Discrete Probability, Random Variables, and Bounds

Spørgsmål 3 fra Exam Questions

Kevin Vinther

December 8, 2023

An Introduction to Discrete Probability

Finite Probability i

- **Experiment**: En procedure som giver et resultat ud af et givet sæt a mulige resultater.
- **Sample Space**: Sættet af alle mulige resultater.
- **Event**: Subset af sample space.

Definition 1

Definition

If S is a finite nonempty sample space of equally likely outcomes, and E is an event, that is, a subset of S, then the *probability* of E is $p(E) = \frac{|E|}{|S|}$.

- *Implikationer:*
- Givet, at E er en event, og S sample space:
- $0 \leq |E| \leq |S|$, fordi $E \subseteq S$. Dermed $0 \leq p(E) = |E|/|S| \leq 1$.

Example 1

- En boks indeholder fire blå bolde og fem røde. Hvad er sandsynligheden at en bold der er valgt tilfældigt er blå?

Example 1

- En boks indeholder fire blå bolde og fem røde. Hvad er sandsynligheden at en bold der er valgt tilfældigt er blå?
- $\frac{4}{9}$

Example 2

- Hvad er sandsynligheden for at, når 2 terninger bliver rullet, at summen af de to tal på terningen er 7?
- $6^2 = 36$ mulige udfald. (Af product rule).

Example 2

- Hvad er sandsynligheden for at, når 2 terninger bliver rullet, at summen af de to tal på terningen er 7?
- $6^2 = 36$ mulige udfald. (Af product rule).
- Der er 6 udfald der ender i 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), og (6,1)

Example 2

- Hvad er sandsynligheden for at, når 2 terninger bliver rullet, at summen af de to tal på terningen er 7?
- $6^2 = 36$ mulige udfald. (Af product rule).
- Der er 6 udfald der ender i 7: (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), og (6,1)
- Dermed: $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

Eksempel 5

- Hvad er sandsynligheden for at en hånd i poker har 4 kort af én slags (samme tal)? (Hint: Product rule)

Eksempel 5

- Hvad er sandsynligheden for at en hånd i poker har 4 kort af én slags (samme tal)? (Hint: Product rule)
- Antallet af hænder med 5 kort med fire af én slags er produktet af antallet måder man kan vælge én slags på, antallet af måder du kan vælge disse 4 af slagsen ud af de fire i dækket, og antallet af måder du kan vælge det femte kort. Det er:

Eksempel 5

- Hvad er sandsynligheden for at en hånd i poker har 4 kort af én slags (samme tal)? (Hint: Product rule)
- Antallet af hænder med 5 kort med fire af én slags er produktet af antallet måder man kan vælge én slags på, antallet af måder du kan vælge disse 4 af slagsen ud af de fire i dækket, og antallet af måder du kan vælge det femte kort. Det er:
- $\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1}$. Næste: Hvor mange forskellige hænder af 5 kort er der?

Eksempel 5

- Hvad er sandsynligheden for at en hånd i poker har 4 kort af én slags (samme tal)? (Hint: Product rule)
- Antallet af hænder med 5 kort med fire af én slags er produktet af antallet måder man kan vælge én slags på, antallet af måder du kan vælge disse 4 af slagsen ud af de fire i dækket, og antallet af måder du kan vælge det femte kort. Det er:
- $\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1}$. Næste: Hvor mange forskellige hænder af 5 kort er der?
- $\binom{52}{5}$. Næste: Find sandsynligheden

Eksempel 5

- Hvad er sandsynligheden for at en hånd i poker har 4 kort af én slags (samme tal)? (Hint: Product rule)
- Antallet af hænder med 5 kort med fire af én slags er produktet af antallet måder man kan vælge én slags på, antallet af måder du kan vælge disse 4 af slagsen ud af de fire i dækket, og antallet af måder du kan vælge det femte kort. Det er:
- $\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1}$. Næste: Hvor mange forskellige hænder af 5 kort er der?
- $\binom{52}{5}$. Næste: Find sandsynligheden
- $\frac{\binom{13}{1}\binom{4}{4}\binom{48}{1}}{\binom{52}{5}} = \frac{13 \cdot 1 \cdot 48}{2598960} \approx 0.00024$

