

Kévi Pegoraro

Modelo de 2 Fluidos para o Breackdown no Tocamak Nova-Furg

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Mês da Defesa, Ano

Kévi Pegoraro

Modelo de 2 Fluidos para o Breackdown no Tocamak Nova-Furg

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática
Aplicada Bacharelado, submetido por XXXX
junto ao Instituto de Matemática, Estatística e
Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dro. Magno P. Coralles

Coorientador: Dr. se houver

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Mês da Defesa, Ano

Este trabalho é dedicado Liberdade que não temos.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Magno Pinto Collares pela grande ajuda na orientação deste trabalho e ao professor Gustavo Paganini Canal - USP pela contribuição com material de estudo, resposta a inúmeras dúvidas e ajuda com desenvolvimento numérico.

Resumo

Será deduzido o modelo para 2 fluidos, em seguida simplificado e explicado cada passo, para então ser implementado no Matlab e simulado com os dados do Tokamak-Nova Furg. **Palavras-**

chaves: XX, XX.

Abstract

It will be deduced the model for 2 fluids, then simplified and explained each step, to be implemented in Matlab and simulated with data to Tokamak-Nova Furg..

Key-words: XX, XX.

Lista de ilustrações

Figura 1 – campo carga pontiforme - 1º quadrante	28
Figura 2 – campo carga pontiforme	29
Figura 3 – campo carga pontiforme no interior de 4 campos lineares de fio infinito . . .	29
Figura 4 – Esquema da separação do vetor velocidade nos componentes paralelos e ortogonais a B	38

Lista de tabelas

Tabela 1 – Cronograma	11
Tabela 2 – Relação entre unidades	35

Sumário

	Introdução	10
0.1	Objetivos	10
0.2	Metodologia	10
0.3	Resultados esperados	10
0.4	Cronograma	10
0.5	Análise de viabilidade	11
0.6	Como Funciona um Tokamak	11
1	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	13
1.1	Introdução ao Plasma	13
1.1.1	Definição de um plasma	14
1.1.2	A aproximação de plasma	14
1.1.3	Interações de volume	14
1.1.4	Frequência de plasma	15
1.1.5	Grau de ionização	15
1.1.6	Temperaturas	15
1.2	Função de Distribuição	16
1.2.1	Temperatura e Outros Momentos da Função de Distribuição	17
1.2.2	O Gerador Magnetohidrodinâmico	17
2	DEDUÇÃO MODELO DE 2 FLUIDOS	18
2.1	Equação de Vlasov	18
2.2	Momentos da distribuição	19
3	O MODELO PARA 2 FLUIDOS	24
3.1	O Sistema de Equações que Deve Ser Implementado	24
4	IMPLEMENTAÇÃO	28
4.1	Introdução ao Matlab	28
4.2	Modelo de 2 Fluidos	29
5	CONCLUSÕES	31
References		31
REFERÊNCIAS		32

	ANEXOS	34
.1	Tabela de Unidade Úteis	35
.2	Equacionando o Plasma	35
.2.1	Movimento constante e uniforme de partículas em campos eletromagnéticos	36
.2.2	Campo eletromagnético uniforme	37
.2.3	Campo magnético uniforme	37

Introdução

Entender o breakdown do plasma é essencial para melhorar o desempenho dos tokamaks e é um passo importante para chegarmos a fonte de energia ampla e não poluente que a fusão pode se tornar. O objetivo do presente trabalho é, por meio de uma simulação numérica, estudar a fase de breakdown do plasma dentro de um tokamak, do início da descarga primária até a estabilização dentro do tokamak NOVA-Furg. Espero neste trabalho obter dados de simulação querentes com os medidos nos disparos do tokamak, para poder compreender melhor o que está acontecendo durante o breakdown, tendo assim uma maneira de prever os resultados de cada experimento na máquina.

0.1 Objetivos

O objetivo do presente trabalho é, estudar o modelo de 2 Fluidos para o Breakdown no Tokamak Nova-Furg, após deduzir o modelo irei por meio de uma simulação numérica, estudar a fase de breakdown do plasma dentro de um tokamak, do início da descarga primária até a estabilização dentro do tokamak NOVA-Furg.

0.2 Metodologia

Após o levantamento bibliográfico, escolherei o melhor modelo para simular o Breakdown do plasma e conseqüentemente sua versão implementada, para que com os dados reais do tokamak NOVA, possam ser realizadas as simulações.

0.3 Resultados esperados

Espero neste trabalho obter dados de simulação querentes com os medidos nos disparos do tokamak, para poder compreender melhor o que está acontecendo durante o breakdown, tendo assim uma maneira de prever os resultados de cada experimento na máquina. E se possível calcular quais os melhores parâmetros para operar tal máquina.

0.4 Cronograma

O cronograma do trabalho encontra-se na Tabela 1, onde as etapas são: Fase Teórica:

- estudar a teoria do plasma cinético e derivar o modelo de plasma de dois fluidos a partir dele;
- linearizar as equações relevantes;
- simplificar as equações com base em suposições que são específicas para a inicialização do

plasma fase em plasmas TCABR / NOVA;

Fase Computacional:

- implementar cada equação do modelo de física separadamente no MATLAB;
- acoplar os solucionadores individuais correspondentes a cada equação;
- resolver as equações de maneira autoconsistente para um caso real de inicialização de plasma TCABR
- definir as condições iniciais e de contorno relevantes

1. Levantamento bibliográfico;
2. Análise inicial (estudo dos modelos existentes para tratar do início do plasma);
3. Análises e simulação com dados reais (implementação e simulação);
4. Análise dos resultados;
5. Relatório/síntese dos resultados.

Tabela 1 – Cronograma

Etapa	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.
1	x	x					x	x	x
2	x	x	x						
2			x	x	x	x			
3						x	x	x	
4				x				x	x

0.5 Análise de viabilidade

o trabalho é totalmente viável de se realizar no prazo de 1 ano, pois com respeito a custos com equipamentos, não tenho nenhum, e como já sei exatamente que modelo estudar o terei ajuda de professores experientes na área, concluo ser viável a realização da proposta deste trabalho.

0.6 Como Funciona um Tokamak

Tokamak é um reator experimental de fusão nuclear. Serve para estudar plasmas de alta temperatura que são mantidos confinados por campos magnéticos intensos. O objetivo final da pesquisa nesta área é viabilizar, no futuro, a construção de reatores nucleares de fusão, onde núcleos de deutério e trítio possam se unir, liberando uma grande quantidade de energia que servirá para aquecer água, gerar vapor e assim mover uma turbina, acoplada a um gerador

elétrico. A pesquisa em tokamaks, portanto, está ligada à procura de fontes alternativas de energia para a produção de eletricidade. Basicamente, o Tokamak é um potente eletroímã que produz um campo magnético toroidal para o confinamento de plasma (o quarto estado físico da matéria, que compõe as estrelas) de isótopos pesados de hidrogênio (deutério e trítio especificamente). Em seu interior ocorre uma reação de fusão nuclear cujo objetivo é criar plasma que deve ser contido em um espaço limitado, de forma a não tocar nas paredes internas do reator, tanto para não danificá-lo, quanto para não dissipar a energia do combustível via condução térmica. O plasma é então contido pelo intenso campo magnético gerado pelo Tokamak. O isolamento magnético permite que se alcancem altas temperaturas, impedindo o combustível da reação, os isótopos de hidrogênio, de desgastar ou sobreaquecer o reator. O campo magnético tem geometria toroidal (em forma de pneu). Este método de contenção do plasma, é conhecido como confinamento magnético. Existe ainda, outra forma de confinamento do plasma que é o confinamento inercial. Nesta, um laser de alta potência bombardeia o combustível do reator. Isto causa a "implosão" do combustível e o início de uma reação em cadeia, que tem como consequência o início do processo de fusão nuclear. Na natureza há uma terceira forma, o confinamento gravitacional, este impraticável na Terra. O confinamento gravitacional é a forma como as estrelas contêm o plasma. O Sol, assim como todas as estrelas, é na verdade um reator natural de fusão nuclear. O Tokamak é ainda caracterizado pela simetria azimutal (rotacional) e pelo uso da corrente de plasma para gerar a componente helicoidal do campo magnético, necessária para um equilíbrio estável.

