogik ist eine Erweiterung der Aussagenlogik. Ein Prädikat $a(x)$ ist eine Funktion, die einem Individuum x eine Aussage zuordnet.

Beispiel

x bezeichne einen Wolfsburger, $a(x) := x$ arbeitet bei VW, $b(x) := x$ fährt einen Golf

$\exists x : a(x)$	Sprich: Es gibt ein x für das gilt $a(x)$	Es gibt Wolfsburger, die bei VW arbeiten
$\forall x : a(x)$	Sprich: für alle x gilt $a(x)$	Alle Wolfsburger arbeiten bei VW
$\exists x : a(x) \wedge b(x)$	Sprich: Es gibt x für das gilt $a(x)$und $b(x)$	Es gibt Wolfsburger, die bei VW arbeiten und einen Golf fahren

Die folgende Tabelle zeigt, wie Prädikate verneint werden.

$\overline{(\exists x: P(x))}$	=	$\forall x: \neg P(x)$
$\overline{(\forall x: P(x))}$	=	$\exists x: \neg P(x)$

51. Aufgabe

Schreibe folgende umgangssprachliche Formulierungen unter Verwendung geeigneter Bezeichnungen als (prädikaten-)logische Ausdrücke.

a) A: Jeder Wolfsburger hat ein Lieblingsrestaurant

b) B: Jeder Wolfsburger hat ein Lieblingsrestaurant oder eine Lieblingsbar

c) C: Es gibt Wolfsburger, die ein Lieblingsrestaurant, aber keine Lieblingsbar haben.

! *x bezeichne einen Wolfsburger,* $B(x) \coloneqq x$ *hat ein Lieblingsrestaurant,* $C(x) \coloneqq x$ *hat eine Lieblingsbar.*

d) Gib logische Ausdrücke für die Negation von A, B und C an.

e) Interpretiere die Ergebnisse von d).

2.9. Übungsaufgaben

52. Aufgabe (Aus Klausur Generation 1 Term 2)

Untersuche mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Aussagen logisch gleichwertig sind.

a) $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) = \overline{A \oplus B}$

b) $(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) = \overline{A \oplus B}$

53. Aufgabe (Aus Klausur Generation 1 Term 2)

Untersuche mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, ob folgende Aussagen logisch gleichwertig sind.

a) $A \rightarrow (B \rightarrow C) = (A \wedge B) \rightarrow C$

b) $\overline{A \wedge B \wedge C} = \overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{C}$

54. Aufgabe

Vereinfache den Ausdruck unter Beachtung der Umformungsregeln der Aussagenlogik.

a) $(A \wedge B) \wedge (\bar{B})$

b) $A \vee (B \vee C) \rightarrow \left((\bar{A}) \wedge (\bar{B})\right) \wedge (\bar{C})$

c) $\overline{(\bar{A} \wedge \bar{B}) \vee \bar{C}}$

d) $(A \vee C) \vee (\bar{A} \wedge \bar{C})$

55. Aufgabe (Aus Klausur Generation 1 Term 2)

a) Schreibe die folgenden umgangssprachlichen Formulierungen als (prädikaten-)logische Ausdrücke:

b) A: Es gibt Bodybuilder, die weniger als 100kg wiegen und weniger als 4-mal pro Woche trainieren.

c) B: Jeder Bodybuilder, der weniger als 100kg wiegt und mindestens 100kg hebt, trainiert dann mindestens 4-mal pro Woche.

d) Welche der folgenden (prädikaten-) logischen Ausdrücke bezeichnen die korrekten Negationen der Aussagen A bzw. B. Kreise die richtige Antwort ein.

