Relatório

Hideki Seckler, Hugo Trigueiro, Kevin Zavala

Primeira etapa - Encontrando os mínimos locais

Considere a função:

$S(m,b) = \sum_{j=1}^{n}(mx_j - y_j + b)^2$

do método dos mínimos quadrados.

Queremos encontrar a reta que minimize a distância dos pontos - casos de Covid-19 na Inglaterra - à reta teórica. A função s(m,b) descreve esta distância, portanto queremos minizá-la.

(a) Encontrar o gradiente de S num ponto (m,b) genérico

O gradiente de uma função f, denotado por ∇f, é a coleção de todas as suas derivadas parciais em um vetor. Deste modo, para encontrar **possíveis** pontos mínimos de uma função devemos conhecer todas suas derivadas parciais e depois igualá-las a zero.

Gradiente: $\nabla S(m,b) = (\frac{\partial S}{\partial m}(m_o, b_0), \frac{\partial S}{\partial b}(m_o, b_o))$

Então $\nabla S(m,b)$ é:

$\frac{\partial S}{\partial m} = \frac{\partial}{\partial m} \sum_{j=1}^{n}(mx_j - y_j + b)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial m}(mx_j - y_j + b)^2$

$\frac{\partial S}{\partial m} = \sum_{j=1}^{n} 2(mx_j - y_j + b)(xj)$

$\boxed{\frac{\partial S}{\partial m} = 2[m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + b\sum_{j=1}^{n} x_j]}$

$\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{\partial}{\partial b} \sum_{j=1}^{n}(mx_j - y_j + b)^2 = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial b}(mx_j - y_j + b)^2$

$\frac{\partial S}{\partial b} = \sum_{j=1}^{n} 2(mx_j - y_j + b)$

$\boxed{\frac{\partial S}{\partial b} = 2[m\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n} b]}$

(b) Os pontos críticos

Para econtrarmos os **possíveis** pontos mínimos vamos calcular os pontos críticos. Isto equivale a dizer que vamos calcular

$\frac{\partial S}{\partial m} = 0, \frac{\partial S}{\partial b} = 0$

$\frac{\partial S}{\partial m} = 2[m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + b\sum_{j=1}^{n} x_j] = 0$

$\frac{\partial S}{\partial m} = 2m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j + 2b\sum_{j=1}^{n} x_j = 0$

$\Rightarrow 2m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + 2b\sum_{j=1}^{n} x_j = 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

$\Rightarrow 2[m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j] = 2\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$

Portanto:

$\boxed{\frac{\partial S}{\partial m} = 0 \Rightarrow m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j}$

$\frac{\partial S}{\partial b} = 2[m\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n} b] = 0$

$\frac{\partial S}{\partial b} = 2m\sum_{j=1}^{n} x_j - 2\sum_{j=1}^{n} y_j + 2\sum_{j=1}^{n} b = 0$

$\Rightarrow 2m\sum_{j=1}^{n} x_j + 2\sum_{j=1}^{n} b = 2\sum_{j=1}^{n} y_j$

Obs: $\sum_{j=1}^{n} b = nb$

$\Rightarrow 2m\sum_{j=1}^{n} x_j + 2nb = 2\sum_{j=1}^{n} y_j$

$\Rightarrow 2[m\sum_{j=1}^{n} x_j + nb] = 2\sum_{j=1}^{n} y_j$

Portanto:

$\boxed{\frac{\partial S}{\partial b} = 0 \Rightarrow m\sum_{j=1}^{n} x_j + nb = \sum_{j=1}^{n} y_j}$

(c) Determinando a matriz Hessiana de S no ponto (m,b)

Para que o ponto seja mínimo, deve-se atender as seguintes condições: $S_{mm}(m,b) > 0$, Determinante da matriz Hessiana [H(m,b)] = 0.

$$H(m,b) = \begin{bmatrix} S_{mm}(m,b) & S_{mb}(m,b) \\ S_{mb}(m,b) & S_{mm}(m,b) \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

$S_{mm} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial^2 m} = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 m} 2[m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + b \sum_{j=1}^{n} x_j]$

$S_{mm} = 2[\dfrac{\partial^2}{\partial^2 m} m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial^2 m} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j - \dfrac{\partial^2 f}{\partial^2 m} b \sum_{j=1}^{n} x_j]$

$\dfrac{\partial^2}{\partial^2 m} m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} x_j^2$

$\dfrac{\partial^2}{\partial^2 m} - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 0$

$\dfrac{\partial^2}{\partial^2 m} b \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$

$\boxed{S_{mm} = 2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2}$

$S_{mb} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial b \partial m} = \dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} 2[m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + b \sum_{j=1}^{n} x_j]$

$S_{mb} = 2[\dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} b \sum_{j=1}^{n} x_j]$

$\dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = 0$

$-\dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = 0$

$\dfrac{\partial^2}{\partial b \partial m} b \sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j$

$\boxed{S_{mb} = 2 \sum_{j=1}^{n} x_j}$

$S_{bb} = \dfrac{\partial^2 S}{\partial^2 b} = \dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} 2[m \sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{j=1}^{n} b]$

