4. Grundbegriffe der Graphentheorie 2

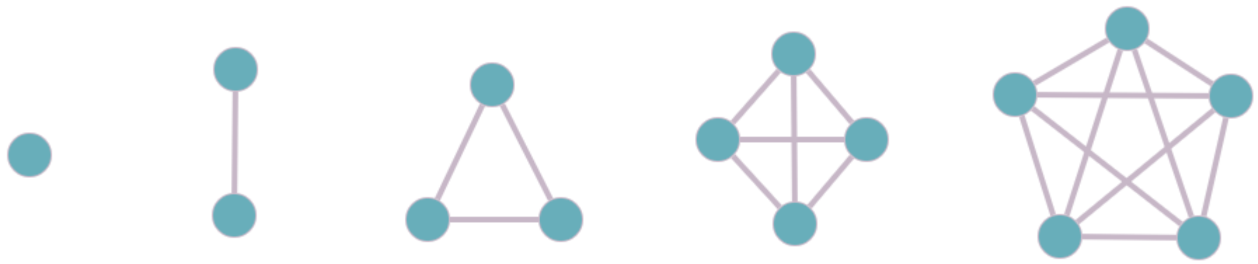
4.1. Vollständig

Vollständiger Graph

Ein ungerichteter Graph heißt vollständig, wenn jeder Knoten eine Kante zu jedem anderen Knoten besitzt. Für $n \in \mathbb{N}$ wir der vollständige Graph mit n Knoten als K_n bezeichnet.

Beispiele

Die Graphen K_1 bis K_5 (von links nach rechts):



62. Aufgabe

Aufgabe vollständige Graphen

Sei $n \in \mathbb{N}$. Beantworte die folgenden Fragen:

a) Wie sieht die Adjazenzmatrix von K_n aus?

b) Welchen Grad haben die Knoten von K_n?

c) Finde eine Formel, die für K_n die Anzahl der Kanten berechnet?

d) Gibt es einen schlichten Graphen mit n Knoten und mehr Kanten als K_n?

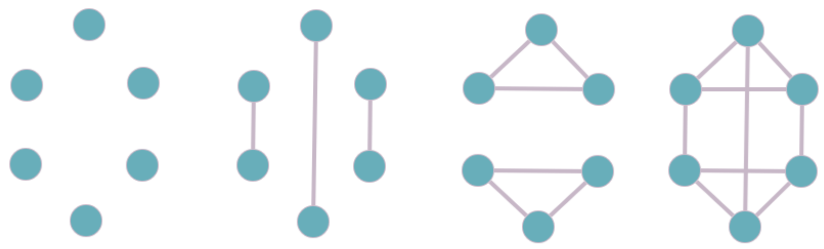
4.2. Regulär

Reguläre Graphen

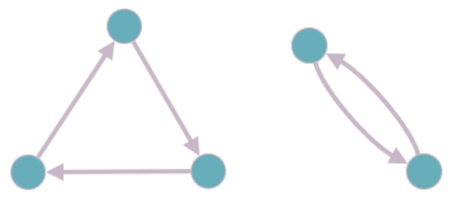
Ein Graph heißt **k-regulär** (kurz: **regulär**), wenn alle Knoten den Grad k besitzen. Für gerichtete Graphen muss außerdem gelten, dass alle Knoten den gleichen Eingangs- und Ausgangsgrad besitzen.

Beispiele

Ungerichtet, 0-regulär bis 3-regulär (von links nach rechts):



Gerichtete, 2-regulärer Graphen (beide schlicht):



63. Aufgabe

Aufgabe reguläre ungerichtete Graphen

a) Zeige für die Knotenzahlen $p = 3, p = 4$ und $p = 5$ jeweils ein Beispiel für einen schlichten, ungerichteten 2-regulären Graphen.

b) Zeige für die Knotenzahlen $p = 4$ ein Beispiel für einen schlichten, ungerichteten 3-regulären Graphen.

c) Zeige für die Knotenzahl $p = 5$ ein Beispiel für einen schlichten, ungerichteten 4-regulären Graphen.

d) Zeichne einen ungerichteten Graphen mit 6 Knoten, der 4-regulär ist.

