Stochastische Signale

1. Mengenalgebra

1.1. Mengen- und Boolsche Algebra

Kommutativ	$A \cap B = B \cap A$	$A \uplus B = B \uplus A$
Assoziativ	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	
	$(A \uplus B) \uplus C = A \uplus (B \uplus C)$	
Distributiv	$A \cap (B \uplus C) = (A \cap B) \uplus (A \cap C)$	
	$A \uplus (B \cap C) = (A \uplus B) \cap (A \uplus C)$	
Indempotenz	$A \cap A = A$	$A \uplus A = A$
Absorbtion	$A \cap (A \uplus B) = A$	$A \uplus (A \cap B) = A$
Neutralität	$A \cap \Omega = A$	$A \uplus \emptyset = A$
Dominant	$A \cap \emptyset = \emptyset$	$A \uplus \Omega = \Omega$
Komplement	$A \cap \overline{A} = \emptyset$	$A \uplus \overline{A} = \Omega$
	$\overline{\overline{A}} = A$	$\overline{\Omega} = \emptyset$
De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \uplus \overline{B}$	$\overline{A \uplus B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

1.2. Kombinatorik

Mögliche Variationen/Kombinationen um k Elemente von maximal n Elementen zu wählen bzw. k Elemente auf n Felder zu verteilen:

	Mit Reihenfolge	Reihenfolge egal
Mit Wiederholung	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$
Ohne Wiederholung	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$

Permutation von n mit jeweils k gleichen Elementen: $\frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots}$

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$ $\quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{5}{2} = 10$

1.3. Grundbegriffe

Tupel	$(i, j) \neq (j, i)$ für $i \neq j$
Ungeordnetes Paar	$\{i, j\} = \{j, i\}$
Potenzmenge	$\mathrm{P}(\Omega)$ ist Menge aller Teilmengen von Ω

1.4. Integralarten

$F(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\frac{1}{q+1} x^{q+1}$	x^q	qx^{q-1}
$\frac{2\sqrt{ax^3}}{3}$	$\sqrt{ax}$	$\frac{a}{2\sqrt{ax}}$
$x \ln(ax) - x$	$\ln(ax)$	$\frac{1}{x}$
$\frac{1}{a^2} e^{ax}(ax-1)$	$x \cdot e^{ax}$	$e^{ax}(ax+1)$
$\frac{a^x}{\ln(a)}$	a^x	$a^x \ln(a)$

$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{at+b}} = \frac{2\sqrt{at+b}}{a}$ $\qquad \int t^2 e^{at} \,\mathrm{d}t = \frac{(ax-1)^2+1}{a^3} e^{at}$

$\int t e^{at} \,\mathrm{d}t = \frac{at-1}{a^2} e^{at}$ $\qquad \int x e^{ax^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} e^{ax^2}$

1.5. Binome, Trinome

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ $\qquad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

2. Wahrscheinlichkeitsräume $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathbb{F}, \mathrm{P})$ besteht aus

- Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$:
  Menge aller möglichen **Ergebnisse** ω_i
- Ereignisalgebra $\mathbb{F} = \{A_1, A_2, \ldots\}$:
  Menge von Ereignisen $A_i \subseteq \Omega$
- Wahrscheinlichkeitsmaß P

2.1. Ereignisalgebra $\mathbb{F} \subseteq \mathbf{P}(\Omega)$

- $\Omega \in \mathbb{F}$
- $A_i \in \mathbb{F} \Rightarrow A_i^{\mathsf{C}} \in \mathbb{F}$
- $A_1, \ldots, A_k \in \mathbb{F} \Rightarrow \bigcup\limits_{i \geq 1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

Daraus folgt:

- $\emptyset \in \mathbb{F}$
- $A_i \backslash A_j \in \mathbb{F}$
- $\bigcap_{i=1}^{k} A_i \in \mathbb{F}$

$|\mathbb{F}| = 2^{\text{Anzahl disjunkter Teilmengen}}$ (muss endlich sein)

2.1.1. σ-Algebra

Entwicklung $k \to \infty$. Unendlich viele Ergebnisse, aber jedes A_i besteht aus abzählbar vielen Ergebnissen. Besitzt mindestens 2 Ereignisse.

2.2. Wahrscheinlichkeitsmaß P

$\mathrm{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ $\qquad \mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$

2.2.1. Axiome von Kolmogorow

Nichtnegativität:	$\mathrm{P}(A) \geq 0 \Rightarrow \mathrm{P} : \mathbb{F} \mapsto [0, 1]$
Normiertheit:	$\mathrm{P}(\Omega) = 1$
Additivität:	$\mathrm{P}\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{P}(A_i)$, wenn $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i \neq j$

2.2.2. Weitere Eigenschaften

- $\mathrm{P}(A^c) = 1 - \mathrm{P}(A)$
- $\mathrm{P}(\emptyset) = 0 \qquad \mathrm{P}(\Omega) = 1$
- $\mathrm{P}(A \backslash B) = \mathrm{P}(A \cap B^c) = \mathrm{P}(A) - \mathrm{P}(A \cap B)$
- $\mathrm{P}(A \cup B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cap B)$
- $\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A) + \mathrm{P}(B) - \mathrm{P}(A \cup B)$
- $A \subset B \Rightarrow \mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B)$
- $\mathrm{P}(\bigcup_{i=1}^{k} A_i) \leq \sum_{i=1}^{k} \mathrm{P}(A_i)$

3. Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

3.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit für A falls B bereits eingetreten ist:

$\mathrm{P}_B(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

3.1.1. Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Es muss gelten: $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \Omega$ für $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$

Totale Wahrscheinlichkeit:	$\mathrm{P}(A) = \sum\limits_{i \in I} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)$
Satz von Bayes:	$\mathrm{P}(B_k|A) = \frac{\mathrm{P}(A|B_k)\,\mathrm{P}(B_k)}{\sum\limits_{i \in I} \mathrm{P}(A|B_i)\,\mathrm{P}(B_i)}$

