Lógica Matemática

Aula 07

Prof.ª Msc. Cassiana Fagundes da Silva
E-mail: cassiana.silva@sistemafiep.org.br

Objetivo da Aula

- Entender os fundamentos da Equivalência Lógica

Equivalência Lógica

- **Definição**
  - Uma proposição P(p,q,r,...) é **equivalente** a uma proposição Q(p,q,r,...) se as tabelas verdade dessas duas proposições são idênticas.
- Notação:

$$P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$$

- Exemplo:

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

Obtém-se:

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

Propriedades

- A relação da Equivalência Lógica possui as **propriedades**:
  - **Reflexiva**:

    $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$

    $$P \Leftrightarrow P$$
  - **Simétrica:**

    Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$, então $Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow P(p,q,r,...)$

    Se $P \Leftrightarrow Q$, então $Q \Leftrightarrow P$
  - **Transitiva**:

    Se $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$ e

    $Q(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$, então $P(p,q,r,...) \Leftrightarrow R(p,q,r,...)$

    Se $P \Leftrightarrow Q$ e $Q \Leftrightarrow R$, então $P \Leftrightarrow R$

Exercícios

- Prove que as seguintes proposições são equivalentes:
    1. $\mathbf{p}$ e $\neg\neg\,\mathbf{p}$;
    2. $\mathbf{p}$ e $\neg\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}$;
    3. $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} \wedge \mathbf{q}$ e $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$; (Regra de absorção)
    4. $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ e $\neg\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$;
    5. $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ e $(\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}) \wedge (\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{p})$;
    6. $\mathbf{p} \leftrightarrow \mathbf{q}$ e $(\mathbf{p} \wedge \mathbf{q}) \vee (\neg\mathbf{p} \wedge \neg\mathbf{q})$.

Resolução dos Exercícios

1. p e ~~p   (Regra da dupla negação)

p	~p	~~p
V	F	V
F	V	F

2. p e ~p → p   (Regra de Calvius)

p	~p	~p → p
V	F	V
F	V	F

Resolução dos Exercícios

Sistema Fiep FIEP SESI SENAI IEL

3. p → p ^ q e p → q (Regra de absorção)

p	q	p ^ q	p → p ^ q	p → p
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Resolução dos Exercícios

4. p → q e ~p v q

p	q	~p	~p v q	p → p
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Resolução dos Exercícios

5. $p \leftrightarrow q$ e $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Resolução dos Exercícios

6. $p \leftrightarrow q$ e $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	~p	~q	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

Tautologias e Equivalências Lógicas

Sistema Fiep FIEP SESI SENAI IEL

$$P(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$$

se e somente se

$$P(p,q,r,\ldots) \leftrightarrow Q(p,q,r,\ldots)$$

é **tautológica**.

- Demonstre isso para o item 4 do exercício anterior:

4. $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{q}$ e $\neg \mathbf{p} \vee \mathbf{q}$;

Dica: faça mais uma coluna com a seguinte sentença:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

Tautologias e Equivalências Lógicas

- Tem-se o **Corolário** (afirmação deduzida de uma verdade já demonstrada):

$$\text{Se } \mathbf{P}(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(p,q,r,\ldots),$$

então também é válido que

$$\mathbf{Q}(p,q,r,\ldots) \Leftrightarrow \mathbf{P}(p,q,r,\ldots)$$

- Observe que:

  $\leftrightarrow$ indica uma operação lógica entre as proposições.
  - Ex.: das proposições **p** e **q**, dá-se a nova proposição $p \leftrightarrow q$.

  $\Leftrightarrow$ indica uma relação.
  - Ex.: estabelece que a bicondicional $P \leftrightarrow Q$ é tautológica.

Exercícios

- Indique quais das seguintes proposições são equivalentes:

1. $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, onde $V(c) = F$

   (Método de demonstração do absurdo)

2. $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

   (Regra de Exportação-Importação)

3. $p \vee \sim q$ e $\sim(q \wedge p)$

Resolução dos Exercícios

1. $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, onde $V(c) = F$
   (Método de demonstração do absurdo)

p	q	~q	c	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow c)$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V

Resolução dos Exercícios

2. $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(Regra da Exportação - Importação)

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r)$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V

Resolução dos Exercícios

3. p v ~q $\leftrightarrow$ ~(q ^p)

p	q	~q	(p v ~q)	(q ^ q)	~(q ^ p)	p v ~q $\leftrightarrow$ ~(q ^p)
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V

Exercícios

1. Mostrar que as proposições p e q são equivalentes ($p \Longleftrightarrow q$) em cada um dos seguintes casos:

   (a) $p: 1 + 3 = 4$; $q: (1 + 3)^2 = 16$
   (b) $p: \text{sen}0^0 = 1$; $q: \cos 0^0 = 0$
   (c) $p: 2^0 = 1$; $q: \pi < 4$
   (d) $p: x = y$; $q: x + z = y + z \; (x, y, z \in R)$
   (e) $p: x$ é par; $q: x + 1$ é ímpar ($x \in Z$)
   (f) p : O triângulo ABC é isósceles ($AB = AC$); q : Os ângulos $\hat{B}$ e $\hat{C}$ são iguais
   (g) $p: a \perp b$; $q: b \perp a$
   (h) $p: a \parallel b$; $q: b \parallel a$
   (i) p : O triângulo ABC é retângulo em A; $q: a^2 = b^2 + c^2$
   (j) $p: x \in \{a\}$; $q: x = a$

Exercícios

Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências:

(a) $p \land (p \lor q) \Longleftrightarrow p$

(b) $p \lor (p \land q) \Longleftrightarrow p$

(c) $p \longleftrightarrow p \land q \Longleftrightarrow p \rightarrow q$

(d) $q \longleftrightarrow p \lor q \Longleftrightarrow p \rightarrow q$

(e) $(p \rightarrow q) \land (p \rightarrow r) \Longleftrightarrow p \rightarrow q \land r$

(f) $(p \rightarrow q) \lor (p \rightarrow r) \Longleftrightarrow p \rightarrow q \lor r$

(g) $(p \rightarrow q) \rightarrow r \Longleftrightarrow p \land \sim r \rightarrow \sim q$

Sistema Fiep

FIEP
SESI
SENAI
IEL

nosso i é de indústria.