

N° Ordre : 2755

**THESE**  
présentée  
**DEVANT L'UNIVERSITE DE RENNES 1**  
pour obtenir  
le grade de : **DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE RENNES 1**  
**Mention :** Traitement du Signal et Télécommunications  
  
par  
**Sébastien RONDINEAU**

**Equipe d'accueil :** UMR CNRS 6164, Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes,  
Groupe Antennes et Hyperfréquences, Campus de Beaulieu, Rennes, France  
**Ecole Doctorale :** Matisse  
**Composante Universitaire :** Structure et Propriétés de la Matière

Titre de la thèse :

***MODELISATION DE LENTILLES SPHERIQUES A GRADIENT  
D'INDICE ET SOURCES CONFORMES ASSOCIEES***

soutenue le vendredi 13 Décembre 2002 devant la Commission d'Examen

**COMPOSITION DU JURY**

|                           |                                |                                      |
|---------------------------|--------------------------------|--------------------------------------|
| <b>M. A. NOSICH</b>       | Professeur, <i>rapporiteur</i> | IRE-NASU, Kharkov                    |
| <b>M. G. VECCHI</b>       | Professeur, <i>rapporiteur</i> | Politecnico di Torino, Turin         |
| <b>Mme. A. SKRIVERVIK</b> | Professeur                     | LEMA, EPFL, Lausanne                 |
| <b>M. G. CAILLE</b>       | Ingénieur                      | Alcatel Space Industries, Toulouse   |
| <b>M. K. MADHJOUBI</b>    | Professeur                     | IETR, Université de Rennes 1, Rennes |
| <b>M. M. HIMDI</b>        | Maître de Conférences HDR      | IETR, Université de Rennes 1, Rennes |



---

*Ce travail de thèse a été effectué au sein de l’Institut d’Electronique et de Télécommunications de Rennes – UMR CNRS 6164, groupe Antennes et Hyperfréquences, de l’Université de Rennes 1.*

*J’adresse mes premiers remerciements à mon directeur de thèse, **Monsieur Mohamed Himdi**, qui, par son esprit critique et son sens pratique, m’a permis de ne pas négliger l’aspect manipulation et technologique malgré mon intérêt pour la théorie. Je tiens également à lui dire toute ma sincère reconnaissance pour la disponibilité, la confiance et le soutien inconditionnel qu’il m’a accordés pendant les bons comme les plus difficiles moments, qui ont jalonné l’ensemble de ces trois années de thèse.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement **Monsieur le Professeur Alexander Nosich**, qui, par ses précieux et nombreux conseils, sa grande expérience dans les domaines de l’electromagnétisme théorique et de l’analyse numérique, m’a fait bénéficier de ses connaissances et n’a jamais cessé de m’encouragé tout au long de ce travail.*

*Que **Messieurs les Professeurs Alexander Nosich et Giuseppe Vecchi** trouvent ici ma reconnaissance pour avoir accepté de juger ce travail et d’en être les rapporteurs scientifiques.*

*Je remercie **Madame le Professeur Anja Skrivervik**, **Monsieur Gérard Caille** et **Monsieur le Professeur Kouroch Madhjoubi** de s’être intéressés à mon travail et pour leur contribution au jury de cette thèse.*

*Je tiens à remercier très chaleureusement **Madame Lemoine** et **Monsieur le Professeur Daniel Thouroude**. Leur soutien et leur aide systématiques m’ont permis de surmonter l’ensemble des difficultés rencontrés pendant ces trois années au sein de l’Institut.*

*Mes remerciements s’adressent aussi à **Monsieur Jacques Sorieux** pour la très grande qualité technique de l’ensemble de ses réalisations sans lesquelles aucune validation n’aurait pu être effectuée.*

*Ces remerciements vont également à l’ensemble des membres de l’Institut. En particulier, mon collègue de bureau et compagnon de galères, Seb, qui a du mérite à m’avoir supporté, mon compagnon de Salsa et de virées nocturnes, Steph, le petit adopté de l’IETR, Manu, Madame FDC, je veux dire Karen, les deux anciens, Gilloux et Olivier, mes deux collègues de TP, Mamselle Audrey, avec ses blagues à six sous, et M’dame Sophie, Sylvain, dit le P’tit Nounours, Eric et sa bonne humeur, Joëlle, Yoann, Pierre, … , sans oublier la fameuse machine à Kfè. Tous ont contribué à créer une ambiance agréable, amicale et très détendue.*

*Je n'oublierai surtout pas mes potes du 44. En particulier, Laurent et Nathalie, Dominique, Olivier, Daniel, Frédo, Samuel, Patrice et Hélène. Tous ont su faire preuve de patience et de compréhension pendant l'ensemble de ces années de dur labeur.*

*Merci également à l'ensemble des membres de ma famille, grands-parents, frère et sœur, beau-frère, neveux, cousins, oncles et tantes, ..., qui m'ont supporté et soutenu tout au long de mes longues études.*

*Enfin, je remercie très chaleureusement mes parents qui ont su m'enseigner le goût du travail, la rigueur et la persévérance. Qu'ils voient, au travers de cette thèse, l'aboutissement de l'éducation qu'ils m'ont transmis.*

*Boulder, Colorado, le 26 février 2003.*

---

# TABLE DES MATIERES

---

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>§ INTRODUCTION.....</b>                                             | <b>1</b>  |
| <b>§ 1. ETAT DE L'ART SUR LES SYSTEMES DE FOCALISATION .....</b>       | <b>3</b>  |
| <b>1.1 LES RÉFLECTEURS.....</b>                                        | <b>3</b>  |
| 1.1.1 Les réflecteurs paraboliques .....                               | 3         |
| 1.1.2 Les réflecteurs plans .....                                      | 5         |
| 1.1.2.1 Les reflectarrays.....                                         | 5         |
| 1.1.2.2 Les FFZPA et FZPA .....                                        | 6         |
| 1.1.2.3 Les antennes à faisceau gaussien .....                         | 8         |
| <b>1.2 LES STRUCTURE PÉRIODIQUES.....</b>                              | <b>9</b>  |
| 1.2.1 Les réseaux.....                                                 | 9         |
| 1.2.2 Les BIP.....                                                     | 12        |
| <b>1.3 LES LENTILLES .....</b>                                         | <b>13</b> |
| 1.3.1 Les lentilles à contraintes de propagation .....                 | 13        |
| 1.3.2 Les lentilles diélectriques.....                                 | 17        |
| 1.3.2.1 Les lentilles profilées .....                                  | 17        |
| 1.3.2.2 Lentilles à gradient d'indice.....                             | 21        |
| 1.3.2.3 La lentille dite parfaite .....                                | 25        |
| <b>1.4 CONCLUSION .....</b>                                            | <b>26</b> |
| <b>1.5 RÉFÉRENCES.....</b>                                             | <b>27</b> |
| <b>§ 2. LES LENTILLES SPHERIQUES A GRADIENT D'INDICE .....</b>         | <b>33</b> |
| <b>2.1 LA TECHNIQUE UTILISÉE PAR LÜNEBURG. GÉNÉRALISATION.....</b>     | <b>33</b> |
| <b>2.2 LES DIFFÉRENTES TECHNIQUES DE RÉALISATIONS EXISTANTES .....</b> | <b>37</b> |
| 2.2.1 Lentille constante K .....                                       | 37        |
| 2.2.2 Lentille à coquilles homogènes.....                              | 40        |
| 2.2.3 Lentille de Lüneburg artificielle .....                          | 42        |
| 2.2.4 Demi lentille sur plan de masse .....                            | 44        |
| <b>2.3 LES RÉSULTATS THÉORIQUES ANTÉRIEURS OBTENUS.....</b>            | <b>45</b> |
| 2.3.1 Diagrammes de rayonnement .....                                  | 45        |
| 2.3.2 Champ rétro-diffusé .....                                        | 53        |
| 2.3.3 Aberrations.....                                                 | 55        |
| 2.3.4 Polarisation .....                                               | 56        |
| <b>2.4 UTILISATIONS DES LENTILLES SPHÉRIQUES .....</b>                 | <b>57</b> |
| 2.4.1 Utilisations effectives des lentilles de Lüneburg .....          | 57        |
| 2.4.1.1 La lentille réflecteur .....                                   | 57        |
| 2.4.1.2 La lentille utilisée en émission et/ou réception.....          | 59        |
| 2.4.2 Utilisations envisagées des lentilles de Lüneburg .....          | 61        |

|                                                                                                      |            |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>2.5 CONCLUSION .....</b>                                                                          | <b>63</b>  |
| <b>2.6 RÉFÉRENCES.....</b>                                                                           | <b>64</b>  |
| <b>§ 3. ANALYSE PAR MODES SPHERIQUES .....</b>                                                       | <b>67</b>  |
| <b>3.1 INTRODUCTION DES MODES SPHÉRIQUES .....</b>                                                   | <b>67</b>  |
| 3.1.1 Expression du champ électromagnétique.....                                                     | 68         |
| 3.1.1.1 Détermination de l'équation d'onde .....                                                     | 68         |
| 3.1.1.2 Résolution de l'équation scalaire de Helmholtz .....                                         | 68         |
| 3.1.1.3 Résolution de l'équation d'Helmholtz vectorielle .....                                       | 71         |
| 3.1.1.4 Résolution de l'équation d'onde associée au champ électromagnétique.....                     | 72         |
| 3.1.2 Détermination des coefficients d'onde associés à un champ<br>électromagnétique quelconque..... | 73         |
| 3.1.2.1 Courants électriques et magnétiques.....                                                     | 73         |
| 3.1.2.2 Moments dipolaires.....                                                                      | 76         |
| 3.1.2.3 Sources étendues.....                                                                        | 76         |
| <b>3.2 DÉTERMINATION DES CARACTÉRISTIQUES D'ANTENNES.....</b>                                        | <b>78</b>  |
| 3.2.1 Diagramme de rayonnement en champ lointain .....                                               | 78         |
| 3.2.2 Puissance rayonnée .....                                                                       | 79         |
| 3.2.3 Directivité .....                                                                              | 81         |
| 3.2.4 Application à différentes excitations primaires .....                                          | 81         |
| 3.2.4.1 Le dipôle électrique élémentaire .....                                                       | 81         |
| 3.2.4.2 Le dipôle magnétique élémentaire .....                                                       | 83         |
| 3.2.4.3 La source complexe de Huygens .....                                                          | 85         |
| 3.2.4.4 Antenne « End Fire » .....                                                                   | 88         |
| 3.2.4.5 Le cornet pyramidal .....                                                                    | 89         |
| 3.2.4.6 Onde plane .....                                                                             | 94         |
| 3.2.4.7 Conclusion .....                                                                             | 94         |
| <b>3.3 DIFFUSION INTRODUITE PAR UNE LENTILLE.....</b>                                                | <b>94</b>  |
| 3.3.1 Forme du champ électromagnétique total .....                                                   | 95         |
| 3.3.2 Diffraction par une coquille .....                                                             | 96         |
| 3.3.3 Diffraction par une structure sphérique stratifiée .....                                       | 98         |
| 3.3.4 Validations .....                                                                              | 100        |
| 3.3.4.1 Association source complexe de Huygens - lentille discrète.....                              | 100        |
| 3.3.4.2 Association guide d'onde ouvert - lentille à gradient quasi continu.....                     | 102        |
| 3.3.4.3 Conclusion .....                                                                             | 104        |
| <b>3.4 RÉSULTATS NUMÉRIQUES .....</b>                                                                | <b>104</b> |
| 3.4.1 Focalisation d'ondes électromagnétiques .....                                                  | 104        |
| 3.4.1.1 Illumination par un dipôle électrique élémentaire .....                                      | 105        |
| 3.4.1.2 Illumination par un dipôle magnétique élémentaire .....                                      | 106        |
| 3.4.2 Zone de focalisation.....                                                                      | 108        |
| 3.4.3 Champ proche .....                                                                             | 109        |
| 3.4.4 Gaps d'air.....                                                                                | 110        |
| 3.4.5 Lobes secondaires .....                                                                        | 111        |
| <b>3.5 CONCLUSION .....</b>                                                                          | <b>113</b> |
| <b>3.6 BIBLIOGRAPHIE .....</b>                                                                       | <b>114</b> |

|                                                                           |            |
|---------------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>§ 4. REGULARISATION – STRUCTURES SPHERIQUES.....</b>                   | <b>117</b> |
| <b>4.1 PRINCIPE GÉNÉRAL .....</b>                                         | <b>118</b> |
| <b>4.2 ANTENNE SEULE ALIMENTÉE PAR SONDE EN SON CENTRE.....</b>           | <b>119</b> |
| 4.2.1 Géométrie de l'antenne .....                                        | 120        |
| 4.2.2 Modélisation électromagnétique .....                                | 120        |
| 4.2.2.1 Modélisation de la source .....                                   | 120        |
| 4.2.2.2 Conditions duales.....                                            | 121        |
| 4.2.2.3 Conditions de rayonnement .....                                   | 121        |
| 4.2.2.4 Condition de bord .....                                           | 121        |
| 4.2.2.5 Théorème d'unicité .....                                          | 122        |
| 4.2.3 Expression du champ et relations fondamentales .....                | 122        |
| 4.2.3.1 Coefficients associés à la source.....                            | 122        |
| 4.2.3.2 Expression générale du champ électromagnétique .....              | 122        |
| 4.2.3.3 Equations de séries duales .....                                  | 123        |
| 4.2.3.4 Classe d'expansion des coefficients sphériques .....              | 123        |
| 4.2.4 Régularisation .....                                                | 124        |
| 4.2.5 Caractéristiques d'antenne .....                                    | 127        |
| 4.2.5.1 Diagramme de rayonnement en champ lointain .....                  | 127        |
| 4.2.5.2 Puissance rayonnée .....                                          | 127        |
| 4.2.5.3 Impédance .....                                                   | 127        |
| 4.2.5.4 Directivité .....                                                 | 128        |
| 4.2.5.5 Courants .....                                                    | 129        |
| 4.2.6 Résultats numériques .....                                          | 129        |
| 4.2.6.1 Taille de la masse.....                                           | 130        |
| 4.2.6.2 Rayon de courbure .....                                           | 137        |
| 4.2.6.3 Impédance .....                                                   | 138        |
| 4.2.7 Validations .....                                                   | 139        |
| 4.2.7.1 Comparaison avec des résultats de publications antérieurs .....   | 139        |
| 4.2.7.2 Comparaison avec la mesure .....                                  | 142        |
| 4.2.7.3 Comparaison avec des logiciels commerciaux .....                  | 143        |
| 4.2.8 Conclusion .....                                                    | 144        |
| <b>4.3 ANTENNE ALIMENTÉE PAR SONDE CENTRÉE ET LENTILLE SPHÉRIQUE.....</b> | <b>145</b> |
| 4.3.1 Géométrie de l'association antenne - lentille.....                  | 145        |
| 4.3.2 Modélisation électromagnétique .....                                | 146        |
| 4.3.2.1 Modélisation de la source .....                                   | 146        |
| 4.3.2.2 Conditions duales.....                                            | 146        |
| 4.3.2.3 Conditions de rayonnement .....                                   | 146        |
| 4.3.2.4 Condition de bord .....                                           | 147        |
| 4.3.2.5 Théorème d'unicité .....                                          | 147        |
| 4.3.3 Expression du champ et relations fondamentales .....                | 147        |
| 4.3.3.1 Coefficients associés à la source.....                            | 147        |
| 4.3.3.2 Expression générale du champ électromagnétique .....              | 148        |
| 4.3.3.3 Equations de séries duales .....                                  | 148        |
| 4.3.3.4 Classe d'expansion des coefficients sphériques .....              | 149        |
| 4.3.4 Régularisation .....                                                | 149        |
| 4.3.4.1 Evolution asymptotique des matrices de structure géométrique..... | 149        |

|             |                                                                          |            |
|-------------|--------------------------------------------------------------------------|------------|
| 4.3.4.2     | Application de la MAR .....                                              | 152        |
| 4.3.5       | Caractéristiques d'antennes .....                                        | 155        |
| 4.3.6       | Résultats numériques .....                                               | 155        |
| 4.3.7       | Validations .....                                                        | 160        |
| 4.3.8       | Conclusion .....                                                         | 163        |
| <b>4.4</b>  | <b>ANTENNE ALIMENTÉE PAR SONDE DÉCENTRÉE ET LENTILLE SPHÉRIQUE .....</b> | <b>163</b> |
| 4.4.1       | Modélisation électromagnétique .....                                     | 163        |
| 4.4.2       | Expression du champ et relations fondamentales .....                     | 163        |
| 4.4.2.1     | Coefficients associés à la source .....                                  | 164        |
| 4.4.2.2     | Expression générale du champ électromagnétique .....                     | 164        |
| 4.4.2.3     | Equations de séries duales .....                                         | 164        |
| 4.4.2.4     | Classe d'expansion des coefficients sphériques .....                     | 165        |
| 4.4.3       | Régularisation .....                                                     | 165        |
| 4.4.3.1     | Application de la MAR .....                                              | 165        |
| 4.4.4       | Résultats numériques .....                                               | 169        |
| 4.4.5       | Validations .....                                                        | 169        |
| 4.4.6       | Conclusion .....                                                         | 172        |
| <b>4.5</b>  | <b>ANTENNE ALIMENTÉE PAR FENTE ET LENTILLE SPHÉRIQUE .....</b>           | <b>172</b> |
| 4.5.1       | Modélisation électromagnétique .....                                     | 172        |
| 4.5.2       | Expression du champ et relations fondamentales .....                     | 173        |
| 4.5.2.1     | Coefficients associés à la source .....                                  | 173        |
| 4.5.2.2     | Expression générale du champ électromagnétique .....                     | 173        |
| 4.5.2.3     | Classe d'expansion des coefficients sphériques .....                     | 173        |
| 4.5.2.4     | Equations de séries duales .....                                         | 174        |
| 4.5.2.5     | Résolution des équations différentielles .....                           | 175        |
| 4.5.3       | Régularisation .....                                                     | 176        |
| 4.5.3.1     | Evolution asymptotique des matrices de structure géométrique .....       | 176        |
| 4.5.3.2     | Application de la MAR .....                                              | 178        |
| 4.5.4       | Résultats numériques .....                                               | 182        |
| 4.5.4.1     | Antenne avec substrat épais .....                                        | 182        |
| 4.5.4.2     | Antenne avec substrat fin .....                                          | 184        |
| 4.5.4.3     | Antenne associée à une lentille discrète homogène de Lüneburg .....      | 186        |
| 4.5.5       | Validations .....                                                        | 193        |
| 4.5.6       | Conclusion .....                                                         | 194        |
| <b>4.6</b>  | <b>CONCLUSION .....</b>                                                  | <b>195</b> |
| <b>4.7</b>  | <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>                                               | <b>196</b> |
| <b>§ 5.</b> | <b>TECHNOLOGIES DE REALISATION - APPLICATIONS.....</b>                   | <b>199</b> |
| <b>5.1</b>  | <b>MATÉRIAUX MOUSSES .....</b>                                           | <b>199</b> |
| 5.1.1       | Caractéristiques électromagnétiques .....                                | 199        |
| 5.1.1.1     | Cavité résonnante .....                                                  | 201        |
| 5.1.1.2     | Espace libre .....                                                       | 201        |
| 5.1.1.3     | Résultats .....                                                          | 202        |
| 5.1.2       | Métallisation .....                                                      | 203        |
| 5.1.2.1     | Techniques dites de « dépôt de peinture » .....                          | 203        |
| 5.1.2.2     | Procédé thermomécanique .....                                            | 203        |

|             |                                                                             |            |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------|------------|
| 5.1.2.3     | Procédé chimique.....                                                       | 204        |
| 5.1.3       | Utilisation.....                                                            | 208        |
| 5.1.3.1     | Usinage .....                                                               | 208        |
| 5.1.3.2     | Thermoformage.....                                                          | 209        |
| <b>5.2</b>  | <b>LENTEILLE DE LÜNEBURG DITE « EN TRANCHES » .....</b>                     | <b>212</b> |
| 5.2.1       | Description de la méthode .....                                             | 212        |
| 5.2.1.1     | Discrétisation de la sphère .....                                           | 213        |
| 5.2.1.2     | Emplacements et dimensionnement des trous .....                             | 214        |
| 5.2.2       | Caractérisation de la lentille « tranches » .....                           | 217        |
| 5.2.3       | Conclusion .....                                                            | 224        |
| <b>5.3</b>  | <b>COUPLAGE - CRITÈRE DE RÉSOLUTION.....</b>                                | <b>225</b> |
| <b>5.4</b>  | <b>COMPARAISONS EXPÉRIMENTALES : ASSOCIATIONS LENTEILLES-ANTENNES .....</b> | <b>229</b> |
| 5.4.1       | Lentille Emerson & Cuming – antenne alimentée par sonde décentrée .....     | 229        |
| 5.4.2       | Lentille Emerson & Cuming – antenne alimentée par fente centrée .....       | 231        |
| 5.4.3       | Lentille Emerson & Cuming – réseau de 4 patches.....                        | 233        |
| 5.4.4       | Lentille Emerson & Cuming – antenne à polarisation circulaire.....          | 235        |
| 5.4.5       | Lentille Emerson & Cuming – guide d'onde ouvert.....                        | 237        |
| 5.4.6       | Lentille homogène – cornet .....                                            | 238        |
| 5.4.7       | Conclusion .....                                                            | 240        |
| <b>5.5</b>  | <b>CONCLUSION .....</b>                                                     | <b>241</b> |
| <b>5.6</b>  | <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>                                                  | <b>242</b> |
| <b>§</b>    | <b>CONCLUSION GENERALE ET PERSPECTIVES .....</b>                            | <b>243</b> |
| <b>§</b>    | <b>ANNEXES .....</b>                                                        | <b>245</b> |
| <b>AN.1</b> | <b>FONCTIONS SPHÉRIQUES DE BESSEL .....</b>                                 | <b>245</b> |
| AN.1.1      | Définition .....                                                            | 245        |
| AN.1.2      | Liens avec les fonctions cylindriques de Bessel .....                       | 246        |
| AN.1.3      | Relations de récurrence .....                                               | 246        |
| AN.1.4      | Premiers ordres .....                                                       | 246        |
| AN.1.5      | Wronskien .....                                                             | 247        |
| AN.1.6      | Produit croisé .....                                                        | 247        |
| AN.1.7      | Evolutions asymptotiques .....                                              | 247        |
| AN.1.8      | Algorithme de calcul.....                                                   | 248        |
| <b>AN.2</b> | <b>POLYNÔMES ET FONCTIONS ASSOCIÉES DE LEGENDRE .....</b>                   | <b>250</b> |
| AN.2.1      | Définition .....                                                            | 250        |
| AN.2.2      | Relations de récurrence .....                                               | 250        |
| AN.2.3      | Formes numériquement indéterminées .....                                    | 252        |
| AN.2.4      | Relations avec des intégrales .....                                         | 252        |
| AN.2.5      | Harmoniques de surface pour la variation en $\theta$ .....                  | 252        |
| AN.2.6      | Propriété importante de translation .....                                   | 254        |
| <b>AN.3</b> | <b>RELATIONS D'ORTHOGONALITÉ .....</b>                                      | <b>255</b> |
| AN.3.1      | Fonctions circulaires .....                                                 | 255        |
| AN.3.2      | Modes sphériques.....                                                       | 255        |
| <b>AN.4</b> | <b>MATRICES DE RÉGULARISATION .....</b>                                     | <b>257</b> |
| AN.4.1      | Matrice $C_n^K$ .....                                                       | 257        |

|             |                                 |            |
|-------------|---------------------------------|------------|
| AN.4.2      | Matrice $C_n^{K-1}$             | 258        |
| AN.4.3      | Matrice $C_n^Z$                 | 258        |
| AN.4.4      | Matrice $C_n^Z \cdot C_n^{K-1}$ | 259        |
| <b>AN.5</b> | <b>BIBLIOGRAPHIE</b>            | <b>261</b> |

# **Introduction**

---

Les lentilles connaissent un certain regain d'intérêt depuis quelques années, comme le montrent le chapitre 1 et plus particulièrement le chapitre 2. Ainsi, il est apparu nécessaire à l'Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes de se doter d'un outil permettant l'analyse des lentilles sphériques ainsi que des sources qui leur sont associées. A cet effet, un premier code de calcul a été réalisé. Celui-ci, cœur du chapitre 3, est basé sur le développement du champ électromagnétique en termes de modes sphériques. Ceci permet de déduire facilement des relations entre le champ créé par une source primaire quelconque et le champ diffusé par une lentille à distribution sphérique. Le principal handicap de ce code est de ne pas prendre en compte les effets des surfaces métalliques inhérentes aux antennes primaires illuminant les lentilles. Ainsi, les nombreuses visites, en tant que professeur invité au sein de l'Institut d'Electronique et de Télécommunications de Rennes, du Professeur Alexander Nosich de l'Institut de Radio-physique et d'Electronique de l'Académie des Sciences de Kharkov, en Ukraine, ont permis de créer un second code de calcul permettant d'inclure les éléments métalliques d'antennes patches circulaires conformées sur la lentille. Ceci a été l'occasion de généraliser une technique appelée Méthode de Régularisation Analytique. L'intégralité du chapitre 4 y est consacrée. Du fait d'un certain nombre de développements théoriques et calculatoires, ce chapitre reste très volumineux. En effet, y sont traités les cas d'antennes seules alimentées par sonde coaxiales centrées, d'association de ce type d'antennes avec des lentilles à distributions sphériques. Ensuite, le cas d'une alimentation par sonde décentrée y est abordé. Enfin, la théorie est étendue au cas où l'antenne primaire est alimentée par une fente centrée. Par ailleurs, un certain nombre d'expérimentations ont été menés à bien, comme l'étude de matériaux légers utilisés dans la réalisation de sources conformées, la réalisation de lentilles de Lüneburg, l'étude du couplage entre deux sources placées sur la même lentille, ainsi que l'influence du choix de l'antenne primaire sur le rayonnement de la structure antenne primaire – lentille.



# **1. ETAT DE L'ART SUR LES SYSTEMES DE FOCALISATION**

---

Depuis quelques années, les télécommunications sans fil se développent de façon fulgurante. Cette forte croissance s'accompagne du développement de structures rayonnantes tant classiques qu'exotiques. Malgré cela, toutes sont réalisées avec le souci permanent de réduire le plus possible la consommation d'une grandeur très coûteuse : la puissance. Pour ce faire, un certain nombre de techniques existent. La focalisation en est une. En effet, elle permet de n'illuminer que les zones souhaitées. Ainsi, l'efficacité de rayonnement s'en trouve accrue.

Il existe principalement trois grandes familles de structures focalisantes : les réflecteurs, les structures périodiques et les lentilles. Il est par ailleurs à noter qu'un certain nombre de structures sont hybrides de ces trois grandes familles.

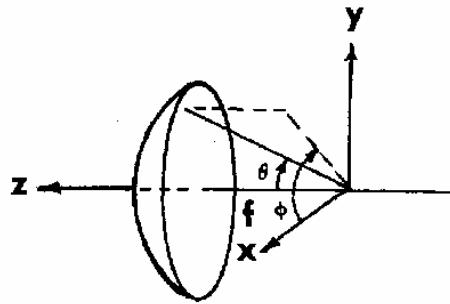
L'esprit de cet état de l'art n'est certes pas d'être exhaustif, mais plutôt d'exposer les principales techniques actuellement utilisées pour focaliser l'énergie.

## **1.1 Les réflecteurs**

Un moyen utilisé pour focaliser l'énergie est l'emploi de réflecteurs. Il s'agit de surfaces métalliques planes ou conformes qui concentrent l'énergie électromagnétique en un point ou une zone très précise de l'espace. Il en existe principalement trois types différents. Ces sont les réflecteurs paraboliques, les réflecteurs planaires et les antennes à faisceau gaussien.

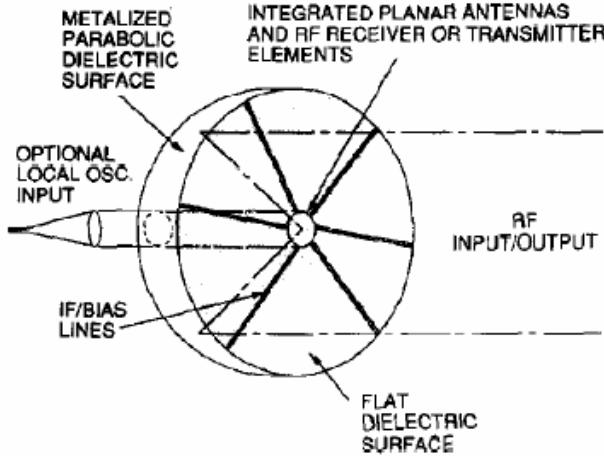
### **1.1.1 Les réflecteurs paraboliques**

Les réflecteurs paraboliques sont des paraboloïdes métalliques utilisant les propriétés géométriques de focalisation des paraboles (Miyata 1980). Une illustration est donnée en **Figure 1**.

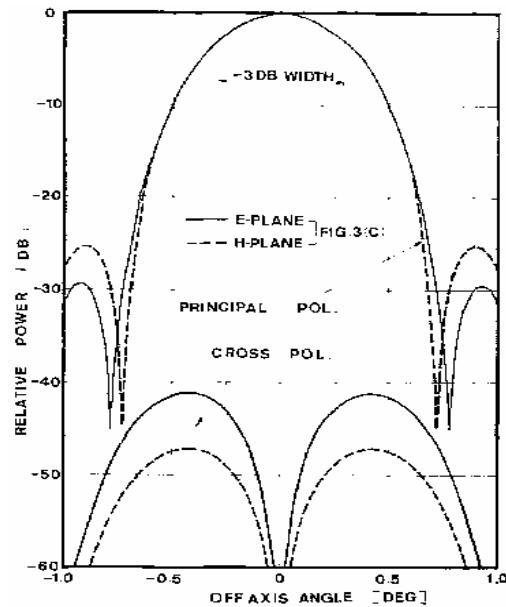


**Figure 1** Schématisation d'une parabole.

Ils possèdent l'avantage d'ajouter une très faible polarisation croisée lorsque l'alimentation est sur l'axe optique. La polarisation croisée augmente dès que la source est décalée sur le plan focal. De plus, la directivité associée est d'autant plus élevée que le diamètre du réflecteur est grand. Les pertes associées à cette structure sont principalement dues à la source elle-même, au spill-over engendré par un diagramme de rayonnement d'antenne trop large par rapport à la surface de captation du réflecteur, etc. Ceci explique le très fort rendement  $\eta$ , souvent supérieur à 80%, de ce type de structure. Pour un diamètre du disque parabolique  $D_p$ , le gain  $G$  associé est  $G = \eta(\pi D_p/\lambda)^2$ . Il est, par ailleurs, possible d'améliorer ces performances en remplissant la parabole de diélectrique (P.H. Siegel 1991), comme indiqué en **Figure 2**. Par ailleurs, la présence du substrat permet l'intégration de différents types de sources primaires et ajoute deux degrés de liberté quand à la synthèse de l'antennes : sa permittivité et son épaisseur.



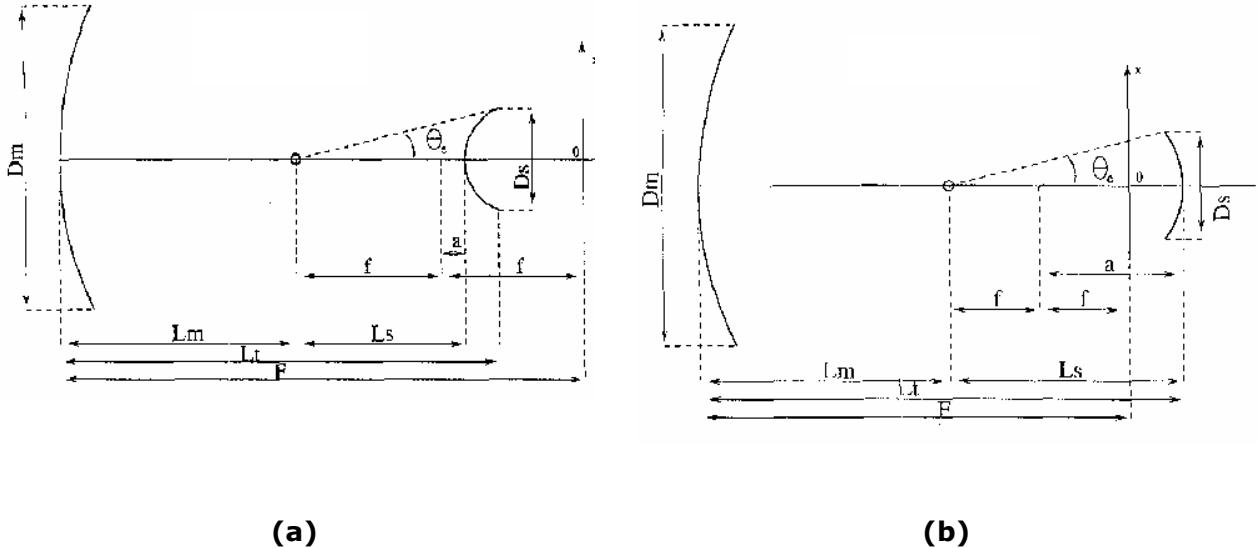
**(a)**



**(b)**

**Figure 2** (a) Parabole remplie de diélectrique utilisée (P.H. Siegel 1991) avec un récepteur hétérodyne. (b) Diagrammes de rayonnement en champ lointain de la structure (a).

Dérivé des télescopes optiques, les réflecteurs paraboliques Cassegrain et Gregorian (C. Granet 1998), **Figure 3**, combinent deux réflecteurs paraboliques. Ils présentent les mêmes avantages de forte directivité, de fort rendement et de fort pouvoir de focalisation que la simple parabole. Malgré tout, à diamètre extérieur égal ( $D_m = D_p$ ), le sous réflecteur  $D_s$ , de par l'ombrage qu'il engendre, ampute le gain total d'une quantité équivalente au gain qu'il aurait s'il était utilisé seul comme parabole :  $G = \eta(\pi D_p/\lambda)^2 - \eta(\pi D_s/\lambda)^2 = \eta\pi^2(D_p^2 - D_s^2)^2/\lambda^2$ .



**Figure 3** (a) Réflecteur type Cassegrain. (b) Réflecteur type Gregorian.

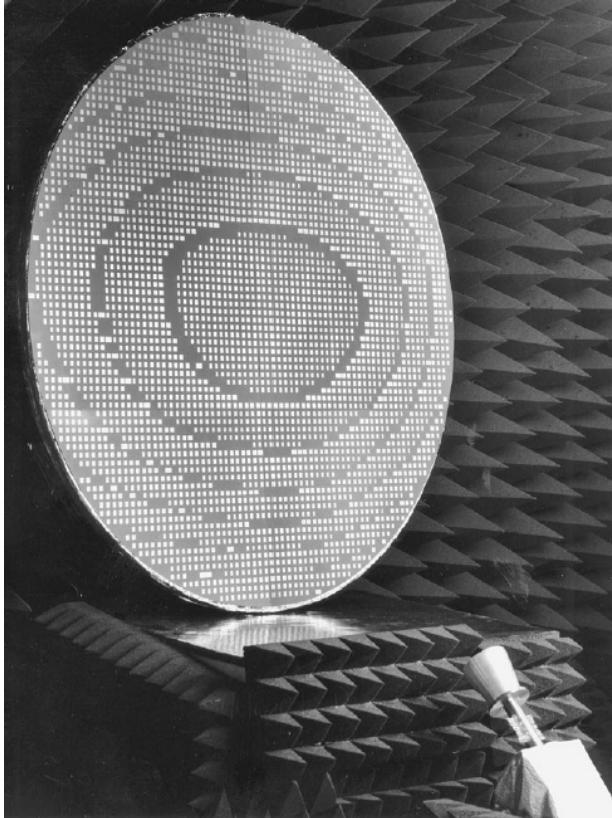
### 1.1.2 Les réflecteurs plans

D'autres types de réflecteurs que les paraboliques existent. Ils peuvent également avoir une structure planaire. Ici, le plan ne sert pas d'élément focalisant mais renvoie l'énergie de façon symétrique pour que celle-ci soit ensuite focalisée par des structures, dont la position et la géométrie déterminent les propriétés de focalisation. Les deux principales familles de réflecteurs plans sont les reflectarrays et les FZPA réfléchissantes.

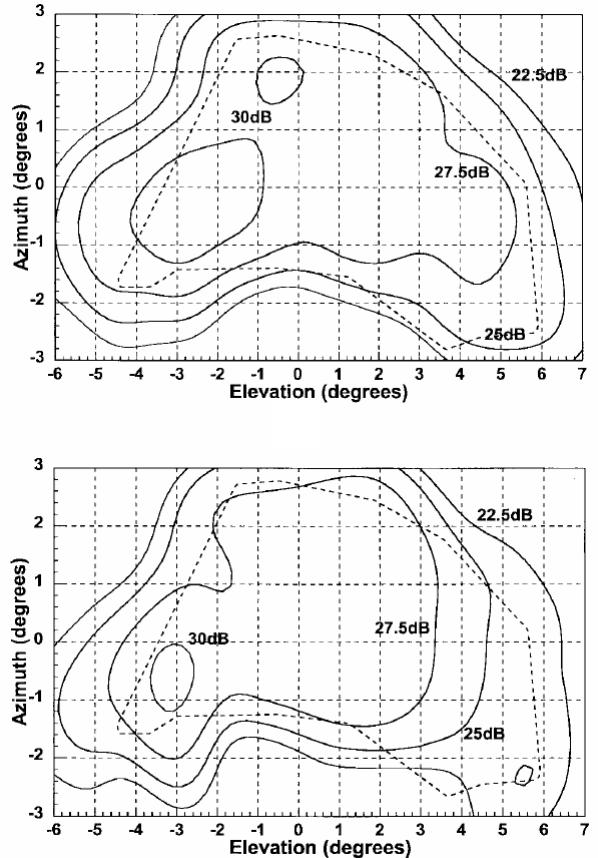
#### 1.1.2.1 Les reflectarrays

Le reflectarray est un réseau d'éléments espaces alimentés par une antenne source. Les phases introduites par les réflexions sur les éléments du réseau sont réalisées de telle sorte que l'énergie réfléchie soit collimatée pour, in fine, former un faisceau dans une direction donnée, comme indiqué en **Figure 4**. Ils ont été décrits pour la première fois au début des années 1960 (R.E. Munson 1987). Le développement des technologies imprimées au début des années 1970 les a remis au goût du jour compte tenu des facilités de fabrication des grands réseaux imprimées (R.E. Munson 1987; Huang 1991; D.M. Pozar 1993; S.D. Targonski 1996; D.M. Pozar 1997; D.M. Pozar 1998; J. Huang 1998). Les reflectarrays ont, par ailleurs, un avantage certain sur les réflecteurs paraboliques : être plan. Les coûts de fabrication sont ainsi réduits au minimum. Par contre, ils possèdent des

désavantages par rapport aux paraboles : Leur largeur de bande est limitée (de 4% à 8%) (D.C. Chang 1995; R.D. Javor 1995; D.M. Pozar 1997; D.M. Pozar 1999) et l'efficacité de surface réduite (de 40 à 70%) (Huang 1991; D.M. Pozar 1993; S.D. Targonski 1994; Huang 1995; S.D. Targonski 1996; D.M. Pozar 1997; D.M. Pozar 1998; J. Huang 1998).



(a)



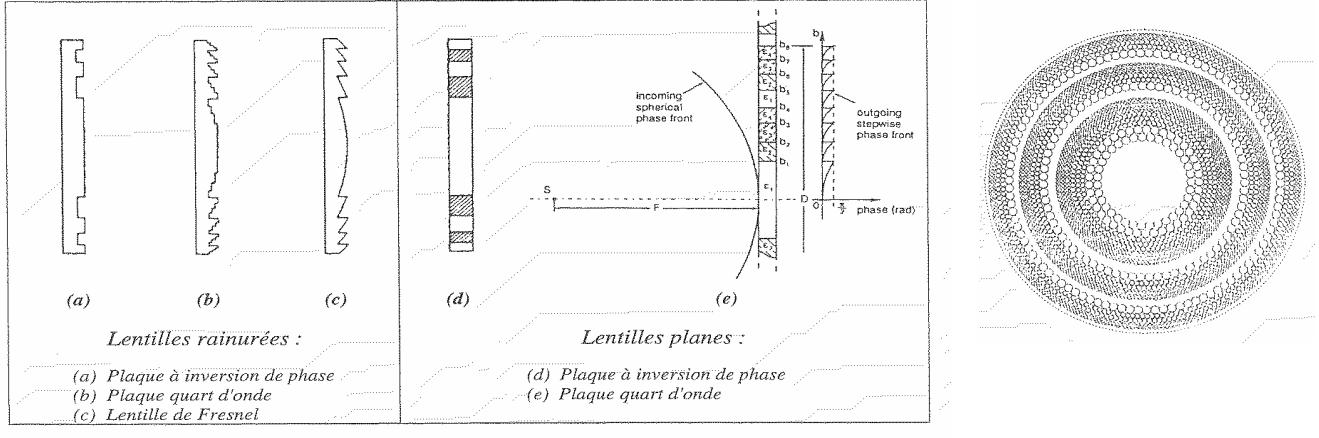
(b)

**Figure 4** Reflectarray (D.M. Pozar 1999) utilisé en technologie spatiale pour l'illumination de l'Europe. (a) Photographie du reflectarray et de son alimentation. (b) Diagramme de rayonnements associés, à 14.15GHz pour le diagramme supérieur et 14.50GHz pour le diagramme inférieur.

### 1.1.2.2 Les FFZPA et FZPA

Dans le même ordre d'idées, les FFZPA, ou Folded Fresnel Zone Plate Antenna, utilisent les phénomènes d'interférence et de diffraction lors de la traversée de plans percés de trous ou de fentes. Les plus simples sont constituées d'alternances d'anneaux concentriques réfléchissants et opaques distants de  $\lambda_g/4$  du plan du plan réflecteur (L.F. Van Bursik 1961; B. Huder 1988; J.E. Garrett 1991; M.A. Gouker 1992; Y. Ji 1994; G.Z. Jiang 1996; G.Z. Jiang 1997). Leurs rendements sont, en général, très faibles : de 10% à 15%. Ceci provient du fait que la moitié de l'énergie n'est pas utilisée dans la focalisation. Ainsi, pour optimiser le transfert en énergie, (D.N.

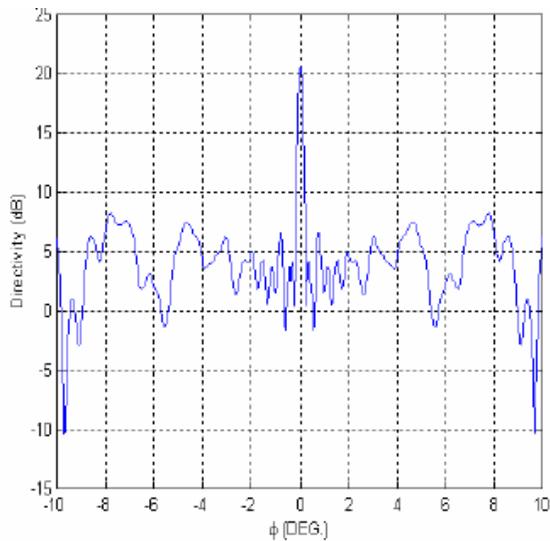
Black 1987; Y.J. Guo 1993; J.M. Van Houten 1994; H.D. Hristov 1995; H.D. Hristov 1995) reposent d'ajouter des correcteurs de phase rainurés ou diélectriques ou d'ajouter des couches (Y. Guo 1992; Y.J. Guo 1995). Les rendements atteignent alors 50%. Il est à noter que ces structures peuvent être utilisées en transmission, **Figure 5** et **Figure 6**, i.e. sans plan de masse (D.N. Black 1987; J.E. Garrett 1991). Ce sont alors des FZPA, ou Fresnel Zone Plate Antenna (B. Khayatian 2000).



