Counting

Spørgsmål 1 fra Exam Questions

Kevin Vinther

December 8, 2023

Table of Contents i

Table of Contents iii

Introduktion

- Der er pauser
- Der er reflektioner
- Der er eksempler (ikke kig i bogen!)

Basics of Counting

Kombinatorik

- Hvad er kombinatorik?
- Eksempler på brug
    - Bestemmelse af kompleksitet af en algoritme
    - Bestemmelse af f.eks. telefonnumre eller IP-adresser
    - Sandsynlighedsregning

The Product Rule

Theorem (The Product Rule)

Suppose that a procedure can be broken down into a sequence of two tasks. If there are n_1 ways to do the first task and for each of these ways of doing the first task, there are n_2 ways to do the second task, then there are $n_1 n_2$ ways to do the procedure.

Udvidet version

- Man kan udvide Product Rule til flere tasks:
- Hvis en procedure kan udføres af opgoaver $T_1, T_2, \ldots, T_m$ i en sekvens, og hvis hver af opgaverne $T_i, i = 1, 2, \ldots, n$ kan blive gjort på n_i måder, uanset hvordan de tidligere opgaver er blevet udført, så kan proceduren bliver udført på $n_1 n_2 \cdots n_m$ måder.

Hvor mange funktioner?

- Hvor mange funcktioner er der fra et sæt med m elementer til et sæt med n elementer?

Hvor mange funktioner?

- Hvor mange funcktioner er der fra et sæt med m elementer til et sæt med n elementer?
- **Løsning:** For hver muligt værdi i sættet med n elementer, kan funktionen tages fra m forskellige elementer. Dermed er der n^m forskellige funktioner.

Hvor mange one-to-one funktioner?

- Hvor mange one-to-one funktioner er der fra et sæt med m elementer til et sæt med n elementer?

Hvor mange one-to-one funktioner?

- Hvor mange one-to-one funktioner er der fra et sæt med m elementer til et sæt med n elementer?
- **Løsning:** Hvis $m > n$, så 0. Hvis $m \leq n$, så formod at $a_1, a_2, \ldots, a_m$ er elementerne i domænet. For a_1 er der..

Hvor mange one-to-one funktioner?

- Hvor mange one-to-one funktioner er der fra et sæt med m elementer til et sæt med n elementer?
- **Løsning:** Hvis $m > n$, så 0. Hvis $m \leq n$, så formod at $a_1, a_2, \ldots, a_m$ er elementerne i domænet. For a_1 er der..
- n muligheder, for a_2, $n-1$, etc. Dermed bliver der $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$ one-to-one funktioner.

Product Rule for Sæt

- Product Rule kan også udvides til sæt
- Hvis $A_1, A_2, \ldots A_m$ er endelige sæt, så er antallet af elementer i Cartesian Product (dansk?) af disse sæt, produktet (igen, dansk?) af antallet af elementer i hvert sæt.
- $|A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_m| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|$

The Sum Rule

Theorem (The Sum Rule)

If a task can be done either in one of n_1 ways or in one of n_2 ways, where none of the set of n_1 ways is the same as any of the set of n_2 ways, then there are $n_1 + n_2$ ways to do the task

- I.e., hvis en opgave kan blive gjort på n_1 **eller** n_2 måder, hvor $n_1 \cup n_2 = \emptyset$, så er antallet af måder de kan blive gjort sammen på $n_1 + n_2$.

Udvidet Sum Rule

- Sum-reglen, som product-rule kan også udvides.
- Hvis en opgave kan blive udført på n_1 måder, på n_2 måder, ellers på n_m måder, hvor ingen elementer i sættet af opgaverne er ens, kan opgaverne udføres på i alt $n_1 + n_2 + \cdots + n_m$ måder.

Sum Rule til Sæt

- Ligesom Product Rule
- $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_m| = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_m|$ when $A_i \cap A_j = \emptyset$ for all i, j

Komplekse Tællingsproblemer

- Nogle problemer kræver mere end bare én regel.
- Eksempel 15 fra Rosen:
- I BASIC er variabelnavne en streng af en eller to alphanumeriske karakterer, hvor store og små bogstaver ikke ses som forskellige. Udover det, skal et variabelnavn begynde med et bogstav, og må ikke være ens med en af de 5 strenge af to karakterer som er reserveret for programmeringssproget. Hvor mange navne er mulige i denne version af basic?