1 Fundamentação Matemática

1.1 Introdução ao Plasma

O plasma é um dos estados físicos da matéria, similar ao gás, no qual certa porção das partículas é ionizada (em física, núcleos atômicos, provenientes de átomos completamente ionizados, como os da radiação alfa, são habitualmente designados como partículas carregadas, a ionização é geralmente alcançada pela aplicação de elevadas energias aos átomos, seja através da aplicação de uma alta tensão elétrica ou por via de radiação de alta energia, um gás ionizado é chamado plasma). A premissa básica é que o aquecimento de um gás provoca a dissociação das suas ligações moleculares, convertendo-o em seus átomos constituintes. Além disso, esse aquecimento adicional pode levar à ionização (ganho ou perda de elétrons) dessas moléculas e dos átomos do gás, transformando-o em plasma contendo partículas carregadas (elétrons e íons positivos). A presença de um número não desprezível de portadores de carga torna o plasma eletricamente condutor, de modo que ele responde fortemente a campos eletromagnéticos. O plasma, portanto, possui propriedades bastante diferentes das de sólidos, líquidos e gases e é considerado um estado distinto da matéria. Como o gás, o plasma não possui forma ou volume definidos, a não ser quando contido em um recipiente; diferentemente do gás, porém, sob a influência de um campo magnético ele pode formar estruturas como filamentos, raios e camadas duplas. Alguns plasmas comuns são as estrelas e placas de neônio. No universo, o plasma é o estado mais comum da matéria comum, a maior parte da qual se encontra no rarefeito plasma intergaláctico e em estrelas. Langmuir escreveu:

Com exceção das proximidades dos eletrodos, onde há bainhas contendo menos elétrons, o gás ionizado contém íons e elétrons em quantidades aproximadamente iguais, de modo que a carga espacial resultante é muito pequena. Nós usaremos o nome plasma para descrever esta região contendo cargas equilibradas de íons e elétrons.

Também é definido como gás no qual uma fração substancial dos átomos está ionizada. Um processo simples de ionização é aquecer o gás para que aumente o impacto eletrônico, por exemplo. Desse modo, o gás se torna o plasma quando a adição de calor ou outra forma de energia faz com que um número significativo de seus átomos libere alguns ou todos os seus elétrons. Esses átomos que perdem elétrons ficam ionizados, ou seja, com uma carga positiva resultante, e os elétrons separados de seus átomos ficam livres para se mover pelo gás, interagindo com outros átomos e elétrons.

Por apresentar-se num estado fluido similar ao estado gasoso, o plasma é comumente descrito ou como o "quarto estado de agregação da matéria"(os três primeiros sendo sólido,

líquido e gasoso). Mas essa descrição não é muito precisa, pois a passagem de um gás para a forma de plasma não ocorre através de uma transição de fase bem definida, tal como nas transições do estado sólido para líquido e deste para gás. De todo modo, o plasma pode ser considerado como um estado distinto da matéria, caracterizado por possuir um número de partículas eletricamente carregadas que é suficiente para afetar suas propriedades e comportamento. Os plasmas são bons condutores elétricos, e suas partículas respondem fortemente a interações eletromagnéticas de grande alcance.

Quando o número de átomos ionizados é relativamente pequeno, a interação entre as partículas carregadas do gás ionizado é dominada por processos colisionais, ou seja, que envolvem principalmente colisões binárias entre elas. Quando o número de partículas carregadas é substancial, a interação entre as partículas carregadas é dominada por processos coletivos, ou seja, a dinâmica de cada uma delas é determinada pelos campos elétricos e magnéticos produzidos por todas as outras partículas carregadas do meio. Neste caso, o gás ionizado passa a ser denominado plasma

1.1.1 Definição de um plasma

O plasma é livremente descrito como um meio eletricamente neutro de partículas positivas e negativas (isto é, a carga total de um plasma é aproximadamente zero). É importante notar que, embora não tenham limites, essas partículas não são "livres". Quando as cargas se movem, elas geram correntes elétricas com campos magnéticos e, como resultado, cada uma é afetada pelos campos das outras. Isto determina o comportamento coletivo com muitos graus de liberdade.

1.1.2 A aproximação de plasma

Partículas carregadas devem estar suficientemente próximas, de modo que cada uma influencie muitas partículas carregadas na sua vizinhança, em vez de somente interagir com a mais próxima (esses efeitos coletivos são característicos de um plasma). A aproximação de plasma é válida quando o número de portadores de carga no interior da esfera de influência (chamada de esfera de Debye, cujo raio é o comprimento de Debye) de uma partícula em particular é maior do que uma unidade, para que haja comportamento coletivo das partículas carregadas. O número médio de partículas na esfera de Debye é representado pelo parâmetro de plasma " λ " (a letra grega lambda).

1.1.3 Interações de volume

O comprimento de Debye (definido acima) é pequeno se comparado ao tamanho físico do plasma. Este critério significa que as interações no interior do plasma são mais importantes do que nas bordas, onde podem ocorrer efeitos de fronteira. Quando este critério é obedecido, o plasma é praticamente neutro.

1.1.4 Frequência de plasma

A frequência dos elétrons do plasma (medindo a oscilação da densidade dos elétrons do plasma) é alta se comparada à frequência de colisões entre elétrons e partículas neutras. Quando esta condição é válida, as interações eletrostáticas predominam sobre os processos da cinética normal dos gases. Uma das manifestações fundamentais da propriedade coletiva do plasma é a oscilação de plasma. Seja um plasma em equilíbrio. Se se deslocar um elemento de cargas negativas da sua posição de equilíbrio, devido a interação coletiva de cargas da vizinhança aparece uma força restauradora proporcional ao deslocamento. O resultado é uma oscilação cuja frequência chamada frequência de plasma é expressa por:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

A frequência de plasma é frequentemente utilizada como um meio de medir a densidade de um plasma. Existe uma relação entre a velocidade térmica, v_θ , a frequência de plasma e o comprimento de Debye.

$$v_\theta = \lambda_D \omega_p \quad (1.2)$$

Esta oscilação de plasma pode deixar de existir se a densidade de partículas neutras no plasma for aumentada, de modo que o tempo de colisões, τ , entre a partícula carregada e a partícula neutra for inferior ao período de oscilação do plasma. Requer-se então:

$$\omega_p \tau > 1 \quad (1.3)$$

para existência desta oscilação.

1.1.5 Grau de ionização

A ionização é necessária para o plasma existir. O termo "densidade do plasma" usualmente se refere à "densidade de elétrons", isto é, o número de elétrons livres por unidade de volume. O grau de ionização de um plasma é a proporção de átomos que perderam (ou ganharam) elétrons e é controlado principalmente pela temperatura. Mesmo um gás parcialmente ionizado, em que somente 1% das partículas esteja ionizada, pode apresentar as características de um plasma, isto é, resposta a campos magnéticos e alta condutividade elétrica. O grau de ionização α é definido como $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$, em que n_i é a densidade de íons e n_a é a densidade de átomos neutros. A densidade de elétrons está relacionada a ele pelo estado médio da carga $\langle Z \rangle$ dos íons, sendo que $n_e = \langle Z \rangle n_i$, em que n_e é a densidade de elétrons.

1.1.6 Temperaturas

A temperatura do plasma é normalmente medida em kelvins ou elétron-volts e é, informalmente, uma medida da energia cinética térmica por partícula. Geralmente são necessárias temperaturas muito altas para sustentar a ionização, a qual é uma característica definidora de um plasma. O

grau de ionização do plasma é determinado pela "temperatura do elétron" relativa ao potencial de ionização (e, com menos intensidade, pela densidade), numa relação chamada equação de Saha. Em baixas temperaturas, os íons e elétrons tendem a se recombinar para o seu estado ligado - átomos - e o plasma acaba se convertendo em um gás.