64. Aufgabe

Aufgabe reguläre gerichtete Graphen

a) Finde für die 3 Graphen aus 63a) eine **Orientierung** (d.h. richte jede Kante in eine Richtung aus), sodass schlichte, 2-reguläre gerichtete Graphen entstehen.

b) Zeichne einen 4-regulären, gerichteten Graphen mit 2 Knoten (Mehrfachkanten erlaubt)

c) Zeichne einen schlichten, 4-regulären, gerichteten Graphen mit 3 Knoten.

d) Zeichne 2 unterschiedliche, 4-reguläre, gerichtete Graphen mit jeweils 4 Knoten. Die Graphen sollten schlicht und nicht isomorph zueinander sein.

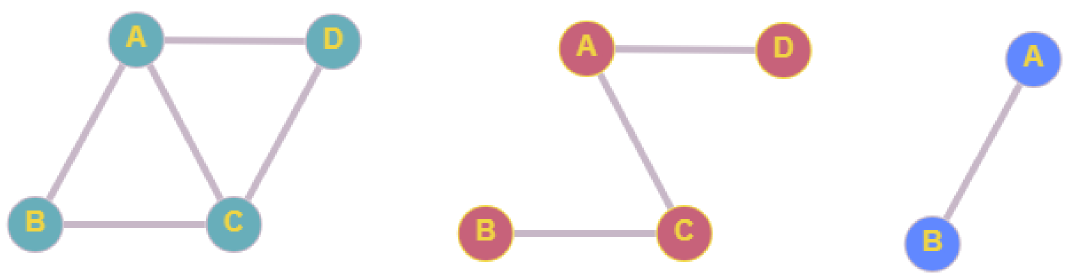
4.3. Teilgraph

Teilgraphen

Seien $G = (V_G, E_G)$ und $H = (V_H, E_H)$ Graphen. Dann heißt H **Teilgraph** oder **Untergraph** oder **Subgraph** von G, wenn die Knotenmenge V_H eine Teilmenge von V_G ist und die Kantenmenge E_H eine Teilmenge von E_G ist, also $V_H \subseteq V_G$ und $E_H \subseteq E_G$.

Beispiele

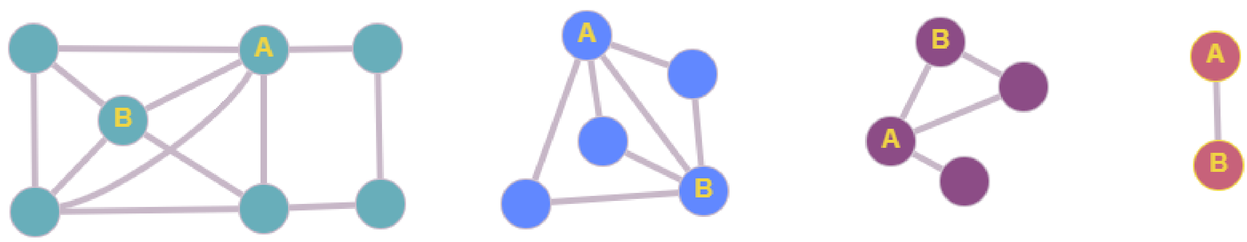
Der rote und blaue Graph sind Teilgraphen des grünen, doch der rote und blaue Graph sind keine Teilgraphen voneinander:



65. Aufgabe

Aufgabe Teilgraphen 1

Benenne die Knoten der Graphen, so dass man erkennt, dass der jeweils rechtsstehende Graph ein Teilgraph vom links stehenden Graphen ist.



66. Aufgabe

Aufgabe Teilgraphen 2

a) Untersuche die Adjazenzliste von Graphen und ihren Teilgraphen. Warum eignet sich die Adjazenzliste besonders, um Teilgraphen zu identifizieren?

b) Wie können Knotengrade dabei helfen zu sehen, dass ein Graph <u>kein</u> Teilgraph eines anderen ist?

