# Misc

Ting vi ikke gik igennem, eller ikke er en del af spørgsmålene

Kevin Vinther

December 27, 2023

# Misc 1

- Det her er bare et simpelt kombinatorisk bevis af Jørgen.

**Theorem**

*If $S$ is a finite set with at least one element, then the number of even subsets of $S$ is the same as the number of odd subsets of $S$.*

- Der kommer to beviser.
- Først, læg mærke til at dette ikke gælder når $S = \emptyset$.
- Lad $E_S$ være antallet af lige subsets og $O_S$ antallet af ulige subsets af S.
- Sidst, lad $n = |S|$ (i.e., kardinaliteten af $S$.)
- **Første bevis:**

## Notes on Combinatorial Proofs ii

- Der er præcis $\binom{n}{k}$ måder at vælge et sæt med $k$ elementer fra $S$.
- Husk binomial theorem: $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.
- Hvis vi siger at $x = 1$ og $y = -1$ får vi $0 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k$.
- Vi kan dermed se at hvert lige subset bliver 1, og hvert ulige bliver -1.
- **Andet bevis:**
- Teoremet holder klart når $n = 1$, så tænk på et sæt $S$ med $n > 1$ elementer.
- Vi "fikser" et element $s \in S$ og lader $S' = S \setminus \{s\}$.
- Lad $e_s, o_s$ være antallet af lige og ulige subsets af $S$ som indeholder $s$ (dvs. det tal vi "fiksede" før.)

- Hvert lige (ulige) subset af $S$ som har $s$ i sig, har $s$ plus et ulige (lige) subset af $S'$.
- Dermed har vi $e_s = O_{S'}$ og $o_s = E_{S'}$.
- Til sidst, observér at, gennem sum-reglen, antallet af lige (ulige) subsets fa $S$ er lig med antallet af lige (ulige) subsets der indeholder $s$ plus antallet af lige (ulige) subsets af $S$ der ikke indeholder $s$.
- Dermed:

$$E_S = e_s + E_{S'} = O_{S'} + E_{S'} = O_{S'} + o_s = O_S$$

## Andet teorem i

- Vi giver nu endnu et eksempel af hvordan kombinatoriske argumenter kan bruges.
- For givne heltal $k, n$ lader vi $S_{n,k} = \{(n_1, n_2, \ldots, n_k) | n_i \geq 0 \text{ og } n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n\}$
- Læg mærke til at $S_{n,k}$ er sættet af alle ordnet (ordered) $k$-tupler, med et ikke-negativt tal for hvilke summen af elementerne i tuplen er $n$.
- Fra Rosen 6.5.3 ved vi at der er $\binom{n+(k-1)}{n}$ af disse.

# Andet teorem ii

**Theorem**

$$\sum_{(n_1,n_2,\ldots,n_k)\in S_{n,k}} \frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_k!} = k^n$$

- **Bevis:**
- Vi påstår at begge sider af lighedstegnet tæller antallet af måder at distribuere $n$ distinkte bolde i $k$ distinkte bokse.
- Det er nemt at se på højresiden: vi har $k$ valg for hver af de $n$ bolde, så $k^n$ i alt.
- For venstresiden tæller vi det samme. Af Rosen Theorem 4 side 452 ved vi at for fiksede $n_1, n_2, \ldots, n_k$ således at $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$ er der $\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot\cdots\cdot n_k!}$ måder at distribuere dem.

- Håber I er klar gutter!

**Definition**

A *combinatorial proof* of an identity is a proof that uses counting arguments to prove that both sides of the identity count the same objects but in different ways or a proof that is based on showing that there is a bijectino between the sets of objects counted by the two sides of the identity. These two types of proofs are called *double counting proofs* and *bijective proofs* respectively.

- Så, med **dobbelttælningsbeviser** er målet af vise at begge sider af en identitet i essensen tæller det samme sæt af objekter (se f.eks. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).