Komplekse Tællingsproblemer

- Nogle problemer kræver mere end bare én regel.
- Eksempel 15 fra Rosen:
- I BASIC er variabelnavne en streng af en eller to alphanumeriske karakterer, hvor store og små bogstaver ikke ses som forskellige. Udover det, skal et variabelnavn begynde med et bogstav, og må ikke være ens med en af de 5 strenge af to karakterer som er reserveret for programmeringssproget. Hvor mange navne er mulige i denne version af basic?
- $26 \cdot 36 - 5 = 931$.

Subtraction Rule

Theorem

If a task can be done in either n_1 ways or n_2 ways, then the number of ways to do the task is $n_1 + n_2$ minus the number of ways to do the task that are common to the two different ways.

- Kan også bruges I sæt (inclusion-exclusion):
  $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?
- Først: Hvor mange forskellige strings starter med et 1?

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?
- Først: Hvor mange forskellige strings starter med et 1?
- $1xxxxxxx$, 7 forskellige: $2^7 = 128$

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?
- Først: Hvor mange forskellige strings starter med et 1?
- $1xxxxxxx$, 7 forskellige: $2^7 = 128$
- Hvor mange forskellige strings slutter med to 0'er?

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?
- Først: Hvor mange forskellige strings starter med et 1?
- $1xxxxxxx$, 7 forskellige: $2^7 = 128$
- Hvor mange forskellige strings slutter med to 0'er?
- $xxxxxx00$, 6 forskellige: $2^6 = 64$

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?
- Først: Hvor mange forskellige strings starter med et 1?
- $1xxxxxxx$, 7 forskellige: $2^7 = 128$
- Hvor mange forskellige strings slutter med to 0'er?
- $xxxxxx00$, 6 forskellige: $2^6 = 64$
- Til sidst: begge:
- $1xxxxx00$, 5 forskellige: $2^5 = 32$
- Hvad så?

Eksempel

- Eksempel 19 i Rosen
- Hvor mange bit strings af længde 8 starter med en 1-bit og ender med de to bits 00?
- Først: Hvor mange forskellige strings starter med et 1?
- $1xxxxxxx$, 7 forskellige: $2^7 = 128$
- Hvor mange forskellige strings slutter med to 0'er?
- $xxxxxx00$, 6 forskellige: $2^6 = 64$
- Til sidst: begge:
- $1xxxxx00$, 5 forskellige: $2^5 = 32$
- Hvad så?
- $2^7 + 2^6 - 2^5 = 128 + 64 - 32 = 160$

The Division Rule

- Den mest kedelige regel

Theorem (The Division Rule)

There are n/d ways to do a task if it can be done using a procedure that can be carried out in n ways, and for every way w, exactly d of the n wys correspond to way w.

Eksempel

- Eksempel 20 fra Rosen:
- Hvor mange køer på en gård med 572 ben? (Ingen køer har mistet ben, og der er kun køer på gården)

Eksempel

- Eksempel 20 fra Rosen:
- Hvor mange køer på en gård med 572 ben? (Ingen køer har mistet ben, og der er kun køer på gården)
- $572/4 = 143$.

Tree Diagrams

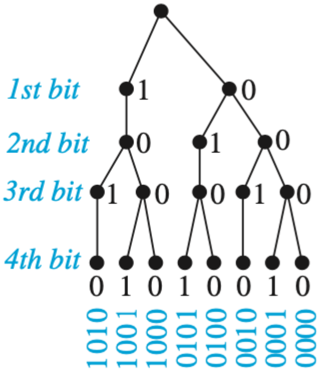
- Tælningsproblemer kan også blive løst v.h.a. **tree diagrams** (trædiagrammer?)

Eksempel

- Hvor mange bit strings af længde fire har ikke to 1'ere ved siden af hinanden?

Eksempel

- Hvor mange bit strings af længde fire har ikke to 1'ere ved siden af hinanden?



Reflektion

- Stop! Hvad har vi snakket om?
- Hvornår bruges product-rule?
- Hvornår bruges sum?
- Subtraction?
- Division?
- Spørgsmål til delkapitlet? (Ikke opgaverne)

Pause (5 min)

Pause!