4.4. Kantenzüge

Kantenzüge

Es sei $G = (V, E)$ ein Graph ohne Mehrfachkanten. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

Eine Folge von Knoten $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ mit $\{v_1, v_2\}, \dots, \{v_{n-1}, v_n\} \in E$ (bzw. $(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n) \in E$ für gerichtete Graphen) heißt **Kantenzug der Länge $n - 1$**.

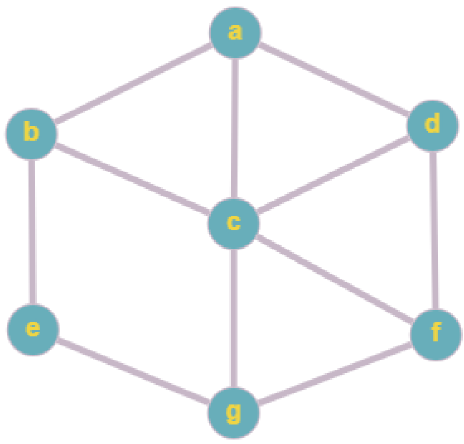
Ein Kantenzug, bei dem alle Kanten verschieden sind, heißt **Weg**.

Ein Weg, bei dem alle Knoten voneinander verschieden sind, heißt **Pfad.**

Gibt es einen Weg mit $v_1 = v_n$, dann heißt dieser **Zyklus**.

Gibt es einen Zyklus, bei dem alle Knoten verschieden sind, außer $v_1 = v_n$, dann ist dieser ein **Kreis**.

Beispiel



$k = (a, d, f, c, f)$ ist ein Kantenzug der Länge 4

$w = (c, b, e, g, c, d)$ ist ein Weg

$p = (a, b, e, g)$ ist ein Pfad

$z = (a, d, c, f, g, c, a)$ ist ein Zyklus

$c = (a, d, f, c, b, a)$ ist ein Kreis

67. Aufgabe

Aufgabe Kantenzüge

Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und $E = \{\{a, b\}, \{b, c\}, \{c, f\}, \{c, g\}, \{e, f\}, \{b, e\}, \{a, e\}, \{a, d\}, \{d, e\}\}$ und ein Graph H gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeichne die dazugehörigen Graphen und gebe jeweils einen Kantenzug, Zyklus, Weg, Pfad und Kreis an. Was ist ein längster möglicher Weg?

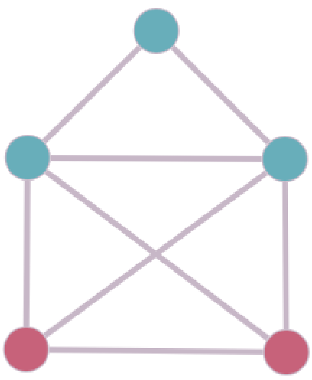
4.5. Eulerweg und Eulertour

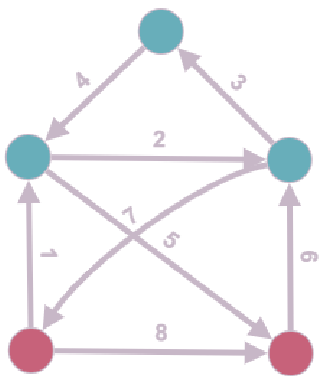
[Eulerweg und Eulertour]

Ein **Eulerweg** ist eine Kantenfolge in einem ungerichteten Graphen, die jede Kante des Graphen genau einmal enthält. Ein ungerichteter Graph enthält nur dann einen Eulerweg, wenn zwei oder kein Knoten einen ungeraden Grad haben. Start- und Endknoten des Eulerwegs sind dann die beiden Knoten mit ungeradem Grad.

Ein Eulerweg, dessen Start- und Endknoten gleich sind, heißt **Eulertour** und kann nur bei Graphen auftauchen, die nur gerade Knotengrade haben.

Beispiel für Eulerweg



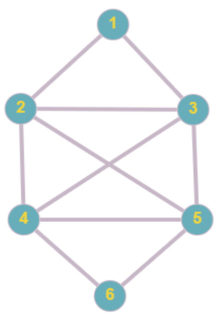


Der Eulerweg muss an einem der roten Knoten mit Grad 3 starten und enden. Eine Eulertour gibt es hier nicht.