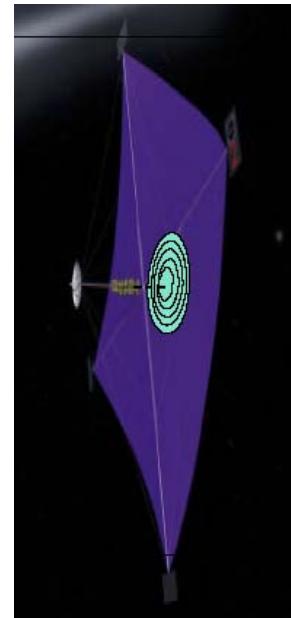
(a)

(b)

**Figure 5** Différentes configurations de lentilles à zones de Fresnel. (a) FZPA. (b) FFZPA.



(a)



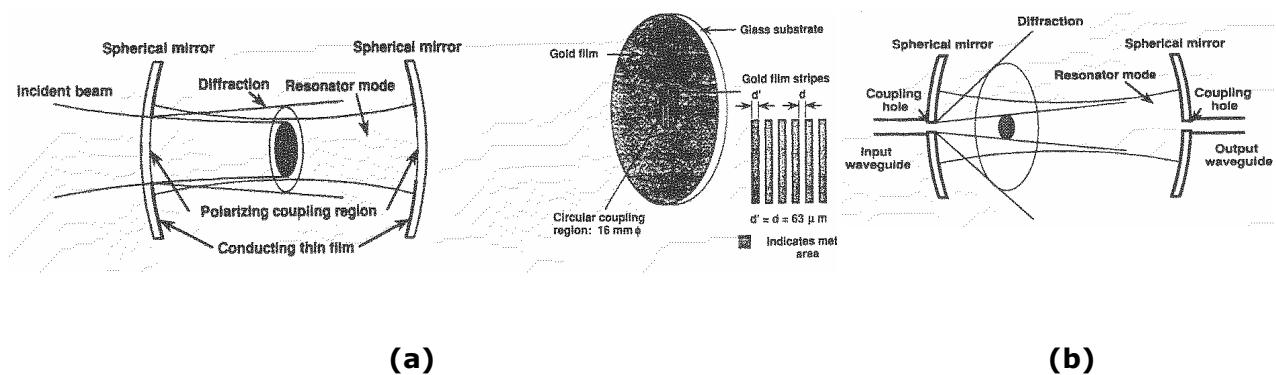
(b)

**Figure 6** FZPA embarquée sur satellite (B. Khayatian 2000). (a) Diagramme de rayonnement en champ lointain. (b) Représentation de la FZPA placée sur un panneau solaire.

### 1.1.2.3 Les antennes à faisceau gaussien

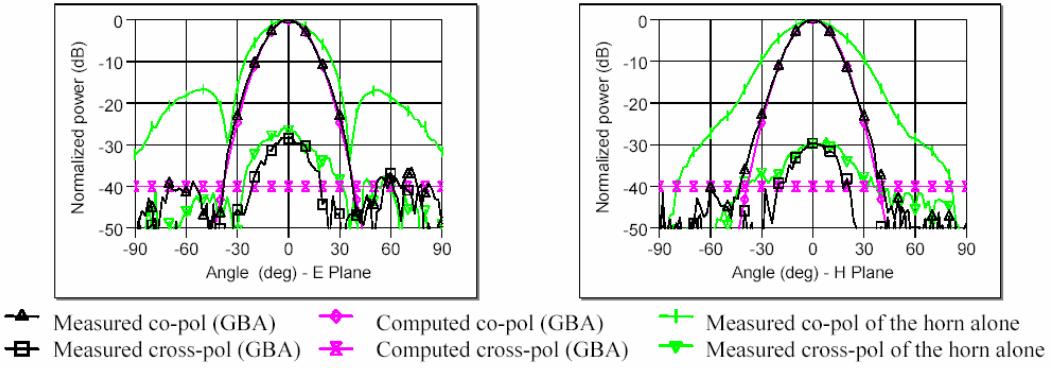
Certaines structures focalisent l'énergie selon une distribution gaussienne. Ce sont les antennes à faisceau gaussien, ou GBA (Gaussian Beam Antenna). Elles ont été inventées par Matsui (T. Matsui 1996). Elles sont constituées d'une cavité de type Fabry-Pérot (R.N. Clarke 1982) généralement excite par un iris comme le montre la **Figure 7**. Les miroirs formant la cavité sont de très grande dimension, de très grand rayon de courbure et distants de  $50 \text{ à } 100\lambda$ . Ceci permet d'aboutir à des coefficients de qualité supérieurs à 10 000, très utiles dans le cadre de la caractérisation de précision de matériaux de faible permittivité (A.L. Cullen 1971).

Il est à noter que la distribution gaussienne ne vérifie pas les équations de Maxwell. Ainsi, la distribution d'énergie d'une GBA est, certes, proche d'une gaussienne, mais ne fait que s'en rapprocher. Cette dénomination provient surtout de la propriété d'absence, ou de niveau équivalent à celui du bruit, de lobe secondaire des GBA. Mathématiquement, la distribution gaussienne de l'onde est une conséquence directe de l'approximation paraxiale : les variations longitudinales de l'onde sont suffisamment faibles devant ses variations transversales pour être négligées. D'un point de vue physique optique, les rayons sont extrêmement peu inclinés par rapport à l'axe optique (ils divergent très lentement).

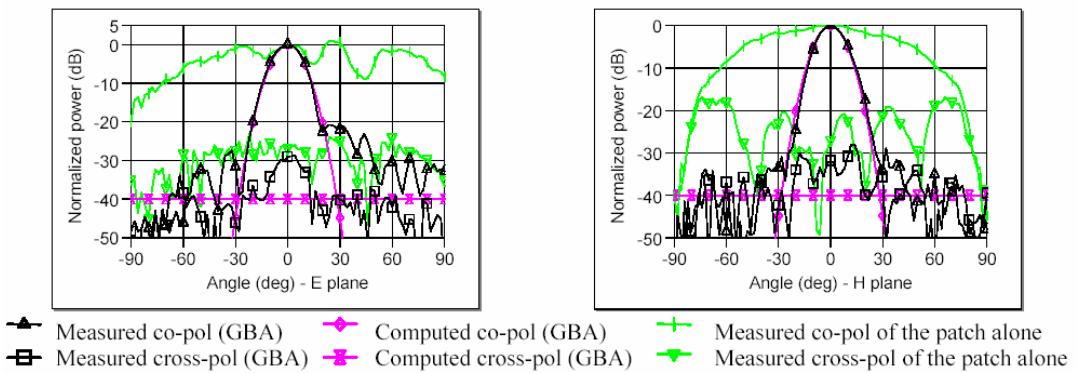


**Figure 7** Schéma de principe d'une GBA. (a) Alimentation par miroirs semi transparents. (b) Alimentation par iris.

Les diagrammes de la **Figure 8** et de la **Figure 9**, (R. Sauleau 2000) comparent les rayonnements de sources conventionnelles, cornet et patchs, seules ou associées à des GBA. La distribution gaussienne apparaît clairement. Ces mesures sont effectuées à 57.1GHz pour le cornet et à 56.6GHz pour le patch. La GBA alimentée par un cornet possède une directivité de 19.1dB pour un rendement de 45%. La GBA alimentée par un patch a une directivité de 21.2dB pour un rendement de 26%. Le principal désavantage de ce type de structure réside dans la mécanique de précision nécessaire à leur réalisation. Ainsi, les coûts de fabrication deviennent très vite exorbitants.



**Figure 8** GBA alimentée par cornet.



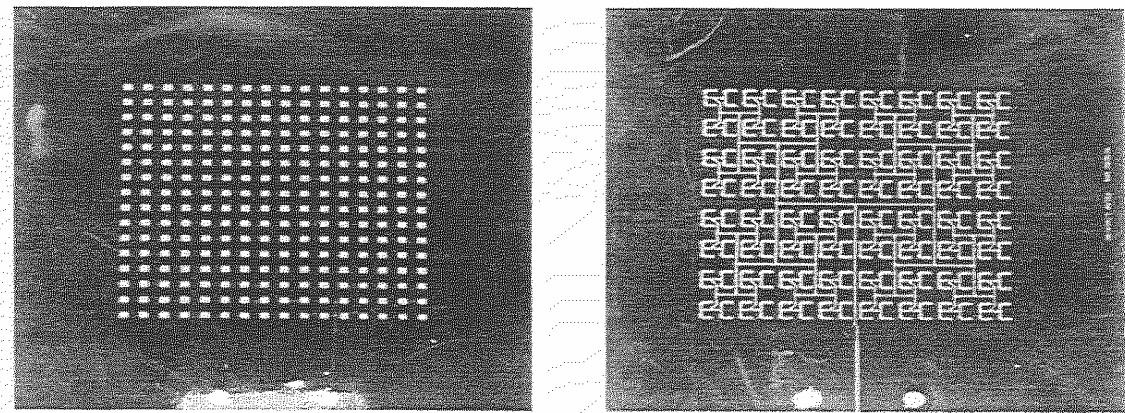
**Figure 9** GBA alimentée par patch.

## 1.2 Les structures périodiques

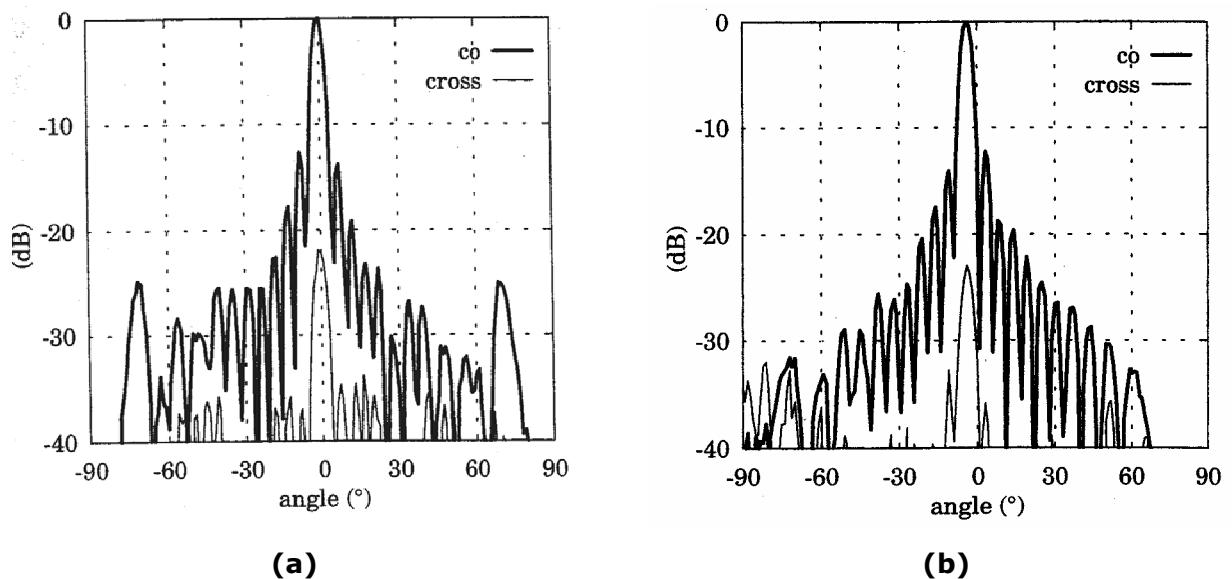
Les structures périodiques possèdent un grand nombre de propriétés, y compris la focalisation. Celle-ci se déduit du développement du champ en modes de Floquet : un mode de Floquet est propagé ou évanescant dans une direction donnée selon la composante dans cette même direction du vecteur d'onde associé à ce mode est réelle ou imaginaire pure. Ce mécanisme s'exprime principalement sous deux formes : les réseaux et les BIP.

### 1.2.1 Les réseaux

La mise en réseau d'une structure élémentaire contribue, sous certaines conditions, à la mise en phase, dans une direction donnée, des ondes électromagnétiques émises par chacun des motifs élémentaires. Ceci a pour conséquence de focaliser l'énergie. Cette mise en réseau peut se faire de façon pondérée ou non pondérée, comme il est question dans le réseau carré, de 256 éléments alimentés par fentes épaisses, de la **Figure 10**, (Lafond 2000):



**Figure 10** Réseau de 256 patches alimentés par fentes à arborescence parallèle (Lafond 2000).



**Figure 11** Diagrammes de rayonnement en champ lointain du réseau à 256 éléments à 59.5GHz (Lafond 2000). (a) Plan E. (b) Plan H.

Les mesures, **Figure 11**, sont effectuées à 59.5GHz. Les ouvertures obtenues sont de  $4.4^\circ$  en plan E et  $4.3^\circ$  en plan H. Les lobes secondaires sont à environ -12.5dB et les composantes croisées inférieures à -22.0dB. Par ailleurs, le gain, mesuré à 25.0dB après correction, engendre un rendement limite à 20%. L'abaissement du niveau des lobes secondaires peut être envisagé via l'utilisation de pondérations adéquates. De plus, ce procédé possède un atout majeur. En effet, la technologie imprimée utilisée permet de réduire les coûts de fabrication à leur minimum.

La source élémentaire du réseau peut être de n'importe quel type. Ici est présentée, **Figure 12**, une mise en réseau de 8\*8 antennes intégrées sur membrane et fonctionnant à 1.3GHz (P. Wood 2000). La pondération est effectuée en phase et non en amplitude, **Figure 13**. L'intérêt des membranes, dans la mise en réseau, réside principalement dans leur très faible poids, ce qui n'est pas négligeable pour des applications satellitaires à ces

fréquences. Par ailleurs, de par leur très faible épaisseur typiquement de  $1\mu\text{m}$  à  $10\mu\text{m}$ , les membranes ont très peu d'influence. Ainsi, les antennes rayonnent en espace libre.

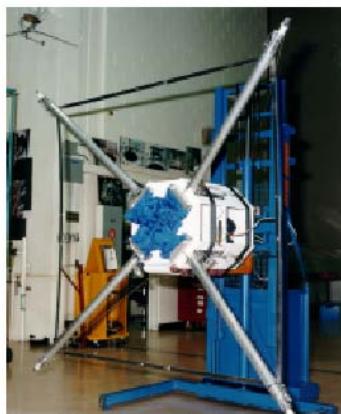


Fig. 1 Membrane Antenna In Stowed State

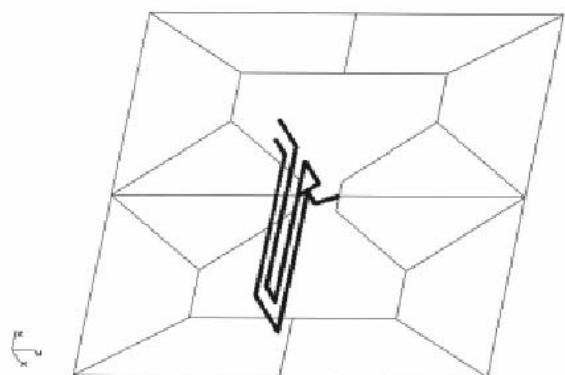


Fig. 2 Part of MOM Antenna Model

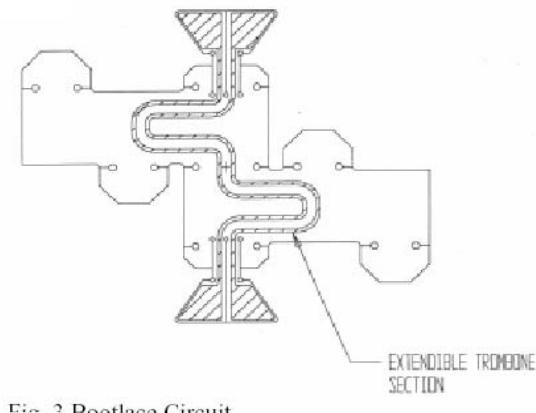


Fig. 3 Bootlace Circuit

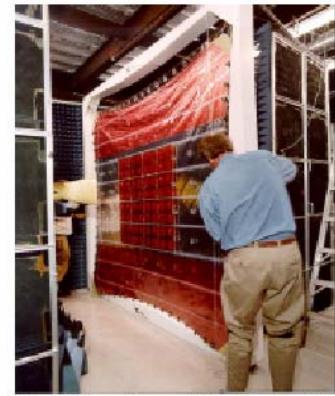
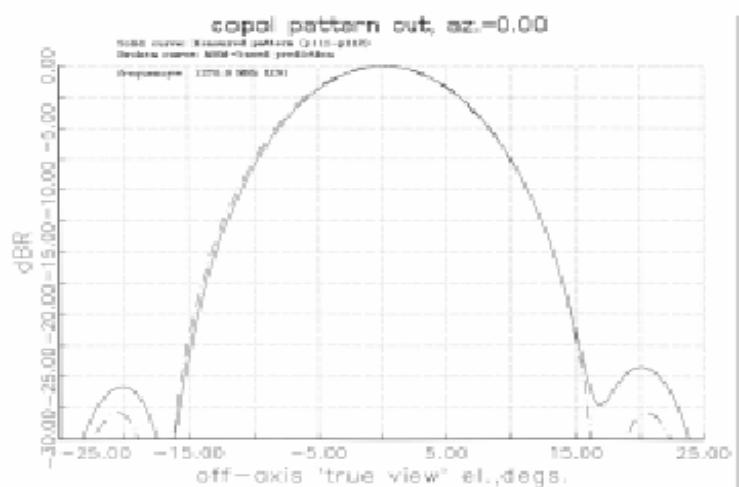


Fig. 4 Breadboard On Planar Range

**Figure 12** Mise en réseau d'antennes à membranes (P. Wood 2000).

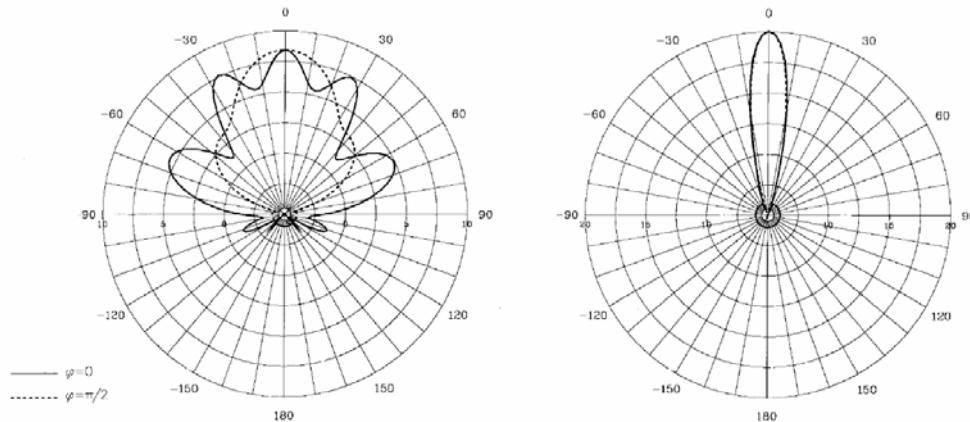
|     |     |     |     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 85° | 75° | 73° | 59° | 62° | 66° | 70° | 76° |
| 75° | 76° | 73° | 65° | 71° | 67° | 66° | 78° |
| 86° | 77° | 69° | 63° | 59° | 66° | 76° | 73° |
| 90° | 83° | 68° | 63° | 58° | 63° | 73° | 77° |
| 81° | 88° | 72° | 63° | 60° | 64° | 79° | 82° |
| 95° | 85° | 71° | 61° | 58° | 71° | 82° | 76° |
| 79° | 79° | 76° | 77° | 77° | 72° | 66° | 70° |
| 78° | 70° | 85° | 80° | 76° | 86° | 88° | 70° |



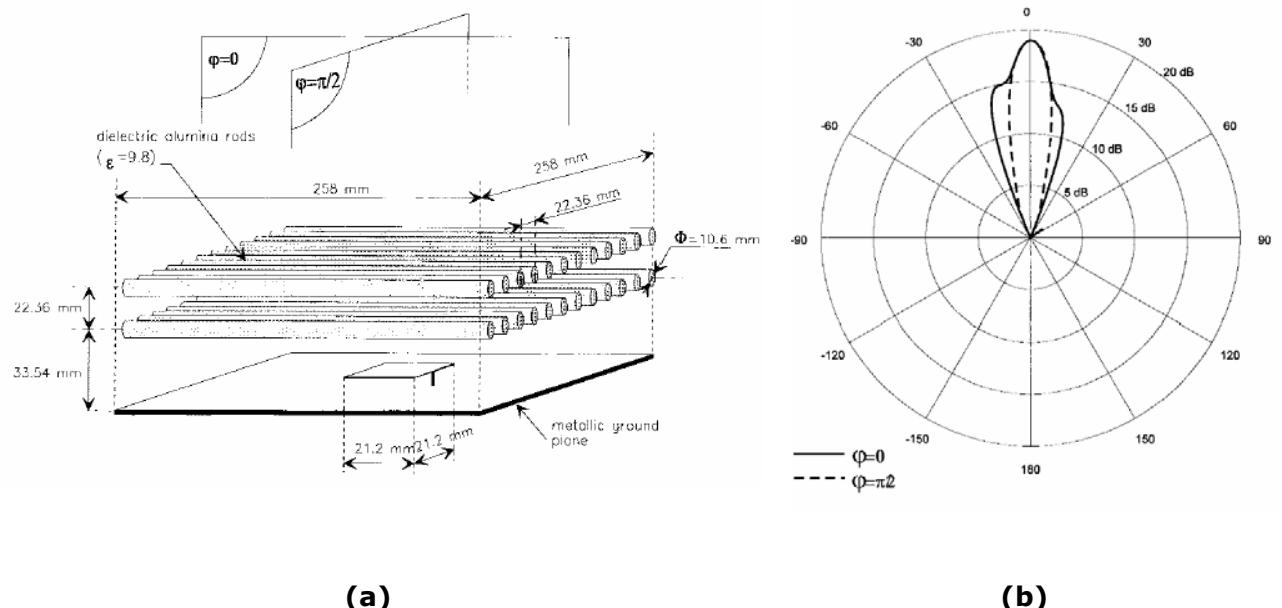
**Figure 13** Caractéristiques du réseau d'antennes à membranes (P. Wood 2000). Distribution en phase des antennes élémentaires et diagramme de rayonnement en champ lointain.

## 1.2.2 Les BIP

Les structures périodiques font actuellement l'objet de très nombreuses investigations pour ce qui est des matériaux à Bande Interdite Photonique (BIP), ou PBG pour Photonic BandGap materials. Une de leur application concerne la focalisation (M. Thévenot 1999). Comme le montre (M. Thévenot 1999) **Figure 14**, la directivité d'un simple patch imprimé peut passer de 8dBi à 20dBi grâce à l'ajout du BIP. Le rendement obtenu est de 77% à 4.75GHz, **Figure 15**.



**Figure 14** Comparaison théorique entre la directivité d'un patch seul, à gauche, et du même patch surmonté d'un BIP, à droite. Le Bip fait passer la directivité de 8dB à 20 dB.



**Figure 15** Vérification de la théorie par la mesure. (a) Structure BIP-patch. (b) Gain mesuré. Le maximum est à 18.9dB.

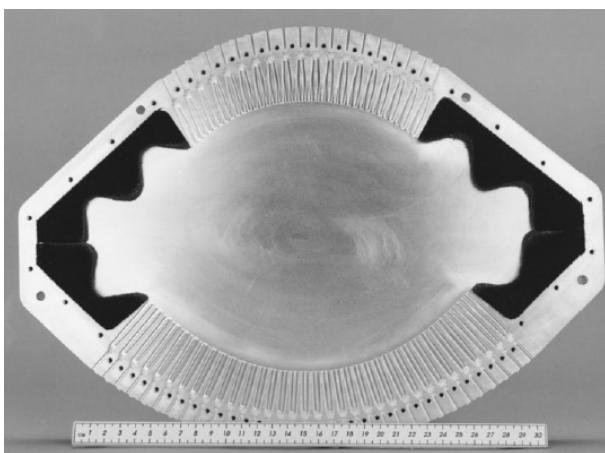
## 1.3 Les lentilles

La troisième et dernière grande famille de structures focalisantes est celle des lentilles. Elles se décomposent en deux sous branches : les lentilles à contraintes de propagation et les lentilles diélectriques. Les principales contraintes de ces structures sont leur fort encombrement et leur poids important, même si des travaux sont menés quant à l'utilisation de matériaux synthétiques de faible densité.

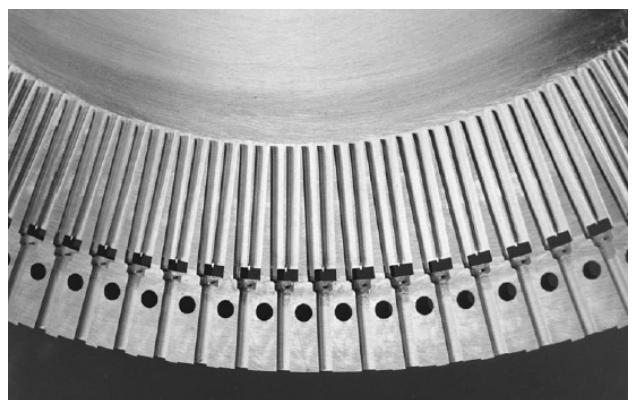
### 1.3.1 Les lentilles à contraintes de propagation

Les lentilles à contraintes de propagation sont des structures en réseau ou les éléments rayonnants voient leur phase, et parfois leur amplitude, corrigée afin de collimater le faisceau dans une direction donnée.

La plus connue de ces structures est la lentille de Rotman (Hansen 1991; J.P. Starski 1992; E.O. Rausch 1997; A. F. Peterson 1999; Fuchs 1999). La correction en phase se réalise grâce à l'emploi de guides d'onde et celle en amplitude via la distance de propagation en espace au sein de la cavité interne et de l'emploi de Tés Magiques, comme le montre sur la **Figure 16**, où la maquette est réalisée pour fonctionner à 36.8GHz. La pondération utilisée ici est du type de Taylor pour abaisser au maximum le niveau des lobes secondaires. L'intérêt de cette structure est double : elle permet non seulement de focaliser l'énergie mais, comme le montre le diagramme de la **Figure 17**, elle permet également de faire du multifaisceaux (19 faisceaux couvrant une ouverture de 22.2°). Malgré tout, son poids et la mécanique de précision nécessaire à sa réalisation demeurent des handicaps manifestes.

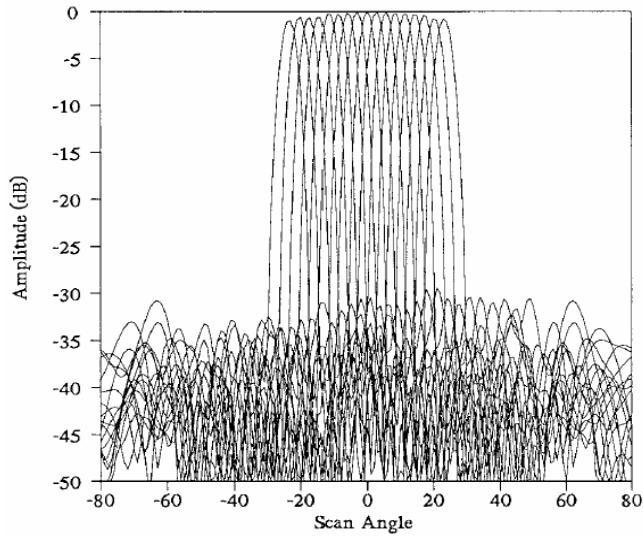


(a)



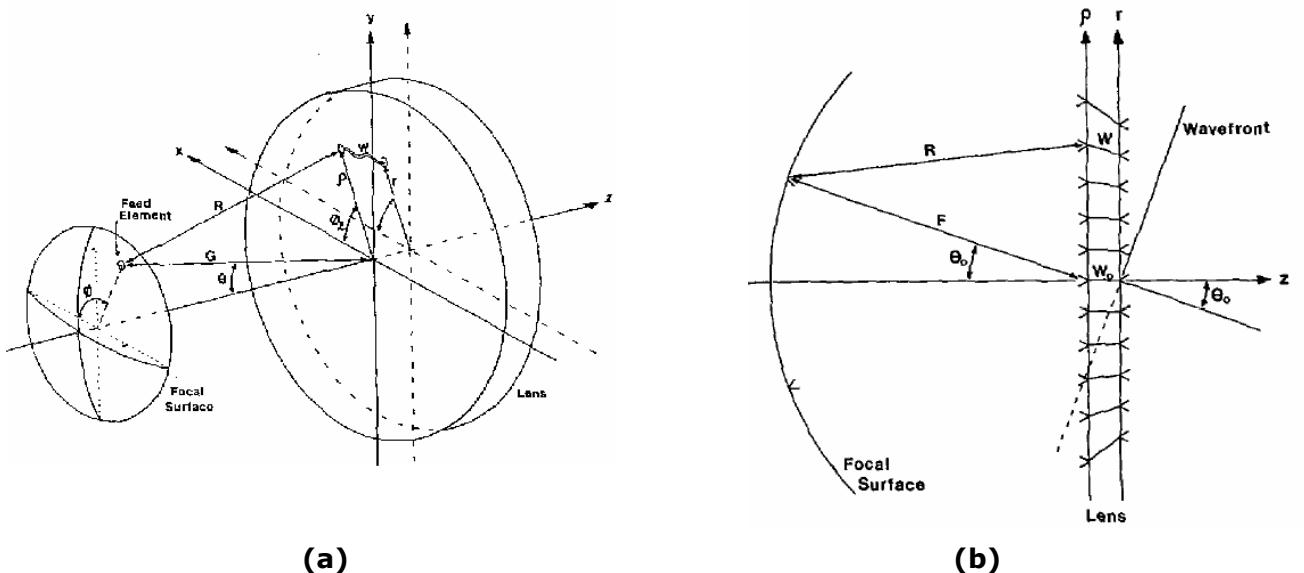
(b)

**Figure 16** Lentille de Rotman (A. F. Peterson 1999). (a) Détails de l'intérieur. (b) Arborescence d'alimentation en Tés Magiques.

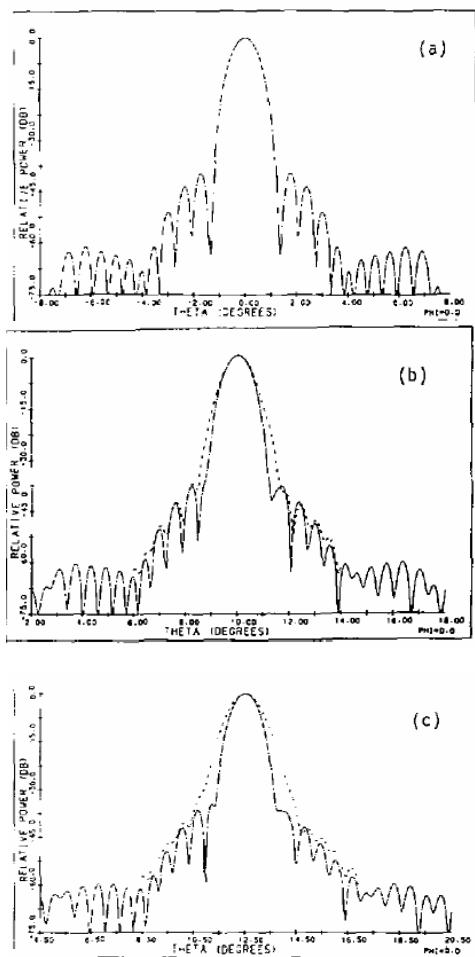


**Figure 17** Diagramme de rayonnement en champ lointain de la lentille de Rotman à 36.8GHz (A. F. Peterson 1999).

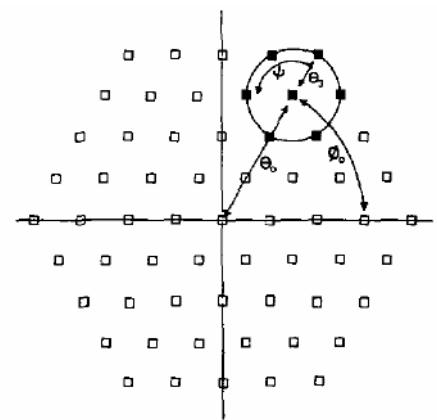
Afin de remédier à ces désagréments, Mac Grath (McGrath 1985; McGrath 1986) développe, il y a une vingtaine d'années, une lentille tridimensionnelle, la Discrete Lens, **Figure 18**, basée sur le principe de correction de phase de Rotmann. Il s'agit en fait de deux réseaux de patch séparés par un plan de masse, **Figure 19**. L'onde incidente arrive sur le premier réseau. Celui-ci transmet l'énergie au réseau se trouvant sur l'autre face grâce à des via ou des fentes tout en corrigeant les phases par l'utilisation de lignes micro rubans de longueurs différentes. Les déphasages sont choisis de telle sorte que différentes zones correspondent à des points de focalisation. Il s'agit donc d'une lentille multifaisceau très légère et facile à réaliser en technologie imprimée de par sa structure planaire.



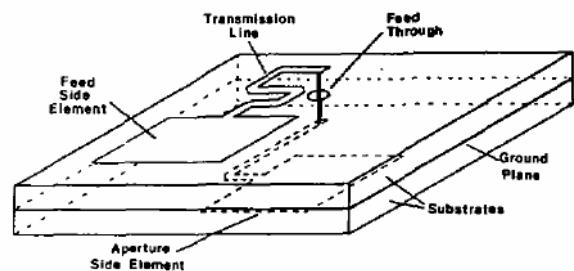
**Figure 18** Schéma de principe de la lentille discrète (McGrath 1986). (a) Vue globale. (b) Vue en coupe.



(a)

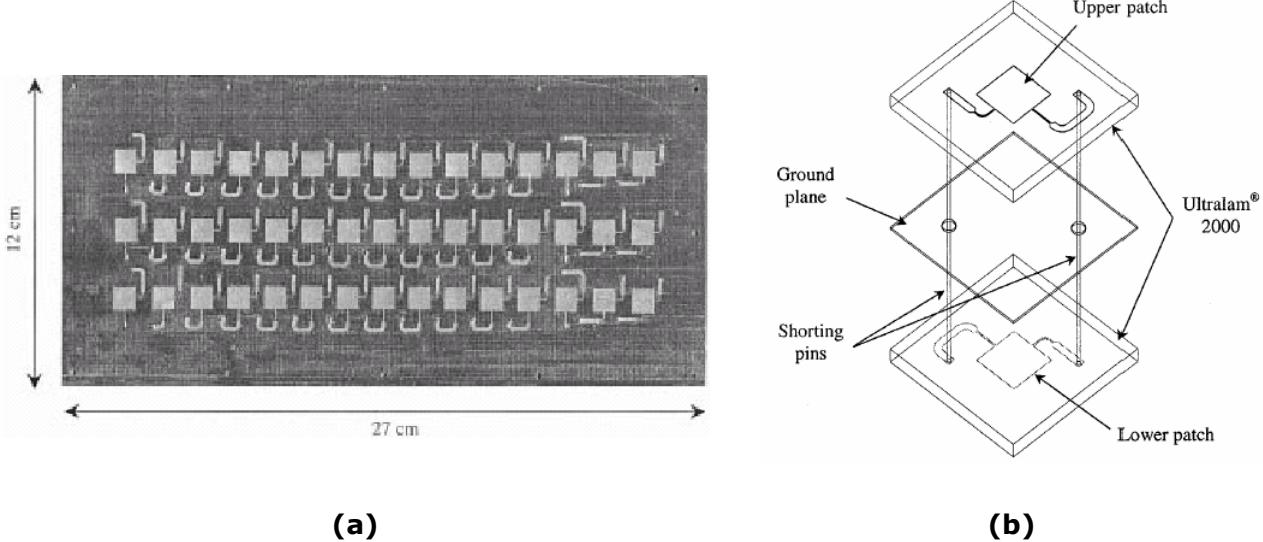


(b)

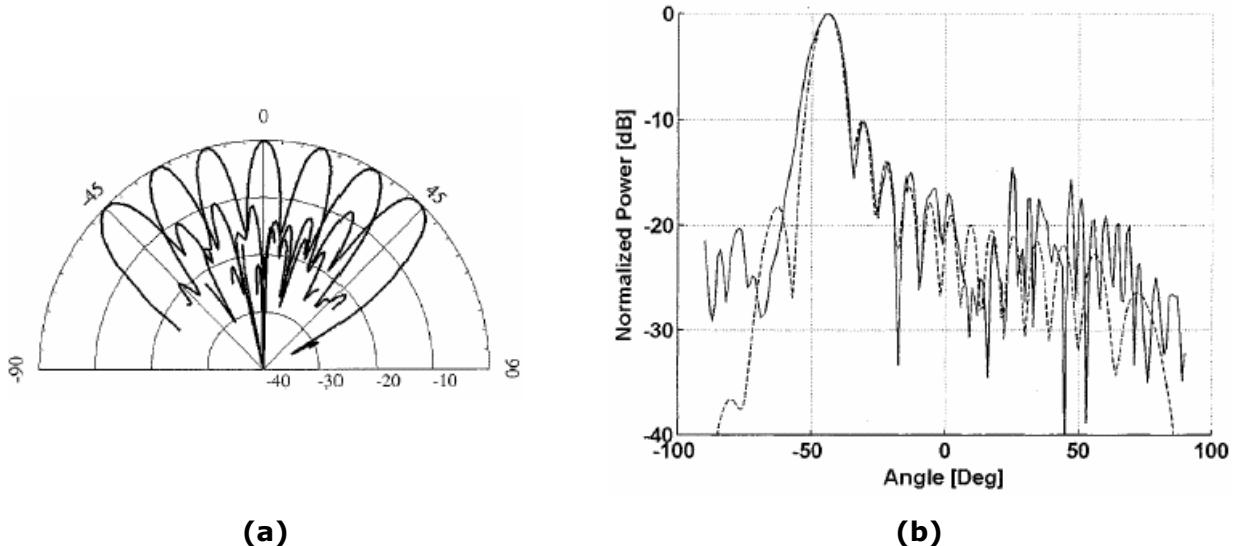


**Figure 19** Schéma de principe de la lentille discrète (McGrath 1986). (a) Diagrammes de rayonnement en champ lointain -a- mesure sur l'axe, -b- mesure à  $10^\circ$  de l'axe, -c- mesure à  $12.5^\circ$  de l'axe. Les courbes en pointillé sont faites sans refocalisation. Celles en continue sont faites avec refocalisation. (b) Le dessin supérieur présente la mise en réseau et le dessin inférieur les antennes élémentaires.

Ce travail est remis au goût du jour, (D. Popovic 2002) propose un réseau à double polarisation permettant de faire du multifaisceaux comme le montrent la **Figure 20** et la **Figure 21**.



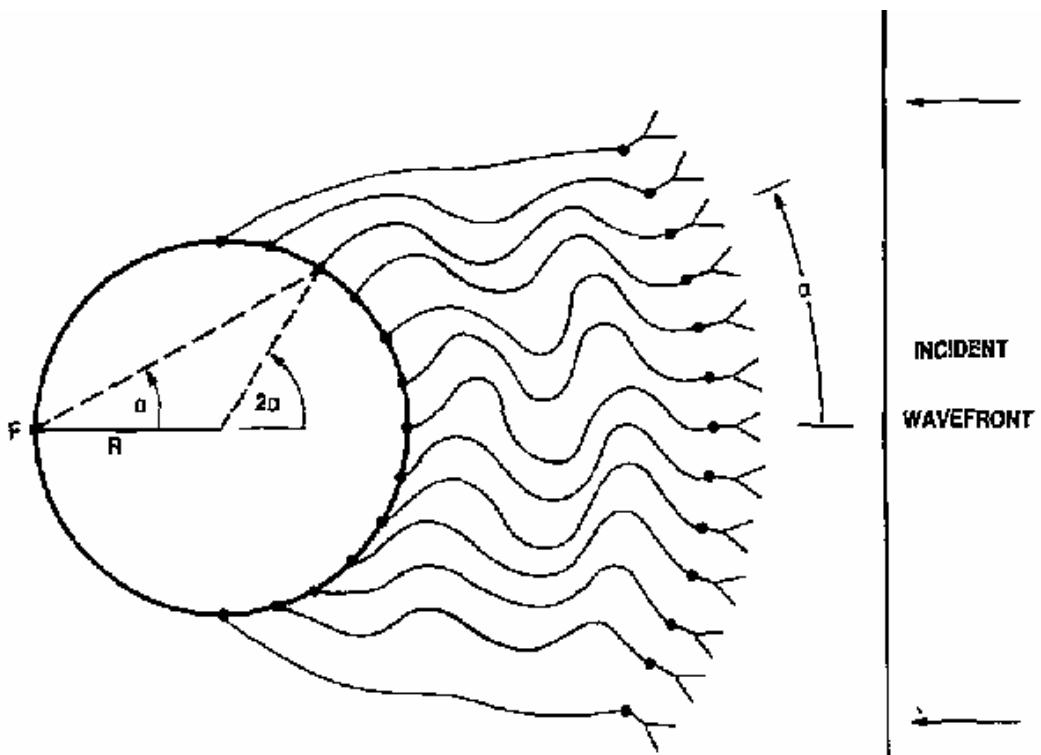
**Figure 20** (a) Face avant du réseau de 45 éléments fonctionnant à 10GHz à double polarisation. (b) Antenne élémentaire à partir de laquelle le réseau (a) est réalisé (D. Popovic 2002).



**Figure 21** (a) diagramme de rayonnement en champ lointain permettant de faire du multifaisceaux. (b) Diagramme de rayonnement en champ lointain lorsque la réception est décalée de  $-45^\circ$  sur la surface focale (---théorie, —mesure). Les mesures sont faites à 10GHz (D. Popovic 2002).

Une alternative à ce type de structure est la lentille R-KR (Thies 1973; Archer 1974; Thomas 1978). Il s'agit de l'association concentrique d'une boule de diélectrique, de permittivité  $\epsilon_r$ , de rayon R et d'un réseau d'antennes élémentaires placées sur une sphère de rayon  $KR/\epsilon_r$ . Ceci permet de faire collimater l'énergie de l'ensemble des antennes élémentaires sur un point de la boule diélectrique. Lorsque  $K/\epsilon_r$  est différent de 2, **Figure 22**, la

focalisation se fait mal. Quand le rapport vaut 2, c'est la lentille R-2R, il est possible de couvrir simultanément 360° de l'espace en utilisant des géométries semblables aux anneaux de Möbius : (Clapp 1984).