3.1.2. Multiplikationssatz

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A|B)\,\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(B|A)\,\mathrm{P}(A)$

Beliebig viele Ereignisse:

$\mathrm{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k)$

$= \mathrm{P}\left(A_{\pi(1)}\right) \mathrm{P}\left(A_{\pi(2)}|A_{\pi(1)}\right) \mathrm{P}\left(A_{\pi(3)}|A_{\pi(2)} \cap A_{\pi(1)}\right) \times$

$\cdots \times \mathrm{P}\left(A_{\pi(k)}|A_{\pi(k-1)} \cap \cdots \cap A_{\pi(1)}\right)$

3.2. Stochastische Unabhängigkeit

Ereignisse A und B sind unabhängig falls:

$\mathrm{P}(A \cap B) = \mathrm{P}(A)\,\mathrm{P}(B)$

$\Rightarrow \mathrm{P}(B|A) = \mathrm{P}(B)$

Allgemein:

$\mathrm{P}\left(\bigcap\limits_{i \in J} A_i\right) = \prod\limits_{i \in J} \mathrm{P}(A_i)$ mit Indexmenge I und $\emptyset \neq J \subseteq I$

4. Zufallsvariablen

4.1. Definition

$X : \Omega \mapsto \Omega'$ ist Zufallsvariable, wenn für jedes Ereignis $A' \in \mathbb{F}'$ im Bildraum ein Ereignis A im Urbildraum $\mathbb{F}$ existiert, sodass $\{\omega \in \Omega|\, X(\omega) \in A'\} \in \mathbb{F}$

4.2. Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

Zufallsvariablen $X_1, \cdots, X_n$ sind stochastisch unabhängig, wenn für jedes $\vec{x} = [x_1, \cdots, x_n]^\top \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\boxed{\mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\}) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(\{X_i \leq x_i\})}$$

Gleichbedeutend:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i)$

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} p_{X_i}(x_i)$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \prod\limits_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i)$

4.3. Bedingte Zufallsvariablen

Bedingte Wahrscheinlichkeit für Zufallsvariablen:

Ereignis A gegeben:	$F_{X\,|\,A}(x|A) = \mathrm{P}\left(\{X \leq x\}|A\right)$
ZV Y gegeben:	$F_{X\,|\,Y}(x|y) = \mathrm{P}\left(\{X \leq x\}|\{Y = y\}\right)$
	$p_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$
	$f_{X\,|\,Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} = \frac{\mathrm{d}F_{X\,|\,Y}(x|y)}{\mathrm{d}x}$

5. Wahrscheinlichkeitsverteilungen

5.0.1. Definition

$\mathrm{P}_X(A') = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega|\, X(\omega) \in A'\}) = \mathrm{P}(\{X \in A'\}) \quad \forall A' \in \mathbb{F}'$

5.0.2. Kumulative Verteilungsfunktion (KVF bzw. CDF)

$\boxed{F_X(x) = \mathrm{P}(\{X \leq x\})}$

Eigenschaften

- $F_X(x)$ ist monoton wachsend
- $F_X(x) \geq 0$
- $F_X(x)$ ist rechtsseitig stetig:
  $\forall h > 0 : \lim\limits_{h \to 0} F_X(x+h) = F_X(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0\,; \lim\limits_{x \to \infty} F_X(x) = 1$
- $\mathrm{P}(\{a < X \leq b\}) = F_X(b) - F_X(a)$
- $\mathrm{P}(\{X > c\}) = 1 - F_X(c)$

5.0.3. Verteilung diskreter Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsmassenfkt.	pmf	$p_X(x) = \mathrm{P}(\{X = x\})$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \sum\limits_{\xi \in \Omega' : \xi \leq x} p_X(\xi)$

5.0.4. Verteilung stetiger Zufallsvariablen

Bezeichnung	Abk.	Zusammenhang
Wahrscheinlichkeitsdichtefkt.	pdf	$f_X(x) = \frac{\mathrm{d}F_X(x)}{\mathrm{d}x}$
Kumulative Verteilungsfkt.	cdf	$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi$

Berechnung von $f_X(x)$:

$f_X(x) = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int\limits_{x}^{x+\epsilon} f_X(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim\limits_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \mathrm{P}(x \leq X \leq x + \epsilon)$

Normiertheit

$\sum p(x) + \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 1$

5.1. Mehrdimensionale Verteilungen

5.1.1. Mehrdimensionale Zufallsvariable:

$\vec{X} = [X_1, \cdots, X_n]^T$ mit X_i Zufallsvariablen

5.1.2. Gemeinsame kumulative Verteilungsfunktion:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \boxed{F_{\vec{X}}(\vec{x}) = \mathrm{P}(\{\vec{X} \leq \vec{x}\})} =$

$\mathrm{P}(\{X_1 \leq x_1, \cdots, X_n \leq x_n\})$

5.1.3. Diskrete Zufallsvariablen:

$p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \mathrm{P}(\{\vec{X} = \vec{x}\})$ (joint probability mass function)

5.1.4. Stetige Zufallsvariablen:

$F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{X_1,\cdots,X_n}(\xi_1, \cdots, \xi_n)\,\mathrm{d}\xi_n \cdots \mathrm{d}\xi_1$

$f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\partial^n F_{\vec{X}}(x_1, \cdots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}$ $\qquad f_{X,Y} = f_{Y,X}$

(joint probability density function)

5.1.5. Marginalisierung

Prinzip: Lasse alle vernachlässigbaren ZV gegen unendlich gehen.

$F_{X_1,\cdots,X_m}(x_1, \cdots, x_m) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_m, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung:

Spezialfall der Marginalisierung um aus der mehrdimensionalen KVF die KVF für eine ZV zu erhalten.