The Pigeonhole Principle

The Pigeonhole Principle

Theorem

If k is a positive integer and $k+1$ or more objects are placed into k boxes, then there is at least one box containing two or more objects

Proof

Proof.

Vi beviser ved brug af kontraposition. Antag at der er $k+1$ bokse. Derudover har hver boks **højest** et objekt i sig. Dermed er der højest k bokse. Dette er en modsigelse, da der er $k+1$ bokse. $\square$

Hvorfor?

- Meget simpelt princip
- Bruges meget i beviser

One-to-one functions

Corollary

A function f from a set with $k+1$ or more elements to a set with k elements is not one-to-one.

- Beviset til dette bruger pigeonhole princippet.

Bevis til one-to-one

Proof.

Antag at hvert element y i codomain (mængde et eller andet?) af f har en boks der har alle elementer x fra domænet af f, således at $f(x) = y$. Fordi domainet indeholder $k + 1$ eller flere elementer, og codomainet indholder kun k elementer, kan pigeonhole princippet fortæller os at en af disse bokse ineholder to eller flere elementer x fra domænet. Dermed kan f ikke være one-to-one. $\square$

Generalized Pigeonhole Principle

Theorem (The Generalized Pigeonhole Principle)

If N objects are placed into k boxes, then there is at least one box containing at least $\lceil N/k \rceil$ objects.

- Dette tillader langt mere advanceret og brugbare beviser

Bevis

Proof.

Vi beviser ved kontraposition. Antag at ingen af boksene holder mere end $\lceil N/k \rceil - 1$ objekter. Ved dette, må antallet af objekter så højest være

$$k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right)$$

Hvilket er mindre end

$$k\left(\left(\frac{N}{k} + 1\right) - 1\right) = N$$

Hvor uligheden $\lceil N/k \rceil < (N/k) + 1$ er brugt. Dermed er det fulde antal af objekter mindre end N, hvilket er umuligt. $\square$

Eksempel

- Hvor mange elever skal til, for at mindst 6 får den samme karakter, på karakterskalaen 12, 10, 7, 4, 02?

Eksempel

- Hvor mange elever skal til, for at mindst 6 får den samme karakter, på karakterskalaen 12, 10, 7, 4, 02?
- $\lceil \frac{N}{k} \rceil = 5$, $N = 5 \cdot 5 + 1 = 26$

Theorem 3

Theorem

Every sequence of $n^2 + 1$ distinct real numbers contains a subsequence of length $n + 1$ that is either strictly increasing or strictly decreasing.

- Eksempel hvor beviset bruger Pigeonhole Princippet.

Theorem 3 Bevis

Proof.

Lad $a_1, a_2, \dots a_{n^2+1}$ være en sekvens af $n^2 + 1$ forskellige reelle tal. Til hvert led, associer et ordnet par(?) (i_k, d_k), hvor i_k er længden af den længste stigende talrække, og d_k den længste faldende.

Bevis ved kontraposition. Antag at der ikke er nogen stigende eller faldende subsekvenser af længde $n + 1$. I så fald er både i_k og d_k højest n. Ved product rule er der n^2 forskellige ordnet par (i_k, d_k) $((1..n, 1..n))$. Dette strider dog imod pigeonhole princippet, som siger at der skal være $n^2 + 1$, da det er antallet af elementer. Derfor må en af dem være ens. En af disse der er ens, puttes så enten bagpå eller foran den anden. $\square$

Ramsey Number

- Ramsey Number (Ramsey Tallet?) $R(m, n)$ hvor m og n er positive heltal større end eller lig med 2, er det minimum antal af personer til en fest således at der enten er m fælles venner eller n fælles fjender.

Reflektion

- Hvad har vi snakket om?
- Hvad er pigeonhole princippet? Hvordan fungerer dens bevis?
- Hvad med generaliseret? Og dens bevis?
- Hvordan beviser du $n^2 + 1$ sekvens teoremet?
- Hvad er ramsey tal?

Pause

Pause!

Permutationer og Kombinationer

Permutation

- En **permutation** af et sæt af forskellige objekter er en ordnet opstilling af disse objekter.
- En **r-permutation** af et sæt af forskellige objekter, er en ordet opstilling af r elementer af sættet.