# Kombinatoriske Beviser ii

- Et **bijektivt bevis** arbejder ved at etablere en en-til-en korrespondance mellem de to sæt, som tælles. Det skal bekræftes at hvert element i et sæt svarer **præcist** til et objekt i et andet sæt. Hvis dette gælder, tæller de det samme, og er dermed lig hinanden.
- Lad os, for eksempel, kigger på beviserne for $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.
- Antag at $S$ er et sæt med $n$ elementer.
- Funktionen som "mapper" et subset $A$ af $S$ til $\overline{A}$ er en bijketion mellem subsetsne af $S$ med $r$ elementer, og subsetsne med $n - r$ elementer.
- Du kan tænke på det på den her måde: For hvert sæt der bliver talt i $A$ bliver der udeladt et antal af elementer, $|\overline{A}|$.

- Disse elementer bliver undlandt lige så mange gange, som du tæller de originale tal.
- **Dobbelttælningsbevis**:[1] Af deginitionen er antallet af subsets af $S$ med $r$ elementer $\binom{n}{r}$. Men hvert subset $A$ af $S$ bliver også valgt ved at specificere hvilke elementer der **ikke** er en del af $A$ og dermed er i $\overline{A}$.

# Kombinatoriske Beviser iv

**Theorem (1. The Binomial Theorem)**

*Let $x$ and $y$ be variables, and let $n$ be a nonnegative integer. Then*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n}$$

- Vi beviser kombinatorisk.
- Leddene i produktet, når de bliver udvidet, er af formen $x^{n-j}y^j$ for $j = 0, 1, 2, \ldots, n$.

## Kombinatoriske Beviser v

- For at tælle antallet af led af formen $x^{n-j}y^j$, notér at for at få sådan et led skal man vælge $n-j$ $x'$er fra de $n$ binnomiale faktorer (således at de andre $j$ led i produktet er $y$'er).
- Dermed er koefficienten af $x^{n-j}y^j = \binom{n}{n-j}$, hvilket er lig med $\binom{n}{j}$. Dette beviser teoremet.

**Theorem (2. Pascal's Identity)**

*Let $n$ and $k$ be positive integers with $n \geq k$. Then*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

.

- Igen beviser vi kombinatorisk (haha, man skulle næsten tro at det var målet med den her fremlæggelse.)
- Antag at $T$ er et sæt tilhørende $n+1$ elementer.
- Lad $a$ være et element i $T$ og lad $S = T - \{a\}$.
- Læg mærke til at der er $\binom{n+1}{k}$ subsets af $T$ med $k$ elementer.
- (igen, $n+1$ fordi $T$ er defineret, ikke til at have $n$ elementer, men $n+1$)
- Et subset af $T$ med $k$ elementer indeholder enten $a$ sammen med $k-1$ elementer af $S$, eller $k$ elementer af $S$ og inderholder ikke $a$.
- Fordi der er $\binom{n}{k-1}$ subsets af $k-1$ elementer af $S$, er der $\binom{n}{k-1}$ subsets af $k$ elementer af $T$ der indeholder $a$.

- Der er $\binom{n}{k}$ subsets af $k$ elementer af $T$ som ikke indeholder $a$, fordi der er $\binom{n}{k}$ subsets af $k$ elementer af $S$.
- Dermed teoremet.

**Theorem (3. Vandermonde's Identity)**

*Let $m, n$ and $r$ be nonnegative integers with $r \leq m, n$. Then*

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

- Antag at der er $m$ elementer i et sæt, og $n$ i et andet.
- Så er der i alt $\binom{m+n}{r}$ måder at vælge $r$ elementer fra begge sæt.

