

# Lógica Matemática

## Aula 07

Prof.<sup>a</sup> Msc. Cassiana Fagundes da Silva  
E-mail: [cassiana.silva@sistemafiep.org.br](mailto:cassiana.silva@sistemafiep.org.br)

- Entender os fundamentos da Equivalência Lógica

- **Definição**


- Uma proposição  $P(p,q,r,...)$  é **equivalente** a uma proposição  $Q(p,q,r,...)$  se as tabelas verdade dessas duas proposições são idênticas.

- **Notação:**

$$P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

- **Exemplo:**

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V



**Obtém-se:**

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

- A relação da Equivalência Lógica possui as **propriedades**:

- **Reflexiva:**

$$P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$$

$$P \Leftrightarrow P$$

- **Simétrica:**

$$\text{Se } P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots), \text{ então } Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$$

$$\text{Se } P \Leftrightarrow Q, \text{ então } Q \Leftrightarrow P$$

- **Transitiva:**

$$\text{Se } P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots) \text{ e}$$

$$Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots), \text{ então } P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots)$$

$$\text{Se } P \Leftrightarrow Q \text{ e } Q \Leftrightarrow R, \text{ então } P \Leftrightarrow R$$

- Prove que as seguintes proposições são equivalentes:

1.  $p \text{ e } \neg \neg p;$

2.  $p \text{ e } \neg p \rightarrow p;$

3.  $p \rightarrow p \wedge q \text{ e } p \rightarrow q;$  (Regra de absorção)

4.  $p \rightarrow q \text{ e } \neg p \vee q;$

5.  $p \leftrightarrow q \text{ e } (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p);$

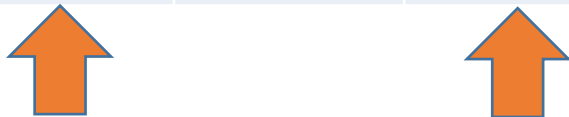
6.  $p \leftrightarrow q \text{ e } (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q).$



# Resolução dos Exercícios

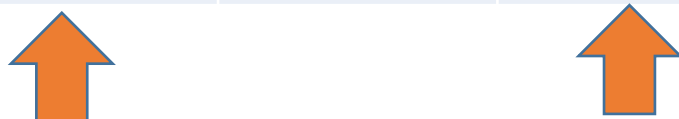
1.  $p$  e  $\sim\sim p$  (Regra da dupla negação)

$p$	$\sim p$	$\sim\sim p$
V	F	V
F	V	F



2.  $p$  e  $\sim p \rightarrow p$  (Regra de Calvius)

$p$	$\sim p$	$\sim p \rightarrow p$
V	F	V
F	V	F



3.  $p \rightarrow p \wedge q$  e  $p \rightarrow q$  (Regra de absorção)

p	q	$p \wedge q$	$p \rightarrow p \wedge q$	$p \rightarrow p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V



4.  $p \rightarrow q$  e  $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V





5.  $p \leftrightarrow q$  e  $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V



6.  $p \leftrightarrow q$  e  $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow q$	$(p \wedge q)$	$(\sim p \wedge \sim q)$	$(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V



$$P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

se e somente se

$$P(p,q,r,...) \leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

**é tautológica.**

- Demonstre isso para o item 4 do exercício anterior:

4.  $p \rightarrow q$  e  $\neg p \vee q$ ;

Dica: faça mais uma coluna com a seguinte sentença:

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

- Tem-se o **Corolário** (afirmação deduzida de uma verdade já demonstrada):

Se  $\mathbf{P}(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow \mathbf{Q}(p,q,r,\dots)$ ,

então também é válido que

$$\mathbf{Q}(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow \mathbf{P}(p,q,r,\dots)$$

- Observe que:

$\leftrightarrow$  indica uma operação lógica entre as proposições.

- Ex.: das proposições **p** e **q**, dá-se a nova proposição  $p \leftrightarrow q$ .

$\Leftrightarrow$  indica uma relação.

- Ex.: estabelece que a bicondicional  $P \leftrightarrow Q$  é tautológica.

- Indique quais das seguintes proposições são equivalentes:

1.  $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ , onde  $V(c) = F$

(Método de demonstração do absurdo)

2.  $(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

(Regra de Exportação-Importação)

3.  $p \vee \sim q$  e  $\sim(q \wedge p)$

1.  $(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ , onde  $V(c) = F$   
(Método de demonstração do absurdo)

p	q	$\sim q$	c	$(p \wedge \sim q)$	$(p \wedge \sim q) \rightarrow c$	$p \rightarrow q$	$(p \wedge \sim q \rightarrow c) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$
V	V	F	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	F	V	V	V



# Resolução dos Exercícios

$$2. (p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

(Regra da Exportação - Importação)

p	q	r	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow (q \rightarrow r))$	$(p \wedge q \rightarrow r) \leftrightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V



3.  $p \vee \sim q \leftrightarrow \sim(q \wedge p)$

p	q	$\sim q$	$(p \vee \sim q)$	$(q \wedge p)$	$\sim(q \wedge p)$	$p \vee \sim q \leftrightarrow \sim(q \wedge p)$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	V





1. Mostrar que as proposições  $p$  e  $q$  são equivalentes ( $p \iff q$ ) em cada um dos seguintes casos:

(a)  $p : 1 + 3 = 4$ ;  $q : (1 + 3)^2 = 16$

(b)  $p : \sin 0^\circ = 1$ ;  $q : \cos 0^\circ = 0$

(c)  $p : 2^0 = 1$ ;  $q : \pi < 4$

(d)  $p : x = y$ ;  $q : x + z = y + z \ (x, y, z \in \mathbb{R})$

(e)  $p : x \text{ é par}$ ;  $q : x + 1 \text{ é ímpar} \ (x \in \mathbb{Z})$

(f)  $p : \text{O triângulo } ABC \text{ é isósceles } (AB = AC)$ ;  $q : \text{Os ângulos } \widehat{B} \text{ e } \widehat{C} \text{ são iguais}$

(g)  $p : a \perp b$ ;  $q : b \perp a$

(h)  $p : a \parallel b$ ;  $q : b \parallel a$

(i)  $p : \text{O triângulo } ABC \text{ é retângulo em } A$ ;  $q : a^2 = b^2 + c^2$

(j)  $p : x \in \{a\}$ ;  $q : x = a$

Demonstrar por tabelas-verdade as seguintes equivalências:

(a)  $p \wedge (p \vee q) \iff p$

(b)  $p \vee (p \wedge q) \iff p$

(c)  $p \iff p \wedge q \iff p \rightarrow q$

(d)  $q \iff p \vee q \iff p \rightarrow q$

(e)  $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \iff p \rightarrow q \wedge r$

(f)  $(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \iff p \rightarrow q \vee r$

(g)  $(p \rightarrow q) \rightarrow r \iff p \wedge \sim r \rightarrow \sim q$

# Sistema Fiep

*FIEP*  
*SESI*  
*SENAI*  
*IEL*

nosso i é de indústria.