FORMULARIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES

ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

Ecuación lineal: $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$, $y = \left(\int \frac{q(x)}{e^{-\int p(x)dx}} dx + c \right) e^{-\int p(x)dx}$

Factor integrante: $e^{\int p(x)dx}$

Ecuación exacta: $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ y } \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

Factor integrante: $m(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$ y $m(y) = e^{\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)dy}$

Soluciones por sustitución

Ecuación homogénea:

$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$

Función homogénea: $f(tx,ty) = t^k f(x,y)$

Sustituciones: $x = uy$ o $y = vx$

Ecuación de Bernoulli:

$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x)y^n$

Sustitución: $w = y^{1-n}$

$\Rightarrow \frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)f(x)$

APLICACIONES (ED de Primer Orden)

Ley de enfriamiento de Newton: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m)$

Trayectorias ortogonales: $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C1}\left(\frac{dy}{dx}\right)_{C2} = -1$

Circuitos eléctricos: $L\frac{di}{dt} + Ri = E(t)$, $R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t)$, $i = \frac{dq}{dt}$

Caída libre (resistencia del aire $\approx$ velocidad): $m\frac{dv}{dt} = mg - kv$

Mezclas: $\frac{dA}{dt} = R_i - R_o = \left(\begin{matrix}\text{razón de entrada}\\ \text{de la sal}\end{matrix}\right) - \left(\begin{matrix}\text{razón de salida}\\ \text{de la sal}\end{matrix}\right)$

$$R_i = \left(\begin{matrix}\text{razón de entrada}\\ \text{de la salmuera}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{concentración de sal en el}\\ \text{efluente de entrada}\end{matrix}\right)$$

$$R_o = \left(\begin{matrix}\text{razón de salida}\\ \text{de la salmuera}\end{matrix}\right)\left(\begin{matrix}\text{concentración de sal en el}\\ \text{efluente de salida}\end{matrix}\right)$$

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN SUPERIOR

Segunda solución (reducción de orden): $y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

- Raíces reales diferentes: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$
- Raíces reales iguales: $y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 x e^{m_1 x} + \ldots + c_n x^{n-1} e^{m_1 x}$
- Raíces complejas diferentes (de la forma $m_k = a_k + b_k i$ y $m_{k+1} = a_k - b_k i$):

  $y = e^{a_1 x}(c_1 \cos b_1 x + c_2 sen\, b_1 x) + \ldots + e^{a_{n/2} x}(c_{n-1} \cos b_{n/2} x + c_n sen\, b_{n/2} x)$
- Raíces complejas iguales:

  $y = e^{a_1 x}(c_1 \cos b_1 x + c_2 sen\, b_1 x) + \ldots + x^{n-1} e^{a_1 x}(c_{n-1} \cos b_1 x + c_n sen\, b_1 x)$

Ecuaciones no homogéneas con coeficientes constantes

Operador anulador (coeficientes indeterminados)

- D^n anula $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$
- $(D - \alpha)^n$ anula $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \ldots, x^{n-1} e^{\alpha x}$
- $\left[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)\right]^n$ anula $x^{n-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$ y $x^{n-1} e^{\alpha x} sen\, \beta x$

Soluciones propuestas (coeficientes indeterminados)

Forma de la función $g(x)$	*Forma de la solución particular* y_P
Constante: a	$x^s A$ (1)
Polinomio: $p_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$	$x^s P_n(x) = x^s\left[A_n x^n + \ldots + A_1 x + A_0\right]$ (2)
Exponencial: $ae^{\alpha x}$	$x^s A e^{\alpha x}$
Senos y cosenos: $a \cos \beta x + b sen \beta x$	$x^s\left[A \cos \beta x + B sen \beta x\right]$
Producto de polinomio y exponencial: $p_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s P_n(x) e^{\alpha x}$
Productos de senos y cosenos por polinomios: $p_n(x)\cos \beta x + q_m(x) sen \beta x$ donde: $q_m(x) = b_m x^n + \ldots + b_1 x + b_0$	$x^s\left[P_N(x)\cos \beta x + Q_N(x) sen \beta x\right]$, donde $Q_N(x) = B_N x^n + \ldots + B_1 x + B_0$ y $N = \max(n,m)$
Productos de senos y cosenos por exponencial: $ae^{\alpha x}\cos \beta x + be^{\alpha x} sen \beta x$	$x^s e^{\alpha x}\left[A \cos \beta x + B sen \beta x\right]$
Productos de polinomios, senos y cosenos y exponencial: $p_n(x)e^{\alpha x}\cos \beta x + q_m(x)e^{\alpha x} sen \beta x$	$x^s e^{\alpha x}\left[P_N(x)\cos \beta x + Q_N(x) sen \beta x\right]$ donde $N = \max(n,m)$

(1) El entero no negativo s se elige como el menor entero tal que ningún término de la solución particular $y_P(x)$ sea solución de la ecuación homogénea correspondiente.

(2) $P_n(x)$ debe incluir todos los términos aunque $p_n(x)$ tenga algunos términos nulos.