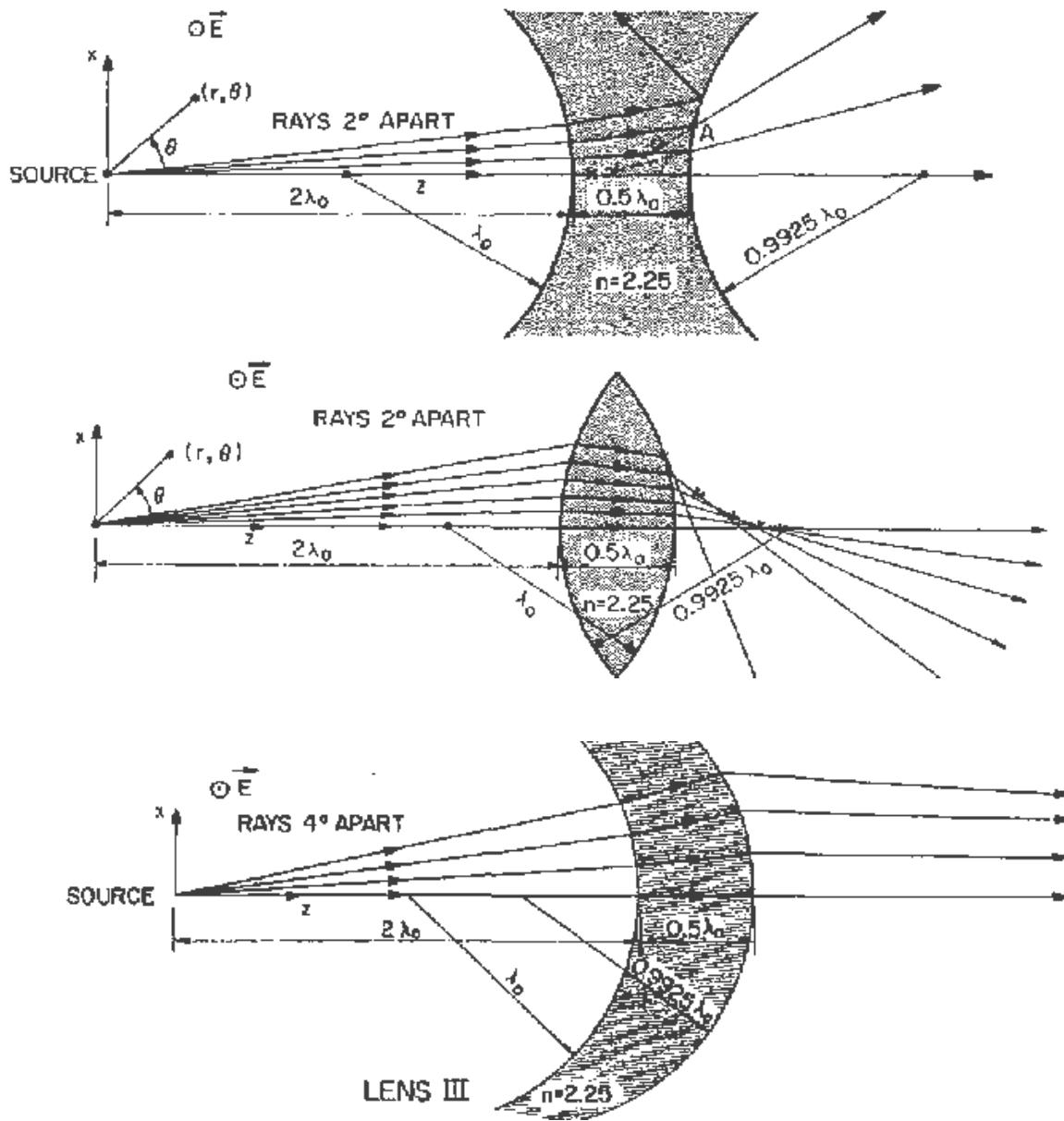
**Figure 22** Schéma de principe de la lentille R-2R (Clapp 1984).

### 1.3.2 Les lentilles diélectriques

L'utilisation de structures guidées n'est absolument nécessaire en soit quant à la mise en phase des différentes ondes électromagnétiques. Cette compensation de phase peut être effectuée via la propagation dans des milieux à indice différent de un. Deux techniques sont alors envisageables : profiler la lentille diélectrique, il s'agit alors d'une lentille profilée, ou Shaped Lens, ou générer un gradient d'indice pour collimater le/les faisceau(x).

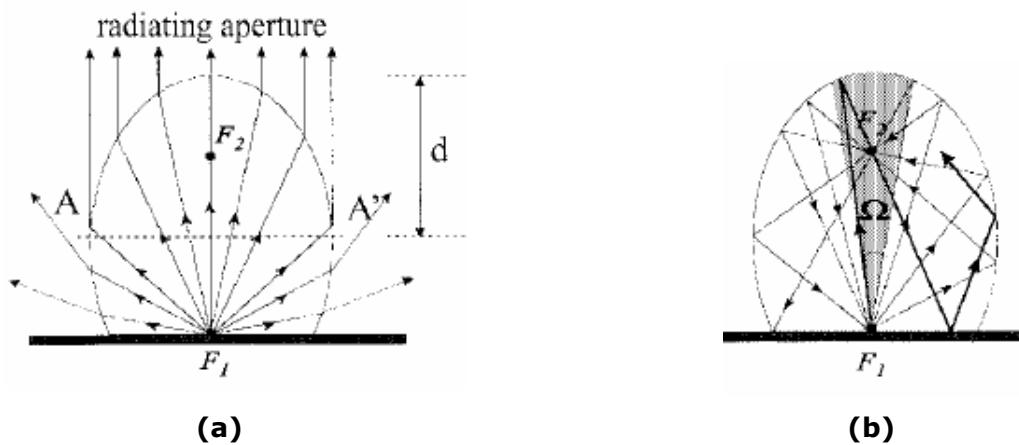
#### 1.3.2.1 Les lentilles profilées

Les lentilles profilées traditionnelles découlent de travaux anciens de l'optique géométrique en combinant des formes convexes et concaves, comme le montre la **Figure 23**. Etant peu utilisées actuellement en micro-ondes du fait de leurs performances limitées, le lecteur est invité à consulter la littérature optique pour plus de renseignements. Un moyen de palier aux dysfonctionnements de ces lentilles, il est possible d'optimiser leurs profils.

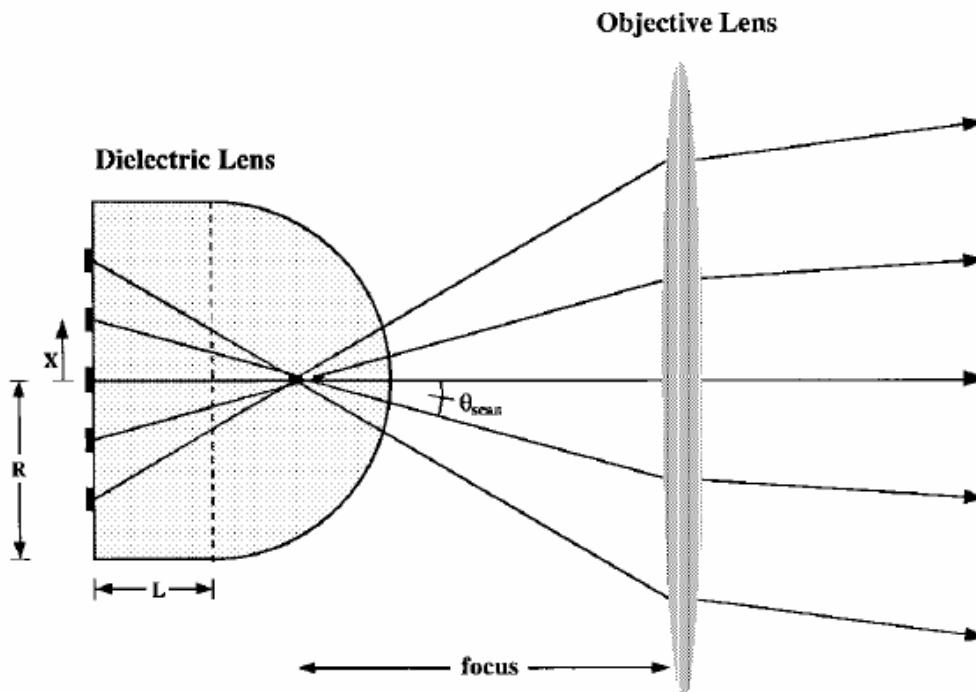


**Figure 23** Descriptif des lentilles traditionnelles découlant de l'optique. Du haut vers le bas, lentille diélectrique sphérique double concave, lentille diélectrique sphérique double convexe, lentille diélectrique sphérique convexo-concave.

Ainsi, la lentille prend une forme plus ellipsoïdale, (D. F. Filipovic 1997; A. Neto 1999), et la source est accolée à la lentille, comme le montrent la **Figure 24** et la **Figure 25**. Le principal but ici est d'obtenir un pinceau très fin orienté selon l'axe optique.

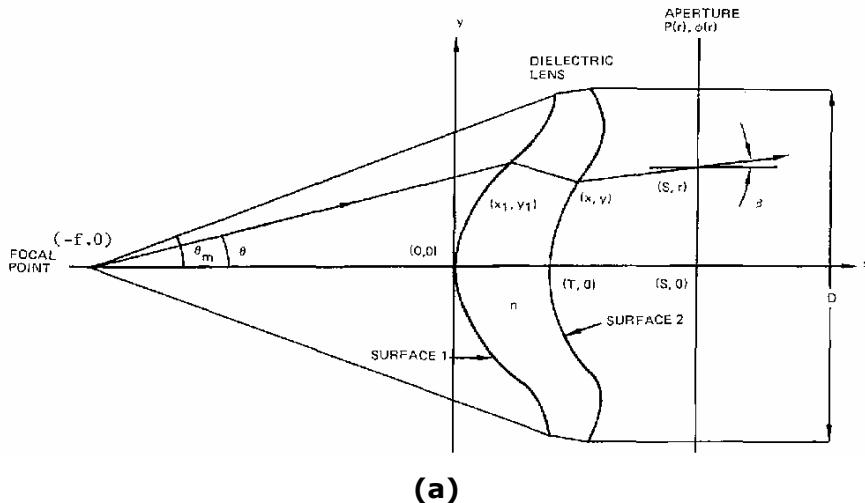


**Figure 24** Illustration des lentilles ellipsoïdales (A. Neto 1999). (a) Rayons transmis. (b) Rayons réfléchis.

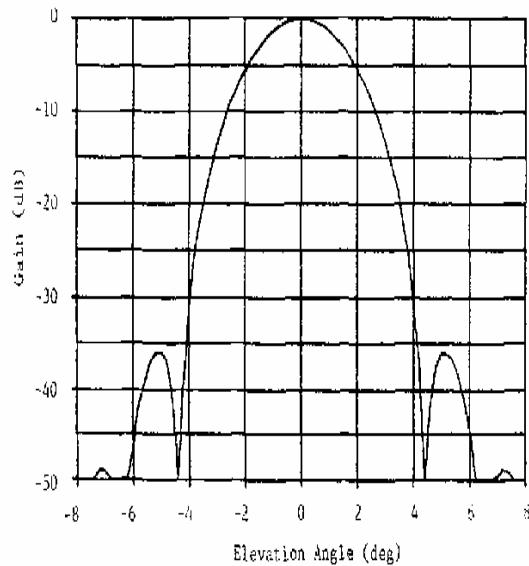


**Figure 25** Réseau linéaire alimentant une lentille hémisphérique étendue associée à une lentille double convexe pour assurer la refocalisation (D. F. Filipovic 1997).

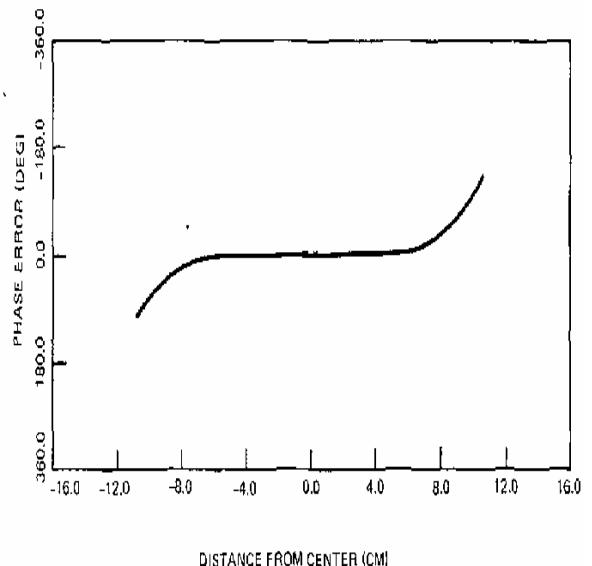
De nombreux travaux (Fernandes 1999) sont en cours dans ce domaine, en particulier dans le domaine millimétrique car les lentilles commencent alors à avoir des dimensions raisonnables. (Lee 1983) propose une technique permettant de profiler une lentille afin que le diagramme de rayonnement en champ lointain de la lentille alimentée par cornet suive le gabarit proposé en **Figure 26**.



(a)



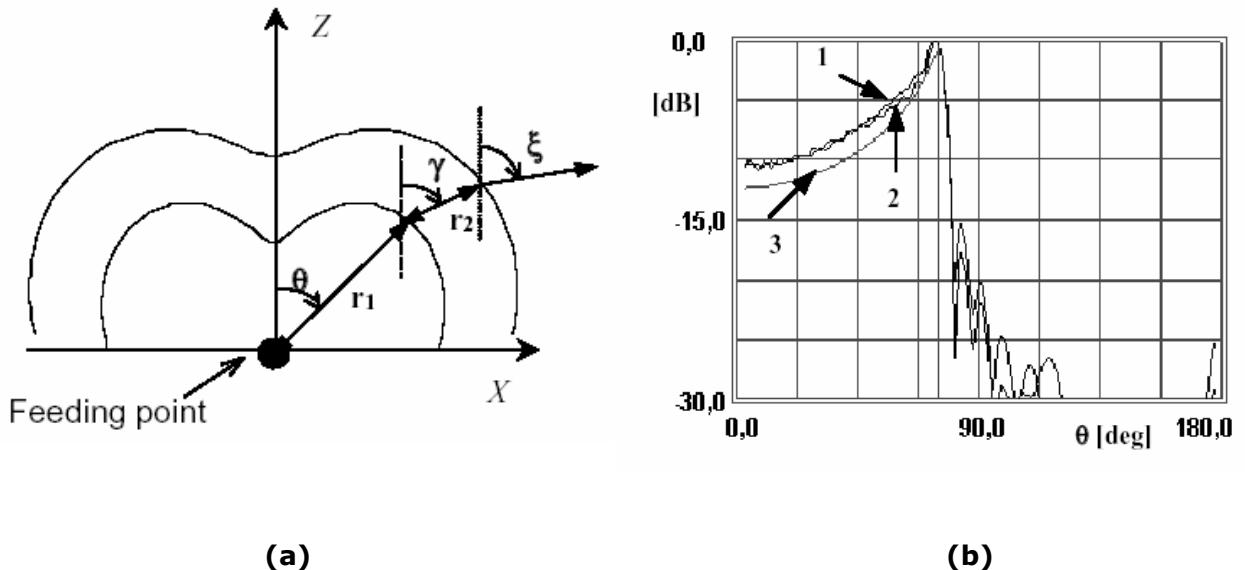
(b)



(c)

**Figure 26** Lentille profilée de Lee (Lee 1983). (a) Schéma de la lentille pour une ouverture respectant la loi  $E(r) = (1-(r/1.05)^2)^3$ . (b) Diagramme de rayonnement en champ lointain de la lentille. (c) Erreur de phase en fonction de la distance au centre de la lentille.

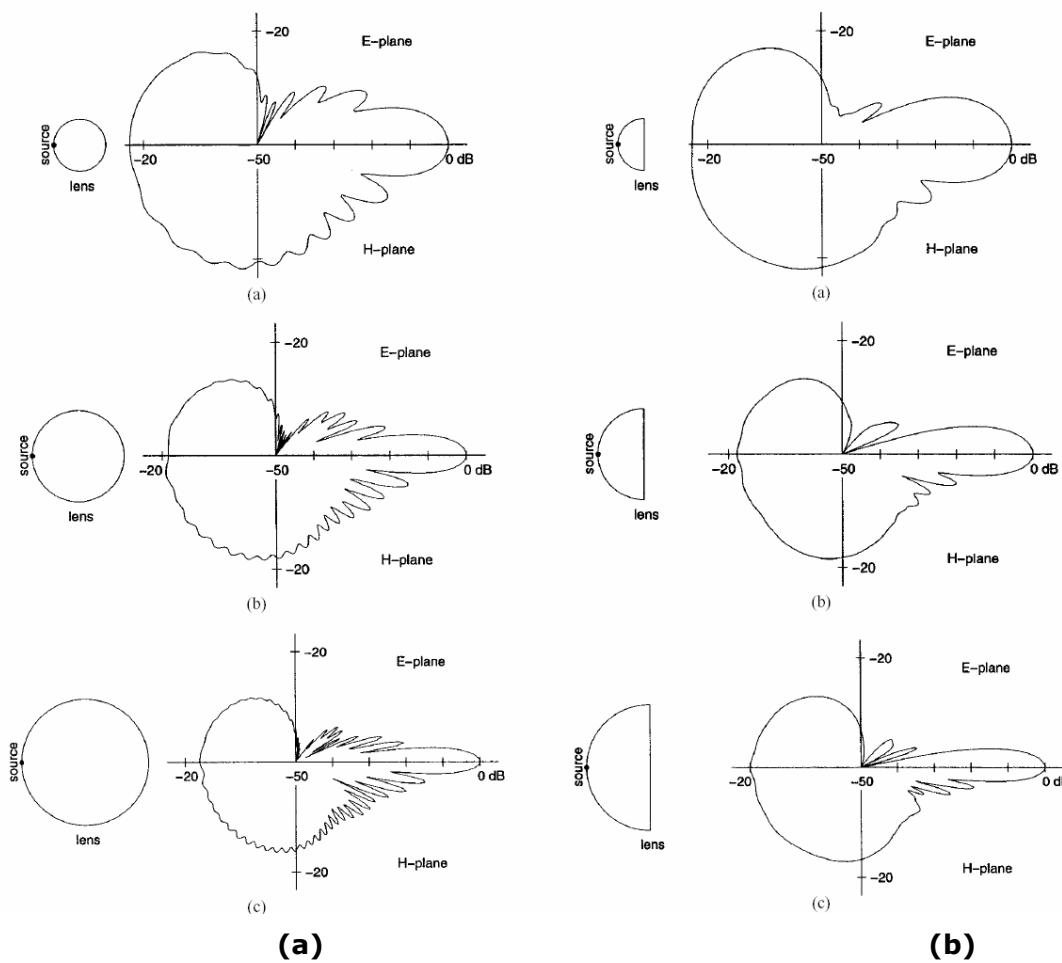
(Fernandes 2000) utilise les deux techniques (lentille profilée à gradient d'indice) comme le montre la **Figure 27**. Le diélectrique interne possède une permittivité relative de 2.53 et l'externe 1.59. Le profile en  $\sec^2\theta$  permet de réduire au maximum le spill-over cellulaire. Cette lentille, excitée par un mode TE11 pour fonctionner en polarisation circulaire à 62.5GHz, possède un fort rendement, 92.5%, alors qu'utilisant une seule couche, de permittivité relative de 2.53, donne un rendement de 85.0%. La couche extérieure peut être considérée comme une couche d'adaptation.



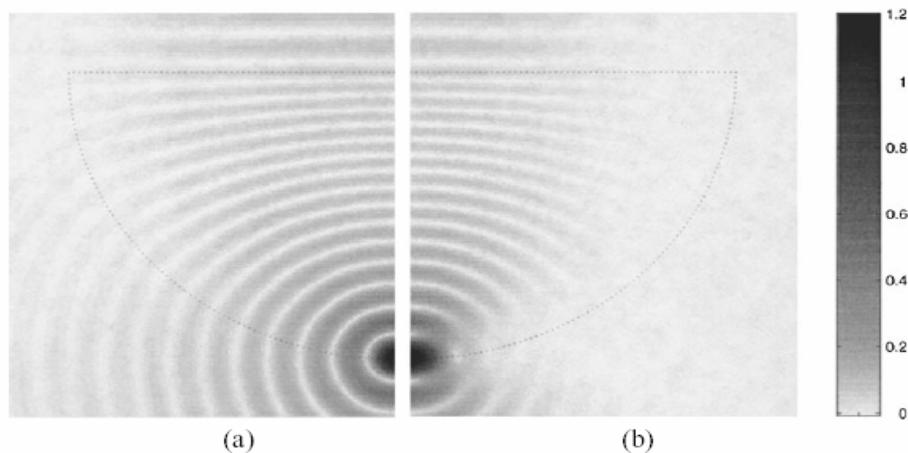
**Figure 27** Lentille profilée de Fernandez (Fernandes 2000) fonctionnant à 62.5GHz à simple ou double couche de diélectrique. (a) Schéma de la lentille. (b) Diagramme de rayonnement en champ lointain de la lentille -1- double couche, -2- simple couche, -3- diagramme souhaité en  $\sec^2\theta$ .

### 1.3.2.2 Lentilles à gradient d'indice

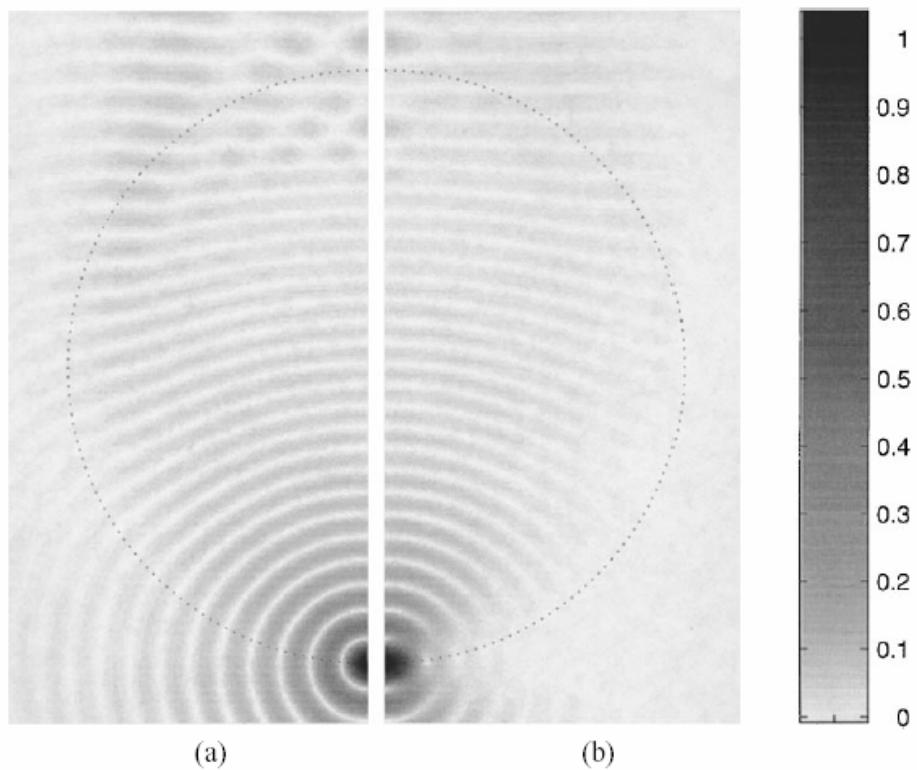
La focalisation peut être effectuée par l'utilisation de sphères. La plus simple d'entre elles est la lentille K (Cuming 1963). Il s'agit d'une boule homogène de constante diélectrique relative  $\epsilon_r = 3.5$ . Cette valeur est obtenue en minimisant les différences de longueur optique entre les différents chemins optiques, ou géodésiques. Ainsi, chaque point de sa surface focalise l'énergie. Des distributions d'indice plus évoluées permettent d'en améliorer les performances. Les plus connues sont les distributions, **Figure 31**, de Lüneburg  $\epsilon_r(r) = 2-(r/R)^2$ , (Lüneburg 1944; Rozenfeld 1976; A. D. Greenwood 1999), d'Eaton  $\epsilon_r(r) = (r/R)^2$ , d'Eaton-Lippman  $\epsilon_r(r) = (2R-r)/r$ , (Rozenfeld 1976), de l'œil de poisson de Maxwell  $\epsilon_r(r) = 4/(1+(r/R)^2)^2$ , (Lüneburg 1944; Rozenfeld 1976; A. D. Greenwood 1999) où R est le rayon de la lentille. La lentille de Lüneburg est sans conteste la plus intéressante. En effet, sa distribution est telle que chaque point de sa surface est un point focal idéal, **Figure 28**, **Figure 30** et **Figure 32**. La distribution d'Eaton-Lippmann réagit comme un miroir : les points objets et images conjugués sont parfaitement confondus. Il s'agit d'un réflecteur omnidirectionnel. Dans le cas de l'œil du poisson de Maxwell, les points objets et images conjugués sont diamétriquement opposés sur la surface extérieure de la lentille. Ainsi, par symétrie, une onde plane se forme sur le plan médian, **Figure 29**. Ceci explique l'utilisation de ce type de distribution dans le cas d'une demie boule. La description de ces lentilles n'est pas plus développée pour le moment car font l'objet d'une étude plus détaillée dans les chapitres suivants. Il est, par ailleurs, à noter que ces distributions sont également utilisées en espace bidimensionnel. Les lentilles et leur distribution sont alors cylindriques.



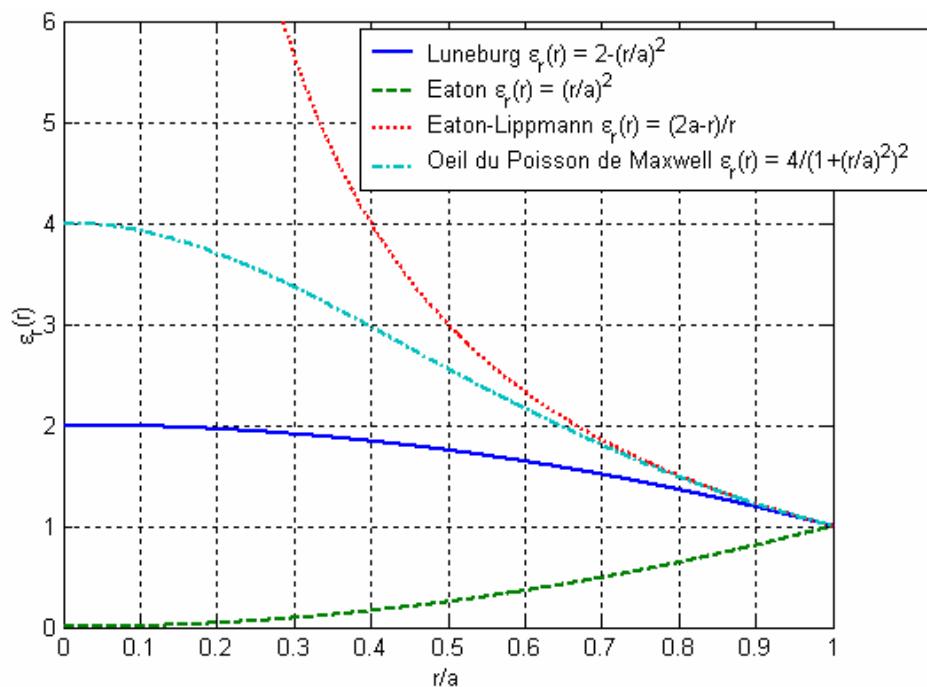
**Figure 28** Description succinct du fonctionnement de (a) la lentille de Lüneburg et de la demi lentille (b) de l'œil du poisson de Maxwell.(A. D. Greenwood 1999). Du haut vers le bas, les diamètres sont respectivement de  $4\lambda$ ,  $7\lambda$  et  $10\lambda$ . L'alimentation est un dipôle de Hertz.



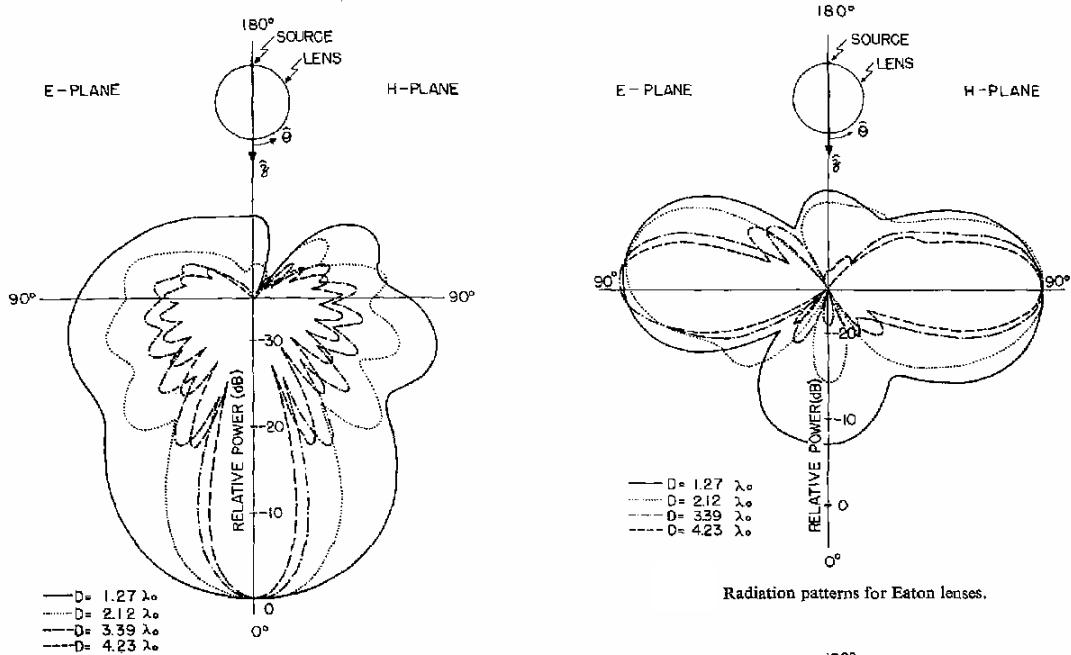
**Figure 29** Distribution de champ au sein et à proximité de la demi lentille de l'œil du poisson de Maxwell en plan pour (a) et plan E pour (b), (A. D. Greenwood 1999). Le diamètre de la lentille est de  $10\lambda$  et l'excitation est un dipôle de Hertz.



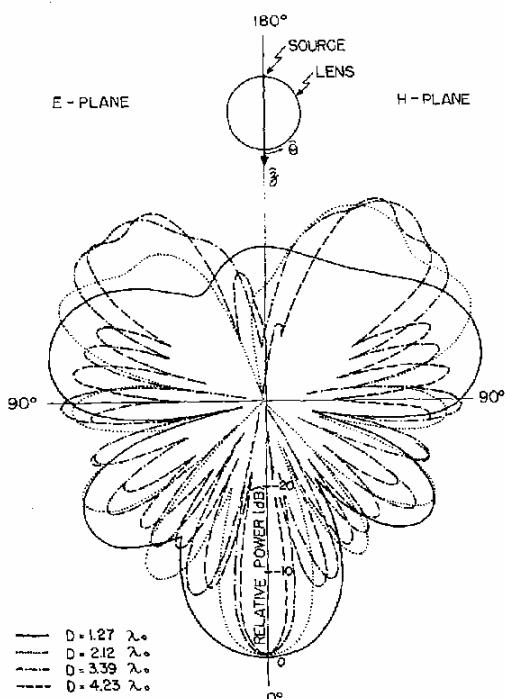
**Figure 30** Distribution de champ au sein et à proximité de la lentille de Lüneburg en plan pour (a) et plan E pour (b), (A. D. Greenwood 1999). Le diamètre de la lentille est de  $10\lambda$  et l'excitation est un dipôle de Hertz.



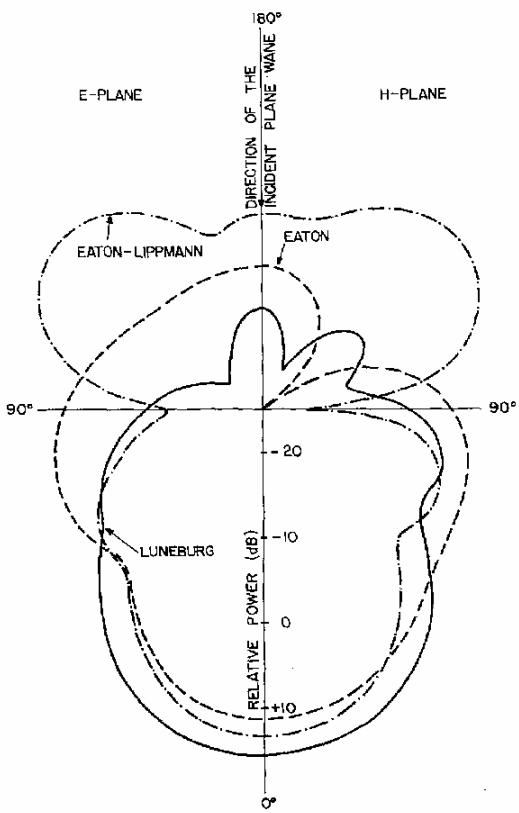
**Figure 31** Distributions d'indice de Lüneburg, d'Eaton, d'Eaton-Lippmann et de l'œil du poisson de Maxwell.



Radiation patterns for Luneburg lenses.



Radiation patterns for Eaton-Lippmann lenses.

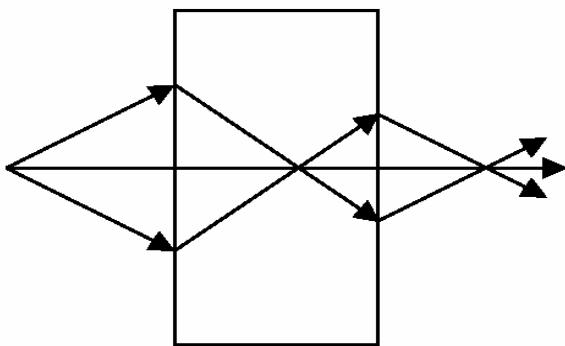


Bistatic scattering cross sections of lenses normalized to their geometrical cross sections ( $\rho_a = 5$ ).

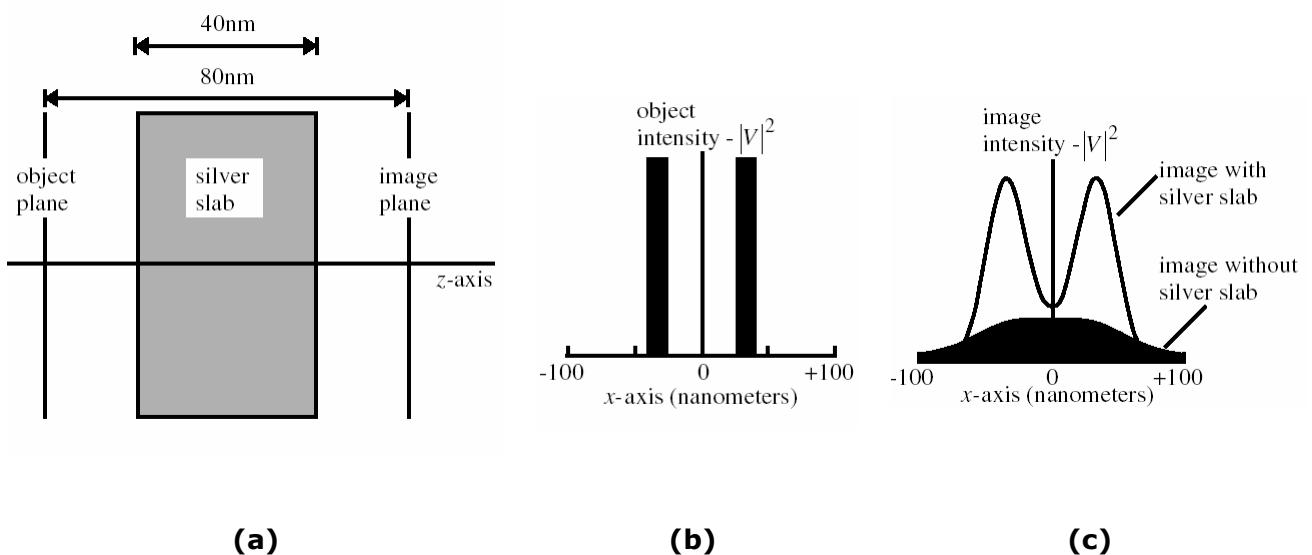
**Figure 32** Diagrammes de rayonnement en champ lointain pour les lentilles suivant les distributions de Lüneburg, Eaton et Eaton-Lippmann (Rozenfeld 1976).

### 1.3.2.3 La lentille dite parfaite

Un nouveau type de lentilles dites parfaites, (Pendry 2000), est en train de naître. Elles sont basées sur les propriétés d'avoir, à au moins une fréquence donnée, un indice de réfraction  $n = -1$ , une permittivité diélectrique relative et une perméabilité magnétique relative toutes deux égales à -1. Ces propriétés confèrent au matériau d'être toujours parfaitement adapté, **Figure 33** : son impédance est toujours celle de l'espace libre. Par ailleurs, aucun déphasage n'apparaît, y compris pour les ondes évanescentes. Par voie de conséquence, toute l'énergie est utilisée dans le phénomène de focalisation. Le système est autocollimaté. Ceci confère à ces lentilles le titre de lentilles parfaites. Les matériaux utilisés, pour les fréquences de l'ordre du gigahertz, sont des pavés, **Figure 34**, en or, argent ou cuivre, pour ne citer que les meilleurs, immergés dans un plasma électrique et/ou magnétique.



**Figure 33** Principe de la lentille parfaite à indice de réfraction négatif. Les angles de réfractions sont systématiquement inversés (Pendry 2000).



**Figure 34** (a) Vue en coupe de la lentille. Un champ quasi électrostatique agit sur la lentille en argent. (b) Champ électrostatique au niveau du plan objet. (c) Champ électrostatique au niveau du plan image avec et sans lentille en argent. La reconstruction n'est pas parfaite en raison des absorptions non nulles, bien que très faibles, de l'argent (Pendry 2000).

## **1.4 Conclusion**

De cet état de l'art ressort le constat suivant : bien que regroupés en trois principales grandes familles, les réflecteurs, les structures périodiques et les lentilles, les structures focalisantes balayent un très large éventail techniques de construction allant d'une simple remise en phase des ondes électromagnétiques, par des lentilles classiques tirées de l'optique, à l'utilisation de propriétés exotiques les propriétés d'indice de réfraction négatif de métaux plongés dans un plasma électromagnétique.

Les lentilles sphériques possèdent également des propriétés de focalisation. Leur étude est l'objet des chapitres suivants.

## 1.5 Références

- A. D. Greenwood, J. J. (1999). "Finite-Element Analysis of Complex Axisymmetric Radiating Structures." IEEE Trans. Antennas Propagat. **47**: 1260-1266.
- A. F. Peterson, E. O. R. (1999). "Scattering Matrix Integral Equation Analysis for the Design of a Waveguide Rotman Lens." IEEE Trans. Antennas Propagat. **47**: 870-878.
- A. Neto, D. P., A. Toccafondi, S. Maci (1999). "Mutual Coupling Between Slots Printed at the Back of Elliptical Dielectric Lenses." IEEE Trans. Antennas Propagat. **47**: 1504-1507.
- A.L. Cullen, P. K. Y. (1971). "The Accurate Measurement of Permittivity by Means of an Open Resonator." Proc. R. Soc. Lond.: 493-509.
- Archer, D. H. (1974). Lens-Fed Multiple Beam Arrays. Electronic Progress, Lexington, MA.
- B. Huder, W. M. (1988). "Flat Printed Reflector Antenna for mm-Wave Applications." Electron. Lett. **24**(6): 318-319.
- B. Khayatian, Y. R.-S. (2000). A Dual-Band Dual-Feed Fresnel Zone Antenna Concept: Application in Solar Sails Missions. AP-2000, Davos, Switzerland.
- C. Granet, T. M. (1998). "Designing Axially Symmetric Cassegrain ou Gregorian Dual-Reflector Antennas from Combinations of Prescribed Geometric Parameters." IEEE Trans. Antennas Propagat. **40**(2).
- Clapp, R. E. (1984). "Extending the R-2R lens to 360°." IEEE Trans. Antennas Propagat. **32**: 661-671.
- Cuming, E. (1963). Constant-K Lenses. APL Technical Digest.
- D. F. Filipovic, G. P. G., S. Raman, G. M. Rebeiz (1997). "Off-axis Properties of Silicon and Quartz Dielectric Lens Antennas." IEEE Trans. Antennas Propagat. **45**: 760-766.
- D. Popovic, Z. P. (2002). "Multibeam Antennas with Polarization and Angle Diversity." IEEE Trans. Antennas Propagat. **50**(5): 651-657.
- D.C. Chang, M. C. H. (1995). "Multiple-Polarization Microstrip Reflectarray Antenna with High Efficiency and Low Cross Polarization." IEEE Trans. Antennas Propagat. **43**(8): 829-834.
- D.M. Pozar, S. D. T. (1998). A Microstrip Reflectarray using Crossed Dipoles. IEEE Int. Symp. Antennas Propagat., Atlanta, GA.

D.M. Pozar, S. D. T., H.D. Syrigos (1997). "Design of Millimeter Wave Microstrip Reflectarray." IEEE Trans. Antennas Propagat. **45**: 287-295.

D.M. Pozar, S. D. T., R. Pokuls (1999). "A Shaped-Beam Microstrip Patch Reflectarray." IEEE Trans. Antennas Propagat. **47**(7).

D.M. Pozar, T. A. M. (1993). "Analysis of a Reflectarray Antenna using Microstrip Patches of Variable Size." Electron. Lett. **29**: 657-658.

D.N. Black, J. C. W. (1987). "Millimeter Wave Characteristics of Phase Correcting Fresnel Zone Plates." IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques **35**(12): 1122-1129.

E.O. Rausch, A. F. P., W. Wiebach (1997). "A Low Cost, High Performance, Electronically Scanned mm Wave Antenna." Microwave Journal: 20-32.

Fernandes, C. A. (1999). "Shaped Dielectric Lenses for Wireless Millimeter-Wave Communications." IEEE Antennas Propagat. Mag. **41**: 141-151.

Fernandes, M. G. M. V. S. a. C. A. (2000). "Shaped Double-Shell Dielectric Lenses for Wireless Millimeter Wave Communications." 2000 IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. Dig. **38**: 1674-1677.

Fuchs, H. H. (1999). "Design of a Rotman Lens for Beamsteering of 94GHz Antenna Arrays." Electron. Lett. **35**(11): 854-855.

G.Z. Jiang, W. X. Z. (1997). The Effect of Layer Spacing on the Properties of Double-Layer Fresnel Zone Plate Lens. IEEE AP-S Int. Symp.

G.Z. Jiang, W. X. Z., K. Kang (1996). The Focused Fields of Fresnel Zone Plate Lens. ISAP'96, Chiba, Japan.

H.D. Hristov, M. H. A. J. H. (1995). "Millimeter Wave Fresnel Zone Plate Lens Antenna." IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques **43**(12): 2779-2785.

H.D. Hristov, M. H. A. J. H. (1995). "Quater Wave Fresnel Zone Planar Lens and Antenna." IEEE Trans. on Microwave and Guided Wave Letters **5**(8): 249-251.

Hansen, R. C. (1991). "Design Trade for Rotman Lenses." IEEE Trans. Antennas Propagat. **39**(4): 464-472.

Huang, J. (1991). Microstrip Reflectarray. IEEE Int. Symp. Antennas Propagat., Ontario, Canada.

Huang, J. (1995). BandWidth Study of Microstrip Reflectarray and a Novel Phased Reflectarray Concept.