68. Aufgabe

[Aufgabe Eulertour 1]

Finde, wenn möglich, eine Eulertour oder einen Eulerweg für die folgenden Graphen. Gebe die Wege als Tupel an. Versuche bei den Matrizen zunächst die Eulerwege/-touren direkt abzulesen, bevor du die Graphen aufzeichnest.



a)

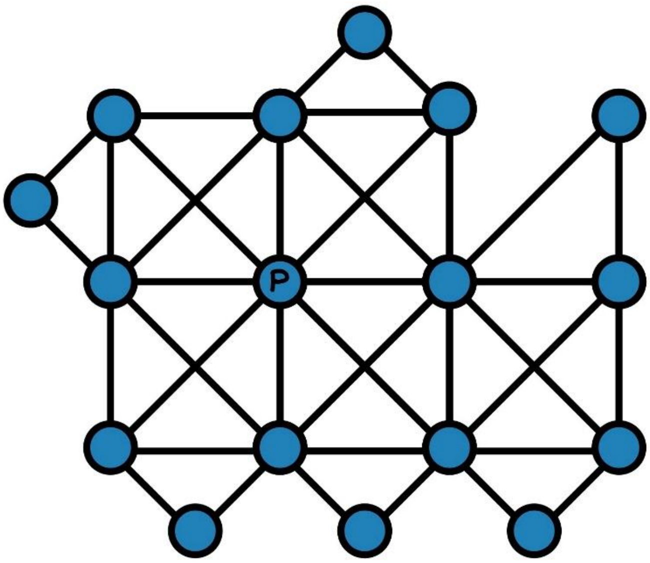
b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

69. Aufgabe

Aufgabe Eulertour 2

Ein Postbote soll eine Route finden, bei der er nach Möglichkeit keine Straße doppelt durchläuft. Er startet und beendet die Arbeit bei der Post (P). Knoten sind in diesem Fall Kreuzungen und Kanten sind Straßen. Überprüfe beim folgenden Graph, ob eine solche Route existiert und gib ggf. eine Route an. Gibt es einen besseren Ort für die Post?



70. Aufgabe

Aufgabe Eulertour 3

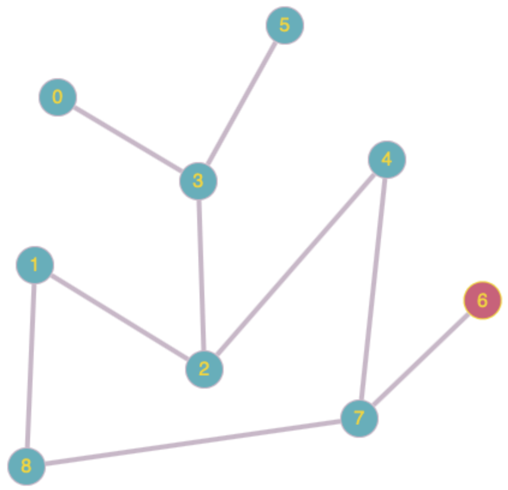
Gibt es einen Graphen mit nur geraden Knotengraden und ohne Eulertour oder -weg?

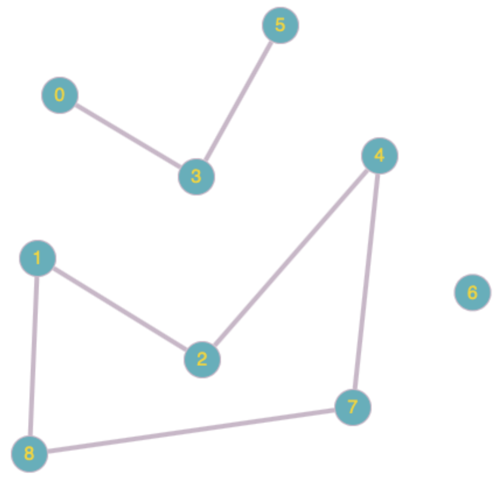
4.6. Zusammenhängend

Zusammen-
hängend

Sei G ein ungerichteter Graph. Wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu allen anderen Knoten gibt, so nennen wir den Graphen **zusammenhängend**. Andernfalls heißt er unzusammenhängend. Einen maximalen (also möglichst großen) zusammenhängenden Teilgraphen eines Graphen nennt man eine **Zusammenhangskomponente**.

