DM500 Eksamensopgaver

Kevin Vinther
kevin20

Kasper Halkjær Beider
kbeid20

Necati Öztek
neuzt20

15. november 2020

1 Reeksamen januar 2012 opgave 1

Opgave 1

a) Er f en bijektion?

Nej, da f ikke er injektiv dvs. der findes flere end en x-værdi der rammer den samme y-værdi. Den er heller ikke surjektiv, da der for hvert y i funktionens sekundærmængde ikke findes et x-værdi i definitionsmængden.

b) Har f en invers funktion?

Nej, da den ikke er bijektiv og derfor ikke invertibel.

c) Angiv $f + g$

$$(f+g)(x) = x^2 + x + 1 + 2x - 2 = x^2 + 3x - 1$$

d) Angiv $g \circ f$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + x + 1) = 2(x^2 + x + 1) - 2 = 2x^2 + 2x$$

2 Reeksamen februar 2015 opgave 1

I det følgende lader vi $U = 1, 2, 3, ..., 15$ være universet (universal set).
Betragt de to mængder

$$A = \{2n | n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 | n \in S\}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder

a) A

b) B

c) $A \cap B$

d) $A \cup B$

e) $A - B$

f) $\overline{A}$

A)

$$A = \{2, 4, 6, 8\}$$

Da $2 \cdot 1 = 2, 2 \cdot 2 = 4, 2 \cdot 3 = 6, 2 \cdot 4 = 8$

B)

$$B = \{5, 8, 11, 14\}$$

Da $3 \cdot 1 + 2 = 5, 3 \cdot 2 + 2 = 8, 3 \cdot 3 + 2 = 11, 3 \cdot 4 = 14$

C)

$$A \cap B = \{2, 4, 6, 8\} \cap \{5, 8, 11, 13\} = \{8\}$$

Da 8 er det eneste element der er gennemgående i begge mængder

D)

$$A \cup B = \{2, 4, 6, 8\} \cup \{5, 8, 11, 13\} = \{2, 4, 6, 8, 5, 11, 13\}$$

Da $A \cup B$ giver alle elementer i begge mængder.

E)

$$\{2, 4, 6, 8\} - \{5, 8, 11, 13\} = \{2, 4, 6\}$$

Da 8 er det eneste element der går igen i den anden mængde, er det det eneste element der bliver fjernet.

3 Reeksamen februar 2015 opgave 2

Opgave 2:
a) Hvilke af følgende udsagn er sande?
1.

$$\forall x \epsilon \mathbb{N} : \exists y \epsilon \mathbb{N} : x < y$$

2.

$$\forall x \epsilon \mathbb{N} : \exists! y \epsilon \mathbb{N} : x < y$$

3.

$$\exists y \epsilon \mathbb{N} : \forall x \epsilon \mathbb{N} : x < y$$

Første udsagn er sandt. Det kan man konkludere ved at man altid kan sige $y = x + 1$. Hvilket vil sige at der altid eksiterer en y-værdi der er større end enhver x-værdi.

Andet udsagn er falskt, da der ikke eksisterer kun et enkelt y-værdi, som er større end enhver x-værdi.

Tredje udsagn er også falskt. Det kommer af at man ikke kan vælge en y-værdi, hvorom det altid vil gælde at ethvert x-værdi vil være mindre end y-værdien.

b) Negering af udsagn 1. fra spørgsmål a). Negerings tegnet må ikke indgå i udsagnet.

$$\forall x \epsilon \mathbb{N} : \exists y \epsilon \mathbb{N} : x < y$$
$$\neg(\forall x \epsilon \mathbb{N} : \exists y \epsilon \mathbb{N} : x < y)$$

$$\exists x \epsilon \mathbb{N} : \neg \exists y \epsilon \mathbb{N} : x < y$$
$$\exists x \epsilon \mathbb{N} : \forall y \epsilon \mathbb{N} : \neg (x < y)$$
$$\exists x \epsilon \mathbb{N} : \forall y \epsilon \mathbb{N} : x \geq y$$

4 Reeksamen februar 2015 opgave 3

R, S og T er binære relationer på mængden A = $\{1, 2, 3, 4\}$

Opgave 3:

a) Lad R = $\{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$

Er R en partiel ordning?

Definitionen på en partiel ordning er at relationen skal være refleksiv, antisymmetrisk og transitiv.

Refleksiv: R er refleksiv, da relationen indeholder parrene: $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Antisymmetrisk: R er antisymmetrisk, da relationen ikke indeholder nogle par (b,a) når den indeholder (a,b):

R indeholder parrene = $\{(2, 1), (2, 4), (3, 1), (3, 4), (4, 1)\}$, men relationen indeholder ikke parrene = $\{(1, 2), (4, 2), (1, 3), (4, 3), (1, 4)\}$. Dermed er relationen antisymmetrisk.

Transitiv: R er transitiv, da der for hvert par (a,b) og (b,c) også er et par (a,c).

Eftersom at relationen R opfylder alle tre krav, refleksiv, antisymmetrisk og transitiv, er relationen en partiel ordning.

b) Lad S = $\{(1, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2)\}$

Angiv den transitive lukning af S.

$$t(S) = S \cup \{(1, 3), (1, 4), (2, 2), (4, 3), (4, 4)\}$$

c) Lad T = $\{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 2), (4, 4)\}$

Angiv T´s ækvivalens-klasser.

T´s ækvivlaens-klasser på mængeden A findes ved:

$$[a] = \{x \epsilon A \mid xTa\}$$

$$[1] = \{1, 3\}$$
$$[2] = \{2, 4\}$$
$$[3] = \{1, 3\} = [1]$$

$$[4] = \{2, 4\} = [2]$$

Matricerne for R, S og T:
Matrice for R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrice for S:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice for T:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$