- J. Huang, R. J. P. (1998). "A Ka-Band Microstrip Reflectarray with Elements having Variable Rotation Angles." IEEE Trans. Antennas Propagat. **46**: 650-656.
- J.E. Garrett, J. C. W. (1991). "Fresnel Zone Plate Antenna at Millimeter wavelengths." Int. Journ. of Infrared and Millimeter Waves **12**(3): 195-220.
- J.M. Van Houten, M. H. A. J. H. (1994). "Analysis of a Phase-Correcting Fresnel Zone Plate Antenna with Dielectric/Transparent Zones." J. of Electromagn. Waves and Appl. **8**(7): 847-858.
- J.P. Starski, J. L. R. Q. (1992). "Circuits and Components for Active Antennas Arrays." Proc. of ESA.
- L.F. Van Bursik, C. E. H. (1961). "The Zone Plate as a Radio Frequency Focusing Element." IRE Trans. on Antennas and Propagat. **9**: 319-320.
- Lafond, O. (2000). Conception et Technologies d'Antennes Imprimées Multicouches à 60GHz. Traitemet du Signal et Télécommunications. Rennes, Université de Rennes 1.
- Lee, J. J. (1983). "Dielectric Lens Shaping and Coma-Correction Zoning, part I: Analysis." IEEE Trans. Antennas Propagat. **31**: 211-216.
- Luneburg, R. K. (1944). Mathematical Theory of Optics. Providence.
- M. Thévenot, C. C., A. Reinex, B. Jecko (1999). "Directive Photonic-Bandgap Antennas." IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques **47**(11).
- M. Thévenot, C. C., A. Reinex, B. Jecko (1999). Radôme en Matériau à Bande Photonique Interdite pour Améliorer la Directivité des Antennes. JNM, Arcachon, France.
- M.A. Gouker, G. S. S. (1992). "A Millimeter Wave Integrated Circuit Antenna Based on the Fresnel Zone Plate." IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques **40**(5): 968-977.
- McGrath, D. T. (1985). "A Three-Dimensional Beamformer with Planar Front and Back Faces." IEEE Int. Antennas Propagat. Symp. **23**: 463-465.
- McGrath, D. T. (1986). "Planar Three-Dimensional Constrained Lenses." IEEE Trans. Antennas Propagat. **34**: 46-50.
- Miyata, K. (1980). "Center-Fed Parabolic Reflector Antenna Cross Polarization due to Slight Right-Left Asymmetric Feed Pattern." IEEE Trans. Antennas Propagat. **28**(2).
- P. Wood, G. S. (2000). Electrical Charactérisation for a Breadboard Deployable Membrane Lens Antenna. AP 200, Davos, Switzerland.

P.H. Siegel, R. J. D. (1991). "The Dielectric-filled Parabola: A New Millimeter/Submillimeter Wavelength Receiver/Transmitter Front End." IEEE Trans. Antennas Propagat. **39**(1): 40-47.

Pendry, J. B. (2000). "Negative Refraction Makes a Perfect Lens." Physical Review Letters **85**(18).

R. Sauleau, P. C., J.P. Daniel, T. Matsui (2000). Gaussian Beam Antennas Fed by a Horn or by a Planar Source. ISAP 2000, Fukuoka, Japan.

R.D. Javor, X. D. W., K. Chang (1995). "Design and Performance of a Microstrip Reflectarray Antenna." IEEE Trans. Antennas Propagat. **43**(9): 932-930.

R.E. Munson, H. H., J. Hanken (1987). Microstrip Reflectarray Antenna for Satellite Communicvation and RCS Measurement or Reduction. US, 4-684-952.

R.N. Clarke, C. B. R. (1982). "Fabry-Pérot and Open Resonators at Microwave and Millimeter Wave Frequency." J. Phys. E: Sci. Instrum. **15**: 9-23.

Rozenfeld, P. (1976). "The Electromagnetic Theory of Three-Dimensional Inhomogeneous Lenses." IEEE Trans. Antennas Propagat. **24**: 365-370.

S.D. Targonski, D. M. P. (1994). Analysis and Design of a Microstrip Reflectarray using Patches of Variable Sizes. IEEE AP-S Int. Symp.

S.D. Targonski, D. M. P. (1996). Minimization of Beam Squint in Microstrip Reflectarrays using an Offset Feed. IEEE Int. Symp. Antennas Propagat., Baltimore, MD.

T. Matsui, M. K. (1996). Gausian Beam Antenna. US, 5-581-267.

Thies, W. H. (1973). Omnidirectional Multibeam Antenna. US, 3-754-270.

Thomas, D. T. (1978). "Multiple Beam Synthesis of Low Sidelow Patterns in Lens Fed Arrays." IEEE Trans. Antennas Propagat. **26**: 883-886.

Y. Guo, S. K. B. (1992). "A High Efficiency Quater Wave Zone Plate Reflector." IEEE Microwave and Guided Wave Letters **2**(12): 470-471.

Y. Ji, M. F. (1994). "Design and Analysis of a Folded Fresnel Zone Plate Antenna." Int. Journ. of Infrared and Millimeter Waves **15**(8): 1385-1406.

Y.J. Guo, S. K. B. (1995). "Phase Correcting Zonal Reflector Incorporating Rings." IEEE Trans. Antennas Propagat. **43**(4): 350-355.

Y.J. Guo, S. K. B. (1993). "On the Subzone Phase Correction of Fresnel Zone Plate Antennas." Microwave and Optical Technology Letters **6**(15): 840-843.



## 2. LES LENTILLES SPHERIQUES A GRADIENT D'INDICE

---

Comme le montre le chapitre précédent, il existe de nombreux systèmes de focalisation. Le travail présenté ici concerne plus particulièrement les lentilles à distributions sphériques de gradient d'indice. Le cas le plus connu est celui de la lentille dite de Lüneburg (Lüneburg 1944), inventée par R.K. Lüneburg en 1944. Il est à noter qu'au cours des années, différentes orthographies apparaissent. Ainsi, il est courant de rencontrer les écritures Luneberg, Lunberg, Lunebourg, pour ne citer que celles-ci.

Compte tenu de l'originalité du travail de Lüneburg, il apparaît intéressant de retracer les grandes lignes lui permettant d'arriver à la distribution qui porte son nom. Par la suite, sont présentés les principaux travaux relatifs à ce type de lentille.

### 2.1 La technique utilisée par Lüneburg. Généralisation

La technique utilisée par Lüneburg est purement optique. Le plan dans lequel se propage le rayon est le plan ( $O,x,y$ ). La distribution d'indice est prise continue et radiale  $n(x,y,z) = n(r)$ . Tout d'abord, il considère la caractéristique de surface  $\varphi = \psi(x,y,z) - ct = 0$ . L'équation du front d'onde, encore appelée équation Eiconal, à vérifier est alors :

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 + \psi_z^2 = n^2 \text{ avec } \psi_u = \frac{\partial}{\partial u} \psi. \quad (1)$$

Dans le cas présent, cette équation devient :

$$\psi_x^2 + \psi_y^2 = n^2(r). \quad (2)$$

La solution de cette équation est prise de telle sorte qu'elle s'écrive sous la forme  $\psi(x,y;K)$ , où  $K$  est un paramètre arbitraire. Ainsi, tous les rayons lumineux du plan ( $O,x,y$ ) vérifient le théorème de Jacobi :

$$\frac{\partial}{\partial K} \psi = \text{constante}. \quad (3)$$

Donc, par passage en coordonnées polaires, la solution de l'équation (2) est :

$$\psi = K\theta \pm \int_{r_0}^r \sqrt{n^2 - K^2/r^2} dr. \quad (4)$$

En posant  $\rho(r) = nr$ , et en utilisant (3), ressort une solution que les trajets des rayons de lumière, ou géodésiques, doivent satisfaire :

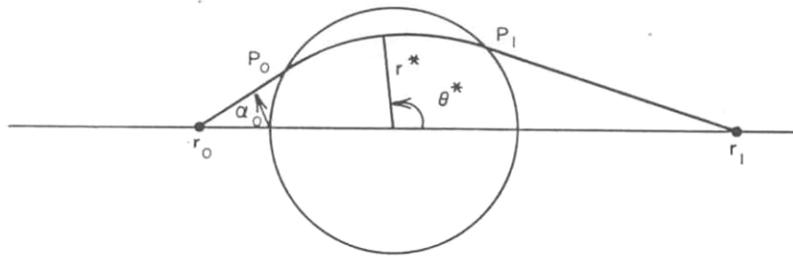
$$\theta = \theta^* - K \int_{r^*}^r \frac{dr}{r\sqrt{\rho^2 - K^2}}, \quad (5)$$

où  $r = r^*$  est la solution de l'équation  $r^2 = K^2$ . La position angulaire associée est  $\theta^*$ . Les grandeurs métriques sont dès à présent normalisées par rapport au rayon de la sphère dont la distribution est recherchée. Ainsi, la distribution d'indice est donnée par :

$$n = \begin{cases} n(r), & r < 1 \\ 1, & r \geq 1 \end{cases}, \text{ avec } n(1) = 1 \text{ par continuité de } n. \quad (6)$$

Alors, la géodésique recherchée qui passe par le point  $(x_0 = -r_0, y_0 = 0)$  traverse la sphère et passe par le point  $(x_1 = r_1, y_1 = 0)$ , comme indiqué en **Figure 1**. Par voie de conséquence, (5) aboutit à :

$$\theta^* = \pi + K \int_{r_0}^{r^*} \frac{dr}{r\sqrt{\rho^2 - K^2}}. \quad (7)$$



**Figure 1** Description des paramètres utilisés par Lüneburg.

Le changement de variable  $\tau = \ln r$ , associé aux relations (5) et (7), donne à résoudre l'équation intégrale suivante :

$$K \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau}{\sqrt{\rho^2(\tau) - K^2}} = \frac{1}{2} \left( \pi + \arcsin \frac{K}{r_1} + \arcsin \frac{K}{r_0} - 2 \arcsin K \right) = f(K). \quad (8)$$

Cette équation peut être résolue en la transformant en intégrale d'Abel via la fonction :

$$\Omega(\rho) = \begin{cases} -\ln r(\rho), & \rho < 1 \\ 0, & \rho \geq 1 \end{cases}. \quad (9)$$

En effet, il ressort :

$$-K \int_K^1 \frac{d\Omega(\rho)}{\sqrt{\rho^2 - K^2}} = f(K), \quad (10)$$

dont l'inverse est :

$$\Omega(\rho) - \Omega(1) = \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{f(K)}{\sqrt{K^2 - \rho^2}} dK. \quad (11)$$

En remarquant que :

$$-\ln \rho = \frac{2}{\pi} \int_{\rho}^1 \frac{\frac{\pi}{2} - \arcsin K}{\sqrt{K^2 - \rho^2}} dK, \quad (12)$$

découle la relation :

$$\ln n = \ln \frac{\rho}{r} = \omega(\rho, r_0) + \omega(\rho, r_1), \quad (13)$$

où la fonction  $\omega$  est donnée par :

$$\omega(\rho, a) = \frac{1}{\pi} \int_a^1 \frac{\arcsin \frac{t}{a}}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} dt. \quad (14)$$

Dans le cas de la lentille de Lüneburg,  $r_0 \rightarrow +\infty$  et  $r_1 = 1$ . Or :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \omega(\rho, a) = 0 \text{ et } \omega(\rho, 1) = \frac{1}{2} \ln \left( 1 + \sqrt{1 - \rho^2} \right). \quad (15)$$

D'où l'expression bien connue :

$$n(r) = \sqrt{2 - r^2}. \quad (16)$$

Dans le cas de l'œil du poisson de Maxwell,  $r_0 = 1$  et  $r_1 = 1$ . Ce qui aboutit à la distribution connue :

$$n(r) = \frac{2}{1 + r^2}. \quad (17)$$

Eaton, dans (Eaton 1952), propose de généraliser l'étude faite par Lüneburg en considérant que  $P_0$  et  $P_1$  peuvent également se trouver à l'intérieur de la sphère, **Figure 2**. La solution obtenue est du type paramétrique en  $\gamma$  :

$$\begin{cases} r = \sin \gamma \tan^k \frac{\gamma}{2}, n = \cot \tan^k \frac{\gamma}{2}, \rho_0 \leq r \leq 1, \\ r = \sqrt{\rho_0 \sin \gamma \tan^k \frac{\gamma}{2}}, n = \sqrt{\frac{\sin \gamma}{\rho_0}} \cot \tan^k \frac{\gamma}{2}, 0 \leq r \leq \rho_0. \end{cases} \quad (18)$$

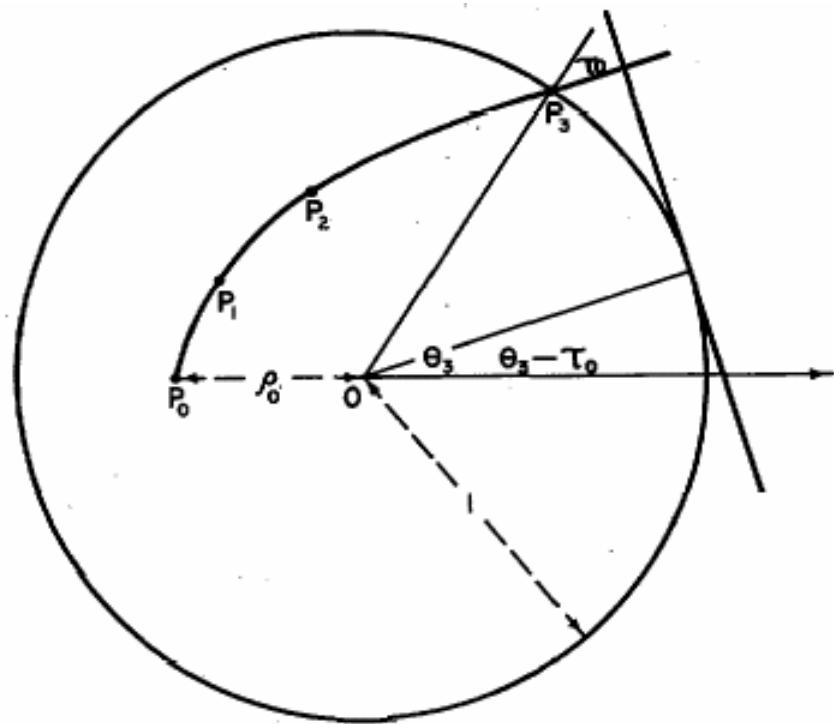
La constante  $k$  est obtenue via la relation  $\theta_3 = t_0 - (1-k)\pi/2$ , où  $(1, \theta_3)$  est la coordonnée polaire du point où la géodésique quitte la lentille.  $\rho_0 = r(P_0)$ .

Pour  $k = 1$ , ressort la distribution d'Eaton-Lippmann :

$$n = \sqrt{\frac{2-r}{r}}. \quad (19)$$

Et Pour  $k = 0$ , découle la distribution d'Eaton :

$$n = r. \quad (20)$$



**Figure 2** Schéma de principe de la lentille d'Eaton, (Eaton 1952).

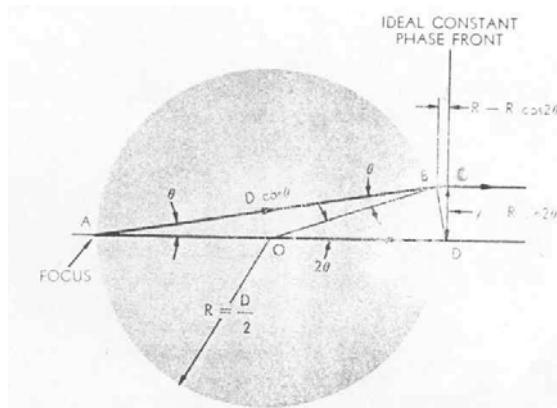
## 2.2 Les différentes techniques de réalisations existantes

La distribution proposée par Lüneburg est du type continu :  $n^2(r) = 2-(r/R)^2$ . Jusqu'à présent, personne n'a réussi à recréer parfaitement ce gradient continu. Les techniques employées s'en rapprochent de façons artificielles : assemblage d'un plus ou moins grand nombre de coquilles homogènes concentriques recréant une distribution discrétisée, utilisation de matériaux à permittivités diélectriques effectives. Par ailleurs, certains auteurs proposent des idées, quant à la réalisation de ces lentilles, sans pour autant les avoir mises en pratique.

### 2.2.1 Lentille constante K

La manière la plus simple de créer un gradient d'indice est, en toute première approximation, de prendre une boule complètement homogène. Cette idée est à la base de la construction de la lentille constante K, breveté par la société Emerson & Cuming, Canton, Massachusetts, en 1963. Sa dénomination provient du fait qu'il s'agit d'une boule composée d'un unique diélectrique dont la permittivité est notée K.

La théorie associée à la détermination de la constante diélectrique K est très simple. Il s'agit en fait de minimiser les aberrations, ou erreurs de phases, entre un rayon quelconque et le rayon passant par le centre de la sphère. Les paramètres géométriques sont donnés en **Figure 3**.



**Figure 3** Définition des paramètres géométriques caractérisant la lentille constante-K.

L'aberration  $\Delta$  est donnée par la relation  $\Delta = n \cdot AD - (n \cdot AB + BC)$ , où  $n^2 = K$ . D'où les relations normalisées :

$$\frac{\Delta/\lambda}{D/\lambda} = 2n \sin^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \theta, \text{ et } y/\lambda = \frac{1}{2} \sin 2\theta. \quad (21)$$

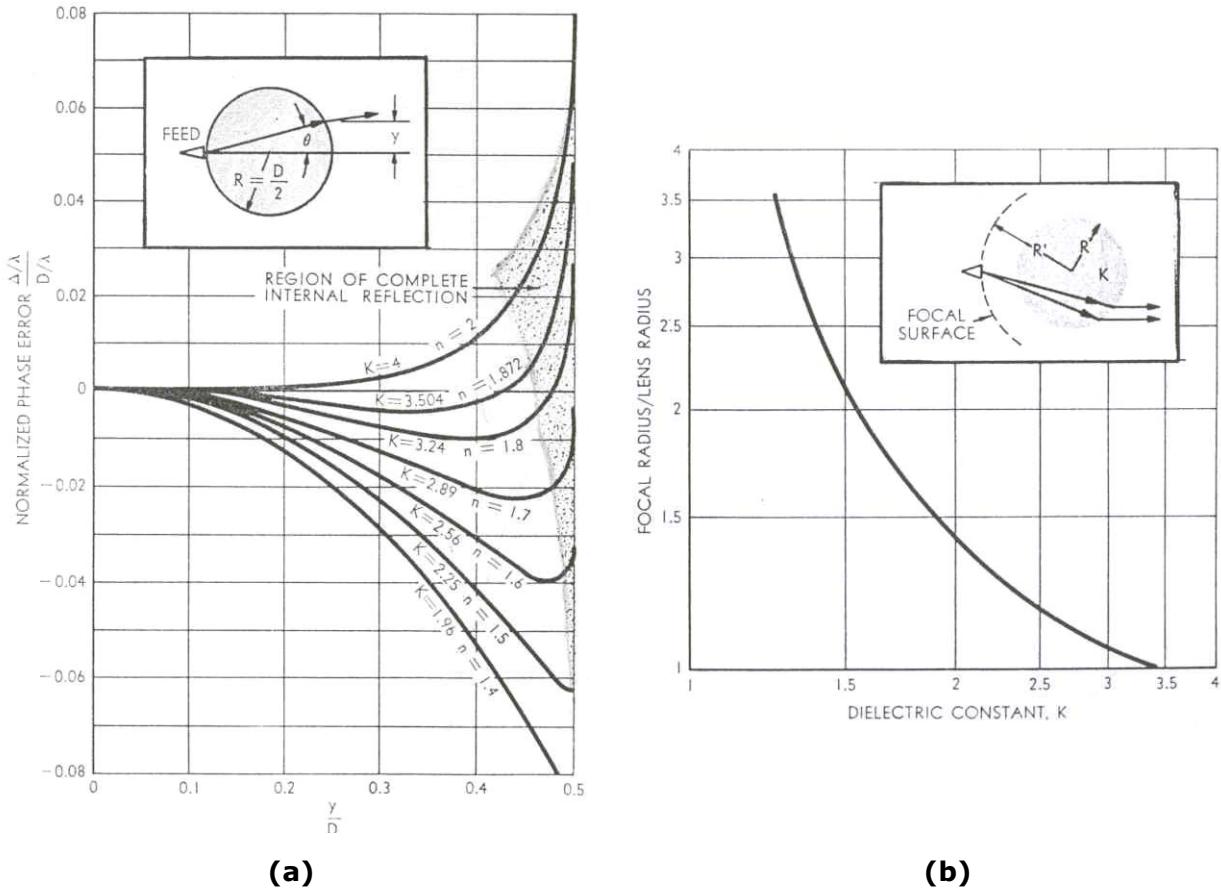
Par ailleurs, les réflexions internes sont totales lorsque :

$$\sin \theta \geq \frac{1}{n} = \frac{1}{\sqrt{K}}. \quad (22)$$

Ainsi, grâce à la **Figure 4**, le meilleur compromis en termes de constante électrique et  $K = 3.5$ , où l'aberration ne dépasse pas  $0.004D/\lambda$  en valeur absolue. Lorsque la constante diélectrique  $K$  devient inférieur à 3.5, le rayon  $R'$  de la sphère focale évolue comme suit :

$$\frac{R'}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{K}{K-1}. \quad (23)$$

Cette évolution est donnée en **Figure 4**.



**Figure 4** (a) *Aberrations sur des lentilles homogènes de différentes constantes diélectriques  $K$ .* (b) *Evolution de la distance focale.*

Un certain nombre de prototypes sont réalisés. Des contraintes sont imposées. Tout d'abord, le choix de la valeur de la constante diélectrique. En effet, cette valeur ne doit pas excéder 3.5 pour éviter que le point focal se trouve au sein de la lentille. Par ailleurs, elle ne doit pas être inférieure à 2.0 afin de conserver une valeur de distance pas trop excessive. A cela s'ajoute l'influence des pertes du matériau : une expression approchée de l'énergie dissipée dans la lentille, pour un angle de pertes  $\delta$ , est :

$$P_{diss \text{ dB}} \approx 36 \frac{R}{\lambda} \left( K^{\frac{3}{2}} - (K-1)^{\frac{3}{2}} \right) \cdot \tan \delta. \quad (24)$$

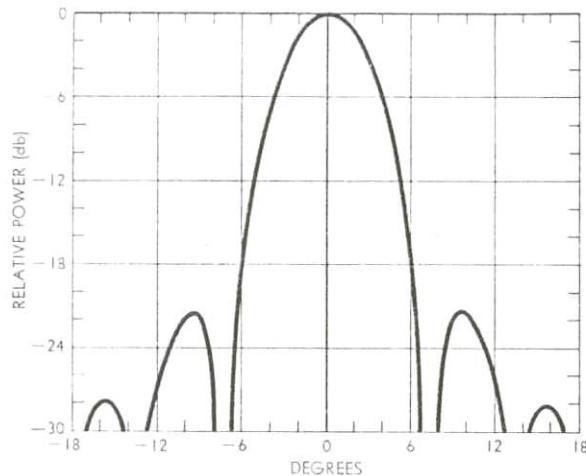
C'est à dire, pour une constante diélectrique  $K = 2.0$  et une tangent de pertes  $\tan \delta = 10^{-3}$ , une lentille de  $30\lambda$  de diamètre dissipe 1dB de l'énergie.

De plus, il existe une forte contrainte sur l'homogénéité du matériau. Si, la valeur de la constante diélectrique au cœur de la lentille varie de 1%, pour un diamètre de  $30\lambda$ , le déphasage produit sur la surface de la lentille est de  $0.3\lambda$ .

L'aspect mécanique, quant à la réalisation de la forme sphérique, influence également fortement les performances de la lentille. En effet, un décalage de  $1/20$  du centre électrique décentre le lobe principal du diagramme de rayonnement de 10% de l'ouverture à mi-puissance. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant :

|                                       |                                              |
|---------------------------------------|----------------------------------------------|
| Matériau utilisé                      | Emerson & Cuming Styccast TPM-7              |
| Fréquence                             | 9.375GHz                                     |
| Diamètre de la lentille               | $12.4\lambda$                                |
| Permittivité diélectrique utilisée    | 2.34                                         |
| Rapport rayon focal/rayon lentille    | 1.24 mesuré (1.23 calculé)                   |
| Dimension du cornet exciteur          | $1.24\lambda \times 0.94\lambda$             |
| Ouverture à mi-puissance              | $5.6^\circ$                                  |
| Directivité, selon la <b>Figure 5</b> | 29dB                                         |
| Symétrie électrique                   | 0.2dB à $-15$ dB du niveau du lobe principal |

Le pertes associées au « spillover », la désadaptation due à la présence de la lentille, ainsi que le gain de la structure ne sont pas fournis.



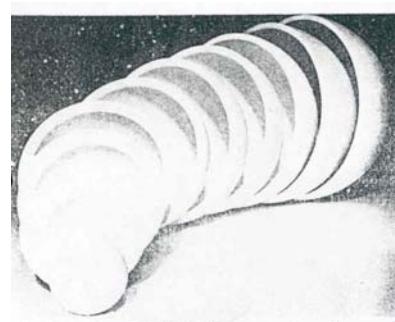
**Figure 5** Diagramme de rayonnement en champ lointain pour une lentille constante- $K$  de diamètre  $12\lambda$  à 9.375GHz.

Le principal inconvénient de ce type de lentille est son poids. Ainsi, l'inventeur de cette lentille propose de développer des matériaux diélectriques artificiels de faible densité.

La technologie de la lentille constante  $K$  proposée par Emerson & Cuming est donc fonctionnelle et possède de bonnes performances.

## 2.2.2 Lentille à coquilles homogènes

Le gradient d'indice peut être approché de façon plus précise. En effet, il est possible de discréteriser beaucoup plus finement la distribution de Lüneburg. Cette idée a été encore une fois exploitée pour la première fois par la société Emerson & Cuming (Cuming; Cuming 1960). Comme l'indique la **Figure 6**, il s'agit de l'imbrication de coquilles concentriques homogènes.



**Figure 6** Photographie des demi coquilles composant la lentille de Lüneburg discrète (Cuming; Cuming 1960).

La technique de synthèse de matériaux utilisée par Emerson & Cuming est le dopage de matériaux à faible permittivité diélectrique par de la poudre d'oxyde de titaniun, qui possède une très forte constante diélectrique. Le dopage par des particules métalliques de la taille du micron n'est pas utilisé dans les applications micro-ondes car, malgré de très bonnes performances d'isotropie et d'homogénéité, le facteur de dissipation est trop élevé. Dans le cas du dopage par l'oxyde de titaniun, le facteur de dissipation est maintenu inférieur à  $5 \cdot 10^{-4}$ . Par ailleurs, la meilleure approximation de la distribution impose de prendre un nombre maximum de coquilles. A contrario, Les coûts de fabrication dictent de ne pas dépasser 10 coquilles pour que le tout reste rentable. D'où le choix de 10 coquilles pris par Emerson & Cuming. De plus, la fréquence maximale d'utilisation de la lentille impose aux coquilles d'avoir une épaisseur de  $\lambda/2$  au maximum pour éviter qu'une partie de l'énergie ne soit piégée par un quelconque phénomène de résonance en cavité au sein de chaque coquille. En effet, ceci réduirait la transmission de l'énergie d'une coquille à l'autre et le gain de la structure serait fortement amoindri.

Un certain nombre de problèmes sont inhérent à cette technique. L'usinage des coquilles, bien que précis, n'est pas parfait. Ainsi, des gaps d'air apparaissent entre les coquilles. Ceci a pour effet de défocaliser et diffuser légèrement l'énergie. Un moyen pour atténuer l'influence des gaps d'air est d'essayer de les distribuer de façon homogène. Cela peut être réalisé en orientant les jonctions d'assemblage entre les coquilles de même diamètre différemment d'une couche à l'autre et sur l'ensemble des couches. Malgré tout, cette technique n'annule pas les effets des gaps d'air.

Par ailleurs, pour remédier au problème de poids, (H. Schrank 1995) propose d'utiliser des matériaux dont la permittivité diélectrique est très légèrement supérieure à 2, comme le polystyrène et/ou le polyéthylène, et de les expander pour couvrir la plage 1 – 2 en termes de permittivités diélectriques. La lentille obtenue voit alors son poids fortement diminuer. Afin de synthétiser ces matériaux, il propose d'utiliser la formule empirique suivante :

$$\varepsilon_r = \frac{2}{5} \cdot (\varepsilon_{r0})^{\frac{d}{d_0}} + \frac{3}{5} \cdot \left( 1 + \frac{d}{d_0} \cdot (\varepsilon_{r0} - 1) \right), \quad (25)$$

où  $\varepsilon_r$  est la permittivité diélectrique de la coquille,  $d$  la densité du matériaux expansé composant cette coquille et  $d_0$  sa densité avant expansion. En plus de cela, pour abaisser encore plus le poids de la lentille, il propose de doper des matériaux fortement expansé, et donc très légers, par des particules de matériaux à très forte permittivité diélectrique, comme les céramiques ou les métaux.

### 2.2.3 Lentille de Lüneburg artificielle

Une autre technique permettant de se rapprocher est brevetée par Zimmerman et al. (K.A. Zimmerman 1995) en 1995. Celle-ci consiste en fabriquant de manière artificielle la distribution de diélectrique. Celle-ci est réalisée sous l'hypothèse que la permittivité diélectrique effective  $\epsilon_r$  d'un matériau, de constante diélectrique  $\epsilon_m$ , dans contenant des trous est linéairement dépendante de la densité de trou :

$$\epsilon_r(r) = \frac{A_{sphère} - A_{trou}}{A_{sphère}} \epsilon_m + \frac{A_{trou}}{A_{sphère}}, \quad (26)$$

où  $A_{sphère}$  est la surface de la sphère de rayon  $r$  et  $A_{trou}$ , la surface occupée par les trous sur cette même sphère. Le matériau de base est choisi de telle sorte que sa permittivité diélectrique soit  $\epsilon_m = 2$ . Par ailleurs, la sphère contient  $N$  trous de rayons  $y$ . À la surface d'une lentille de Lüneburg idéale,  $A_{sphère} = A_{trou}$ . En choisissant l'évolution du rayon  $y$  des trous à la position  $r$  de façon parabolique :  $y = ar^2$ , et de la loi de distribution à approcher (16), ressort alors la relation :

$$R^2 = \frac{4}{Na^2}. \quad (27)$$

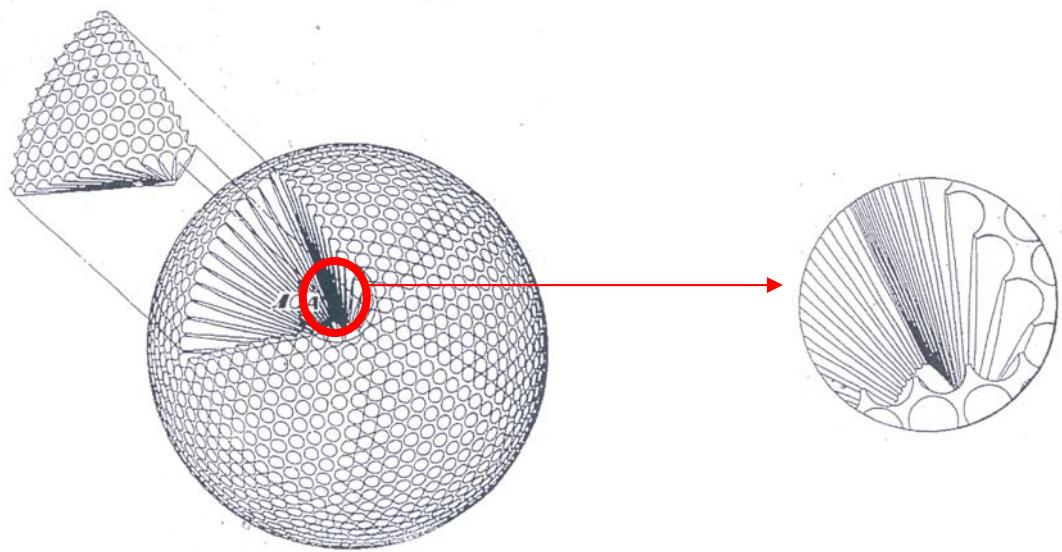
$N$  est choisi de telle sorte que le diamètre maximum d'un trou,  $y(R)$ , soit inférieur à la plus petite longueur d'onde de travail. Ceci permet d'aboutir à l'évolution du diamètre des trous :

$$y = ar^2 = \frac{2r^2}{R\sqrt{N}}. \quad (28)$$

Le brevet propose une autre approximation quand à la valeur de l'indice de réfraction  $n$  d'un matériau de densité  $\rho$  basée sur la loi optique de Dale-Gladstone  $n-1 = k\rho$ , où  $k$  est une constante. Pour le Rexolite, le TPX et tous les matériaux à haute densité en polypropylène en micro-ondes,  $k = 0.5655\text{cm}^3\text{g}^{-1}$ . En suivant une démarche similaire, la loi régissant l'évolution des rayons  $y$  des trous à la distance  $r$  du centre de la sphère est :

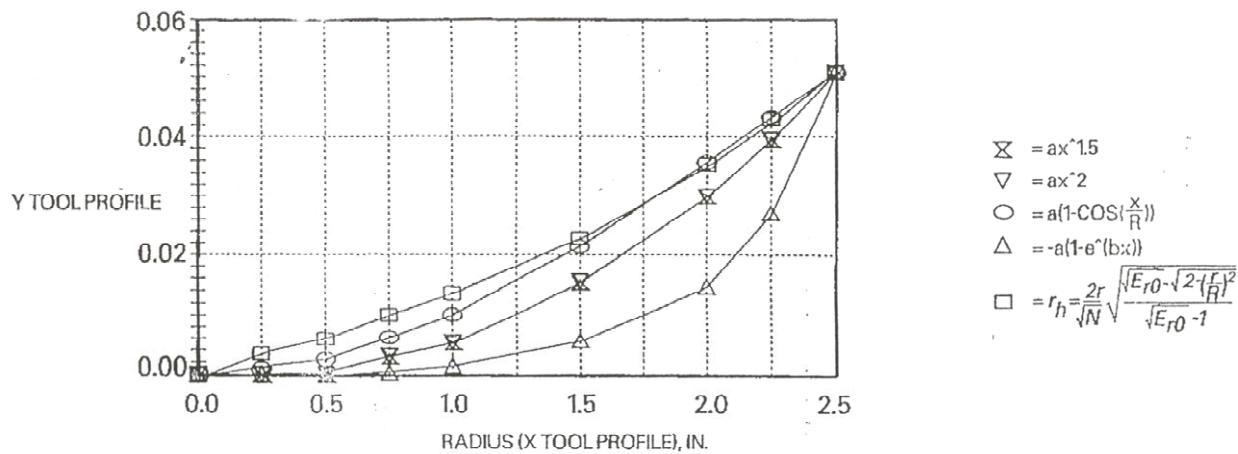
$$y = \frac{2r}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{\sqrt{\epsilon_m} - \sqrt{2 - (r/R)^2}}{\sqrt{\epsilon_m} - 1}}. \quad (29)$$

Les trous sont par la suite uniformément distribués. La **Figure 7** montre le résultat avec  $N = 1692$  trous, en suivant la loi de Dale-Gladstone, dans une lentille de 12,7cm de diamètre faite en Rexolite.



**Figure 7** Lentille de 12,7cm de diamètre faite en Rexolite avec  $N = 1692$ , en suivant la loi de Dale-Gladstone.

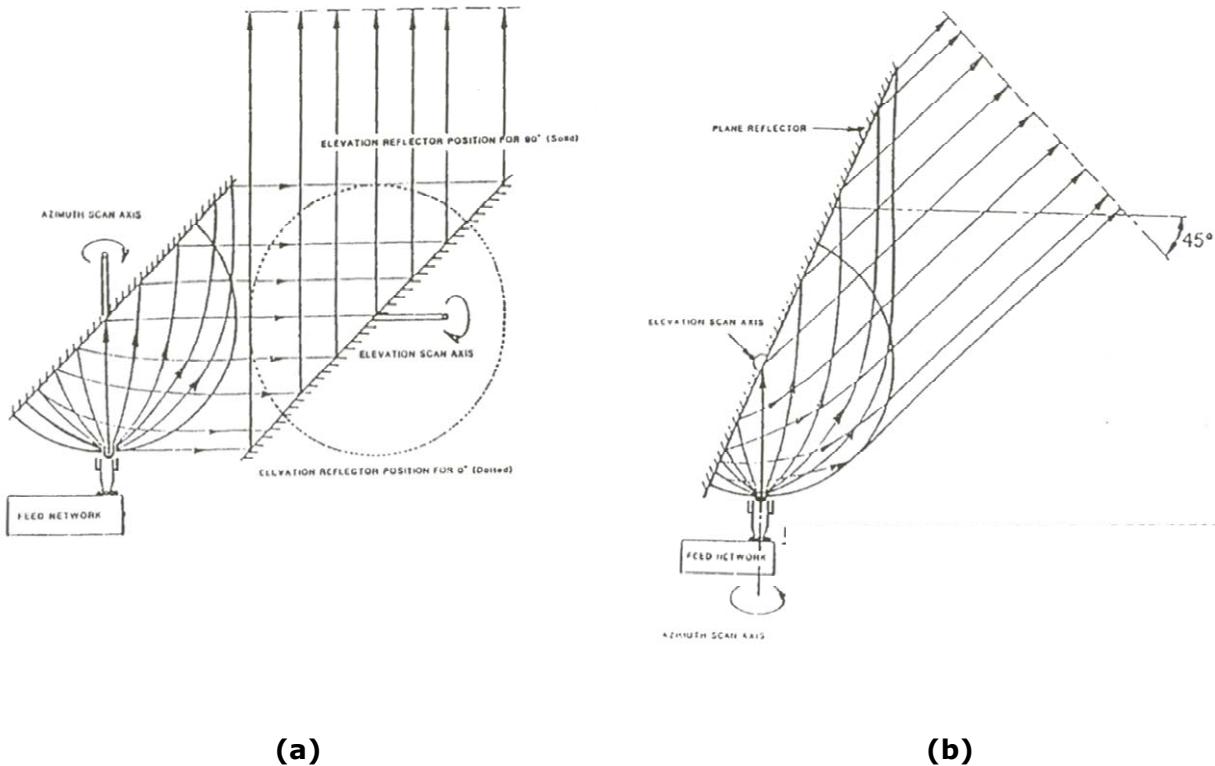
Par ailleurs, le brevet propose de suivre un certain nombre d'autres évolutions tirées de relations liant la densité du matériau à son indice de réfraction, comme le montre la **Figure 8**



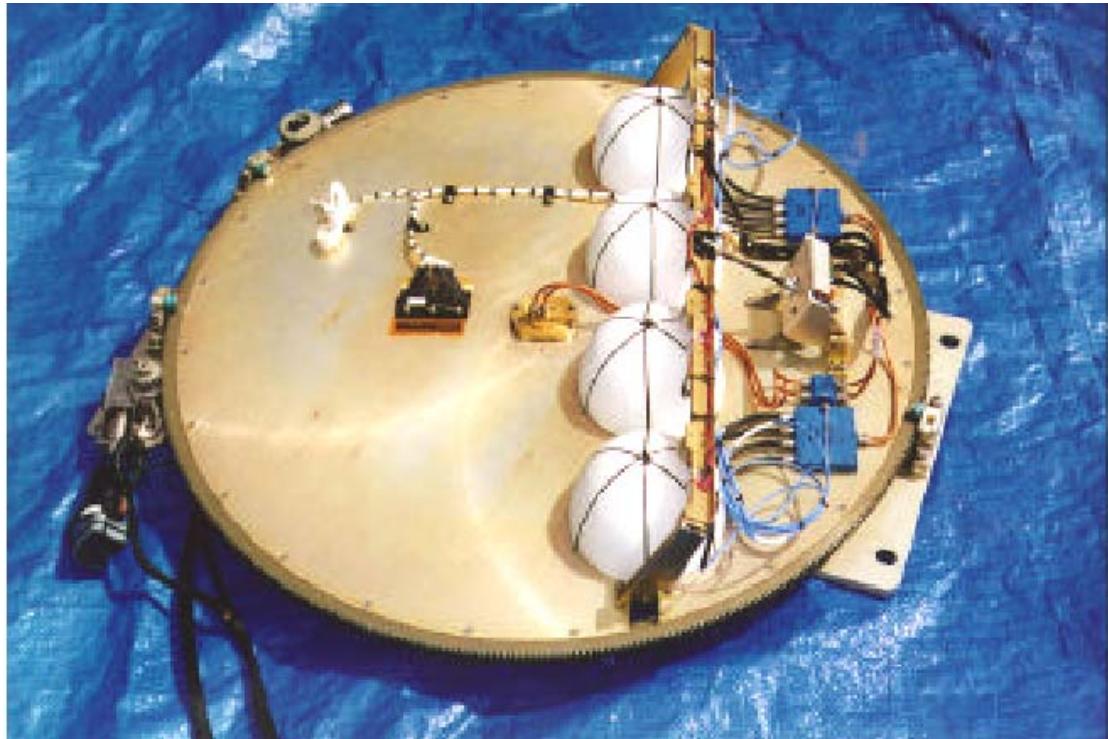
**Figure 8** Evolution du rayon de trous selon différentes approximations liant la densité du matériau à son indice de réfraction pour une lentille de 12.7cm de diamètre.

## 2.2.4 Demi lentille sur plan de masse

Une autre technique utilisée par l'U.S. Air Force via la société Datron, en bande Ku, consiste à ne réaliser qu'une demi boule. Cette dernière est placée sur un plan réflecteur, comme indique en **Figure 9**. Ainsi, la place occupée par la lentille est fortement diminuée. Cela permet d'embarquer un petit réseau, appelé SatCom, voir **Figure 10**. Les performances de cette configuration dépendent uniquement de la technique utilisée pour synthétiser la demi boule. La seule altération apportée par le plan réflecteur concerne la portion de l'espace ouverte. En effet, contrairement à une lentille complète qui illumine tout l'espace, cette configuration ne couvre au plus que le demi-espace contenant les demi lentilles ( $80^\circ$  de pars et d'autre du zénith pour les lentilles du réseau montré en **Figure 10**). Le système présenté est à double polarisation circulaire et bi bande : 20.0GHz en réception et 44.0GHz en émission. Chacune des lentilles possède un gain de 36dB à 44.0GHz et le réseau un gain de 41.0dB. A 20.0GHz, le gain du réseau descend à 35dB. Les lentilles ont un diamètre de 20.32cm et sont composées de 10 coquilles concentriques homogènes discrépant la distribution de Lüneburg.



**Figure 9** (a) Demi lentille de Lüneburg à double réflecteur. (b) Demi lentille de Lüneburg à simple réflecteur plan.



**Figure 10** Petit réseau embarqué SatCom de demi lentilles de Lüneburg en bande Ku de la société Datron. (US Patent 5-781-163).

## 2.3 Les résultats théoriques antérieurs obtenus

Un certain nombre de travaux théoriques sont menés à bien depuis une dizaine d'années, et plus particulièrement depuis trois ans. Les principales grandeurs afférentes aux antennes font l'objet d'analyses plus ou moins approfondies. Les thèmes abordés sont les optimisations de diagramme, les niveaux des lobes secondaires, la directivité, la calibration radar et la réflectivité, la correction des aberrations ainsi que la correction de la dépolarisation.

### 2.3.1 Diagrammes de rayonnement

La plupart des travaux réalisés sur les lentilles de Lüneburg concernent le diagramme de rayonnement et n'apportent que peu de nouveauté : ils ne font que constater les effets de la focalisation sur un diagramme de rayonnement en champ lointain dont le lobe principal possède une faible ouverture à mi-puissance. Malgré tout, certains restent novateurs quant à la technique employée pour effectuer leur analyse.

