

Kévi Pegoraro

Modelo de 2 Fluidos para o Breackdown no Tocamak Nova-Furg

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Mês da Defesa, Ano

Kévi Pegoraro

Modelo de 2 Fluidos para o Breackdown no Tocamak Nova-Furg

Trabalho de Conclusão de Curso, Matemática
Aplicada Bacharelado, submetido por XXXX
junto ao Instituto de Matemática, Estatística e
Física da Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dro. Magno P. Coralles

Coorientador: Dr. se houver

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Mês da Defesa, Ano

Este trabalho é dedicado Liberdade que não temos.

Agradecimentos

Agradeço ao professor Magno Pinto Collares pela grande ajuda na orientação deste trabalho e ao professor Gustavo Paganini Canal - USP pela contribuição com material de estudo, resposta a inúmeras dúvidas e ajuda com desenvolvimento numérico.

Resumo

XXXXXX. **Palavras-chaves:** XX, XX.

Abstract

This XXXXXX.

Key-words: XX, XX.

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Tabela 1 – Cronograma	20
---------------------------------	----

Sumário

	Introdução	10
0.1	Como Funciona um Tokamak	10
1	FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA	12
1.1	Introdução ao Plasma	12
1.1.1	Definição de um plasma	13
1.1.2	A aproximação de plasma	13
1.1.3	Interações de volume	13
1.1.4	Frequência de plasma	14
1.1.5	Grau de ionização	14
1.1.6	Temperaturas	14
1.2	Função de Distribuição	15
1.2.1	Temperatura e Outros Momentos da Função de Distribuição	16
1.2.2	O Gerador Magnetohidrodinâmico	16
2	DEDUÇÃO MODELO DE 2 FLUIDOS	17
2.1	Equação de Vlasov	17
2.2	Momentos da distribuição	18
3	CRONOGRAMA	20
4	METODOLOGIA	21
4.1	Equação de Vlasov	21
4.2	Equação de Conservação de Massa	23
4.3	Equação de Conservação de Momento	23
4.4	Equação de Conservação de Energia	25
4.5	Simplificações	28
5	RESULTADOS ESPERADOS	31
6	CONCLUSÃO	32
A	O MODELO DE TOWNSEND	33
B	MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO	35
C	LISTA DE NOTAÇÕES	37

D	VALOR MÉDIO	39
---	-----------------------	----

Introdução

Entender o breakdown do plasma é essencial para melhorar o desempenho dos tokamaks e é um passo importante para chegarmos a fonte de energia ampla e não poluente que a fusão pode se tornar. O objetivo do presente trabalho é, por meio de uma simulação numérica, estudar a fase de breakdown do plasma dentro de um tokamak, do início da descarga primária até a estabilização dentro do tokamak NOVA-Furg. Espero neste trabalho obter dados de simulação querentes com os medidos nos disparos do tokamak, para poder compreender melhor o que está acontecendo durante o breakdown, tendo assim uma maneira de prever os resultados de cada experimento na máquina.

0.1 Como Funciona um Tokamak

Tokamak é um reator experimental de fusão nuclear. Serve para estudar plasmas de alta temperatura que são mantidos confinados por campos magnéticos intensos. O objetivo final da pesquisa nesta área é viabilizar, no futuro, a construção de reatores nucleares de fusão, onde núcleos de deutério e trítio possam se unir, liberando uma grande quantidade de energia que servirá para aquecer água, gerar vapor e assim mover uma turbina, acoplada a um gerador elétrico. A pesquisa em tokamaks, portanto, está ligada à procura de fontes alternativas de energia para a produção de eletricidade. Basicamente, o Tokamak é um potente eletroímã que produz um campo magnético toroidal para o confinamento de plasma (o quarto estado físico da matéria, que compõe as estrelas) de isótopos pesados de hidrogênio (deutério e trítio especificamente). Em seu interior ocorre uma reação de fusão nuclear cujo objetivo é criar plasma que deve ser contido em um espaço limitado, de forma a não tocar nas paredes internas do reator, tanto para não danificá-lo, quanto para não dissipar a energia do combustível via condução térmica. O plasma é então contido pelo intenso campo magnético gerado pelo Tokamak. O isolamento magnético permite que se alcancem altas temperaturas, impedindo o combustível da reação, os isótopos de hidrogênio, de desgastar ou sobreaquecer o reator. O campo magnético tem geometria toroidal (em forma de pneu). Este método de contenção do plasma, é conhecido como confinamento magnético. Existe ainda, outra forma de confinamento do plasma que é o confinamento inercial. Nesta, um laser de alta potência bombardeia o combustível do reator. Isto causa a "implosão" do combustível e o início de uma reação em cadeia, que tem como consequência o início do processo de fusão nuclear. Na natureza há uma terceira forma, o confinamento gravitacional, este impraticável na Terra. O confinamento gravitacional é a forma como as estrelas contêm o plasma. O Sol, assim como todas as estrelas, é na verdade um reator natural de fusão nuclear. O Tokamak é ainda caracterizado pela simetria azimutal (rotacional) e pelo uso da corrente de plasma para gerar a componente helicoidal do campo magnético,

necessária para um equilíbrio estável.

1 Fundamentação Matemática

1.1 Introdução ao Plasma

O plasma é um dos estados físicos da matéria, similar ao gás, no qual certa porção das partículas é ionizada (em física, núcleos atômicos, provenientes de átomos completamente ionizados, como os da radiação alfa, são habitualmente designados como partículas carregadas, a ionização é geralmente alcançada pela aplicação de elevadas energias aos átomos, seja através da aplicação de uma alta tensão elétrica ou por via de radiação de alta energia, um gás ionizado é chamado plasma). A premissa básica é que o aquecimento de um gás provoca a dissociação das suas ligações moleculares, convertendo-o em seus átomos constituintes. Além disso, esse aquecimento adicional pode levar à ionização (ganho ou perda de elétrons) dessas moléculas e dos átomos do gás, transformando-o em plasma contendo partículas carregadas (elétrons e íons positivos). A presença de um número não desprezível de portadores de carga torna o plasma eletricamente condutor, de modo que ele responde fortemente a campos eletromagnéticos. O plasma, portanto, possui propriedades bastante diferentes das de sólidos, líquidos e gases e é considerado um estado distinto da matéria. Como o gás, o plasma não possui forma ou volume definidos, a não ser quando contido em um recipiente; diferentemente do gás, porém, sob a influência de um campo magnético ele pode formar estruturas como filamentos, raios e camadas duplas. Alguns plasmas comuns são as estrelas e placas de neônio. No universo, o plasma é o estado mais comum da matéria comum, a maior parte da qual se encontra no rarefeito plasma intergaláctico e em estrelas. Langmuir escreveu:

Com exceção das proximidades dos eletrodos, onde há bainhas contendo menos elétrons, o gás ionizado contém íons e elétrons em quantidades aproximadamente iguais, de modo que a carga espacial resultante é muito pequena. Nós usaremos o nome plasma para descrever esta região contendo cargas equilibradas de íons e elétrons.

