

Kévi Pegoraro

Modelo de 2 Fluidos para o Breakdown no Tokamak Nova-Furg

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2019

Kévi Pegoraro

Modelo de 2 Fluidos para o Breakdown no Tokamak Nova-Furg

Trabalho de Introdução a física de
Plasma, Matemática Aplicada Bacharelado.
Universidade Federal do Rio Grande.

Universidade Federal do Rio Grande - FURG

Instituto de Matemática, Estatística e Física - IMEF

Curso de Matemática Aplicada Bacharelado

Orientador: Dro. Magno P. Coralles

Coorientador: Dro. Gustavo P. Canal

Rio Grande, Rio Grande do Sul, Brasil

Julho, 2019

Lista de ilustrações

Figura 1	– Esquema básico de um tokamak [Daltrini (1999), Ferrari e Nascimento (1988)]	7
Figura 2	– Tokamak Nova-Furg, modelo feito no Blender autoria própria	8
Figura 3	– Coordenadas Pseudotoridais	20
Figura 4	– O ponto A representado em coordenadas pseudotoridais	20
Figura 5	– Algoritmo para a resolução numérica via <i>rk4</i> de 8.55 no Matlab	27
Figura 6	– Gráfico da resolução numérica de 8.55 no Matlab - Verticalmente temos o valor de $n(r)$ em m^{-3} , e horizontalmente o valor de r em m	27
Figura 7	– Algoritmo para a resolução numérica via <i>rk4</i> de 8.55 no Matlab	28
Figura 8	– Gráfico da resolução numérica de 8.55 no Matlab - Verticalmente temos o valor de $n(r)$ em m^{-3} , e horizontalmente o valor de r em m	28
Figura 9	– Equipotenciais Campo Magnético gerado pelas bobinas do Tokamak Nova-Furg - Imagem feita no Matlab, autoria própria	30
Figura 10	– Equipotenciais Campo Magnético gerado pelas bobinas e corrente de plasma do Tokamak Nova-Furg - Imagem feita no Matlab, autoria própria	31
Figura 11	– Bobinas Tokamak Nova-Furg - Modelo criado no Blender, autoria própria .	37

Lista de tabelas

Tabela 1	– Cronograma	10
Tabela 2	– Dados Nova-Furg	36
Tabela 3	– Relação entre unidades	38

Sumário

1	RESUMO	4
2	PALAVRAS CHAVE	4
3	INTRODUÇÃO	4
3.1	Plasma	4
3.2	Fusão	5
3.3	Tokamak	6
3.4	Breakdown em um Tokamak	8

4	OBJETIVOS	8
5	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
6	CRONOGRAMA	9
7	METODOLOGIA	10
7.1	Equação de Vlasov	10
7.2	Equação de Conservação de Massa	12
7.3	Equação de Conservação de Momento	12
7.4	Equação de Conservação de Energia	14
7.5	Simplificações	17
8	SISTEMA DE COORDENADAS PSEUDOTORIDAIIS	19
8.1	Exemplo em Coordenadas Pseudotoridais	26
9	FASE COMPUTACIONAL	28
9.1	Equipotenciais Campo Magnético	29
10	RESULTADOS ESPERADOS	31
11	CONCLUSÃO	31
A	O MODELO DE TOWNSEND	32
B	MOMENTOS DA DISTRIBUIÇÃO	33
C	LISTA DE NOTAÇÕES	34
D	VALOR MÉDIO	35
E	TABELA PARÂMETROS BOBINAS NOVA-FURG	36
F	TABELA DE UNIDADES ÚTEIS	37
	REFERÊNCIAS	39

1 Resumo

Este TCC visa estudar a teoria MHD aplicada a um sistema toroidal de confinamento magnético de plasma. Busca-se entender o que acontece durante o *breakdown* nos tokamaks. Para poder controlar o plasma, garantindo assim o equilíbrio necessário para manter o plasma confinado. A partir dos momentos da equação de Boltzmann obtêm-se o modelo de 2 fluidos para o *breakdown*. Fazendo uso dos parâmetros físicos do tokamak Nova-Furg obtém-se, por meio de uma simulação numérica, a distribuição de densidade numérica, corrente de plasma, pressão cinética entre outras propriedades macroscópicas do plasma.

2 Palavras Chave

Modelo de 2 Fluidos, Breakdown Plasma, Tokamak Nova-Furg.

3 Introdução

3.1 Plasma

O plasma é similar a um gás, no qual certa porção das partículas é ionizada, possui partículas com mais ou menos elétrons. A ionização é geralmente alcançada pela aplicação de elevadas energias aos átomos, seja através da aplicação de uma alta tensão elétrica ou por via de radiação de alta energia. A premissa básica é que o aquecimento de um gás provoca a dissociação das suas ligações moleculares, convertendo-o em seus átomos constituintes. Desta forma, ao receberem mais energia os átomos ionizam, transformando o gás em plasma. [8]

O plasma chamado *frio* composto por: átomos ou moléculas neutras, íons (positivos ou negativos), elétrons e fótons. Um plasma dito *quente*, totalmente ionizado que é composto por: íons positivos, elétrons e fótons. É onde nas condições corretas ocorre a fusão. Como o gás, o plasma não possui forma ou volume definidos, a não ser quando contido em um recipiente. No universo, o plasma é o estado mais facilmente observável da matéria comum. [4]. Quando o número de átomos ionizados é relativamente pequeno, o comportamento global do plasma é dominado por processos colisionais, ou seja, que envolvem principalmente colisões binárias entre as partículas. Quando o número de partículas carregadas é grande, o comportamento global do plasma passa a ser dominado por interações eletromagnéticas, ou seja, a dinâmica do plasma é determinada pelos campos elétricos e magnéticos existentes mais os produzidos pelas partículas carregadas do meio.

Para a descrição do plasma existem duas abordagens, os modelos de fluidos e os modelos cinéticos, cada um com suas vantagens e desvantagens. O modelo de fluidos (*Magnetohydrodynamics*, MHD) descreve o plasma por meio de quantidades macroscópicas simplificadas, como por exemplo a densidade numérica de partículas e a densidade de corrente. O modelo de um fluido trata o plasma como um fluido que é governado pelas equações do eletromagnetismo

de Maxwell e as equações de Navier-Stokes. Neste trabalho será usado uma descrição mais geral do plasma, um modelo de dois fluidos, onde os íons e os elétrons são descritos como dois fluidos diferentes. Com uma distribuição de velocidades para elétrons e outra para íons. Os modelos de fluidos são precisos quando a distribuição de velocidade se aproxima da distribuição de Maxwell-Boltzmann, isso normalmente ocorre quando o grau de colisões é alto, ou seja um plasma quente com grau de ionização alto. Uma desvantagem do modelo de fluidos é que devido a descrição do plasma em termos de um único fluxo a uma determinada temperatura em cada localização espacial. O modelo não permite capturar flutuações no plasma, como raios de luz ou camadas duplas, nem descrever efeitos ondulatórios de partículas. Os modelos cinéticos não precisam assumir uma distribuição de Maxwell-Boltzmann, já que adotam uma função de distribuição da velocidade da partícula em cada ponto do plasma. Porém os modelos cinéticos demandam muito mais computação para serem resolvidos satisfatoriamente do que os modelos de fluidos. Devido a esse excessivo aumento de demanda computacional dos modelos cinéticos e da sua maior complexidade, escolhe-se normalmente para a modelagem do *breakdown* o modelo de fluidos.

3.2 Fusão

A fusão nuclear é um processo físico químico promissor para suprir a crescente demanda mundial por energia. O sol é alimentado por reações de fusão assim como todas as estrelas. Em tais reações, núcleos de baixa massa se combinam, ou se fundem, para formar núcleos mais massivos. No sol, uma sequência de reações de fusão, denominada cadeia p-p, começa com prótons, núcleos de hidrogênio comum, e termina com partículas alfa e núcleos de átomos de hélio. Após uma reação de fusão, as massas finais são menores do que as do início: a massa “ausente” é convertida em energia, quantificada pela conhecida equação de Einstein,

$$E = (m_r - m_p)c^2$$

onde E é a energia resultante da reação, m_r é a massa dos núcleos antes da reação, m_p é a massa do núcleo após a reação e c é a velocidade da luz. Uma vez que a fissão nuclear apresenta muitos problemas como riscos de acidentes sérios, produção significativa de resíduos radioativos e usos militares. Por outro lado, o processo de fusão é naturalmente seguro, embora a reação de fusão também produza resíduos radioativos. No entanto, tais subprodutos são o trítio, um radioisótopo de hidrogênio e nêutrons; o fluxo de nêutrons em um reator tornará os materiais estruturais radioativos. O trítio tem uma meia-vida curta de 12 anos, enquanto a escolha apropriada de materiais pode resultar em resíduos que têm meias-vidas de dezenas de anos, em vez de milhares de anos, como na fissão. Outra enorme vantagem da fusão é que os materiais usados para reação de fusão podem ser extraídas da água do mar, portanto essas fontes são essencialmente inesgotáveis. Como a fusão deve ser continuamente alimentada e sua manutenção depende estritamente do equilíbrio MHD, ela é facilmente interrompida. Mesmo nos piores acidentes

imagináveis o plasma contido no tokamak não terá energia suficiente para causar acidentes perigosos.

3.3 Tokamak

O tokamak é um reator experimental que serve para estudar a fusão nuclear. Serve para gerar e confinar plasmas de alta temperatura. O objetivo final da pesquisa com tokamaks é tornar viável a construção de reatores nucleares de fusão com balanço positivo de energia, ou seja, a energia extraída é maior que a gasta para manter as reações de fusão. A reação de fusão mais promissora é a de deutério e trítio. A grande quantidade de energia liberada servirá para aquecer água, produzir vapor e assim mover uma turbina, acoplada a um gerador elétrico. A pesquisa em tokamaks, portanto, está ligada à procura de fontes alternativas de energia para a produção de eletricidade. Basicamente, o Tokamak é um potente eletroímã que produz um campo magnético toroidal. Em seu interior ocorre uma emissão de elétrons que provoca uma ruptura (*breakdown*) da descarga elétrica gerando a corrente de plasma. Formando o plasma que deve ser contido em um espaço limitado, não permitindo que toque nas paredes internas do reator, tanto para não danificá-lo, quanto para não dissipar a energia do plasma via condução térmica ou contaminar o plasma com átomos e moléculas pesadas. O tokamak é ainda caracterizado pela simetria azimutal (rotacional). Alguns tem seção reta retangular, como o TCABR da USP, outros possuem seção reta circular, como o Nova-Furg, ou até alongada em formato elíptico, como o ITER. Outra característica dos tokamaks é o uso da corrente de plasma para gerar a componente helicoidal do seu intenso campo magnético, necessária para um equilíbrio estável [8, p. 34], [4, p. 10] . O tokamak Nova-Furg possui um filamento de tungstênio que fornece elétrons para promover o *breakdown*. Veja a figura 1 mostrando o básico de um tokamak. Para conhecer o tokamak Nova-Furga veja a figura 2 e a tabela 2 para conhecer suas medidas.