Antal af permutations

Theorem

If n is a positive integer and r is an integer with $1 \leq r \leq n$, then there are

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

r-permutations of a set with n distinct elements.

Bevis

Proof.

Vi bruger product rule. Der er n måder at vælge det første element på, $n-1$ måder at vælge det næste etc indtil $n-(r-1)=n-r+1$. Dermed, ved product rule, er der $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$ r-permutationer af sættet. $\square$

- Dejligt simpelt bevis, lad os håbe der ikke er flere sider lange beviser når vi kommer til probabilistisk analyse :)
- Note: $P(n,0)=1$, da den eneste permutation af en liste med 0 elementer er listen i sig selv med 0 elementer.

Corollary

Corollary

If n and r are integers with $0 \leq r \leq n$, then $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

- Denne formel er anderledes ikke bare i dens udregning, men også i at den virker ved $0 \leq r < 1$

Corollary Bevis

Proof.

Når n og r er heltal ved $1 \leq r \leq n$, af Theorem 1 ($n(n-1)\cdots$ etc) har vi:

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Fordi $\frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$ når n er et positivt heltal, ser vi at $P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$ også holder når $r = 0$ $\square$

- Ved denne formel kan vi også nemt se at $P(n,n) = 1$, da $P(n,n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$

Eksempel

- Eksempel 5
- Antag at der er 8 løbere i et ræs. Der er 3 vindere, en der går en guldmedalje, en der får en sølv, og en bronze. Hvor mange måder kan disse medaljer uddeles på, hvis løbere ikke kan stå lige?

Eksempel

- Eksempel 5
- Antag at der er 8 løbere i et ræs. Der er 3 vindere, en der går en guldmedalje, en der får en sølv, og en bronze. Hvor mange måder kan disse medaljer uddeles på, hvis løbere ikke kan stå lige?
- $P(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$

Kombinationer

- En kombination er ligesom en permutation, undtagen vi er ligeglad med ordren af objekterne.
- Dermed er en $r-$kombination, ligesom en permutation, men igen, uden ordren.
- Eksempel: Hvor mange måder kan vi lave en gruppe af 3 personer ud fra 4 personer?

R-kombinationer

Theorem

The number of r-combinations of a set with n elements, where n is a nonnegative integer and r is an integer with $0 \leq r \leq n$, equals

$$C(n, r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Bevis af r-kombinationer

Hvis vi kigger på perspektivet fra r-permutationer, så kan man finde r-permutationer ud fra r-combinatoner og permutation:

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot P(r,r)$$

Altså, kombinationerne ganget med antallet af måder du kan ordne listen af objekter på. Med denne viden, kan vi udregne $C(n,r)$:

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{P(r,r)} = \frac{n!/(n-r)!}{r!/(r-r)!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

Eksempel

- Eksempel 11 (Uddrag)
- Hvor mange hænder af fem kort i poker can blive uddelt fra et sæt af 52 standard spillerkort?

Eksempel

- Eksempel 11 (Uddrag)
- Hvor mange hænder af fem kort i poker can blive uddelt fra et sæt af 52 standard spillerkort?
- $C(52, 5) = \frac{52!}{5!47!} = 2598960$

Corollary 2

Corollary

Let n and r be nonnegative integers with $r \leq n$. Then $C(n, r) = C(n, n - r)$

- Der er både et algebraisk og et kombinatorisk bevis for dette. Vi kommer til det algebraiske først.

Bevis for Corollary 2

Proof.

Fra Theorem 2 ($C(n,r)$ teoremet), følger det at

$$C(n,r) = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

og

$$C(n,n-r) = \frac{n!}{(n-r)!n-(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C(n,r)$$

$\square$

Definition

A *combinatorial proof* of an identity is a proof that uses counting arguments to prove that both sides of the identity count the same objects but in different ways or a proof that is based on showing that there is a bijectino between the sets of objects counted by the two sides of the identity. These two types of proofs are called *double counting proofs* and *bijective proofs*.

Corollary 2 Bijective Proof.

Antag at S er et sæt med n elementer. Funktionen der mapper et subset A af S til $\overline{A}$ er en bijektion mellem subsettene af S med r elementer, og subsettene med $n - r$ elementer. Siden der er en bijektion mellem sættene, må de tælle de samme antal elementer. $\square$

Corollary 2 Double Counting Proof.