Também é definido como gás no qual uma fração substancial dos átomos está ionizada. Um processo simples de ionização é aquecer o gás para que aumente o impacto eletrônico, por exemplo. Desse modo, o gás se torna o plasma quando a adição de calor ou outra forma de energia faz com que um número significativo de seus átomos libere alguns ou todos os seus elétrons. Esses átomos que perdem elétrons ficam ionizados, ou seja, com uma carga positiva resultante, e os elétrons separados de seus átomos ficam livres para se mover pelo gás, interagindo com outros átomos e elétrons.

Por apresentar-se num estado fluido similar ao estado gasoso, o plasma é comumente descrito ou como o "quarto estado de agregação da matéria"(os três primeiros sendo sólido,

líquido e gasoso). Mas essa descrição não é muito precisa, pois a passagem de um gás para a forma de plasma não ocorre através de uma transição de fase bem definida, tal como nas transições do estado sólido para líquido e deste para gás. De todo modo, o plasma pode ser considerado como um estado distinto da matéria, caracterizado por possuir um número de partículas eletricamente carregadas que é suficiente para afetar suas propriedades e comportamento. Os plasmas são bons condutores elétricos, e suas partículas respondem fortemente a interações eletromagnéticas de grande alcance.

Quando o número de átomos ionizados é relativamente pequeno, a interação entre as partículas carregadas do gás ionizado é dominada por processos colisionais, ou seja, que envolvem principalmente colisões binárias entre elas. Quando o número de partículas carregadas é substancial, a interação entre as partículas carregadas é dominada por processos coletivos, ou seja, a dinâmica de cada uma delas é determinada pelos campos elétricos e magnéticos produzidos por todas as outras partículas carregadas do meio. Neste caso, o gás ionizado passa a ser denominado plasma

1.1.1 Definição de um plasma

O plasma é livremente descrito como um meio eletricamente neutro de partículas positivas e negativas (isto é, a carga total de um plasma é aproximadamente zero). É importante notar que, embora não tenham limites, essas partículas não são "livres". Quando as cargas se movem, elas geram correntes elétricas com campos magnéticos e, como resultado, cada uma é afetada pelos campos das outras. Isto determina o comportamento coletivo com muitos graus de liberdade.

1.1.2 A aproximação de plasma

Partículas carregadas devem estar suficientemente próximas, de modo que cada uma influencie muitas partículas carregadas na sua vizinhança, em vez de somente interagir com a mais próxima (esses efeitos coletivos são característicos de um plasma). A aproximação de plasma é válida quando o número de portadores de carga no interior da esfera de influência (chamada de esfera de Debye, cujo raio é o comprimento de Debye) de uma partícula em particular é maior do que uma unidade, para que haja comportamento coletivo das partículas carregadas. O número médio de partículas na esfera de Debye é representado pelo parâmetro de plasma " λ " (a letra grega lambda).

1.1.3 Interações de volume

O comprimento de Debye (definido acima) é pequeno se comparado ao tamanho físico do plasma. Este critério significa que as interações no interior do plasma são mais importantes do que nas bordas, onde podem ocorrer efeitos de fronteira. Quando este critério é obedecido, o plasma é praticamente neutro.

1.1.4 Frequência de plasma

A frequência dos elétrons do plasma (medindo a oscilação da densidade dos elétrons do plasma) é alta se comparada à frequência de colisões entre elétrons e partículas neutras. Quando esta condição é válida, as interações eletrostáticas predominam sobre os processos da cinética normal dos gases. Uma das manifestações fundamentais da propriedade coletiva do plasma é a oscilação de plasma. Seja um plasma em equilíbrio. Se se deslocar um elemento de cargas negativas da sua posição de equilíbrio, devido a interação coletiva de cargas da vizinhança aparece uma força restauradora proporcional ao deslocamento. O resultado é uma oscilação cuja frequência chamada frequência de plasma é expressa por:

$$\omega_p = \left(\frac{4\pi n e^2}{m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.1)$$

A frequência de plasma é frequentemente utilizada como um meio de medir a densidade de um plasma. Existe uma relação entre a velocidade térmica, v_θ , a frequência de plasma e o comprimento de Debye.

$$v_\theta = \lambda_D \omega_p \quad (1.2)$$

Esta oscilação de plasma pode deixar de existir se a densidade de partículas neutras no plasma for aumentada, de modo que o tempo de colisões, τ , entre a partícula carregada e a partícula neutra for inferior ao período de oscilação do plasma. Requer-se então:

$$\omega_p \tau > 1 \quad (1.3)$$

para existência desta oscilação.

1.1.5 Grau de ionização

A ionização é necessária para o plasma existir. O termo "densidade do plasma" usualmente se refere à "densidade de elétrons", isto é, o número de elétrons livres por unidade de volume. O grau de ionização de um plasma é a proporção de átomos que perderam (ou ganharam) elétrons e é controlado principalmente pela temperatura. Mesmo um gás parcialmente ionizado, em que somente 1% das partículas esteja ionizada, pode apresentar as características de um plasma, isto é, resposta a campos magnéticos e alta condutividade elétrica. O grau de ionização α é definido como $\alpha = n_i / (n_i + n_a)$, em que n_i é a densidade de íons e n_a é a densidade de átomos neutros. A densidade de elétrons está relacionada a ele pelo estado médio da carga $\langle Z \rangle$ dos íons, sendo que $n_e = \langle Z \rangle n_i$, em que n_e é a densidade de elétrons.

1.1.6 Temperaturas

A temperatura do plasma é normalmente medida em kelvins ou elétron-volts e é, informalmente, uma medida da energia cinética térmica por partícula. Geralmente são necessárias temperaturas muito altas para sustentar a ionização, a qual é uma característica definidora de um plasma. O

grau de ionização do plasma é determinado pela "temperatura do elétron" relativa ao potencial de ionização (e, com menos intensidade, pela densidade), numa relação chamada equação de Saha. Em baixas temperaturas, os íons e elétrons tendem a se recombinar para o seu estado ligado - átomos - e o plasma acaba se convertendo em um gás.

Na maioria dos casos os elétrons estão suficientemente próximos do equilíbrio térmico, de modo que sua temperatura é relativamente bem definida, mesmo quando há um desvio significativo de uma função de distribuição de energia maxwelliana, devido, por exemplo, a radiação ultravioleta, a partículas energéticas ou a campos elétricos fortes. Por causa da grande diferença de massa, os elétrons chegam ao equilíbrio termodinâmico entre si muito mais rapidamente do que com os íons ou átomos neutros. Por esta razão, a "temperatura do íon" pode ser muito diferente (normalmente menor) da "temperatura do elétron". Isto é especialmente comum em plasmas tecnológicos fracamente ionizados, cujos íons estão frequentemente próximos à temperatura ambiente.

Em função das temperaturas relativas dos elétrons, íons e partículas neutras, os plasmas são classificados como "térmicos" ou "não térmicos". Plasmas térmicos possuem elétrons e partículas pesadas à mesma temperatura, isto é, eles estão em equilíbrio térmico entre si. Plasmas não térmicos, por outro lado, possuem íons e átomos neutros a uma temperatura muito menor (normalmente temperatura ambiente), enquanto os elétrons são muito mais "quentes".