Figura 1 – Esquema básico de um tokamak [Daltrini (1999), Ferrari e Nascimento (1988)]

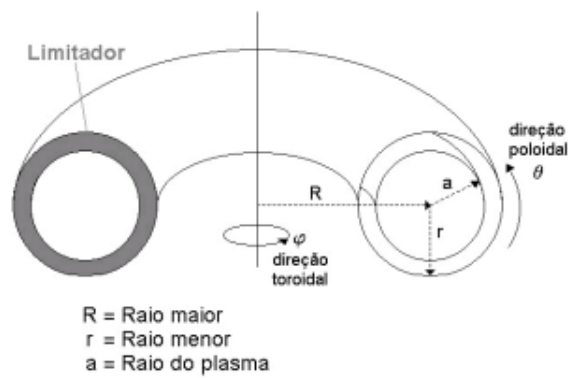
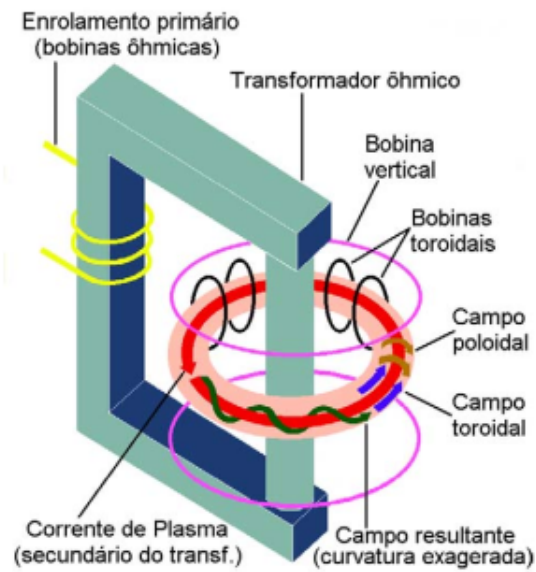
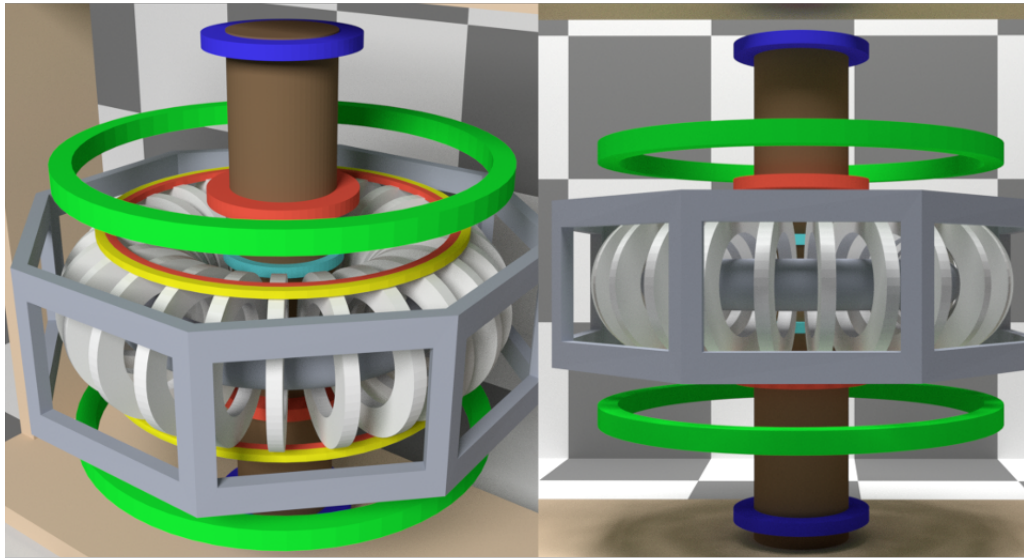


Figura 2 – Tokamak Nova-Furg, modelo feito no Blender autoria própria



3.4 Breakdown em um Tokamak

A fase de breakdown em um tokamak é dominada por colisões entre elétrons livres e partículas neutras. Este processo pode ser descrito pelo modelo desenvolvido por Townsend [3]. A descarga de Townsend (*Townsend discharge*) é um processo de ionização de gás onde os elétrons livres, sob efeito de um campo elétrico intenso são acelerados para então colidirem com moléculas de gás e liberarem elétrons adicionais. Elétrons que também são acelerados, colidem e liberam mais elétrons adicionais. Resultando em uma multiplicação de avalanche (*avalanche multiplication*) permitindo então a passagem de corrente através do gás. A descarga requer uma fonte de elétrons livres e um campo elétrico intenso. O primeiro coeficiente de Townsend, explicado e modelado no apêndice A, é o número de reações de ionização por unidade de comprimento causadas por um elétron que se move paralelamente aos campos elétricos.

4 Objetivos

O propósito principal deste trabalho é, estudar o modelo de 2 fluidos para o *breakdown* no tokamak Nova-Furg. O qual é dividido em duas fases, teórica e computacional, o objetivo teórico é obter o modelo de 2 fluidos com as devidas simplificações para seguir ao objetivo computacional onde precisa-se da distribuição de campos eletromagnéticos no tokamak, das equações relevantes linearizadas e seus respectivos solucionadores individuais implementados no Matlab.

Para finalmente, ajustar as condições de contorno e fronteira e realizar a simulação numérica que nos dará as propriedades macroscópicas do plasma. Também pretende-se obter

parâmetros otimizados para o *breakdown* no Nova-furg e localizar a coluna de plasma.

5 Revisão Bibliográfica

Por volta de 1950 já existia uma teoria básica para os modelos cinéticos e para os modelos MHD. Nesta mesma época os físicos soviéticos Igor Tsamm e Andrei Sakharov propuseram o conceito de tokamak. Ainda na mesma década, em 1958, Kruskal e M. D. e Kulsrud, R. M. [2] apresentam algumas propriedades gerais de todo plasma governado pelas equações MHD, como conservação de massa, conservação de momento. Ao longo de quase duas décadas a pesquisa com o modelo de fluidos para plasmas confinados em tokamaks avança muito. Então S. P. Hirshman e S. C. Jardin (1979) [5] publicam um artigo onde deduzem equações de transporte de dois fluidos. Dois anos depois é publicado por Sakanaka, P.H. (1981)[6] uma dedução detalhada das equações de transporte a partir dos momentos da equação de Boltzmann. Com a construção de grandes tokamaks ao redor do mundo, os modelos de fluidos são amplamente desenvolvidos para modelar o plasma nestes novos tokamaks. É usado por L. Zakharov e B. Rogers [10] (1989-1993) um modelo linearizado de dois fluidos para a descrição do modo de torção interno em tokamaks. Uma abordagem computacional baseada na evolução das equações de movimento de plasma eletromagnético, não linear e de dois fluidos é usada por A Thyagaraja (2000) [7] para investigar as propriedades da turbulência e do transporte do plasma tokamak.

Como visto anteriormente o uso do modelos de fluidos é preferível em plasmas muito quentes e tem a vantagem de ser mais leve computacionalmente que os modelos cinéticos, como neste trabalho não iremos investigar micro efeitos no plasma e buscamos mais simplicidade, um modelo de fluidos é a melhor escolha.

6 Cronograma

O cronograma do trabalho encontra-se na Tabela 1, onde as etapas são:

1. Levantamento bibliográfico;

2. Análise inicial;

Estudo do modelo de 2 fluidos para tokamak o *breakdown*;

Simplificações cabíveis do modelo para o Nova-Furg;

3. Fase computacional;

Linearizar as equações relevantes;

Inserir as equações do modelo físico no MATLAB;

Acoplar os solucionadores individuais correspondentes a cada equação;

Definir as condições de contorno e fronteira;

4. Análise dos resultados;

Relatório/síntese dos resultados.

Tabela 1 – Cronograma

Etapa	mar.	abr.	maio	jun.	jul.	ago.	set.	out.	nov.
1	x	x			x			x	
2	x	x	x	x					
3					x	x	x	x	x
4								x	x

7 Metodologia

Iniciaremos esta seção apresentando uma breve dedução do modelo de 2 fluidos para o *breakdown*, o qual sera usado para cumprir os objetivos desta proposta. Ver lista de notações em C.

7.1 Equação de Vlasov

De acordo com o modelo de fluidos para descrever a dinâmica de um plasma consideramos que os movimentos das partículas do plasma são governados pelos campos externos aplicados mais os campos internos médios macroscópicos que são suavizados no espaço e no tempo, por causa da presença e movimento de todas as partículas de plasma. O problema de obter os campos eletromagnéticos internos macroscópicos, no entanto, ainda é complexo e requer que uma solução auto-consistente com as equações de Maxwell e a distribuição de velocidades. A equação de Vlasov é uma equação diferencial parcial usada para descrever a evolução temporal da função de distribuição $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ no espaço das velocidades, posições e tempo, ou seja, descreve a evolução temporal da função de distribuição no espaço de fase. E incorpora diretamente os campos eletromagnéticos internos macroscópicos suavizados. Pode ser obtida da equação de Boltzmann na ausência de colisões Eq. 7.1 [1, p. 193]

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + a \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (7.1)$$

onde, \vec{v} é a velocidade e os operadores diferenciais ∇_v e ∇ em coordenadas cartesianas são

$$\begin{aligned} \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial v_x} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial v_y} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial v_z} \\ \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) &= \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial x} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial y} + \frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial z} \end{aligned}$$

mas incluindo na Eq. 7.1 os campos suavizados internos no termo de força, obtêm-se então a Eq. 7.2 que é a equação de Vlasov.

$$\frac{\partial f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial t} + \vec{v} \nabla f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) + \frac{1}{m_\alpha} [\vec{F}_{ext} + q_0(\vec{E}_i + \vec{v} \times \vec{B}_i)] \cdot \nabla_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) = 0 \quad (7.2)$$

Aqui \vec{F}_{ext} representa a força externa, incluindo a força de Lorentz associada a quaisquer campos elétricos e magnéticos aplicados externamente, onde \vec{E}_i e \vec{B}_i são campos elétricos e magnéticos suavizados internos causados pela presença e movimento de todas as partículas carregadas dentro do plasma. Os campos eletromagnéticos macroscópicos internos \vec{E}_i e \vec{B}_i devem satisfazer as equações de Maxwell, uma vez que precisam ser consistentes com as densidades de carga e corrente macroscópicas existentes no próprio plasma,

$$\nabla \cdot \vec{E}_i = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (7.3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}_i = 0 \quad (7.4)$$

$$\nabla \times \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}_i}{\partial t} \quad (7.5)$$

$$\nabla \times \vec{B}_i = \mu_0(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}_i}{\partial t}) \quad (7.6)$$

Onde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Newtons por Ampere ao quadrado é a permeabilidade magnética do vácuo, $\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$ é constante de permissividade do vácuo com c sendo a velocidade da luz no vácuo e a densidade de carga do plasma ρ é dada por

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_v f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (7.7)$$

E a densidade de corrente de plasma \vec{J} é dada por

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha n_\alpha(\vec{r}, t) \vec{u}_\alpha(\vec{r}, t) = \sum_\alpha q_\alpha \int_v \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (7.8)$$

Aqui $\vec{u}_\alpha(\vec{r}, t)$ denota a velocidade média macroscópica de cada tipo de partícula α , ver D.1. As equações Eq. 7.2, Eq. 7.3, Eq. 7.4, Eq. 7.5, Eq. 7.6, Eq. 7.7 e Eq. 7.8 constituem um conjunto completo de equações a serem resolvidas ao mesmo tempo. Então, por exemplo, em um procedimento iterativo assumindo valores aproximados iniciais para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$, a Eq. 7.2 pode ser resolvida para produzir $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ para os tipos diferentes de partículas. A utilização dos valores calculados em Eq. 7.7 e Eq. 7.8 leva a valores para as densidades de carga e corrente ρ e \vec{J} no plasma, que podem ser substituídas nas equações de Maxwell e resolvidas para $\vec{E}_i(\vec{r}, t)$ e $\vec{B}_i(\vec{r}, t)$. Esses valores são então introduzidos novamente na equação de Vlasov Eq. 7.2, e assim por diante, para obter uma solução autoconsistente para a função de distribuição de partículas individuais. Embora a equação Eq. 7.2 não inclua explicitamente

um termo de colisão no seu lado direito e portanto, não leve em consideração colisões de curto alcance, ela é mais geral do que parece, já que uma considerável parte dos efeitos de interações de partículas já foram incluídas na força de Lorentz, por meio dos campos eletromagnéticos suavizados auto-consistentes internos.

Não é necessário resolver a equação de Boltzmann para a função de distribuição, a fim de calcular as variáveis macroscópicas de interesse físico. Estas variáveis macroscópicas estão relacionadas com os momentos da função de distribuição pela equação geral de transporte, deduzida no apêndice B.10. As equações de transporte podem ser obtidas tomando os vários momentos da equação de Boltzmann. Neste trabalho será deduzido os três primeiros momentos da equação de Boltzmann que são obtidos pela multiplicação de m_α , $m_\alpha \vec{v}_\alpha$ e $\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2}$, respectivamente, e então integrando todo o espaço de velocidade. Seguindo estas etapas, obtêm-se as equações de conservação de massa 7.9, momento 7.21 e energia 7.41.

7.2 Equação de Conservação de Massa

A equação de continuidade, nos garante que toda massa ganha ou perdida no sistema é quantificada no termo S_α . Essa equação pode ser obtida diretamente com a substituição na Eq. B.10 do χ pela massa m_α . Definindo a densidade de massa como $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ temos

$$\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = S_\alpha \quad (7.9)$$

onde o termo de colisão, $S_\alpha = \left[\frac{\delta \rho_{m\alpha}}{\delta t} \right]_{coll}$, representa a taxa na qual partículas do tipo α são produzidas ou perdidas, por unidade de volume, como resultado de colisões.

7.3 Equação de Conservação de Momento

A equação de conservação de momento afirma que a taxa média de mudança de momento em função do tempo em cada elemento α do fluido, é devida às forças externas aplicadas no fluido somadas a força de pressão do próprio fluido e também domadas as forças internas devido a colisões, dispersão e produção de partículas de plasma. Para derivar a equação de conservação de momento, substituímos na Eq. B.10 o $\chi(\vec{v}_\alpha)$ pelo momento $m_\alpha \vec{v}_\alpha$ das partículas do tipo α .