Na maioria dos casos os elétrons estão suficientemente próximos do equilíbrio térmico, de modo que sua temperatura é relativamente bem definida, mesmo quando há um desvio significativo de uma função de distribuição de energia maxwelliana, devido, por exemplo, a radiação ultravioleta, a partículas energéticas ou a campos elétricos fortes. Por causa da grande diferença de massa, os elétrons chegam ao equilíbrio termodinâmico entre si muito mais rapidamente do que com os íons ou átomos neutros. Por esta razão, a "temperatura do íon" pode ser muito diferente (normalmente menor) da "temperatura do elétron". Isto é especialmente comum em plasmas tecnológicos fracamente ionizados, cujos íons estão frequentemente próximos à temperatura ambiente.

Em função das temperaturas relativas dos elétrons, íons e partículas neutras, os plasmas são classificados como "térmicos" ou "não térmicos". Plasmas térmicos possuem elétrons e partículas pesadas à mesma temperatura, isto é, eles estão em equilíbrio térmico entre si. Plasmas não térmicos, por outro lado, possuem íons e átomos neutros a uma temperatura muito menor (normalmente temperatura ambiente), enquanto os elétrons são muito mais "quentes".

Um plasma é às vezes chamado de "quente" se ele está quase totalmente ionizado, ou "frio" se apenas uma pequena fração (por exemplo, 1%) das moléculas do gás estão ionizadas, mas outras definições dos termos "plasma quente" e "plasma frio" são comuns. Mesmo em um plasma "frio", a temperatura do elétron é tipicamente de várias centenas de graus Celsius. Os plasmas utilizados na "tecnologia de plasma" ("plasmas tecnológicos") são normalmente frios neste sentido.

1.2 Função de Distribuição

A função distribuição, f , é a densidade de partículas no espaço de fase de seis dimensões, três de posição e três de velocidade. Quando o plasma está em equilíbrio termodinâmico a função de distribuição se torna Maxwelliana, conforme o teorema-H de Boltzmann. A distribuição Maxwelliana é dada por:

$$f(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-mv^2}{kT} \right) \quad (1.4)$$

onde n é a densidade média de partículas no espaço de configuração, T é a temperatura do plasma, m é a massa de uma partícula, \vec{v} é a velocidade e k a constante de Boltzmann. Na maioria dos plasmas de laboratório o estudo é feito antes do plasma entrar em equilíbrio termodinâmico. Frequentemente estudos são feitos considerando que o plasma está em um certo equilíbrio, tais como elétrons em equilíbrio entre si a uma temperatura T_e e íons em equilíbrio entre si a uma

temperatura T_i , e investiga-se o que acontece com a distribuição a partir deste estado que se chama meta-equilíbrio.

1.2.1 Temperatura e Outros Momentos da Função de Distribuição

A função de distribuição é uma descrição microscópica de um plasma. Em contraste, uma descrição macroscópica de um plasma se faz pela especificação de valores médios das propriedades do plasma tais como, a densidade, a velocidade média, a pressão, a temperatura etc. Existem relações entre a função de distribuição e estas grandezas macroscópicas, Assim: densidade

$$n_a = \int f_a d\vec{v} \quad (1.5)$$

velocidade média

$$\vec{V}_a = \int f_a \frac{d\vec{v}}{n_a} \quad (1.6)$$

tensor de pressão

$$\overline{\overline{P}}_a = \frac{m_a}{n_a} \int (\vec{v} - \vec{V}_a)(\vec{v} - \vec{V}_a) f_a d\vec{v} \quad (1.7)$$

onde o índice a indica espécie de partículas, tais como, elétrons, íons de massa m_a e carga q_a , nêutrons de massa m_a , etc.

1.2.2 O Gerador Magnetohidrodinâmico

(Citação do livro **J. A. Bittencourt (auth.)-Fundamentals of Plasma Physics-Springer New York (2004)**)

O gerador de energia magnetohidrodinâmico (MHD) converte a energia cinética de um plasma denso que flui através de um campo magnético para energia elétrica. O seu princípio básico é bastante simples. Suponha que um plasma flua com velocidade u (ao longo da direção x) através de um campo magnético aplicado B (na direção z). A força de Lorentz $q(uxB)$ faz com que os íons se desloquem para cima (na direção z) e os elétrons para baixo, de modo que, se trodos são colocados nas paredes do canal e conectados a um circuito externo, então uma densidade de corrente $J = uE_{ind} = uuxB$ (onde u denota condutividade do plasma e E_{ind} é o campo elétrico induzido) flui através do fluxo de plasma na direção z . Essa densidade de corrente, por sua vez, produz uma densidade de força JxB (na direção x), que desacelera o plasma em fluxo. O resultado líquido é a conversão de parte da energia cinética do plasma que entra no gerador em energia elétrica que pode ser aplicada a uma carga externa. Este processo tem a vantagem de operar sem a ineficiência de um ciclo de calor.

2 Dedução Modelo de 2 Fluidos

2.1 Equação de Vlasov

Uma maneira aproximada muito útil para descrever a dinâmica de um plasma é considerar que os movimentos das partículas do plasma são governados pelos campos externos aplicados mais os campos internos médios macroscópicos, suavizados no espaço e no tempo, devido à presença e movimento de todas as partículas de plasma. O problema de obter os campos eletromagnéticos internos macroscópicos (suavizados), no entanto, ainda é complexo e requer que uma solução auto-consistente seja obtida. A equação de Vlasov é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução temporal da função de *distribuição* ($f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$) no espaço de fase e que incorpora diretamente os campos eletromagnéticos internos macroscópicos suavizados. Pode ser obtido da equação de Boltzmann na ausência de colisões 2.1

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + a \nabla_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (2.1)$$

mas incluindo os campos suavizados internos no termo de força,

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{1}{m_\alpha} [\vec{F}_{ext} + q_0(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i)] \cdot \nabla_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (2.2)$$

Então 2.2 é a equação de Vlasov. Aqui \vec{F}_{ext} representa a força externa, incluindo a força de Lorentz associada a quaisquer campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, e \vec{E}_i e \vec{B}_i são campos elétricos e magnéticos suavizados internos devido à presença e movimento de todas as partículas carregadas dentro do plasma. Para que os campos eletromagnéticos macroscópicos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i sejam consistentes com as densidades de carga e corrente macroscópicas existentes no próprio plasma, eles devem satisfazer as equações de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{E}_i = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_i = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t}) \quad (2.6)$$

com a densidade de carga do plasma ρ e a densidade de corrente do plasma \vec{J} dada pelas expressões

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.7)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) \vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathbf{v}} \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v \quad (2.8)$$

Aqui $\vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t)$ denota a velocidade média macroscópica de cada espécie de partícula α que é dada por

$$\vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_{\alpha}(\vec{r}, t)} \int_{\mathbf{v}} \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3 v \quad (2.9)$$

Tais equações constituem um conjunto completo de equações a serem resolvidas simultaneamente. Por exemplo, em um procedimento iterativo assumindo valores aproximados iniciais para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$, a Eq. 2.2 pode ser resolvida para produzir $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ para as várias espécies diferentes de partículas. A utilização dos valores calculados em 2.7 e 2.8 leva a valores para as densidades de carga e corrente (ρ e \vec{J}) no plasma, que podem ser substituídas nas equações de Maxwell e resolvidas para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$. Esses valores são então conectados novamente na equação de Vlasov (Eq. 2.2), e assim por diante, para obter uma solução autoconsistente para a função de distribuição de partículas individuais. Embora a equação de Vlasov não inclua explicitamente um termo de colisão no lado direito e, portanto, não leve em consideração colisões de curto alcance, ela não é tão restritiva quanto parece, já que uma parte significativa dos efeitos das interações de partículas já foram incluídas na força de Lorentz, através dos campos eletromagnéticos suavizados auto-consistentes internos.