$\overline{A}$	$\exists x: \overline{G(x)} \wedge T(x)$	$\forall x: G(x) \vee T(x)$	$\exists x: \overline{G(x) \wedge \overline{T(x)}}$
$\overline{B}$	$\exists x: \overline{G(x)} \vee H(x)\overline{T(x)}$	$\forall x: \overline{G(x) \wedge H(x) \rightarrow T(x)}$	$\exists x: \overline{G(x)} \wedge H(x) \wedge \overline{T(x)}$

- $x\ bezeichne\ einen\ Bodybuilder$
- $G(x) \coloneqq x\ wiegt\ mindestens\ 100kg$
- $H(x) \coloneqq x\ hebt\ mindestens\ 100kg$
- $T(x) \coloneqq x\ trainiert\ min. 4\ mal\ pro\ Woche$

2.10. Checkliste

☐ Ich kann entscheiden, ob es sich im mathematischen Sinne um eine Aussage handelt

☐ Ich kenne die wichtigsten Aussageverbindungen und weiß, wie ich Aussagen miteinander verbinde

☐ Ich bin in der Lage, mathematische Aussagen zu negieren

☐ Ich weiß, wie ich mit Hilfe von Wahrheitstabellen beweisen kann, ob zwei mathematische Aussagen logisch gleichwertig sind

☐ Ich kenne die wichtigen Regeln zur Vereinfachung von Aussageverbindungen, die Regeln von De Morgan und die Vorrangregeln und kann diese anwenden

☐ Ich kenne die Prädikatenlogik als Erweiterung der Aussagenlogik

3. Mengenlehre I

Das Ziel dieses Kapitels ist, dass du die Grundlagen der Mengenlehre verstanden hast. Nach Abschluss des Kapitels kannst du...

- Mengen in verschiedenen Varianten darstellen und umformen
- anhand eines mengentheoretischen Ausdrucks ein Venn Diagramm skizzieren und mit Hilfe eines Venn Diagramms einen mengentheoretischen Ausdruck ermitteln
- die Vereinigung, den Durchschnitt und die Differenz von mengentheoretischen Ausdrücken bestimmen
- Textinformationen mit Mitteln der Mengenlehre verarbeiten und Aufgaben dazu lösen

3.1. Definition

Unter einer Menge versteht man in der Mathematik jede Zusammenfassung von verschiedenen Objekten zu einer Gesamtheit.

Es gibt verschiedene Darstellungen, wie Mengen zusammengefasst werden können.

- Aufzählende Schreibweise
- Beschreibende Schreibeweise
- Intervalle

3.2. Aufzählende Schreibweise

In der aufzählenden Schreibweise werden die einzelnen Elemente der Menge durch Kommas voneinander getrennt und zwischen zwei geschweiften Klammern aufgezählt.

3.3. Beschreibende Schreibweise

In der beschreibenden Schreibweise wird zunächst eine Variable aus einer bekannten Menge eingeführt. Nach dem Trennstrich in der Mitte wird die Menge durch die Variable präziser eingegrenzt. Mehrere Eingrenzungen werden mit dem logischen “und” bzw. “oder” verknüpft.

Beispiel

Aufzählende Schreibweise	Beschreibende Schreibweise
$A = \{1,2,3\}$	$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 3\}$
$B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$	$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -4 \leq x \leq 4\}$
$C = \{1, \ldots ,49\}$	$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 49\}$

56. Aufgabe

Forme die gegebene Menge jeweils in die andere Schreibweise um:

$A = \{1,2,3,4,5,6\}$	
	$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 1\}$
$C = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$	
	$D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 \leq x \leq 5\}$
$E = \{0,1,2,3,6,7,8,9\}$	
	$F = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 9 \wedge x > 3\}$

3.4. Intervall-Schreibweise

Wenn über reelle Zahlen gesprochen wird, sind alle Zahlen auf dem Zahlenstrahl gemeint. Eine Aufzählung wäre hier deshalb unsinnig. Es können bestimmte Bereiche des Zahlenstrahls mit Hilfe der Intervall-Schreibweise dargestellt werden. Für Intervalle werden unterschiedliche Klammern verwendet. Wenn der Randwert zur Menge gehört, dann wird eine eckige Klammer [...] verwendet, wenn der Randwert ausgeschlossen wird, dann wird eine runde Klammer (...) verwendet.