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha = \quad (7.10)$$

$$= \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle m_\alpha \vec{v}_\alpha \rangle_\alpha) \right]$$

Definindo $\vec{v}_\alpha = \vec{c}_\alpha + \vec{u}_\alpha$, onde \vec{c}_α é a velocidade média térmica das partículas e \vec{u}_α é a velocidade média de movimento toroidal. Vamos tratar de cada termo da Eq. 7.10 semaradamente.

Aplicando a definição de valor médio D.1 e como $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$, ficamos com $\frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha < \chi >_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t}(n_\alpha < m_\alpha \vec{v}_\alpha >_\alpha)$ mas \vec{c}_α não influencia no valor médio, então ficamos com $\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)$. Aplicando a regra da cadeia na derivada parcial obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) = \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} \quad (7.11)$$

Substituindo χ pelo momento $m_\alpha \vec{v}_\alpha$ temos $\nabla \cdot (n_\alpha < \chi \vec{v} >_\alpha) = \nabla \cdot (n_\alpha < m_\alpha \vec{v}_\alpha \vec{v} >_\alpha)$ e tirando m_α para fora da média, pois é constante temos $\nabla \cdot (n_\alpha m_\alpha < \vec{v} \cdot \vec{v} >_\alpha)$ nota-se que dentro do termo de média \vec{v}_α é igual \vec{v} pois o tipo de partícula α já está representado na operação valor médio $< >_\alpha$ ficamos com $\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} < \vec{v} \cdot \vec{v} >)$. Aplicando a definição de valor médio D.1 obtemos

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} < \vec{v} \cdot \vec{v} >) = \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \rho_{m\alpha} < \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha >) \quad (7.12)$$

já que $\vec{c} \cdot \vec{u} = 0$ pois \vec{c} vai em todas as direções então não contribui com a velocidade, e o valor médio de \vec{v}_α é por definição igual a \vec{u}_α . No termo seguinte, $n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{a} \cdot \nabla_v m_\alpha \vec{v} >_\alpha$ reorganizamos os termos ficando com $n_\alpha(\vec{r}, t) < (m_\alpha \vec{a} \cdot \nabla_v) \vec{v} >_\alpha$ observando que massa vezes aceleração é força, $\vec{F} = \vec{a} \cdot m_\alpha$, temos $n_\alpha(\vec{r}, t) < (\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} >_\alpha$ que nos dá

$$n_\alpha(\vec{r}, t) < (\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} >_\alpha = n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} >_\alpha \quad (7.13)$$

pois $(\vec{F} \cdot \nabla_v) \vec{v} = \vec{F} \cdot (\nabla_v \vec{v})$ e $\nabla_v \vec{v} = 1$. Definindo R_α igual a taxa de mudança de momento devido ao espalhamento onde

$$R_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < m_\alpha \vec{v}_\alpha >_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] \quad (7.14)$$

e \mathcal{R}_α igual a taxa de mudança de momento devido à produção de partículas de plasma onde

$$\mathcal{R}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < m_\alpha \vec{v}_\alpha >_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] \quad (7.15)$$

Substituindo Eq. 7.11, Eq. 7.12, Eq. 7.13, Eq. 7.14, Eq. 7.15 em Eq. 7.10 obtemos

$$\begin{aligned} & \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) + \\ & + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} < \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha >) - n_\alpha < \vec{F} >_\alpha = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha \end{aligned} \quad (7.16)$$

Definindo o tensor $\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} < \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha >$ que representa a força por unidade de volume dentro do plasma devido aos movimentos aleatórios das partículas. Temos

$$\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \vec{u}_\alpha) = \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + [\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)] \vec{u}_\alpha \quad (7.17)$$

Fazendo força média igual a força de Lorentz temos

$$< \vec{F} >_\alpha = q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) \quad (7.18)$$

e substituindo as Eq. 7.17 e Eq. 7.18 em Eq. 7.16 teremos

$$\begin{aligned} \vec{u}_\alpha \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha + [\nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha)] \vec{u}_\alpha = \\ n_\alpha q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha + R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha \end{aligned} \quad (7.19)$$

rearranjando

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] + \vec{u}_\alpha \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha + n_\alpha(\vec{r}, t) q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha \quad (7.20)$$

No entanto, o segundo termo no lado esquerdo da Eq. 7.20 é a equação de conservação de massa Eq. 7.9 então se não considerarmos as colisões que levam à geração ou perda de partículas, ou seja $S_\alpha = 0$, podemos simplificar a equação para

$$\rho_{m\alpha} \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = R_\alpha + \mathcal{R}_\alpha + n_\alpha(\vec{r}, t) q_\alpha (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha \quad (7.21)$$

A equação de conservação de momento estabelece a condição necessária para garantir a conservação do momento do sistema. O termo $-\nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha$ representa a força causada pelas variações aleatórias nas velocidades de cada partícula que é exercida em um volume unitário do plasma. Esta força em cada unidade de volume também inclui forças associadas à pressão escalar e forças de corte tangenciais, que são as forças viscosas. No nosso caso, o efeito da viscosidade é pequeno não sendo importante no nosso plasma. Os termos não-diagonais de \mathbb{P}_α podem ser desprezados. Além disso, no caso em que quando a distribuição de velocidades de cada tipo de partícula é isotrópica (não à direção privilegiada, suas propriedades são as mesmas em qualquer direção). Os termos diagonais de \mathbb{P}_α são todos iguais e representam a pressão cinética escalar p_α . Assim, desconsiderando os efeitos de viscosidade e considerando uma distribuição de velocidade isotrópica, temos $\mathbb{P}_\alpha = p_\alpha$, e a força por unidade de volume se torna $-\nabla \cdot \mathbb{P}_\alpha = -\nabla p_\alpha$, de acordo com a [1, Cap 6].

7.4 Equação de Conservação de Energia

A equação de conservação de energia nos garante que toda energia cinética ganha ou perdida no sistema veio de colisões com outras partículas do sistema ou foi causado pelo campo elétrico \vec{E} . Para derivar a equação de conservação de energia, substituímos na Eq. B.10 o $\chi(\vec{v}_\alpha)$ pela energia cinética $\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2}$ das partículas do tipo α obtendo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \rangle_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \vec{v} \rangle_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{a} \cdot \nabla_v \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \rangle_\alpha = \\ = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 \rangle_\alpha) \right] \end{aligned} \quad (7.22)$$

O primeiro termo da Eq. 7.22 sera simplificado trocando $n_\alpha(\vec{r}, t) m_\alpha$ por $\rho_{m\alpha}$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \langle \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \rangle_\alpha) = \frac{\partial}{\partial t} (\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{v}_\alpha^2 \rangle_\alpha) \quad (7.23)$$

abrindo \vec{v}_α^2 a Eq. 7.23 fica

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{v}^2 \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle_\alpha \right) \quad (7.24)$$

Como a velocidade aleatória não tem sentido privilegiado, temos para qualquer partícula $|\vec{v}^2| = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ e como são muitas partículas que se movem em direções aleatórias, os valores médios dos quadrados das componentes de suas velocidades são iguais, logo, $v_x^2 = \frac{1}{3}|\vec{v}^2|$ então da teoria cinética dos gases obtemos $p = \frac{nMv_x^2}{V}$ onde M é a massa molar do gás de origem do plasma, p é a pressão e n o numero de moles. No nosso caso $\frac{nMv_x^2}{V} = \frac{nM\langle c_\alpha^2 \rangle}{3V}$ e a densidade de massa $\rho_{m\alpha} = n_\alpha m_\alpha$ pode substituir $\frac{nM}{V}$ nos deixando com $\rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \rangle = 3p_\alpha$. Então a Eq. 7.24 simplifica para

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle_\alpha \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} 3p_\alpha + \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha^2 \right) \quad (7.25)$$

O segundo termo da Eq.7.22 pode ser organizado reorganizando termos e trocando $n_\alpha(\vec{r}, t)m_\alpha$ por $\rho_{m\alpha}$ que fica

$$\nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \vec{v} \rangle_\alpha) = \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right] \quad (7.26)$$

Lembrando que $\vec{v} = \vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha$ então $\langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha$ pode ser expandido da seguinte maneira $\langle [(\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha) \cdot (\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha)](\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha) \rangle = \langle (\vec{u}_\alpha^2 + \vec{c}_\alpha^2 + 2\vec{u}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha)(\vec{u}_\alpha + \vec{c}_\alpha) \rangle$. Pode-se escrever a equação de conservação de energia de outra forma se substituir o fluxo de calor e o tensor de pressão cinética definidos como

$$\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle \quad (7.27)$$

onde \mathbb{P}_α é o tensor de pressão cinética

$$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle \quad (7.28)$$

onde \vec{q}_α é o fluxo de calor mas como vimos a pressão cinética é dada por $\rho_{m\alpha} \langle |\vec{c}^2|_\alpha \rangle = 3p_\alpha$ então a Eq. 7.26 fica

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \langle (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} \rangle_\alpha \right] = \nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} (3p_\alpha) + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right] \quad (7.29)$$

simplificando 7.29 obtemos

$$\nabla \cdot \left[\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \vec{u}_\alpha + \frac{1}{2} (3p_\alpha) + \mathbb{P}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha + \vec{q}_\alpha \right] = \quad (7.30)$$

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{1}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) (3p_\alpha) + \nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha$$

Para o terceiro termo substituímos $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m_\alpha}$

$$n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{a} \cdot \nabla_v \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} >_\alpha = n_\alpha(\vec{r}, t) < \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_v \left(\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \right) >_\alpha \quad (7.31)$$

resolvendo $\nabla_v \left(\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \right)$ obtemos $\frac{2m_\alpha \vec{v}_\alpha}{2}$ e substituindo em ?? e cancelando o $2m_\alpha$ que esta no denominador e dividendo ficamos com

$$n_\alpha(\vec{r}, t) < \frac{\vec{F}}{m_\alpha} \cdot \nabla_v \left(\frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \right) >_\alpha = n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v}_\alpha >_\alpha \quad (7.32)$$

Substituindo as quantidades Eq. 7.25, Eq. 7.30 e Eq. 7.32 na Eq. 7.22 temos

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} 3p_\alpha + \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + \frac{1}{2} (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) (3p_\alpha) + \quad (7.33)$$

$$\nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v}_\alpha >_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < \frac{1}{2} m_\alpha v_\alpha^2 >_\alpha) \right]$$

Definindo M_α que representa a taxa de mudança de densidade de energia devido a colisões

$$M_\alpha = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \right] + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} < (\vec{v} \cdot \vec{v}) \vec{v} >_\alpha \right] - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v}_\alpha >_\alpha \quad (7.34)$$

Usando $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla$ que é a derivada total do tempo obtemos

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) + \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) \nabla \cdot \vec{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] = \quad (7.35)$$

$$\nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{F} \cdot \vec{v}_\alpha >_\alpha = M_\alpha$$

Reescrevendo os termos $\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right]$ em função da derivada total $\frac{D}{Dt}$ ficamos com

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} \vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} (\vec{u}_\alpha \cdot \vec{u}_\alpha) \vec{u}_\alpha \right] = \quad (7.36)$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + \frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \nabla \cdot [\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha] + \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot [(\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha] =$$

$$= \frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \left[\frac{\partial \rho_{m\alpha}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha) \right] + \rho_{m\alpha} \vec{u}_\alpha \cdot \frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t}$$

Usando as equações de conservação de massa e momento, Eq. 7.9 e Eq. 7.21

$$\frac{1}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 S_\alpha + n_\alpha(\vec{r}, t) \vec{u}_\alpha < F >_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot (\nabla \cdot \mathbb{P}) - |\vec{u}_\alpha|^2 S_\alpha \quad (7.37)$$

Substituindo em Eq. 7.37 o resultado de Eq. 7.35

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) + \left(\frac{3}{2} p_\alpha \right) \nabla \cdot \vec{u}_\alpha + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_{m\alpha}}{2} |\vec{u}_\alpha|^2 \right) + \nabla \cdot \left[\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} |\vec{u}_\alpha|^2 \vec{u}_\alpha \right] + \\ \nabla \cdot (\mathbb{P} \cdot \vec{u}_\alpha) + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha - n_\alpha (\vec{r}, t) \langle \vec{F} \cdot \vec{v} \rangle_\alpha = M_\alpha \end{aligned} \quad (7.38)$$

Definindo Q_α como sendo a taxa de variação da densidade de energia devido ao espalhamento onde

$$Q_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \rangle_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) \right] \quad (7.39)$$

