Determinación de Máximos, Mínimos y Puntos de Silla para Funciones de Varias Variables

Para Funciones de 2 Variables $f(x, y)$

1. **Encontrar Puntos Críticos**:

- Calcula las derivadas parciales de la función respecto a x y y, es decir, f_x y f_y.
- Encuentra los puntos críticos resolviendo el sistema de ecuaciones $f_x = 0$ y $f_y = 0$.

2. **Calcular la Matriz Hessiana**:

- La matriz Hessiana es una matriz de segundas derivadas:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- Calcula f_{xx}, f_{yy} y f_{xy} para cada punto crítico.

3. **Clasificación usando el Determinante de la Hessiana**:

- Calcula el determinante de la matriz Hessiana: $D = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$.
- Clasificación de los puntos:
  - **Mínimo Local**: Si $D > 0$ y $f_{xx} > 0$.
  - **Máximo Local**: Si $D > 0$ y $f_{xx} < 0$.
  - **Punto de Silla**: Si $D < 0$.
  - **Indeterminado**: Si $D = 0$, se requieren métodos adicionales.

Para Funciones de 3 Variables $f(x, y, z)$

1. **Encontrar Puntos Críticos**:

- Calcula las derivadas parciales f_x, f_y y f_z.

- Encuentra los puntos donde $f_x = 0$, $f_y = 0$ y $f_z = 0$ se cumplen al mismo tiempo.

2. **Calcular la Matriz Hessiana**:

- La matriz Hessiana será de 3×3:

$$H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix}$$

- Evalúa todas las segundas derivadas parciales en los puntos críticos para construir la matriz Hessiana.

3. **Clasificación usando Autovalores o Menores Principales**:

- Clasifica los puntos críticos basándote en los autovalores de la matriz Hessiana:
  - **Mínimo Local**: Si todos los autovalores son positivos.
  - **Máximo Local**: Si todos los autovalores son negativos.
  - **Punto de Silla**: Si los autovalores tienen signos mixtos.

Clasificación de los Puntos Críticos

Los puntos críticos se clasifican según los determinantes:

- **Mínimo local**: Si $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, y $D_3 > 0$.
- **Máximo local**: Si $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, y $D_3 < 0$.
- **Punto de silla**: Si alguno de los determinantes D_1, D_2, o D_3 tiene un signo diferente de los demás:
  - Si $D_1 > 0$ y $D_2 < 0$.
  - Si $D_1 < 0$ y $D_2 > 0$.
  - O si D_3 tiene signos mixtos.

Además:

- Si alguno de los determinantes es 0, entonces el criterio no es concluyente:
  - $D_1 = 0$ o $D_2 = 0$ o $D_3 = 0$.
- Si algún determinante par es negativo, entonces el punto crítico es un punto silla:
  - $D_2 < 0$.

- Si todos los determinantes son positivos, entonces el punto crítico es un punto mínimo relativo:
  - $D_1 > 0, D_2 > 0, D_3 > 0$.
- Si los determinantes pares son positivos y los impares son negativos, entonces el criterio es un punto silla de máximo relativo:
  - $D_1 < 0, D_2 > 0, D_3 < 0$.

Clasificación de puntos críticos de una función multivariable

Para clasificar los puntos críticos de una función $f(x, y, z)$, utilizamos la matriz Hessiana, que está formada por las segundas derivadas parciales de la función. Los determinantes de los menores principales de esta matriz, D_1, D_2, y D_3, junto con las segundas derivadas parciales f_{xx}, f_{yy}, y f_{zz}, nos permiten determinar el tipo de punto crítico. La clasificación completa es la siguiente:

Clasificación según la matriz Hessiana

- **Mínimo Local:**
  - Condiciones: $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 > 0$, y $f_{xx} > 0$, $f_{yy} > 0$, $f_{zz} > 0$
  - Conclusión: La matriz Hessiana es *definida positiva* (mínimo local).
- **Máximo Local:**
  - Condiciones: $D_1 > 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, y $f_{xx} < 0$, $f_{yy} < 0$, $f_{zz} < 0$
  - Conclusión: La matriz Hessiana es *definida negativa* (máximo local).
- **Punto de Silla:**
  - Condiciones: $D_1 > 0$, $D_2 < 0$, $D_3 < 0$, y segundas derivadas mixtas (algunas positivas, otras negativas)
  - Conclusión: La matriz Hessiana es *indefinida* (punto de silla).
- **Indeterminado:**
  - Condiciones: $D_1 = 0$ o $D_2 = 0$ o $D_3 = 0$
  - Conclusión: Se requieren métodos adicionales para clasificar el punto.

Para Funciones con Más de 3 Variables

1. **Puntos Críticos**:

- Deriva la función respecto a cada variable y encuentra los puntos donde todas las derivadas parciales son cero.

2. **Matriz Hessiana**:

- La matriz Hessiana tendrá dimensión $n \times n$ para una función de n variables.

3. **Clasificación**:

- La clasificación de los puntos se realiza mediante los autovalores de la matriz Hessiana o analizando los menores principales:
  - **Mínimo Local**: Todos los autovalores son positivos.
  - **Máximo Local**: Todos los autovalores son negativos.
  - **Punto de Silla**: Autovalores con signos mixtos.