Beispiele

$[\mathbf{2},\mathbf{9}]$	geschlossenes Intervall	Alle Werte von **2** bis **9**, inklusive **2** und **9**
$(\mathbf{2},\mathbf{9})$	offenes Intervall	Alle Werte von 2 bis 9, exklusive beider Grenzen
$(\mathbf{2},\mathbf{9}]$	halboffenes Intervall	Alle Werte von 2 bis 9, exklusive 2 bzw. inklusive 9
$[\mathbf{2},\mathbf{9})$	halboffenes Intervall	Alle Werte von 2 bis 9, inklusive 2 bzw. exklusive 9

57. Aufgabe

Bestimme die Lösungsmenge als Intervall.

a) Alle reellen Zahlen, die strikt größer -3 und kleiner oder gleich 6 sind

b) Alle reellen Zahlen, die strikt kleiner 10 und strikt größer -10 sind

c) Alle reellen Zahlen, die größer oder gleich 5 sind

d) Alle reellen Zahlen, für die gilt: $x < 15 \wedge x \geq 2$

58. Aufgabe

Bestimme die Lösungsmenge als Intervall

a) $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq 12$

b) $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq 12 \wedge x > -4$

c) $\forall x \in \mathbb{R}: \frac{x}{3} \leq 12$

d) $\forall x \in \mathbb{R}: x \leq 12 \wedge x > 25$

59. Aufgabe

Forme die gegebene Menge jeweils in die andere Schreibweise um:

$A = (-3,7]$	
	$B = \{x \in \mathbb{R} \mid x - 3 < 5\}$
$C = (-\infty, \infty)$	
	$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x + 2 \leq 3\}$
$E = (5,6)$	
	$F = \{x \in \mathbb{R} \mid -2x < -1\}$

60. Aufgabe

Bilde aus den folgenden Sätzen jeweils eine Menge.

a) $Alle\ nicht\ negativen\ reellen\ Zahlen$

b) $Alle\ positiven\ ganzen\ Zahlen, die\ kleiner\ als\ 50\ sind$

c) $Alle\ VW\ SUVs$

3.5. Weitere Regeln zur Aufzählung von Mengen

$\{\mathbf{4,5,2,3,1}\} = \{\mathbf{1,2,3,4,5}\}$	Die Reihenfolge der Elemente spielt keine Rolle
$\{1,1,1,2,3\} = \{1,2,3\}$	wiederholte Elemente werden zu einem zusammengefasst

3.6. Die Leere Menge

Als Leere Menge wird eine Menge bezeichnet, die keine Elemente enthält. Als Symbol für die leere Menge werden zwei geschweifte Klammern { } oder das folgende Symbol verwendet Ø.

Es gilt $\{\ \} = \emptyset = leere\ Menge$.

Beispiel

Die folgenden zwei Mengen enthalten keine Elemente

$A = \{x \in \mathbb{N} | x > 9 \wedge x < 3\} = \emptyset$

$B = \{x \in \mathbb{R} | x + 2 = x\} = \emptyset$

61. Aufgabe

Gib für folgende Mengen eine aufzählende Schreibweise an. Welche der Mengen sind leer?

a) $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 3\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | -3 \leq x \leq 0\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | -10 \leq x\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{N} | x \leq -10\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{N} | x < 5 \wedge x > 10\}$