2.2 Momentos da distribuição

Não é necessário resolver a equação de Boltzmann para a função de distribuição, a fim de calcular as variáveis macroscópicas de interesse físico. Estas variáveis macroscópicas estão relacionadas com os momentos da função de distribuição e as equações de transporte podem ser obtido tomando os vários momentos da equação de Boltzmann. Os três primeiros momentos da equação de Boltzmann são obtidos pela multiplicação de m_{α} , $m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$ e $\frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2}$, respectivamente, e integrando todo o espaço de velocidade. Seguindo estes procedimentos, obtêm-se as equações de conservação de massa, momento e energia. Seja $\chi(v)$ uma propriedade física das partículas no plasma. Agora multiplicamos cada termo da Eq 2.2 por $\chi(v)$ e integramos a equação resultante sobre todo o espaço de velocidade para obter a equação como segue:

$$\int_V \chi \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} d^3 v + \int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha} d^3 v + \int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} d^3 v = \int_V \chi \left(\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} \right)_{coll} d^3 v \quad (2.10)$$

Resolvendo cada integral separadamente,

$$\int_V \chi \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} d^3 v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \chi f_{\alpha} d^3 v \right) - \int_V \frac{\partial \chi}{\partial t} f_{\alpha} d^3 v \quad (2.11)$$

No entanto, desde que $\chi = \chi(\vec{v})$, sua derivada parcial em relação ao tempo é zero. Usando a definição de valores médios, o rendimento fica

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha] \quad (2.12)$$

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left(\int_V \chi \vec{v} f_\alpha d^3v \right) - \int_V \nabla \chi \cdot \vec{v} f_\alpha d^3v - \int_V \chi f_\alpha \nabla \cdot \vec{v} d^3v \quad (2.13)$$

Como visto anteriormente, $\chi = \chi(\vec{v})$, então seu gradiente é zero e as variáveis \vec{r} , \vec{v} e t são independentes, então o divergente de \vec{v} também é zero, resultando em

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha] \quad (2.14)$$

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_V \nabla_v \cdot (\vec{a} \chi f_\alpha) d^3v - \int_V f_\alpha (\vec{a} \cdot \nabla_v \chi) d^3v - \int_V \chi f_\alpha (\nabla_v \cdot \vec{a}) d^3v \quad (2.15)$$

A primeira integral desaparece porque a função de distribuição deve desaparecer para $\pm\infty$. A última integral na eq 2.15 desaparece se assumirmos que

$$\nabla_v \cdot \vec{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.16)$$

isto é, se o componente de força F_j for independente do componente de velocidade correspondente v_j , uma vez que $\nabla_v \cdot \vec{F} = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial v_j}$. Isto é verdade para a força devido a um campo magnético, $\vec{F} = q_\alpha \vec{v} \times \vec{B}$ porque j também neste caso F_j é independente de v_i .

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha \quad (2.17)$$

$$\int_V \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3v = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) \right] \quad (2.18)$$

Combinando as eq 19, eq 2.14, eq 2.17 e eq 2.18 na eq 16 produzimos então,

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) \right] \quad (2.19)$$

Equação de conservação de massa

A equação de continuidade pode ser obtida tomando χ igual a massa. Assim, definindo $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ como densidade de massa, a substituição nos dá

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = S_\alpha \quad (2.20)$$

onde o termo de colisão, $S_\alpha = \left[\frac{\delta \rho_{m\alpha}}{\delta t} \right]_{coll}$, representa a taxa na qual partículas do tipo α são produzidas ou perdidas, por unidade de volume, como resultado de colisões.

Equação de Conservação Momento

Para derivar a equação de conservação de momento, substituímos $\chi(\vec{v})$ pela velocidade vezes a massa. Tome $\vec{v} = \vec{c}_\alpha + \vec{u}_\alpha$, onde \vec{c}_α é a velocidade média térmica das partículas e a velocidade média de movimento toroidal \vec{u}_α . Vamos resolver cada quantidade da eq 16 individualmente.

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} \quad (2.21)$$

$$\nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle) = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle) \quad (2.22)$$

$\vec{c} \cdot \vec{u} = 0$ pois c vai em todas as direções então não contribui com a velocidade

$$n_\alpha \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle = n_\alpha \langle (m_\alpha \vec{a} \cdot \nabla_v) \vec{v} \rangle = n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \nabla_v \rangle \vec{v} = n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha \quad (2.23)$$

$$R_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{Scattering} = \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right]_{Scattering} \quad (2.24)$$

$$\mathcal{R}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{Source} = \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right]_{Source} \quad (2.25)$$

onde R_α denota a taxa de mudança de momento devido ao espalhamento e \mathcal{R}_α denota a taxa de mudança de momento devido à produção de partículas de plasma. A substituição na eq 2.19 produz

$$\vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle) - n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha \quad (2.26)$$

Aqui, o tensor $\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle$ representa a força por unidade de volume dentro do plasma devido aos movimentos de partículas aleatórias. Usando isso

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) = \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + [\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)] \vec{u}_\alpha \quad (2.27)$$

Trabalhando com a força de Lorentz, substituindo os resultados obtidos na eq 2.26

$$\vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + [\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)] \vec{u}_\alpha = \quad (2.28)$$

$$n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha + R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha$$

rearranjando

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] + \vec{u}_\alpha \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha \quad (2.29)$$

No entanto, o segundo termo no lado esquerdo da eq 2.29 é a equação de conservação de massa, portanto, podemos reduzir a equação para

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha + n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha \quad (2.30)$$

Esta equação afirma que a taxa de mudança de tempo do momento médio em cada elemento fluido (α), é devido às forças externas aplicadas no fluido, mais a força de pressão do próprio fluido, mais as forças internas devido a colisões (dispersão e produção de partículas de plasma).

Equação de conservação de energia

Para derivar a equação de transporte de energia, substituímos $\chi(\vec{v})$ pela energia cinética das partículas na equação geral de transporte. Tendo $\chi(\vec{v}) = \frac{1}{2} m_\alpha v^2$, as quantidades da equação 2.19 de transporte serão

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) = \frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle v^2 \rangle = \frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle + \frac{\rho_{m\alpha}}{2} u_\alpha^2 \quad (2.31)$$

Em geral, se a velocidade aleatória não for isotrópica, então $\rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \rangle = 3p_\alpha$. Dessa forma, a eq 2.31 se torna

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) = \frac{1}{2} (3p_\alpha + \rho_{m\alpha} u_\alpha^2) \quad (2.32)$$

$$\nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right] \quad (2.33)$$

$$n_\alpha \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = n_\alpha \left\langle \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_v \left(\frac{m_\alpha v^2}{2} \right) \right\rangle_\alpha = n_\alpha \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha \quad (2.34)$$

A equação de conservação de energia pode ser escrita de uma forma alternativa usando o tensor de pressão cinética $\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle$ e fluxo de calor $\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle$. Tomando $\vec{v} = \vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha$, e calculando os valores médios de $\langle (\vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha) \vec{c}_\alpha \rangle_\alpha$ e $\langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha$, obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right) + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + (\mathbb{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_\alpha + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha = \\ = Q_\alpha + \mathcal{E}_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \mathcal{R}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \end{aligned} \quad (2.35)$$

onde Q_α e \mathcal{E}_α representam a taxa de variação da densidade de energia devido ao espalhamento e produção de partículas de plasma,

$$Q_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) \right]_{\text{Scattering}} = \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) \right]_{\text{Scattering}} \quad (2.36)$$

$$\mathcal{E}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha < \chi >_\alpha) \right]_{Source} = \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) \right]_{Source} \quad (2.37)$$

3 O Modelo para 2 Fluidos

3.1 O Sistema de Equações que Deve Ser Implementado

A física dos plasmas é geralmente descrita com duas teorias: a teoria cinética e a teoria dos fluidos. Enquanto uma teoria cinética descreve a evolução da função de distribuição, a teoria de fluidos descreve a evolução de variáveis fluidas que são obtidas tomando-se momentos da equação cinética que descreve a evolução de $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$. Por um lado, a teoria dos fluidos não prevê instabilidades de espaço-fase, como a teoria cinética, mas, por outro lado, tem a vantagem de ser muito mais simples de trabalhar do que a teoria cinética, e ainda fornecer explicações excelentes para a maioria dos fenômenos de plasma tokamak.