$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \infty, \cdots, \infty)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsmasse (PMF)

(für diskrete ZV)

$p_{X_1}(x_1) = \sum\limits_{x_2,\cdots,x_n} p_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)$

Randverteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte (WDF)

(für stetige ZV)

$f_{X_1}(x_1) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cdots \int\limits_{-\infty}^{\infty} f_{X_1,\cdots,X_n}(x_1, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n \cdots \mathrm{d}x_2$

von Alwin Ebermann, Emanuel Regnath, Martin Zellner, Alexander Preißner, Hendrik Böttcher, Lukas Kompatscher, Samuel Harder – Mail: samuel.harder@tum.de

6. Funktionen von Zufallsvariablen

$X : \Omega \to \Omega' = \mathbb{R}$ und jetzt $g : \Omega' \to \Omega'' = \mathbb{R}$
$\mathrm{P}(A'') = \mathrm{P}(Y \in A'') = \mathrm{P}(\{X \in \Omega' \,|\, g(X) \in A''\} = \mathrm{P}(\{\omega \in \Omega \,|\, g(X(\omega)) \in A''\}$

6.1. Transformation von Zufallsvariablen

Berechnung von $f_Y(y)$ aus $f_X(x)$
$g(x)$ streng monoton & differenzierbar:
$g^{-1}(y)$ - Umkehrfunktion

$$f_Y(y) = f_X\left(g^{-1}(y)\right)\left[\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=g^{-1}(y)}\right]^{-1}$$

$g(x)$ nur differenzierbar:

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{N} f_X(x_i)\left[\left|\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_i}\right]^{-1} \text{ mit } i \in \{1, \dots, N\}$$

x_i sind Nullstellen von $y - g(x) = 0$

6.1.1. Beispiel: lineare Funktion

$Y = aX + b \Leftrightarrow g(x) = ax + b$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash 0,\ b \in \mathbb{R}$:

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a > 0 \\ 1 - F_X\left(\frac{y-b}{a}\right) & a < 0 \end{cases}$$

6.2. Summe unabhängiger Zufallsvariablen

$Z = X + Y$ mit X und Y unabhängig.

$$\Rightarrow f_{Z=X+Y}(z) = (f_X * f_Y)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y) f_Y \,\mathrm{d}y$$

7. Stochastische Standardmodelle

7.1. Begriffe

Gedächtnislos
Eine Zufallsvariable X ist gedächtnislos, falls:
$\mathrm{P}(\{X > a + b)\}|\{X > a\}) = \mathrm{P}(\{X > b\}), \qquad a, b > 0$

7.2. Gleichverteilung

7.2.1. Diskret

$p_X(x) = \frac{1}{|\Omega|}, \quad x \in \{1, \dots, |\Omega|\}$

Beispiele: Wurf einer fairen Münze, Lottozahlen

7.2.2. Stetig $(a, b : -\infty < a < b < \infty)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & x \in [a,b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & x \in [a,b] \\ 1 & x > b \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = \dfrac{a+b}{2}$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = \dfrac{(b-a)^2}{12}$ Varianz	$\varphi_X(s) = \dfrac{e^{j\omega b} - e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)}$ Charakt. Funktion

Beispiele: Winkel beim Flaschendrehen, Phase einer empf. Sinusschwingung

7.3. Bernoulliverteilung $(p \in [0,1])$

Wahrscheinlichkeitsmasse
2 Ereignisse: Erfolg und Misserfolg
p: Wahrscheinlichkeit

$$p_X(k) = \begin{cases} p, & k = 1 \\ 1-p & k = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F_X(k) = \begin{cases} 0, & k < 0 \\ 1-p & 0 \le k < 1 \\ 1 & k \ge 1 \end{cases}$$

$\mathrm{E}[X] = p$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = p(1-p)$ Varianz	$G_X(z) = pz + 1 - p$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

Beispiele: Einmaliger Wurf einer (unfairen) Münze

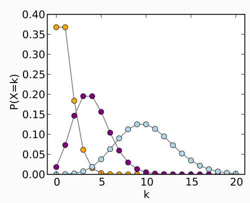
7.4. Binomialverteilung $\mathcal{B}(n,p)$ $(p \in [0,1], n \in \mathbb{N})$

Folge von n Bernoulli-Experimenten
p: Wahrscheinlichkeit für Erfolg
k: Anzahl der Erfolge
Wahrscheinlichkeitsmasse

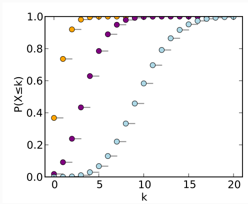
$$p_X(k) = B_{n,p}(k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & k \in \{0, \dots, n\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

WMF/PMF:



KVF/CDF:



$\mathrm{E}[X] = np$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$ Varianz	$G_X(z) = (pz + 1 - p)^n$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

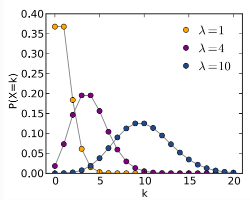
Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = (1 - p + pe^{s})^n$

Beispiele: Anzahl der Übertragungsfehler in einem Datenblock endlicher Länge, Wiederholtes Werfen einer Münze

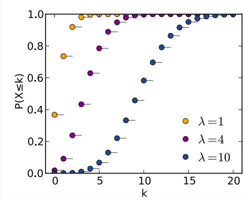
7.5. Poisson-Verteilung $(\lambda \geq 0)$

Asymptotischer Grenzfall der Binomialverteilung
$n \to \infty, p \to 0, np \to \lambda \quad p_X(k) = \lim\limits_{n\to\infty} B_{n,\frac{\lambda}{n}}(k)$

WMF/PMF:
$p_X[k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \qquad k \in \mathbb{N}_0$



KVF/CDF:
$F_X[k]$ = zu kompliziert



$\mathrm{E}[X] = \lambda$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = \lambda$ Varianz	$G_X(z) = e^{\lambda(z-1)}$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