E definindo \mathcal{E}_α que representa a taxa de variação da densidade de energia devido a produção de partículas de plasma onde

$$\mathcal{E}_\alpha = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha \langle \frac{m_\alpha \vec{v}_\alpha^2}{2} \rangle_\alpha) \right] = \left[\frac{\delta}{\delta t} \left(\frac{1}{2} \rho_{m\alpha} u_\alpha^2 \right) \right] \quad (7.40)$$

Desta forma a Eq. 7.33 torna-se então

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right) + \frac{3}{2} p_\alpha (\nabla \cdot \vec{u}_\alpha) + (\mathbb{P}_\alpha \cdot \nabla) \cdot \vec{u}_\alpha + \nabla \cdot \vec{q}_\alpha = \\ = Q_\alpha + \mathcal{E}_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{\mathcal{R}}_\alpha + \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \end{aligned} \quad (7.41)$$

7.5 Simplificações

Assumindo $n_e = n_i = n_0$ onde n_0 é a densidade eletrônica em $t = 0$, n_e é a densidade numérica elétrons e n_i é a densidade numérica de íons. Para modelar o Breakdown do plasma no tokamak Nova-Furg, usando um modelo de dois fluidos. Assumiremos que o plasma é composto por um fluido de elétrons e um único fluido ionizado, ambos sendo incompressíveis, $\nabla \cdot \vec{u}_\alpha = 0$, um fluido ideal que não possua viscosidade $\mathbb{P}_\alpha = p_\alpha$, quase neutro $n_e = n_i = n$, e adiabático $\nabla \cdot \vec{q}_\alpha = 0$, ou seja, com escalas de tempo suficientemente curtas para que não haja difusão de calor, portanto o processo será considerado adiabático e o transporte de energia é predominantemente convectivo. Para melhorar a estabilidade numérica, vamos considerar o fluxo total de partículas a ser composto por um termo convectivo e difusivo, isto é, $\Gamma = n \vec{u}_\alpha - D_\alpha \nabla n$ com $D_e = D_i = D$ sendo o coeficiente de difusão de partículas. Além do mais, admitimos também que o gás neutro esteja em repouso e à temperatura ambiente. Portanto, os termos de momento e fonte de energia devido à produção de partículas de plasma \mathcal{R}_α e \mathcal{E}_α ficam sem contribuir para o momento e temperatura do plasma. Com essas suposições, o conjunto de equações consideradas neste modelo são:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_\alpha) = \frac{S_\alpha}{m_\alpha} + D \nabla^2 n \quad (7.42)$$

$$m_\alpha n \left[\frac{\partial \vec{u}_\alpha}{\partial t} + (\vec{u}_\alpha \cdot \nabla) \vec{u}_\alpha \right] = q_\alpha n (\vec{E} + \vec{u}_\alpha \times \vec{B}) - \nabla p_\alpha + \vec{R}_\alpha - \vec{u}_\alpha S_\alpha \quad (7.43)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_\alpha}{\partial t} + \vec{u}_\alpha \cdot \nabla p_\alpha \right) = Q_\alpha - \vec{u}_\alpha \cdot \vec{R}_\alpha \frac{1}{2} u_\alpha^2 S_\alpha \quad (7.44)$$

Aqui, vamos supor que o termo de troca de momento \vec{R}_α pode ser modelado por

$$\vec{R}_\alpha = m_\alpha n \sum_\rho \mu_{\alpha\rho} (\vec{u}_\alpha - \vec{u}_\rho) \quad (7.45)$$

e portanto,

$$\vec{R}_e = m_e n v_{en} \vec{u}_e + ne\eta \vec{J} \quad (7.46)$$

$$\vec{R}_i = m_i n v_{in} \vec{u}_i + ne\eta \vec{J} \quad (7.47)$$

com η sendo a resistividade paralela do Spitzer [8, 2.16], e que os termos de troca de elétrons e de íons podem ser modelados por

$$\vec{Q}_e = -\vec{Q}_i = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (7.48)$$

O conjunto final de equações que devem ser resolvidas é então equações de conservação de massa

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_e) = \frac{S_e}{m_e} + D \nabla^2 n \quad (7.49)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{u}_i) = \frac{S_i}{m_i} + D \nabla^2 n \quad (7.50)$$

equações de conservação de momento

$$\left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right] = -\frac{e}{m_e} (\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_e}{m_e n} - (v_{en} + \frac{S_e}{m_e n}) \vec{u}_e + \frac{e}{m_e} \eta \vec{J} \quad (7.51)$$

$$\left[\frac{\partial \vec{u}_i}{\partial t} + (\vec{u}_i \cdot \nabla) \vec{u}_i \right] = -\frac{e}{m_i} (\vec{E} + \vec{u}_i \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_i}{m_i n} - (v_{in} + \frac{S_i}{m_i n}) \vec{u}_i + \frac{e}{m_i} \eta \vec{J} \quad (7.52)$$

equações de energia do eletrón

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_e \cdot \vec{J} + (2v_{en} + \frac{S_e}{m_e n}) \frac{1}{2} m_e n u_e^2 \quad (7.53)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_i}{\partial t} + \vec{u}_i \cdot \nabla p_i \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_i \cdot \vec{J} + (2v_{in} + \frac{S_i}{m_i n}) \frac{1}{2} m_i n u_i^2 \quad (7.54)$$

Suponhamos agora que, durante a fase inicial, os íons podem ser considerados em repouso ($\vec{u}_i = 0$) e, portanto, podemos remover a equação de conservação do momento iónico. Vamos também adicionar as equações Eq. 7.49 e Eq. 7.50. Para isso, teremos que definir

um termo de fonte de partículas que explique o número de partículas em si em vez da massa de partículas: $\zeta_\alpha = S_\alpha/m_\alpha$. Note que para um plasma ionizado sozinho, podemos dizer que $\zeta_e = \zeta_i = \zeta = n(v_{ion} - v_{loss})$. Também assumiremos que $v_{ion} = \alpha_T u_e = \alpha_T J/(ne)$ e $v_{loss} = u_{e,||}/L_{eff} = \vec{J} \cdot \vec{B}/(Bne)$. Aqui, α_T é o primeiro coeficiente de Townsend A. Com todas essas suposições, o conjunto de equações simplifica para

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D\nabla^2 n \quad (7.55)$$

$$m_e \left[\frac{\partial \vec{u}_e}{\partial t} + (\vec{u}_e \cdot \nabla) \vec{u}_e \right] = -e(\vec{E} + \vec{u}_e \times \vec{B}) - \frac{\nabla p_e}{n} - (v_{en} + v_{ion} - v_{loss})m_e \vec{u}_e + e\eta \vec{J} \quad (7.56)$$

$$\frac{3}{2} \left(\frac{\partial p_e}{\partial t} + \vec{u}_e \cdot \nabla p_e \right) = -\frac{3ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) - ne\eta \vec{u}_e \cdot \vec{J} + (2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) \frac{1}{2} m_e n u_e^2 \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (7.58)$$

Vamos agora reescrever este conjunto de equações em termos da densidade de corrente

$$\frac{\partial n}{\partial t} = v_{ion} - v_{loss} + D\nabla^2 n \quad (7.59)$$

$$\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \frac{ne^2}{m_e} \vec{E} - \vec{J}(v_{in} + v_{en} + v_{ion} - v_{loss}) - \frac{e}{m_e} \vec{J} \times \vec{B} + \frac{e}{m_e} \nabla p_e \quad (7.60)$$

$$\frac{\partial p_e}{\partial t} = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{2v_{en} + v_{ion} - v_{loss}}{2v_{ei}} \right) \eta J^2 - \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{2ne^2}{m_i} \eta (p_e - p_i) \quad (7.62)$$

8 Sistema de Coordenadas Pseudotoridais

Faremos uma mudança de coordenadas, para um sistema de coordenadas que chamaremos de pseudotoridal, é um sistema composto por coordenadas cilíndricas que se fecham em si mesmas, explicando de outra forma, é como se no interior de um toróide (com as dimensões internas da câmara de vácuo do tokamak Nova-Furg), cada seção reta circular fosse graduada com um sistema de coordenadas polares (R, θ) e com um ângulo ϕ que representa o quanto a seção reta do toróide se deslocou da origem onde $\phi = 0$ ver figuras 3 e 4. Após será feito a adaptação do modelo de dois fluidos para as coordenadas (r, θ, ϕ) .

Figura 3 – Coordenadas Pseudotoroidais

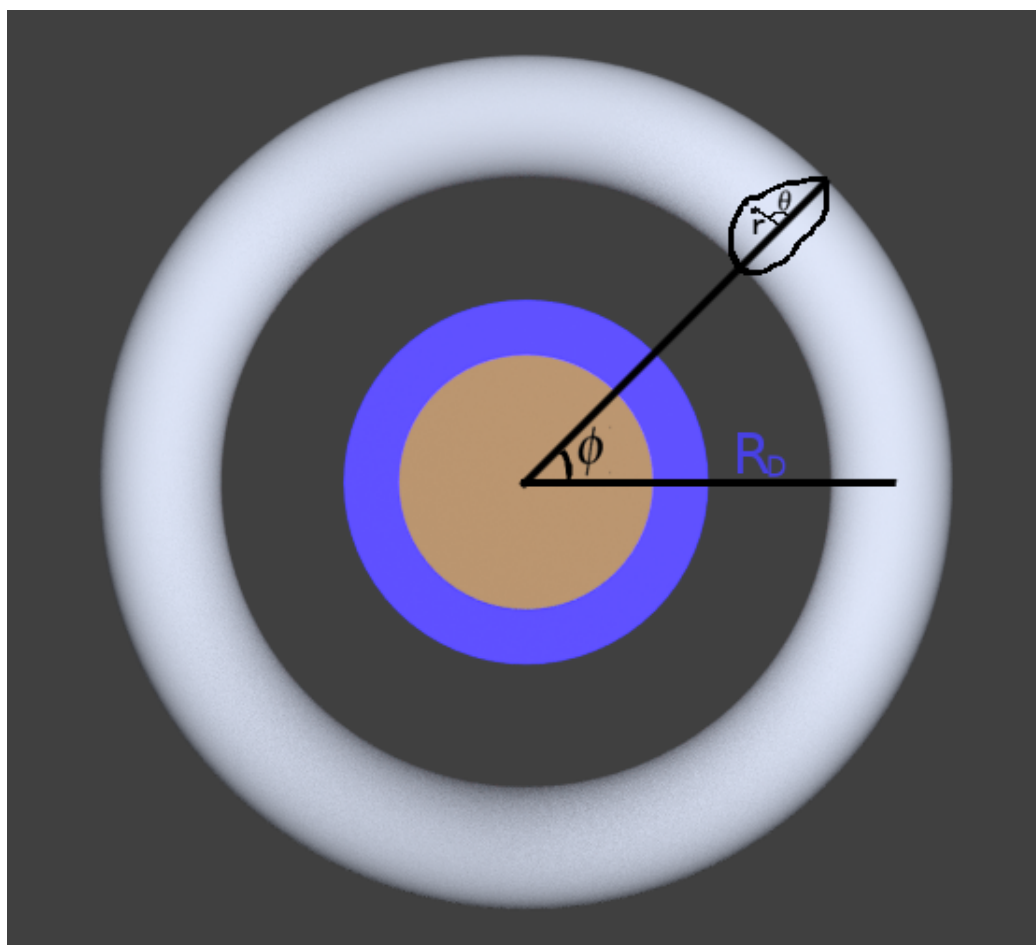
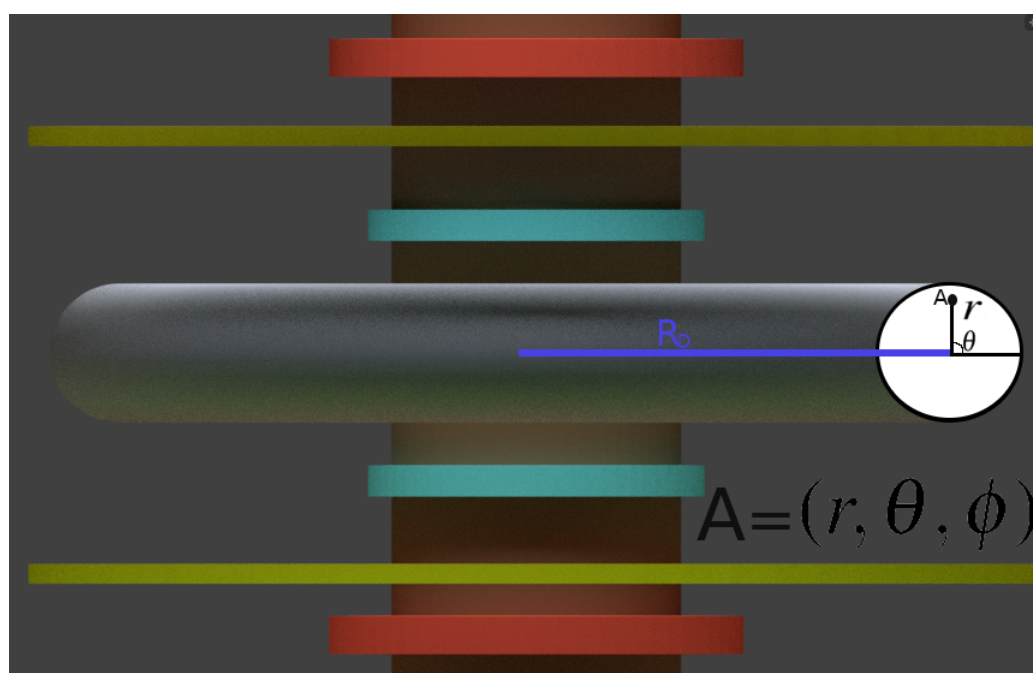


