

Применение теории информации

Кевролетин В.В.

24 декабря 2011 г.

Задание 4.1

Условие

В алфавите исходного и зашифрованного сообщения имеется 6 гласных и 6 согласных букв. Все согласные передаются без искажения. Гласная в 50% случаев передается без искажений, а в 50% равновероятно появление любой гласной буквы. Сколько информации содержится в полученном символе о переданном?

Решение

Количество пришедшей информации естественно измерять величиной исчезнувшей неопределенности [Р.Л. Стратович "Теория информации" стр. 12]. Посчитаем энтропию до и после передачи буквы. До передачи, т.к. алфавит состоит из 12 букв и все буквы считаем равновероятными:

$$H_1 = \log_2(12)$$

После передачи имеется 2 варианта:

А - символ передан без искажения (если передана гласная буква, или согласная, но без искажения)

$$P(A) = 0.5 + 0.5 * 0.5$$

В - символ передан с искажением (согласная с искажением)

$$P(B) = 0.5 + 0.5$$

Вычислим энтропию:

$$H_2 = -(0.75 * \ln(0.75) + 0.25 * \ln(0.25))$$

Собираем всё вместе и получаем количество информации:

$$\begin{aligned} & \log_2(12) - (0.75 * \ln(0.75) + 0.25 * \ln(0.25)) = \\ & = 3.58496250072116 - 0.811278124459133 = 2.77368437626202 \end{aligned}$$

Задание4.2

Условие

Используя понятие энтропии и информации по Шеннону, оценить минимальное число вопросов, которое необходимо задать, чтобы гарантированно определить задуманное собеседником число $\leq N$, если он дает только двоичные ответы на вопросы (да/нет).

Решение

Минимальное число вопросов, в нашем случае, равно количеству информации по Шеннону (т.е. минимальное кол-во бит, необходимое для кодирования сообщения). По определению получаем:

$$I = \log_2(N)$$

Задание4.3

Условие

Имеется N монет одного достоинства. Одна из них, фальшивая, либо легче, либо тяжелее остальных. Используя понятие энтропии и информации по Шеннону, оценить минимальное число взвешиваний на чашечных весах без гирь, необходимых для гарантированного нахождения фальшивой монеты и определения, является ли она легче или тяжелее остальных.

Решение

Имеем 2 неизвестных факта: "одна из N монет фальшивая" и "фальшивая монета легче или тяжелее". Общее количество информации будет равно сумме информации для 1го и 2го неизвестного факта (т.к. они независимы). Для определения пары монет, отличающихся по весу необходимо $\log_2(n)$ взвешиваний. Еще одно взвешивание необходимо для определения какая именно из монет фальшивая и тяжелее или легче она остальных.

Задание4.4

Условие

Какая информация будет получена в результате проведения зачета, если студент получает зачет с вероятностью 0.9, если он готовился, и 0.3, если нет, и известно, что 90% студентов готовились к зачету.

Решение

Получаем 4 события с соответствующими вероятностями их возникновения:

Готовился и получил - $0.9 * 0.9$

Готовился и не получил - $0.9 * 0.1$

Не готовился и получил - $0.1 * 0.3$

Не готовился и не получил - $0.1 * 0.7$

$$H = -(0.81*\log_2(0.81)+0.03*\log_2(0.03)+0.09*\log_2(0.09)+0.07*\log_2(0.07)) = 0.979220717742703$$