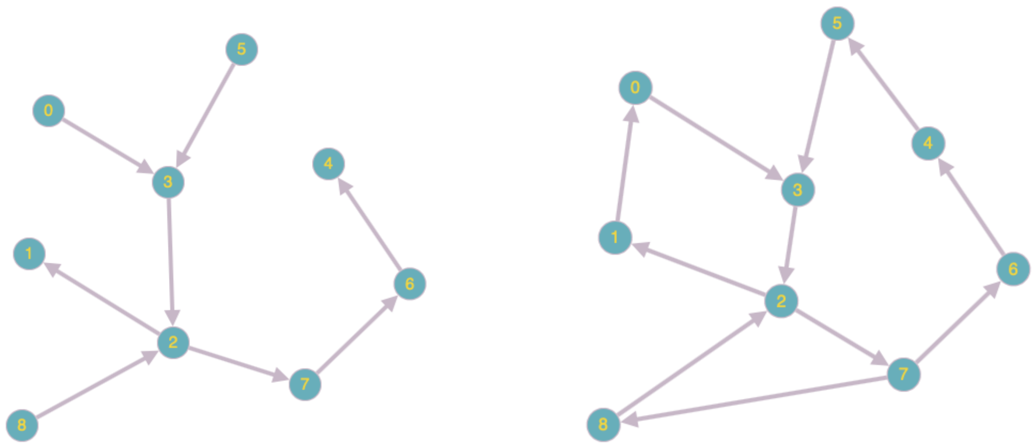
Beispiel: Zusammenhängend (links), unzusammenhängend (rechts) mit drei Zusammenhangskomponenten





Bei gerichteten Graphen unterscheidet man zwischen stark und schwach zusammenhängenden Graphen. Ein gerichteter Graph ist **stark zusammenhängend,** wenn es von jedem Knoten einen Pfad zu allen anderen Knoten gibt. Er heißt **schwach zusammenhängend**, falls der zugehörige ungerichtete Graph (also der Graph, der entsteht, wenn man jede gerichtete Kante durch eine ungerichtete Kante ersetzt) zusammenhängend ist.

Beispiel: schwach zusammenhängend (links), stark zusammenhängend (rechts)



71. Aufgabe

Aufgabe Zusammen-hängend

Sind die folgenden Graphen (bei gerichteten: stark oder schwach) zusammenhängend? Welche einzelnen Kanten kannst du entfernen, sodass sie zusammenhängend bleiben?

a) $G = \left(\{1,2,3,4,5,6\},\ \{\{1,2\},\{3,2\},\{3,5\},\{4,2\},\{3,6\},\{6,5\}\}\right)$

b) $G = (\{1,2,3,4,5,6\},\ \{(1,2),(2,3),(2,4),(3,5),(3,1),(4,2),(5,6),(6,3),(6,1)\})$

c) $G =$ "Das (ungerichtete) Haus vom Nikolaus"

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

72. Aufgabe

Überlege dir einen Algorithmus, der feststellen kann, ob ein Graph zusammenhängend ist.

(Recherchestichwort: Breitensuche oder Tiefensuche)

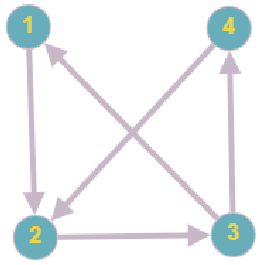
4.7. Erreichbarkeit

In der folgenden Aufgabe wird erarbeitet, wie mit der Adjazenzmatrix eines Graphen festgestellt werden kann, wie viele Kantenzüge einer vorgegebenen Länge es zwischen zwei Knoten des Graphen gibt.