Figura 4 – O ponto A representado em coordenadas pseudotoroidais



O sistema de coordenadas usado no modelo de 2 fluidos deduzido neste trabalho é o

sistema (R, Z', ϕ) . A regra para mudar do sistema pseudotorial (r, θ, ϕ) para o sistema do modelo (R, Z', ϕ) é

$$R = R_D + r \cos(\theta) \quad (8.1)$$

$$Z' = r \sin(\theta) \quad (8.2)$$

A terceira coordenada ϕ permanece a mesma. As funções $X_s(R, Z', \phi)$, $Y_s(R, Z', \phi)$ e $Z_s(R, Z', \phi)$ usadas para mudar das coordenadas (R, Z', ϕ) para as coordenadas cartesianas (X, Y, Z) são obtidas facilmente projetando o R na direção de X e depois na direção de Y .

$$X_s(R, Z', \phi) = R \cos(\phi) \quad (8.3)$$

$$Y_s(R, Z', \phi) = R \sin(\phi) \quad (8.4)$$

$$Z_s(R, Z', \phi) = Z' \quad (8.5)$$

Substituindo R e Z' obtemos então as funções $X(r, \theta, \phi)$, $Y(r, \theta, \phi)$ e $Z(r, \theta, \phi)$ que são a regra para mudar de coordenadas pseudotoriais para coordenadas cartesianas.

$$X(r, \theta, \phi) = (R_D + r \cos(\theta)) \cos(\phi) \quad (8.6)$$

$$Y(r, \theta, \phi) = (R_D + r \cos(\theta)) \sin(\phi) \quad (8.7)$$

$$Z(r, \theta, \phi) = r \sin(\theta) \quad (8.8)$$

Onde os valores possíveis para cada coordenada são

$$0 \leq \phi < 2\pi \quad (8.9)$$

$$0 \leq \theta < 2\pi \quad (8.10)$$

$$0 < r < R_{vacuo} \quad (8.11)$$

onde $R_{vacuo} = 0.06$ metros é o raio interno da câmara de vácuo do tokamak Nova-Furg, a coordenada r deve ser maior que zero pois se $r = 0$ teríamos indeterminações no cálculo de gradientes, divergentes e rotacionais como veremos mais adiante. Lembrando que R_D deve ser sempre maior que R_{vacuo} para o uso das coordenadas pseudotoriais fazer sentido, uma vez que se $R_D < R_{vacuo}$ não teríamos um toróide e também teríamos pontos com diferentes representações no sistema de coordenadas pseudotoriais. Definimos o vetor \vec{r}_p que representa a posição de um ponto qualquer em função de (r, θ, ϕ) como

$$\vec{r}_p = X(r, \theta, \phi) \vec{i} + Y(r, \theta, \phi) \vec{j} + Z(r, \theta, \phi) \vec{k} \quad (8.12)$$

onde \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são vetores unitários e ortogonais, cada um na direção do seu respectivo eixo X, Y e Z que também são base canônica do sistema de coordenadas cartesianas. Substituindo Eq. 8.6, Eq. 8.7 e Eq. 8.8 em 8.12 obtemos

$$\vec{r}_p = (R_D + r \cos(\theta)) \cos(\phi) \vec{i} + (R_D + r \cos(\theta)) \sin(\phi) \vec{j} + r \sin(\theta) \vec{k} \quad (8.13)$$

Se nos deslocarmos infinitesimalmente ao longo da curva do r , ou seja, mantermos θ e ϕ constantes temos

$$\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \quad (8.14)$$

se mantermos r e ϕ constantes temos

$$\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \theta} = \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k} \quad (8.15)$$

e se mantermos r e θ constantes temos

$$\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \phi} = \frac{\partial x}{\partial \phi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \vec{k} \quad (8.16)$$

definimos os vetores \vec{r}_0 , $\vec{\theta}_0$, $\vec{\phi}_0$ dados por

$$\vec{r}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial r}}{|\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial r}|} = \frac{\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k}}{|\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k}|} \quad (8.17)$$

$$\vec{\theta}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \theta}}{|\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \theta}|} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k}}{|\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k}|} \quad (8.18)$$

$$\vec{\phi}_0 = \frac{\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \phi}}{|\frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \phi}|} = \frac{\frac{\partial x}{\partial \phi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \vec{k}}{|\frac{\partial x}{\partial \phi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \vec{k}|} \quad (8.19)$$

que são vetores unitários ao longo das tangentes as curvas suaves obtidas mantendo duas coordenadas constantes por vez. Definindo h_r , h_θ e h_ϕ dados por

$$h_r = |\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k}| \quad (8.20)$$

calculando o módulo

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} \quad (8.21)$$

fazendo o mesmo para h_θ e h_ϕ temos

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2} \quad (8.22)$$

$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi}\right)^2} \quad (8.23)$$

h_r , h_θ e h_ϕ representam, respectivamente, o comprimento do elemento de arco ds obtido quando duas coordenadas são mantidas constantes por vez. Calculando os valores de h_r , h_θ e h_ϕ temos

$$h_r = \sqrt{\left(\frac{\partial(R_D + r \cos(\theta)) \cos(\phi)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial(R_D + r \cos(\theta)) \sin(\phi)}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial r}\right)^2} = 1 \quad (8.24)$$

$$h_\theta = \sqrt{\left(\frac{\partial(R_D + r \cos(\theta)) \cos(\phi)}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial(R_D + r \cos(\theta)) \sin(\phi)}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial \theta}\right)^2} = |r| \quad (8.25)$$

$$h_\phi = \sqrt{\left(\frac{\partial(R_D + r \cos(\theta)) \cos(\phi)}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial(R_D + r \cos(\theta)) \sin(\phi)}{\partial \phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial r \sin(\theta)}{\partial \phi}\right)^2} = |R_D + r \cos(\theta)| \quad (8.26)$$

Mas lembrando dos limites da coordenada r 8.11, vemos que podemos eliminar os módulos de $|r|$ e $|R_D + r \cos(\theta)|$ pois r é sempre maior do que zero e menor que R_D . Ficando com

$$h_r = 1 \quad (8.27)$$

$$h_\theta = r \quad (8.28)$$

$$h_\phi = R_D + r \cos(\theta) \quad (8.29)$$

simplificando então \vec{r}_0 , $\vec{\theta}_0$, $\vec{\phi}_0$ temos

$$\vec{r}_0 = \frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \quad (8.30)$$

$$\vec{\theta}_0 = \frac{\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k}}{r} \quad (8.31)$$

$$\vec{\phi}_0 = \frac{\frac{\partial x}{\partial \phi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \vec{k}}{R_D + r \cos(\theta)} \quad (8.32)$$

O vetor $d\vec{r}_p$ é dado por

$$d\vec{r}_p = dx \vec{i} + dy \vec{j} + dz \vec{k} \quad (8.33)$$

onde dx , dy e dz são dados por

$$dx = \frac{\partial x}{\partial r} dr + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial x}{\partial \phi} d\phi \quad (8.34)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial r} dr + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial y}{\partial \phi} d\phi \quad (8.35)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial r} dr + \frac{\partial z}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial z}{\partial \phi} d\phi \quad (8.36)$$

Calculando as derivadas obtemos

$$\begin{aligned} d\vec{r}_p = & [\cos(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\theta) \cos(\phi) - (R_D + r \cos(\theta)) \sin(\phi)] \vec{i} + \\ & [\sin(\phi) \cos(\theta) - r \sin(\theta) \sin(\phi) + (R_D + r \cos(\theta)) \cos(\phi)] \vec{j} + \\ & [\sin(\theta) + r \cos(\theta)] \vec{k} \end{aligned} \quad (8.37)$$

Reescrevendo $d\vec{r}_p$ no sistema de coordenadas pseudotoridais

$$d\vec{r}_p = \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \vec{r}_p}{\partial \phi} d\phi \quad (8.38)$$

mas podemos reescrever $d\vec{r}_p$ em termos de \vec{r}_0 , $\vec{\theta}_0$, $\vec{\phi}_0$, h_r , h_θ e h_ϕ obtendo

$$d\vec{r}_p = h_r dr \cdot \vec{r}_0 + h_\theta d\theta \cdot \vec{\theta}_0 + h_\phi d\phi \cdot \vec{\phi}_0 \quad (8.39)$$

que substituindo os valores de h_r , h_θ e h_ϕ fica

$$d\vec{r}_p = dr \cdot \vec{r}_0 + rd\theta \cdot \vec{\theta}_0 + (R_D + r \cos(\theta)) d\phi \cdot \vec{\phi}_0 \quad (8.40)$$

O comprimento de arco ds é dado por $|d\vec{r}_p|$

$$ds = |d\vec{r}_p| = \sqrt{[dr]^2 + [rd\theta]^2 + [(R_D + r \cos(\theta))d\phi]^2} \quad (8.41)$$

Para obtermos uma fórmula para o gradiente em coordenadas pseudotoridais usamos a relação

$$\text{grad}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k} \quad (8.42)$$

E as relações

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (8.43)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (8.44)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (8.45)$$

Escrevendo em termos de $\vec{r}_0, \vec{\theta}_0, \vec{\phi}_0$ temos

$$\text{grad}(\varphi) \cdot d\vec{r}_p \equiv d\varphi \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} d\phi \quad (8.46)$$

$$\text{grad}(\varphi) = \left(\frac{1}{h_r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) h_r dr + \left(\frac{1}{h_\theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) h_\theta d\theta + \left(\frac{1}{h_\phi} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) h_\phi d\phi \quad (8.47)$$

segue-se que

$$\text{grad}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \vec{r}_0 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \cdot \vec{\theta}_0 + \left(\left[\frac{1}{R_D + r \cos(\theta)} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) \cdot \vec{\phi}_0 \quad (8.48)$$

Expandindo

$$\begin{aligned} \text{grad}(\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial r} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial r} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial r} \vec{k} \right] + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{k} \right] + \\ \left(\left[\frac{1}{(R_D + r \cos(\theta))^2} \right] \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) \cdot \left[\frac{\partial x}{\partial \phi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \phi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \phi} \vec{k} \right] \end{aligned} \quad (8.49)$$

Para o cálculo da divergência, da definição geral pelo fluxo através de um elemento de volume dV chega-se nesta fórmula

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{h_r h_\theta h_\phi} \left[\frac{\partial u_r h_\theta h_\phi}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta h_r h_\phi}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\phi h_r h_\theta}{\partial \phi} \right] \quad (8.50)$$

que fica

$$\text{div}(\vec{u}) = \frac{1}{r R_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial u_r (r R_D + r^2 \cos(\theta))}{\partial r} + \frac{\partial u_\theta (R_D + r \cos(\theta))}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\phi r}{\partial \phi} \right] \quad (8.51)$$

O rotacional de \vec{u} é calculado através da circulação de \vec{u} sobre as faces do mesmo elemento dV , resultando na fórmula

$$\text{rot}(\vec{u}) = \frac{1}{h_\theta h_\phi} \left[\frac{\partial u_\phi h_\phi}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta h_\theta}{\partial \phi} \right] \vec{r}_0 + \frac{1}{h_r h_\phi} \left[\frac{\partial u_r h_r}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi h_\phi}{\partial r} \right] \vec{\theta}_0 + \frac{1}{h_r h_\theta} \left[\frac{\partial u_\theta h_\theta}{\partial r} - \frac{\partial u_r h_r}{\partial \theta} \right] \vec{\phi}_0 \quad (8.52)$$

Expandindo

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{u}) = \frac{1}{r R_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial u_\phi (R_D + r \cos(\theta))}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta r}{\partial \phi} \right] \vec{r}_0 + \\ \frac{1}{R_D + r \cos(\theta)} \left[\frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{\partial u_\phi (R_D + r \cos(\theta))}{\partial r} \right] \vec{\theta}_0 + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial u_\theta r}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \vec{\phi}_0 \end{aligned} \quad (8.53)$$

E por fim, para o laplaciano combina-se as fórmulas para o gradiente e divergente $\text{div}(\text{grad}(\vec{u})) = \nabla^2 \varphi$ obtendo

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi = \frac{1}{r R_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((r R_D + r^2 \cos(\theta)) \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R_D + r \cos(\theta)}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) \right] + \\ \frac{1}{r R_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{R_D + r \cos(\theta)} \frac{\partial \varphi}{\partial \phi} \right) \right] \end{aligned} \quad (8.54)$$

8.1 Exemplo em Coordenadas Pseudotoroidais

Exemplo adaptado do exercício 15 da lista do professor Magno na cadeira de introdução a física de plasma 2019-1.

