$$\frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_n} \tag{1}$$

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)/2}}{(q;q)_n} \tag{2}$$

$$\frac{(q^2;q^2)_\infty}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{(n^2+n)/2} \tag{3}$$

$$(q;q^1)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(n^2+n)/2}}{(q;q)_n} \tag{4}$$

$$\frac{(q^2;q^4)_\infty}{(q;q^4)_\infty (q^3;q^4)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} \tag{5}$$

$$(q;q^2)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n^2}}{(q^2;q^2)_n} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(q;q^{20})_\infty (q^3;q^{20})_\infty (q^4;q^{20})_\infty (q^5;q^{20})_\infty (q^7;q^{20})_\infty (q^9;q^{20})_\infty (q^{11};q^{20})_\infty (q^{13};q^{20})_\infty (q^{15};q^{20})_\infty (q^{16};q^{20})_\infty (q^{17};q^{20})_\infty (q^{19};q^{20})_\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q;q)_{2n}} \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(q;q^{20})_\infty (q^2;q^{20})_\infty (q^5;q^{20})_\infty (q^6;q^{20})_\infty (q^8;q^{20})_\infty (q^9;q^{20})_\infty (q^{11};q^{20})_\infty (q^{12};q^{20})_\infty (q^{14};q^{20})_\infty (q^{15};q^{20})_\infty (q^{18};q^{20})_\infty (q^{19};q^{20})_\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q;q)_{2n+1}} \end{aligned} \tag{8}$$

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+n}}{(q;q)_{2n+1}} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(q;q^{16})_\infty (q^4;q^{16})_\infty (q^6;q^{16})_\infty (q^7;q^{16})_\infty (q^9;q^{16})_\infty (q^{10};q^{16})_\infty (q^{12};q^{16})_\infty (q^{15};q^{16})_\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q;q)_{2n+1}} \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(q;q^{20})_\infty (q^3;q^{20})_\infty (q^5;q^{20})_\infty (q^7;q^{20})_\infty (q^8;q^{20})_\infty (q^9;q^{20})_\infty (q^{11};q^{20})_\infty (q^{12};q^{20})_\infty (q^{13};q^{20})_\infty (q^{15};q^{20})_\infty (q^{17};q^{20})_\infty (q^{19};q^{20})_\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}}{(q;q)_{2n+1}} \end{aligned} \tag{11}$$

$$\frac{1}{(q;q^4)_\infty (q^2;q^4)_\infty (q^3;q^4)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)/2}(-q;q)_n}{(q;q)_n} \tag{12}$$

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)/2}(-q;q)_n}{(q^2;q^2)_n} \tag{13}$$

$$(q;q^1)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{(n^2+n)/2}(-q;q)_n}{(q^2;q^2)_n} \tag{14}$$

$$\frac{1}{(q;q^5)_\infty (q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q;q)_n}{(q^2;q^2)_n} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(q;q^{14})_\infty (q^2;q^{14})_\infty (q^3;q^{14})_\infty (q^4;q^{14})_\infty (q^5;q^{14})_\infty (q^7;q^{14})_\infty (q^9;q^{14})_\infty (q^{10};q^{14})_\infty (q^{11};q^{14})_\infty (q^{12};q^{14})_\infty (q^{13};q^{14})_\infty} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n}} \end{aligned} \tag{16}$$

$$\frac{1}{(q;q^{14})_\infty(q^2;q^{14})_\infty(q^3;q^{14})_\infty^2(q^4;q^{14})_\infty(q^5;q^{14})_\infty(q^7;q^{14})_\infty(q^9;q^{14})_\infty(q^{10};q^{14})_\infty(q^{11};q^{14})_\infty^2(q^{12};q^{14})_\infty(q^{13};q^{14})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n^2+n)/2}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n}} \tag{17}$$

$$\frac{1}{(q;q^{10})_\infty(q^3;q^{10})_\infty(q^4;q^{10})_\infty(q^5;q^{10})_\infty(q^6;q^{10})_\infty(q^7;q^{10})_\infty(q^9;q^{10})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(3n^2+3n)/2}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{18}$$

$$\frac{1}{(q;q^{14})_\infty(q^2;q^{14})_\infty(q^3;q^{14})_\infty(q^5;q^{14})_\infty^2(q^6;q^{14})_\infty(q^7;q^{14})_\infty(q^8;q^{14})_\infty(q^9;q^{14})_\infty^2(q^{11};q^{14})_\infty(q^{12};q^{14})_\infty(q^{13};q^{14})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(n^2+3n)/2}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{19}$$

$$\frac{1}{(q;q^{10})_\infty(q^2;q^{10})_\infty(q^3;q^{10})_\infty(q^5;q^{10})_\infty(q^7;q^{10})_\infty(q^8;q^{10})_\infty(q^9;q^{10})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{(3n^2+n)/2}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{20}$$

$$\frac{1}{(q;q^{14})_\infty(q^2;q^{14})_\infty(q^3;q^{14})_\infty(q^5;q^{14})_\infty(q^6;q^{14})_\infty(q^7;q^{14})_\infty(q^8;q^{14})_\infty(q^9;q^{14})_\infty(q^{11};q^{14})_\infty(q^{12};q^{14})_\infty(q^{13};q^{14})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{21}$$

$$\frac{1}{(q;q^{14})_\infty(q^3;q^{14})_\infty(q^4;q^{14})_\infty(q^5;q^{14})_\infty(q^6;q^{14})_\infty(q^7;q^{14})_\infty(q^8;q^{14})_\infty(q^9;q^{14})_\infty(q^{10};q^{14})_\infty(q^{11};q^{14})_\infty(q^{13};q^{14})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}(-q;q)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{22}$$