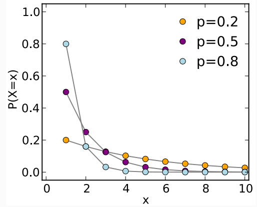
Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = \exp\left(\lambda(e^{s} - 1)\right)$

Beispiele: Zahl der Phänomene in einem Zeitintervall, Google-Anfragen in einer Stunde, Schadensmeldungen an Versicherungen in einem Monat

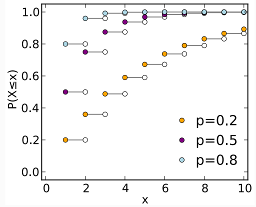
7.6. Geometrische Verteilung $(p \in [0,1])$

Erster Erfolg eines Bernoulli-Experiments beim k-ten Versuch, **Gedächtnislos**

WMF/PMF:
$p_X[k] = (1-p)^{k-1}p,\ k \in \mathbb{N}$



KVF/CDF:
$F_X[k] = 1 - (1-p)^k,\ k \in \mathbb{N}$



$\mathrm{E}[X] = \dfrac{1}{p}$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$ Varianz	$G_X(z) = \dfrac{pz}{1 - z + pz}$ Wahrscheinlichkeitserz. Funktion

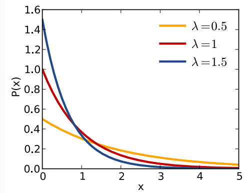
Charakteristische Funktion $\quad \varphi_X(s) = \dfrac{pe^{\imath s}}{1 - (1-p)e^{\imath s}}$

Beispiele: diskrete Dauer bis ein technisches Gerät zum ersten Mal ausfällt, Anzahl der Würfe bis man eine "6" würfelt

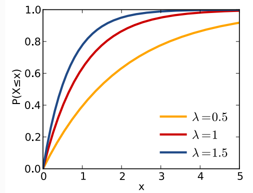
7.7. Exponentialverteilung $(\lambda > 0)$

Wie geometrische Verteilung für stetige Zufallsvariablen ("Lebensdauer"), **Gedächtnislos**
= Wartezeit bis zum ersten Auftreten eines Ereignisses

WDF/PDF:
$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$



KVF/CDF:
$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad x \geq 0$

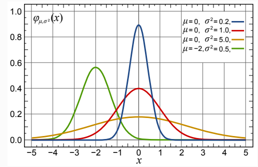


$\mathrm{E}(X) = \dfrac{1}{\lambda}$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$ Varianz	$\varphi_X(\omega) = \dfrac{\lambda}{\lambda - j\omega}$ Charakt. Funktion

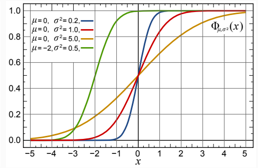
Beispiele: Lebensdauer von el. Bauteilen, Zeitdauer zwischen zwei Anrufen in einem Call-Center

7.8. Normalverteilung $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$

WDF/PDF:



KVF/CDF:



WDF

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{E}(X) = \mu$ Erwartungswert	$\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ Varianz	$\varphi_X(\omega) = e^{j\omega\mu - \frac{\omega^2\sigma^2}{2}}$ Charakt. Funktion

Schreibweise $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Beispiele: Rauschen, Ort eines Teilchens relativ zu seiner Anfangsposition bei brownscher Molekularbewegung, abgefahrene Sachen, die man nicht genauer bestimmen will oder kann

7.8.1. Standartnormalverteilung

ist der Spezialfall $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Es gilt außerdem:

- $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow X = \frac{1}{\sigma}(Y - \mu) \sim \mathcal{N}(0,1)$
- $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow Y = \sigma X + \mu \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

8. Erwartungswert

8.1. Erwartungswert

gibt den mittleren Wert einer Zufallsvariablen an

$$\mathsf{E}[X] = \underset{\text{diskrete } X:\Omega\to\Omega'}{\sum_{x\in\Omega'} x \cdot \mathsf{P}_X(x)} \quad \hat{=} \quad \underset{\text{stetige } X:\Omega\to\mathbb{R}}{\int_{\mathbb{R}} x \cdot f_X(x)\,\mathrm{d}x}$$

Eigenschaften:

Linearität:	$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha E[X] + \beta E[Y]$
Monotonie:	$X \leq Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$

Beweis mit der Definition und der Linearität des Integrals bzw. der Summe.

$\mathsf{E}[X\,Y] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$, falls X und Y stochastisch unabhängig
Umkehrung nicht möglich: Unkorreliertheit $\not\Rightarrow$ Stoch. Unabhängig!

$\mathsf{E}[X\,Y] = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} xy \cdot f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Spezialfall für $X:\Omega\to\mathbb{R}_+$:

$\mathsf{E}[X] = \int_0^\infty \mathsf{P}(X>t)\,\mathrm{d}t$ (stetig) $\qquad \mathsf{E}[X] = \sum_{k=0}^\infty \mathsf{P}(X>k)$ (diskret)

8.1.1. Für Funktionen von Zufallsvariablen $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$\mathsf{E}[g(X)] = \sum_{x\in\Omega'} g(x)\,\mathsf{P}_X(x) \quad \hat{=} \quad \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x)\,\mathrm{d}x$

9. Varianz und Kovarianz

9.1. Varianz

ist ein Maß für die Stärke der Abweichung vom Erwartungswert

$$\mathsf{Var}[X] = \mathsf{E}\left[(X-\mathsf{E}[X])^2\right] = \mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X]^2$$

$\mathsf{Var}[\alpha X + \beta] = \alpha^2\,\mathsf{Var}[X] \qquad \mathsf{Var}[X] = \mathsf{Cov}[X,X]$

