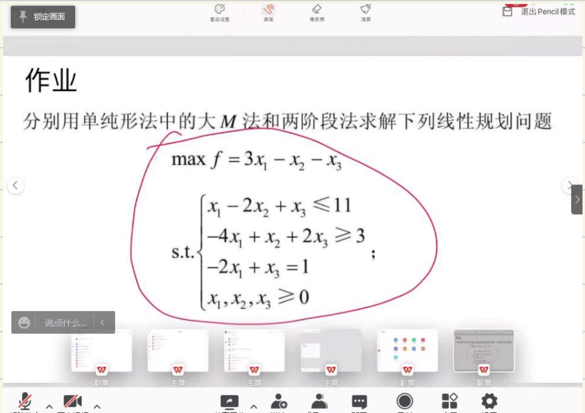
△ 2022-3-13 作业



解：将其化为标准型：

$$\min -f = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3 \\ -2x_1 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geqslant 0 \end{cases}$$

☆使用大M法，引入人工变量 x_6, x_7，得：

$$\min -f = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5 + M\cdot x_6 + M\cdot x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3,4,5,6,7 \end{cases}$$

列出单纯形表如下:

		c_j	-3	1	1	0	0	M	M	
C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
M	x_6	3	-4	1	$[2]$	0	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
M	x_7	9	-2	0	1	0	0	0	1	9
	σ_j		$-6M+3$	$M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	0	
0	x_4	$\frac{19}{2}$	3	$-\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	19
1	x_3	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	—
M	x_7	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$[\frac{1}{2}]$	$-\frac{1}{2}$	1	15
	σ_j		1	$-\frac{1}{2}M-\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}M-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}M+\frac{1}{2}$	0	
0	x_4	2	$[3]$	-2	0	1	0	0	-1	$\frac{2}{3}$
1	x_3	9	-2	0	1	0	0	0	1	—
0	x_5	15	0	-1	0	0	1	-1	2	—
	σ_j		1	-1	0	0	0	$-M$	$1-M$	
-3	x_1	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	
1	x_3	$\frac{31}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	
0	x_5	15	0	-1	0	0	1	-1	2	
	σ_j		0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	$-M$	$-M+\frac{4}{3}$	

可见此时所有 $\sigma_j \le 0$，所以最优解为 $(x_1, x_2, x_3)^T = (\frac{2}{3}, 0, \frac{31}{3})$

此时目标函数值为 $f_{max} = -\frac{25}{3}$

若使用两阶段法.

第一阶段，作辅助线性规划问题.

$$\min\ w = x_6 + x_7$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 9 \\ x_i \geq 0,\quad i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. \end{cases}$$

建立单纯形表:

C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	θ
	C_j		0	0	0	0	0	1	1	
0	x_4	11	1	-2	1	1	0	0	0	11
1	x_6	3	-4	1	[2]	0	-1	1	0	$\frac{3}{2}$
1	x_7	9	-2	0	1	0	0	0	1	9
	σ_j		-6	1	3	0	-1	0	0	
0	x_4	$\frac{19}{2}$	3	$-\frac{5}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	19
0	x_3	$\frac{3}{2}$	-2	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	—
1	x_7	$\frac{15}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	[$\frac{1}{2}$]	$-\frac{1}{2}$	1	15
	σ_j		0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	0	
0	x_4	2	3	-2	0	1	0	0	-1	
0	x_3	9	-2	0	1	0	0	0	1	
0	x_5	15	0	-1	0	0	1	-1	2	
	σ_j		0	0	0	0	0	-1	-1	

至此，已得辅助线性规划问题最优解，且最优值为0.

第二阶段，目标函数改为 $\min f = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5$

C_B	基	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	θ
	c_j		-3	1	1	0	0	
0	x_4	2	$[3]$	-2	0	1	0	$\frac{2}{3}$
1	x_3	9	-2	0	1	0	0	—
0	x_5	15	0	1	0	0	1	—
	σ_j		1	-1	0	0	0	
-3	x_1	$\frac{2}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	
1	x_3	$\frac{31}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	
0	x_5	15	0	1	0	0	1	
	σ_j		0	$-\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	

可见所有 $\sigma_j \le 0$，故最优解为 $(x_1, x_2, x_3)^T = (\frac{2}{3}, 0, \frac{31}{3})$

最优值为 $-\frac{25}{3}$