Probabilités

TD2 - Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :

Un joueur tire au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes. Il gagne 20 euros si c'est un trèfle, et perd 10 euros sinon.

- Quelle loi modélise cette expérience aléatoire ? Décrivez sa loi dans un tableau.
- Quelle est son espérance de gain algébrique (les pertes sont considérées comme des gains négatifs) ?
- Comment modifier ces valeurs pour que le jeu devienne équitable ?

Exercice 2 :

A un jeu de hasard, un joueur a une chance sur trois de gagner une partie. Il joue cinq parties. Soit X le nombre de parties gagnées.

- Quelle loi suit X ? (précisez ses paramètres et justifiez votre réponse).
- Calculez (à 10^{-3} près) la probabilité pour qu'il gagne :
  - trois parties ;
  - cinq parties ;
  - au plus une partie ;
  - au moins deux parties.

Exercice 3 :

Pour accéder à un système, on utilise un code à 3 chiffres (1 bon code sur 1000 possibilités). Un utilisateur essaye les codes au hasard. Soit X le nombre d'essais nécessaires pour entrer dans le système.

- Quelle est la loi usuelle qui modélise cette situation ? Précisez ses paramètres.
- Combien de coup faut-il en moyenne pour accéder au système en essayant des codes au hasard ?
- Le système ne laisse que 3 essais. Quelle est sa probabilité d'accéder au système ?

Exercice 4 :

Lors du WEI (Week-End d'Intégration), un groupe de 30 étudiants motivés, dont 12 étudiants en informatique, veulent faire un tournoi de sandball. Ils doivent donc se répartir en équipes de 5 (3 joueurs de champ, 1 gardien et 1 rempla¸cant).

- Décrivez la loi qui modélise ce problème (justifiez votre réponse).
- Quel est le nombre moyen d'étudiants en informatique par équipe ?
- Quelle est la probabilité des évènements suivants :
  - L'équipe ne contient aucun étudiant en informatique ;
  - L'équipe contient au plus 1 étudiant en informatique ;
  - L'équipe ne contient que des étudiants en informatique.

Exercice 5 :

Durant les TP de R1.01, les étudiants de l'IUT informatique doivent compiler leur code afin de générer leur programme. Le nombre de compilations durant un TP peut varier d'un étudiant à l'autre. On peut cependant le modéliser par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 34$.

- Combien de compilations un étudiant fait en moyenne durant une séance de TP ?
- Quelle est la probabilité des évènements suivants :
  - L'étudiant n'a compilé qu'une seule fois durant le TP ;
  - L'étudiant a compilé moins de 4 fois durant le TP ;
  - L'étudiant a compilé exactement 100 fois durant le TP.

Exercice 6 :

Combien de pièces de monnaie doit-on jeter pour que la probabilité d'avoir au moins une fois pile dépasse 99%?
(Indication: considérer la variable aléatoire X_n= nombre de piles obtenus sur n lancers).

Exercice 7 : (Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson)

Une entreprise emploie 20 personnes. Une étude statistique permet d'admettre qu'un jour donné la probabilité qu'un employé donné soit absent est de 0.05. On admet que les absences des employés un jour donné sont des événements indépendants. On note X la variable aléatoire qui à chaque jour associe le nombre d'employés absents.

- Expliquez pourquoi X suit une loi binomiale et donnez les paramètres n et p de cette loi.
- Calculez la probabilité (à 10^{-4} près) des événements suivants :

- E_1 = {Un jour donné il y a exactement un absent} ;
- E_2 = {Un jour donné il y a strictement plus de deux absents} ;
- E_3 = {Un jour donné il y a exactement trois absents}.

- Calculez l'espérance mathématique $E[X]$. Que représente-t-elle ?
- On approche cette loi binomiale par une loi de Poisson Y de même espérance que la variable X. Déterminez les probabilités des évènements E_1, E_2 et E_3 avec cette nouvelle loi, et comparer avec les résultats obtenus à la question 2-.

Exercice 8 :

Deux frères s'associent pour fonder une P.M.E.. Au bout d'une année, celle-ci emploie 10 personnes: les 2 patrons, 3 employés et 5 ouvriers. Un journaliste s'intéressant à cette P.M.E. décide d'en interviewer trois personnes au hasard. Soit X le nombre de patrons et Y le nombre d'ouvriers parmi ces 3 personnes interrogées.

- Déterminer les lois de X et de Y, calculer leurs espérances et écarts-types.
- Déterminer (directement) la loi du couple (X, Y), et retrouver les lois de X et Y.
- Calculer la covariance de (X, Y). Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 9 :

On suppose que le nombre de personnes se présentant à une station-service pendant une période de 15 minutes est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par:

x_i	0	1	2	3	4
$p(X = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

De plus, la probabilité pour qu'une personne se présentant à la station prenne du gazole est de 0,4. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de personnes ayant demandé du gazole pendant une période de 15 minutes.

- Pour chaque valeur x_i de X, préciser les valeurs que peut prendre Y et donner la loi de probabilité conditionnelle de Y sachant que $X = x_i$.
- Déduisez-en la loi du couple (X, Y) et la loi de Y. Les deux variables sont-elles indépendantes ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes qui se présentent à la station et qu'aucune ne prenne du gazole ?
- Quelle est la probabilité qu'il y ait une personne demandant du gazole sachant qu'au moins deux se sont présentées ?