Um plasma é às vezes chamado de "quente" se ele está quase totalmente ionizado, ou "frio" se apenas uma pequena fração (por exemplo, 1%) das moléculas do gás estão ionizadas, mas outras definições dos termos "plasma quente" e "plasma frio" são comuns. Mesmo em um plasma "frio", a temperatura do elétron é tipicamente de várias centenas de graus Celsius. Os plasmas utilizados na "tecnologia de plasma" ("plasmas tecnológicos") são normalmente frios neste sentido.

1.2 Função de Distribuição

A função distribuição, f , é a densidade de partículas no espaço de fase de seis dimensões, três de posição e três de velocidade. Quando o plasma está em equilíbrio termodinâmico a função de distribuição se torna Maxwelliana, conforme o teorema-H de Boltzmann. A distribuição Maxwelliana é dada por:

$$f(\vec{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{-mv^2}{kT} \right) \quad (1.4)$$

onde n é a densidade média de partículas no espaço de configuração, T é a temperatura do plasma, m é a massa de uma partícula, \vec{v} é a velocidade e k a constante de Boltzmann. Na maioria dos plasmas de laboratório o estudo é feito antes do plasma entrar em equilíbrio termodinâmico. Frequentemente estudos são feitos considerando que o plasma está em um certo equilíbrio, tais como elétrons em equilíbrio entre si a uma temperatura T_e e íons em equilíbrio entre si a uma

temperatura T_i , e investiga-se o que acontece com a distribuição a partir deste estado que se chama meta-equilíbrio.

1.2.1 Temperatura e Outros Momentos da Função de Distribuição

A função de distribuição é uma descrição microscópica de um plasma. Em contraste, uma descrição macroscópica de um plasma se faz pela especificação de valores médios das propriedades do plasma tais como, a densidade, a velocidade média, a pressão, a temperatura etc. Existem relações entre a função de distribuição e estas grandezas macroscópicas, Assim:

densidade

$$n_a = \int f_a d\vec{v} \quad (1.5)$$

velocidade média

$$\vec{V}_a = \int f_a \frac{d\vec{v}}{n_a} \quad (1.6)$$

tensor de pressão

$$\overline{\overline{P}}_a = \frac{m_a}{n_a} \int (\vec{v} - \vec{V}_a)(\vec{v} - \vec{V}_a) f_a d\vec{v} \quad (1.7)$$

onde o índice a indica espécie de partículas, tais como, elétrons, íons de massa m_a e carga q_a , nêutrons de massa m_a , etc.

1.2.2 O Gerador Magnetohidrodinâmico

(Citação do livro **J. A. Bittencourt (auth.)-Fundamentals of Plasma Physics-Springer New York (2004)**)

O gerador de energia magnetohidrodinâmico (MHD) converte a energia cinética de um plasma denso que flui através de um campo magnético para energia elétrica. O seu princípio básico é bastante simples. Suponha que um plasma flua com velocidade u (ao longo da direção x) através de um campo magnético aplicado B (na direção z). A força de Lorentz $q(uxB)$ faz com que os íons se desloquem para cima (na direção z) e os elétrons para baixo, de modo que, se trodos são colocados nas paredes do canal e conectados a um circuito externo, então uma densidade de corrente $J = uE_{ind} = uuxB$ (onde u denota condutividade do plasma e E_{ind} é o campo elétrico induzido) flui através do fluxo de plasma na direção z . Essa densidade de corrente, por sua vez, produz uma densidade de força JxB (na direção x), que desacelera o plasma em fluxo. O resultado líquido é a conversão de parte da energia cinética do plasma que entra no gerador em energia elétrica que pode ser aplicada a uma carga externa. Este processo tem a vantagem de operar sem a ineficiência de um ciclo de calor.

2 Dedução Modelo de 2 Fluidos

2.1 Equação de Vlasov

Uma maneira aproximada muito útil para descrever a dinâmica de um plasma é considerar que os movimentos das partículas do plasma são governados pelos campos externos aplicados mais os campos internos médios macroscópicos, suavizados no espaço e no tempo, devido à presença e movimento de todas as partículas de plasma. O problema de obter os campos eletromagnéticos internos macroscópicos (suavizados), no entanto, ainda é complexo e requer que uma solução auto-consistente seja obtida. A equação de Vlasov é uma equação diferencial parcial que descreve a evolução temporal da função de *distribuição* ($f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$) no espaço de fase e que incorpora diretamente os campos eletromagnéticos internos macroscópicos suavizados. Pode ser obtido da equação de Boltzmann na ausência de colisões 4.1

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + a \nabla_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (2.1)$$

mas incluindo os campos suavizados internos no termo de força,

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{1}{m_\alpha} [\vec{F}_{ext} + q_0(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i)] \cdot \nabla_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (2.2)$$

Então 4.2 é a equação de Vlasov. Aqui \vec{F}_{ext} representa a força externa, incluindo a força de Lorentz associada a quaisquer campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, e \vec{E}_i e \vec{B}_i são campos elétricos e magnéticos suavizados internos devido à presença e movimento de todas as partículas carregadas dentro do plasma. Para que os campos eletromagnéticos macroscópicos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i sejam consistentes com as densidades de carga e corrente macroscópicas existentes no próprio plasma, eles devem satisfazer as equações de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{E}_i = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_i = 0 \quad (2.4)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \quad (2.5)$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t}) \quad (2.6)$$

com a densidade de carga do plasma ρ e a densidade de corrente do plasma \vec{J} dada pelas expressões

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.7)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) \vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_V \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.8)$$

Aqui $\vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t)$ denota a velocidade média macroscópica de cada espécie de partícula α que é dada por

$$\vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \frac{1}{n_{\alpha}(\vec{r}, t)} \int_V \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (2.9)$$

Tais equações constituem um conjunto completo de equações a serem resolvidas simultaneamente. Por exemplo, em um procedimento iterativo assumindo valores aproximados iniciais para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$, a Eq. 4.2 pode ser resolvida para produzir $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ para as várias espécies diferentes de partículas. A utilização dos valores calculados em 4.7 e 4.8 leva a valores para as densidades de carga e corrente (ρ e \vec{J}) no plasma, que podem ser substituídas nas equações de Maxwell e resolvidas para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$. Esses valores são então conectados novamente na equação de Vlasov (Eq. 4.2), e assim por diante, para obter uma solução autoconsistente para a função de distribuição de partículas individuais. Embora a equação de Vlasov não inclua explicitamente um termo de colisão no lado direito e, portanto, não leve em consideração colisões de curto alcance, ela não é tão restritiva quanto parece, já que uma parte significativa dos efeitos das interações de partículas já foram incluídas na força de Lorentz, através dos campos eletromagnéticos suavizados auto-consistentes internos.