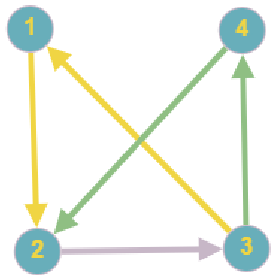
73. Aufgabe

Erreichbar-
keit

a) Notiere für den folgenden Graphen G die Adjazenzmatrix A.



b) Notiere dir für je zwei Knoten i und j in einer Matrix B^n, wie viele Kantenzüge der Länge n es von i nach j gibt (z.B. Es gibt zwei Kantenzüge von 3 nach 2 der Länge 2, nämlich (3,4,2) und (3,1,2), also $B_{3,2}^2 = 2$). Tue dies für $n = 1,2,3$.



c) Berechne die Potenzen der Adjazenzmatrix: $A^2 = A \cdot A$ und $A^3 = A \cdot A \cdot A$.

d) Vergleiche A mit B^1, A^2 mit B^2 und A^3 mit B^3. Was fällt dir auf? Was beschreibt A^n also allgemein?

e) Formuliere eine Erklärung, warum $A \cdot A$ eine Matrix liefert, die genau beschreibt, wie viele Kantenzüge der Länge 2 es von einem Knoten zu einem anderen gibt.

f) Implementiere einen Algorithmus, der für zwei Knoten und eine Länge n zurückgibt, wie viele Kantenzüge der Länge n vom ersten Knoten zum zweiten existieren.

4.8. Übungsaufgaben

74. Aufgabe

Wie sieht die Adjazenzmatrix von regulären Graphen aus?

75. Aufgabe

Gegeben sei der vollständige Graph K_4

Bestimme wie viele unterschiedliche Wege der Länge 3 es in dem Graphen gibt.

Bestimme wie viele unterschiedliche Kreise es in dem Graphen gibt.

Hinweis: Wege, die lediglich Permutationen von anderen Wegen sind, brauchen nicht gesondert berücksichtigt werden. Dasselbe gilt für Kreise.

76. Aufgabe

Versuche einen 3-regulären gerichteten Graph anzufertigen. Warum funktioniert dies nicht? Was lässt sich über das Verhältnis von Eingangsgrad zu Ausgangsgrad sagen in einem gerichteten regulären Graphen?

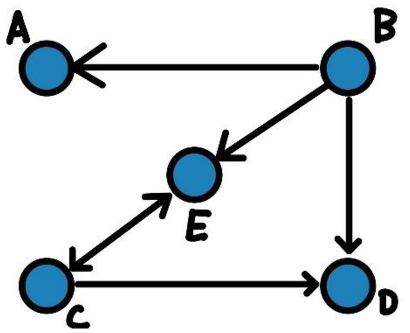
77. Aufgabe

Wie viele schlichte, ungerichtete Graphen mit zwei, drei oder vier Knoten gibt es (zähle isomorphe Graphen nicht auf). Wie viele davon sind zusammenhängend?

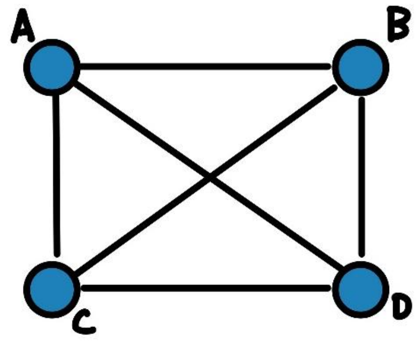
78. Aufgabe

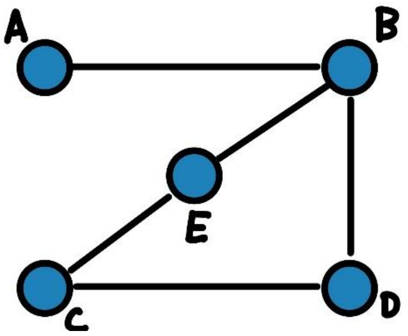
Gegeben seien die folgenden Graphen. Beschreibe jeden Graphen Formal mit $G = (V, E)$ und finde heraus um welchen Graphen-Typ es sich handelt. (Gerichtet? Zusammenhängend? Gewichtet? Existiert Eulerweg/tour? Regulär? Vollständig?)