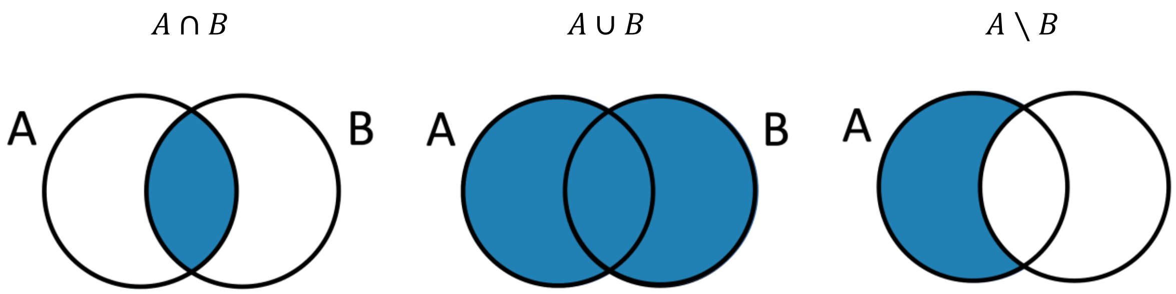
f) $F = \{x \in \mathbb{N}_0 | x \leq 0\}$

3.7. Operationen von Mengen

Für zwei beliebige Mengen A und B gelten folgende Operationen

Durchschnitt	$\boldsymbol{A \cap B \coloneqq \{x \mid x \in A \land x \in B\}}$	Alle Elemente, die sowohl in A als auch in B sind	Sprich: „A geschnitten B“
Vereinigung	$A \cup B \coloneqq \{x \mid x \in A \lor x \in B\}$	Alle Elemente, die in A oder in B sind	Sprich: „A vereinigt B“
Differenz	$A \setminus B \coloneqq \{x \mid x \in A \land x \notin B\}$	Alle Elemente, die in A aber nicht in B sind	Sprich: „A ohne B“