Af definitionen, er antallet af subsets af S med r elementer $C(n, r)$. Men hvert subset A af S er også valgt af elementerne som *ikke* er i A, og som så er i $\overline{A}$. Fordi der er $C(n, n-r)$ elementer i $\overline{A}$, er der lige så mange som i A. $\square$

Reflektion

- Hvad er en permutation?
- Hvordan fander man antallet af permutationer?
- Hvad er en kombination?
- Hvordan finder man antallet af kombinationer?
- Hvad er forskellen på et double counting og bijctive kombinatorisk bevis?

Pause

Pause!

Binomial Coefficients and Identities

Binomial Coefficients

- Antallet af r-kombinationer fra et sæt med n elementer er også skrevet som $\binom{n}{r}$.
- Dette kaldes en **binomial coefficient** (på engelsk) fordi tallene er coefficients (igen, på engelsk) i udvidelsen af binomial expresisons, såsom $(a+b)^n$.

Binomial Theorem

Theorem (The Binomial Theorem)

Let x and y be variables, and let n be a nonnegative integer. Then

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^{n-j} y^j = \binom{n}{0} x^n$$

$$+ \binom{n}{1} x^{n-1} y + \cdots + \binom{n}{n-1} x y^{n-1} + \binom{n}{n} y^n$$

Binomial Theorem Bevis

- Et kombinatorisk bevis!

Proof.

Leddene i produktet når den bliver udvidet er af formen $x^{n-j}y^j$ for $j = 0, 1, 2, \ldots, n$. For at tælle antallet af led i formen $x^{n-j}y^j$, læg mærke til at man først skal vælge $n - j$ x'er fra de n binomial factors, så de resterende j led er y'er). Derfor coefficienten af $x^{n-j}y^j$ er $\binom{n}{n-j}$, hvilket er lig med $\binom{n}{j}$. Dette beviser teoremet $\square$

- Jeg forstår ikke det her bevis :(

Corollaries

- Der kommer til at være mange corollaries, fordi Binomial theorem kan bruges til meget, så gør jer klar...

Corollary 1

Corollary

Let n be a nonnegative integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Proof.

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

$\square$

Kombinatorisk bevis på Corollary 1.

Et sæt med n elementer har i alt 2^n forskellige subsets. Hvert subset har nul elementer, et element, to elementer, eller n elementer i sig. Der er $\binom{n}{0}$ subsets med 0 elementer. $\binom{n}{1}$subsets med et element $\binom{n}{2}$ subsets med to elementer, osv, indtil $\binom{n}{n}$ subsets med n elementer. Derfor tæller $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ det fulde antal af subset af et sæt med n elementer. Ved at sætte dem lig hinanden, ser vi at $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ $\square$

Corollary (Corollary 2)

Let n be a positive integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = 0$$

Proof.

$$0 = 0^n = ((-1)+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$$

$\square$

Corollary 3

Corollary (Corollary 3)

Let n be a nonnegative integer. Then

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$$

Proof.

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$$

$\square$

Pascal's Identity

Theorem (Pascal's Identity)

Let n and k be positive integers with $n \geq k$. Then

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

- Desværre er det et kombinatorisk bevis:(

Pascla's Identity Bevis

Pascal's Identity Proof.

Antag at T er et sæt med $n+1$ elementer. Lad a være et element i T, og lad $S = T - \{a\}$. Læg mærke til at der er $\binom{n+1}{k}$ subsets af T der indeholder k elementer. Men, et subset af T med k elementer har enten a sammen med $k-1$ elementer af S, eller k elementer af S og ingen a i subsettet. Fordi der er $\binom{n}{k-1}$ subsets af $k-1$ elementer af S, så er der $\binom{n}{k-1}$ subsets af k elementer af T der inderholder a. Og der er $\binom{n}{k}$ subsets af k elementer af T, som ikke indeholder a, fordi der er $\binom{n}{k}$ subsets af k elementer af S. Dermed bevist. $\square$

- Den forstår jeg heller ikke:(Fandens kombinatoriske beviser...

Vandermonde's Identity

Theorem (Vandermonde's Identity)

Let m, n and r be nonnegative integers with r not exceeding either m or n. Then

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$$

- My shoes? Gucci
- My proofs? Combinatorial :(

Vandermonde's Identity Bevis

Vandermonde's Identity Bevis.