2.2 Momentos da distribuição

Não é necessário resolver a equação de Boltzmann para a função de distribuição, a fim de calcular as variáveis macroscópicas de interesse físico. Estas variáveis macroscópicas estão relacionadas com os momentos da função de distribuição e as equações de transporte podem ser obtido tomando os vários momentos da equação de Boltzmann. Os três primeiros momentos da equação de Boltzmann são obtidos pela multiplicação de m_{α} , $m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$ e $\frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2}$, respectivamente, e integrando todo o espaço de velocidade. Seguindo estes procedimentos, obtêm-se as equações de conservação de massa, momento e energia. Seja $\chi(v)$ uma propriedade física das partículas no plasma. Agora multiplicamos cada termo da Eq 4.2 por $\chi(v)$ e integramos a equação resultante sobre todo o espaço de velocidade para obter a equação como segue:

$$\int_V \chi \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} d^3v + \int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_{\alpha} d^3v + \int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_{\alpha} d^3v = \int_V \chi \left(\frac{\delta f_{\alpha}}{\delta t} \right)_{coll} d^3v \quad (2.10)$$

Resolvendo cada integral separadamente,

$$\int_V \chi \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \chi f_{\alpha} d^3v \right) - \int_V \frac{\partial \chi}{\partial t} f_{\alpha} d^3v \quad (2.11)$$

No entanto, desde que $\chi = \chi(\vec{v})$, sua derivada parcial em relação ao tempo é zero. Usando a definição de valores médios, o rendimento fica

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha] \quad (2.12)$$

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left(\int_V \chi \vec{v} f_\alpha d^3v \right) - \int_V \nabla \chi \cdot \vec{v} f_\alpha d^3v - \int_V \chi f_\alpha \nabla \cdot \vec{v} d^3v \quad (2.13)$$

Como visto anteriormente, $\chi = \chi(\vec{v})$, então seu gradiente é zero e as variáveis \vec{r} , \vec{v} e t são independentes, então o divergente de \vec{v} também é zero, resultando em

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha] \quad (2.14)$$

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_V \nabla_v \cdot (\vec{a} \chi f_\alpha) d^3v - \int_V f_\alpha (\vec{a} \cdot \nabla_v \chi) d^3v - \int_V \chi f_\alpha (\nabla_v \cdot \vec{a}) d^3v \quad (2.15)$$

A primeira integral desaparece porque a função de distribuição deve desaparecer para $\pm\infty$. A última integral na eq B.6 desaparece se assumirmos que

$$\nabla_v \cdot \vec{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \vec{F} = 0 \quad (2.16)$$

isto é, se o componente de força F_j for independente do componente de velocidade correspondente v_j , uma vez que $\nabla_v \cdot \vec{F} = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial v_j}$. Isto é verdade para a força devido a um campo magnético, $\vec{F} = q_\alpha \vec{v} \times \vec{B}$ porque j também neste caso F_j é independente de v_i .

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha \quad (2.17)$$

$$\int_V \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3v = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) \right] \quad (2.18)$$

Combinando as eq B.3, eq B.5, eq B.8 e eq B.9 na eq B.1 produzimos então,

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) \right] \quad (2.19)$$

4 Metodologia

Iniciaremos esta seção apresentando uma breve dedução do modelo de 2 fluidos para o *breakdown*, o qual sera usado para cumprir os objetivos desta proposta. Ver lista de notações em C.

4.1 Equação de Vlasov

De acordo com o modelo de fluidos para descrever a dinâmica de um plasma consideramos que os movimentos das partículas do plasma são governados pelos campos externos aplicados mais os campos internos médios macroscópicos que são suavizados no espaço e no tempo, por causa da presença e movimento de todas as partículas de plasma. O problema de obter os campos eletromagnéticos internos macroscópicos, no entanto, ainda é complexo e requer que uma solução auto-consistente com as equações de Maxwell e a distribuição de velocidades. A equação de Vlasov é uma equação diferencial parcial usada para descrever a evolução temporal da função de *distribuição* ($f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$) no espaço das velocidades, posições e tempo, ou seja, descreve a evolução temporal da função de *distribuição* no espaço de fase. E incorpora diretamente os campos eletromagnéticos internos macroscópicos suavizados. Pode ser obtida da equação de Boltzmann na ausencia de colisões Eq. 4.1 (??, p. 193)

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + a \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (4.1)$$

onde, \vec{v} é a velocidade e os operadores diferenciais ∇_v e ∇ em coordenadas cartesianas são

$$\begin{aligned} \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial v_x} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial v_y} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial v_z} \\ \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial x} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial y} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

mas incluindo na Eq. 4.1 os campos suavizados internos no termo de força, obtêm-se então a Eq. 4.2 que é a equação de Vlasov.

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{1}{m_\alpha} [\vec{F}_{ext} + q_0(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i)] \cdot \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (4.2)$$

Aqui \vec{F}_{ext} representa a força externa, incluindo a força de Lorentz associada a quaisquer campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, onde \vec{E}_i e \vec{B}_i são campos elétricos e magnéticos suavizados internos causados pela presença e movimento de todas as partículas carregadas dentro do plasma. Os campos eletromagnéticos macroscópicos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i

devem satisfazer as equações de Maxwell, uma vez que precisam ser consistentes com as densidades de carga e corrente macroscópicas existentes no próprio plasma,

$$\nabla \vec{E}_i = \frac{\rho}{\epsilon_o} \quad (4.3)$$

$$\nabla \vec{B}_i = 0 \quad (4.4)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \quad (4.5)$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t}) \quad (4.6)$$

Onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Newtons por Ampere ao quadrado é a permeabilidade magnética do vácuo, $\epsilon_o = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ é constante de permissividade do vácuo com c sendo a velocidade da luz no vácuo e a densidade de carga do plasma ρ é dada por

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathcal{V}} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (4.7)$$

E a densidade de corrente de plasma \vec{J} é dada por

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(\vec{r}, t) \vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int_{\mathcal{V}} \vec{v} f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (4.8)$$

Aqui $\vec{u}_{\alpha}(\vec{r}, t)$ denota a velocidade média macroscópica de cada tipo de partícula α , ver D.1. As equações Eq. 4.2, Eq. 4.3, Eq. 4.4, Eq. 4.5, Eq. 4.6, Eq. 4.7 e Eq. 4.8 constituem um conjunto completo de equações a serem resolvidas ao mesmo tempo. Então, por exemplo, em um procedimento iterativo assumindo valores aproximados iniciais para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$, a Eq. 4.2 pode ser resolvida para produzir $f_{\alpha}(\vec{r}, \vec{v}, t)$ para os tipos diferentes de partículas. A utilização dos valores calculados em Eq. 4.7 e Eq. 4.8 leva a valores para as densidades de carga e corrente (ρ e \vec{J}) no plasma, que podem ser substituídas nas equações de Maxwell e resolvidas para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$. Esses valores são então introduzidos novamente na equação de Vlasov Eq. 4.2, e assim por diante, para obter uma solução autoconsistente para a função de distribuição de partículas individuais. Embora a equação Eq. 4.2 não inclua explicitamente um termo de colisão no seu lado direito e portanto, não leve em consideração colisões de curto alcance, ela é mais geral do que parece, já que uma considerável parte dos efeitos de interações de partículas já foram incluídas na força de Lorentz, por meio dos campos eletromagnéticos suavizados auto-consistentes internos.