$\mathsf{Var}\left[\sum_{i=1}^n X_i\right] = \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}[X_i] + \sum_{j\neq i}\mathsf{Cov}[X_i,X_j]$

9.1.1. Standard Abweichung

$\sigma = \sqrt{\mathsf{Var}[X]}$

9.2. Kovarianz

Maß für den linearen Zusammenhang zweier Variablen

$$\mathsf{Cov}[X,Y] = \mathsf{E}[(X-\mathsf{E}[X])(Y-\mathsf{E}[Y])] = \mathsf{Cov}[Y,X]$$
$$\mathsf{Cov}[X,Y] = \mathsf{E}[X\,Y] - \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y] = \mathsf{Cov}[Y,X]$$

$\mathsf{Cov}[\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta] = \alpha\gamma\,\mathsf{Cov}[X,Y]$
$\mathsf{Cov}[X+U, Y+V] = \mathsf{Cov}[X,Y] + \mathsf{Cov}[X,V] + \mathsf{Cov}[U,Y] + \mathsf{Cov}[U,V]$

9.3. Unkorreliertheit

wenn gilt:

$$\mathsf{Cov}[X,Y] = 0 \Leftrightarrow \mathsf{E}[X\,Y] = \mathsf{E}[X]\,\mathsf{E}[Y]$$

Stoch. Unabhängig $\Rightarrow$ Unkorreliertheit

wenn ZV normalverteilt (sonst nicht!):
Unkorreliertheit $\Rightarrow$ stoch. Unabhängigkeit

bei paarweisen unkorrellierten Zufallsvariablen:
$\mathsf{Var}[\sum_{i=1}^n X_i] = \sum_{i=1}^n \mathsf{Var}[X_i]$

9.4. Orthogonalität

$$\mathsf{E}[X\,Y] = 0$$

mit dem Korrelationswert $\mathsf{E}[X\,Y]$

9.5. Korrelationskoeffizient

$\rho_{X,Y} = \frac{\mathsf{Cov}[X,Y]}{\sqrt{\mathsf{Var}[X]}\sqrt{\mathsf{Var}[Y]}} = \frac{c_{X,Y}}{\sigma_X\sigma_Y}$ mit $\rho_{X,Y}\in[-1,1]$

Korrelationskoeffizient von X und Y

Es gilt: $\begin{cases} \text{negativ korreliert} & \rho_{X,Y}\in[-1,0) \\ \text{unkorreliert} & \rho_{X,Y} = 0 \\ \text{positiv korreliert} & \rho_{X,Y}\in(0,1] \end{cases}$

10. Erzeugende und charakter. Funktionen

10.1. Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion

für $X:\Omega\to\mathbb{N}_0$

$$G_X(z) = \mathsf{E}[z^X] = \sum_{k=0}^\infty p_X(k) z^k, \quad |z|\leq 1$$

Anwendungen

$$p_X(n) = \mathsf{P}(\{X=n\}) = \frac{1}{n!}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}z^n}G_X(z)\right]_{z=0}, \quad \forall n\in\mathbb{N}_0$$
$$\mathsf{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}G_X(z)\right]_{z=1}$$
$$\mathsf{E}[X^2] - \mathsf{E}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G_X(z)\right]_{z=1}$$
$$\mathsf{Var}[X] = \left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}G_X(z)\right]_{z=1} - \mathsf{E}[X]^2 + \mathsf{E}[X]$$

Für $X_i:\Omega\to\mathbb{N}_0, i\in\{1,\dots,n\}$ stochastisch unabhängige, diskrete, nichtnegative ZV und $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$G_Z(z) = \prod_{i=1}^n G_{X_i}(z)$$

10.2. Charakteristische Funktion

$$\varphi_X(\omega) = E\left[e^{\imath\omega X}\right], \quad \omega\in\mathbb{R} \qquad \varphi_X = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath\omega x} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$f_X(-x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \varphi(\omega)$

Erwartungswert:

$$\mathsf{E}[X^n] = \frac{1}{\imath^n}\left[\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\varphi_X(\omega)\right]_{\omega=0}$$

Summe von ZV: $Z = \sum_{i=1}^n X_i$

$$\varphi_Z(\omega) = \prod_{i=1}^n \varphi_{X_i}(\omega)$$

10.3. Der zentrale Grenzwertsatz

Definition: Seien $X_i, i\in 1,\dots,n$, stochastisch unabhängige und identisch verteilte reelle Zufallsvariablen und gelte $E[X_i] = \mu < \infty$ und $Var[X_i] = \sigma^2 < \infty$. Dann konvergiert die Verteilung der standardisierten Summe

$$Z_n = \sum_{i=1}^n \frac{(X-\mu)}{\sigma\sqrt{n}}$$

d.h $E[Z_n] = 0$ und $Var[Z_n] = 1$, für $n\to\infty$ gegen die Standartnormalverteilung.
Es gilt also:

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{P}(Z_n\leq z) = \Phi(z)$$

11. Reelle Zufallsfolgen

Eine reelle Zufallsfolge ist ganz einfach eine Folge reeller Zufallsvariablen.

Ensemble
$\mathsf{S}_n : \Omega_n\times\Omega_{n-1}\times\dots\times\Omega_1\to\mathbb{R}$
$(\omega_n,\omega_{n-1},\dots,\omega_1)\mapsto s_n(\omega_n,\omega_{n-1},\dots,\omega_1), \quad n\in\mathbb{N}$
Erklärung: Jede Realisierung von S_n wird erzeugt durch die Menge (das Ensemble) aufeinanderfolgender Realisierungen X_k mit $k\in\{1,\dots,n\}$.