3.7.1. Veranschaulichung durch Venn-Diagramme:

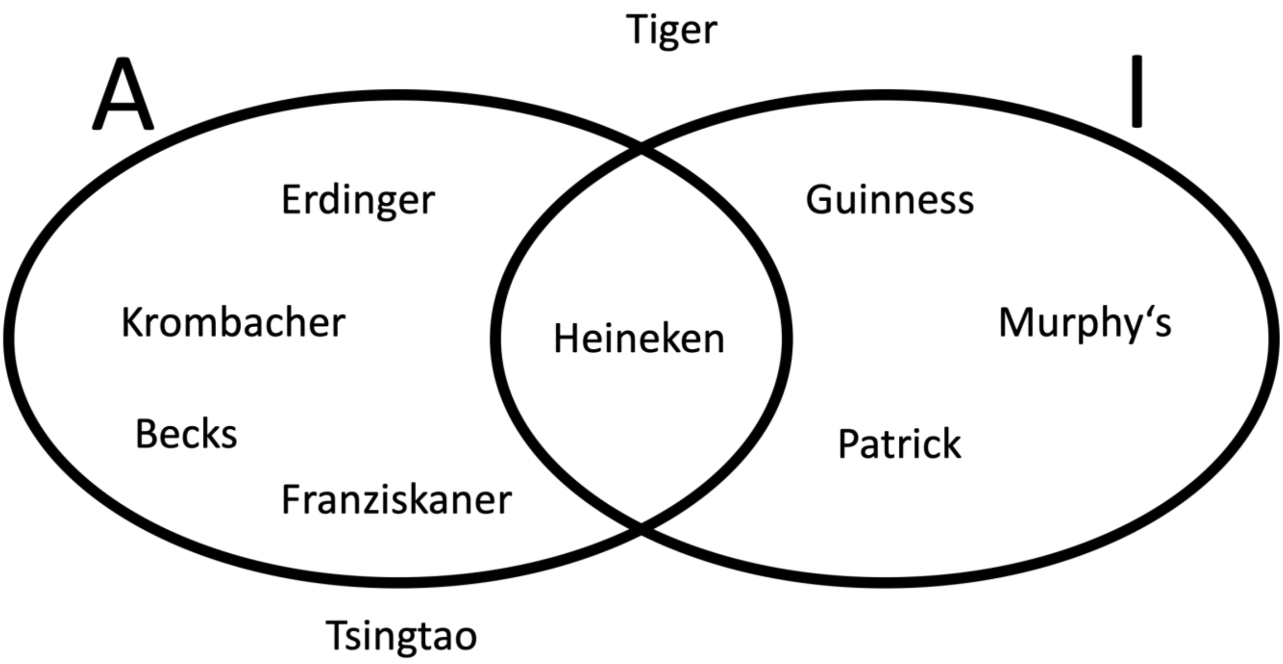


Beispiel

In Wolfsburg gibt es die zwei Lokale “Altes Brauhaus” und den “Irish Pub”. Es werden unterschiedliche Biersorten in beiden Lokalen angeboten.

$A = \{Becks, Krombacher, Heineken, Erdinger, Franziskaner\}$

$I = \{Heineken, Guinness, Patrick, Murphy's\}$



Außerdem gibt es in Wolfsburg zwei asiatische Biersorten, die weder in A noch in I erhältlich sind.

Es können nun folgende Mengenoperationen durchgeführt werden.

$A \cup I = \{Erdinger, Krombacher, Becks, Franziskaner, Heineken, Guinness, Murphy's, Patrick\}$

$A \cap I = \{Heineken\}$

$A \setminus I = \{Becks, Krombacher, Erdinger, Franziskaner\}$

62. Aufgabe

Gegeben seien die Mengen

$A = \{1,2,3\} \quad B = \{4,5,6\} \quad C = \{1,2,6\}$

Führe die folgenden Mengenoperationen durch und gib ein aufzählendes Ergebnis an

a) $A \cup B$

b) $B \cap C$

c) $A \cap B$

d) $A \setminus C$

e) $A \setminus B$

f) $C \setminus A$

g) Skizziere das passende Venn-Diagramm für A, B und C

h) Ermittle einen mengentheoretischen Ausdruck mit Hilfe der Mengen A, B und C für die Menge $D = \{1,2\}$

63. Aufgabe

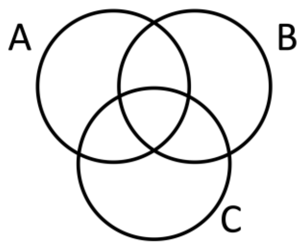
Gegeben seien die mengentheoretischen Ausdrücke.

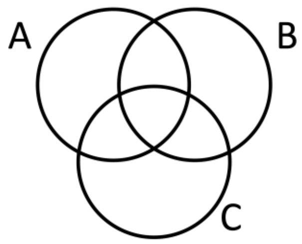
a) $(A \cap C) \setminus B$

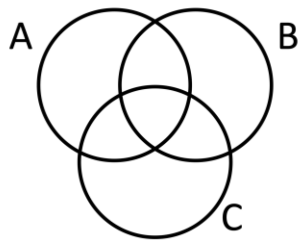
b) $(A \cup B) \setminus C$

c) $(A \cup C) \cap (B \cup C)$

Schraffiere die zugehörigen Venn-Diagramme

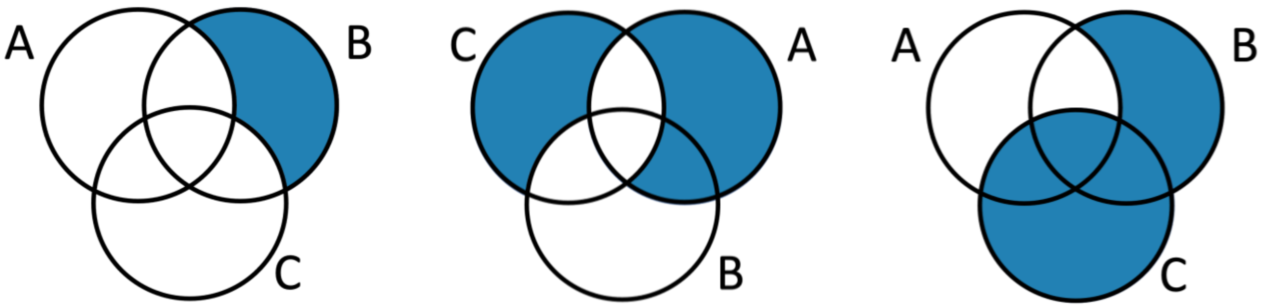






64. Aufgabe

Gib zu den folgenden Venn-Diagrammen den mengentheoretischen Ausdruck an:



65. Aufgabe

(aus Mathe-Olympiade 2019)

Ein Handyhersteller führte eine Umfrage zur Bedienerfreundlichkeit seiner drei Modelle A, B und C durch. Von den Testteilnehmern wurden die jeweiligen Handys entweder mit "gut" oder mit "nicht gut" bewertet. Nach der Auswertung der Umfrage stellt er fest:

Genau 250 Personen nahmen am Test teil. Mit "gut" bewerteten genau 15 Testteilnehmer alle drei Modelle, genau 35 Testteilnehmer die Modelle B und C, genau fünf Testteilnehmer die Modelle A und B, aber nicht das Modell C, genau 25 Testteilnehmer die Modelle A und C, genau 40 Testteilnehmer nur das Modell B, genau 40 Testteilnehmer das Modell A und genau 95 Testteilnehmer keines der drei Modelle.

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Testteilnehmer, die nur das Modell A mit "gut" bewerteten.

b) Bestimmen Sie die Anzahl der Testteilnehmer, die nur das Modell C mit "gut" bewerteten.

66. Aufgabe

Von 200 Autos, die überprüft wurden, haben 78 Mängel an den Bremsen,72 Mängel an dem Motor und 56 Mängel an der Lichtanlage. Genau 20 Fahrzeuge hatten Probleme an Bremsen und Motor, 19 hatten Mängel an Motor und Lichtanlage und 26 Fahrzeuge an Bremsen und der Lichtanlage. 12 Autos hatten Probleme in allen drei untersuchten Bereichen.

a) Veranschauliche den Sachzusammenhang mit passenden Venn-Diagrammen.

b) Wie viele Fahrzeuge hatten keine Mängel?

3.8. Übungsaufgaben

67. Aufgabe (Klausur G1)

Ein Fußballtrainer hat in seiner Mannschaft 18 Personen. Davon sind 8 Verteidiger und 6 Mittelfeldspieler. Eine Person kann nur als Torhüter eingesetzt werden. Drei Personen können sowohl als Verteidiger, Mittelfeldspieler oder Stürmer spielen, fünf können im Mittelfeld und im Sturm spielen, und vier können im Mittelfeld und in der Verteidigung eingesetzt werden. Im Sturm und in der Verteidigung können drei Personen spielen.

a) Zeichne ein passendes Venn-Diagramm, welches den Sachverhalt darstellt.

b) Wie viele reine Stürmer und Verteidiger gibt es?

68. Aufgabe

Von den 500 Gästen eines Kongresses sprechen 126 Spanisch, 380 Englisch und 206 Französisch. 6 Personen sprechen nur Spanisch, 140 sowohl Englisch als auch Französisch, 60 sowohl Französisch als auch Spanisch und 18 alle drei Sprachen.

a) Wie viele Personen sprechen keine der drei Sprachen

b) Wie viele sprechen nur Englisch und Spanisch?

69. Aufgabe

Unter 100 Schülern wird eine Umfrage bezüglich ihrer Lieblingssportart gemacht, wobei nur nach Handball, Fußball und Leichtathletik gefragt wird.

12 Schüler spielen gerne Fußball, sind aber weder für Handball noch für Leichtathletik zu begeistern.

5 Schüler spielen gerne Handball, aber nicht Fußball und mögen auch nicht Leichtathletik.

30 Schüler spielen gerne zwei von den Sportarten, wobei darunter 20 sind die gerne Fußball und Handball spielen und 6 Schüler die gerne Handball spielen und Leichtathletik mögen.