Imaginando um tokamak em Coordenadas Pseudotoroidais com $R_D \gg 0,06$. Onde $0,06$ é o raio da seção deste tokamak. De forma que tomando $\Delta\phi = \frac{\pi}{20}$ no eixo $\vec{\phi}$ implica-se em $(R_D + 0,06)\frac{\pi}{10} \gg 0,06$. Fonte de partículas é $S = hn$. Perda de partículas por difusão ambipolar. O volume de recombinação é negligenciável. Calcule $n(r)$ para a condição de borda $n(0) = n_0$ e $n(0,06) = 0$. Sabendo que $\frac{\partial n(r)}{\partial \theta} = \frac{\partial n(r)}{\partial \phi} = 0$ pois $n(r)$ só depende de r .

Conforme o exercício base temos: $-D_\alpha \vec{\nabla}^2 n(r) = \eta n(r)$, onde η é a resistividade de Spitzer e D_α é o coeficiente de difusão ambipolar. Lembrando do Laplaciano em coordenadas pseudotoroidais temos

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((rR_D + r^2 \cos(\theta)) \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R_D + r \cos(\theta)}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{R_D + r \cos(\theta)} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \right) \right]$$

então temos

$$\vec{\nabla}^2 n(r) = \frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((rR_D + r^2 \cos(\theta)) \frac{\partial n(r)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{R_D + r \cos(\theta)}{r} \frac{\partial n(r)}{\partial \theta} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{r}{R_D + r \cos(\theta)} \frac{\partial n(r)}{\partial \phi} \right) \right]$$

que simplifica para

$$\vec{\nabla}^2 n(r) = \frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((rR_D + r^2 \cos(\theta)) \frac{\partial n(r)}{\partial r} \right) \right]$$

ficamos então com

$$-D_\alpha \left(\frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left((rR_D + r^2 \cos(\theta)) \frac{\partial n(r)}{\partial r} \right) \right] = \eta n(r)$$

aplicando a distributiva

$$-D_\alpha \left(\frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(rR_D \frac{\partial n(r)}{\partial r} + r^2 \cos(\theta) \frac{\partial n(r)}{\partial r} \right) \right] = \eta n(r)$$

aplicando a regra da cadeia

$$-D_\alpha \left(\frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) \left[R_D \frac{\partial n(r)}{\partial r} + rR_D \frac{\partial^2 n(r)}{\partial r^2} + 2r \cos(\theta) \frac{\partial n(r)}{\partial r} + r^2 \cos(\theta) \frac{\partial^2 n(r)}{\partial r^2} \right] = \eta n(r)$$

juntando os termos semelhantes

$$-D_\alpha \left(\frac{1}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) \left[\frac{\partial n(r)}{\partial r} (R_D + 2r \cos(\theta)) + \frac{\partial^2 n(r)}{\partial r^2} (rR_D + r^2 \cos(\theta)) \right] = \eta n(r)$$

aplicando a distributiva no termo dos conchetes

$$-D_\alpha \left[\frac{\partial n(r)}{\partial r} \left(\frac{R_D + 2r \cos(\theta)}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) + \frac{\partial^2 n(r)}{\partial r^2} \right] = \eta n(r)$$

dividindo os dois lados por $-D_\alpha$

$$\frac{\partial n(r)}{\partial r} \left(\frac{R_D + 2r \cos(\theta)}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) + \frac{\partial^2 n(r)}{\partial r^2} = -\frac{\eta}{D_\alpha} n(r)$$

igualando a 0 obtemos a equação diferencial ordinária não linear de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 n(r)}{\partial r^2} + \frac{\partial n(r)}{\partial r} \left(\frac{R_D + 2r \cos(\theta)}{rR_D + r^2 \cos(\theta)} \right) + \frac{\eta}{D_\alpha} n(r) = 0 \quad (8.55)$$

Resolvendo numericamente 8.55 no Matlab

```

Editor - /home/kevi/Área de Trabalho/programas controle/der_tcc.m
startup.m  rk4.m  der_tcc.m  +
1  function d=der_tcc(t,y)
2  % y(1)=>n derivado
3  % y(2)=>n
4  %t0=0.001; tf=0.06; h=0.0001; y0=[-1; 1];
5  R_D=1;
6  r=t;
7  theta=0;
8  tri = (R_D+2*r*cos(theta))/(R_D*r+r^2*cos(theta)); %frac{R_D + 2 r \cos(\theta)}{r R_D + r^2 \cos(\theta)}
9  quad = -0.1; %eta/d_alfa;
10 %calculando vetor de saída
11 d(1)=-y(1)*tri-quad*y(2); %derivada 1;
12 d(2)= y(1); %derivada 2;
13 d=d';
14
15

```

Figura 5 – Algoritmo para a resolução numérica via *rk4* de 8.55 no Matlab

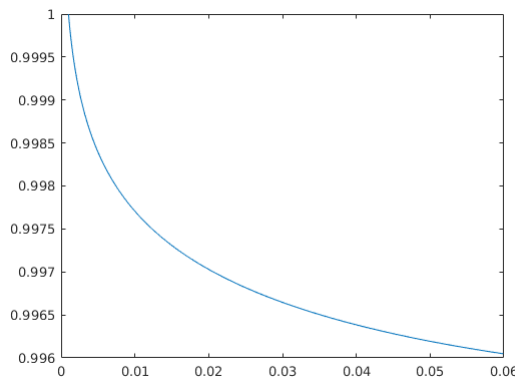


Figura 6 – Gráfico da resolução numérica de 8.55 no Matlab - Verticalmente temos o valor de $n(r)$ em m^{-3} , e horizontalmente o valor de r em m .

Mudando as condições iniciais e o valor de $\frac{\eta}{D_\alpha}$

```

Editor - /home/kevi/Área de Trabalho/programas controle/der_tcc.m
1 function d=der_tcc(t,y)
2 % y(1)=>n derivado
3 % y(2)=>n
4 %t0=0.001; tf=0.06; h=0.0001; y0=[-0.1; 1];
5 R_D=1;
6 r=t;
7 theta=0;
8 tri = (R_D+2*r*cos(theta))/(R_D*r+r^2*cos(theta)); %frac{R_D + 2 r \cos(\theta)}{r R_D + r^2 \cos(\theta)}
9 quad = 100; %eta/d_alfa;
10 %calculando vetor de saída
11 d(1)=-y(1)*tri-quad*y(2); %derivada 1;
12 d(2)= y(1); %derivada 2;
13 d=d';
14
15

```

Figura 7 – Algoritmo para a resolução numérica via *rk4* de 8.55 no Matlab

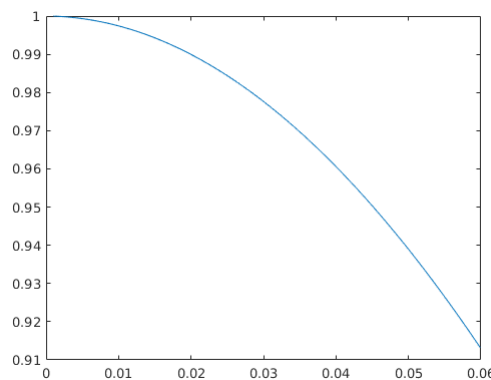


Figura 8 – Gráfico da resolução numérica de 8.55 no Matlab - Verticalmente temos o valor de $n(r)$ em m^{-3} , e horizontalmente o valor de r em m .

9 Fase Computacional

Além dessas equações, devemos incluir equações para os campos eletromagnéticos. Vamos separar os campos em um componente gerado pelas correntes que fluem em bobinas fora do plasma e outro causado pelo plasma, ou seja, $\vec{E} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_{pl}$ e $\vec{B} = \vec{B}_{ext} + \vec{B}_{pl}$. O campo magnético aplicado externamente é produzido por um conjunto de bobinas específicas fora do plasma e possui componentes poloidais e toroidais. O campo toroidal tem uma dependência $1/R$, enquanto o campo poloidal tem um padrão quadrupolo,

$$\vec{B}_{ext} = \vec{B}_{pol}^{quadrupole} + \frac{R_0 B_0}{R \hat{e}_\phi} \quad (9.1)$$

O campo elétrico aplicado externamente é produzido pelo solenóide central do tokamak, que induz uma voltagem de loop toroidal, V_{loop} . O campo elétrico externo é então dado por

$$\vec{E}_{ext} = \frac{V_{loop}}{2\pi R} \hat{e}_\phi \quad (9.2)$$

O campo eletromagnético gerado pelo plasma é calculado via

$$\nabla A_{pl} = -u_0 \vec{J} \quad (9.3)$$

onde A_{pl} é o vetor de potencial magnético devido ao plasma. O campo eletromagnético então segue de

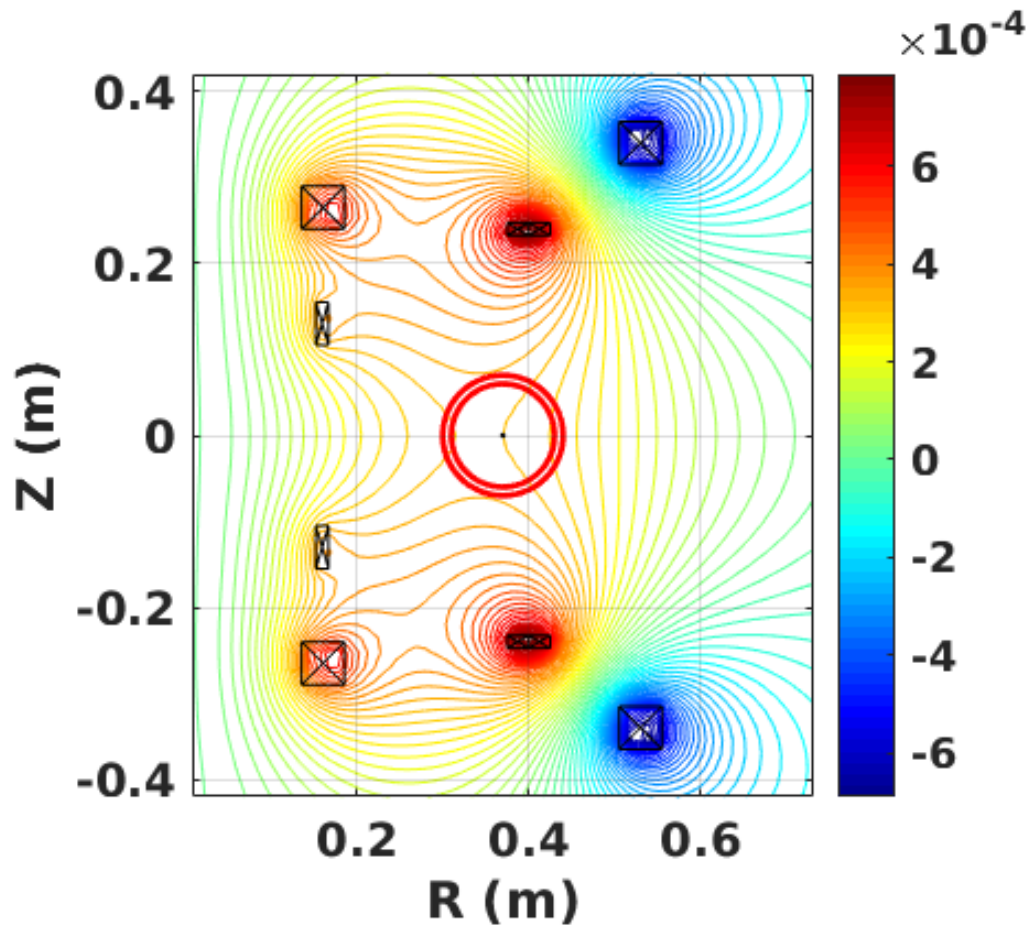
$$B_{pl} = \nabla \times A_{pl} \quad (9.4)$$

$$E_{pl} = -\frac{\partial A_{pl}}{\partial t} \quad (9.5)$$

9.1 Equipotenciais Campo Magnético

Para obtermos as equipotenciais de campo magnético gerado pelas bobinas do tokamak Nova-Furg, é montado uma tabela de greem para o campo magnético gerado por cada bobina. Com uma corrente unitária, em uma *mashgrid* que começa em 0.1 e vai até 0.73 no eixo horizontal e no vertical de -0.54 a 0.54. Tendo no seu centro o ponto central da seção reta do tokamak Nova-Furg. Multiplicando então cada tabela de greem por uma corrente (Valores escolhidos apenas para obter uma distribuição, sem levar em conta os valores exatos reais), somando tudo e chamando a função *contour* do Matlab obtemos a figura 9 onde temos as equipotenciais do campo magnético gerado pelas bobinas. E se adicionarmos o campo gerado pela corrente de plasma temos a figura 10 onde temos as equipotenciais do campo magnético gerado pelas bobinas mais o campo magnético gerado pela corrente de plasma. No caso o o campo magnético gerado pela corrente de plasma é simulado por 5 bobinas localizadas no centro da secção reta do tokamak Nova-Furg.