Les publications les plus originales sont, pour la plupart, dues à Yahya Rahmat-Samii, du département « Electrical Engineering » de l'université de Californie à Los Angeles. Ainsi, dans (H. Mosallaei 1999; Y. Rahmat-

Samii 2000), il propose, avec ses co-auteurs, d'optimiser le diagramme de rayonnement en champ lointain et le nombre  $N$  de coquilles composant la lentille de Lüneburg en jouant sur les épaisseurs  $t_i$  et les permittivités diélectriques  $\epsilon_i$  de chaque coquille. L'outil d'optimisation est un algorithme type génétique (K.W. Kim 1998; Y. Rahmat-Samii 1999) couplé avec une fonction de coût adaptative afin d'analyser et dimensionner une lentille de Lüneburg non uniforme. L'analyse électromagnétique est basée sur les fonctions Dyadiques modales pour les géométries sphériques, à savoir, les modes sphériques dont une étude détaillée fait l'objet du chapitre suivant. La fonction de coût,  $F$ , prend en compte la directivité  $G_0$  à atteindre, l'allure générale du diagramme de rayonnement  $G$ , gabarit, et le niveau maximum  $f$  des lobes secondaires au voisinage de ces lobes secondaires :

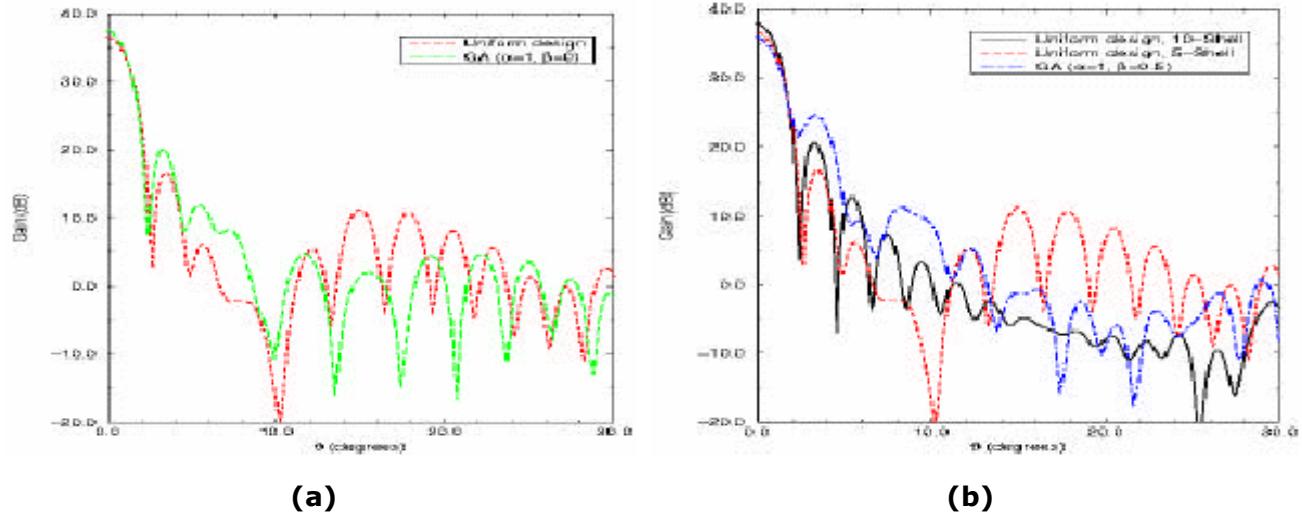
$$F(\{\epsilon_i, t_i\}_{i=1 \dots N}) = \alpha \cdot G_0 + \beta \cdot \min_{SLL} |f(\theta) - G(\theta)|. \quad (30)$$

Les constantes  $\alpha$  et  $\beta$  permettent de pondérer la fonction de coût en fonction des priorités choisies quant à l'optimisation. Les chromosomes sont composés des épaisseurs  $t_i$  et des permittivités diélectriques  $\epsilon_i$ . La population est composée de 100 individus. Le taux de croisement est de 70%. La probabilité de mutation est de 1%. La technique de sélection est du type élitiste. La source utilisée simule un cornet par la mise en réseau de quatre dipôles électriques selon la technique dite « End Fire Antenna ». Le diamètre de la lentille est de  $30\lambda$ . Les résultats obtenus sont comparés avec le cas des lentilles de Lüneburg uniformes, c'est-à-dire non optimisées en termes d'épaisseur de coquille et de constante diélectrique. Pour les distributions, elles sont données dans le tableau suivant :

| $\alpha = 1, \beta = 0, N = 5$ |              |               | $\alpha = 1, \beta = 0.5, N = 5$ |              |               | $N = 4$ |              |               |
|--------------------------------|--------------|---------------|----------------------------------|--------------|---------------|---------|--------------|---------------|
| $i$                            | $\epsilon_i$ | $t_i/\lambda$ | $i$                              | $\epsilon_i$ | $t_i/\lambda$ | $i$     | $\epsilon_i$ | $t_i/\lambda$ |
| 1                              | 1.203        | 2.798         | 1                                | 1.075        | 1.819         | 1       | 1.381        | 2.323         |
| 2                              | 1.469        | 2.047         | 2                                | 1.191        | 1.232         | 2       | 1.567        | 3.797         |
| 3                              | 1.642        | 2.030         | 3                                | 1.725        | 3.710         | 3       | 1.780        | 4.611         |
| 4                              | 1.797        | 2.464         | 4                                | 1.815        | 1.615         | 4       | 1.960        | 5.422         |
| 5                              | 1.942        | 5.661         | 5                                | 1.948        | 6.624         |         |              |               |

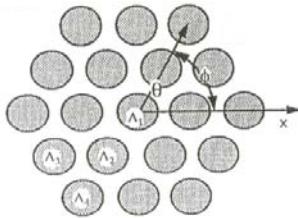
Les diagrammes de rayonnement en champ lointains sont donnés en **Figure 11**. Il ressort que pour 10 coquilles, la lentille uniforme de Lüneburg de  $30\lambda$  de diamètre a une directivité de 37.73dB, soit une efficacité de surface de 67% et les premières remontées de lobes secondaires apparaissent à  $30^\circ$  de l'axe. Lorsque le nombre de coquilles est descendu à 5, la directivité est abaissée à 36.46dB, soit une efficacité de surface de 50% et les premières remontées de lobes secondaires apparaissent à  $17^\circ$  de l'axe. Après optimisation sur une lentille de 5 couches, il ressort que dans le cas où la directivité est privilégiée,  $\alpha = 1, \beta = 0$ , la directivité augmente de 1dB par rapport au cas uniforme et les premières remontées de lobes sont abaissées de 6.5dB. Dans le cas où, à la fois

une directivité élevée et un niveau de lobes secondaires faible sont recherchés,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.5$ , la directivité est abaissée de 0.5dB par rapport au cas uniforme et les premières remontées de lobes sont abaissées de 12dB. Dans ces deux publications, il propose également une confrontation de ses prédictions en champ proche et champ lointain avec des mesures qui confirment le bien fondé de sa technique d'analyse.

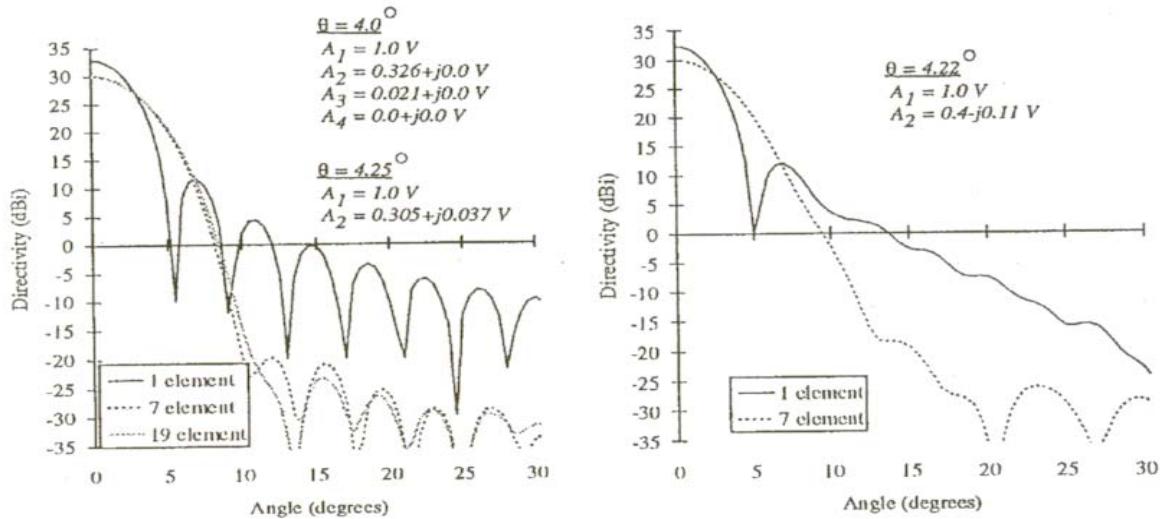


**Figure 11** Diagrammes de rayonnement en champ lointain pour une lentille de Lüneburg composée de  $N$  coquilles et de  $30\lambda$  de diamètre (Y. Rahmat-Samii 2000). Les comparaisons sont faites avec des Lentilles uniformes composées de  $N = 5$  et  $10$  coquilles. (a) Lentille non uniforme,  $N = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0$ . (b) Lentille non uniforme,  $N = 5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 0.5$ .

John Sanford propose, (J. Sanford 1995), de réduire le niveau des lobes secondaires par la mise en réseau des sources illuminant les lentilles de Lüneburg et constante-K, comme le montre la **Figure 12**. Les résultats obtenus ainsi que les pondérations sont donnés en **Figure 13** et confirment l'idée. Il ressort que la mise en réseaux de sept éléments formant un hexagone suffit à faire baisser le niveau des lobes secondaires d'environ 50dB par rapport au cas où il y a un seul élément rayonnant. Il en est de même avec la lentille constante-K mais dans des proportions moindres : 37dB plus faibles. Par ailleurs, du fait de l'élargissement du lobe principal, il se trouve que la mise en réseau proposée par John Sanford détériore la directivité de 3.5dB dans tous les cas proposés.

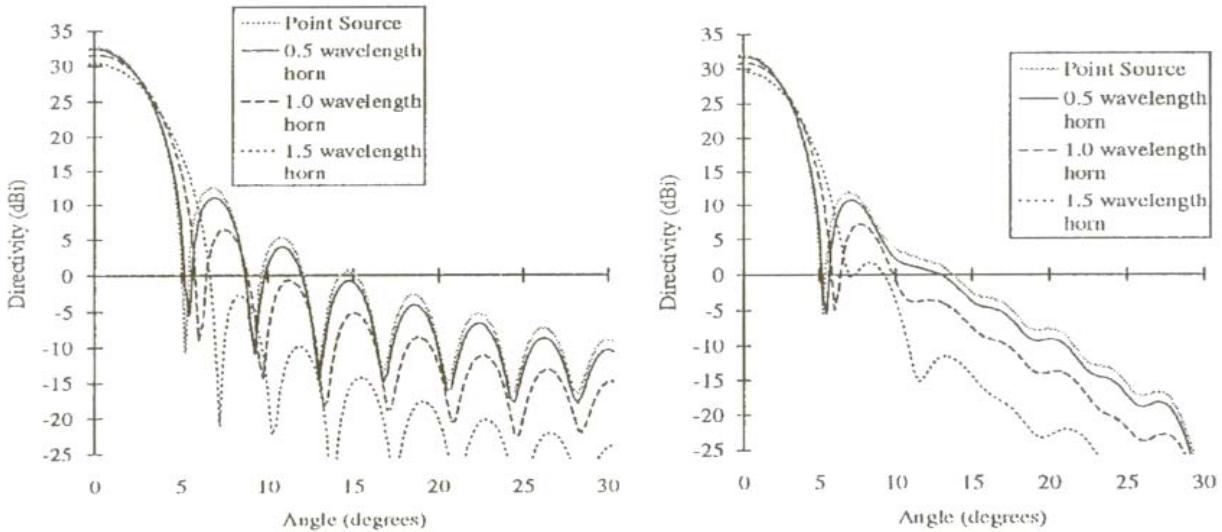


**Figure 12** Mise en réseau des éléments rayonnants illuminant les lentilles de Lüneburg et constante-K, (J. Sanford 1995).



**Figure 13** Diagrammes de rayonnement en champ lointain résultants de la mise en réseau d'éléments rayonnants pour l'éclairage d'une lentille de Lüneburg à gauche et type constante-K à droite, toutes deux de diamètre  $15\lambda$ , (J. Sanford 1995). La lentille constante-K est entourée par une couche d'adaptation de  $\lambda/4$  d'épaisseur et de constante diélectrique 1.8.

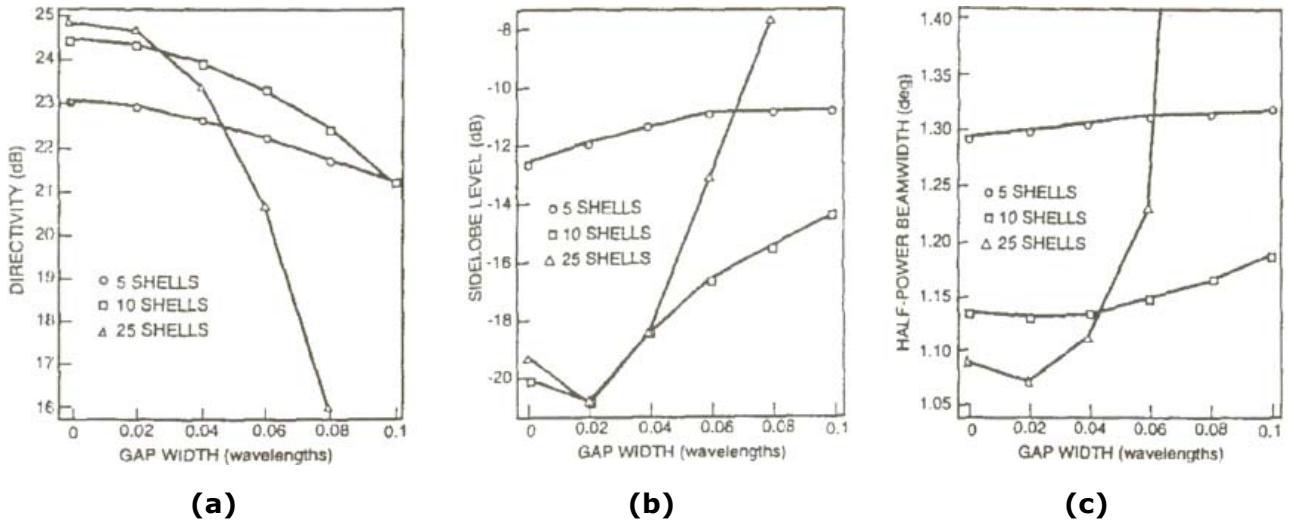
Il montre, par ailleurs, que le choix de la source est crucial quand aux performances de la structure. En **Figure 14**, il présente les diagrammes de rayonnement de lentilles, de diamètre  $15\lambda$ , illuminées par un point source et des cornets circulaires corrugés de différentes ouvertures ( $0.5\lambda$ ,  $1.0\lambda$ ,  $1.5\lambda$ ). Il ressort que plus l'ouverture du cornet est grande et plus les niveaux des lobes secondaires sont faibles. Malgré cela, la contrainte d'espacement des sources, due à la mise en réseau, oblige à restreindre l'utilisation de cornets de grande ouverture.



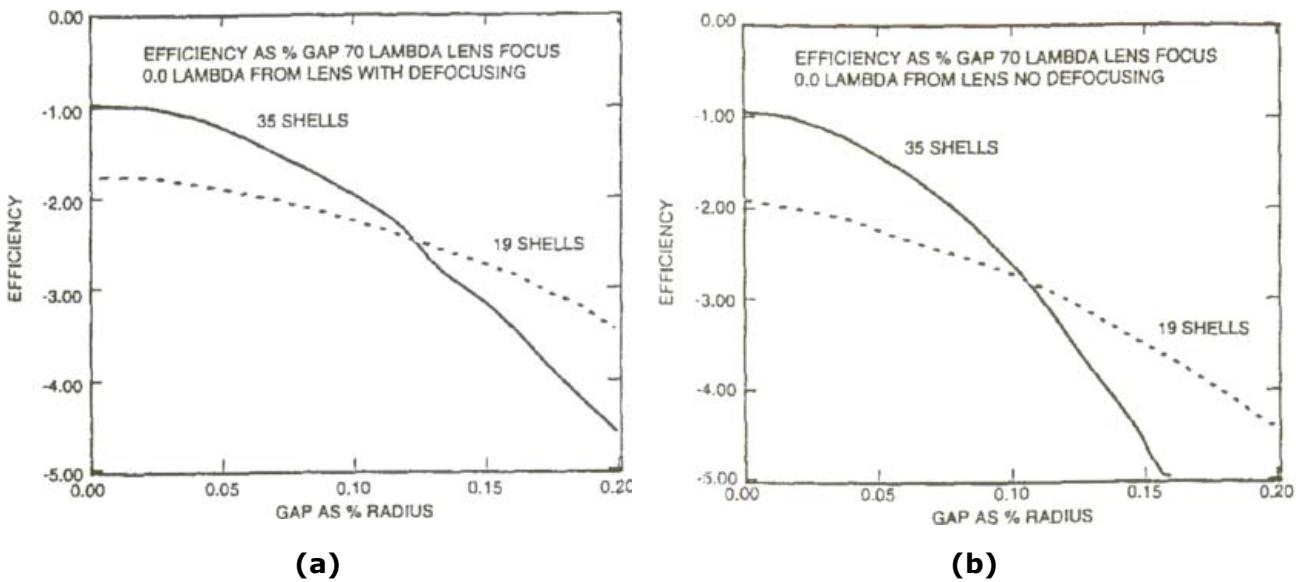
**Figure 14** Diagrammes de rayonnement de lentilles, de diamètre  $15\lambda$ , illuminées par un point source et des cornets circulaires corrugés de différentes ouvertures ( $0.5\lambda$ ,  $1.0\lambda$ ,  $1.5\lambda$ ).

Dans (Ingerson 1997), Ingerson étudie les influences des techniques de fabrication des lentilles de Lüneburg sur leur performances. Il indique que le problème majeur, dans la fabrication de lentilles discrètes, est l'apparition

de gaps d'air, entre les coquilles, inhérents à cette technique. Pour montrer ces effets, il considère des lentilles discrètes uniformes de  $70\lambda$  de diamètre. Les grandeurs étudiées sont la directivité, le niveau des lobes secondaires, l'ouverture à mi puissance et l'efficacité, comme le montrent la Figure 15 et la Figure 16.



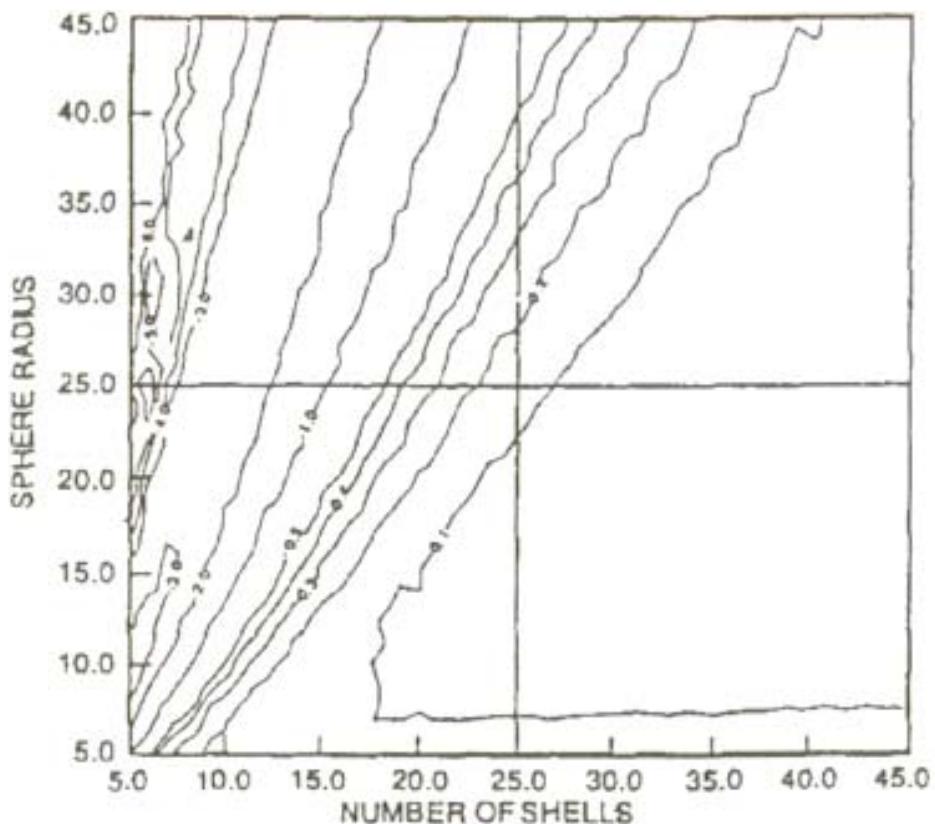
**Figure 15** Influence des gaps d'air dans des lentilles faiblement discrétisées uniformes de Lüneburg de  $70\lambda$  de diamètre sur (a) la directivité, (b) le niveau des lobes secondaires, (c) l'ouverture à mi puissance. (Ingerson 1997)



**Figure 16** Influence des gaps d'air dans des lentilles fortement discrétisées uniformes de Lüneburg de  $70\lambda$  de diamètre sur l'efficacité (a) avec défocalisation, (b) sans défocalisation. (Ingerson 1997)

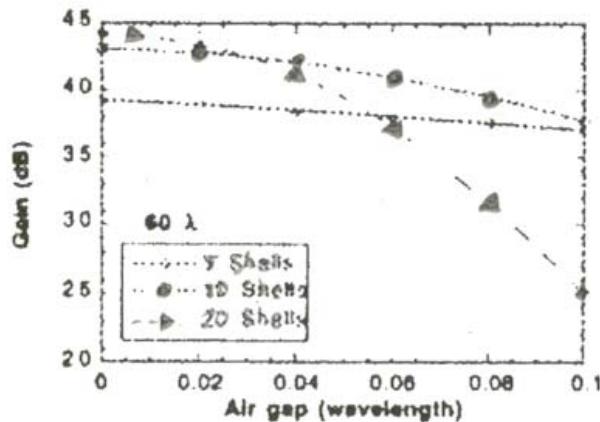
Ainsi, plus il y a de coquilles, plus les grandeurs comme la directivité, le niveau des lobes secondaires, l'ouverture à mi puissance et l'efficacité sont sensibles aux gaps d'air. Par exemple, un petit gap d'air de 0.15% du rayon de la

lentille provoque jusqu'à 4.0dB de pertes sur le gain pour une lentille de  $70\lambda$  de diamètre composée de 35 coquilles. Ce qui correspond à un gap d'air de 0.23mm pour un rayon de lentille de 152.4mm. Par ailleurs, la **Figure 17** montre les courbes de niveaux des pertes d'une lentille discrète uniforme de Lüneburg en fonction du rayon de la lentille et du nombre de coquilles qui la composent. Il en ressort que l'utilisation de coquilles d'épaisseur  $1\lambda$  ne provoque que 2dB de pertes, alors qu'une épaisseur de  $2\lambda$  fait perdre 1dB. Les conclusions de cette publication sont de deux types. Tout d'abord, il apparaît très important de développer des techniques de fabrication qui éliminent les gaps d'air entre les coquilles. Ensuite, pour éviter de perdre de l'énergie au sein même des coquilles, il est nécessaire que l'épaisseur des coquilles ne dépasse pas une longueur d'onde. Sinon, des phénomènes de résonances consommant de l'énergie apparaissent. Par voie de conséquence, des coquilles d'épaisseur au plus égales à 6.35mm, ne causeraient pas de pertes à 40GHz. Il semble que la valeur limite en terme d'épaisseur faisable industriellement aujourd'hui est de 3.2mm. Ceci permet de réaliser des lentilles discrètes homogènes pouvant fonctionner à 200GHz.

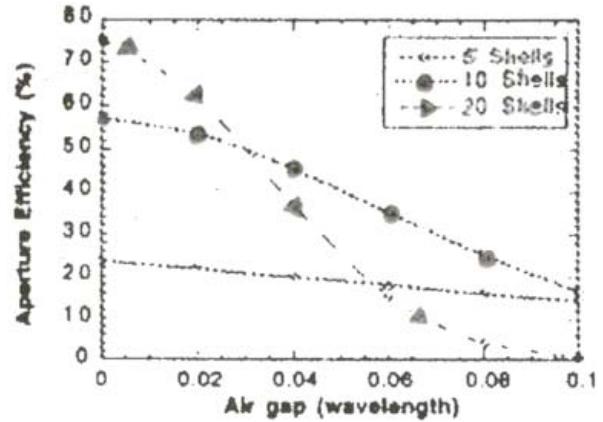


**Figure 17** Efficacité de surface en fonction du nombre de coquilles et du rayon de la lentille discrète uniforme. (Ingerson 1997)

Dans (K.W. Kim 1998), Y. Rahmat-Samii effectue également une étude technique sur les lentilles discrètes homogènes de Lüneburg. Il commence par l'influence des gaps d'air, comme le montre la **Figure 18**.



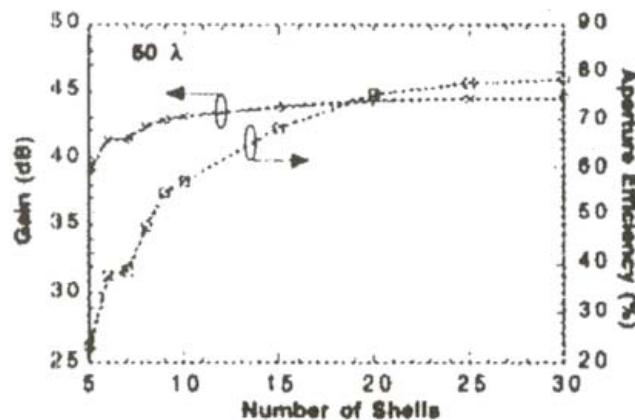
(a)



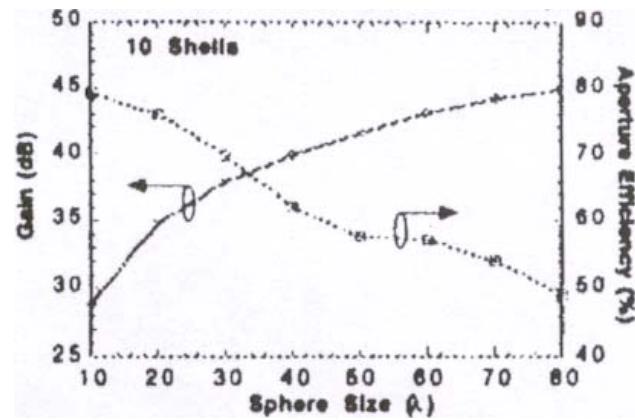
(b)

**Figure 18** Influence des gaps d'air sur des lentilles de Lüneburg discrètes homogènes, de  $60\lambda$  de diamètre composées de différents nombres de coquilles, en termes : (a) de gain, (b) d'efficacité de surface. (K.W. Kim 1998)

Les résultats sont les mêmes que pour (Ingerson 1997) : les gaps d'air détériorent, très rapidement et dans de fortes proportions, le gain et l'efficacité de surface. De plus, plus le nombre de coquilles est important et plus ces deux grandeurs sont sensibles aux gaps d'air. Ensuite, il s'intéresse à l'influence de la taille de la lentille et du nombre de coquilles sur les performances de la lentille, comme le montre la Figure 19.



(a)



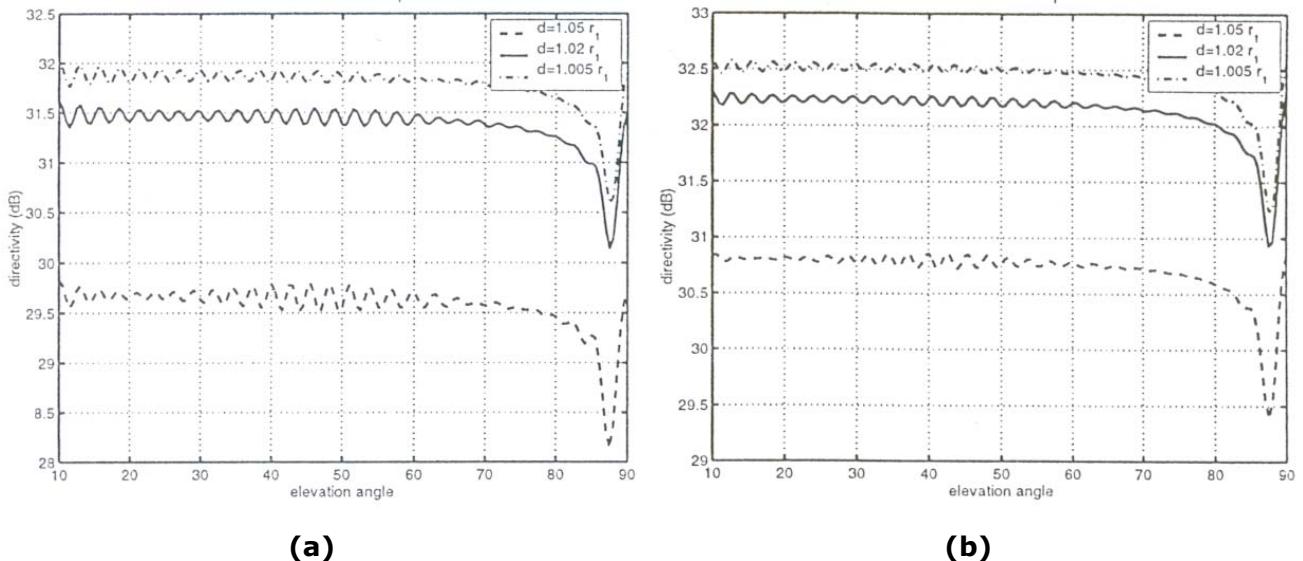
(b)

**Figure 19** Etude du gain et de l'efficacité de surface de la lentille de Lüneburg discrète homogène en fonction : (a) du nombre de coquilles pour un diamètre de  $60\lambda$ , (b) du diamètre de la lentille composée de 10 coquilles. (K.W. Kim 1998)

Il ressort que le gain et l'efficacité de surface augmentent avec le nombre de coquille pour essayer de se rapprocher d'une valeur asymptotique correspondant au cas de la distribution continue donnée en (16). De plus, à nombre de coquilles fixé, l'augmentation du diamètre de la lentille accroît le gain mais diminue l'efficacité de surface. Cette observation est à relier avec les résultats d'Ingerson sur l'épaisseur des coquilles : l'augmentation du diamètre de la lentille permet d'augmenter la surface de captation ce qui augmente le gain. Mais, cette

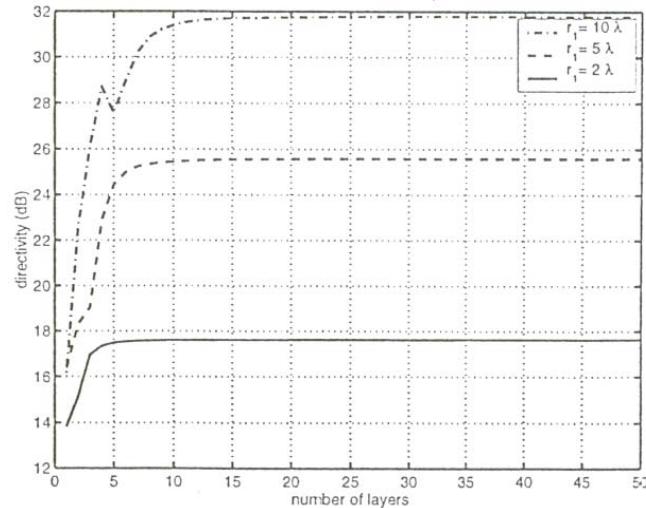
augmentation n'est pas optimale car à chaque augmentation du rayon, une partie de l'énergie supplémentaire captée est emmagasinée dans des phénomènes de résonance au sein même des coquilles dont l'épaisseur dépasse la longueur d'onde.

Sergueï Vinogradov, actuellement basé à Dundee en Ecosse, mène des études d'un ordre plus théorique sur les lentilles de Lüneburg discrètes homogènes, (S.S. Vinogradov 1998). La préoccupation principale de cette publication concerne la modélisation. Ainsi, en exprimant les champs électromagnétiques en termes de potentiels de Debye développés sur les fonctions sphériques scalaires (fonctions circulaires, fonctions sphériques de Bessel et polynômes associés de Legendre), il exprime les conditions aux limites entre chaque coquille de la lentille pour en déduire l'expression du champ diffusé. L'excitation utilisée est une source complexe de Huygens dont la partie imaginaire de la position contrôle l'ouverture du faisceau émis. Lorsque cette longueur imaginaire est nulle, l'illumination est uniforme. La **Figure 20** présente l'évolution de la directivité d'une lentille de Lüneburg discrète homogène en fonction de l'angle d'élévation pour une lentille de rayon  $r_1 = 10\lambda$  composée de 50 coquilles dans le cas d'une illumination uniforme ou directive. La source est placée à différentes positions. Outre les valeurs de la directivité en fonction de la position de la source, il est intéressant de noter que des oscillations apparaissent, contrairement à ce que prédit l'optique géométrique. De plus, il y a une légère déviation de la directivité de 2dB environ pour des élévations comprises entre  $80^\circ$  et  $90^\circ$ , pour une source placée à une élévation nulle. Par ailleurs, la valeur de la directivité est très sensible à la position de la source : il y a un point focal et non une zone de focalisation. Ce point est placé juste sur la surface extérieure de la lentille, comme dans le cas de la distribution continue.



**Figure 20** Evolution de la directivité d'une lentille de Lüneburg discrète homogène en fonction de l'angle d'élévation pour une lentille de rayon  $r_1 = 10\lambda$  composée de 50 coquilles dans le cas d'une (a) illumination uniforme. (b) illumination directive. La source est placée à la distance  $d$  du centre de la lentille. (S.S. Vinogradov 1998)

Par ailleurs, il donne l'évolution de la directivité en fonction du nombre de coquilles pour différents rayons de lentilles, comme indiqué en **Figure 21**. Il remarque qu'en plus de l'évolution croissante de la directivité avec le rayon de la lentille, lorsque la longueur électrique de la lentille augmente, le nombre de coquilles, nécessaires à l'obtention d'une directivité maximale, augmente. Cette directivité optimale se rapproche asymptotiquement de la valeur obtenue avec la distribution continue (16).



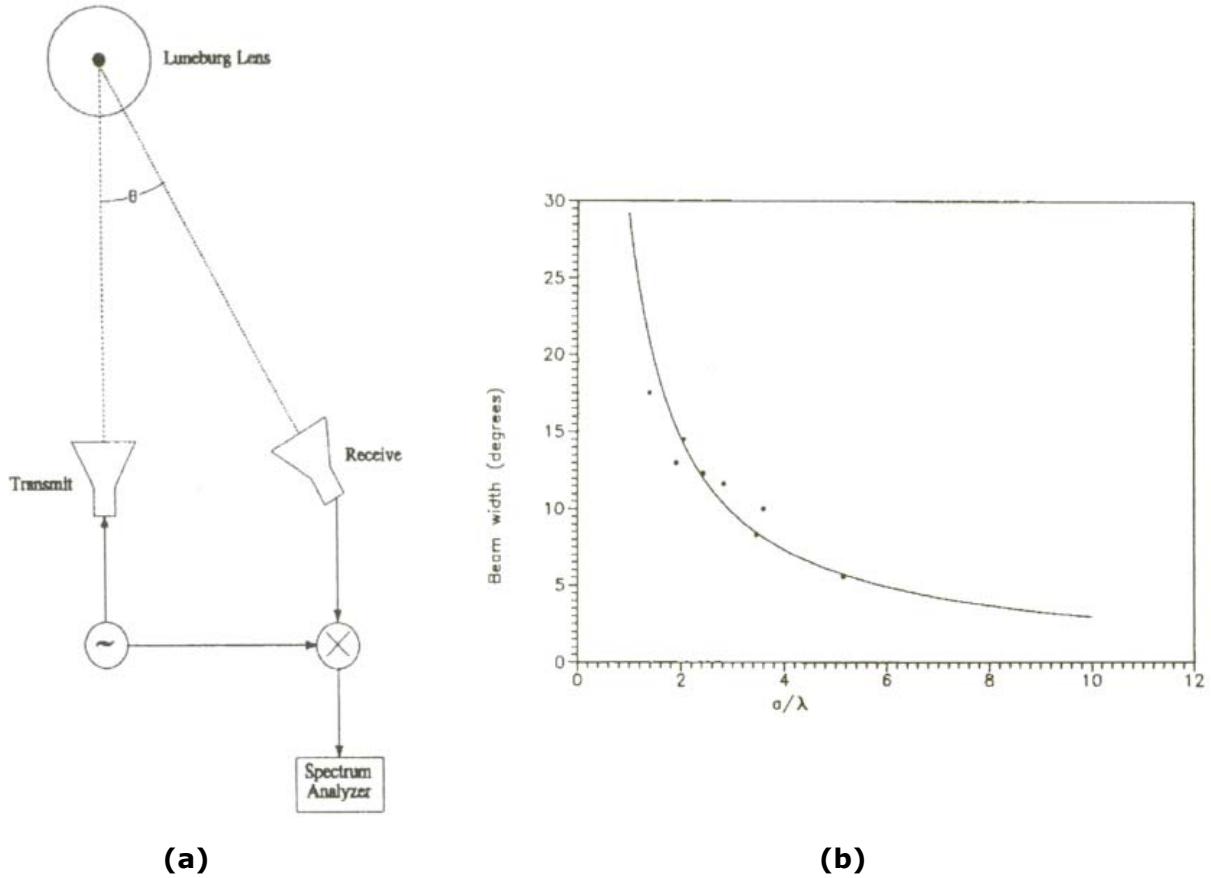
**Figure 21** Directivité d'une lentille discrète uniforme de Lüneburg illuminée par une source uniforme placée sur la surface de la lentille, en fonction du nombre de coquilles et du rayon de la lentille. (S.S. Vinogradov 1998)

### 2.3.2 Champ rétro-diffusé

Comme le montre (P.E. Racette 1991), la lentille de Lüneburg surmontée d'une calotte métallique agit comme un réflecteur. Ainsi, elle peut être utilisée dans la calibration des radars, comme décrit en **Figure 22 (a)**. Mais, comme l'indique la publication, cette technique de calibration à partir d'une lentille de Lüneburg est très souvent source d'erreurs : la séparation angulaire entre l'émetteur et le récepteur, c'est-à-dire l'angle bi-statique, doit être faible par rapport à la l'ouverture à mi puissance du champ rediffusé par le réflecteur de Lüneburg sinon les erreurs de calibration seraient de plusieurs décibel. Ce type de système de calibration reste également très sensible aux faibles désalignements des radars qui se positionneraient alors rapidement dans la zone de rolloff du champ rediffusé par le réflecteur de Lüneburg. Par ailleurs, cette publication propose une approximation de l'ouverture à mi puissance du champ rediffusé par le réflecteur de Lüneburg de rayon  $a$  dont la moitié de la surface est recouverte par une calotte métallique pour une longueur d'onde  $\lambda$  :

$$\theta_{3dB}^{rediff} = \frac{29.2^\circ}{a/\lambda}. \quad (31)$$

La validité de cette formule est donnée grâce à la confrontation avec la mesure en **Figure 22 (b)**.

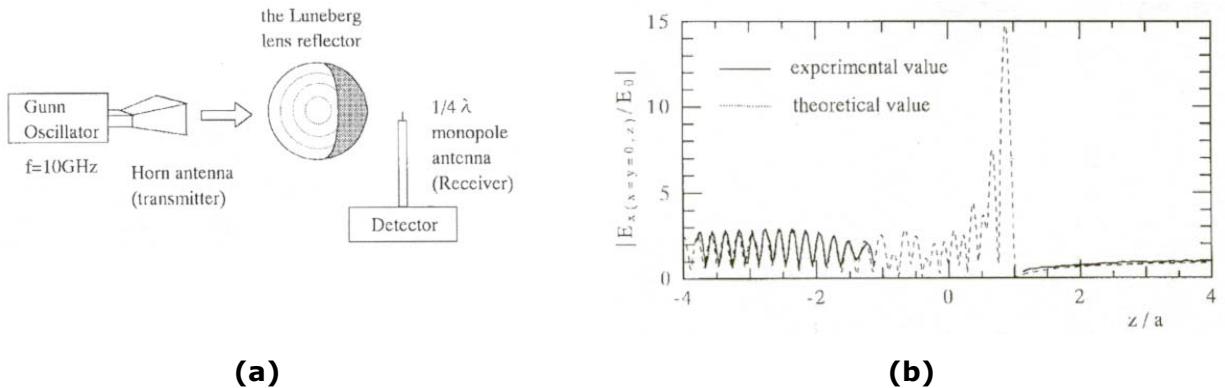


**Figure 22** (a) Calibration bi-statique d'un radar à l'aide d'un réflecteur de Lüneburg. (b) Comparaison théorie (—) – mesure (···) de la relation (31). (P.E. Racette 1991)

Dans le même ordre d'idée, la réflectivité du réflecteur de Lüneburg est décrite dans (H. Sakurai 1998). Le schéma de principe est donné en **Figure 23 (a)**. La lentille de rayon  $a$  utilisée est fabriquée par la société Tokimec et les caractéristiques de la lentille utilisée sont données dans le tableau suivant :

| Coquille n° <i>i</i> | 1     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     |
|----------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $r_i/a$              | 0.457 | 0.609 | 0.706 | 0.803 | 0.901 | 1.000 |
| $\varepsilon_{ri}$   | 1.903 | 1.801 | 1.701 | 1.505 | 1.353 | 1.148 |

La mesure est effectuée à 10GHz. Le détecteur est un monopôle l/4. L'échantillonnage est réalisé suivant l'axe formé par le cornet émetteur et le centre de la lentille. La comparaison entre la théorie et la mesure est donnée en **Figure 23 (b)**.



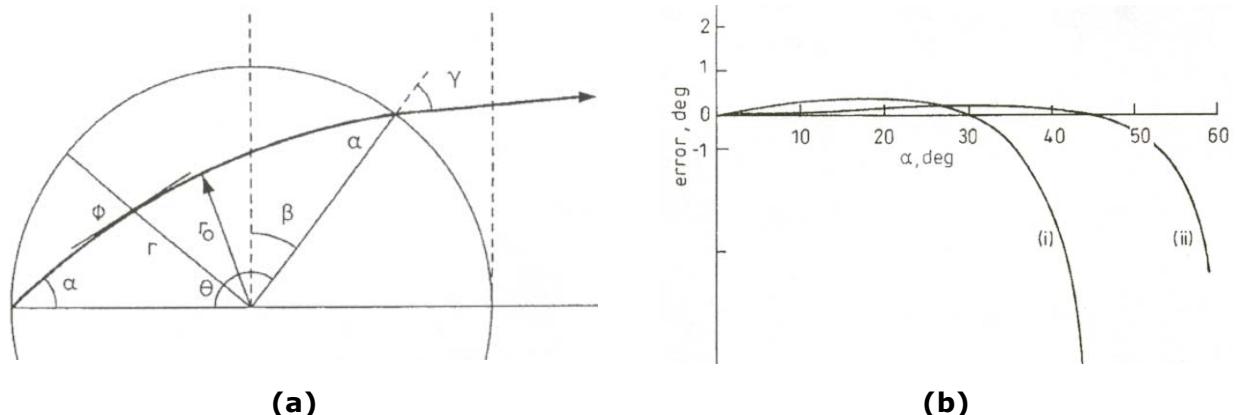
**Figure 23** (a) Schéma de principe de mesure de réflectométrie. (b) Comparaison théorie - mesure de la réflectométrie engendrée par le réflecteur de Lüneburg. (H. Sakurai 1998)

### 2.3.3 Aberrations

Dans la référence (Cornbleet 1997), Cornbleet propose de généraliser la distribution continue de Lüneburg de façon quadratique :

$$n(r) = \sqrt{2a - br^2}, \quad (32)$$

où  $a$  et  $b$  sont deux constantes qui, selon l'auteur, représentent l'indice de réfraction à la surface de la lentille de façon plus réaliste. Son étude est basée sur le tracé de rayon, **Figure 24 (a)**. Un choix de  $a$  et  $b$  permet de réduire les erreurs de parallélisme engendrés par la distribution de Lüneburg (16), comme le montre **Figure 24 (b)**. Ceci amène à une remarque importante. En effet, le premier zéro du diagramme de rayonnement en champ lointain de la source peut coïncider, en adaptant les valeurs des coefficients  $a$  et  $b$ , avec l'angle de réflexion interne total à la surface. Ainsi, l'efficacité de surface s'en trouve accrue.