Genau 10 Schüler mögen alle drei Sportarten gleich gern.

27 Schüler betreiben am liebsten gar keinen Sport.

a) Veranschauliche den Sachzusammenhang in passenden Venn-Diagrammen

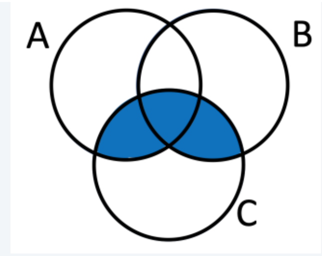
b) Wie viele Schüler mögen Leichtathletik nicht?

c) Wie viele Schüler, die gerne Fußball spielen, spielen nicht gerne Handball?

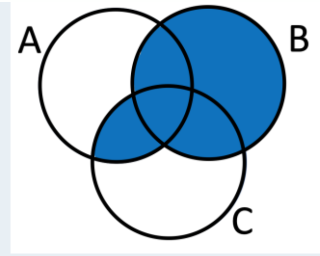
70. Aufgabe (Bonustest G1)

Gib jeweils einen passenden mengentheoretischen Ausdruck an, der die folgenden Venn-Diagramme beschreibt.

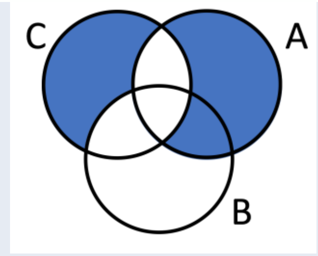
a)



b)



c)



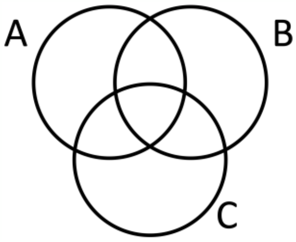
71. Aufgabe (Bonustest G1)

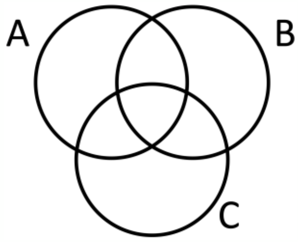
Markiere die jeweiligen Venn-Diagramme passend zu den mengentheoretischen Ausdrücken

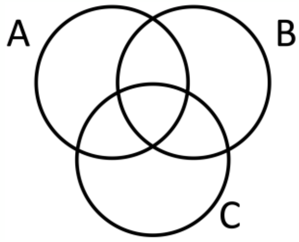
a) $(B \cup C) \cap A$

b) $B \setminus (A \cap C)$

c) $(B \setminus C) \cup A$





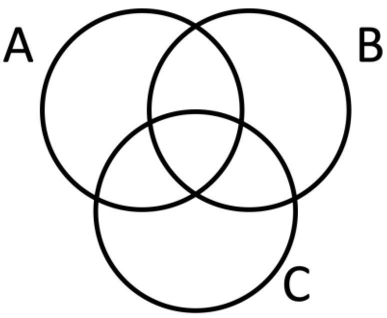


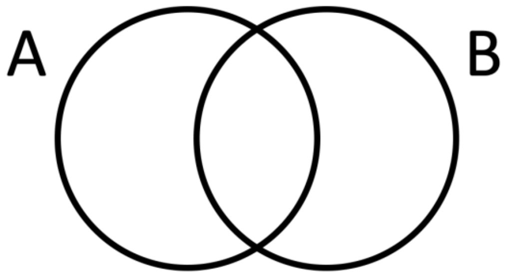
72. Aufgabe

Schraffiere zu folgenden Mengenausdrücken jeweils die passenden Teilflächen der Venn-Diagramme.

a) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup \big(C \setminus (A \cup B)\big)$

b) $A \cap \Big(B \cup \big(A \cap (B \cup (A \cap B))\big)\Big)$





73. Aufgabe

Gib eine aufzählende Darstellung an.

a) $A = \{x \in \mathbb{N} | x \leq 5\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{N} | x^2 = 81\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{Z} | x^2 = 81\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{N} | 3x = 1\}$

74. Aufgabe

Gib eine beschreibende Darstellung an.

a) $A = \{1,2,3\}$

b) $B = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1\}$

c) $C = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

d) $D = \{4,5,6, \dots\}$

75. Aufgabe

Kreuze jeweils an, ob die folgenden mathematischen Ausdrücke wahr oder falsch sind.

Aussage	1	0
$\{3,4\} = \{4,3\}$		
$\{1,2,5,6,7\} = \{1,1,2,2,5,5,6,6,7,7\}$		
$\{2\} \cap \{2\} = \{2\}$		
$\{\ \ \} = \{0\}$		
$\{\ \ \} = \emptyset = \{\emptyset\}$		

76. Aufgabe

Gegeben sind die Mengen.

$A = \{1,2,3,4,5\}$

$B = [2,5]$

$C = \{3,5,7,9\}$

$D = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \leq 5\}$

Führe die folgenden Mengenverknüpfungen aus und gib eine Vereinfachung an.

a) $A \cap B$

b) $A \cup C$

c) $B \cap D$

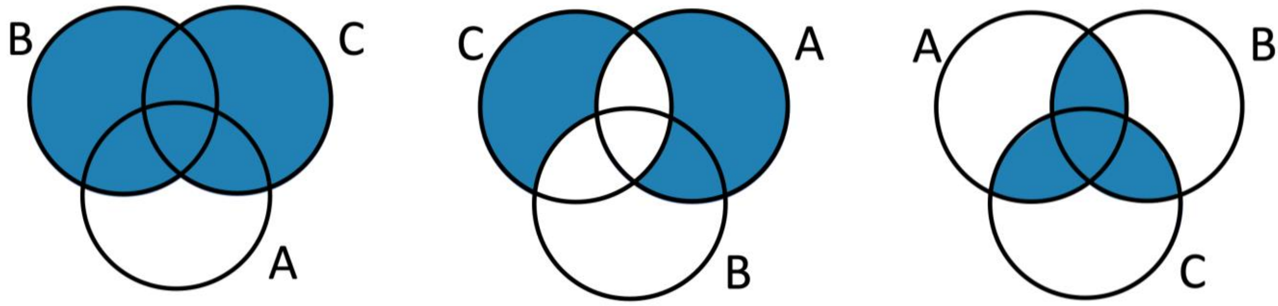
d) $D \setminus A$

e) $(C \cap A) \setminus B$

f) $(B \setminus D) \cap$

77. Aufgabe

Gib einen passenden mengentheoretischen Ausdruck an, der die folgenden Venn-Diagramme beschreibt.



78. Aufgabe

Gegeben sei die Menge

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \middle| \frac{200}{x} < 5 \right\}$$

Dieselbe Menge lässt sich unter Verwendung von Intervallen wesentlich kürzer notieren. Gib eine solche Darstellung an.

79. Aufgabe

Forme die Menge A in die beschreibende Mengendarstellung um.

$$A = [0,4) \setminus (1,2]$$

3.9. Checkliste

- ☐ Ich kann Mengen in verschiedenen Varianten darstellen und umformen
- ☐ Ich kann anhand eines mengentheoretischen Ausdrucks ein Venn-Diagramm skizzieren und mit Hilfe eines solchen Diagramms einen mengentheoretischen Ausdruck ermitteln
- ☐ Ich kann Vereinigung, Durchschnitt und die Differenz von mengentheoretischen Ausdrücken bestimmen
- ☐ Ich kann Textaufgaben mit Hilfe der Mengenlehre verarbeiten und Aufgaben dazu lösen.