Não é necessário resolver a equação de Boltzmann para a função de distribuição, a fim de calcular as variáveis macroscópicas de interesse físico. Estas variáveis macroscópicas estão relacionadas com os momentos da função de distribuição pela equação geral de transporte, deduzida no apêndice B.10. As equações de transporte podem ser obtidas tomando os vários

momentos da equação de Boltzmann. Neste trabalho será deduzido os três primeiros momentos da equação de Boltzmann que são obtidos pela multiplicação de m_α , $m_\alpha \vec{v}_\alpha$ e $\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2}$, respectivamente, e então integrando todo o espaço de velocidade. Seguindo estas etapas, obtêm-se as equações de conservação de massa 4.9, momento 4.21 e energia 4.41.

4.2 Equação de Conservação de Massa

A equação de continuidade, nos garante que toda massa ganha ou perdida no sistema é quantificada no termo S_α . Éssa equação pode ser obtida diretamente com a substituição na Eq. B.10 do χ pela massa m_α . Definindo a densidade de massa como $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ temos

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = S_\alpha \quad (4.9)$$

onde o termo de colisão, $S_\alpha = \left[\frac{\delta \rho_{m\alpha}}{\delta t} \right]_{coll}$, representa a taxa na qual partículas do tipo α são produzidas ou perdidas, por unidade de volume, como resultado de colisões.

4.3 Equação de Conservação de Momento

A equação de conservação de momento afirma que a taxa média de mudança de momento em função do tempo em cada elemento α do fluido, é devida às forças externas aplicadas no fluido somadas a força de pressão do próprio fluido e também domadas as forças internas devido a colisões, dispersão e produção de partículas de plasma. Para derivar a equação de conservação de momento, substituímos na Eq. B.10 o $\chi(\vec{v}_\alpha)$ pelo momento $m_\alpha \vec{v}_\alpha$ das partículas do tipo α .

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha = \quad (4.10)$$

$$= \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) \right]$$

Definindo $\vec{v}_\alpha = \vec{c}_\alpha + \vec{u}_\alpha$, onde \vec{c}_α é a velocidade média térmica das partículas e \vec{u}_α é a velocidade média de movimento toroidal. Vamos tratar de cada termo da Eq. 4.10 semaradamente.

Aplicando a definição de valor médio D.1 e como $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, ficamos com $\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \chi \rangle_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha)$ mas \vec{c}_α não influencia no valor médio, então ficamos com $\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)$. Aplicando a regra da cadeia na derivada parcial obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} \quad (4.11)$$

Substituindo χ pelo momento $m_\alpha \vec{v}_\alpha$ temos $\nabla \cdot (n_\alpha \langle \chi \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) = \nabla \cdot (n_\alpha \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha)$ e tirando m_α para fora da média, pois é constante temos $\nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha \langle \vec{v}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha)$ nota-se que

dentro do termo de média \vec{v}_α é igual \vec{v} pois o tipo de partícula α já esta representado na operação valor médio $\langle \rangle_\alpha$ ficamos com $\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle)$. Aplicando a definição de valor médio D.1 obtemos

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle) = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle) \quad (4.12)$$

já que $\vec{c} \cdot \vec{u} = 0$ pois \vec{c} vai em todas as direções então não contribui com a velocidade, e o valor médio de \vec{v}_α é por definição igual a \vec{u}_α . No termo seguinte, $n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v m_\alpha \vec{v} \rangle_\alpha$ reorganizamos os termos ficando com $n_\alpha(\vec{r}, t) \langle (m_\alpha \vec{a} \cdot \nabla_v) \vec{v} \rangle_\alpha$ observando que massa vezes aceleração é força, $\vec{F} = \vec{a} \cdot m_\alpha$, temos $n_\alpha(\vec{r}, t) \langle (\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} \rangle_\alpha$ que nos da

$$n_\alpha(\vec{r}, t) \langle (\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} \rangle_\alpha = n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{F} \rangle_\alpha \quad (4.13)$$

pois $(\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} = \vec{F} \cdot (\nabla_v \vec{v})$ e $\nabla_v \vec{v} = 1$. Definindo R_α igual a taxa de mudança de momento devido ao espalhamento onde

$$R_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] \quad (4.14)$$

e \mathcal{R}_α igual a taxa de mudança de momento devido à produção de partículas de plasma onde

$$\mathcal{R}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] \quad (4.15)$$

Substituindo Eq. 4.11, Eq. 4.12, Eq. 4.13, Eq. 4.14, Eq. 4.15 em Eq. 4.10 obtemos

$$\begin{aligned} \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) + \\ + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle) - n_\alpha \langle \vec{F} \rangle_\alpha = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha \end{aligned} \quad (4.16)$$

Definindo o tensor $\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle$ que representa a força por unidade de volume dentro do plasma devido aos movimentos aleatórios das partículas. Temos

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) = \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + [\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)] \vec{u}_\alpha \quad (4.17)$$

Fazendo força média igual a força de Lorentz temos

$$\langle \vec{F} \rangle_\alpha = q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) \quad (4.18)$$

e substituindo as Eq. 4.17 e Eq. 4.18 em Eq. 4.16 teremos

$$\begin{aligned} \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + [\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)] \vec{u}_\alpha = \\ n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha + R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha \end{aligned} \quad (4.19)$$

rearranjando

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] + \vec{u}_\alpha \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha + n_\alpha(\vec{r}, t) q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha \quad (4.20)$$

No entanto, o segundo termo no lado esquerdo da Eq. 4.20 é a equação de conservação de massa Eq. 4.9 então se não considerarmos as colisões que levam à geração ou perda de partículas, ou seja $S_\alpha = 0$, podemos simplificar a equação para

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha + n_\alpha(\vec{r}, t) q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha \quad (4.21)$$

A equação de conservação de momento estabelece a condição necessária para garantir a conservação do momento do sistema. O termo $-\nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha$ representa a força causada pelas variações aleatórias nas velocidades de cada partícula que é exercida em um volume unitário do plasma. Esta força em cada unidade de volume também inclui forças associadas à pressão escalar e forças de corte tangenciais, que são as forças viscosas. No nosso caso, o efeito da viscosidade é pequeno não sendo importante no nosso plasma. Os termos não-diagonais de \mathbb{P}_α podem ser desprezados. Além disso, no caso em que quando a distribuição de velocidades de cada tipo de partícula é isotrópica (não à direção privilegiada, suas propriedades são as mesmas em qualquer direção). Os termos diagonais de \mathbb{P}_α são todos iguais e representam a pressão cinética escalar p_α . Assim, desconsiderando os efeitos de viscosidade e considerando uma distribuição de velocidade isotrópica, temos $\mathbb{P}_\alpha = p_\alpha$, e a força por unidade de volume se torna $-\nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha = -\nabla p_\alpha$, de acordo com a (??, Cap 6).