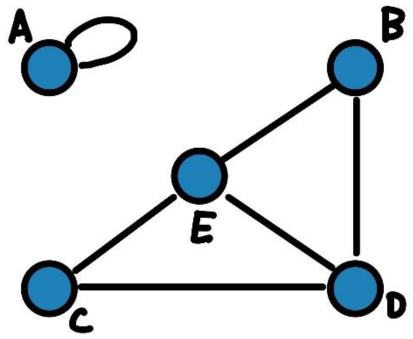
a)



b)



c) 

d) 

79. Aufgabe

Vervollständige die Sätze:

Jeder zusammenhängende ungerichtete Graph mit n Knoten enthält mindestens ___________ Kanten.

Jeder stark zusammenhängende gerichtete Graph mit n Knoten enthält mindestens ________ Kanten.

Jeder schwach zusammenhängende gerichtete Graph mit n Knoten enthält mindestens ________ Kanten.

Jeder zusammenhängende ungerichtete schlichter Graph mit n Knoten enthält maximal _______ Kanten.

80. Aufgabe

Wie viele schlichte Graphen mit zwei Knoten gibt es? Wie viele davon sind zusammenhängend?

81. Aufgabe

Wie viele schlichte Graphen mit drei Knoten gibt es? Wie viele davon sind zusammenhängend?

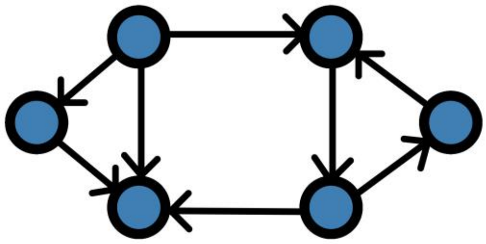
82. Aufgabe

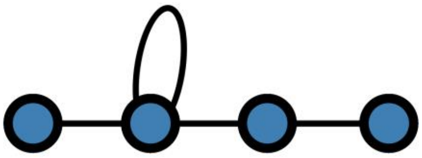
Wie viele schlichte Graphen mit vier Knoten gibt es? Wie viele davon sind zusammenhängend?

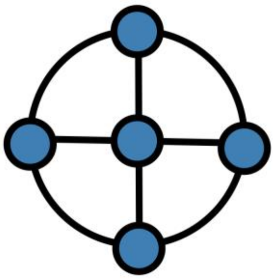
83. Aufgabe

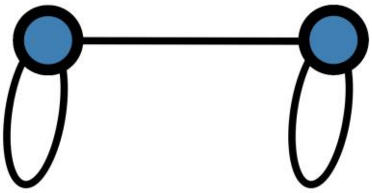
Bestimme für jeden der folgenden Graphen den Knotengrad jedes der Knoten. Untersuche weiterhin: Gerichtet? Zusammenhängend? Gewichtet? Existiert Eulerweg/tour? Regulär? Vollständig?

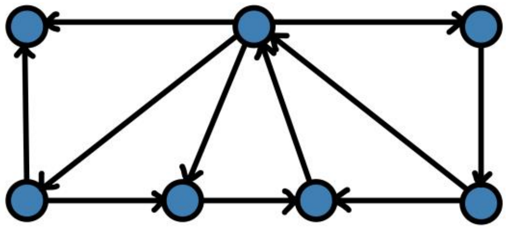
a) 

d) 

b) 

e) 

c) 

f) 

84. Aufgabe

Bestimme alle paarweise nicht-isomorphen ungerichteten Graphen mit p Knoten und q Kanten und $p + q \leq 6$.

85. Aufgabe

Gib ein Beispiel für einen Graphen, der regulär, aber nicht vollständig ist. Kann ein Graph vollständig jedoch nicht regulär sein?

86. Aufgabe

Fülle die Lücken im folgenden Text aus:

Der vollständige Graph K_n ist ein ____ regulärer Graph, da jeder Knoten ____ Nachbarn hat.