Variación de parámetros: $c'_i(x) = \frac{\Delta_i}{w(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$

Ecuaciones homogéneas con coeficientes variables

- Raíces reales diferentes: $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2} + \ldots + c_n x^{m_n}$
- Raíces reales iguales: $y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x + \ldots + c_n x^{m_1} (\ln x)^{n-1}$
- Raíces complejas diferentes: $y = x^{\alpha_1}\left(c_1 \cos(\beta_1 \ln x) + c_2 sen(\beta_1 \ln x)\right) + \ldots$
  $\ldots + x^{\alpha_{n/2}}\left(c_{n-1} \cos(\beta_{n/2} \ln x) + c_n sen(\beta_{n/2} \ln x)\right)$
- Raíces complejas iguales: $y = x^{\alpha_1}\left(c_1 \cos(\beta_1 \ln x) + c_2 sen(\beta_1 \ln x)\right) + \ldots$
  $\ldots + x^{\alpha_1} (\ln x)^{n/2 - 1}\left(c_{n-1} \cos(\beta_1 \ln x) + c_n sen(\beta_1 \ln x)\right)$

APLICACIONES (ED de Orden Superior)

Ecuación General del Movimiento: $m\dfrac{d^2x}{dt^2} + \beta\dfrac{dx}{dt} + kx = f(t)$

Movimiento Armónico Simple

$\omega^2 = \dfrac{k}{m}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$, $x(t) = Asen(\omega t + \phi)$, $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$,

$sen\,\phi = \dfrac{c_1}{A}$, $\cos\phi = \dfrac{c_2}{A}$ y $\tan\phi = \dfrac{c_1}{c_2}$

Movimiento Vibratorio Amortiguado

$2\lambda = \dfrac{\beta}{m}$, *Caso 3:* $x(t) = Ae^{-\lambda t} Sen\left(\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}\, t + \phi\right)$, $cuasiperiodo = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$,

$cuasifrecuencia = \dfrac{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}{2\pi}$, $t = \dfrac{n\pi - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$, $t^* = \dfrac{(2n+1)\pi/2 - \phi}{\sqrt{\omega^2 - \lambda^2}}$

Circuitos eléctricos: $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = E(t)$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición:	$\mathscr{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt$
Primer Teorema de la Traslación: *Forma inversa:*	$\mathscr{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a) = F(s)\big\vert_{s\to s-a}$ $\mathscr{L}^{-1}\{F(s-a)\} = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\big\vert_{s\to s-a}\} = e^{at} f(t)$
Función escalón unitario:	$U(t-a) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ 1, & t \ge a \end{cases}$
Segundo Teorema de la Traslación: *Forma inversa:* *Forma alterna:*	$\mathscr{L}\{f(t-a)U(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ $\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = f(t-a)U(t-a)$ $\mathscr{L}\{g(t)U(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{g(t+a)\}$
Derivadas de transformadas:	$\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \dfrac{d^nF(s)}{ds^n} = (-1)^n \dfrac{d^n\mathscr{L}\{f(t)\}}{ds^n}$

Convolución:	$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$
Teorema de la Convolución: *Forma inversa:*	$\mathscr{L}\{f * g\} = \mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right\} = \mathscr{L}\{f(t)\}\mathscr{L}\{g(t)\}$ $\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f * g$
Transformada de una derivada:	$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{(n-1)}f(0) - s^{(n-2)}f'(0)\ldots - f^{(n-1)}(0)$
Transformada de una integral: *Forma inversa:*	$\mathscr{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \dfrac{F(s)}{s}$ $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)d\tau$

$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \le t < a \\ h(t), & t \ge a \end{cases}$ se puede escribir $f(t) = g(t) - g(t)U(t-a) + h(t)U(t-a)$

$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t < a \\ g(t), & a \le t < b \\ 0, & t \ge b \end{cases}$ se puede escribir $f(t) = g(t)[U(t-a) - U(t-b)]$

MÉTODO MATRICIAL (Sistemas de ecuaciones diferenciales)

$X = Ke^{\lambda t}$, $(A - \lambda I)K = 0$, $\det(A - \lambda I) = 0$

- Valores propios reales distintos:
  $X = c_1K_1e^{\lambda_1 t} + c_2K_2e^{\lambda_2 t} + \ldots + c_nK_ne^{\lambda_n t}$
- Valores propios repetidos
  Para $m = 2$, $X_2 = Kte^{\lambda_1 t} + Pe^{\lambda_1 t}$, con $(A - \lambda_1 I)P = K$
  Para $m = 3$, $X_3 = K\dfrac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + Pte^{\lambda_1 t} + Qe^{\lambda_1 t}$, con $(A - \lambda_1 I)Q = P$
- Valores propios complejos: $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_2 = \alpha - \beta i$,
  $X_1 = [B_1 \cos\beta t - B_2 sen\,\beta t]e^{\alpha t}$, $X_2 = [B_2 \cos\beta t + B_1 sen\,\beta t]e^{\alpha t}$,
  con $B_1 = \mathrm{Re}(K_1)$ y $B_2 = \mathrm{Im}(K_1)$

Solución general: $X = X_c + X_P = \Phi(t)C + \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)F(t)dt$

$\Phi^{-1}(t) = \dfrac{1}{\det\Phi(t)}\begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{12} \\ -\phi_{21} & \phi_{11} \end{pmatrix}$, o en general $\Phi^{-1}(t) = \dfrac{1}{\det\Phi(t)}\mathrm{adj}(\Phi(t))$, con $\mathrm{adj}(\Phi(t)) = \mathrm{cof}(\Phi(t))^T$

SERIES DE POTENCIAS

Solución en torno a puntos ordinarios: $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$

Si $x_0 = 0$, entonces $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$