- En anden måde at vælge $r$ elementer fra fællesmængden er at vælge $k$ elementer fra det andet sæt, og så $r-k$ elementer fra det første sæt, hvor $k$ er et heltal $0 \leq k \leq r$.
- Fordi der er $\binom{n}{k}$ måder at vælge $k$ elementer fra det andet sæt på, og $\binom{m}{r-k}$ måder at vælge $r-k$ elementer fra det første sæt, fortæller product rule os at det kan blive gjort på $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ måder.
- Dermed er det fulde antal af måder du kan vælge $r$ elementer på fra fællesmængden lig med

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

- Vi har fundet du udtryk for antallet af måder at vælge $r$ elementer på fra fællesmængden af et sæt med $m$ elementer, og et sæt med $n$ elementer.
- Dette beviser Vandermonde's Identitet

**Theorem (4)**

*Let $n$ and $r$ be nonnegative integers with $r \leq n$. Then*

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

- Et tidligere eksempel har vist at $\binom{n+1}{r+1}$ tæller antallet af bit-strenge af længde $n+1$ der har $r+1$ et'taller

- Vi vil vise at højresiden tæller de samme objekter ved at se på antallet af korresponderende mulige lokationer af det sidste 1 i en streng med $r+1$ 1'ere.
- Det sidste 1 må være ved position $r+1, r+2, \ldots,$ eller $n+1$.
- Ydermere, hvis det sidste et er det $k$'e bit, må der være $r$ et'ere imellem de første $k-1$ positioner.
- Vi ved at der er $\binom{k-1}{r}$ af disse slags bitstrenge.
- Hvis vi summerer over $k$ med $r+1 \leq k \leq n+1$, finder vi at der er

$$\sum_{k=r+1}^{n+1} \binom{k-1}{r} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

bit strenge af længde $n$ med præcis $r+1$ et'taller.

[1]jeg tænker bare jeg skriver double countign fra nu af, det er godt nok irriterende at skrive et så langt ord.

# Recurrence Relations

- En recurrence relation er en rekursiv definition med mere end et initial term.
- En sekvens er en løsning af recurrence relationen hvis dets led satisfy relationen.
- **Eksempel med fibonacci:**
  $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}, n \geq 3, f_1 = 1, f_2 = 1.$
- **Eksempel: Tower of Hanoi**

# Algorithms and Recurrence Relations i

- Recurrence Relations kan bruges til at finde kompleksiteten af divide-and-conquer algoritmer.
- Vi introducerer nu **Dynamic Programming**.
- Dynamic Porgramming er et paradigme en algoritme følger, hvis den rekursivt “breaker down” et problem i mindre, men overlappende subproblemer, og så udregner løsningne ved brug af løsningerne af subproblemerne.

# Solving Linear Recurrence Relations i

- En vigtigt klasse af recurrence relations kan blive løst på en systematisk måde.

**Definition**

A *linear homogeneous recurrence relation of degree $k$ with constant coefficients* is a recurrence relation of the form

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{nk}$$

where $c_1, c_2, \ldots, c_k$ are real numbers, and $c_k \neq 0$.

- Den er **lineær** fordi højresiden er summen af de tidligere led af sekvensen, hvert led ganget med en funktion af $n$.

# Solving Linear Recurrence Relations ii

- Den er **homogen** fordi ingen led forekommer som er multiplum af $a_j$'erne.
- Koefficienterne i sekvensen er alle **konstanter**, i stedet for funktioner der afhænger af $n$.
- **Degreeen** (dansk?) er $k$ fordi $a_n$ er udtrykt ved brug af de tidligere $k$ led i sekvensen.

# Eksempel på linear recurrence

$P_n = (1.11)P_{n-1}$ er et eksempel på en homogen rekursionsligning (siger chatgpt det hedder på dansk, ret mig lige hvis jeg tager fejl). Ligningen har "degree" 1. Fibonacci $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ er også lineær, men med en degree på to. $a_n = a_{n-5}$ har en degree af 5.

## Eksempel der ikke er lineær

- Rekursionsligningen $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}^2$ er ikke lineær.
- Rekursionsligningen $H_n = 2H_{n-1} + 1$ er ikke homogen.
- Rekursionsligningen $B_n = nB_{n-1}$ har ikke konstante koefficienter.