Figura 9 – Equipotenciais Campo Magnético gerado pelas bobinas do Tokamak Nova-Furg - Imagem feita no Matlab, autoria própria



Na figura 9 as correntes são:

Nas 2 bobinas de compensação externa 250 A.

Nas 2 bobinas de compensação interna 400 A.

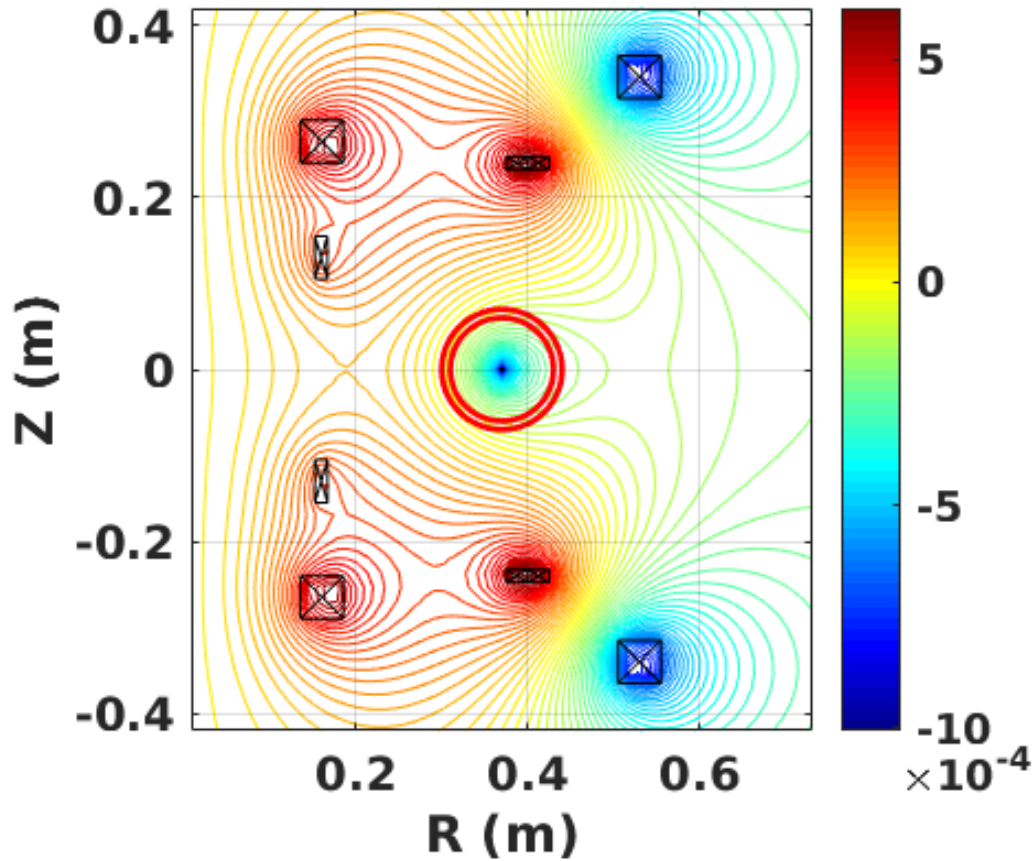
Nas 2 bobinas verticais internas 1000A.

Nas 2 bobinas verticais externas 500A.

Na figura 10 as correntes das bobinas são as mesmas só temos também a corrente de plasma total passando pelas 5 bobinas feitas para simular a corrente de plasma que é -500 A.

A resolução de *mashgrid* usada é 65x65.

Figura 10 – Equipotenciais Campo Magnético gerado pelas bobinas e corrente de plasma do Tokamak Nova-Furg - Imagem feita no Matlab, autoria própria



10 Resultados esperados

Espero neste trabalho obter dados de simulação querentes com os medidos nos disparos do tokamak, para reforçar a validade do modelo de dois fluidos para o *breakdown*. Podendo então usar o modelo de dois fluidos para prever os resultados de cada experimento na máquina. E se possível calcular quais os melhores parâmetros para operar o tokamak Nova-Furg.

11 Conclusão

Como resultados da fase teórica, logo no início do trabalho vimos que existe claras diferenças entre os modelos de fluidos para o plasma e os modelos cinéticos. Também concluímos que para o nosso caso a melhor opção são os modelos de fluidos. Constatamos que a equação de Vlasov, Eq. 7.2, não é tão restritiva quanto parece uma vez que uma parte muito significativa das interações entre partículas são consideradas nos campos eletromagnéticos internos suavizados \vec{E}_i e \vec{B}_i causados pela presença e movimento de todas as partículas carregadas dentro do plasma. Outro importante resultado obtido neste trabalho é o conjunto das 6 equações 7.51 de conservação dos momentos da equação de Boltzmann Eq. 7.1, para cada momento são

duas equações, uma para o fluido de elétrons e outra para o fluido de íons. Mas como vimos nas simplificações os íons podem ser considerados em repouso durante a fase inicial ou seja $\vec{u}_i = 0$, então pode-se remover a equação de conservação do momento iônico na fase de breakdown. Uma vez que a massa dos íons é muito maior que a massa dos elétrons implicando em uma mobilidade de íons muito menor.

A O modelo de Townsend

O modelo de Townsend assume que os campos elétricos acionados externamente são predominantes no dispositivo. Tal suposição é verdadeira para dispositivos com gás neutro de baixa pressão e curto espaço entre os eletrodos, porque a quantidade de carga espacial local produzida durante o início do avalanche de elétrons é desprezível devido à pequena taxa de crescimento, α_T . Portanto as características da avalanche de elétrons em dispositivos de baixa pressão de gás dependem dos campos elétricos externos e podem ser descritas pelo modelo de Townsend.

Assumindo que, devido à sua maior massa, os íons são estacionários, e os elétrons livres são responsáveis pela ionização. O aumento da densidade eletrônica, n_e , é proporcional à diferença entre a taxa de ionização, v_{ionz} (geração de elétrons) e a taxa de perda de elétrons, v_{loss}

$$\frac{dn_e}{dt} = (v_{ionz} - v_{loss})n_e \quad (A.1)$$

portanto, nesta fase, a densidade eletrônica $n_e(t)$ pode ser expressa como

$$n_e(t) = n_{e0} e^{(v_{ionz} - v_{loss})t} \quad (A.2)$$

onde t descreve o tempo, n_{e0} é a densidade de elétrons em $t = 0$ o *breakdown* ocorre quando a taxa de geração de elétrons excede a taxa de perda de elétrons. Estes elétrons então são acelerados pelo campo elétrico toroidal e alcançam a velocidade de desvio (*drift velocity*). Observe que a Eq. A.2 é válida somente quando o grau de ionização permanece pequeno, deste modo as colisões de elétrons com as partículas neutras predominam sobre as colisões Coulombianas. Para modelar o processo de ionização, vamos escrever a taxa de ionização em termos do primeiro coeficiente de Townsend e a velocidade de desvio do elétron

$$v_{ionz} = \alpha_T u_{D,||} \quad (A.3)$$

onde $u_{D,||}$ é a velocidade de desvio, α_T é o primeiro coeficiente de Townsend que é dado por

$$\alpha_T = A p_n e^{B \frac{p_n}{E_\Theta}} \quad (A.4)$$

Aqui, A e B são constantes que dependem do gás de trabalho, p_n é a pressão de gás neutro e E_Θ é a magnitude do campo elétrico externo. A taxa de perda de elétrons devido ao seu movimento ao longo das linhas do campo magnético pode ser expressa por

$$v_{loss} = \frac{u_{D,||}}{L_{eff}} \quad (A.5)$$

onde L_{eff} é a distância média percorrida pelo elétron antes de se chocar com a parede. Fazendo o lado direito da Eq. A.1 ir para zero, cria-se uma condição para o início do *breakdown*

$$Ap_n e^{B_{E0}^{pn}} = \frac{1}{L_{eff}} \quad (A.6)$$

Esta equação mostra que um *breakdown* bem-sucedido em um tokamak depende da escolha da pressão do gás neutro, da intensidade do campo elétrico toroidal e do comprimento efetivo da conexão (L_{eff}), que depende da configuração do campo poloidal durante a fase de partida. Existe então um valor mínimo do campo elétrico toroidal induzido para uma dada pressão de gás neutro e L_{eff} para que se possa obter um *breakdown*. Uma explicação detalhada para a modelagem da teoria de Townsend pode ser encontrada em [9]

B Momentos da distribuição

Seja $\chi(v)$ uma propriedade física das partículas no plasma. Agora multiplicamos cada termo da Eq. 7.2 por $\chi(v)$ e integramos a equação resultante sobre todo o espaço de velocidade para obter a equação como segue:

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v + \int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v + \int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_V \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3v \quad (B.1)$$

Resolvendo cada integral separadamente,

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_V \chi f_\alpha d^3v \right) - \int_V \frac{\partial \chi}{\partial t} f_\alpha d^3v \quad (B.2)$$

No entanto, desde que $\chi = \chi(\vec{v})$, sua derivada parcial em relação ao tempo é zero. Usando a definição de valores médios (Anexo. D.1), o rendimento fica

$$\int_V \chi \frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d^3v = \frac{\partial}{\partial t} [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \rangle_\alpha] \quad (B.3)$$

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot \left(\int_V \chi \vec{v} f_\alpha d^3v \right) - \int_V \nabla \chi \cdot \vec{v} f_\alpha d^3v - \int_V \chi f_\alpha \nabla \cdot \vec{v} d^3v \quad (B.4)$$

Como visto anteriormente, $\chi = \chi(\vec{v})$, então seu gradiente é zero e as variáveis \vec{r} , \vec{v} e t são independentes, então o divergente de \vec{v} também é zero, resultando em

$$\int_V \chi \vec{v} \cdot \nabla f_\alpha d^3v = \nabla \cdot [n_\alpha(\vec{r}, t) \langle \chi \vec{v} \rangle_\alpha] \quad (B.5)$$

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = \int_V \nabla_v \cdot (\vec{a} \chi f_\alpha) d^3v - \int_V f_\alpha (\vec{a} \cdot \nabla_v \chi) d^3v - \int_V \chi f_\alpha (\nabla_v \cdot \vec{a}) d^3v \quad (B.6)$$

A primeira integral desaparece porque a função de distribuição deve desaparecer para $\pm\infty$. A última integral na Eq. B.6 desaparece se assumirmos que

$$\nabla_v \cdot \vec{a} = \frac{1}{m_\alpha} \nabla_v \cdot \vec{F} = 0 \quad (\text{B.7})$$

isto é, se o componente de força F_j for independente do componente de velocidade correspondente v_j , uma vez que $\nabla_v \cdot \vec{F} = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial v_j}$. Isto é verdade para a força devido a um campo magnético, $\vec{F} = q_\alpha \vec{v} \times \vec{B}$ porque j também neste caso F_j é independente de v_j .

$$\int_V \chi \vec{a} \cdot \nabla_v f_\alpha d^3v = -n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{a} \cdot \nabla_v \chi >_\alpha \quad (\text{B.8})$$

$$\int_V \chi \left(\frac{\delta f_\alpha}{\delta t} \right)_{coll} d^3v = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < \chi >_\alpha) \right] \quad (\text{B.9})$$

Combinando as Eq. B.3, Eq. B.5, Eq. B.8 e Eq. B.9 na Eq. B.1 produzimos então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < \chi >_\alpha) + \nabla \cdot (n_\alpha(\vec{r}, t) < \chi \vec{v} >_\alpha) - n_\alpha(\vec{r}, t) < \vec{a} \cdot \nabla_v \chi >_\alpha = \\ = \left[\frac{\delta}{\delta t} (n_\alpha(\vec{r}, t) < \chi >_\alpha) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

C Lista de Notações

Lista de notação:

\vec{E}_i é o campo elétrico macroscópico interno

\vec{B}_i é o campo magnético macroscópico interno

$\vec{B}(\vec{r})$ é o vetor campo magnético

$\vec{E}(\vec{r})$ é o campo elétrico

$\vec{J}(\vec{r}, t)$ é vetor densidade de corrente

v_{ionz} é a taxa de ionização

v_{loss} é a taxa de perda de elétrons

$n_\alpha = \int f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ densidade numérica da partícula do tipo α

$\vec{u}_\alpha = \frac{1}{n(\vec{r}, t)} \int_V \vec{v} f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v$ é a velocidade média das partículas em v

n_i é a densidade numérica de íons

n_e é a densidade numérica de elétrons

m_α massa do tipo de partícula α

α_a é o 1º coeficiente de Townsend para o tipo de partícula α

τ_p é o tempo de confinamento da partícula

$f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a função distribuição de velocidades.