Pfad
$\vec{\mathsf{S}}_n = (\mathsf{S}_n,\mathsf{S}_{n-1},\dots,\mathsf{S}_1):\Omega^{(n)}\to\mathbb{R}^n$
$\vec{\omega}_n\mapsto\vec{s}_n(\vec{\omega}_n) = (s_n(\vec{\omega}_n), s_{n-1}(\vec{\omega}_n),\dots,s_1(\vec{\omega}_n)), \quad n\in\mathbb{N}$
Erklärung: Die Abfolge der Realisierungen von S_1 bis S_n (also der Pfad von S) und somit auch jedes einzelne S_k kann als Ergebnis des Ereignisses $\vec{\omega}_n$ angesehen werden.

11.1. Verteilungen und Momente

Erwartungswert	$\mu_X(n) = E[X_n]$
Varianzfolge	$\sigma_X^2(n) = Var[X_n] = E[X_n^2] - E[X_n]^2$
Autokorrelation	$r_X(k,l) = E[X_k\,X_l]$
Autokovarianz	$c_X(k,l) = Cov[X_k,X_l] = r_X(k,l) - \mu_X(k)\mu_X(l)$

11.2. Random Walk

$n\in\mathbb{N}$ Schritte mit 2 möglichen Bewegungsrichtungen $X\in\{+\delta,-\delta\}$

$\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^n X_i$

$\mathsf{P}(\{X_i = +\delta\}) = p$
$\mathsf{P}(\{X_i = -\delta\}) = 1-p$
symmetrisch $\Leftrightarrow p = \frac{1}{2},\ \mu_\mathsf{S}(n) = 0$

$E[S] = \mu_\mathsf{S}(n) = n(2p-1)\delta \qquad E[X_i] = (2p-1)\delta$
$Var[S] = \sigma_\mathsf{S}^2(n) = 4np(1-p)\delta^2 \qquad Var[X_i] = 4p(1-p)\delta^2$

11.3. Stationarität

Eine Zufallsfolge ist **stationär**, wenn um ein beliebiges k ($k\in\mathbb{N}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.
Im **weiteren Sinne stationär (W.S.S.)**, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i+k)$
$r_X(i_1,i_2) = r_X(i_1+k, i_2+k) = r_X(i_1-i_2)$
(verschiebungsinvariant)

stationär $\Rightarrow$ WSS (aber nicht anders herum!)

11.4. Markow-Ungleichung

$$\mathsf{P}(\{|X|\geq a\})\leq\frac{\mathsf{E}[|X|]}{a}$$

11.5. Tschebyschow-Ungleichung

$$\mathsf{P}(\{|X-\mathsf{E}[X]|\geq a\})\leq\frac{\mathsf{Var}[X]}{a^2}$$

11.6. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Sei $(X_i : i\in\mathbb{N})$ eine Folge reeller, paarweise unkorrelierter Zufallsvariablen mit beschränkter Varianz:
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \mathsf{E}[X_i])\to 0$

Für stochastisch unabhängige und identisch verteilte Folgenelemente mit $E[X_i] = E[X]$ und $Var[X_i] = Var[X] < \infty$ gilt:
$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i)\to\mathsf{E}[X_i]$

12. Markowketten (bedingte Unabhängigkeit: Abschnitt 14)

12.1. Markowketten

12.1.1. Allgemein

Eine Zufallsfolge $(X_n : n \in \mathbb{N})$ heißt Markowkette, falls $\forall\ n_i \in \mathbb{N}$, $i \in 1, \dots k$ mit $n_1 < \dots < n_k$ gilt:
$(X_{n_1}, X_{n_2}, \dots X_{n_{k-2}}) \to X_{n_{k-1}} \to X_{n_k}$
⇒ Die Verteilung eines Folgeelements hängt nur vom direkten Vorgänger ab

$$p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) = p_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}})$$

$$f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}, X_{n_{k-2}}, \dots, X_{n_1}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}}, x_{n_{k-2}}, \dots, x_{n_1}) = f_{X_{n_k} \mid X_{n_{k-1}}}(x_{n_k} | x_{n_{k-1}})$$

12.1.2. Zustandsübergang

Zustandsübergangswahrscheinlichkeit:
$$p_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n | x_{n-1})$$

Verbund-WMF:
$$p_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = p_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} p_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i | x_{i-1})$$

Zustandsübergangsdichte:
$$f_{X_n \mid X_{n-1}}(x_n | x_{n-1})$$

Verbund-WDF:
$$f_{X_1,\dots,X_n}(x_1,\dots,x_n) = f_{X_1}(x_1) \prod_{i=2}^{n} f_{X_i \mid X_{i-1}}(x_i | x_{i-1})$$

Eine Markowkette heißt **homogen**, wenn die Übergangswahrscheinlichkeit unabhängig vom Index ist
$p_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} | x_n) = p_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} | x_n)$
$f_{X_{n+1} \mid X_n}(x_{n+1} | x_n) = f_{X_{n+1+k} \mid X_{n+k}}(x_{n+1} | x_n)$

12.1.3. Chapman-Kologorow Gleichung

2-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:
$p_{X_{n+2} \mid X_n}(x_{n+2} | x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+2} \mid X_{n+1}}(x_{n+2} | \xi) p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi | x_n)$

m+l-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit:
$p_{X_{n+m+l} \mid X_n}(x_{n+m+l} | x_n) = \sum_{\xi \in \mathbb{X}} p_{X_{n+m+l} \mid X_{n+m}}(x_{n+m+l} | x_{n+m}) p_{X_{n+m} \mid X_n}(x_{n+m} | x_n)$

12.1.4. Markowketten im endlichen Zustandsraum

$$\vec{p}_n \triangleq \begin{bmatrix} p_{X_n}(x_1) \\ p_{X_n}(x_2) \\ \vdots \\ p_{X_n}(x_N) \end{bmatrix} \in [0,1]^N \text{ mit } [\vec{p}_n]_i = p_{X_n}(x_i)$$

Übergangsmatrix: $\Pi = \begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \ddots & \\ p_{N1} & & p_{NN} \end{bmatrix} \in [0,1]^{N \times N}$

Übergangswahrscheinlichkeit: $p_{ij} = p_{X_{n+1} \mid X_n}(\xi_i | \xi_j)$
Spaltensumme muss immer 1 ergeben!