Antag at der er m elementer i et sæt, og n i et andet sæt. Antallet af måder du kan vælger r ting fra begge sæt er dermed $\binom{n+m}{r}$. En anden måde at vælge er at vælge k elementer fra det andet sæt, og så $r-k$ fra det første sæt, hvor k er et heltal mellem $0 \leq k \leq r$. Fordi der er $\binom{n}{k}$ måder at vælger k elementer fra det andet sæt, og $\binom{m}{r-k}$ måder at vælge $r-k$ elementer fra det første sæt, fortæller product rule os at dette kan blive gjort på $\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ måder. Dermed er det fulde antal af måder du kan vælge r elementer på fra union af sættet $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{r-k}\binom{n}{k}$ $\square$

Corollary (Corollary 4)

If n is anonnegative integer, then

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Proof.

Vi bruger Vandermonde's Identity med $m = r = n$:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

$\square$

Theorem (Theorem 4)

Let n and r be nonnegative integers with $r \leq n$. Then

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

- Hvorfor er kombinatoriske beviser som en dårlig GPS?

Theorem 4

Theorem (Theorem 4)

Let n and r be nonnegative integers with $r \leq n$. Then

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

- Hvorfor er kombinatoriske beviser som en dårlig GPS?
- Fordi de fører dig gennem en million små veje, og til sidst er du mere forvirret om din destination end da du startede!

Theorem 4

Theorem (Theorem 4)

Let n and r be nonnegative integers with $r \leq n$. Then

$$\binom{n+1}{r+1} = \sum_{j=r}^{n} \binom{j}{r}$$

- Hvorfor er kombinatoriske beviser som en dårlig GPS?
- Fordi de fører dig gennem en million små veje, og til sidst er du mere forvirret om din destination end da du startede!
- Credit til ChatGPT, jeg er ikke kreativ nok til at lave dårlige jokes, jeg lider bare
- Jeg har undladt beviset, fordi jeg er for træt.

Reflektion

- $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = ?$
- Hvad er binomial theorem?
- Hvad kan det bruges til?

Generalized Permutations and Combinations

Permutation med Gentagelse

- For at finde ud af hvor mange permutationer der er, hvis vi tillader gentagelser, bruger vi product rule.

Theorem

The number of r-permutations of a set of n objects with repetition allowed is n^r

Proof.

Der er n måder at vælge et element, og siden hver af de n måder ikke ændrer sig da vi gentager objekter, så (ved product rule) tager vi n n gange, i.e., n^r. □

Kombinationer med Gentagelse

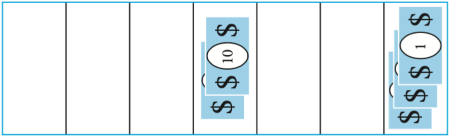
- Det er ikke ligeså nemt at finde løsning til kombinationer med gentagelse.

Eksempel 3 i

- Hvor mange måder kan man vælge 5 sedler fra en boks med (jeg gider ikke skrive dollars i LaTeX) 1dkk seddel, 2dkk seddel, 5dkk seddel, 10dkk seddel, 50dkk seddel og 100dkk seddel? Antag at ordren er ligegyldig, og at hver pengeseddel (i sin værdi) ikke skelnes, og at der er mindst 5 sedler af hver sin type.

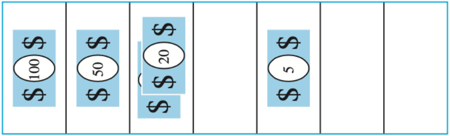
Eksempel 3 ii

- Antallet af måder du kan vælge 5 sedler på er antallet af måder du kan arrangere disse 6 vægge og 5 stjerner tilsammen.



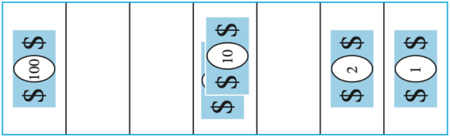
10
1

| | | * * | | | * * *



100
50
20
5

* | * | * * | | * | |



100
10
2
1

* | | | * * | | * | *

Eksempel 3 løsning

- Vi løste det ikke helt. Siden der er 5 sedler, og 6 vægge, kan man vælge 5 sedler ud fra $5 + 6 = 11$. Dermed er det $\binom{5+6}{5} = 462$

Theorem 2

- Vi generaliserer stars and bars med teorem 2

Theorem

There are $C(n + r - 1, r) = C(n + r - 1, n - 1)$ r-combinations from a set with n elements when repetition of elements is allowed

Bevis Part 1.