Eksempel 7 i

- Hvad er sandsynligheden at tallene 11, 4, 17, 39 og 23 bliver taget i den orden fra en spand med 50 bolde med tallene 1..50, hvis (a) bolden der er valgt ikke bliver lagt tilbage i spanden før den næste bold blive valgt og (b) bolden bliver lagt tilbage før den næste bold bliver valgt?
- Lad os starte med spørgsmål (a) (hint: Hvor mange måder kan man vælge boldene på?):

Eksempel 7 i

- Hvad er sandsynligheden at tallene 11, 4, 17, 39 og 23 bliver taget i den orden fra en spand med 50 bolde med tallene 1..50, hvis (a) bolden der er valgt ikke bliver lagt tilbage i spanden før den næste bold blive valgt og (b) bolden bliver lagt tilbage før den næste bold bliver valgt?
- Lad os starte med spørgsmål (a) (hint: Hvor mange måder kan man vælge boldene på?):
- Man kan vælge 5 bolde på $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 254251200$ måder. Hvad er sandsynligheden så for at vælge præcis den orden der er beskrevet tidligere?

Eksempel 7 i

- Hvad er sandsynligheden at tallene 11, 4, 17, 39 og 23 bliver taget i den orden fra en spand med 50 bolde med tallene 1..50, hvis (a) bolden der er valgt ikke bliver lagt tilbage i spanden før den næste bold blive valgt og (b) bolden bliver lagt tilbage før den næste bold bliver valgt?
- Lad os starte med spørgsmål (a) (hint: Hvor mange måder kan man vælge boldene på?):
- Man kan vælge 5 bolde på $50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 = 254251200$ måder. Hvad er sandsynligheden så for at vælge præcis den orden der er beskrevet tidligere?
- $\frac{1}{254251200}$.
- Bogen kalder dette **sampling without replacement**.

Eksempel 7 ii

- Hvad med (b)? Hvor mange måder kan man vælge 5 bolde på så?

Eksempel 7 ii

- Hvad med (b)? Hvor mange måder kan man vælge 5 bolde på så?
- 50^5. Husk at antallet af permutationer med gentagelser er n^r, og her er $n = 50, r = 5$.

Eksempel 7 ii

- Hvad med (b)? Hvor mange måder kan man vælge 5 bolde på så?
- 50^5. Husk at antallet af permutationer med gentagelser er n^r, og her er $n = 50, r = 5$.
- Måden man finder sandsynligheden på har ikke ændret sig her.
- $\frac{1}{312500000}$
- Bogen kalder dette **sampling with replacement**.
- Hvad forskellen er mellem det og permutations with repetition er et godt spørgsmål.

Theorem 1

Tid til første theorem!

Theorem (Theorem 1)

Let E be an event in a sample space S. The probability of the event $\overline{E} = S - E$, the complementary event of E is given by

$$P(\overline{E}) = 1 - p(E)$$

Theorem 1 Bevis.

For at finde sandsynligheden af begivenheden $\overline{E} = S - E$, notér at $|\overline{E}| = |S| - |E|$. Dermed:

$$p(\overline{E}) = \frac{|S| - |E|}{|S|} = 1 - \frac{|E|}{|S|} = 1 - p(E)$$

$\square$

Eksempel 8

- En sekvens af 10 bits er tilfældigt genereret. Hvad er sandsynligheden for at mindst en af disse bits er 0?
- Hint: Brug complement.

Eksempel 8

- En sekvens af 10 bits er tilfældigt genereret. Hvad er sandsynligheden for at mindst en af disse bits er 0?
- Hint: Brug complement.
- Lad E være tilfældet at mindst en af de 10 bits er 0. Så er $\overline{E}$ sandsynligheden for at alle bitsne er 1.