$\vec{p}_{n+1} = \Pi \vec{p}_n \quad n \in \mathbb{N}$
$\vec{p}_{n+m} = \Pi^m \vec{p}_n \quad n, m \in \mathbb{N}$

Eine Verteilung heißt **stationär**, wenn gilt:
$$\vec{p}_\infty = \Pi \vec{p}_\infty$$

13. Reelle Zufallsprozesse

13.1. Ensemble und Musterfunktion

- Ein Zufallsprozess kann als **Ensemble** einer nicht abzählbaren Menge von Zufallsvariablen X_t mit $t \in \mathbb{R}$ interpretiert werden.
- Ein Zufallsprozess kann als **Schar von Musterfunktionen** $X_t(\omega) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, mit $X(\omega)$ als deterministische Funktion von t, mit einem gegebenen Ereignis $\omega \in \Omega$ interpretiert werden.

13.2. Verteilungen und Momente

Zeitlich, Kontinuierlich veränderliche Zufallsvariable X_t

Erwartungswertfunktion:
$\mu_X(t) = \mathsf{E}[X_t]$
Autokorrelationsfunktion:
$r_X(s,t) = \mathsf{E}[X_s X_t]$
Autokovarianzfunktion:
$c_X(s,t) = \mathsf{Cov}(X_s, X_t) = r_X(s,t) - \mu_X(s)\mu_X(t)$

Hinweis: Bei Integration über r_X immer darauf achten, dass $s - t > 0$. Bei Bedarf Integral aufteilen und Grenzen anpassen.

13.3. Stationarität

Ein Zufallsprozess ist **stationär**, wenn um ein beliebiges s ($s \in \mathbb{R}$) zueinander verschobene Zufallsvektoren die selbe Verteilung besitzen.

$$F_{X_{t_1},\dots,X_{t_n}}(x_1, \dots x_n) = F_{X_{t_1+s},\dots,X_{t_n+s}}(x_1, \dots x_n)$$

Im **weiteren Sinne stationär (WSS)**, wenn:

$\mu_X(i) = \mu_X(i+k) = \mu_X$
$r_X(i_1, i_2) = r_X(i_1 + k, i_2 + k) = r_X(i_1 - i_2)$

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathsf{E}[X_s X_t] = \mathsf{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(s-t) = r_X(\tau)$
Im **weiteren Sinne zyklisch stationär**, wenn:

$$\mu_X(t) = \mu_X(t+T) \quad \wedge \quad r_X(t_1, t_2) = r_X(t_1 + T, t_2 + T)$$

stationär ⇒ WSS ⇒ im weiteren Sinne zyklisch stationär (aber nicht anders herum!)

13.4. Mehrere Zufallsvariablen auf dem selben Wahrscheinlichkeitsraum

Kreuzkorrelationsfunktion:
$r_{X,Y}(s,t) = \mathsf{E}[X_s Y_t] = r_{Y,X}(t,s)$
Kreuzkovarianzfunktion:
$c_{X,Y}(s,t) = r_{X,Y}(s,t) - \mu_X(s)\mu_Y(t) = c_{Y,X}(t,s)$

13.4.1. Gemeinsame Stationarität

Zwei Zufallsprozesse auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum sind **gemeinsam stationär**, wenn die einzelnen ZPs jeweils selbst stationär sind und ihre gemeinsamen Verteilungen verschiebungsinvariant sind.

13.4.2. Gemeinsam im weiteren Sinne stationär

Voraussetzung: X_t und Y_t sind gemeinsam WSS wenn,

X_t und Y_t einzelnd WSS und
$r_{X,Y}(t_1, t_2) = r_{X,Y}(t_1 + s, t_2 + s)$
gemeinsam stationär ⇒ gemeinsam WSS (aber nicht umgekehrt!)

Daraus folgt mit $s = t + \tau$
$r_X(s,t) = \mathsf{E}[X_{t+\tau} X_t] = r_X(\tau) = r_X(-\tau) \qquad r_X(\tau) \le r_X(0)$
$r_{X,Y}(\tau) = \mathsf{E}[X_{t+\tau} Y_t] = \mathsf{E}[Y_t X_{t+\tau}] = r_{Y,X}(-\tau)$

13.4.3. Stochastische Unkorreliertheit

$c_{X,Y}(s,t) = 0 \Leftrightarrow r_{X,Y}(s,t) = \mu(s)\mu(t), \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.4.4. Orthogonalität

$r_{X,Y}(s,t) = 0, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$

13.5. Wiener-Prozess ($\sigma > 0$)

Als Basis benutzen wir den Random Walk. Durch Multiplikation mit einer Heaviside-Funktion wird der Random Walk zeitkontinuierlich:
$$\mathsf{S}_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \quad \Rightarrow \quad \mathsf{S}_t = \sum_{i=1}^{n} X_i\, u(t - iT) \quad T > 0$$

Für n → ∞ und T → 0, mit Schrittweite $\delta = \sqrt{\sigma^2 T}$ folgt der Wiener Prozess: W_t

$$f_{W_t}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp\left(-\frac{w^2}{2\sigma^2 t}\right)$$

Eigenschaften
- Kein Zählprozess!
- $\mathsf{P}(\{W_0 = 0\}) = 1$
- hat unabhängige Inkremente → $r_{xy}(s,t) = 0$
- $W_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 t), \forall 0 \le t$
- $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2(t-s)), \forall 0 \le s \le t$
- $W_t(\omega)$ ist eine stetige Musterfunktion mit Wahrscheinlichkeit 1