Hver r-kombinbation af et sæt med n elementer når gentagning er tilladt kan blive repræsenteret som en liste af $n-1$ vægge (bars) og r stjerner (stars). De $n-1$ vægge bruges til at "markere" n forskellige celler, med den i'e celle der har en stjerne for hver gang det i'e element af sættet er i kombinationen. For eksempel, en $6-$kombination af et sæt med fire elementer er repræsenteret med tre vægge seks stjerner. ** — * — — *** repræsenterer kombinationen der har præcis to af det første element, en af de andet, ingen af det tredje og 4 af det fjerde element.

$\square$

Bevis part 2.

Som vi har set, korresponderer hver forskellig liste med $n-1$ vægge og r stjerne til en r-kombination af sættet med n elementer, når gentagelser er tilladt. Antallet af sådanne lister er $C(n-1+r, r)$, fordi hver liste korresponderer(dansk?) til valget af de r positioner man kan sætte r stjerner i fra de $n-1+r$ positioner der har r stjerner og $n-1$ vægge. Antallet af sådanne lister er også lig med $C(n-1+r, n-1)$, fordi hver liste korresponderer til et valg af de $n-1$ positioner man kan placerer $n-1$ vægge. $\square$

Eksempel 5

- Hvor mange løsninger har ligningen $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, hvor $x_i, i = 1, 2, 3$ er ikke-negative heltal?

Eksempel 5

- Hvor mange løsninger har ligningen $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, hvor $x_i, i = 1, 2, 3$ er ikke-negative heltal?
- Det er antallet af måder man kan vælge 11 elementer fra et sæt med 3 elementer. Dermed $C(3 + 11 - 1, 11) = 78$

Sammeligning

TABLE 1 **Combinations and Permutations With and Without Repetition.**

Type	*Repetition Allowed?*	*Formula*
r-permutations	No	$\dfrac{n!}{(n-r)!}$
r-combinations	No	$\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$
r-permutations	Yes	n^r
r-combinations	Yes	$\dfrac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

Permutationer med objekter man ikke kan skelne imellem

- På engelsk: Pemrutations with indistinguishable objects
- Vi bruger, sjovt nok, kombinationer for at komme med formlen for dette, som det næste bevis vil vise.

Eksempel 7

- Hvor mange forskellige strenge (strings) kan blive lavet ved at flytte rundt på bogstaverne af ordet SUCCESS? (Hint: Fordi der er flere en ét af hvert bogstav er det ikke $r-$permutationer.

Eksempel 7

- Hvor mange forskellige strenge (strings) kan blive lavet ved at flytte rundt på bogstaverne af ordet SUCCESS? (Hint: Fordi der er flere en ét af hvert bogstav er det ikke $r-$permutationer.
- Ordet indeholder 3 S'er, 2 C'er, 1 U, 1 E.

Eksempel 7

- Hvor mange forskellige strenge (strings) kan blive lavet ved at flytte rundt på bogstaverne af ordet SUCCESS? (Hint: Fordi der er flere en ét af hvert bogstav er det ikke $r-$permutationer.
- Ordet indeholder 3 S'er, 2 C'er, 1 U, 1 E.
- Du kan flytte S'erne (f.eks.) 3 ud af de 7 positioner (7 bogstaver i SUCCESS)

Eksempel 7

- Hvor mange forskellige strenge (strings) kan blive lavet ved at flytte rundt på bogstaverne af ordet SUCCESS? (Hint: Fordi der er flere en ét af hvert bogstav er det ikke $r-$permutationer.
- Ordet indeholder 3 S'er, 2 C'er, 1 U, 1 E.
- Du kan flytte S'erne (f.eks.) 3 ud af de 7 positioner (7 bogstaver i SUCCESS)
- Så 2 C'er kan placeres i 4 steder, 1 U 2 steder, 1 E 1 sted.