4.4 Equação de Conservação de Energia

A equação de conservação de energia nos garante que toda energia cinética ganha ou perdida no sistema veio de colisões com outras partículas do sistema ou foi causado pelo campo elétrico \vec{E} . Para derivar a equação de conservação de energia, substituímos na Eq. B.10 o $\chi(\vec{v}_\alpha)$ pela energia cinética $\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2}$ das partículas do tipo α obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \vec{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \rangle_\alpha = \\ = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \rangle_\alpha) \right] \end{aligned} \quad (4.22)$$

O primeiro termo da Eq. 4.22 será simplificado trocando $n_\alpha(\vec{r}, t) m_\alpha$ por $\rho_{m\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \rangle_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{v}_\alpha^2 \rangle_\alpha) \quad (4.23)$$

abrindo \vec{v}_α^2 a Eq. 4.23 fica

$$\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho_{m\alpha}}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle_\alpha) \quad (4.24)$$

Como a velocidade aleatória não tem sentido privilegiado, temos para qualquer partícula $|\vec{v}^2| = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ e como são muitas partículas que se movem em direções aleatórias, os valores médios dos quadrados das componentes de suas velocidades são iguais, logo, $v_x^2 = \frac{1}{3} |\vec{v}^2|$ então

da teoria cinética dos gases obtemos $p = \frac{nMv_x^2}{V}$ onde M é a massa molar do gás de origem do plasma, p é a pressão e n o numero de moles. No nosso caso $\frac{nMv_x^2}{V} = \frac{nM\langle c_\alpha^2 \rangle}{3V}$ e a densidade de massa $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ pode substituir $\frac{nM}{V}$ nos deixando com $\rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \rangle = 3p_\alpha$. Então a Eq. 4.24 simplifica para

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} 3p_\alpha + \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha^2 \right) \quad (4.25)$$

O segundo termo da Eq.4.22 pode ser organizado reorganizando termos e trocando $n_\alpha(\vec{r}, t)m_\alpha$ por $\rho_{m\alpha}$ que fica

$$\nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right] \quad (4.26)$$

Lembrando que $\vec{v} = \vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha$ então $\langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha$ pode ser expandido da seguinte maneira $\langle [(\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha) \cdot (\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha)](\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha) \rangle = \langle (\vec{u}_\alpha^2 + \vec{c}_\alpha^2 + 2\vec{u}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha)(\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha) \rangle$. Pode-se escrever a equação de conservação de energia de outra forma se substituir o fluxo de calor e o tensor de pressão cinética definidos como

$$\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle \quad (4.27)$$

onde \mathbb{P}_α é o tensor de pressão cinética

$$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle \quad (4.28)$$

onde \vec{q}_α é o fluxo de calor mas como vimos a pressão cinética é dada por $\rho_{m\alpha} \langle |\vec{c}^2|_\alpha \rangle = 3p_\alpha$ então a Eq. 4.26 fica

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right] = \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} (3p_\alpha) + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right] \quad (4.29)$$

simplificando 4.29 obtemos

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} (3p_\alpha) + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right] = \quad (4.30)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{1}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) (3p_\alpha) + \nabla \cdot (\mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha$$

Para o terceiro termo substituímos $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_\alpha}$

$$n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \rangle_\alpha = n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_v \left(\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \right) \rangle_\alpha \quad (4.31)$$

resolvendo $\nabla_v \left(\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \right)$ obtemos $\frac{2m_\alpha \vec{v}_\alpha}{2}$ e substituindo em ?? e cancelando o $2m_\alpha$ que esta no denominador e dividendo ficamos com

$$n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_v \left(\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \right) \rangle_\alpha = n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha \quad (4.32)$$

Substituindo as quantidades Eq. 4.25, Eq. 4.30 e Eq. 4.32 na Eq. 4.22 temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} 3p_\alpha + \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{1}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) (3p_\alpha) + \quad (4.33)$$

$$\nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v} >_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 >_\alpha) \right]$$

Definindo M_α que representa a taxa de mudança de densidade de energia devido a colisões

$$M_\alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \right] + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} < (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} >_\alpha \right] - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v} >_\alpha \quad (4.34)$$

Usando $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla$ que é a derivada total do tempo obtemos

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) + \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) \nabla \cdot \vec{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + = \quad (4.35)$$

$$\nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v} >_\alpha = M_\alpha$$

Reescrevendo os termos $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right]$ em função da derivada total $\frac{D}{Dt}$ ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) \vec{u}_\alpha \right] = \quad (4.36)$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \nabla \cdot [\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha] + \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot [(\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] + \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t}$$

Usando as equações de conservação de massa e momento, Eq. 4.9 e Eq. 4.21

$$\frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 S_\alpha + n_\alpha(\vec{r}, t) \vec{u}_\alpha < F >_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}) + \vec{u}_\alpha \cdot \vec{A}_\alpha - |\vec{u}_\alpha|^2 S_\alpha \quad (4.37)$$

Substituindo em Eq. 4.37 o resultado de Eq. 4.38

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) + \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) \nabla \cdot \vec{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + = \quad (4.38)$$

$$\nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v} >_\alpha = M_\alpha$$

Definindo Q_α como sendo a taxa de variação da densidade de energia devido ao espalhamento onde

$$Q_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha < \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} >_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) \right] \quad (4.39)$$

E definindo \mathcal{E}_α que representa a taxa de variação da densidade de energia devido a produção de partículas de plasma onde

$$\mathcal{E}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha < \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} >_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) \right] \quad (4.40)$$

Desta forma a Eq. 4.33 torna-se então

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right) + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + (\mathbb{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_\alpha + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha = \\ = Q_\alpha + \mathcal{E}_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \mathcal{R}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \end{aligned} \quad (4.41)$$

uma vez que $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} 3p_\alpha + \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha^2 \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right)$

4.5 Simplificações

Primeiramente assumimos $n_e = n_i = n_0$ onde n_0 é a densidade eletrônica em $t = 0$. Para modelar o Breakdown do plasma no tokamak Nova-Furg, usaremos um modelo de dois fluidos. Assumiremos que o plasma é composto por um fluido de elétrons e um único fluido ionizado, ambos sendo incompressíveis, $\nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0$, um fluido ideal que não possua viscosidade $\mathbb{P}_\alpha = p_\alpha$, quase neutro $n_e = n_i = n$, e adiabático $\nabla \cdot \vec{q}_\alpha = 0$, ou seja, as escalas de tempo envolvidas são muito curtas para ocorrer a difusão de calor, portanto o processo será considerado adiabático e o transporte de energia é predominantemente convectivo. Para melhorar a estabilidade numérica, vamos considerar o fluxo total de partículas a ser composto por um termo convectivo e difusivo, isto é, $\Gamma = n \vec{u}_\alpha - D_\alpha \nabla n$ com $D_e = D_i = D$ sendo o coeficiente de difusão de partículas. Além do que, além do mais, Vamos supor também que o gás neutro esteja em repouso e à temperatura ambiente. Portanto, os termos de momento e fonte de energia devido à produção de partículas de plasma \mathcal{R}_α e \mathcal{E}_α não contribuem para o momento e conteúdo térmico do plasma. Com essas suposições, o conjunto de equações consideradas neste modelo são:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_\alpha) = \frac{S_\alpha}{m_\alpha} + D \nabla^2 n \quad (4.42)$$

$$m_\alpha n \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = q_\alpha n (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha S_\alpha \quad (4.43)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right) = Q_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \quad (4.44)$$