Erwartungswertfunktion.	$\mu_W(t) = 0$
Varianz	$\sigma_W^2(t) = \sigma^2 t$
Autokorrelationsfunktion	$r_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$
Autokovarianzfunktion	$c_W(s,t) = \sigma^2 min\{s,t\}$

13.6. Poisson-Prozess ($N_t : t \in \mathbb{R}_+$)

Der Poisson-Prozess ist ein Zählprozess, bei dem der **Zeitpunkt** der Sprünge durch ZV modelliert wird, nicht die Amplitude.
$$N_t = \sum_{i=1}^{\infty} u(t - T_i), \quad T_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$$
X_j ist exponentiell verteilt, T_i ist Gamma-verteilt

$f_{T_i}(t) = \frac{\lambda^i}{(i-1)!} t^{i-1} e^{-\lambda t}, \quad t \ge 0$
$\mathsf{P}(\{N_t = n\}) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-(\lambda t)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, t \in \mathbb{R}_+$

Eigenschaften
- ist ein Zählprozess ($\mathbb{N}_t \in \mathbb{N}_0$, monoton steigend und stetig)
- hat unabhängige Inkremente
- $N_t - N_s$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $(\lambda(t-s)$ für alle $0 \le s \le t$
- hat eine Rate λ
- Zeitintervalle zwischen den Inkremetierungen sind unabhängig und identisch exponentialverteilt mit Parameter $\lambda \hat{=}$ **gedächtnislos**

Erwartungswertfunktion	$\mu_N(t) = \lambda t$
Varianz	$\sigma_N^2(t) = \lambda t$
Autokorrelationsfunktion	$r_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\} + \lambda^2 st$
Autokovarianzfunktion	$c_N(s,t) = \lambda \min\{s,t\}$

14. Bedingte Unabhängigkeit

14.1. Bedingte Unabhängigkeit

A und C heißen bedingt unabhängig gegeben B, wenn gilt:
$\mathsf{P}(A \cap C | B) = \mathsf{P}(A|B)\,\mathsf{P}(C|B)$ bzw.
$\mathsf{P}(A | B \cap C) = \mathsf{P}(A|B)$

Dann gilt:
$p_{Z \mid Y,X}(z | y, x) = p_{Z \mid Y}(z|y)$
$f_{Z \mid Y,X}(z | y, x) = f_{Z \mid Y}(z|y)$
X, Z sind bedingt unabhängig gegeben Y, kurz: $X \to Y \to Z$

15. Zufallsprozesse(ZP) und lineare Systeme

15.1. Allgemeines

Im **Zeitbereich**:
$\mathrm{w}(t) = (h * v)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) v(\tau)\, \mathrm{d}\tau$
Erwartungswert: $\mu_{\mathrm{W}} = (\mu_{\mathrm{V}} * h)(t)$ (nicht WSS)

Im **Frequenzbereich:**
$W(f) = H(f)V(f)$

$$V \to \boxed{H(f)} \to W$$

W_t	Ausgang
V_t	Eingang
$h(s,t)$	Impulsantwort

Falls Zufallsprozesse **WSS**:
Erwartungswert: $\mu_{\mathrm{W}} = \mu_{\mathrm{V}} \int_{-\infty}^{\infty} h(t)\, \mathrm{d}t$
Kreuzkorrelationsfkt: $r_{\mathrm{W,V}}(\tau) = \mathsf{E}[\mathrm{W}_s \mathrm{V}_t] = (h * r_{\mathrm{V}})(\tau)$
Autokorrelationsfkt: $r_{\mathrm{W}}(\tau) = \mathsf{E}[\mathrm{W}_s \mathrm{W}_t] = (\tilde{h} * h * r_{\mathrm{V}})(\tau)$
mit $\tilde{h}(\tau) = h(-\tau)$

15.2. Leistungsdichtespektrum (LDS)

Nicht WSS ⇒ Kein LDS

$$S_{\mathrm{V}}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{\mathrm{V}}(\tau) e^{-j2\pi f \tau}\, \mathrm{d}\tau$$

$r_{\mathrm{V}}(\tau) \multimap S_{\mathrm{V}}(f)$
$r_{\mathrm{V,W}}(\tau) \multimap S_{\mathrm{V,W}}(f)$
$r_{V,W}(-\tau) \multimap S_{V,W}^*(f)$

Auf Frequenz bezogene Signalleistung für infitisimales Frequenzband.

$S_{\mathrm{Y}}(f) = |H(f)|^2 S_{\mathrm{X}}(f)$
$S_{\mathrm{Y,X}}(f) = H(f) S_{\mathrm{X}}(f)$
$S_{\mathrm{X,Y}}(f) = H^*(f) S_{\mathrm{X}}(f)$

$$X \to \boxed{H_1(f)} \cdots \boxed{H_n(f)} \to Y$$
$$A \to \boxed{G_1(f)} \cdots \boxed{G_m(f)} \to B$$

$S_{Y,X}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f)) S_X(f)$
$S_{X,Y}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i^*(f)) S_X(f)$
$S_{Y,\mathrm{B}}(f) = (\prod_{i=1}^{n} H_i(f))(\prod_{j=1}^{m} G_j(f))^* S_{X,\mathrm{A}}(f)$

$S_X(f) = S_X^*(f) \quad \& \quad S_{X,Y}(f) = S_{Y,X}^*(f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$
$S_X(f) = S_X(-f), \quad \forall f \in \mathbb{R}$
$\int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)\, \mathrm{d}f = r_X(0) = \mathsf{Var}[X] + \mathsf{E}[X]^2 = \sigma_X^2 + \mu_X^2$
$S_X(f) \ge 0, \quad \forall f \in \mathbb{R}$

Momenterzeugende Funktion, Multivariate Normalverteilung, Multivariate reelle Zufallsvariablen und Komplexe Zufallsvariablen waren im WS 2015/16 nicht prüfungsrelevant und werden hier deshalb nicht behandelt.
P.S. Stochastik ♡ dich.