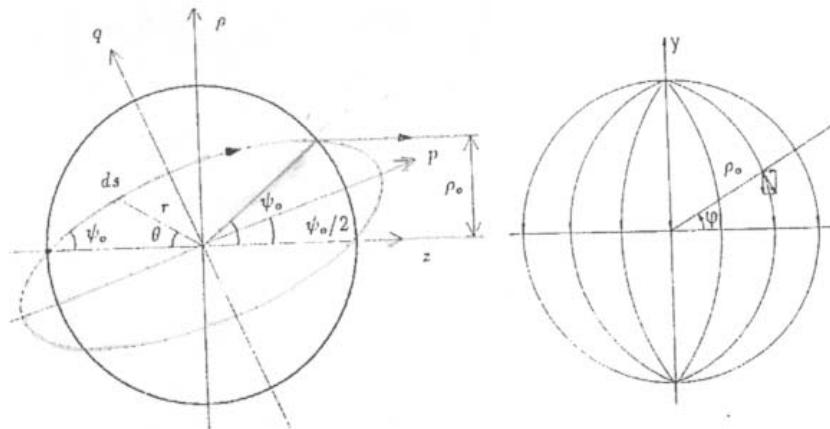
**Figure 24** (a) Géodésique au sein de la lentille modifiée. (b) Erreur de parallélisme sur les rayons. Cas (i),  $a = 1.366$  et  $b = 0.732$ . Cas (ii),  $a = 1.138$  et  $b = 0.943$ . (Cornbleet 1997)

### 2.3.4 Polarisation

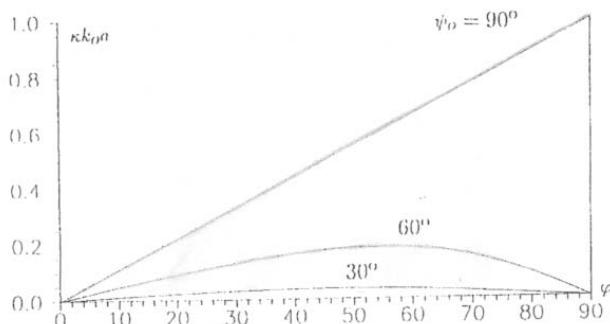
L'obtention de la distribution continue de Lüneburg, (16), est obtenue via l'optique géométrique. La courbure des géodésiques au sein d'un milieu non uniforme, comme la lentille de Lüneburg, provoque des rotations de la polarisation. Afin de corriger ces effets indésirables, (A.J. Viitanen 1992) propose d'utiliser un milieu chiral. La distribution analytique obtenue du paramètre normalisé de chiralité  $\kappa$ , en fonction de l'angle  $\varphi$  du plan du rayon pour différentes incidences  $\psi_0$  sur la lentille, est alors :

$$\kappa(\psi_0, \varphi) = \frac{1}{k_0 a 2\sqrt{2}} \arctan \left( \frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi + \cot^2(\psi_0/2)} \right) \cdot \frac{1}{\cos \frac{\psi_0}{2} E(4,1 - \tan^2 \frac{\psi_0}{2})}, \quad (33)$$

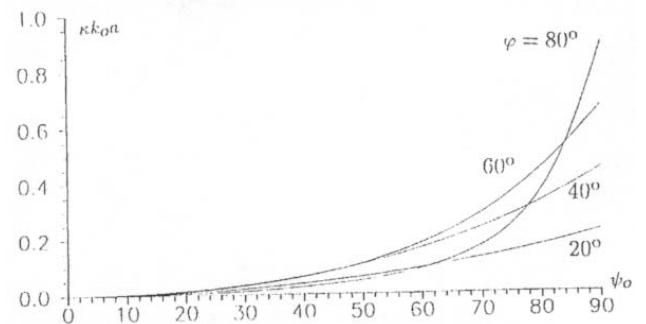
où  $E(v,m)$  est la fonction elliptique intégrale de seconde espèce des paramètres  $v$  et  $m$ . Cette distribution de chiralité est représenté en **Figure 25**.



(a)



(b)



(c)

**Figure 25** (a) Géométrie des rayons au sein d'une lentille de Lüneburg. (b) Paramètre normalisé de chiralité  $\kappa$  en fonction de l'angle  $\varphi$  du plan du rayon pour différentes incidences  $\psi_0$  sur la lentille. (c) Paramètre normalisé de chiralité  $\kappa$  en fonction de l'angle d'incidence  $\psi_0$  sur la lentille pour différents angles  $\varphi$ . (A.J. Viitanen 1992)

## 2.4 Utilisations des lentilles sphériques

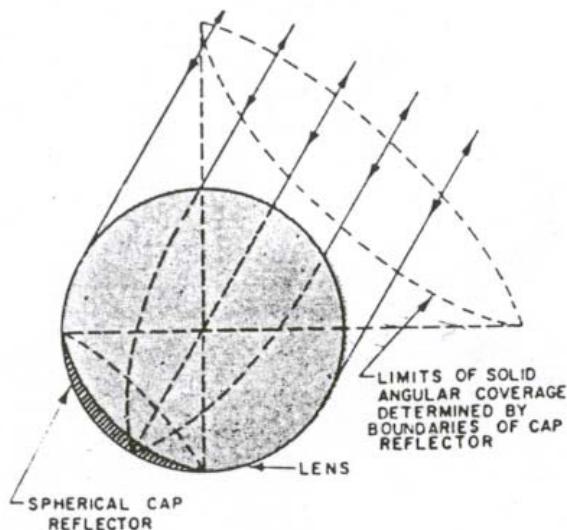
Les propriétés de forte focalisation et l'existence d'une multitude de points de focaux confèrent à la lentille de Lüneburg un contexte d'utilisations diverses et variées. Certaines sont déjà mises en œuvre. Ainsi, sont exposées dans la suite les utilisations effectives et les utilisations envisagées de ces lentilles.

### 2.4.1 Utilisations effectives des lentilles de Lüneburg

Les lentilles de Lüneburg sont utilisées dans un certain nombre de systèmes utilisant les communications sans fils hautes fréquences. Tous ces systèmes fonctionnent soit en tant que réflecteur soit en tant qu'outil d'émission-réception pour les communications sans fil.

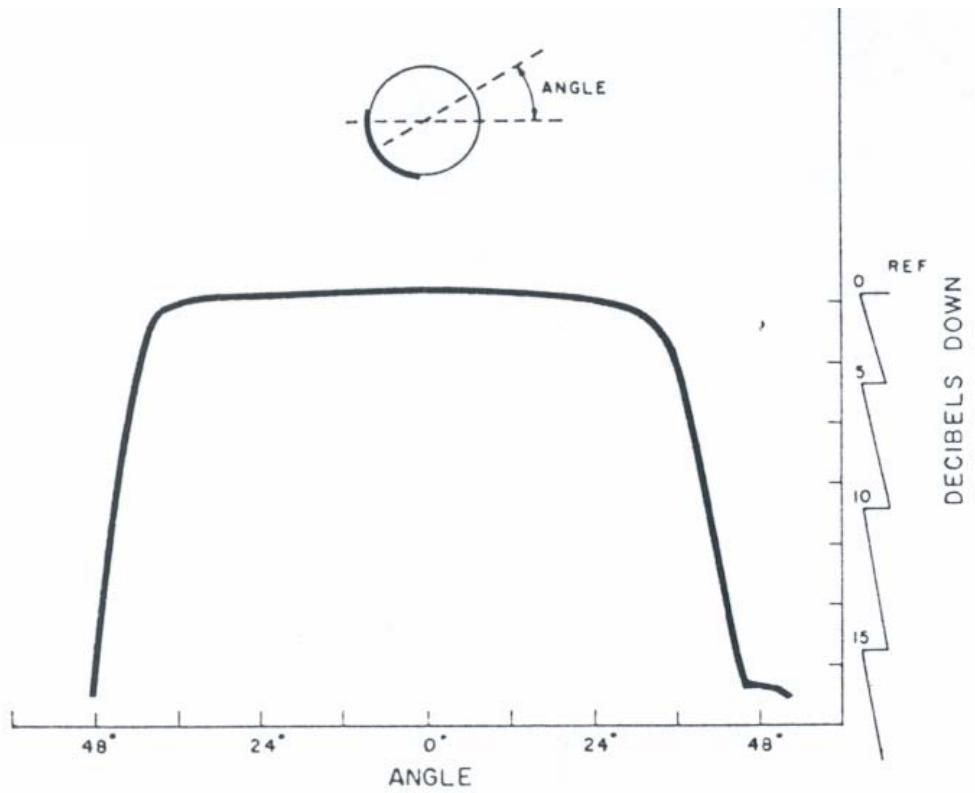
#### 2.4.1.1 La lentille réflecteur

Comme le montre la **Figure 26**, en plaçant une calotte sphérique métallique au niveau du point focal de réception, l'ensemble de l'énergie reçue est renvoyée exactement dans la direction d'incidence. Ainsi pourvue d'une calotte métallique, la lentille de Lüneburg est un parfait réflecteur passif.



**Figure 26** La lentille de Lüneburg utilisée comme réflecteur passif.

La lentille de 17.78cm de diamètre, décrite en 2.2.2, associée à une calotte métallique de 90° d'ouverture angulaire pour être utilisée en tant que réflecteur passif à 9.34GHz fournit les résultats donnés en **Figure 27**.



**Figure 27** Diagramme de réflectivité d'une lentille de 17.78cm de diamètre surmontée d'une calotte métallique de 90° d'ouverture angulaire utilisée à 9.34GHz. Cette lentille est du type de celles décrites en 2.2.2.

La qualité d'une lentille utilisée en tant que réflecteur est mesurée par sa surface équivalente radar, SER, notée  $\sigma$ . Une bonne lentille a donc, par convention, sa SER au plus 2dB inférieur à sa SER théorique donnée par la formule :

$$\sigma = 4\pi^3 r^4 / \lambda^2 , \quad (34)$$

où  $r$  est le rayon de la lentille et  $\lambda$  la longueur de travail.

Les deux principaux avantages quant à l'utilisation de ces lentilles plutôt que le réflecteur en coin à triple rebond sont :

- La SER théorique de la lentille avec calotte métallique est supérieure de 9dB, pour un réflecteur en coin circulaire de même rayon, à dimensions électriques équivalentes.
- L'angle solide couvert par la lentille est de loin supérieur à celui du réflecteur en coin.

Malgré tout, le poids de la lentille reste un handicap majeur par rapport au réflecteur en coin.

Le spécialiste en France de ce type d'application de la lentille de Lüneburg est la société Comeca basée à côté de Montpellier. En effet, ses réflecteurs sont utilisés dans les domaines suivants : équipement de cibles, aide

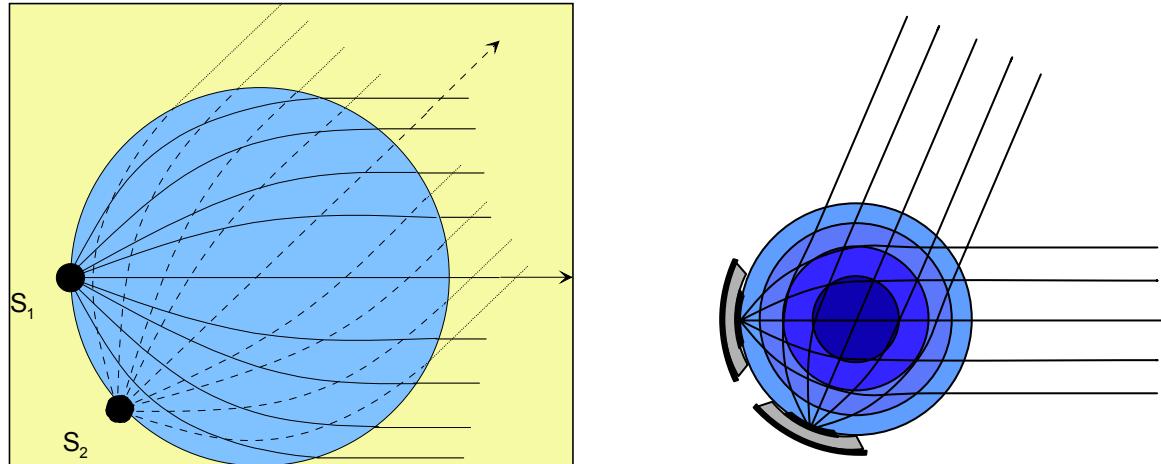
à la navigation aérienne, maritime et terrestre, calibration radar. La **Figure 28** montre un exemple de réflecteur réalisé par la société Comeca.



**Figure 28** Couronne de lentilles de Lüneburg utilisées en réflecteurs de la société Comeca permettant de réaliser un réflecteur omnidirectionnel.

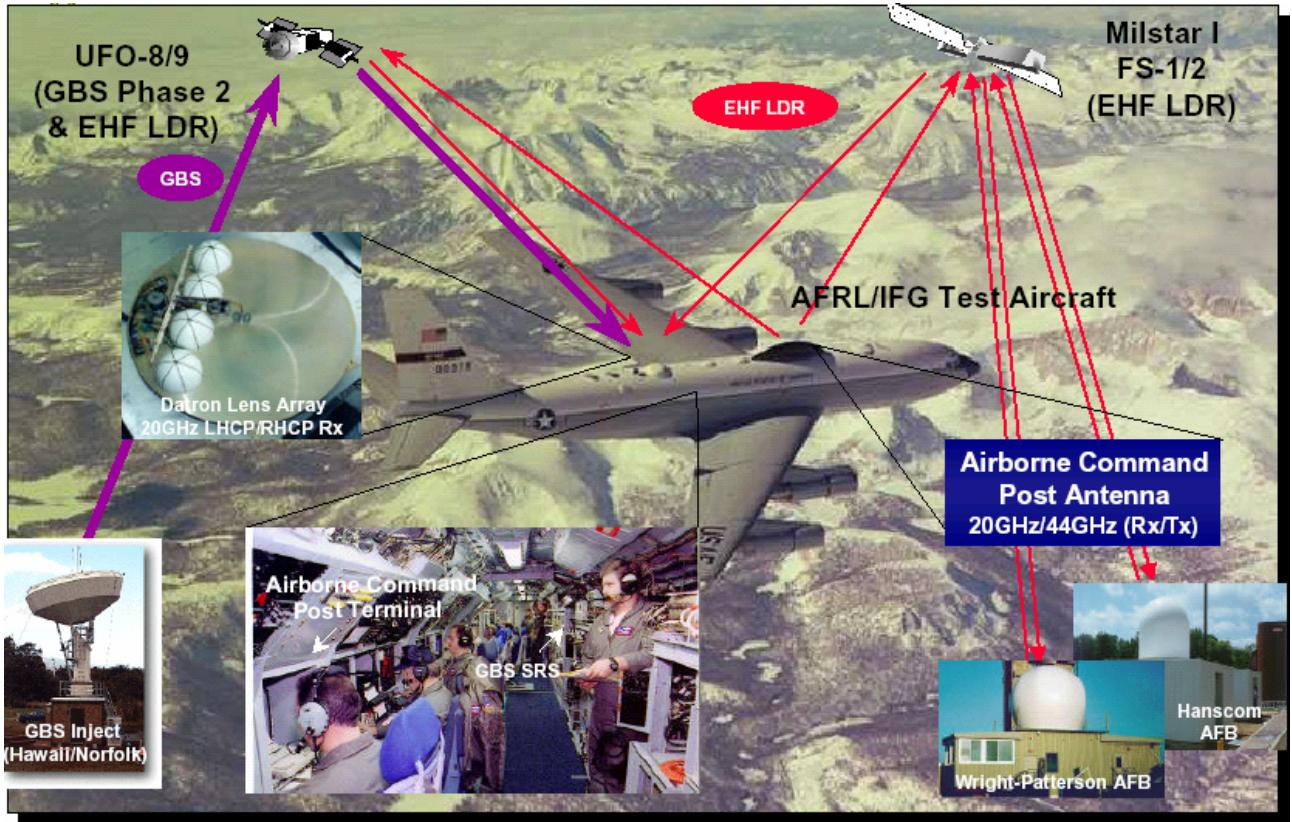
#### 2.4.1.2 La lentille utilisée en émission et/ou réception

Comme le montre la **Figure 29**, la lentille de Lüneburg peut être utilisée en tant qu'antenne pour l'émission et/ou la réception de signaux.



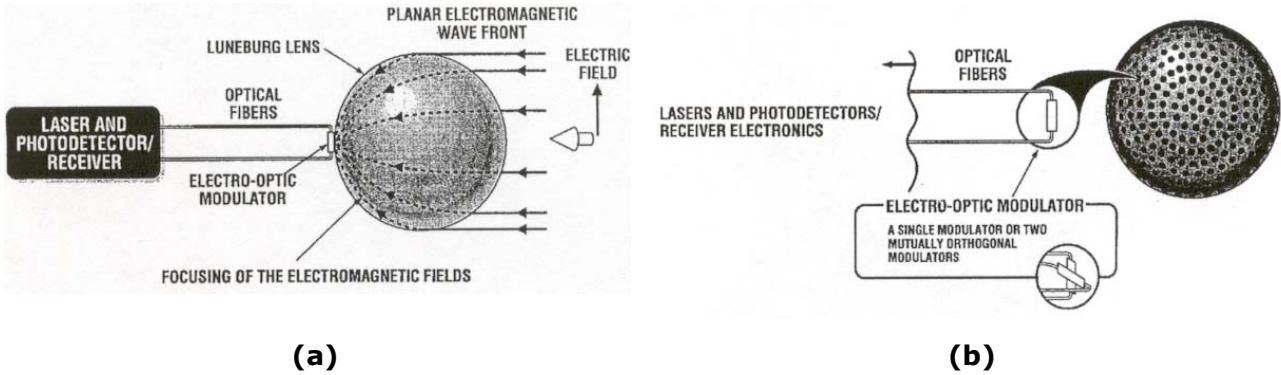
**Figure 29** Lentille de Lüneburg utilisée en tant qu'antenne avec deux sources ponctuelles à gauche et deux sources imprimées conformées à droite.

A cet effet, le réseau, présenté en 0, fait partie d'un système de communications militaires à haut débit, comme le montre la **Figure 30**. L'émission est faite à 44GHz et la réception à 20GHz.



**Figure 30** Lentille de Lüneburg au sein d'un système de communications à haut débit de l'U.S. Air Force.

Un des problèmes rencontrés lors de l'utilisation de la lentille de Lüneburg, utilisée en antenne proprement dite, est la perturbation créée par les câbles d'alimentation, les lignes de transmission et toutes les autres parties métalliques. Ainsi, (D. Hilliard) présente les travaux, brevetés par U.S. Navy, quant à l'association de la lentille de Lüneburg avec des capteurs photoélectriques, comme présenté en **Figure 31**. Ce système permet d'effectuer des mesures fréquentielles, d'amplitudes, de phases et d'angle d'incidence. Les capteurs photoélectriques sont en fait des sources laser produisant un signal optique envoyé, via un modulateur électro-optique, par fibres optiques, à un photo-détecteur amplificateur. Le modulateur électro-optique est composé de matériaux dont la réponse à un champ électromagnétique en radiofréquences s'exprime en un changement de leur indice de réfraction de façon proportionnelle à l'intensité du champ. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet de Pockels (Chen 1970; A. Yariv 1984; B.E.A. Saleh 1991). Cette technique possède, par ailleurs, un intérêt majeur. En effet, compte tenu de leur petite taille par rapport à la longueur d'onde en radiofréquence, les modulateurs électro-optiques peuvent être placés sur toute la surface de la lentille afin de couvrir les  $4\pi$  stéradian d'angle d'incidence. Ils sont transparents pour le champ électromagnétique à ces fréquences contrairement aux antennes classiques qui produisent un effet de camouflage. Cette propriété de transparence permet au champ radiofréquence de pénétrer dans la lentille et de se focaliser sur la face opposée de la lentille.



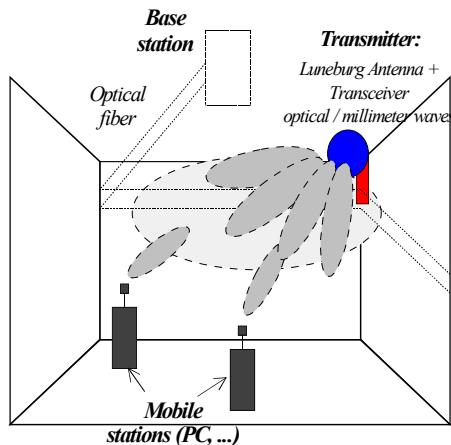
**Figure 31** (a) Lentille de Lüneburg associée à un détecteur photoélectrique. (b) Lentille de Lüneburg recouverte de détecteurs photoélectriques. L'angle d'arrivée est déterminé en notant quel détecteur est le plus fortement modulé.

Il est à noter que de nombreux auteurs envisagent d'utiliser la lentille de Lüneburg avec un système à balayage électronique. Il semble que ce système soit apparemment le seul à réaliser ce balayage électroniquement. Une limitation existe, ce système de capteurs photoélectriques ne marche qu'en réception.

## 2.4.2 Utilisations envisagées des lentilles de Lüneburg

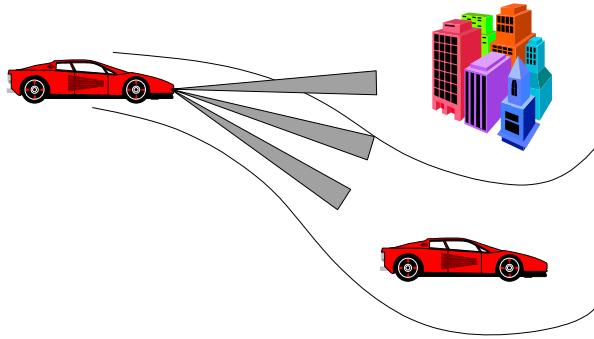
La lentille de Lüneburg est un outil prometteur. En effet, de nombreuses applications ont besoin des propriétés de forte focalisation et du grand nombre de points focaux des lentilles de Lüneburg.

Tout d'abord, les communications « indoor » haut débit à 60GHz nécessitent d'illuminer en même temps plusieurs zones bien spécifiques d'une pièce. Cette contrainte entre dans le cadre des possibilités de la lentille de Lüneburg. Par ailleurs, l'aspect millimétrique de ces communications permet d'utiliser des lentilles de petite taille et donc de faible poids, contrairement aux communications en bande X.



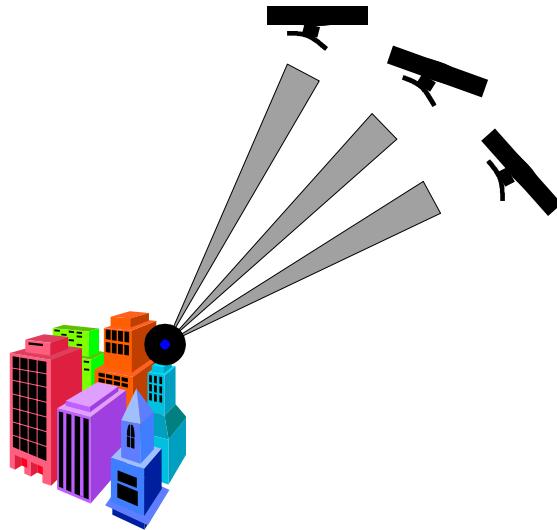
**Figure 32** Lentille de Lüneburg utilisée dans un système de communications « indoor » haut débit à 60GHz.

Les radars anti-collisions à 77GHz à bande adaptative nécessitent de multiples faisceaux et d'antennes à large champ de vision pour détecter les cibles, même quand il y a changement de direction et/ou de courbure sur la route, comme indiqué en **Figure 33**. Ici encore, la lentille de Lüneburg apparaît comme étant un sérieux candidat (petite taille à 77GHz, multifaisceaux, balayage, etc.).



**Figure 33** Lentille de Lüneburg utilisée en tant que radar anti-collisions à 77GHz.

Les transmissions de données par satellites à basse orbite terrestre, LEO, **Figure 34**, contraintent d'avoir des faisceaux agiles permettant de suivre des satellites couvrant une ouverture angulaire de  $\pm 80^\circ$ . Cette contrainte est pratiquement impossible à résoudre via des réseaux d'antennes en raison des fortes dégradations du diagramme de rayonnement en champ lointain à l'extérieur du secteur  $\pm 50^\circ$ . Une fois encore, la lentille de Lüneburg semble la plus appropriée.



**Figure 34** Lentilles de Lüneburg utilisées dans les communications satellitaires.

Depuis peu, de sérieuses investigations sont faites sur la prochaine génération de radio télescopes pour l'étude de l'hydrogène interstellaire aux premiers âges de l'Univers via le phénomène de décalage des fréquences vers le rouge, plus connu sous le nom de Red-Shift. Ces télescopes doivent ainsi couvrir une surface de  $1\text{km}^2$ . Ceci leur prévaut le nom de SKA, pour Square Kilometre Array, (A.R. Taylor 1999). L'objectif de ces télescopes

est de capter des signaux de très faible puissance sur une très large bande de fréquence allant de 200MHz à 2GHz dans n'importe quelle direction du ciel. De plus, ils doivent pouvoir pointer sur différentes cibles au même moment afin d'optimiser le nombre d'utilisateurs, d'étudier les effets de mélanges des sources interférentes, de comparer des sources distribuées de façon inhomogène et éloignées angulairement les unes des autres comme les pulsars. Aux vues de ces contraintes, (A.J. Parfitt 2000) conclue que la lentille de Lüneburg apparaît comme la plus adaptée. Ainsi, une surface de 1km<sup>2</sup> serait recouverte de lentilles de Lüneburg pour réaliser ce type de radio télescope, comme le montre la **Figure 35**.



**Figure 35** *Vue artistique de lentilles de Lüneburg composant un radio télescope SKA.*

## 2.5 Conclusion

Aux vues de ces différentes publications, il ressort qu'une très grande partie de la théorie, de l'analyse et de la fabrication des lentilles de Lüneburg a déjà été menée à bien. En effet, la techniques d'analyse par les modes sphériques apparaît comme étant la plus adaptée. De plus, un certain nombre de progrès quant aux techniques de réalisation, concernant l'encapsulation de coquilles diélectriques approximant de façon discrète le gradient d'indice continu caractérisant la distribution de Lüneburg, ont vues le jours. Par ailleurs, la sensibilité de la focalisation, de la directivité, du niveau des lobes secondaires, etc., en fonction des gaps d'air séparant les différentes coquilles, du rayon de la lentille, du nombre de couches composant la lentille, du choix de la source primaire associée à la lentille, etc., ont déjà fait l'objet d'un certain nombre de travaux antérieurs.

Malgré tout, ces études peuvent être complétées. En effet, d'autres types d'antennes primaires peuvent être associées aux lentilles. De plus, la modélisation peut être améliorée en prenant en compte l'effet des structures métalliques des sources primaires, etc. Par ailleurs, les techniques de fabrication peuvent être simplifiées en reconSIDérant le problème d'une manière légèrement différente. Ainsi, toutes ces remarques sont au cœur des chapitres suivants.

## 2.6 Références

- A. Yariv, P. Y. (1984). Optical Waves in Crystals. J. W. Sons: 220-312.
- A.J. Parfitt, J. S. K., G.L. James (2000). "The Lüneburg Lens as a Radio Telescope Element." IEEE Magazine: 170-173.
- A.J. Viitanen, I. V. L., A.H. Sihvola (1992). "Geometrical Optics Method for Polarization Correction of Luneburg Lens with Chiral Media." IEEE Magazine: 1192-1195.
- A.R. Taylor, R. B. (1999). Science with Square Kilometer Array. SKA Science Workshop, University of Calgary, Canada.
- B.E.A. Saleh, M. C. T. (1991). J. W. Sons: 697-699.
- Chen, F. S. (1970). "Modulators for Optical Communications." Proc. of IEEE **58**(10): 1440-1457.
- Cornbleet, S. (1997). "Modified Luneburg Lenses." Electronics Letters **33**(17): 1485-1486.
- Cuming, E. Stepped-Index Luneberg Lenses. US, 2-849-713.
- Cuming, E. (1960). "Stepped-Index Luneberg Lenses:Antennas and Reflective Devices." Electronic Design.
- D. Hilliard, D. M. Luneburg Lens Antenna with Photonic Sensors. Point Mugu, Californie, Naval Air Warfare Center-Weapons Division.
- Eaton, J. E. (1952). "On spherically symmetric lenses." IRE Trans. Antennas Propagat. **4**: 66-71.
- H. Mosallaei, Y. R.-S. (1999). "Non-Uniform Luneburg Lens Antennas: a Design Approach based on Genetic Algorithms." IEEE Magazine: 434-437.
- H. Sakurai, T. H., M. Ohki, K. Motojima, S. Kozaki (1998). "Electromagnetic Scattering by the Luneberg Lens with Reflecting Cap." IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibilty **40**(2): 94-96.
- H. Schrank, J. S. (1995). "A Luneberg-Lens Update." IEEE Magazine **37**(1): 76-79.
- Ingerson, P. G. (1997). "Luneberg Lenses Performance Limitations due to Fabrication Process." IEEE Magazine: 862-865.
- J. Sanford, Z. S. (1995). "Sidelobe Reduction with Array Fed Spherical Lenses." IEEE Magazine: 670-673.

K.A. Zimmerman, D. L. R. (1995). Luneberg Lens and Method of Constructing Same. US, 5-677-796.

K.W. Kim, Y. R.-S. (1998). IEEE-APS URSI Meet., Atlanta.

K.W. Kim, Y. R.-S. (1998). "Spherical Luneburg Lens Antennas: Engineering Characterizations Including Air Gap Effects." IEEE Magazine: 2062-2065.

Lüneburg, R. K. (1944). Mathematical Theory of Optics. Providence.

P.E. Racette, R. R. F. (1991). "Limitations of the Luneburg Lens as a Calibration Target for a Dual-Antenna Radar System." IEEE Trans. on Geosciences and Remote Sensing **29**(1): 179-180.

S.S. Vinogradov, E. D. V., P.D. Smith (1998). "Accurate Modelling of a Scanning Luneberg Lens Antenna: Mie Series Approach."

Y. Rahmat-Samii, E. M. (1999). Electromagnetic Optimisation by Genetic Algorithms.

Y. Rahmat-Samii, H. M., Z. Li (2000). Luneburg Lens Antennas Revised: Design, Optimisation, and Measurements. AP 2000, Davos, Switzerland.



### **3. ANALYSE PAR MODES SPHERIQUES**

---

Les structures étudiées dans ce mémoire possèdent une géométrie sphérique. Par conséquent, il apparaît naturel d'exprimer l'ensemble de l'analyse dans le système de coordonnées sphériques. En effet, ce type d'expression permet la mise en évidence de l'existence de modes naturels totalement découplés entre eux. La technique choisie ici est basée sur celle proposée par Harrington (Harrington 1961) dans le cadre de l'étude de l'influence de la présence d'une sphère métallique ou diélectrique sur une onde plane. Par la suite, Weston et Hemenger (V.H. Weston 1962) ont repris cette méthode pour étudier la diffusion engendrée par une sphère métallique associée à une coquille diélectrique illuminée par une onde plane. Par ailleurs, Chew a publié un ouvrage (Chew 1990) traitant notamment de la diffusion par une structure sphérique diélectrique multicouche, toujours à partir de cette même technique.

#### **3.1 Introduction des modes sphériques**

La représentation d'un champ électromagnétique arbitraire en série de fonctions propres vectorielles sphériques est proposée pour la première fois en 1935 par Hansen (Hansen 1935; Hansen 1936; Hansen 1937). De plus, ces fonctions sont traitées dans plusieurs ouvrages classiques (Stratton 1961), (Jones 1964), (Vanbladel 1964), (P.M. Morse 1953), ainsi que dans de nombreux travaux fondamentaux (Wilcox 1956), (C.J. Bouwkamp 1954), (Kennaugh 1959), (Stein 1961), (Cruzan 1962). Malheureusement, les conventions utilisées et les choix de constantes de normalisations diffèrent d'un ouvrage à l'autre. Du fait de cette hétérogénéité, il est apparu nécessaire de se fixer un formalisme. Ainsi, chacune des grandeurs utilisées se voit dotée d'une définition unique pour l'ensemble du document dès sa première apparition afin de ne rompre ni la progression ni la cohérence du travail présenté. Dans cet optique de cohérence, l'étude débute par la détermination de la forme générale de l'expression du champ électromagnétique en termes de modes sphériques, se poursuit par la description d'un certain nombre de techniques permettant le calcul des coefficients modaux sphériques. Ensuite, de ces expressions sont dérivées les principales grandeurs caractérisant les antennes (diagrammes de rayonnement, puissance rayonnée, directivité, etc.) ainsi que leurs applications à différentes excitations élémentaires.

### 3.1.1 Expression du champ électromagnétique

Comme annoncé précédemment, l'analyse des différentes structures s'effectue dans le cadre des fonctions modales. Ainsi, afin de déterminer l'expression générale du champ électromagnétique à partir des modes sphériques, il est nécessaire de travailler sur un certain nombre de grandeurs intermédiaires comme les équations d'Helmholtz scalaires et vectorielles.

#### 3.1.1.1 Détermination de l'équation d'onde

Avant toute autre considération, l'ensemble de la théorie développée ici est basée sur les quatre équations vectorielles de Maxwell. En régime harmonique à la pulsation  $\omega$  dans un espace libre de sources, homogène, isotrope et linéaire, leur expression est donnée par :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} &= \mp jk \begin{Bmatrix} \eta \\ 1/\eta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \end{Bmatrix} \\ \vec{\nabla} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{H} \\ \vec{E} \end{Bmatrix} &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

où la convention d'évolution temporelle choisie est  $e^{+j\omega t}$ .  $k$  représente le nombre d'onde et  $\eta$  l'impédance intrinsèque du milieu.  $\nabla$  est l'opérateur différentiel Nabla.

La première étape nécessaire permettant d'aboutir au champ électromagnétique est l'équation d'onde. Pour l'obtenir, il suffit de prendre le rotationnel des équations (1) dites de Maxwell-Faraday et Maxwell-Ampère et de l'associer aux relations (1) caractérisant un espace vide de source avec la relation vectorielle bien connue du double rotationnel. Il en ressort :

$$\Delta \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} + k^2 \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \vec{0}, \quad (2)$$

où  $\Delta$  représente l'opérateur Laplacien vectoriel. Cette équation d'onde est du type de Helmholtz vectorielle. La résolution de cette équation aux valeurs propres impose de passer à l'équation scalaire.

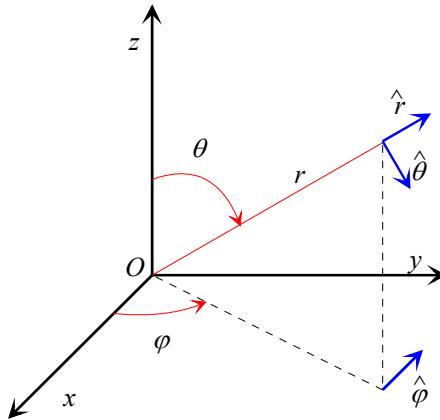
#### 3.1.1.2 Résolution de l'équation scalaire de Helmholtz

L'équation d'onde scalaire d'Helmholtz s'écrit :

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = 0, \quad (3)$$

où  $\Psi$  est la fonction d'onde scalaire.

Pour résoudre cette équation, il faut tout d'abord choisir un système de coordonnées. Compte tenu de la symétrie sphérique de la structure, il semble naturel d'exprimer cette équation dans le système de coordonnées sphériques défini comme suit :



**Figure 1** Définition du repère sphérique.

Du fait de l'expression du Laplacien en coordonnées sphériques, l'équation d'onde prend la forme suivante :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Psi = 0. \quad (4)$$

La résolution de cette équation s'effectue par une simple séparation des variables. Pour se faire, la fonction d'onde est décomposée en produit de fonctions à une seule variable :

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi), \quad r \geq 0, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi]. \quad (5)$$

Après substitution dans l'équation d'Helmholtz, ressortent trois équations différentielles :

$$\begin{aligned} r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + 2r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - p^2) \cdot R &= 0, \\ \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d}{d\theta} \Theta \right) + \left( p^2 - \frac{q^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta &= 0, \\ \frac{d^2}{d\varphi^2} \Phi + q^2 \Phi &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Les paramètres  $p$  et  $q$  représentent les constantes de séparation dont le choix est régi par la considération physique qui définit qu'en tout point de l'espace, le champ ne peut avoir qu'une seule valeur.

Les propriétés du milieu sont indépendantes de  $\varphi$ . Par conséquent,  $\Phi$  possède une période multiple de  $2\pi$ . Ceci implique que  $q$  est entier relatif qui est dès à présent noté  $m$ .

Pour résoudre la seconde équation, il faut commencer par effectuer le changement de variable  $z = \cos \theta$ . L'équation devient alors :

$$(1 - z^2) \frac{d^2}{dz^2} \Theta_z - 2z \frac{d}{dz} \Theta_z + \left( p^2 - \frac{m^2}{1 - z^2} \right) \Theta_z = 0, \quad \text{avec } \Theta_z(\cos \theta) = \Theta(\theta). \quad (7)$$

Donc  $\Theta_z$  correspond à une fonction associée de Legendre, dont les principales propriétés sont données en annexes. Ces fonctions sont caractérisées par des singularités régulières aux points  $z \in \{-1, +1, -\infty, +\infty\}$  et

aucune ailleurs. Cette équation différentielle possède deux solutions linéairement indépendantes. Les propriétés du milieu sont indépendantes de  $\theta$ , donc les pôles ne sont pas des singularités. Or la seule fonction associée de Legendre qui vérifie cette propriété est le polynôme associé de Legendre  $P_n^m$  avec  $n$ , l'entier naturel défini par la relation  $p^2 = n \cdot (n+1)$ . Il est à noter que  $P_n^m$  est identiquement nul pour  $m > n$ .

Dans ces conditions, la première équation différentielle devient :

$$r^2 \frac{d^2}{dr^2} R + 2r \frac{d}{dr} R + (k^2 r^2 - n(n+1))R = 0. \quad (8)$$

Cette équation est en fait la définition des fonctions sphériques de Bessel d'ordre  $n$ . De plus, l'onde doit être finie à l'origine parce que la puissance totale est finie. Par ailleurs, elle doit avoir la structure d'une onde sphérique qui se propage lorsque l'observation s'effectue loin du centre du système de coordonnées. Seule la fonction sphérique de Bessel de première espèce vérifie la première propriété, la seconde étant uniquement satisfaite, pour une évolution temporelle de la forme  $e^{j\omega t}, \omega \neq 0$ , uniquement par la fonction sphérique de Hankel de seconde espèce, encore appelée fonction sphérique de Bessel de quatrième espèce.

La synthèse de l'ensemble de ces résultats aboutit à la forme de la fonction d'onde scalaire  $\Psi$  solution de l'équation scalaire de Helmholtz,

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{s=1,4} \sum_{\sigma=e,o} \alpha_{mn}^{\sigma s} \Psi_{mn}^{\sigma s}(r, \theta, \varphi), \quad (9)$$

avec,  $\Psi_{mn}^{\sigma s}(r, \theta, \varphi) = Z_n^s(kr) P_n^m(\cos \theta) f_m^\sigma(\varphi)$ ,

$$f_m^\sigma(\varphi) = \begin{cases} \sin m\varphi, & \text{si } \sigma = e \\ \cos m\varphi, & \text{si } \sigma = o \end{cases}$$

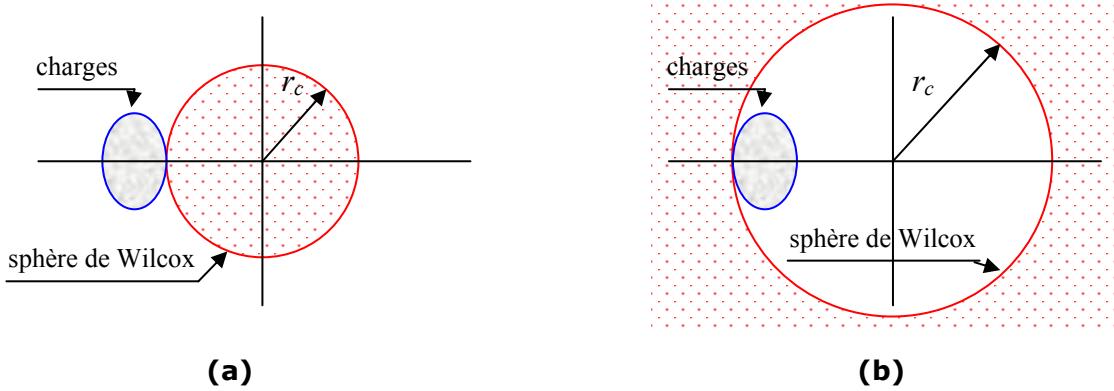
$Z_n^1$ , fonction sphérique de Bessel de première espèce et d'ordre  $n$ ,

$Z_n^4$ , fonction sphérique de Hankel de seconde espèce et d'ordre  $n$ ,

$P_n^m$ , le polynôme associé de Legendre de degré  $n$  et d'ordre  $m$ .

L'étude de cette fonction d'onde scalaire est traitée dans le livre d'Angot [Angot, 1961 #13].

Considérons maintenant une sphère  $\Sigma_c$  centrée sur l'origine du repère. Son rayon est noté  $r_c$ . Cette sphère fictive, dite de « Wilcox », permet de définir les domaines d'analyticité de la série  $\Psi$ . Pour le problème dit « intérieur »,  $\Sigma_{c\_int}$  ne contient aucune source mais possède au moins un point de contact avec les charges. Par contre, pour le problème dit « extérieur »,  $\Sigma_{c\_ext}$  est la plus petite sphère contenant toutes les charges. Pour chacun de ces problèmes,  $\Sigma_c$  est définie de façon unique. La **Figure 2** illustre ces définitions. Ces sphères, introduites par Wilcox (Wilcox 1956), sont en fait une transcription des propriétés de convergence uniforme des développements en série de Bessel. Elles sont alors dites « de convergence ».



**Figure 2** Définition des sphères de Wilcox, (a) pour le problème intérieur, (b) pour le problème extérieur.

Ainsi, le choix de  $s \in \{1,4\}$  dépend de l'emplacement de l'observateur par rapport à la sphère de Wilcox. En effet, pour  $r > r_{c\_ext}$  (problème extérieur), seule la fonction sphérique d'Hankel se comporte comme une onde progressive. De plus, le champ doit être fini à l'origine. Donc la zone d'observation  $r < r_{c\_int}$  (problème intérieur) correspond à la fonction sphérique de Bessel de première espèce. D'où le constat que ces zones correspondent aux domaines d'analyticité des fonctions utilisées, condition sine qua non d'un développement en série. Par conséquent, les restrictions suivantes s'imposent :

pour  $r > r_{c\_ext}$ ,  $a_{mn}^{\sigma 1} = 0$  pour le problème extérieur,

pour  $r < r_{c\_int}$ ,  $a_{mn}^{\sigma 4} = 0$  pour le problème intérieur,

et ceci pour l'ensemble des modes. Dans le cas où la zone d'étude se trouve limitée par deux sphères de Wilcox, i.e. lorsque l'étude est effectuée entre deux sources, les deux types d'onde coexistent.

Par la suite,  $s$  sera pris comme une fonction de  $r$  et des rayons des différentes sphères de Wilcox intervenant dans le problème. Ceci permet de travailler uniquement dans des domaines vides de sources.