Aqui, vamos supor que o termo de troca de momento \vec{R}_α pode ser modelado por

$$\vec{R}_\alpha = m_\alpha n \sum_\rho \mu_{\alpha\rho} (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\rho) \quad (4.45)$$

e portanto,

$$\vec{R}_e = m_e n v_{en} \vec{u}_e + n e \eta \vec{J} \quad (4.46)$$

$$\vec{R}_i = m_i n v_{in} \vec{u}_i + n e \eta \vec{J} \quad (4.47)$$

com η sendo a resistividade paralela do Spitzer, e que os termos de troca de elétrons e de íons podem ser modelados por

$$\vec{Q}_e = -\vec{Q}_i = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (4.48)$$

O conjunto final de equações que devem ser resolvidas é então

equações de conservação de massa para elétrons e íons

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_e) = \frac{S_e}{m_e} + D \nabla^2 n \quad (4.49)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_i) = \frac{S_i}{m_i} + D \nabla^2 n \quad (4.50)$$

equações de conservação de momento para elétrons e íons

$$\left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right] = -\frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_e}{m_e n} - (v_{en} + \frac{S_e}{m_e n}) \vec{u}_e + \frac{e}{m_e} \eta \vec{J} \quad (4.51)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \nabla) \vec{u}_i \right] = -\frac{e}{m_i} (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_i}{m_i n} - (v_{in} + \frac{S_i}{m_i n}) \vec{u}_i + \frac{e}{m_i} \eta \vec{J} \quad (4.52)$$

equações de conservação de energia para elétrons e íons

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - n e \eta \vec{u}_e \cdot \vec{J} + (2v_{en} + \frac{S_e}{m_e n}) \frac{1}{2} m_e n u_e^2 \quad (4.53)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \nabla p_i \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - n e \eta \vec{u}_i \cdot \vec{J} + (2v_{in} + \frac{S_i}{m_i n}) \frac{1}{2} m_i n u_i^2 \quad (4.54)$$

Suponhamos agora que, durante a fase inicial, os íons podem ser considerados em repouso ($\vec{u}_i = 0$) e, portanto, podemos remover a equação de conservação do momento iônico. Vamos também adicionar as equações Eq. 4.49 e Eq. 4.50. Para isso, teremos que definir um termo de fonte de partículas que explique o número de partículas em si em vez da massa de partículas: $\zeta_\alpha = S_\alpha / m_\alpha$. Note que para um plasma ionizado sozinho, podemos dizer que $\zeta_e = \zeta_i = \zeta = n(v_{ion} - v_{loss})$. Também assumiremos que $v_{ion} = \alpha_T u_e = \alpha_T J / (ne)$ e $v_{loss} = u_{e,||} / L_{eff} = \vec{J} \cdot \vec{B} / (Bne)$. Aqui, α_T é o primeiro coeficiente de Townsend. Com todas essas suposições, o conjunto de equações simplifica para

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D \nabla^2 n \quad (4.55)$$

$$m_e \left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right] = -e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_e}{n} - (v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) m_e \vec{u}_e + e\eta \vec{J} \quad (4.56)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_e \cdot \vec{J} + (2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) \frac{1}{2} m_e n u_e^2 \quad (4.57)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (4.58)$$

Vamos agora reescrever este conjunto de equações em termos da densidade de corrente

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D \nabla^2 n \quad (4.59)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} - \vec{J} (v_{in} + v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) - \frac{e}{m_e} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{e}{m_e} \nabla p_e \quad (4.60)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}}{2v_{ei}} \right) \eta J^2 - \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (4.61)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (4.62)$$

Para entrarmos na parte computacional ainda é necessário incluir as equações para os campos magnéticos e separar seus componentes em um componente de campo toroidal e outro de campo poloidal com um padrão quadrupolo. Isso será feito no TCC 2, juntamente com uma mudança de coordenadas, para um sistema de coordenadas cilíndricas que se fecha em si mesmo, explicando de outra forma, é como se no interior de um toroide (com as dimensões internas da câmara de vácuo do tokamak Nova-Furg), cada seção reta circular fosse graduada com um sistema de coordenadas polares (R, θ) e com um ângulo φ que representa o quanto a seção reta do toroide se deslocou da origem onde $\varphi = 0$). Será feita a adaptação do modelo de dois fluidos para as coordenadas (R, θ, φ) e também a implementação do modelo no MATLAB, definição das condições de contorno e fronteira e realização da simulação.

5 Resultados esperados

Espero neste trabalho obter dados de simulação querentes com os medidos nos disparos do tokamak, para reforçar a validade do modelo de dois fluidos para o *breackdown*. Podendo então usar o modelo de dois fluidos para prever os resultados de cada experiemento na maquina. E se possível calcular quais os melhores parâmetros para operar o tokamak Nova-Furg.

6 Conclusão

Como resultados da fase teórica, logo no início do trabalho vimos que existe claras diferenças entre métodos de fluidos para o plasma e métodos cinéticos e para o nosso caso a melhor opção são os modelos de fluidos. Constatamos que a equação de Vlasov, Eq. 4.2, não é tão restritiva quanto parece uma vez que uma parte muito significativa das interações entre partículas são consideradas nos campos eletromagnéticos internos suavizados \vec{E}_i e \vec{B}_i causados pela presença e movimento de todas as partículas carregadas dentro do plasma. Outro importante resultado obtido neste trabalho é o conjunto das 6 equações de conservação dos momentos da equação de Boltzmann Eq. 4.1, para cada momento são duas equações, uma para o fluido de elétrons e outra para o fluido de íons. Mas como vimos nas simplificações os íons podem ser considerados em repouso durante a fase inicial ou seja $\vec{u}_i = 0$, então pode-se remover a equação de conservação do momento iônico na fase de brackdown. Uma vez que a massa dos íons é muito maior que a massa dos elétrons implicando em uma mobilidade de íons muito menor.

A O modelo de Townsend

O modelo de Townsend assume que os campos elétricos acionados externamente são predominantes no dispositivo. Tal suposição é verdadeira para dispositivos com gás neutro de baixa pressão e curto espaço entre os eletrodos, porque a quantidade de carga espacial local produzida durante o início do avalanche de elétrons é desprezível devido à pequena taxa de crescimento, α_T . Portanto as características da avalanche de elétrons em dispositivos de baixa pressão de gás dependem dos campos elétricos externos e podem ser descritas pelo modelo de Townsend.