Começando pela notação:

$\vec{B}(\vec{r})$ é o vetor campo magnético, usaremos os campos como estáveis

$\vec{E}(\vec{r})$ é o campo elétrico

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ é vetor densidade de corrente

v_{ionz} é a taxa de ionização

v_{loss} é a taxa de perda de elétrons

$n_\alpha = \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ densidade numérica da partícula da espécie α

$\vec{u}_\alpha = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int_V \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$ é a velocidade média das partículas em v

n_i é a densidade numérica de íons

n_e é a densidade numérica de elétrons

m_α massa da espécie de partícula α

α_a é o 1º coeficiente de Townsend para a espécie de partícula α

τ_p é o tempo de confinamento da partícula

$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a função densidade numérica.

$\rho(\vec{r}, t)$ é a densidade de carga

Q_α representa a taxa de mudança de densidade de energia devido ao espalhamento

\mathcal{E}_α é a produção de partículas de plasma

$\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle$ é o tensor de pressão cinética

$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle$ é o fluxo de calor

D_e, D_i, D sendo os coeficientes de difusão de partículas.

$p(\vec{r}, t)$ é o escalar de pressão

e é carga elementar do elétron

η sendo a resistividade paralela do Spitzer

\vec{R}_α termo de troca de momento

R_α denota a taxa de mudança de momento devido ao espalhamento

\mathcal{R}_α denota a taxa de mudança de momento devido à produção de partículas de plasma.

Operadores diferenciais:

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial X} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial Y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial Z}$$

$$\nabla^2 = \hat{e}_x \frac{\partial^2}{\partial X^2} + \hat{e}_y \frac{\partial^2}{\partial Y^2} + \hat{e}_z \frac{\partial^2}{\partial Z^2}$$

$$\nabla_V = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial V_x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial V_y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial V_z}$$

Primeiramente **assumimos** $n_e = n_i = n_0$ onde n_0 é a densidade eletrônica em $t = 0$.

Para modelar o Breakdown do plasma no tokamak Nova-Furg, usaremos um modelo de dois fluidos. Assumiremos que o plasma é composto por um fluido de elétrons e um único fluido ionizado, ambos sendo incompressíveis, $\nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0$, um fluido ideal que não possua viscosidade $\mathbb{P}_\alpha = p_\alpha$, quase neutro $n_e = n_i = n$, e adiabático $\nabla \cdot \vec{q}_\alpha = 0$, ou seja, as escalas de tempo envolvidas são muito curtas para ocorrer a difusão de calor, portanto o processo será considerado adiabático e o transporte de energia é predominantemente convectivo. Para melhorar a estabilidade numérica, vamos considerar o fluxo total de partículas a ser composto por um termo convectivo e difusivo, isto é, $\Gamma = n \vec{u}_\alpha - D_\alpha \nabla n$ com $D_e = D_i = D$ sendo o coeficiente de difusão de partículas. Além do que, além do mais, Vamos supor também que o gás neutro esteja em repouso e à temperatura ambiente. Portanto, os termos de momento e fonte de energia devido à produção de partículas de plasma \mathcal{R}_α e \mathcal{E}_α não contribuem para o momento e conteúdo térmico do plasma. Com essas suposições, o conjunto de equações consideradas neste modelo são:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_\alpha) = \frac{S_\alpha}{m_\alpha} + D \nabla^2 n \quad (3.1)$$

$$m_\alpha n \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = q_\alpha n (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha S_\alpha \quad (3.2)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right) = Q_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha - \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \quad (3.3)$$

Aqui, vamos supor que o termo de troca de momento \vec{R}_α pode ser modelado por

$$\vec{R}_\alpha = m_\alpha n \sum_\rho \mu_{\alpha\rho} (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\rho) \quad (3.4)$$

e portanto,

$$\vec{R}_e = m_e n v_{en} \vec{u}_e + ne \eta \vec{J} \quad (3.5)$$

$$\vec{R}_i = m_i n v_{in} \vec{u}_i + ne \eta \vec{J} \quad (3.6)$$

com η sendo a resistividade paralela do Spitzer, e que os termos de troca de elétrons e de íons podem ser modelados por

$$\vec{Q}_e = -\vec{Q}_i = -\frac{3ne^2}{m_i}\eta(p_e - p_i) \quad (3.7)$$

O conjunto final de equações que devem ser resolvidas é então equações de conservação de massa

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}_e) = \frac{S_e}{m_e} + D\nabla^2 n \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n\vec{u}_i) = \frac{S_i}{m_i} + D\nabla^2 n \quad (3.9)$$

equações de conservação de momento

$$\left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right] = -\frac{e}{m_e}(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_e}{m_e n} - (v_{en} + \frac{S_e}{m_e n})\vec{u}_e + \frac{e}{m_e}\eta \vec{J} \quad (3.10)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \nabla) \vec{u}_i \right] = -\frac{e}{m_i}(\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_i}{m_i n} - (v_{in} + \frac{S_i}{m_i n})\vec{u}_i + \frac{e}{m_i}\eta \vec{J} \quad (3.11)$$

equações de energia do eletrôn

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e \right) = -\frac{3ne^2}{m_i}\eta(p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_e \cdot \vec{J} + (2v_{en} + \frac{S_e}{m_e n})\frac{1}{2}m_e n u_e^2 \quad (3.12)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \nabla p_i \right) = -\frac{3ne^2}{m_i}\eta(p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_i \cdot \vec{J} + (2v_{in} + \frac{S_i}{m_i n})\frac{1}{2}m_i n u_i^2 \quad (3.13)$$

Suponhamos agora que, durante a fase inicial, os íons podem ser considerados em repouso ($\vec{u}_i = 0$) e, portanto, podemos remover a equação de conservação do momento iônico. Vamos também adicionar as equações Eq. 3.8 e Eq. 15. Para isso, teremos que definir um termo de fonte de partículas que explique o número de partículas em si em vez da massa de partículas: $\zeta_\alpha = S_\alpha/m_\alpha$. Note que para um plasma ionizado sozinho, podemos dizer que $\zeta_e = \zeta_i = \zeta = n(v_{ion} - v_{loss})$. Também assumiremos que $v_{ion} = \alpha_T u_e = \alpha_T J/(ne)$ e $v_{loss} = u_{e,||}/L_{eff} = \vec{J} \cdot \vec{B}/(Bne)$. Aqui, α_T é o primeiro coeficiente de Townsend. Com todas essas suposições, o conjunto de equações simplifica para

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D\nabla^2 n \quad (3.14)$$

$$m_e \left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right] = -e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_e}{n} - (v_{en} + v_{ion} - v_{loss})m_e \vec{u}_e + e\eta \vec{J} \quad (3.15)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_e \cdot \vec{J} + (2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) \frac{1}{2} m_e n u_e^2 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (3.17)$$

Vamos agora reescrever este conjunto de equações em termos da densidade de corrente

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D \nabla^2 n \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} - \vec{J} (v_{in} + v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) - \frac{e}{m_e} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{e}{m_e} \nabla p_e \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}}{2v_{ei}} \right) \eta J^2 - \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (3.21)$$