Des Weiteren folgt daraus, dass die vollständigen Graphen für ungerade n ____________ Eulertour besitzen und für gerade n _____________ Eulertour besitzen.

87. Aufgabe

Gegeben sei der vollständige Graph K_4

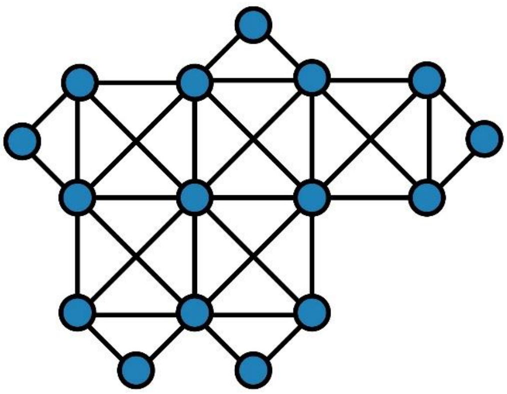
Bestimme wie viele unterschiedliche Wege der Länge 3 es in dem Graphen gibt

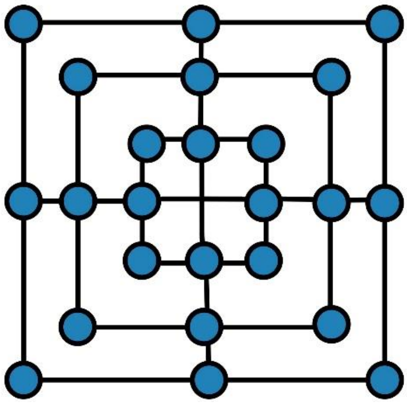
Bestimme wie viele unterschiedliche Kreise es in dem Graphen gibt

Hinweis: Wege, die lediglich Permutationen von anderen Wegen sind, brauchen nicht gesondert berücksichtigt werden. Dasselbe gilt für Kreise

88. Aufgabe

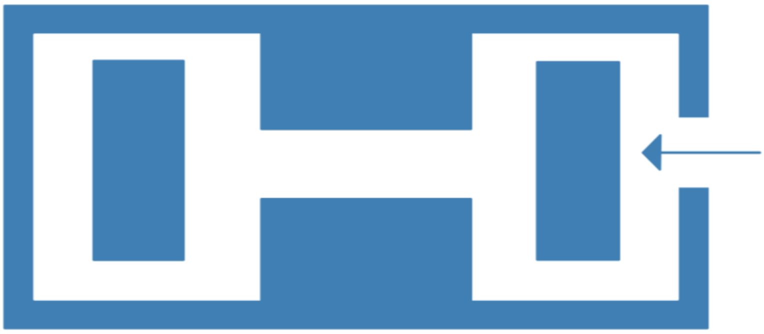
Begründe für folgende Graphen ob es einen Eulerweg oder eine Eulertour gibt. Falls es möglich ist, dann gib ein Beispiel dafür. Falls es nicht möglich ist, dann füge Kanten hinzu, so dass es möglich ist.





89. Aufgabe

In einer Kunstgalerie stehen die ausgestellten Kunstwerke an beiden Seiten der Gänge. Gibt es einen Rundgang bei dem man an allen Kunstwerken genau einmal vorbei kommt? Am Ende soll der Rundgang am Ausgang enden, der zugleich Eingang ist.



4.9. Checkliste

- ☐ Ich weiß, was ein vollständiger und regulärer Graph ist und kann diese erkennen.
- ☐ Ich weiß was Teilgraphen sind und kann diese identifizieren.
- ☐ Ich weiß was ein Kantenzug, Weg, Pfad, Zyklus, Kreis, Eulertour und Eulerweg ist und kann diese finden.
- ☐ Ich kann erkennen, ob ein Graph (stark/schwach) zusammenhängend ist und Zusammenhangskomponenten bestimmen.
- ☐ Ich kann mit Hilfe der Adjazenzmatrix bestimmen, wie viele Wege der Länge n es von einem Knoten zum anderen gibt.