Eksempel 7

- Hvor mange forskellige strenge (strings) kan blive lavet ved at flytte rundt på bogstaverne af ordet SUCCESS? (Hint: Fordi der er flere en ét af hvert bogstav er det ikke $r-$permutationer.
- Ordet indeholder 3 S'er, 2 C'er, 1 U, 1 E.
- Du kan flytte S'erne (f.eks.) 3 ud af de 7 positioner (7 bogstaver i SUCCESS)
- Så 2 C'er kan placeres i 4 steder, 1 U 2 steder, 1 E 1 sted.
- $C(7,3)C(4,2)C(2,1)C(1,1) = 420$

Theorem 3

Theorem

The number of different permutations of n objects, where there are n_1 indistinguishable objects of type 1, n_2 indistinguishable objects of type 2, n_k of type k, is

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

Theorem 3 Bevis

- Beviset er basically bare det vi gik igennem fra Eksempel 7. Ved n_1 er der $C(n, n_1)$ forskellige steder n_1 kan være, ved n_2 er der $C(n - n_1, n_2)$, etc, indtil, $C(n - n_1 - \cdots - n_{k-1}, n_k)$.

Fordeling af objekter i bokse

- Mange problemer kan løses ved at modellere dem som bokse og objekter der skal fordeles i boksene. Dermed er der 4 typer af disse problemer:
  - Objekte man kan skelne imellem og bokse man kan skelne imellem
  - Objekte man ikke kan skelne imellem og bokse man kan skelne imellem
  - Objekte man ikke kan skelne imellem og bokse man ikke kan skelne imellem
  - Objekte man kan skelne imellem og bokse man ikke kan skelne imellem

Eksempel 8

- Eksempel 8 viser hvordan man udregner antallet af måder man kan fordele objekter man kan skelne imellem i bokse man kan skelne imellem.
- Eksempel 8: Hvor mange måder kan man fordele hænder af 5 kort hver til 4 spillere fra et standard kortspil af 52 kort?

Eksempel 8

- Eksempel 8 viser hvordan man udregner antallet af måder man kan fordele objekter man kan skelne imellem i bokse man kan skelne imellem.
- Eksempel 8: Hvor mange måder kan man fordele hænder af 5 kort hver til 4 spillere fra et standard kortspil af 52 kort?
- Vi bruger samme metode som i eksempel 7.
  $C(52,5)C(47,5)C(42,5)C(37,5)$

Theorem 4

Theorem

The number of ways to distribute n distinguishable objects into k distinguishable boxes so that n_i objects are placed into box i, $i = 1, 2, \ldots, k$, equals:

$$\frac{n!}{n_1!n_2! \cdot n_k!}$$

- Kan blive bevist v.h.a. product rule (som set i eksempel 7)

Dinstinguishable Objects and Distinguishable Boxes

- Hvis man ikke kan skelne mellem objekterne, men man kan boksene, så bruger man stars and bars methoden, i.e.

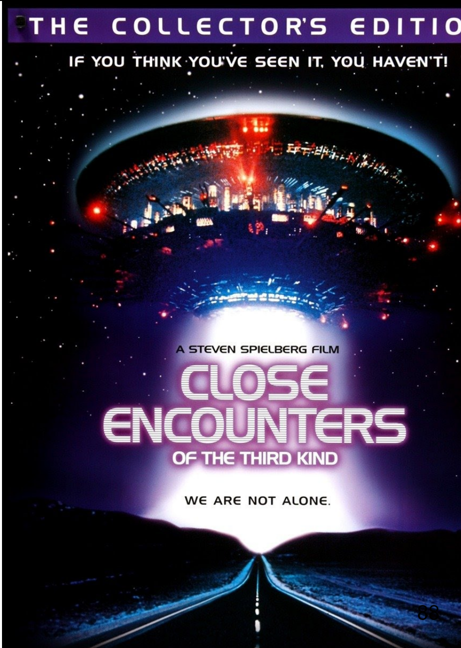
$$C(n + r - 1, n - 1)$$

.

Distinguishable Objects and Indistinguishable Boxes

- For at finde ud af hvor mange måder man kan fordele objekter man kan skelne imellem blandt bokse man ikke kan, så bruger man **Stirling numbers of the second kind**

$$\sum_{j=1}^{k} S(n,j) = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i \binom{j}{i} (j-i)^n$$



- Dem her er du nødt til at tælle. Der er desværre ikke en metode eller formel til det som sådan.