Além dessas equações, devemos incluir equações para os campos eletromagnéticos. Vamos separar os campos em um componente gerado pelas correntes que fluem em bobinas fora do plasma e outro causado pelo plasma, ou seja, $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{pl}$ e $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{pl}$. O campo magnético aplicado externamente é produzido por um conjunto de bobinas específicas fora do plasma e possui componentes poloidais e toroidais. O campo toroidal tem uma dependência $1/R$, enquanto o campo poloidal tem um padrão quadrupolo,

$$\vec{B}_{ext} = \vec{B}_{pol}^{quadrupole} + \frac{R_0 B_0}{R \hat{e}_\phi} \quad (3.22)$$

O campo elétrico aplicado externamente é produzido pelo solenóide central do tokamak, que induz uma voltagem de loop toroidal, V_{loop} . O campo elétrico externo é então dado por

$$\vec{E}_{ext} = \frac{V_{loop}}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (3.23)$$

O campo eletromagnético gerado pelo plasma é calculado via

$$\nabla A_{pl} = -u_0 \vec{J} \quad (3.24)$$

onde A_{pl} é o vetor de potencial magnético devido ao plasma. O campo eletromagnético então segue de

$$\vec{B}_{pl} = \nabla \times A_{pl} \quad (3.25)$$

$$\vec{E}_{pl} = -\frac{\partial A_{pl}}{\partial t} \quad (3.26)$$

4 Implementação

4.1 Introdução ao Matlab

Para plotar o campo vetorial e curvas de níveis do campo magnetico de uma carga pontiforme localizada na origem (em $(0,0)$) no Matlab fazemos da seguinte maneira:

```
[X,Y] = meshgrid(1:.01:2);
Z = 10./(X.^2 + Y.^2);
[DX,DY] = gradient(Z,.005,.005);
hold on
contour(X,Y,Z,20)
quiver(X,Y,DX,DY)
```

que resulta na seguinte figura:

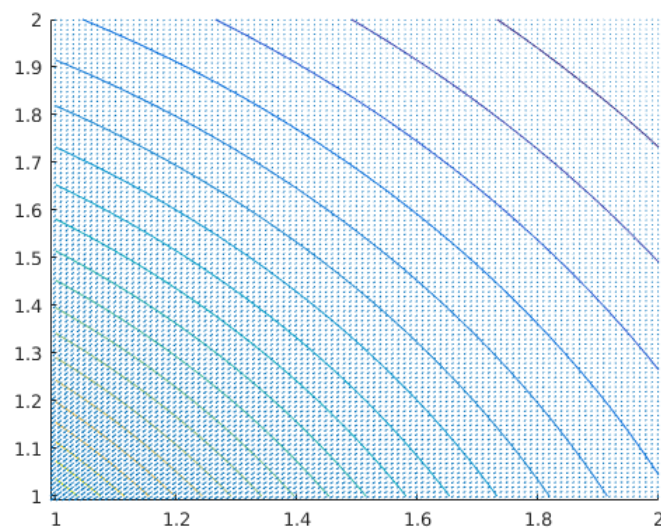


Figura 1 – campo carga pontiforme - 1º quadrante

Outra forma de plotar:

```
l=-1.05:0.1:1.05; %vetor principal
[X,Y] = meshgrid(l); %grid para plotar circulo
Z = 1./sqrt(X.^2 + Y.^2);

[x,y] = meshgrid(l); %grid para plotar o campo vetorial
u=-cos(x).*sin(y)./sqrt(X.^2 + Y.^2)
v=cos(y).*sin(x)./sqrt(X.^2 + Y.^2)
hold on
quiver(x,y,u,v)
contour(x,y,Z)
```

```
%plotar um circulo:
X = -1:0.01:1;
y1 = sqrt(1-X.^2);
plot(X,y1,X,-y1)
```

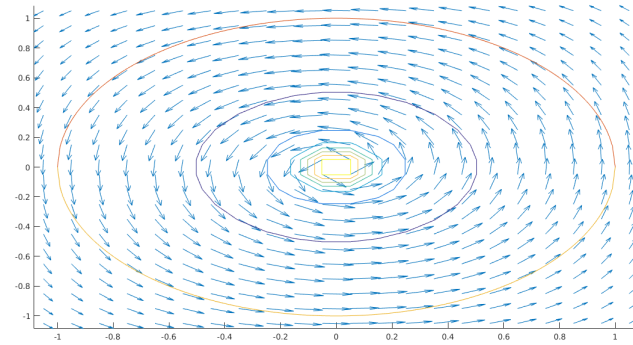
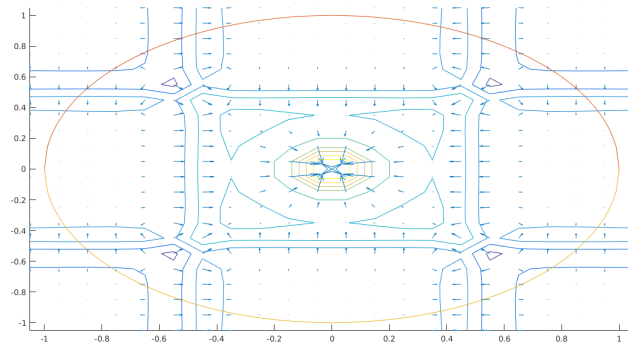


Figura 2 – campo carga pontiforme

Plotando com as linhas de convergencia e campos lineares de fio infinito nos 4 lados:

```
x = -1.05:0.1:1.05;
z = x;
y = -1.05:0.1:2.05;
[X,Y,Z] = meshgrid(x,y,z);
F=10./sqrt(X.^2+Y.^2+Z.^2);
F2=10./sqrt(X.^2+(Y-1).^2+Z.^2);
F3=10./sqrt((X+0.5).^2+(Y+0.2).^2+(Z-0.2).^2);
[DX,DY,DZ] = gradient(F+F2-F3,.05,.05,.05);
quiver3(X,Y,Z,DX,DY,DZ)
```



certo.png

Figura 3 – campo carga pontiforme no interior de 4 campos lineares de fio infinito

4.2 Modelo de 2 Fluidos

Usando coordenadas cilíndricas $[R, \theta, Z]$

$$\frac{\partial}{\partial \Theta} = 0 \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot p_e = \frac{\partial p_e}{\partial R} \hat{e}_R + \frac{1}{R} \frac{\partial p_e}{\partial \Theta} \hat{e}_\Theta + \frac{\partial p_e}{\partial Z} \hat{e}_Z \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 \cdot n = \frac{\partial^2 n}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial n}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \Theta^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial Z^2} \quad (4.3)$$

Função Breakdown - Rotina principal - Código criado pelo professor Gustavo, editado neste projeto.

No código a primeira coluna é representada, respectivamente, pelo elemento da segunda coluna

Pressão cinética

$$p_e(\vec{r}, t) : \left[\frac{\text{Newton}}{\text{Area}} \right] - \text{"pe"}$$

$$p_i(\vec{r}, t) : \left[\frac{\text{Newton}}{\text{Area}} \right] - \text{"pi"}$$

Taxas de ionização, perda, criação de elétrons

$$v_{en} : \left[\frac{1}{\text{segundo}} \right] - \text{"v_en"}$$

$$v_{ion} : \left[\frac{1}{\text{segundo}} \right] - \text{"v_ion"}$$

$$v_{loss} : \left[\frac{1}{\text{segundo}} \right] - \text{"v_loss"}$$

Densidade de corrente

$$\vec{J}(\vec{r}, t) : \left[\frac{\text{Ampere}}{(\text{metro})^3} \right] - \text{"Jr"}$$

Densidade numérica de partículas

$$n(\vec{r}, t) : \left[\frac{1}{(\text{metro})^3} \right] - \text{"n"}$$

Campos elétricos e magnéticos

$$\vec{E}(\vec{r}) : \left[\frac{\text{Newton}}{\text{Coulomb}} \right] - E$$

$$\vec{B}(\vec{r}) : [\text{Tesla}] - B$$

Resistividade de Spitzer

$$\eta - [\Omega(\text{metro})^2] \text{ onde } \Omega = \text{ohn}$$

10 variáveis constituem 4 equações em 7 dimensões (3 de espaço, 3 de velocidade e a de tempo)

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D \nabla^2 n \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} - \vec{J}(v_{in} + v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) - \frac{e}{m_e} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{e}{m_e} \nabla p_e \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}}{2v_{ei}} \right) \eta J^2 - \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (4.7)$$

5 Conclusões

Acredita-se que este trabalho XXXXX.