### 3.1.1.3 Résolution de l'équation d'Helmholtz vectorielle

L'équation d'onde scalaire étant résolue, il reste à étendre la solution au problème vectoriel. A cet effet, il est judicieux de définir les vecteurs suivants, pour  $n = 1, 2, \dots, +\infty$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ ,  $\sigma \in \{e, o\}$  et  $s \in \{1, 4\}$  :

$$\vec{M}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \times (\Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{r}), \quad \vec{N}_{mn}^{\sigma s} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times (\Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{r}), \quad \text{et} \quad \vec{L}_{mn}^{\sigma s} = \frac{1}{k} \vec{\nabla} \Psi_{mn}^{\sigma s}. \quad (10)$$

La première relation triviale reliant ces vecteurs est  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \times \vec{M}_{mn}^{\sigma s} / k$ . De plus, les vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont orthogonaux. De même,  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \times (\Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{r}) = (\vec{\nabla} \Psi_{mn}^{\sigma s}) \times \vec{r} + \Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{\nabla} \times \vec{r} = (\vec{\nabla} \Psi_{mn}^{\sigma s}) \times \vec{r} = \vec{L}_{mn}^{\sigma s} \times \vec{r}$ , les vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  sont par conséquent également orthogonaux. Par ailleurs, quelques manipulations basiques montrent que les vecteurs  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$ ,  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont solutions de l'équation vectorielle d'Helmholtz. De plus, du fait de sa définition, le vecteur  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  vérifie la relation  $\vec{\nabla} \times \vec{L}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \Psi_{mn}^{\sigma s}) = \vec{0}$ , i.e.  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  est à rotationnel nul.

La divergence d'un rotationnel étant identiquement nulle, il ressort les égalités suivantes,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times (\Psi_{mn}^{\sigma s} \vec{r})) = 0$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma s} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{M}_{mn}^{\sigma s})/k = 0$ . Ainsi, les vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont à divergence nulle mais possèdent un rotationnel non nul (vecteurs purement solénoïdaux). Comme, de plus,  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  est à rotationnel nul et à divergence non nulle (vecteur purement longitudinal), les vecteurs  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont nécessairement non colinéaires.

Finalement, les trois familles de vecteurs  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$ ,  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  forment une famille libre de solutions de l'équation vectorielle de Helmholtz. Ces vecteurs portent le nom de vecteurs modaux sphériques. L'unicité du développement de toute solution de l'équation vectorielle d'Helmholtz (2) sur l'ensemble de ces trois familles des vecteurs modaux provient de Jones (Jones 1964). Un certain nombre de relation d'orthogonalités utiles associées à ces vecteurs est donné en annexes.

### 3.1.1.4 Résolution de l'équation d'onde associée au champ électromagnétique

Le paragraphe précédent montre que l'ensemble des solutions de l'équation vectorielle de Helmholtz peut être projeté sur la base de vecteurs modaux  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$ ,  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  avec  $n = 1, 2, \dots, +\infty$ ,  $m = 0, 1, \dots, n$ ,  $\sigma \in \{e, o\}$  et  $s \in \{1, 4\}$ . Compte tenu des définitions des sphères de Wilcox quant aux domaines d'analyticité des développements sur les modes sphériques, chaque domaine étudié est vide de source, donc  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$  et  $\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$ . Or, les vecteurs  $\vec{L}_{mn}^{\sigma s}$  ne sont pas à divergence nulle. Ils caractérisent les charges. Par conséquent, le développement du champ électromagnétique au sein des sphères de convergence se fait uniquement sur les vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$ :

$$\vec{E} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \sum_{s=1,4} a_{mn}^{\sigma s} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} + b_{mn}^{\sigma s} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}s},$$

avec  $\bar{\sigma}$  complémentaire de  $\sigma$  dans  $\{e, o\}$ . Par ailleurs, la loi de Maxwell-Faraday impose  $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -jk\eta \vec{H}$ . De (10), se déduisent les deux relations suivantes,  $\vec{\nabla} \times \vec{M}_{mn}^{\sigma s} = k \vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{\nabla} \times \vec{N}_{mn}^{\sigma s} = k \vec{M}_{mn}^{\sigma s}$ . Par voie de conséquence, le champ magnétique s'écrit

$$\vec{H} = \frac{j}{\eta k} \vec{\nabla} \times \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} a_{mn}^{\sigma s} \vec{\nabla} \times \vec{M}_{mn}^{\sigma s} + b_{mn}^{\sigma s} \vec{\nabla} \times \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}s} = \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} a_{mn}^{\sigma s} \vec{N}_{mn}^{\sigma s} + b_{mn}^{\sigma s} \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}s}.$$

En résumé, la forme générale du champ électromagnétique s'écrit:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \sum_{s=1,4} a_{mn}^{\sigma s} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} + b_{mn}^{\sigma s} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}s}, \\ \vec{H} &= \frac{j}{\eta} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} a_{mn}^{\sigma s} \vec{N}_{mn}^{\sigma s} + b_{mn}^{\sigma s} \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}s}. \end{aligned} \tag{11}$$

Les expressions des vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont, compte tenu de leur définition :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{mn}^{\sigma s}(r, \theta, \varphi) &= -t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) \cdot Z_n^s(x) \cdot f_m^\sigma(\varphi) \cdot \hat{\theta} + t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) \cdot Z_n^s(x) \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \cdot \hat{\varphi}, \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s}(r, \theta, \varphi) &= t_{mn}^{\sigma 3}(\theta) \cdot Z_n^s(x) / x \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \cdot \hat{r} - t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) \cdot K_n^s(x) \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \cdot \hat{\theta} - t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) \cdot K_n^s(x) \cdot f_m^\sigma(\varphi) \cdot \hat{\varphi}, \end{aligned} \tag{12}$$

avec  $\bar{\sigma}$  complémentaire de  $\sigma$  dans  $\{e, o\}$ ,

$$x = kr, \quad f_m^\sigma(\phi) = \begin{cases} \sin m\phi, & \text{si } \sigma = e \\ \cos m\phi, & \text{si } \sigma = o \end{cases}, \quad \sigma(-1) = \begin{cases} +1, & \text{si } \sigma = o \\ -1, & \text{si } \sigma = e \end{cases},$$

$$t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) = \bar{\sigma}(-1)m \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta}, \quad t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) = -\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta), \quad \text{et} \quad t_{mn}^{\sigma 3}(\theta) = n(n+1) \cdot P_n^m(\cos \theta).$$

Par ailleurs, les critères de convergence, décrits en 3.1.1.2 concernant les sphères de Wilcox, imposent que les coefficients sphériques  $a_{mn}^{\sigma 4}$  et  $b_{mn}^{\sigma 4}$  soient nuls pour le problème intérieur et que les coefficients sphériques  $a_{mn}^{\sigma 1}$  et  $b_{mn}^{\sigma 1}$  soient nuls pour le problème extérieur.

Il est à noter que la fonction d'onde  $\Psi$  correspond en fait aux potentiels de Debye projetés sur des potentiels de base, les harmoniques. Le champ électromagnétique associé aux coefficients d'onde  $a_{mn}^{\sigma s}$  est régit par le potentiel de Debye magnétique, tandis que le champ électromagnétique associé aux  $b_{mn}^{\sigma s}$  est lié au potentiel de Debye électrique.

### **3.1.2 Détermination des coefficients d'onde associés à un champ électromagnétique quelconque**

Ayant obtenu la forme générale du développement en série de modes sphériques, il apparaît nécessaire de proposer un certain nombre de méthodes permettant de calculer les amplitudes, ou coefficients d'onde, pour tout type de champ électromagnétique. Dans la suite de ce document, différentes méthodes sont présentées. La première est basée sur l'utilisation des courants électriques et magnétiques équivalents. La seconde concerne l'utilisation des moments dipolaires et la troisième s'appuie sur la discréttisation de la source. Par ailleurs, il est à noter que ces trois méthodes ne forment pas une liste exhaustive. En effet, les coefficients modaux sphériques peuvent être obtenus de diverses manières : soit en fonction des trois composantes du vecteur champ électrique seul ou du vecteur champ magnétique seul (Jones 1964), soit en fonction des composantes tangentielles de l'ensemble du champ électromagnétique (Kennaugh 1959).

#### **3.1.2.1 Courants électriques et magnétiques**

Tout champ électromagnétique représenté par une fonction vectorielle analytique peut être développé selon les modes sphériques comme indiqué en (11) et (12) lorsque que la zone d'espace prise est vide de source.

Dès à présent, est considérée une sphère fictive  $S_\infty$  de volume  $V_\infty$  centrée sur l'origine du repère et contenant l'observateur et l'ensemble des sources réelles du système. Ces sources sont d'étendue finie et contenues dans le volume  $V_o$  fermé par la surface  $S_o$ . Le champ électromagnétique au sein du volume compris entre  $S_\infty$  et  $S_o$  est soumis aux équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -jk\eta \vec{h}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = j \frac{k}{\eta} \vec{e}, \quad (13)$$

avec  $\vec{e} = \vec{E} + \frac{\eta}{jk} \vec{J}^e$ , et  $\vec{h} = \vec{H} + \frac{1}{jk\eta} \vec{J}^m$ .

Les vecteurs  $\vec{J}^e$  et  $\vec{J}^m$  représentent les courants équivalents aux sources dans le volume considéré. Le domaine étant pris vide de charges,  $\vec{e}$  et  $\vec{h}$  sont à divergence nulle, l'utilisation de la relation vectorielle du double rotationnel aboutit aux équations d'onde :

$$\Delta \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} + k^2 \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} = \pm \vec{\nabla} \times \begin{Bmatrix} \vec{J}^m \\ \vec{J}^e \end{Bmatrix} - \frac{1}{jk} \begin{Bmatrix} \eta \\ 1/\eta \end{Bmatrix} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \begin{Bmatrix} \vec{J}^e \\ \vec{J}^m \end{Bmatrix}. \quad (14)$$

Or, pour tout vecteur  $\vec{a}$ ,  $\nabla^2(\vec{a} \cdot \vec{r}) = \vec{r} \cdot \Delta \vec{a} + 2\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ . Ceci permet d'aboutir à l'égalité :

$$\nabla^2 \left( \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} \cdot \vec{r} \right) + k^2 \left( \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} \cdot \vec{r} \right) = \vec{r} \cdot \left( \Delta \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} + k^2 \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} \right). \quad (15)$$

La résolution de cette équation se fait par l'utilisation de la fonction de Green tridimensionnelle dynamique associée en espace homogène, vide de charge, c'est à dire dans chaque zone de Wilcox :

$$G(\vec{r}|\vec{r}') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-jk|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}. \quad (16)$$

La fonction scalaire recherchée, solution de l'équation (15), est la composante radiale  $\Phi_h^e(\vec{r}) = \vec{r} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix}$ . Elle vérifie donc les conditions de Sommerfeld. D'où la relation  $\Phi_h^e(\vec{r}) = - \int_{V_\infty} f_h^e(\vec{r}') G(\vec{r}|\vec{r}') dv(\vec{r}')$  où la fonction

intermédiaire est définie par  $f_h^e(\vec{r}') = \vec{r}' \cdot \left( \Delta \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} + k^2 \begin{Bmatrix} \vec{e} \\ \vec{h} \end{Bmatrix} \right)$ . La recombinaison de cette égalité avec les relations

(14) et (15) aboutit à :

$$\Phi_h^e(\vec{r}) = - \int_{V_\infty} \left[ \pm \vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times \begin{Bmatrix} \vec{J}^m(\vec{r}') \\ \vec{J}^e(\vec{r}') \end{Bmatrix} - \frac{1}{jk} \begin{Bmatrix} \eta \\ 1/\eta \end{Bmatrix} \vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}') \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{\nabla}_{r'} \times \begin{Bmatrix} \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}') \end{Bmatrix} \right] dv(\vec{r}'). \quad (17)$$

De l'égalité vectorielle  $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{b} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \times \vec{a}) + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{a}$ , ressort la nouvelle relation  $\vec{a} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{b} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{b} \times \vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \vec{\nabla} \times \vec{b}) + \vec{b} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{a}$ . Ceci permet d'aboutir, après usage de (13), (14) et de la définition de  $\Phi_h^e$ , à la relation suivante :

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{jk} \vec{r} \cdot \begin{Bmatrix} \eta \vec{J}^e(\vec{r}) \\ \vec{J}^m(\vec{r})/\eta \end{Bmatrix} + \dots \\ &\dots - \int_{V_\infty} \left[ \pm \begin{Bmatrix} \vec{J}^m(\vec{r}') \\ \vec{J}^e(\vec{r}') \end{Bmatrix} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) - \frac{1}{jk} \begin{Bmatrix} \eta \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}')/\eta \end{Bmatrix} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) \right] dv(\vec{r}') + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdots \mp \int_{V_\infty} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \left[ \begin{cases} \vec{J}^m(\vec{r}') \\ \vec{J}^e(\vec{r}') \end{cases} \right] \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) \right] d\nu(\vec{r}') + \cdots \\ & \cdots \mp \frac{1}{jk} \left\{ \begin{array}{l} \eta \\ 1/\eta \end{array} \right\} \int_{V_\infty} \vec{\nabla}_{r'} \cdot \left[ \begin{cases} \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}') \end{cases} \right] \times \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) - (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) \times \vec{\nabla}_{r'} \times \left[ \begin{cases} \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}') \end{cases} \right] d\nu(\vec{r}') \end{aligned}$$

Par ailleurs, le théorème de Green-Ostrogradsky (égalité entre le flux d'un champ à travers une surface fermée et l'intégration de sa divergence à l'intérieur de cette surface fermée) peut être appliqué sur les deux dernières intégrales. Mais, par définition, comme il n'y a pas de source sur  $S_\infty$  les vecteurs de courants sont nécessairement nuls sur cette surface. Cela induit la nullité des deux dernières intégrales et la réduction de  $V_\infty$  à  $V_o$  en ce qui concerne la première intégrale. Il s'en suit la relation :

$$\begin{aligned} \vec{r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{array} \right\} = & -\frac{1}{jk} \vec{r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \eta \vec{J}^e(\vec{r}) \\ \vec{J}^m(\vec{r})/\eta \end{array} \right\} + \cdots \\ & \cdots - \int_{V_o} \left[ \pm \left\{ \begin{array}{l} \vec{J}^m(\vec{r}') \\ \vec{J}^e(\vec{r}') \end{array} \right\} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) - \frac{1}{jk} \left\{ \begin{array}{l} \eta \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}')/\eta \end{array} \right\} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) \right] d\nu(\vec{r}') \end{aligned} . \quad (18)$$

En se plaçant à l'extérieur du volume  $V_o$ , c'est-à-dire en zone vide de charge, les vecteurs de courants sont nuls en  $\vec{r}$ . L'égalité (18) se réduit alors à :

$$\vec{r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{array} \right\} = - \int_{V_o} \left[ \pm \left\{ \begin{array}{l} \vec{J}^m(\vec{r}') \\ \vec{J}^e(\vec{r}') \end{array} \right\} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) - \frac{1}{jk} \left\{ \begin{array}{l} \eta \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}')/\eta \end{array} \right\} \cdot \vec{\nabla}_{r'} \times \vec{\nabla}_{r'} \times (\vec{r}' G(\vec{r}|\vec{r}')) \right] d\nu(\vec{r}') . \quad (19)$$

Maintenant, pour obtenir l'expression des coefficients d'onde, il faut projeter la fonction de Green sur la base orthogonale des fonctions sphériques. Or la fonction de Green est directement proportionnelle à la fonction sphérique de Hankel de seconde espèce et d'ordre zéro :

$$G(\vec{r}|\vec{r}') = j \frac{k}{4\pi} h_0^{(2)}(k|\vec{r}-\vec{r}'|) = j \frac{k}{4\pi} Z_0^4(k|\vec{r}-\vec{r}'|) . \quad (20)$$

Par conséquent, le développement des fonctions d'Hankel donné en (M. Abramowitz 1970) associé à la définition (9) de la fonction d'onde scalaire permet d'aboutir à l'expression recherchée :

$$G(\vec{r}|\vec{r}') = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} g_{mn} \Psi_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) \Psi_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') , \quad (21)$$

$$\text{avec } g_{mn} = -j \frac{k}{4\pi} \frac{2}{e_m} (2n+1) \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \text{ où } e_m = \begin{cases} 2, \text{ si } m=0 \\ 1, \text{ si } m \neq 0 \end{cases}, s = \begin{cases} 1 \text{ si } |\vec{r}| < |\vec{r}'| \\ 4 \text{ si } |\vec{r}| > |\vec{r}'| \end{cases}$$

et  $\bar{s}$  le complémentaire de  $s$ . Autre expression du théorème d'addition. Ainsi, de l'utilisation des vecteurs sphériques (10) via la relation (19) résulte une expression du champ électromagnétique radial :

$$\vec{r} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{array} \right\} = - \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \Psi_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) g_{mn} \int_{V_o} \left[ \pm \left\{ \begin{array}{l} \vec{J}^m(\vec{r}') \\ \vec{J}^e(\vec{r}') \end{array} \right\} \cdot \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') + j \left\{ \begin{array}{l} \eta \vec{J}^e(\vec{r}') \\ \vec{J}^m(\vec{r}')/\eta \end{array} \right\} \cdot \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') \right] d\nu(\vec{r}') , \quad (22)$$

Par considération des composantes radiales  $E_r$  et  $H_r$  du champ électromagnétique donné en (11), en développant les définitions données en (10), il ressort :

$$\begin{Bmatrix} E_r(\vec{r}) \\ H_r(\vec{r}) \end{Bmatrix} = \hat{r} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{H}(\vec{r}) \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \begin{Bmatrix} 1 \\ j/\eta \end{Bmatrix} \frac{n(n+1)}{kr} \begin{Bmatrix} b_{mn}^{\bar{\sigma}s} \\ a_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} \Psi_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}). \quad (23)$$

Or, d'après Jones [Jones, 1964 #5], le développement sur les fonctions d'onde scalaires est unique. Par conséquent, une simple identification aboutit à l'expression des coefficients modaux sphériques :

$$\begin{Bmatrix} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma}s} \end{Bmatrix} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \int_{V_o} \left[ \vec{J}^e(\vec{r}') \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') \end{Bmatrix} - \frac{j}{\eta} \vec{J}^m(\vec{r}') \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}') \end{Bmatrix} \right] dv(\vec{r}'), \quad (24)$$

avec  $c_{mn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$ ,  $e_m = \begin{cases} 2 & \text{si } m=0 \\ 1 & \text{si } m \neq 0 \end{cases}$ , et  $\begin{Bmatrix} \bar{s} \\ \bar{\sigma} \end{Bmatrix}$  complémentaire de  $\begin{Bmatrix} s \\ \sigma \end{Bmatrix}$ .

Ces expressions des coefficients sont obtenues via les composantes tangentielles du champ électromagnétiques. D'autres développements équivalents des coefficients modaux sphériques peuvent être envisagés à partir d'autres composantes du champ électromagnétique.

### 3.1.2.2 Moments dipolaires

Dans de nombreuses situations, la source primaire est caractérisée par ses moments dipolaires électromagnétiques  $(\vec{p}^e, \vec{p}^m)$ . Ils sont liés aux éléments de courants électromagnétiques infinitésimaux, placés en  $\vec{r}_0$ , vecteur défini dans le système de coordonnées sphériques par les trois composantes  $r_0$ ,  $\theta_0$  et  $\varphi_0$ , de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \vec{J}^e(\vec{r}) &= \vec{p}^e \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \\ \vec{J}^m(\vec{r}) &= \vec{p}^m \frac{1}{r^2 \sin(\theta)} \delta(\vec{r} - \vec{r}_0); \end{aligned} \quad (25)$$

avec  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0)$ .

L'introduction de ces relations dans (24) aboutit simplement à l'expression recherchée :

$$\begin{Bmatrix} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma}s} \end{Bmatrix} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \cdot \left[ \vec{p}_e \cdot \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \end{Bmatrix} - \frac{j}{\eta} \vec{p}_m \cdot \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_0) \end{Bmatrix} \right]. \quad (26)$$

Ainsi, par cette technique, aucune intégration n'intervient dans la détermination des coefficients sphériques. C'est pourquoi leur implémentation est intéressante : faible temps CPU et faible consommation de mémoire dans l'évaluation des coefficients modaux.

### 3.1.2.3 Sources étendues

Physiquement, une source électromagnétique est étendue et de dimension finie. Dans ces conditions, il apparaît nécessaire d'utiliser les formes intégrales (24) des expressions des coefficients sphériques. Par ailleurs, du fait des contraintes imposées par Wilcox, les coefficients forment une suite à convergence uniforme. Ainsi, les intégrations sont équivalentes à des séries de Riemann :

$$\begin{Bmatrix} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{Bmatrix} = -\frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \cdot \lim_{P \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^P \left[ \vec{J}^e(\vec{r}_p) \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \end{Bmatrix} - \frac{j}{\eta} \vec{J}^m(\vec{r}_p) \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \end{Bmatrix} \right] L(v_p), \quad (27)$$

où  $(v_p)_{p=1 \dots P}$  forme une partition de  $V_o$  et  $L(v_p)$  définit la longueur au sens de Lebesgue de l'élément  $v_p$ , à savoir ici, son volume. Le vecteur  $\vec{r}_p$  correspond à une position contenue dans l'élément de volume  $v_p$ . A ce stade, un certain nombre de choix sont à faire. Ainsi, les éléments de volumes  $v_p$  composant la partition et leur contenu sont dès à présent confondus :  $L(v_p) = v_p$ . De plus, les vecteurs de position  $\vec{r}_p$  sont pris comme pointant vers le centre de l'élément  $v_p$ . Dans le même esprit, le couple  $(\vec{J}_p^e, \vec{J}_p^m)$  définit le courant électromagnétique à la position  $\vec{r}_p$ . Toutes ces considérations aboutissent à :

$$\begin{Bmatrix} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{Bmatrix} = \lim_{P \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^P -v_p \frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \left[ \vec{J}_p^e \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \end{Bmatrix} - \frac{j}{\eta} \vec{J}_p^m \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \end{Bmatrix} \right]. \quad (28)$$

En définissant  $a_{mn}^{p \sigma s}$  et  $b_{mn}^{p \bar{\sigma} s}$  comme suit :

$$\begin{Bmatrix} a_{mn}^{p \sigma s} \\ b_{mn}^{p \bar{\sigma} s} \end{Bmatrix} = -v_p \frac{k^2 \eta}{\pi e_m} c_{mn} \left[ \vec{J}_p^e \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \end{Bmatrix} - \frac{j}{\eta} \vec{J}_p^m \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \\ \vec{M}_{mn}^{\sigma \bar{s}}(\vec{r}_p) \end{Bmatrix} \right], \quad (29)$$

ces coefficients intermédiaires s'interprètent comme étant les coefficients modaux associées à la source contenue dans l'élément  $v_p$ . Cette relation est à rapprocher de (26) où sont mis en jeux les moments dipolaires. Par voie de conséquence, les coefficients modaux associés à l'ensemble des sources électromagnétiques sont donnés par :

$$\begin{Bmatrix} a_{mn}^{\sigma s} \\ b_{mn}^{\bar{\sigma} s} \end{Bmatrix} = \lim_{P \rightarrow +\infty} \sum_{p=1}^P \begin{Bmatrix} a_{mn}^{p \sigma s} \\ b_{mn}^{p \bar{\sigma} s} \end{Bmatrix}. \quad (30)$$

Donc les coefficients globaux correspondent à la superposition des coefficients de chacune des sources électromagnétiques composant la source globale. Les courants primaires ont ainsi été discrétilisés.

Toute estimation numérique de cette série nécessite une troncature. La majoration de l'erreur associée est donnée par l'évolution de la dérivée première de l'intégrant dans la zone d'intégration, ici  $V_o$ . Ceci provient de l'équivalence de cette technique avec la méthode numérique d'intégration dite « des rectangles ». Par ailleurs, de cette équivalence, le choix du partitionnement, i.e. des éléments de volume  $v_p$ , influent aussi sur la précision et les critères de partitionnement de la méthode des rectangles sont également applicables.

## 3.2 Détermination des caractéristiques d'antennes

L'ensemble de l'étude développée ici est basé sur les coefficients d'onde sphériques. Ces coefficients contiennent toute l'information décrivant la source. Ainsi, les grandeurs physiques caractérisant cette source doivent être extraites de ces coefficients. Pour le domaine des antennes, il est d'usage de s'attarder plus particulièrement sur les diagrammes de rayonnement en champ lointain, la puissance rayonnée et la directivité.

### 3.2.1 Diagramme de rayonnement en champ lointain

La forme générale du champ électromagnétique a été obtenue en (11) et (12). Par ailleurs est dès à présent considérée une sphère  $S_r$ , de rayon  $r$ , suffisamment grande pour se placer dans le cas d'un problème extérieur, c'est-à-dire  $s = 4$ . Ainsi, les différentes composantes du champ électrique sur cette sphère à la position angulaire  $(\theta, \varphi)$  sont :

$$\begin{aligned} E_r &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 3}(\theta) \frac{Z_n^4(kr)}{kr} f_m^\sigma(\varphi), \\ E_\theta &= -\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} [a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) \cdot Z_n^4(kr) + b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta) \cdot K_n^4(kr)] \cdot f_m^\sigma(\varphi), \\ E_\phi &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} [a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) \cdot Z_n^4(kr) - b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta) \cdot K_n^4(kr)] \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi). \end{aligned} \quad (31)$$

Selon l'annexe concernant les fonctions sphériques de Bessel,  $Z_n^4$  et  $K_n^4$  évoluent asymptotiquement, en termes de modules, comme suit :

$$Z_n^4(z) = j^{n+1} \frac{e^{-jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \text{ si } |z| \rightarrow +\infty \quad \text{et} \quad K_n^4(z) = j^n \frac{e^{-jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \text{ si } |z| \rightarrow +\infty.$$

Par introduction de ces expressions dans les relations précédentes (31), ressortent les expressions des composantes du champ électrique en champ lointain :

$$\begin{aligned} E_r &= O((kr)^{-2}) \text{ si } |kr| \rightarrow +\infty, \\ E_\theta &= -\frac{e^{-jkr}}{kr} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) + b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta)] \cdot f_m^\sigma(\varphi) \right) + O((kr)^{-2}) \text{ si } |kr| \rightarrow +\infty, \\ E_\phi &= \frac{e^{-jkr}}{kr} \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) - b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta)] \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \right) + O((kr)^{-2}) \text{ si } |kr| \rightarrow +\infty. \end{aligned} \quad (32)$$

Ces relations sont en fait la représentation sphérique des conditions de rayonnement dites de Silver-Muller (D. Colton 1983), équivalentes de la condition scalaire de Sommerfeld. Celles-ci stipulent que le champ lointain se comporte comme une onde sphérique se propageant à l'infinie. Par ailleurs, les fonctions angulaires modulant

cette onde sphérique correspondent aux diagrammes de rayonnement en champ lointain dénormalisé. Ainsi, le diagramme de rayonnement en champ lointain associé à la composante  $E_\theta$  est :

$$d_\theta(\theta, \varphi) = -\frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) + b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta)] \cdot f_m^\sigma(\varphi). \quad (33)$$

Celui associé à la composante  $E_\varphi$  est :

$$d_\varphi(\theta, \varphi) = \frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) - b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta)] \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi). \quad (34)$$

La constante de normalisation  $E_0$  est définie comme étant l'amplitude maximale de l'onde sphérique donnée en (32).

Très souvent, les antennes préfèrent visualiser les composantes principales et croisées dans les plans  $\varphi = 0$  et  $\varphi = \pi/2$ . Ainsi, dans le plan  $\varphi = 0$  la composante principale  $CP_0(\theta)$  est  $d_\theta(\theta, 0)$  et  $d_\varphi(\theta, 0)$  définit la composante croisée  $CC_0(\theta)$ . De même, dans le plan  $\varphi = \pi/2$  la composante principale  $CP_{\pi/2}(\theta)$  est  $d_\theta(\theta, \pi/2)$  et  $d_\varphi(\theta, \pi/2)$  correspond à la composante croisée  $CC_{\pi/2}(\theta)$  :

$$\begin{aligned} CP_0(\theta) &= -\frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{o 4} \cdot t_{mn}^{o 1}(\theta) + b_{mn}^{o 4} \cdot t_{mn}^{e 2}(\theta)], \\ CC_0(\theta) &= \frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{e 4} \cdot t_{mn}^{e 2}(\theta) - b_{mn}^{e 4} \cdot t_{mn}^{o 1}(\theta)], \\ CP_{\pi/2}(\theta) &= -\frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) - b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta)] \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\pi/2), \\ CC_{\pi/2}(\theta) &= \frac{1}{E_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} j^n \cdot [j \cdot a_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) + b_{mn}^{\sigma 4} \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 2}(\theta)] \cdot f_m^\sigma(\pi/2). \end{aligned} \quad (35)$$

### 3.2.2 Puissance rayonnée.

La puissance rayonnée par une source électromagnétique n'est autre que le flux du vecteur de Poynting à travers une surface fictive contenant l'ensemble de ces sources. La surface fictive choisie est donc une sphère  $S_r$  de rayon  $r$  supérieur au rayon de la sphère de Wilcox correspondant au problème extérieur afin d'avoir  $s = 4$ . La puissance  $P_r$  rayonnée est alors :

$$P_r = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \oint_{S_r} (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot d\vec{S} \right) = \operatorname{Re}(P). \quad (36)$$

La grandeur  $P$  correspond à la puissance complexe sur  $S_r$  se déplaçant de façon radiale vers l'extérieur. L'utilisation des relations d'orthogonalité données en annexes permet d'aboutir à l'expression de la puissance complexe  $P$  en termes de modes sphériques :

$$P = -\frac{r^2}{2} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \left\{ |a_{mn}^{\sigma 4}|^2 \lambda_{mn}^{\sigma} \cdot j \cdot Z_n^4(kr) \cdot \overline{K_n^4(kr)} + |b_{mn}^{\sigma 4}|^2 \lambda_{mn}^{\bar{\sigma}} \cdot j \cdot Z_n^4(kr) \cdot \overline{K_n^4(kr)} \right\}, \quad (37)$$

avec,  $\lambda_{mn}^{\sigma} = \pi \cdot \frac{e_m^{\bar{\sigma}}}{c_{mn}}$ ,  $c_{mn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}$ ,

$$e_m^{\sigma} = 1 + \sigma(-1)\delta_{m,0} = \begin{cases} e_m & \text{si } \sigma = o \\ e'_m & \text{si } \sigma = e \end{cases}, \quad e_m = 1 + \delta_{m,0} \text{ et } e'_m = 1 - \delta_{m,0}, \quad \sigma(-1) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma = o \\ -1 & \text{si } \sigma = e \end{cases}.$$

Ainsi, en utilisant les formes asymptotiques des fonctions sphériques de Bessel données en annexes, la puissance  $P_r$  rayonnée en champ lointain devient :

$$P_r = \frac{1}{2\eta k^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \lambda_{mn}^{\sigma} \cdot \left( |a_{mn}^{\sigma 4}|^2 + |b_{mn}^{\bar{\sigma} 4}|^2 \right). \quad (38)$$

D'où la puissance moyenne rayonnée à grande distance :

$$P_{moy} = \frac{P_r}{4\pi} = \frac{1}{8\pi\eta k^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \lambda_{mn}^{\sigma} \cdot \left( |a_{mn}^{\sigma 4}|^2 + |b_{mn}^{\bar{\sigma} 4}|^2 \right) \quad (39)$$

### 3.2.3 Directivité.

La directivité  $D$  associée à une antenne est définie depuis 1983 par la *IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas* (Balanis 1997) comme étant le rapport de l'intensité  $U$  rayonnée à grande distance dans une certaine direction par l'intensité moyenne  $U_m$  rayonnée à grande distance :

$$D(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_m}. \quad (40)$$

L'intensité  $U$  s'obtient comme suit :

$$U(\theta, \varphi) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{r^2}{2} \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{r}. \quad (41)$$

D'où l'intensité moyenne rayonnée :

$$U_m = \frac{1}{4\pi} \iint_{\text{espace}} U(\theta, \varphi) d\Omega, \text{ où } d\Omega \text{ représente l'angle solide élémentaire.} \quad (42)$$

L'association de cette relation avec (36) permet d'aboutir à :

$$U_m = \frac{P_r}{4\pi} = P_{moy} = \frac{1}{8\pi\eta k^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \lambda_{mn}^{\sigma} \cdot \left( |a_{mn}^{\sigma 4}|^2 + |b_{mn}^{\bar{\sigma} 4}|^2 \right). \quad (43)$$

L'expression de l'intensité  $U$  en termes de modes sphériques se déduit de (41) en utilisant l'expression du champ électromagnétique donnée en (11) et (12) couplée avec l'expression asymptotique des fonctions sphériques de Bessel. Du fait de sa longueur, la forme générale explicite de l'intensité  $U$  en termes de modes sphériques n'apporte rien de nouveau. Ainsi, son expression sera donnée pour chaque cas particulier.

### 3.2.4 Application à différentes excitations primaires

Le bien fondé de l'ensemble des relations précédentes s'effectue par leur mise en application sur un certain nombre de sources électromagnétiques triviales. Les plus simples d'entre-elles sont les dipôles électriques et magnétiques. Par la suite, la discréétisation des sources est traitée dans le cadre de l'ouverture d'un cornet.

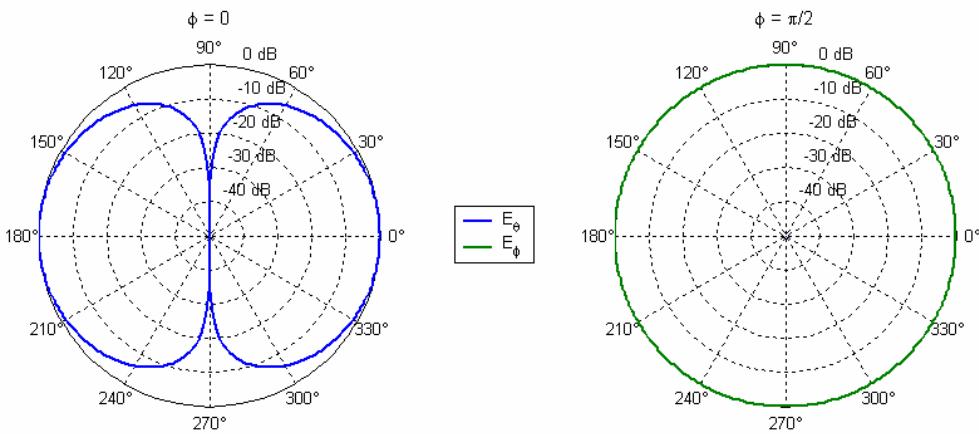
Avant tout autre considération, il apparaît important de faire quelques remarques sur l'aspect numérique. En effet, l'implémentation de l'ensemble de ces fonctions nécessite une troncature des séries modales à un rang  $N$ . L'ouvrage (Y.T. Lo 1988) conseille le choix  $N = ka$ , où  $k$  est le nombre d'onde et  $a$  le rayon de la plus petite sphère centrée sur l'origine englobant les sources rayonnantes. Malheureusement, comme il est expliqué dans (John H. Bruning 1971 ; J.E. Hanson 1988), pour certains cas critiques, il est préférable de considérer un ordre de troncature plus élevé :  $N = ka + N_1$ . (J.E. Hanson 1988) fait le choix  $N_1 = 3\sqrt[3]{ka}$ . Note importante : rien n'indique dans ces références le critère aboutissant à ces ordres de troncature. Toute troncature effectuée à un ordre inférieur risquerait de ne pas tenir de modes dont l'effet sur le champ électromagnétique ne serait pas négligeable.

#### 3.2.4.1 Le dipôle électrique élémentaire

Balanis, dans le livre (Balanis 1997), introduit le dipôle électrique élémentaire via un fil électrique de longueur  $l$  négligeable devant la longueur d'onde et parcouru par un courant électrique orienté  $I^e$  ( $I^m = 0$ ). Ainsi, son moment dipolaire devient  $\vec{p}^e = I^e \vec{l}$  et  $\vec{p}^m = \vec{0}$ . La distribution de courant est alors donnée par (25) et les coefficients modaux par (26).

La validation des relations des paragraphes précédents est effectuée en imposant une orientation au dipôle électrique. A cet effet, celui-ci est placé en  $(x_0, 0, 0)$  et orienté selon  $+\hat{x}$  dans le repère défini en **Figure 1**. La valeur de  $x_0$  n'a pas à être précisée. En effet, l'évolution radiale est caractérisée par les fonctions de Bessel, qui, elles-mêmes, ne font pas intervenir seulement la position mais plutôt la longueur électrique  $kx_0$ , encore appelée fréquence normalisée.

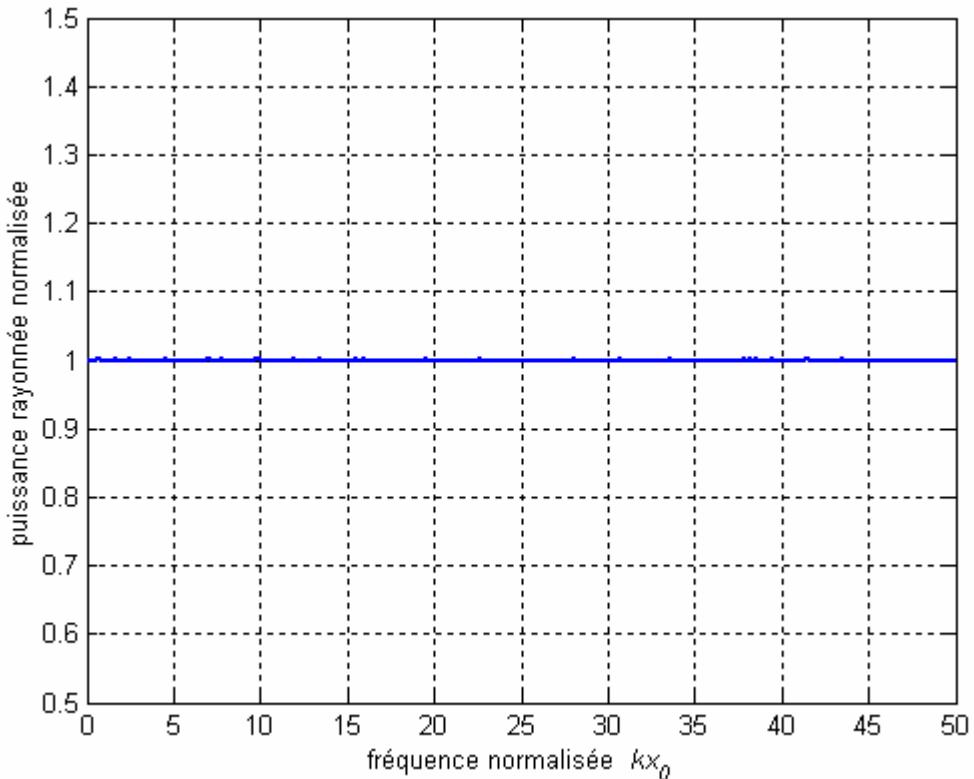
Les diagrammes de rayonnement en champ lointain associés à ce dipôle obtenus via (33) et (34) pour  $kx_0 = 10.0$  sont donnés en **Figure 3**. Ils correspondent exactement à ce qui est présenté dans n'importe quelle littérature classique, comme (Balanis 1997).



**Figure 3** Diagrammes de rayonnement en champ lointain du dipôle électrique placé en  $(x_0, 0, 0)$  et orienté selon  $+\hat{x}$ . Le paramètre de variation angulaire est  $\theta$ .

De la même manière, l'expression de la directivité explicitée en 3.2.3 est également correcte : elle donne la valeur bien connue de 1.5 à son maximum.

Pour un dipôle électrique infinitésimal, (Balanis 1997) indique que la puissance rayonnée est  $Pr = (\eta/12\pi)|k.p^e|^2$ . Ainsi, la **Figure 4** montre, sur une très large bande de fréquence normalisée, que la relation (38) normalisée par rapport à la relation précédente vaut identiquement 1.0 sur toute la bande. Les quelques très légères irrégularités proviennent du choix de l'ordre de troncature des séries. Malgré tout, la très faible amplitude de ces « sursauts » atteste du bien fondé du choix  $N_1 = \sqrt[3]{ka}$  proposé par (J.E. Hanson 1988).



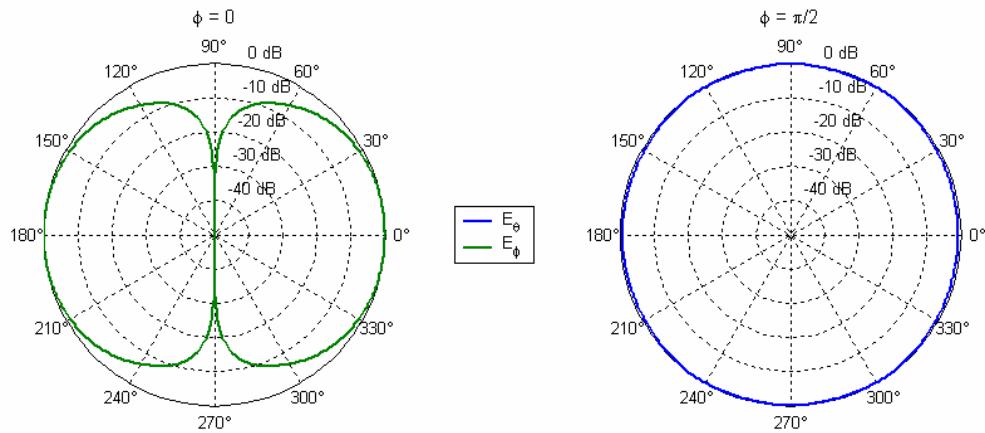
**Figure 4** Puissance rayonnée du dipôle électrique normalisée par rapport à l'expression fournie précédemment.

Finalement, l'ensemble des expressions développées dans les sections précédentes se trouve entièrement vérifiées dans le cas du dipôle électrique élémentaire.

### 3.2.4.2 Le dipôle magnétique élémentaire

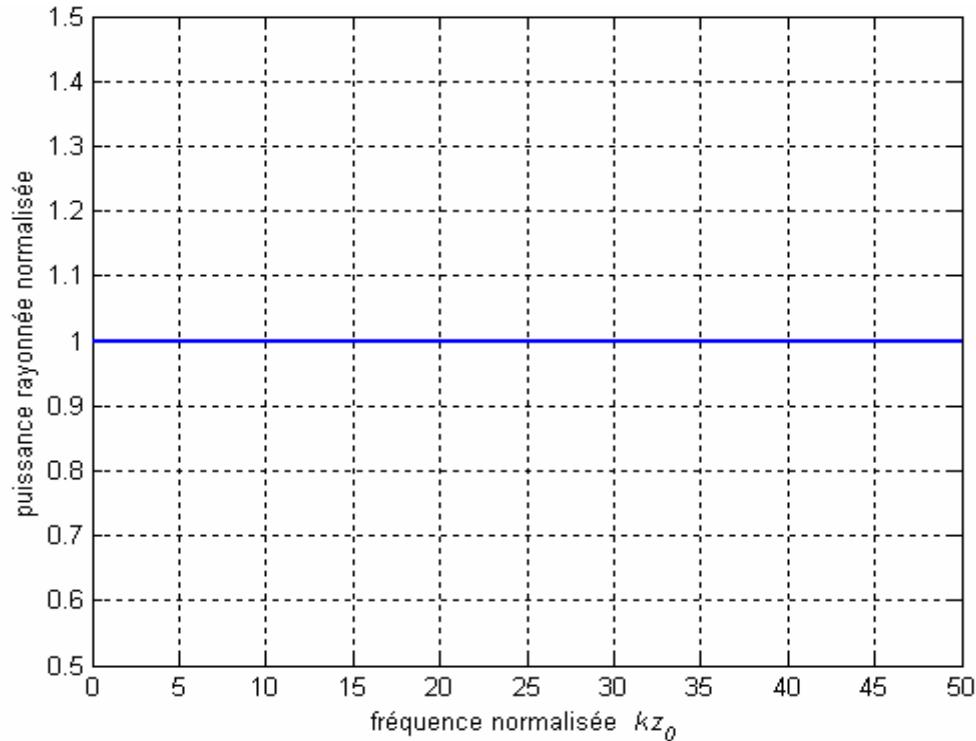
De la même manière, il est possible d'étudier le cas du dipôle magnétique élémentaire. Physiquement, bien totalement irréalisable, celui-ci équivaut à une boucle, de rayon  $a$  négligeable devant la longueur d'onde, en fil électrique extrêmement fin parcouru par un courant électrique  $I^e$  orienté. Cette interprétation n'est qu'une conséquence du principe de dualité associé aux équations de Maxwell. Le moment dipolaire associé est alors  $\vec{p}^e = \vec{0}$  et  $\vec{p}^m = \eta I^e 2\pi \vec{a}$ . La distribution de courant est donnée par (25) et les coefficients modaux par (26).