$S_{bb} = 2[\dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} m \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} \sum_{j=1}^{n} x_j y_j + \dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} b \sum_{j=1}^{n} x_j]$

$\dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} m \sum_{j=1}^{n} x_j = 0$

$\dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} - \sum_{j=1}^{n} y_j = 0$

$\dfrac{\partial^2}{\partial^2 b} \sum_{j=1}^{n} b = n$

$\boxed{S_{bb} = 2n}$

Portanto temos que a Hessiana de S é:

$$H(m,b) = \begin{bmatrix} 2\sum_{j=1}^{n} x_j^2 & 2\sum_{j=1}^{n} x_j \\ 2\sum_{j=1}^{n} x_j & 2n \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

(d) Teste da segunda derivada

O cálculo da determinante é dado por: $D = detH(m,b) = S_{mm}(m,b)S_{bb}(m,b) - S_{mb}(m,b)^2$

$D = 2\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \times 2n - (2\sum_{j=1}^{n} x_j)^2$

$D = 4n\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 4(\sum_{j=1}^{n} x_j)^2$

Assumindo que $2\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - (2\sum_{j=1}^{n} x_j)^2 > 0$

$detH(m,b) > 0$.

Como: $S_{mm} = 2\sum_{j=1}^{n} x_j^2 > 0$

$\boxed{\text{O ponto (m,b) é ponto de mínimo local}}$

Segunda etapa - Determinação e esboço da reta teórica de aproximação

O ponto de mínimo será a solução do sistema:

$$m\sum_{j=1}^{n} x_j^2 + b\sum_{j=1}^{n} x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

$$m\sum_{j=1}^{n} x_j + nb = \sum_{j=1}^{n} y_j$$

Para resolver o sistema usaremos os dados de tal modo que x_i= Dia,y_i = ln(Número de casos), n= número de observações

$\sum_{j=1}^{50} x_j^2 = 42925$

$\sum_{j=1}^{50} x_j = 1275$

$\sum_{j=1}^{50} x_j y_j = 11783.61$

$\sum_{j=1}^{50} y_j = 382.0408$

Portanto o sistema fica assim:

$42925m + 1275b = 11783.61$

$1275m + 50b = 382.0408$

Solução:

$42925m + 1275b = 11783.61$**(2)**

$1275m + 50b = 382.0408$**(51)**

$85850m + 2550b = 23567.22$

$65025m + 2550b = 19484.08$ **(-)**

$20825m = 4083.14$

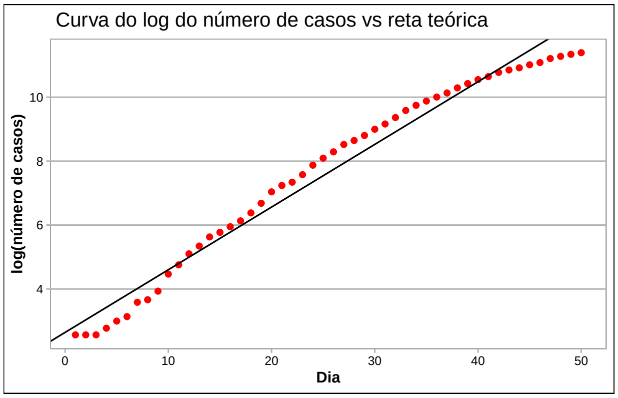
$\boxed{m = 0.1960691}$

$1275(0.1960691) + 50b = 382.0408$

$\boxed{b = 2.641054}$

$y = mx + b$

$\boxed{y = 0.1960691x + 2.641054}$



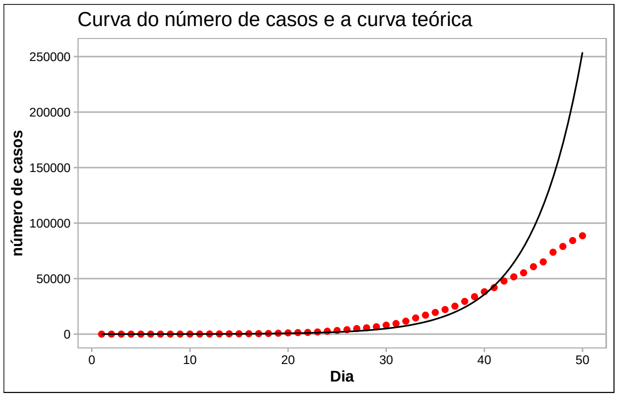
Terceira etapa - Determinação e esboço da curva exponencial

$N = \alpha \mathrm{e}^{\beta x}$

$y = ln(N) = \ln(\alpha \mathrm{e}^{\beta x}) = ln(\alpha) + ln(e^{\beta x}) = \beta x + ln(\alpha)$

Como $y = ln(N) \to N = e^y = e^{mx+b}$

$\boxed{e^{0.1960691x+2.641054}}$



Conclusão

O gráfico fornecido e o gráfico obtido a partir da minimização de $S(m, b)$ são muito parecidos. Ademais, vê-se que até o dia 40, a curva real está muito próxima da curva teórica, o que demonstra a eficiência deste simples método no cálculo do número de casos nos primeiros dias.