Referências

- L.L. Lao *et al*, Nuclear Fusion (1985) **25** 1611 Nenhuma citação no texto.
- L.L. Lao *et al*, Nuclear Fusion (1990) **30** 1035 Nenhuma citação no texto.
- L.L. Lao *et al*, Fusion Science and Technology (2005) **48** 968 Nenhuma citação no texto.
- D. Mueller, Physics of Plasmas (2013) **20** 058101 Nenhuma citação no texto.
- J. Sinha, Thesis n° 7825, Swiss Plasma Center - École Polytechnique Fédérale de Lausanne, *Plasma breakdown and current formation in single core and doublet configurations on TCV* Nenhuma citação no texto.
- J.S. Townsend, Nature (1900) **62** 340 Nenhuma citação no texto.
- R. Papoular, Nuclear Fusion (1976) **16** 37 Nenhuma citação no texto.
- B. Lloyd *et al.*, Nuclear Fusion (1991) **31** 2031 Nenhuma citação no texto.
- B. Lloyd *et al.*, Plasma Physics and Controlled Fusion (1996) **38** 1627 Nenhuma citação no texto.
- V.A. Belyakov *et al.*, Plasma Devices and Operations (2003) **11** 193 Nenhuma citação no texto.
- H.T. Kim *et al.*, Nuclear Fusion (2012) **52** 103016 Nenhuma citação no texto.
- H.T. Kim *et al.*, Plasma Physics and Controlled Fusion (2013) **55** 124032 Nenhuma citação no texto.
- H.T. Kim *et al.*, Journal of Nuclear Materials (2013) **438** S1271 Nenhuma citação no texto.
- H.T. Kim *et al.*, Nuclear Fusion (2013) **53** 083024 Nenhuma citação no texto.
- J.B. Lister *et al.*, Fusion Technology (1997) **32** 321 Nenhuma citação no texto.
- G.L. Jackson *et al.*, Nuclear Fusion (2008) **48** 125002 Nenhuma citação no texto.
- G.L. Jackson *et al.*, Nuclear Fusion (2009) **49** 115027 Nenhuma citação no texto.
- A.D. Cheetham *et al.*, Internal Report, LRP 162/80 (1979), Centre de Recherches en Physique des Plasmas - École Polytechnique Fédérale de Lausanne, *The TCA tokamak* Nenhuma citação no texto.
- M.L. Walker, IEEE Control Systems Magazine, April 2006 Nenhuma citação no texto.

M. Ariola and A. Pironti, IEEE Control Systems Magazine, **25** 65, 2005 Nenhuma citação no texto.

Anexos

.1 Tabela de Unidade Úteis

A Tabela 2 apresenta algumas unidades úteis para este trabalho.

Tabela 2 – Relação entre unidades

Unidade	Simbolo	Relações
Metro	m	$\left[\frac{N \cdot s^2}{Kg} \right]$
Kilograma	Kg	$\left[\frac{J \cdot s^2}{m^2} \right]$
Newton	N	$\left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$
Segundo	s	$\vec{v} = [m/s]$
Ampere	A	$\left[\frac{C}{s} \right]$
Coulomb	C	$[A \cdot s = F \cdot V]$
Tesla	T	$\left[\frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{J}{A \cdot m^2} \right]$
Joule	J	$\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right]$
Farad	F	$\left[\frac{C}{V} = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{J}{V^2} = \frac{s}{\Omega} = \frac{s^2 \cdot C^2}{m^2 \cdot Kg} \right]$
Watt	W	$\left[\frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{Kg \cdot m^2}{s^3} \right]$
Volt	V	$\left[A \cdot \Omega = \frac{W}{A} = \frac{J}{C} = \frac{eV}{e} \right]$
eletro-Volt	eV	$[1.6 \times 10^{-19} J]$
Ohm	Ω	$\left[\frac{V}{A} = \frac{W}{A^2} = \frac{V^2}{W} = \frac{s}{F} \right]$

.2 Equacionando o Plasma

q será a carga

$$q = \frac{4}{3} \pi r^3 (n_i - n_e) e \quad (1)$$

O potencial elétrico ϕ na superfície da esfera será:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{r^2 e}{3\epsilon_0} (n_i - n_e) \quad (2)$$

Introduzindo valores numéricos: $\phi = 6 \times 10^3$ volts. relembrando que $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19}$ joule, $kT = 1 \text{ eV}$ when $T = 11,600 \text{ K}$, onde k é a constante de Boltzmann's (1.380×10^{-23} joule/K). Portanto, seria necessário uma temperatura de plasma de vários milhões de graus Kelvin para equilibrar a energia potencial elétrica com a energia média das partículas térmicas.

2.1 Movimento constante e uniforme de partículas em campos eletromagnéticos

Nesta seção estudarei o comportamento de partículas carregadas na presença de campos elétricos e magnéticos usando funções de posição e tempo. Assim, os campos elétricos e magnéticos presumimos aqui não são afetados pelas partículas carregadas. Os campos serão constantes no tempo e uniformes no espaço. O estudo do movimento de partículas carregadas em campos especificados é importante, pois fornece uma boa visão física para a compreensão de alguns dos processos dinâmicos nos plasmas. Também facilita a obtenção de alguns fenômenos macroscópicos que são devidos ao comportamento coletivo de um grande número de partículas. Nem todos os componentes do movimento microscópico detalhado das partículas contribui para os efeitos macroscópicos, mas é possível isolar os componentes do movimento individual que interferem no comportamento coletivo do plasma. No entanto, os parâmetros macroscópicos podem ser obtidos de maneira muito mais fácil e conveniente usando as equações de transporte macroscópicas. (*apresentadas nos Capítulos 8 e 9 do livro*). A equação de movimento para uma partícula de carga q , sob a ação da força de Lorentz F devida a campos elétricos E e de indução magnética B ,

$$\vec{p} = \gamma m \vec{a} \quad (3)$$

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = F = q(E + v \times B) \quad (5)$$

Para altas velocidades temos então:

$$\gamma m \frac{d\vec{p}}{dt} + q \left(\frac{v}{c^2}\right) (v \cdot E) = q(E + v \times B) \quad (6)$$

observando que a taxa de mudança por tempo do total de energia relativística ($U = \gamma mc^2$) é dada por ($\frac{dU}{dt} = q(v \cdot E)$) e $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(\frac{U}{c^2} \vec{v})}{dt}$ mas como em muitas situações prática γ é muito próximo de 1, podemos cancelar o termo relativístico. Ficando então com a relação não relativística:

$$m \frac{d\vec{p}}{dt} = q(E + v \times B) \quad (7)$$

Para as situações que serão consideradas, assume-se que a restrição $v^2 \ll c^2$ é satisfeita. Além disso, todos os efeitos de radiação são negligenciados.

.2.2 Campo eletromagnético uniforme

O movimento seguirá a equação

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = q\vec{E} \quad (8)$$

integrando em ambos os lados obtemos

$$p(t) = qEt + p_0 \quad (9)$$

onde $p_0 = p(0)$ denota o momento inicial da partícula. Usando a expressão relativística

$$p = mv = m \frac{dr}{dt} \quad (10)$$

dr e realizando uma segunda integração, obtemos uma expressão para a posição da partícula em função do tempo:

$$r(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} \right) t^2 + v_0 t + r_0 \quad (11)$$

onde r_0 denota a posição inicial da partícula e v_0 a sua velocidade inicial. Portanto, a partícula se move com uma aceleração constante, $\frac{qE}{m}$, na direção de E se $q > 0$, e na direção oposta se $q < 0$. Em uma direção perpendicular ao campo elétrico não há aceleração sobre a partícula o estado do movimento permanece inalterado.