$\rho(\vec{r}, t)$ é a densidade de carga

Q_α representa a taxa de mudança de densidade de energia devido ao espalhamento

\mathcal{E}_α é a produção de partículas de plasma

$\mathbb{P}_\alpha = \rho_{m\alpha} \langle \vec{c}_\alpha \cdot \vec{c}_\alpha \rangle$ é o tensor de pressão cinética

$\vec{q}_\alpha = \frac{1}{2} \rho_{m\alpha} \langle c_\alpha^2 \vec{c}_\alpha \rangle$ é o fluxo de calor

q_α é carga da partícula do tipo α

D_e, D_i, D sendo os coeficientes de difusão de partículas.

$p(\vec{r}, t)$ é o escalar de pressão

e é carga elementar do eletrón

η sendo a resistividade paralela do Spitzer

\vec{R}_α termo de troca de momento

R_α denota a taxa de mudança de momento devido ao espalhamento

\mathcal{R}_α denota a taxa de mudança de momento devido à produção de partículas de plasma.

Operadores diferenciais:

$$\nabla = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \hat{e}_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \hat{e}_y \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \hat{e}_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla_v = \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial v_x} + \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial v_y} + \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial v_z}$$

D Valor Médio

O símbolo $\langle \rangle_\alpha$ denota o valor médio com respeito ao espaço de velocidades para o tipo de partícula α , o valor médio é independente de \vec{v} mas é uma função de \vec{r} e t .

$$\langle \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) \rangle_\alpha = \frac{1}{n_\alpha(\vec{r}, t)} \int_V \chi(\vec{r}, \vec{v}, t) f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d^3v \quad (\text{D.1})$$

onde V representa o espaço de velocidade, ou seja, todas as velocidades possíveis para cada partícula, $n_\alpha(\vec{r}, t) = \int_V f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t) d\vec{v}$ e a densidade numérica de partículas do tipo α na posição \vec{r} no tempos t e $f_\alpha(\vec{r}, \vec{v}, t)$ é a função distribuição de velocidades para as partículas do tipo α .

E Tabela Parâmetros Bobinas Nova-Furg

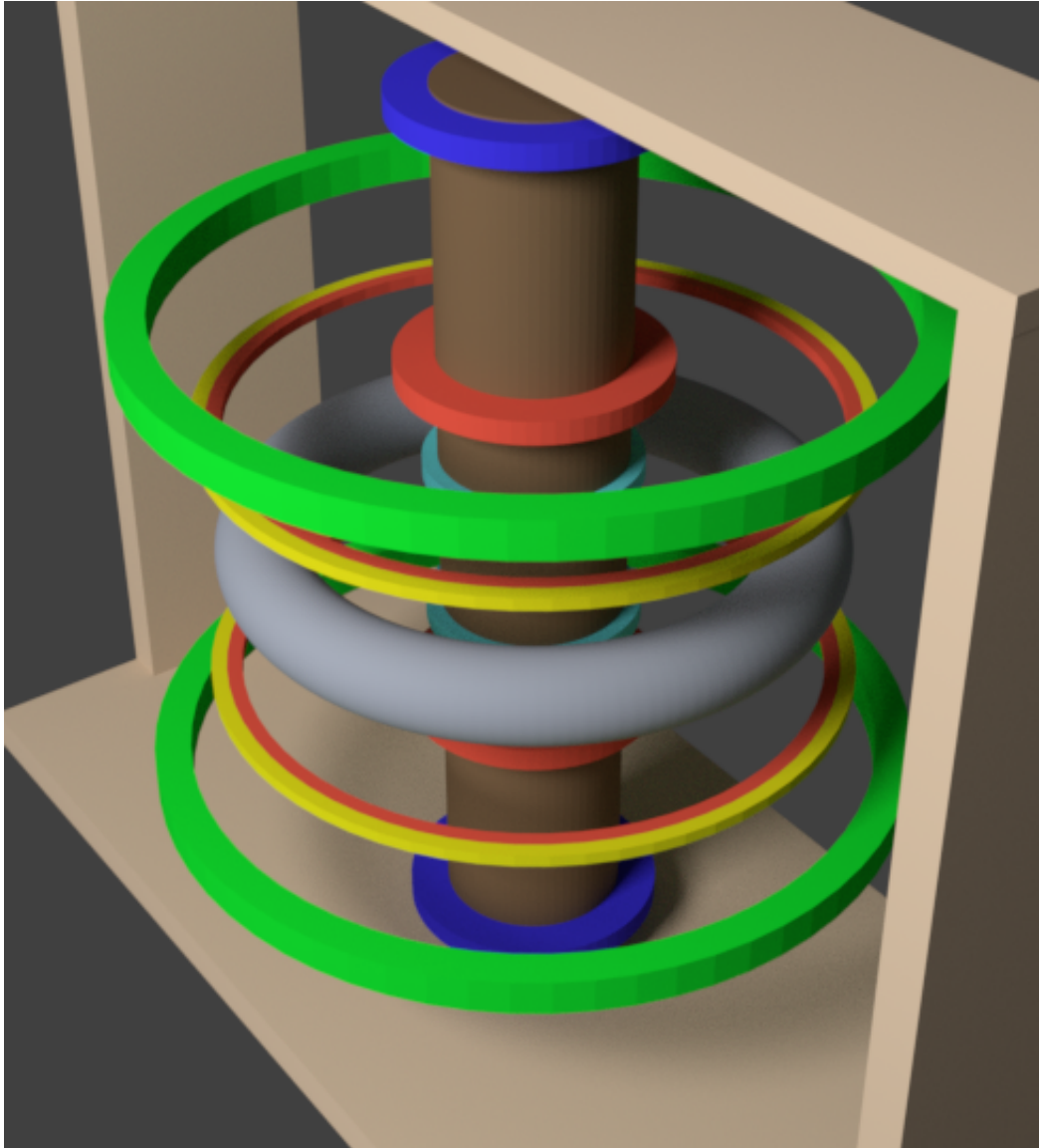
Na tabela 2 temos:

Tabela 2 – Dados Nova-Furg

Bobina	R_0	Z_0	dR	dZ	J
B1	0.1610	0.2650	0.050	0.050	x
B2	0.1610	-0.2650	0.050	0.050	x
B3	0.5300	0.3400	0.050	0.050	y
B4	0.5300	-0.3400	0.050	0.050	y
B5	0.3875	0.2400	0.025	0.015	w
B6	0.3875	-0.2400	0.025	0.015	w
B7	0.1600	0.1300	0.015	0.050	w
B8	0.1600	-0.1300	0.015	0.050	w
B9	0.4125	0.2400	0.025	0.015	k
B10	0.4125	-0.2400	0.025	0.015	k
B11	0.1610	-0.3000	0.050	0.050	l
B12	0.1610	-0.3000	0.050	0.050	l

- B1 e B2 sendo as bobinas verticais internas;
- B3 e B4 sendo as bobinas verticais externas;
- B5 e B6 sendo as bobinas de compensação externas-internas;
- B7 e B8 as bobinas de compensação internas;
- B9 e B10 - sendo as bobinas de compensação externas-externas;
- B11 e B12 - sendo as bobinas de aquecimento ohminico;
- R_0 - raio onde se encontra o centro de cada bobina;
- Z_0 - altura onde se encontra o centro da bobina;
- dR e dZ são respectivamente, a variação ao longo do eixo R da largura e ao longo do eixo Z da altura;
- J - corrente que passa pela bobina;
- o raio interno da camera de vácuo é 6 centímetros;
- x, y, w, k, l são valores de corrente que podem ser controlados.

Figura 11 – Bobinas Tokamak Nova-Furg - Modelo criado no Blender, autoria própria



Na figura 11 bobinas com mesma cor sempre possuem correntes iguais, onde temos de vermelho as duas bobinas verticais internas (B1 e B2) e as duas bobinas de compensação externas-internas (B5 e B6); de verde as duas bobinas verticais externas (B3 e B4); de azul claro as duas bobinas de compensação internas (B7 e B8); de amarelo as duas bobinas de compensação externas-externas (B9 e B10) e de azul as duas bobinas de aquecimento ohminico (B11 e B12);

F Tabela de Unidades Úteis

A Tabela 3 apresenta algumas unidades úteis para este trabalho.

Tabela 3 – Relação entre unidades

Unidade	Símbolo	Relações
Metro	m	$\left[\frac{N \cdot s^2}{Kg} \right]$
Kilograma	Kg	$\left[\frac{J \cdot s^2}{m^2} \right]$
Newton	N	$\left[\frac{kg \cdot m}{s^2} \right]$
Segundo	s	$\vec{v} = [m/s]$
Ampere	A	$\left[\frac{C}{s} \right]$
Coulomb	C	$[A \cdot s = F \cdot V]$
Tesla	T	$\left[\frac{V \cdot s}{m^2} = \frac{N}{A \cdot m} = \frac{J}{A \cdot m^2} \right]$
Joule	J	$\left[\frac{kg \cdot m^2}{s^2} \right]$
Farad	F	$\left[\frac{C}{V} = \frac{A \cdot s}{V} = \frac{J}{V^2} = \frac{s}{\Omega} = \frac{s^2 \cdot C^2}{m^2 \cdot Kg} \right]$
Watt	W	$\left[\frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = \frac{Kg \cdot m^2}{s^3} \right]$
Volt	V	$\left[A \cdot \Omega = \frac{W}{A} = \frac{J}{C} = \frac{eV}{e} \right]$
eletro-Volt	eV	$[1.6 \times 10^{-19} J]$
Ohm	Ω	$\left[\frac{V}{A} = \frac{W}{A^2} = \frac{V^2}{W} = \frac{s}{F} \right]$

Referências

- [1] J. A. Bittencourt. *Fundamentals of Plasma Physics*. Springer, Berlin, 2004.
- [2] Kulsrud R. M. Kruskal, M. D. Equilibrium of a magnetically confined plasma in a toroid. *Physics of Fluids*, 1(4), 1958. <https://doi.org/10.1063/1.1705884>.
- [3] B. Lloyd. *Nuclear Fusion*. et al, -, 1991.
- [4] Alfredo Pironi Marco Ariola. *Magnetic Control of Tokamak Plasmas*. Springer, -, 2008.
- [5] S. C. Jardin S. P. Hirshman. Two-dimensional transport of tokamak plasmas. *The Physics of Fluids*, 22, 1979. <https://doi.org/10.1063/1.862654>.
- [6] P.H. Sakanaka. *Macroscopic plasma properties and stability theory*, volume 12. https://inis.iaea.org/search/search.aspx?orig_q=RN:12614713, year=1981.
- [7] A Thyagaraja. Numerical simulations of tokamak plasma turbulence and internal transport barriers. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, 42(12B):B255–B269, dec 2000.
- [8] J.A. Wesson. *Tokamaks*. Clarendon Press, Oxford, 2th edition, 1997.
- [9] M Yoo, Yong-Su Na, J Kim, Y An, B Jung, Y Hwang, S Shim, H Lee, and T Hahm. *On ohmic breakdown physics in a tokamak*. 2014.
- [10] L. Zakharov and B. Rogers. Physics of fluids b. *Plasma Physics*, 4, 1989-1993. <http://dx.doi.org/10.1063/1.860384>.