Assumindo que, devido à sua maior massa, os íons são estacionários, e os elétrons livres são responsáveis pela ionização. O aumento da densidade eletrônica, n_e , é proporcional à diferença entre a taxa de ionização, v_{ionz} (geração de elétrons) e a taxa de perda de elétrons, v_{loss}

$$\frac{dn_e}{dt} = (v_{ionz} - v_{loss})n_e \quad (A.1)$$

portanto, nesta fase, a densidade eletrônica $n_e(t)$ pode ser expressa como

$$n_e(t) = n_{e0} e^{(v_{ionz} - v_{loss})t} \quad (A.2)$$

onde t descreve o tempo, n_{e0} é a densidade de elétrons em $t = 0$ o *breackdown* ocorre quando a taxa de geração de elétrons excede a taxa de perda de elétrons. Estes elétrons então são acelerados pelo campo elétrico toroidal e alcançam a velocidade de desvio (*drift velocity*). Observe que a Eq. A.2 é válida somente quando o grau de ionização permanece pequeno, deste modo as colisões de elétrons com as partículas neutras predominam sobre as colisões Coulombianas. Para modelar o processo de ionização, vamos escrever a taxa de ionização em termos do primeiro coeficiente de Townsend e a velocidade de desvio do elétron

$$v_{ionz} = \alpha_T u_{D,||} \quad (A.3)$$

onde $u_{D,||}$ é a velocidade de desvio, α_T é o primeiro coeficiente de Townsend que é dado por

$$\alpha_T = A p_n e^{B \frac{p_n}{E_\Theta}} \quad (A.4)$$

Aqui, A e B são constantes que dependem do gás de trabalho, p_n é a pressão de gás neutro e E_Θ é a magnitude do campo elétrico externo. A taxa de perda de elétrons devido ao seu movimento ao longo das linhas do campo magnético pode ser expressa por

$$v_{loss} = \frac{u_{D,||}}{L_{eff}} \quad (A.5)$$

onde L_{eff} é a distância média percorrida pelo elétron antes de se chocar com a parede. Fazendo o lado direito da Eq. A.1 ir para zero, cria-se uma condição para o início do *breackdown*

$$A p_n e^{B \frac{p_n}{E_\Theta}} = \frac{1}{L_{eff}} \quad (A.6)$$

Esta equação mostra que um *breackdown* bem-sucedido em um tokamak depende da escolha da pressão do gás neutro, da intensidade do campo elétrico toroidal e do comprimento efetivo da conexão (L_{eff}), que depende da configuração do campo poloidal durante a fase de partida. Existe então um valor mínimo do campo elétrico toroidal induzido para uma dada pressão de gás neutro e L_{eff} para que se possa obter um *breackdown*. Uma explicação detalhada para a modelagem da teoria de Townsend pode ser encontrada em (??)

B Momentos da distribuição

Seja $\chi(v)$ uma propriedade física das partículas no plasma. Agora multiplicamos cada termo da Eq. 4.2 por $\chi(v)$ e integramos a equação resultante sobre todo o espaço de velocidade para obter a equação como segue:

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v + \int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_V \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3v \quad (\text{B.1})$$

Resolvendo cada integral separadamente,

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \chi f_\alpha d^3v \right) - \int_V \frac{\partial \chi}{\partial t} f_\alpha d^3v \quad (\text{B.2})$$

No entanto, desde que $\chi = \chi(\vec{v})$, sua derivada parcial em relação ao tempo é zero. Usando a definição de valores médios (Anexo. D.1), o rendimento fica

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha] \quad (\text{B.3})$$

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left(\int_V \chi \vec{v} f_\alpha d^3v \right) - \int_V \nabla \chi \cdot \vec{v} f_\alpha d^3v - \int_V \chi f_\alpha \nabla \cdot \vec{v} d^3v \quad (\text{B.4})$$

Como visto anteriormente, $\chi = \chi(\vec{v})$, então seu gradiente é zero e as variáveis \vec{r} , \vec{v} e t são independentes, então o divergente de \vec{v} também é zero, resultando em

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha] \quad (\text{B.5})$$

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_V \nabla_v \cdot (\vec{a} \chi f_\alpha) d^3v - \int_V f_\alpha (\vec{a} \cdot \nabla_v \chi) d^3v - \int_V \chi f_\alpha (\nabla_v \cdot \vec{a}) d^3v \quad (\text{B.6})$$

A primeira integral desaparece porque a função de distribuição deve desaparecer para $\pm\infty$. A última integral na Eq. B.6 desaparece se assumirmos que

$$\nabla_v \cdot \vec{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \vec{F} = 0 \quad (\text{B.7})$$

isto é, se o componente de força F_j for independente do componente de velocidade correspondente v_j , uma vez que $\nabla_v \cdot \vec{F} = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial v_j}$. Isto é verdade para a força devido a um campo magnético, $\vec{F} = q_\alpha \vec{v} \times \vec{B}$ porque j também neste caso F_j é independente de v_i .

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha \quad (\text{B.8})$$

$$\int_V \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3v = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) \right] \quad (\text{B.9})$$

Combinando as Eq. B.3, Eq. B.5, Eq. B.8 e Eq. B.9 na Eq. B.1 produzimos então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \chi \rangle_\alpha = \\ = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

C Lista de Notações

Lista de notação:

\vec{E}_i é o campo elétrico macroscópico interno

\vec{B}_i é o campo magnético macroscópico interno

$\vec{B}(\vec{r})$ é o vetor campo magnético

$\vec{E}(\vec{r})$ é o campo elétrico

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ é vetor densidade de corrente

v_{ionz} é a taxa de ionização

v_{loss} é a taxa de perda de elétrons

$n_\alpha = \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ densidade numérica da partícula do tipo α

$\vec{u}_\alpha = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int_V \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$ é a velocidade média das partículas em v

n_i é a densidade numérica de íons

n_e é a densidade numérica de elétrons

m_α massa do tipo de partícula α

α_a é o 1º coeficiente de Townsend para o tipo de partícula α

τ_p é o tempo de confinamento da partícula

$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a função distribuição de velocidades.

$\rho(\vec{r}, t)$ é a densidade de carga

Q_α representa a taxa de mudança de densidade de energia devido ao espalhamento

\mathcal{E}_α é a produção de partículas de plasma

$\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle$ é o tensor de pressão cinética

$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle$ é o fluxo de calor

q_α é carga da partícula do tipo α

D_e, D_i, D sendo os coeficientes de difusão de partículas.

$p(\vec{r}, t)$ é o escalar de pressão

e é carga elementar do eletrón

η sendo a resistividade paralela do Spitzer

\vec{R}_α termo de troca de momento

R_α denota a taxa de mudança de momento devido ao espalhamento

\mathcal{R}_α denota a taxa de mudança de momento devido à produção de partículas de plasma.

Operadores diferenciais:

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \hat{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{e}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla_v = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial v_z}$$

D Valor Médio

O símbolo $\langle \rangle_\alpha$ denota o valor médio com respeito ao espaço de velocidades para o tipo de partícula α , o valor médio é independente de \vec{v} mas é uma função de \vec{r} e t .

$$\langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int_V \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (\text{D.1})$$

onde V representa o espaço de velocidade, ou seja, todas as velocidades possíveis para cada partícula, $n_\alpha(\vec{r}, t) = \int_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$ e a densidade numérica de partículas do tipo α na posição \vec{r} no tempo t e $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a função distribuição de velocidades para as partículas do tipo α .