.2.3 Campo magnético uniforme

Para uma partícula de carga q e massa m , movendo-se com velocidade \vec{v} em uma região do espaço onde há apenas uma indução magnética B (sem campo E), a equação de movimento é

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = q(\vec{v} \times B) \quad (12)$$

é conveniente separarmos os componentes em \vec{v}_{\parallel} que é paralelo ao campo magnético e \vec{v}_{\perp} que é ortogonal ao campo magnético

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp} \quad (13)$$

substituindo os componentes separados na Eq. 12 e notando que $\vec{v}_{\parallel} \times B = 0$ obtemos

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} + \frac{d\vec{v}_{\perp}}{dt} = \frac{q}{m} (\vec{v}_{\perp} \times B) \quad (14)$$

então o a equação do componente paralelo \vec{v}_{\parallel} fica

$$\frac{d\vec{v}_{\parallel}}{dt} = 0 \quad (15)$$

e do componente perpendicular \vec{v}_\perp

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \frac{q}{m}(\vec{v}_\perp \times B) \quad (16)$$

a Eq. 15 mostra que a velocidade da partícula ao longo de B não muda. A Eq. 16 pode ser escrita como

$$\frac{d\vec{v}_\perp}{dt} = \underline{\Omega}_c \times \vec{v}_\perp \quad (17)$$

onde o vetor $\underline{\Omega}_c$ é definido por

$$\underline{\Omega}_c = -\frac{qB}{m} = \frac{|q|B}{m}\hat{\Omega}_c = \Omega_c\hat{\Omega}_c \quad (18)$$

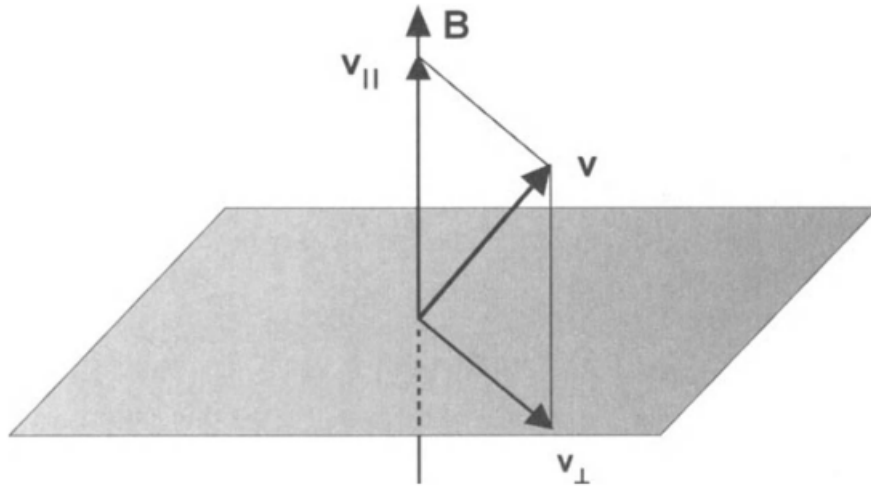


Figura 4 – Esquema da separação do vetor velocidade nos componentes paralelos e ortogonais a B .

Assim, $\hat{\Omega}_c$ aponta na direção de B para uma partícula carregada negativamente ($q < 0$) e na direção oposta para uma partícula carregada positivamente ($q > 0$).

Sua magnitude Ω_c é sempre positiva $\Omega_c = |q|\frac{B}{m}$. O vetor unidade $\hat{\Omega}_c$ está ao longo de $\underline{\Omega}_c$. Como $\underline{\Omega}_c$ é constante e, a partir da conservação da energia cinética, v_\perp (a magnitude de \vec{v}_\perp) também é constante, Eq. 17 mostra que a aceleração de partículas é constante em magnitude e sua direção é perpendicular a ambos, \vec{v}_\perp e B . Assim, esta aceleração corresponde a uma rotação do vetor velocidade \vec{v}_\perp no plano perpendicular a B com a constante angular velocidade $\underline{\Omega}_c$. Podemos integrar Eq. 17 diretamente, observando que o $\underline{\Omega}_c$ é constante e tomando $\vec{v}_\perp = \frac{d\vec{r}_c}{dt}$, para obter

$$\vec{v}_\perp = \underline{\Omega}_c \times \vec{r}_c \quad (19)$$

onde o vetor \vec{r}_c é interpretado como o vetor de posição de partícula em relação a um ponto G (o centro de giracão) no plano perpendicular a B que contém a partícula. Como a

velocidade da partícula v_{\perp} é constante, a magnitude r_c do vetor de posição também é constante. Portanto, Eq. 19 mostra que a velocidade \vec{v}_{\perp} corresponde a uma rotação do vetor de posição \vec{r}_c sobre o ponto G no plano perpendicular a B com angulação constante, velocidade Ω_c . O componente do movimento no plano perpendicular a B é, portanto, um círculo de raio r_c . O centro instantâneo de giração da partícula (o ponto G na distância r_c da partícula) é chamado de *guiding center* (centro orientador).

Observe que, de acordo com a definição de Ω_c , $\underline{\Omega}_c$ sempre aponta na mesma direção que o vetor de momento angular da partícula ($\vec{r}_c \times \vec{p}$), independentemente de sua carga. A trajetória resultante da partícula é dada pela superposição de um movimento uniforme ao longo de B (com a velocidade constante \vec{v}_{\parallel}) e um movimento circular no plano normal para B (com a velocidade constante v_{\perp}). Assim, a partícula descreve uma hélice. O ângulo entre B e a direção do movimento da partícula é chamado de ângulo de inclinação e é dado por

$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{v_{\perp}}{v}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}}\right) \quad (20)$$

onde v é a velocidade total da partícula ($v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2$). Quando $v_{\parallel} = 0$ mas $v_{\perp} \neq 0$, nós temos $\alpha = \frac{\pi}{2}$ e a trajetória da partícula é um círculo no plano normal para B . Por outro lado, quando $v_{\perp} = 0$ mas $v_{\parallel} \neq 0$, temos $\alpha = 0$ e a partícula se move ao longo de B com a velocidade v . A magnitude da velocidade angular,

$$\Omega_c = |q| \frac{B}{m} \quad (21)$$

é conhecida como a frequência angular de giro, e é também chamada de giro-frequência ou frequência de ciclotrão ou Larmor. Para um elétron $|q| = 1,602 \times 10^{-19}$ coulomb e $m = 9,109 \times 10^{-31}$ kg, de modo que

$$\Omega_c = 1.76 \times 10^{11} B \quad (22)$$

medido em (rad/s), com B em tesla (ou, equivalentemente, $weber/m^2$). De maneira similar, para o proton $m = 1,673 \times 10^{-27}$ kg, de modo que,

$$\Omega_c = 9.58 \times 10^7 B \quad (23)$$

o raio da órbita circular, é dado por

$$r_c = \frac{v_{\perp}}{\Omega_c} = \frac{mv_{\perp}}{|q|B} \quad (24)$$

é chamado de raio de giro, ou raio de giro ou raio de ciclotron, ou Larmor raio. É importante notar que Ω_c é diretamente proporcional a B . Consequentemente, conforme B aumenta, a frequência de rotação aumenta e o raio diminui. Além disso, quanto menor a massa de partículas, maior será a sua frequência de rotação e menor seu giro. Multiplicando Eq 24 por B obtemos,

$$Br_c = \frac{mv_{\perp}}{|q|} = \frac{p_{\perp}}{|q|} \quad (25)$$

que mostra que a magnitude de B vezes o giro das colunas é igual ao momento da partícula por carga unitária. Essa quantidade é frequentemente chamada de rigidez magnética.