λ-исчисление

Кевролетин В.В. 236гр.

1 июня 2011 г.

Задание4

Условие

Показать, что ромбовидное сво-во не выполняется, если $\rightarrow$ заменить на $\twoheadrightarrow$.

Решение

Возьмем терм $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y)$ и убедимся, проделав все возможные преобразования, что св-во не выполняется:

1. $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta (\lambda x.xx)y \longrightarrow_\beta yy$
2. $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta ((\lambda z.z)y)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta ((\lambda z.z)y)y \longrightarrow_\beta yy$
3. $(\lambda x.xx)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta ((\lambda z.z)y)((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta y((\lambda z.z)y) \longrightarrow_\beta yy$

Задание5

Условие

Доказать, что добавление аксиомы $\lambda xy.x = \lambda xy.y$, получим $\forall P, Q : P = Q$

Решение

Подставим в качестве аргументов PQ в праую и левую абстракцию:
$(\lambda xy.x)PQ \longrightarrow_\beta P$,
$(\lambda xy.y)PQ \longrightarrow_\beta Q$,
но $(\lambda xy.x) = (\lambda xy.y)$, так что в силу свойств отношения = имеем: P=Q, а в силу произвольности выбора P и Q, получаем равенство для $\forall PQ$

Задание6

Условие

Показать, что операция возведения в степень выглядят следующим образом:
$expt \equiv \lambda mnfx.nmfx$

Решение

$(expt\, m\, n) \equiv (\lambda mnfx.nmfx)\, m\, n \to (\lambda fx.n(f^m)x) \to (\lambda fx.\underbrace{(f^m(f^m(...(f^m}_{n\ times}x)...))) \equiv$

$(\lambda fx.f^{m^n}x) \equiv m^n$

Задание7

Условие

Показать, чт:о

1. $head(cons\ M\ N) \longrightarrow M$
2. $tail(cons\ M\ N) \longrightarrow N$

Решение

1. $head(cons\, M\, N) \longrightarrow head(pair\, false\, (pair\, M\, N)) \longrightarrow (first\, (second\, (pair\, false\, (pair\, M\, N)))) \longrightarrow$ $(first\ (second\ (pair\ false\ (pair\ M\ N)))) \longrightarrow (first\ (pair\ M\ N)) \longrightarrow M$
2. $tail(cons\, M\, N) \longrightarrow tail(pair\, false\, (pair\, M\, N)) \longrightarrow (second\, (second\, (pair\, false\, (pair\, M\, N)))) \longrightarrow$ $(second\ (second\ (pair\ false\ (pair\ M\ N)))) \longrightarrow (second\ (pair\ M\ N)) \longrightarrow$ M

Задание8

Условие

Представить натуральные числа при помощи списков. Ввести несколько операций.

Решение

$0 = nil$
$1 = cons\ nil\ nil$
$n + 1 = cons\ n\ nil$
$n + m = \underbrace{cons(cons(}_{m\ times}...cons(n\ nil)...)nil)$
$n - 1 = tail\ n$
$n - m = \underbrace{tail(tail(}_{m\ times}...tail\ n)...)$

Задание9

Условие

Функция Акермана имеет следующее рекурсивное определение:
$ack\ 0\ n = n + 1$
$ack\ (m\ +\ 1)\ 0 = ack\ m\ 1$
$ack\ (m\ +\ 1)\ (m\ +\ 1) = ack\ m(ack\ (m\ +\ 1)\ n)$
Показать, что функция Акермана в терминах λ исчисления выглядит следующим образом: $ack \equiv \lambda m.m(\lambda fn.nf(f\ 1))suc$

Решение

1. $ack\ \ 0\ \ n \ \equiv\ (\lambda m.m(\lambda fn.nf(f\ \ 1))suc)\ \ 0\ \ n\ \rightarrow\ 0(\lambda fn.nf(f\ \ 1))suc\ \ n\ \rightarrow$ $suc\ n \equiv (n\ +\ 1)$

2. $ack\ (m+1)\ n \rightarrow (\lambda m.m(\lambda fn.nf(f\ 1))suc)\ (m+1)\ n \rightarrow (m+1)(\lambda fn.nf(f\ 1))suc\,n \rightarrow$ $(\lambda fn.nf(f\ 1))(m\ \lambda fn.nf(f\ 1)suc)n = (\lambda fn.nf(f\ 1))(ack\ m)n \rightarrow n(ack\ m)(ack\ m\ 1)$

3. $ack(m+1)\ 0 \rightarrow 0\ (ack\ \ m)(ack\ \ m\ \ 1) \rightarrow ack\ \ m\ \ 1$

4. $ack(m{+}1)(n{+}1) \rightarrow n{+}1\ (ack\ m)(ack\ m\ n) \rightarrow ack\ m(n(ack\ m)(ack\ m\ 1))) =$ $ack\ \ m\ \ (ack(m+1)n)$