λ-исчисление

Кевролетин В.В. 236гр.

10 марта 2011 г.

Задание4

Условие

Показать, что ромбовидное сво-во не выполняется, если $\to$ заменить на $\twoheadrightarrow$.

Решение

Возьмем терм $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y)$ и убедимся, проделав все возможные преобразования, что св-во не выполняется:

1. $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta (\lambda x.xx)y \longrightarrow_\beta yy$
2. $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta ((\lambda z.z)y)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta ((\lambda z.z)y)y \longrightarrow_\beta yy$
3. $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta ((\lambda z.z)y)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta y((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta yy$

Задание5

Условие

Доказать, что добавление аксиомы $\lambda xy.x = \lambda xy.y$, получим $\forall P, Q : P = Q$

Решение

Подставим в качестве аргументов PQ в праую и левую абстракцию:
$(\lambda xy.x)PQ \longrightarrow_\beta P$,
$(\lambda xy.y)PQ \longrightarrow_\beta Q$,
но $(\lambda xy.x) = (\lambda xy.y)$, так что в силу свойств отношения = имеем: P=Q, а в силу произвольности выбора P и Q, получаем равенство для $\forall PQ$

Задание6

Условие

Показать, что операции умножения и возведения в степень выглядят следующим образом:
$mult \equiv \lambda mnfx.m(nf)x$
$expt \equiv \lambda mnfx.mnfx$

Решение

1. $(mult\,m\,n) \longrightarrow \lambda fx.m(nf)x \longrightarrow \lambda fx.\underbrace{nf(nf(\ldots \overbrace{nf(nfx}^{=\text{n+n}})}_{\text{n times}}\ldots) = \lambda fx.\underbrace{f(f(\ldots f(fx}_{n\cdot m\ times})\ldots) \equiv n \cdot m$
2. $(expt\ n\ m) \equiv (\lambda mnfx.mnfx) \to (\lambda mnfx.m^n fx) \equiv m^n$

Задание7

Условие

Показать: $(\lambda mn.m\,suc\,n)mn \longrightarrow m + n$

Решение

$(\lambda mn.m\,suc\,n)mn \longrightarrow m\,suc\,n \longrightarrow \underbrace{suc(suc(suc\ldots suc(}_{m\ times}n)\ldots) \longrightarrow \underbrace{suc(suc\ldots suc(}_{m-1\ times}n{+}1)\ldots) \longrightarrow n + m$

Задание8

Условие

Показать, чт:о

1. $head(cons\ M\ N) \longrightarrow M$
2. $tail(cons\ M\ N) \longrightarrow N$

Решение

1. $head(cons\,M\,N) \longrightarrow head(pair\,false\,(pair\,M\,N)) \longrightarrow (first\,(second\,(pair\,false\,(pair\,M\,N)))) \longrightarrow$
$(first\ (second\ (pair\ false\ (pair\ M\ N)))) \longrightarrow (first\ (pair\ M\ N)) \longrightarrow M$
2. $tail(cons\,M\,N) \longrightarrow tail(pair\,false\,(pair\,M\,N)) \longrightarrow (second\,(second\,(pair\,false\,(pair\,M\,N)))) \longrightarrow$
$(second\ (second\ (pair\ false\ (pair\ M\ N)))) \longrightarrow (second\ (pair\ M\ N)) \longrightarrow$
M

Задание9

Условие

Представить натуральные числа при помощи списков. Ввести несколько операций.

Решение

$0 - false \equiv \lambda z.z$
$1 - (pair\ true\ false)$
$\ldots$
$n - (pair\ true\ n{-}1)$
$iszero \equiv \lambda z.(not\ (first\ z))$

$suc \equiv \lambda z.(pair\ true\ z)$
$sum \equiv Y(\lambda\ gmn.(if\ (fst\ n)\ (pair\ (fst\ n)\ (g\ (snd\ n)\ m))\ m))$

Задание10

Условие

Функция Акермана имеет следующее рекурсивное определение:
$ack\ 0\ n = n + 1$
$ack\ (m\ +\ 1)\ 0 = ack\ m\ 1$
$ack\ (m\ +\ 1)\ (m\ +\ 1) = ack\ m(ack\ (m\ +\ 1)\ n)$
Показать, что функция Акермана в терминах λ исчисления выглядит следующим образом: $ack \equiv \lambda m.m(\lambda fn.nf(f\ 1))suc$

Решение

1. $ack\ 0\ n \equiv \lambda m.m(\lambda fn.nf(f\ 1))suc\ 0\ n \to 0(\lambda fn.nf(f\ 1))suc\ n \to sucn \equiv (n\ +\ 1)$
2. $ack\,(m+1)\,n \to (\lambda m.m(\lambda fn.nf(f\,1))suc)\,(m+1)\,n \to (m+1)(\lambda fn.nf(f\,1))suc\,n \to (\lambda fn.nf(f\,1))(m\,\lambda fn.nf(f\,1)suc)n = (\lambda fn.nf(f\,1))(ack\,m)n \to n(ack\,m)(ack\,m\,1)$
3. $ack(m+1)\ 0 \to 0ack\ \ (m+1)(ack\ m\ 1) \to ack\ m\ 1$
4. $ack(m{+}1)(n{+}1) \to n{+}1\ (ack\,m)(ack\,m\,n) \to ack\,m(n(ack\,m)(ack\,m\,1))) = ack(ack(m+1)n)$