$$\frac{1}{(q;q^8)_\infty(q^4;q^8)_\infty(q^7;q^8)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(q^2;q^2)_n} \tag{23}$$

$$\frac{(q^6;q^{12})_\infty}{(q;q^{12})_\infty(q^2;q^{12})_\infty(q^3;q^{12})_\infty(q^4;q^{12})_\infty(q^5;q^{12})_\infty(q^7;q^{12})_\infty(q^8;q^{12})_\infty(q^9;q^{12})_\infty(q^{10};q^{12})_\infty(q^{11};q^{12})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}(-q;q^2)_n}{(q;q)_{2n}} \tag{24}$$

$$\frac{1}{(q;q^4)_\infty(q^2;q^4)_\infty(q^3;q^4)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}(-q;q^2)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{25}$$

$$\frac{1}{(q;q^{12})_\infty(q^3;q^{12})_\infty(q^4;q^{12})_\infty(q^5;q^{12})_\infty(q^6;q^{12})_\infty(q^7;q^{12})_\infty(q^8;q^{12})_\infty(q^9;q^{12})_\infty(q^{11};q^{12})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+2n}(-q;q^2)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{26}$$

$$\frac{1}{(q;q^{12})_\infty(q^2;q^{12})_\infty(q^4;q^{12})_\infty(q^5;q^{12})_\infty(q^6;q^{12})_\infty(q^7;q^{12})_\infty(q^8;q^{12})_\infty(q^{10};q^{12})_\infty(q^{11};q^{12})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}(-q^2;q^2)_n}{(q;q)_{2n+1}} \tag{27}$$

$$\frac{1}{(q;q^5)_\infty(q^4;q^5)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}(-q;q)_{n+1}}{(q^2;q^2)_n} \tag{28}$$

$$\frac{1}{(q;q^8)_\infty(q^5;q^8)_\infty(q^6;q^8)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}(-q;q^2)_{n+1}}{(q^2;q^2)_n} \tag{29}$$

$$\frac{(q^{10};q^{20})_\infty}{(q;q^{20})_\infty(q^5;q^{20})_\infty(q^8;q^{20})_\infty(q^9;q^{20})_\infty(q^{11};q^{20})_\infty(q^{12};q^{20})_\infty(q^{15};q^{20})_\infty(q^{19};q^{20})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{3n^2+2n}(-q;q^2)_{n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \tag{30}$$

$$\frac{(q^2;q^{12})_\infty}{(q;q^{12})_\infty(q^3;q^{12})_\infty(q^7;q^{12})_\infty(q^9;q^{12})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(3n^2+3n)/2}(-q;q^3)_{n+1}}{(q^3;q^3)_n} \tag{31}$$

$$\frac{1}{(q;q^4)_\infty(q^2;q^4)_\infty(q^3;q^4)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(n^2+n)/2}(-q^2;q)_{n+1}}{(q;q)_n} \tag{32}$$

$$\frac{1}{(q;q^{20})_\infty(q^3;q^{20})_\infty(q^4;q^{20})_\infty(q^5;q^{20})_\infty(q^7;q^{20})_\infty(q^9;q^{20})_\infty(q^{11};q^{20})_\infty(q^{13};q^{20})_\infty(q^{15};q^{20})_\infty(q^{16};q^{20})_\infty(q^{17};q^{20})_\infty(q^{19};q^{20})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}(-q;q)_{2n}}{(q^2;q^2)_{2n}} \tag{33}$$

$$\frac{1}{(q;q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+n}(-q;q)_{2n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \tag{34}$$

$$\frac{1}{(q;q^{16})_\infty(q^4;q^{16})_\infty(q^6;q^{16})_\infty(q^7;q^{16})_\infty(q^9;q^{16})_\infty(q^{10};q^{16})_\infty(q^{12};q^{16})_\infty(q^{15};q^{16})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}(-q;q)_{2n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \tag{35}$$

$$\frac{1}{(q;q^{20})_\infty(q^2;q^{20})_\infty(q^5;q^{20})_\infty(q^6;q^{20})_\infty(q^8;q^{20})_\infty(q^9;q^{20})_\infty(q^{11};q^{20})_\infty(q^{12};q^{20})_\infty(q^{14};q^{20})_\infty(q^{15};q^{20})_\infty(q^{18};q^{20})_\infty(q^{19};q^{20})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}(-q;q)_{2n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \tag{36}$$

$$\frac{1}{(q;q^{20})_\infty(q^3;q^{20})_\infty(q^5;q^{20})_\infty(q^7;q^{20})_\infty(q^8;q^{20})_\infty(q^9;q^{20})_\infty(q^{11};q^{20})_\infty(q^{12};q^{20})_\infty(q^{13};q^{20})_\infty(q^{15};q^{20})_\infty(q^{17};q^{20})_\infty(q^{19};q^{20})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+2n}(-q;q)_{2n+1}}{(q^2;q^2)_{2n+1}} \tag{37}$$

$$\frac{(q^2;q^{12})_\infty(q^{10};q^{12})_\infty}{(q;q^{12})_\infty(q^3;q^{12})_\infty^2(q^5;q^{12})_\infty(q^7;q^{12})_\infty(q^9;q^{12})_\infty^2(q^{11};q^{12})_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{(3n^2+3n)/2}(-q;q)_{3n+1}}{(q^3;q^3)_{2n+1}} \tag{38}$$