Eksempel 8

- En sekvens af 10 bits er tilfældigt genereret. Hvad er sandsynligheden for at mindst en af disse bits er 0?
- Hint: Brug complement.
- Lad E være tilfældet at mindst en af de 10 bits er 0. Så er $\overline{E}$ sandsynligheden for at alle bitsne er 1.
- $P(E) = 1 - p(\overline{E}) = 1 - \frac{|\overline{E}|}{|S|} = 1 - \frac{1}{2^{10}} = 1 - \frac{1}{1024} = \frac{1023}{1024}$

Theorem 2

Theorem

Let E_1 and E_2 be events in the sample space S. Then

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + P(E_2) - p(E_1 \cap E_2).$$

Theorem 2 Bevis

Theorem 2 Bevis.

Vi bruger subtraction rule for sæt (inclusion-exclusion for 2 sæt):

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2| - |E_1 \cap E_2|$$

Dermed:

$$\begin{aligned}
p(E_1 \cup E_2) &= \frac{|E_1 \cup E_2|}{|S|} \\
&= \frac{|E_1| + |E_2 - |E_1 \cap E_2|}{|S|} \\
&= \frac{|E_1|}{|S|} + \frac{|E_2|}{|S|} - \frac{|E_1 \cap E_2|}{|S|} \\
&= p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)
\end{aligned}$$

$\square$

Eksempel 9

- Hvad er sandsynligheden for at et positivt heltal valgt tilfældligt fra et sæt af positive heltal der ikke overgår 100 er deleligt med 2 eller 5?
- Hint: Definér E_1 og E_2 som værende tal der er delelige med hhv. 2 og 5.

Eksempel 9

- Hvad er sandsynligheden for at et positivt heltal valgt tilfældligt fra et sæt af positive heltal der ikke overgår 100 er deleligt med 2 eller 5?
- Hint: Definér E_1 og E_2 som værende tal der er delelige med hhv. 2 og 5.
- $E_1 =$ tal der er delelige med 2, $E_2 =$ tal der er delelige med 5.

Eksempel 9

- Hvad er sandsynligheden for at et positivt heltal valgt tilfældligt fra et sæt af positive heltal der ikke overgår 100 er deleligt med 2 eller 5?
- Hint: Definér E_1 og E_2 som værende tal der er delelige med hhv. 2 og 5.
- $E_1 =$ tal der er delelige med 2, $E_2 =$ tal der er delelige med 5.
- $|E_1| = 50$, $|E_2| = 20$, $|E_1 \cup E_2| = 10$.
- Vi ved at $p(E_{12}) = p(E_1) + P(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$. Så:
  $= \frac{50}{100} + \frac{20}{100} - \frac{10}{100} = \frac{3}{5}$

Probabilistic Reasoning

- Probabilistic Reasoning er at bruge sandsynlighedsregning til at ræsonnere sig frem til resultater. Et eksempel på hvor man kan gøre dette, er Monty Hall Three-Door Puzzle, som vi kommer til nu!

Eksempel 10: The Monty Hall Three-Door Puzzle

- Antag at du er en spiller i et game show.
- Du bliver bedt om at vælge en af tre døre.
- Den store pris er bag en af de tre døre, og de to andre døre leder til tab.
- Når du vælger en dør, vil værten lade dig enten beholde døren, eller vælge en ny. Du får ikke lov til at se hvad der er i døren hvis du vælger en ny.
- Vælger du en ny?

Eksempel 10 Løsning

- Ja du gør!
- Sandsynligheden for at du har valgt den rigtige dør først er $\frac{1}{3}$
- Sandsynligheden for at du har valg **forkert** er $\frac{2}{3}$.
- Hvis du valgte forkert, åbner game show værten en dør hvor der ingen præmie er bag.
- Dermed, kommer du **altid** til at vinde, hvis dit første valg var forkert, og du så vælger at skifte døre.
- Så, ved at skifte døre er chancen for at vinde $\frac{2}{3}$