Est maintenant considéré un dipôle magnétique placé en  $(0,0,z_0)$  de moment dipolaire  $\vec{p}^m = p^m \hat{x}$ . Comme précédemment, les diagrammes de rayonnement en champ lointain associés à ce dipôle sont obtenus via (33) et (34) pour  $kz_0 = 10.0$ . Leurs représentations, **Figure 5**, sont en parfait accord avec la littérature classique.



**Figure 5** Diagrammes de rayonnement en champ lointain du dipôle magnétique placé en  $(0,0,z_0)$  et orienté selon  $+\hat{x}$ . Le paramètre de variation angulaire est  $\theta$ .

Dans le même esprit, la directivité associée, donnée en 3.2.3, correspond également à la valeur bien connue de 1.5. Pour ce qui est de la puissance rayonnée, sa valeur, normalisée par rapport à  $Pr = (1/12\pi\eta)|k.p|^2$  et donnée en **Figure 6**, indique la véracité de la relation (38). Par ailleurs, cette courbe montre également que le choix de l'ordre de troncature proposé par (J.E. Hanson 1988) est correct.



**Figure 6** Puissance rayonnée du dipôle magnétique normalisée par rapport à l'expression fournie précédemment.

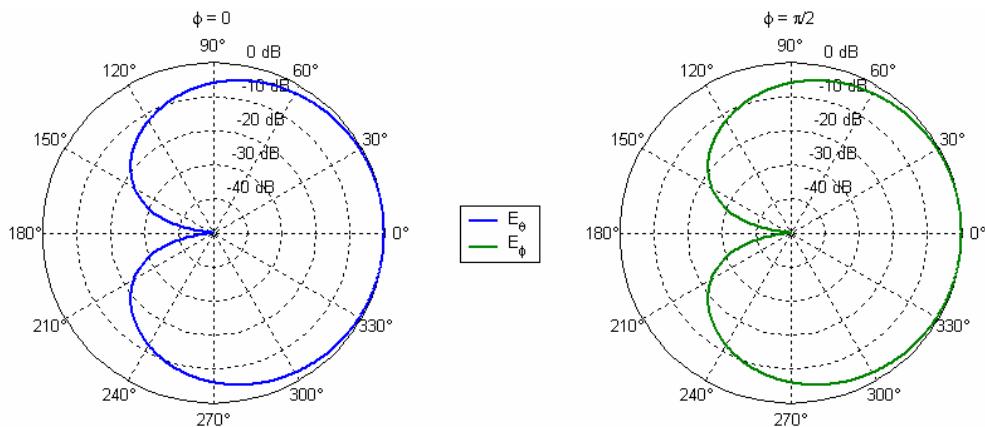
Ainsi, l'ensemble des relations concernant la directivité, les diagrammes de rayonnement en champ lointain et la puissance rayonnée est validé pour des dipôles électriques et magnétiques. Du fait de la linéarité des

équations de Maxwell, ces relations sont également vérifiées pour toute combinaison linéaire de courant électriques et magnétiques. Il ne reste donc qu'à valider la discréétisation de sources étendues proposée en 3.1.2.3.

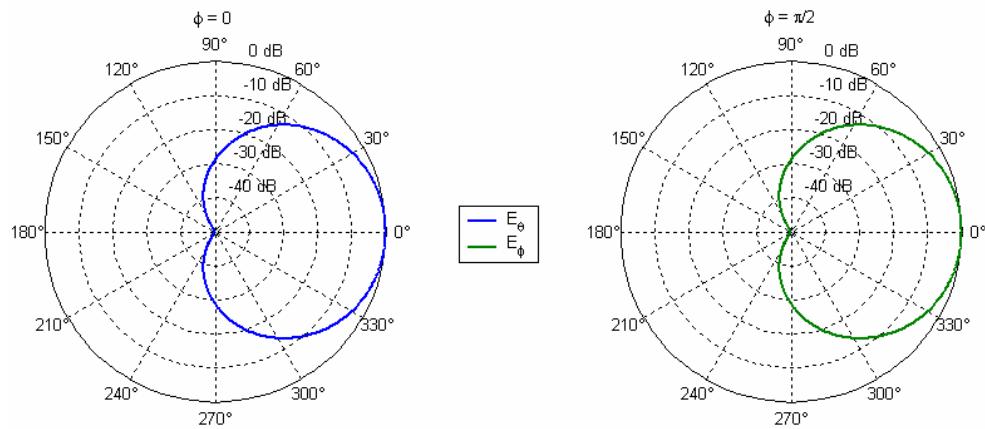
### 3.2.4.3 La source complexe de Huygens

Une source complexe de Huygens, (S.S. Vinogradov 1998), consiste en le croisement d'une source électrique et d'une source magnétique de telle sorte que les champs s'additionnent dans une direction et s'annulent dans la direction opposée. Par Ailleurs, à leur position physique  $\vec{r} = r \cdot \hat{r}$ , où le réel positif  $r$  n'est autre que la distance au centre du repère, est ajoutée une grandeur vectorielle purement imaginaire  $jb \cdot \hat{d}$  permettant de contrôler l'ouverture à mi-puissance du diagramme de rayonnement de la source. Le vecteur réel  $\hat{d}$  donne la direction de modification et  $b$  décrit de quelle manière le lobe principal est modifié. Cette source imaginaire reste solution des équations de Maxwell. Elle a l'avantage de pouvoir approcher de façon plus réaliste différents types de diagramme sans effectuer d'intégrations, très coûteuses en termes de temps de calculs.

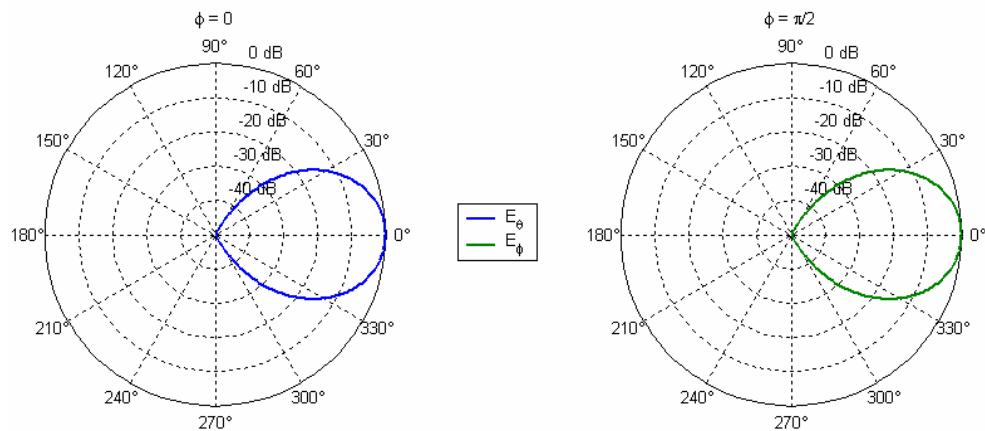
Le choix d'un couple de moments dipolaires  $(\vec{p}^e, \vec{p}^m)$ , tel que  $\vec{p}^e$  et  $\vec{p}^m$  soient orthogonaux et que leur norme vérifie  $|\vec{p}^m| = \eta \cdot |\vec{p}^e|$ , aboutit à une source de Huygens. Le fait d'y ajouter une position complexe crée une source complexe de Huygens. En effet, pour le choix  $(p^e \hat{y}, \eta p^e \hat{x})$ , les diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus donnés de la **Figure 7** à la **Figure 10** suivent cette définition. Ils correspondent en fait à l'approximation au premier ordre du rayonnement de cornets circulaires. Les **Figure 11** et **Figure 12** montrent l'effet de l'orientation de ce vecteur imaginaire sur le diagramme de rayonnement. La **Figure 13** montre l'évolution de l'ouverture à mi-puissance en fonction de la valeur du paramètre imaginaire normalisé  $kb$ . Toutes ces figures confirment l'effet, et donc l'intérêt, de ce coefficient imaginaire quant à la simulation d'un diagramme de rayonnement bien particulier.



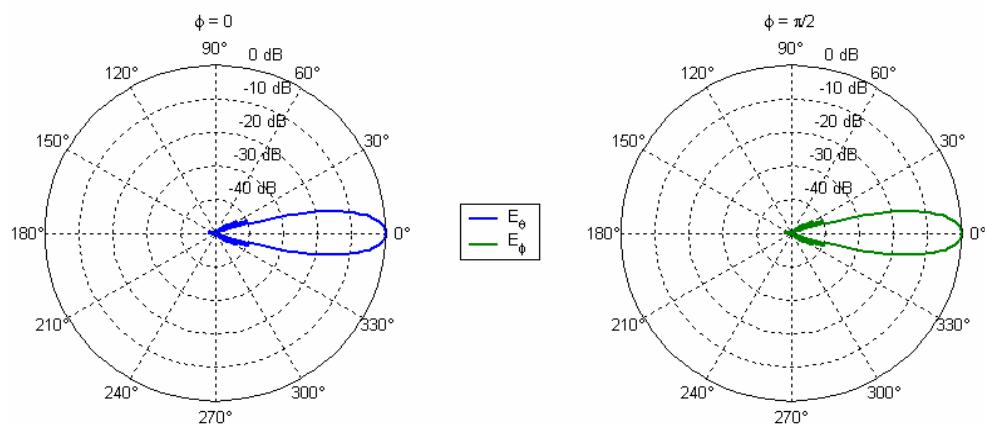
**Figure 7** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens, pour le cas  $kb = 0.00$  et  $\hat{d} = \hat{z}$ .



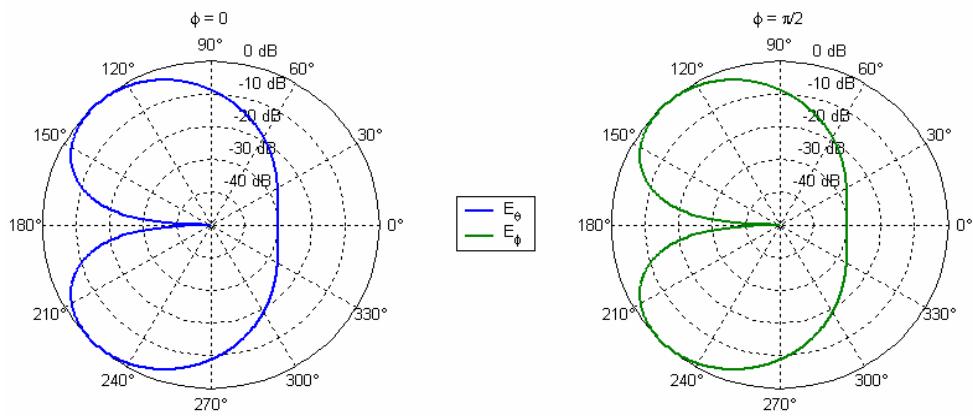
**Figure 8** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens, pour le cas  $kb = 0.25$  et  $\hat{d} = \hat{z}$ .



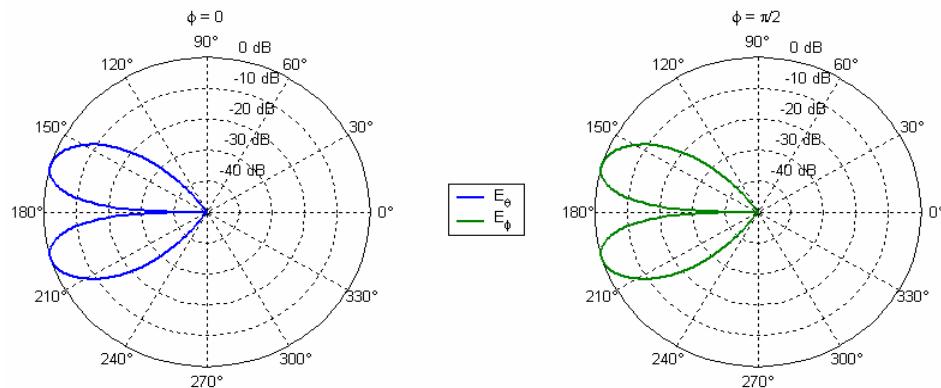
**Figure 9** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens, pour le cas  $kb = 1.00$  et  $\hat{d} = \hat{z}$ .



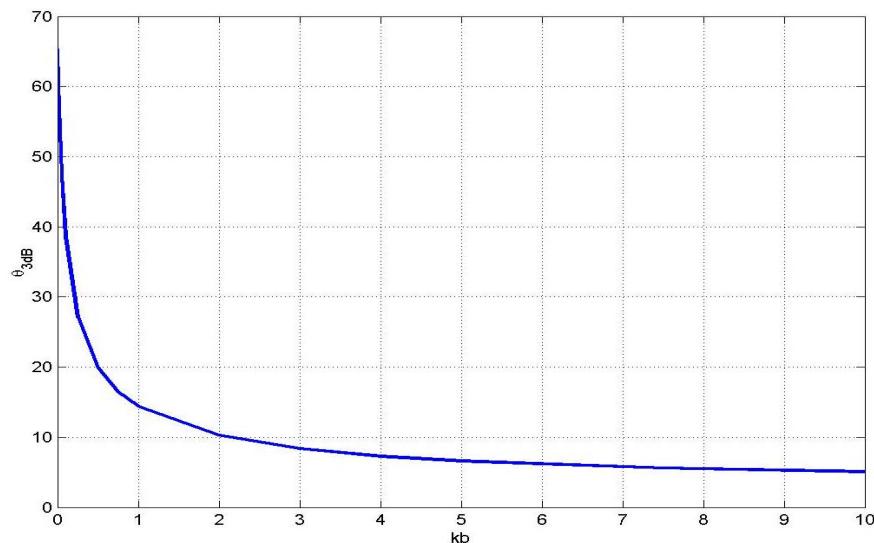
**Figure 10** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens, pour le cas  $kb = 10.00$  et  $\hat{d} = \hat{z}$ .



**Figure 11** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens, pour le cas  $kb = 0.30$  et  $\hat{d} = -\hat{z}$ .



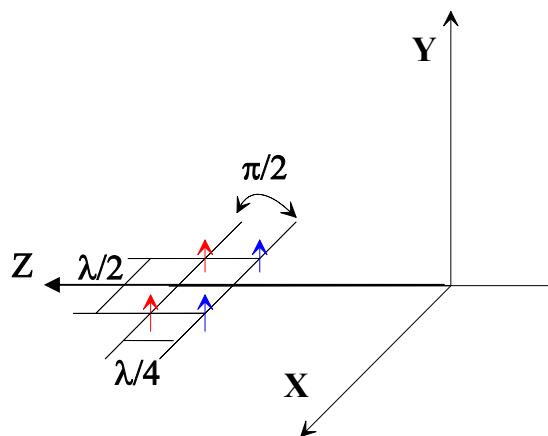
**Figure 12** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens, pour le cas  $kb = 2.00$  et  $\hat{d} = -\hat{z}$ .



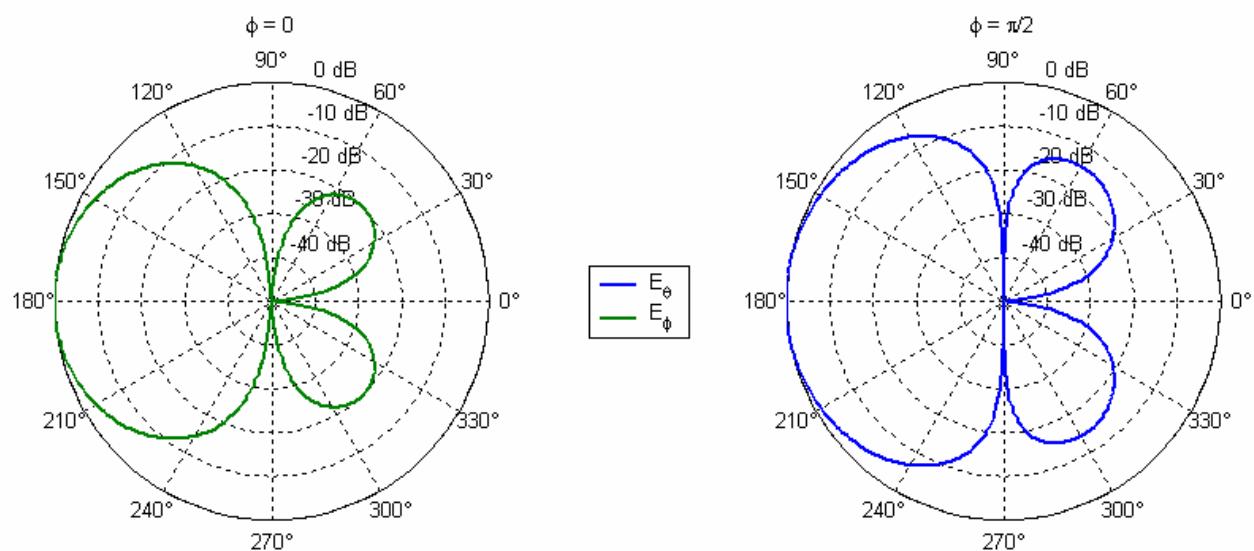
**Figure 13** Evolution de l'ouverture à mi-puissance, en degrés, en fonction du paramètre imaginaire normalisé  $kb$  avec  $\hat{d} = \hat{z}$ .

### 3.2.4.4 Antenne « End Fire »

Une manière simple d'approcher le rayonnement en champ lointain d'un cornet rectangulaire est l'emploi de dipôles électriques mis en réseau pour former une antenne type « End Fire », . L'agencement choisi, composé de quatre éléments, est donné en **Figure 14**. Les diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus sont donnés en **Figure 15**.



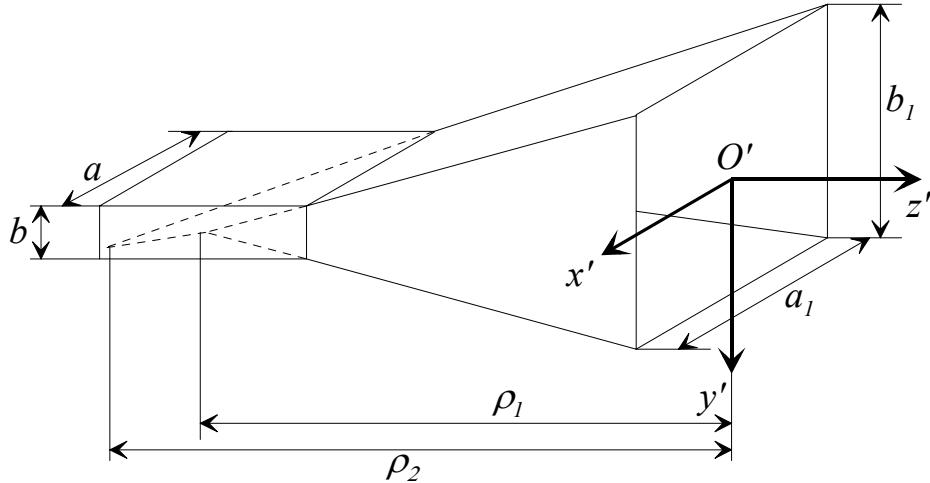
**Figure 14** Schéma de principe d'une antenne type « End Fire » à quatre éléments.



**Figure 15** Diagrammes de rayonnement en champ lointain associés à l'antenne type « End Fire » décrite en **Figure 14**.

### 3.2.4.5 Le cornet pyramidal

Une des sources électromagnétique très utilisée par les antennistes est le cornet pyramidal. Sa modélisation a déjà fait l'objet de nombreux travaux antérieurs répertoriés dans la littérature classique. Le but de cette partie n'est pas d'étudier ce type de cornet, mais plutôt de vérifier le bien fondé de la discréétisation proposée en 3.1.2.3. A cet effet, la géométrie choisie est donnée en **Figure 16**.



**Figure 16** Géométrie du cornet pyramidal.

La technique choisie pour calculer les coefficients sphériques associés à ce cornet est basée sur la discréétisation des courants électromagnétiques équivalents associés à l'ouverture. Pour se faire, (Balanis 1997) donne l'expression du champ électromagnétique au niveau de l'ouverture dans le repère local  $(O', x', y', z')$  associé au cornet :

$$\begin{aligned}\vec{E}(x', y') &= E_0 \hat{y}' \cos(\pi x'/a_1) e^{-j\frac{k}{2} \left( \frac{x'^2}{\rho_2} + \frac{y'^2}{\rho_1} \right)}, \\ \vec{H}(x', y') &= -\frac{E_0}{\eta} \hat{x}' \cos(\pi x'/a_1) e^{-j\frac{k}{2} \left( \frac{x'^2}{\rho_2} + \frac{y'^2}{\rho_1} \right)},\end{aligned}\quad (44)$$

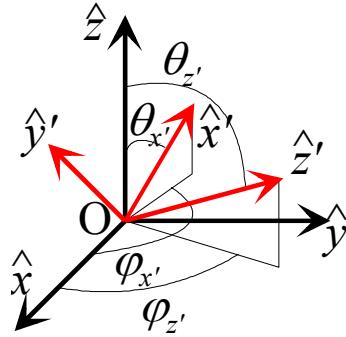
et ce pour  $-\frac{a_1}{2} \leq x' \leq \frac{a_1}{2}$  et  $-\frac{b_1}{2} \leq y' \leq \frac{b_1}{2}$ .

En appliquant le principe d'équivalence de Love, explicité dans (Balanis 1997), ressort l'expression des courants équivalents à l'ouverture :

$$\begin{aligned}\vec{J}^e(x', y') &= -E_0 \hat{y}' \cos(\pi x'/a_1) e^{-j\frac{k}{2} \left( \frac{x'^2}{\rho_2} + \frac{y'^2}{\rho_1} \right)}, \\ \vec{J}^m(x', y') &= \frac{E_0}{\eta} \hat{x}' \cos(\pi x'/a_1) e^{-j\frac{k}{2} \left( \frac{x'^2}{\rho_2} + \frac{y'^2}{\rho_1} \right)},\end{aligned}\quad (45)$$

et ce pour  $-\frac{a_1}{2} \leq x' \leq \frac{a_1}{2}$  et  $-\frac{b_1}{2} \leq y' \leq \frac{b_1}{2}$ .

Bien que très simples, ces relations ne sont pas encore exploitables : elles sont exprimées dans le repère local associé au cornet. Il est donc maintenant nécessaire de les transformer afin de les avoir dans le repère global. Pour y parvenir, il faut tout d'abord la matrice de rotation permettant le passage du repère cartésien local  $(O',x',y',z')$  au repère cartésien global  $(O,x,y,z)$ . Les angles de rotation sont donnés en **Figure 17**.



**Figure 17** Définition des angles de rotation lors du passage du repère local au repère global.

Comme les vecteurs de la base locale  $B' = (\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}')$  s'expriment dans la base globale  $B = (\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$  comme suit :

$$\hat{x}' = \begin{bmatrix} \sin \theta_{x'} \cdot \cos \varphi_{x'} \\ \sin \theta_{x'} \cdot \sin \varphi_{x'} \\ \cos \varphi_{x'} \end{bmatrix}_B, \quad \hat{z}' = \begin{bmatrix} \sin \theta_{z'} \cdot \cos \varphi_{z'} \\ \sin \theta_{z'} \cdot \sin \varphi_{z'} \\ \cos \varphi_{z'} \end{bmatrix}_B \text{ et } \hat{y}' = \hat{z}' \times \hat{x}', \quad (46)$$

La matrice de rotation  $R_{B' \rightarrow B}$  a pour expression :

$$R_{B' \rightarrow B} = \begin{bmatrix} \hat{x}'^T \\ \hat{y}'^T \\ \hat{z}'^T \end{bmatrix}, \text{ où les vecteurs sont donnés dans la base } B. \quad (47)$$

Ici,  $A^T$  représente la transposée de  $A$ . Par ailleurs, les vecteurs sphériques sont explicités dans le repère sphérique défini en **Figure 1**. Il est donc nécessaire d'avoir la matrice de rotation  $R_{B \rightarrow S}$  passant de la base globale  $B$  à la base sphérique  $S = (\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\phi})$  :

$$R_{B \rightarrow S} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \varphi & \cos \theta \sin \varphi & -\sin \theta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

Il s'en déduit alors la matrice de rotation  $R_{B' \rightarrow S}$  assurant le passage de la base  $B'$  vers la base  $S$ , produit des deux matrices de rotations précédentes  $R_{B' \rightarrow S} = R_{B \rightarrow S} \cdot R_{B' \rightarrow B}$ . Par conséquent, l'expression des vecteurs de la base locale dans la base sphérique s'obtient par le simple produit matriciel suivant :

$$\hat{x}|_S = R_{B' \rightarrow S} \cdot \hat{x}|_{B'}, \quad \hat{y}|_S = R_{B' \rightarrow S} \cdot \hat{y}|_{B'}, \quad \text{et} \quad \hat{z}|_S = R_{B' \rightarrow S} \cdot \hat{z}|_{B'}. \quad (49)$$

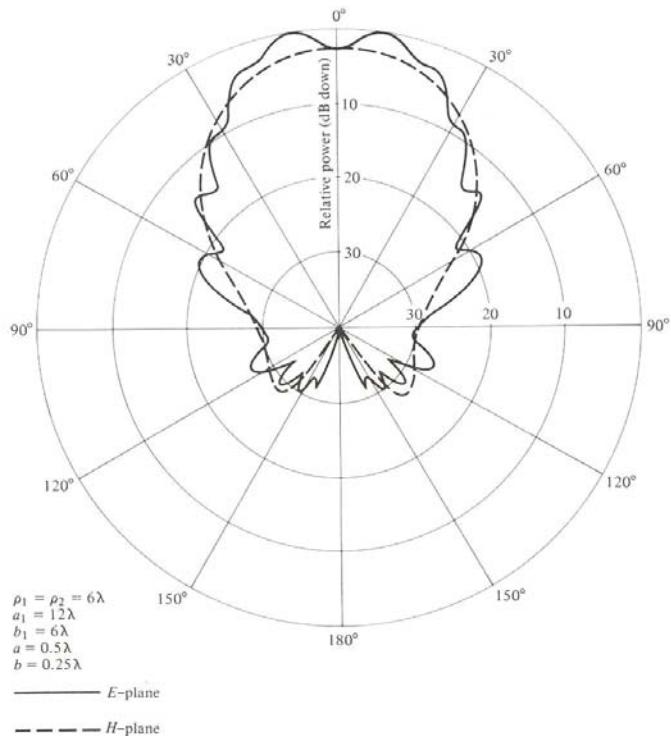
Pour ce qui est des coordonnées, la technique reste la même à ceci près qu'il ne faut pas oublier la translation apportée par le décentrage de l'ouverture :  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ . Or,  $\overrightarrow{O'M} = x'\hat{x} + y'\hat{y} + z'\hat{z}'$ . Le vecteur  $\overrightarrow{OO'}$  étant fixé par la position de l'ouverture, les coordonnées peuvent alors être données dans le repère global :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \overrightarrow{OM} \Big|_B = \overrightarrow{OO'} \Big|_B + \overrightarrow{O'M} \Big|_B = \overrightarrow{OO'} \Big|_B + R_{B' \rightarrow B} \cdot \overrightarrow{O'M} \Big|_{B'} = \overrightarrow{OO'} \Big|_B + R_{B' \rightarrow B} \cdot \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (50)$$

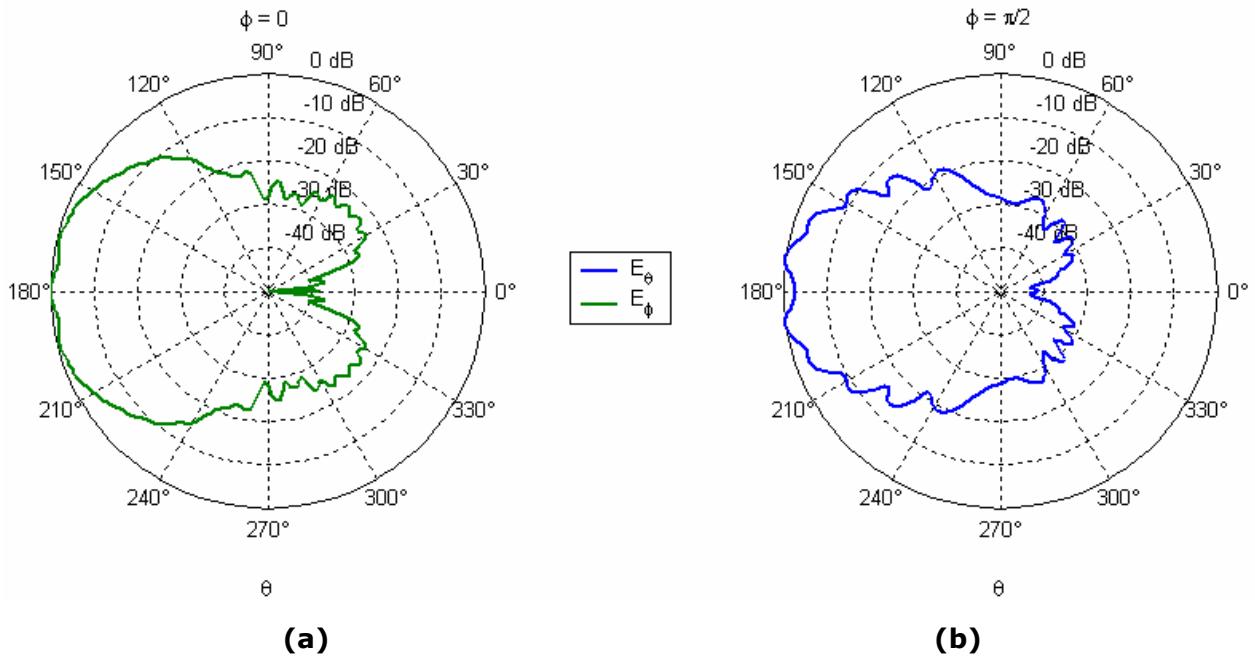
Ceci aboutit aisément à l'obtention de l'ensemble des paramètres sphériques  $(r, \theta, \phi)$  et, par voie de conséquence, à l'expression des courants électromagnétiques équivalents, donnés en (45), dans le repère sphérique  $(O, r, \theta, \phi)$ .

L'étape suivante consiste en la discréttisation de l'ouverture suivante le principe développé en 3.1.2.3. Les coefficients sphériques sont obtenus via (29) et (30) en effectuant la troncature à un ordre  $P_{max}$ .

Afin de valider tout ceci, le cornet, étudié dans (Balanis 1997) à la page 687, est pris en compte. Ses dimensions sont  $b_1 = a_1/2 = \rho_1 = \rho_2 = 6\lambda$ . L'ouverture du cornet est placée dans le plan ( $z = -6\lambda$ ) et orientée vers les  $z$  croissants. Les résultats obtenus par Balanis sont donnés en **Figure 18** et ceux obtenus par la technique proposée ci-dessus en **Figure 19**. La discréttisation de l'ouverture est choisie homogène et sa partition est en  $50 \times 100$ . La troncature suit les règles décrites précédemment. L'accord entre la technique proposée ici et les résultats donnés dans (Balanis 1997) à la page 687 est bon. Les légères différences sont le fruit de la troncature de la série.



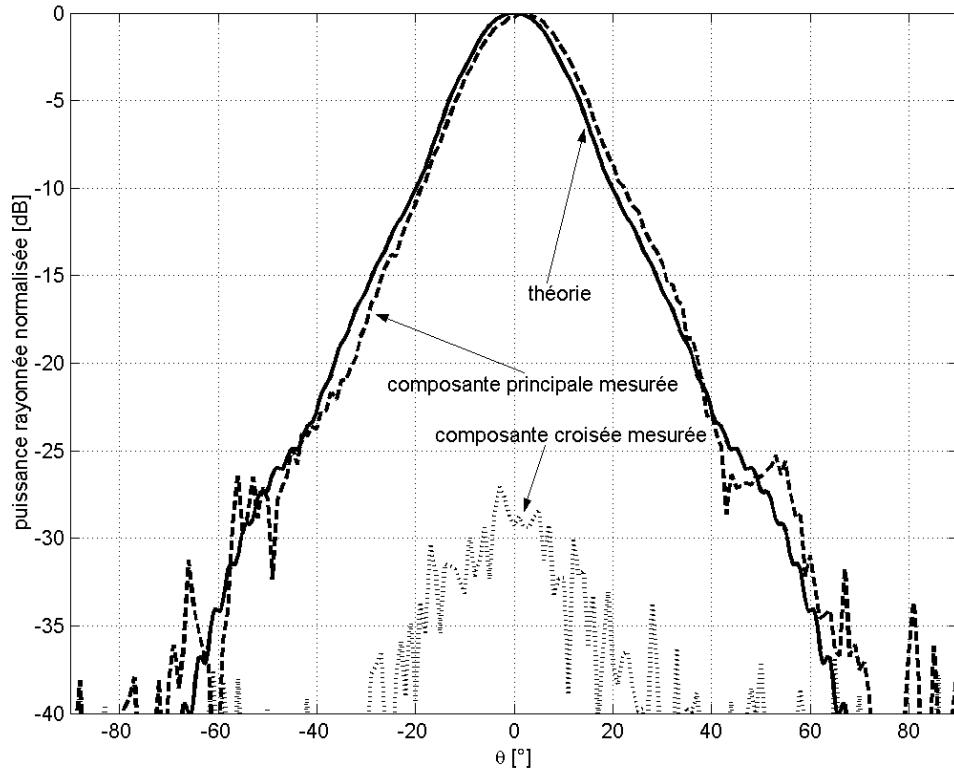
**Figure 18** Diagramme en champ lointain plan E – plan H du cornet étudié dans (Balanis 1997) à la page 687.



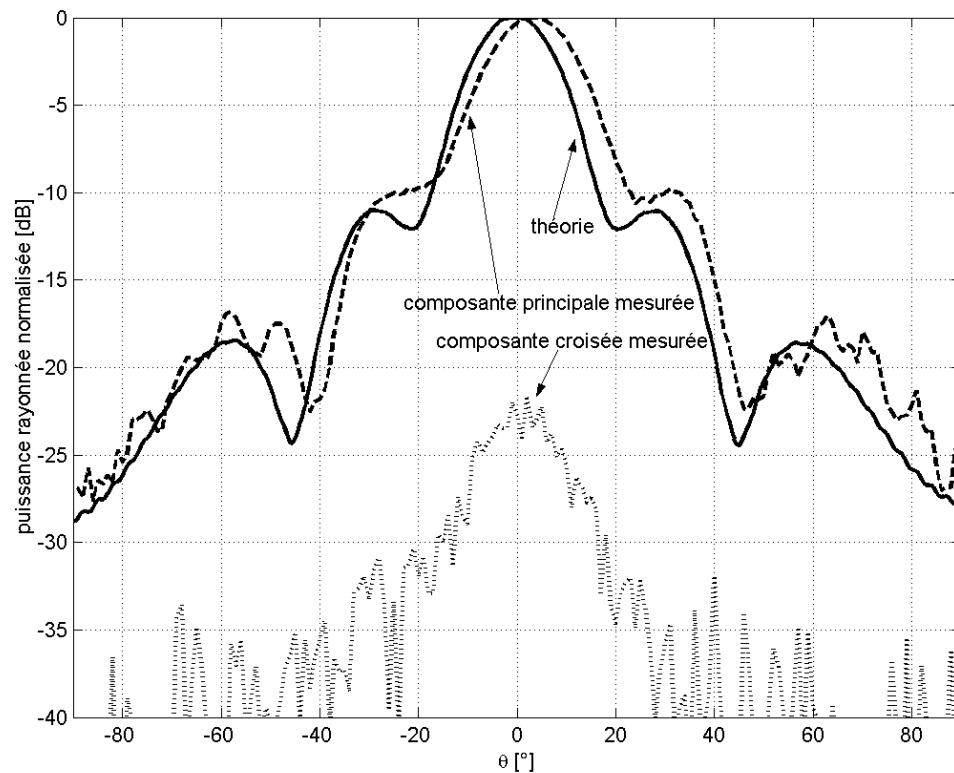
**Figure 19** Diagrammes en champ lointain du cornet de dimensions  $b_1 = a_1/2 = \rho_1 = \rho_2 = 6\lambda$  par la technique de discréétisation de son ouverture placée dans le plan ( $z=-6\lambda$ ) et orienté selon les  $z$  positifs. (a) plan H. (b) plan E.

Une autre validation est effectuée. Il s'agit toujours d'un cornet. Ses dimensions sont  $a_1 = 22.0\text{mm}$ ,  $b_1 = 16.9\text{mm}$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 30.8\text{mm}$ . Le cornet est placé en  $r_0 = 6.0\text{cm}$ ,  $\theta_0 = \pi/2$  et  $\varphi_0 = \pi$ . La discréétisation est uniforme et la partition en  $50 \times 100$ . La fréquence d'étude est 50.0GHz. Les résultats sont donnés en **Figure 20** et **Figure 21**. La théorie et la mesure apparaissent en très bon accord. Il est à noter que la théorie ne prévoit pas de composante croisée. Ceci provient du fait que dans le modèle théorique, toutes les symétries sont parfaites, alors que dans la pratique, certaines dissymétries de la géométrie existent ce qui induit l'apparition de courants supplémentaires créant les composantes croisées.

Ainsi, la technique de discréétisation de sources étendues se trouve entièrement validée.



**Figure 20** Diagramme en champ lointain du cornet de dimensions  $a_l = 22.0\text{mm}$ ,  $b_l = 16.9\text{mm}$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 30.8\text{mm}$ . Plan E.



**Figure 21** Diagramme en champ lointain du cornet de dimensions  $a_l = 22.0\text{mm}$ ,  $b_l = 16.9\text{mm}$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 30.8\text{mm}$ . Plan H.

### **3.2.4.6      Onde plane**

Le développement du champ électromagnétique associé à une onde plane en termes de vecteurs modaux sphériques est dû à Stratton, (Stratton 1961). Il montre que pour une onde plane, le champ électrique s'écrit :

$$\vec{E} = (E_x \cdot \hat{x} + E_y \cdot \hat{y}) \cdot e^{jkz} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{\sigma=e,o} a_{ln}^{\sigma 1} \cdot \vec{M}_{ln}^{\sigma 1} + b_{ln}^{\sigma 1} \cdot \vec{N}_{ln}^{\sigma 1}, \text{ avec}$$
$$a_{ln}^{o1} = j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} E_x = -j \cdot b_{ln}^{o1}, \quad a_{ln}^{e1} = -j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} E_y = -j \cdot b_{ln}^{e1}.$$

### **3.2.4.7      Conclusion**

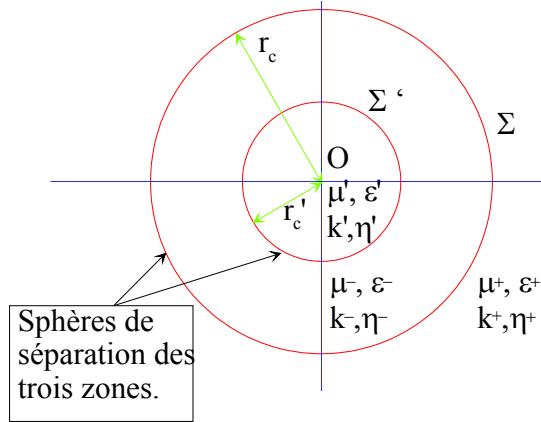
Finalement l'ensemble des relations proposées précédemment sont vérifiées : les techniques d'obtention des coefficients sphériques, les discrétilisations de sources étendues, les calculs de directivité, de puissance rayonnée et de diagramme en champ lointain. Toutes ces relations peuvent être dès à présent étendues au cas du couplage avec une lentille à distribution sphérique. Ceci est l'objet de l'étude suivante.

## **3.3      Diffusion introduite par une lentille**

L'expression du champ électromagnétique en termes de modes sphériques simplifie l'étude d'un certain nombre de structures à géométrie sphérique. Ceci est en effet le cas pour la détermination des coefficients d'onde du champ électromagnétique total en présence de n'importe quel type de structure à symétrie sphérique concentrique, comme il est question dans cette section. Ce développement se scinde en trois grands axes. En premier lieu, cette étude permet la mise en évidence de la forme générale du champ électromagnétique total sous forme de coefficients d'onde pour, dans un second temps, obtenir une relation entre les coefficients de part et d'autre de chaque frontière grâce aux relations de continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique. Puis, en généralisant l'ensemble des résultats précédents, il ressort une expression de chacun des coefficients d'onde du champ total à partir des coefficients d'onde du champ incident. Le résultat obtenu est à mettre en parallèle avec la formulation proposée par Mieras (Mieras 1982). Ce dernier exprime le phénomène de diffusion d'une lentille de Lüneburg sur une source de Huygens via l'inversion d'un système matriciel dont les dimensions dépendent directement du nombre de couches composant la lentille : il obtient l'expression de l'ensemble des coefficients sphériques. Or, pour obtenir le diagramme en champ lointain, seul les coefficients extérieurs à la lentille sont nécessaires. Ainsi, l'avantage de la technique proposée ici, par rapport à celle de Mieras, réside dans l'économie de calcul engendrée par la non nécessité de déterminer les coefficients au sein de la lentille si seul le champ lointain est recherché.

### 3.3.1 Forme du champ électromagnétique total

La finalité de cette section réside dans la détermination du lien entre les champs électromagnétiques de deux zones séparées par une sphère  $\Sigma$  de rayon  $r_c$  et centrée sur le système de coordonnées sphériques. Cette sphère englobe une seconde sphère  $\Sigma'$ . Cette dernière, de rayon  $r_c'$ , est également centrée sur le système de coordonnées. Ces grandeurs sont illustrées sur la **Figure 22**.



**Figure 22** Caractérisation de la coquille diffractante.

Ces sphères constituent des sources pour les champs électromagnétiques diffractés du fait de leur présence. Ainsi, elles sont, par nature, des sphères de Wilcox associées aux champs qu'elles diffractent. De plus, il est considéré que la source qui produit le champ incident est externe à cette sphère. Par conséquent, le champ incident s'exprime avec  $s = 1$ , c'est-à-dire au sein de la zone correspondant au problème intérieur associé à la source incidente. Le champ électromagnétique est alors décrit par les modes sphériques comme suit :

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^i \\ \vec{H}^i \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ j/\eta \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \left( a_{mn}^{i\sigma} \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma i} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma i} \end{Bmatrix} + b_{mn}^{i\sigma} \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma} i} \\ \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma} i} \end{Bmatrix} \right), \text{ pour le champ incident,} \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^d \\ \vec{H}^d \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ j/\eta \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \left( a_{mn}^{d\sigma} \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma} \end{Bmatrix} + b_{mn}^{d\sigma} \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}} \\ \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}} \end{Bmatrix} \right), \text{ pour le champ diffracté par } \Sigma, \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}^{d'} \\ \vec{H}^{d'} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ j/\eta \end{array} \right\} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \left( a_{mn}^{d'\sigma'} \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma'} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma'} \end{Bmatrix} + b_{mn}^{d'\sigma'} \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}'} \\ \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}'} \end{Bmatrix} \right), \text{ pour le champ diffracté par } \Sigma', \end{aligned} \quad (51)$$

où l'expression des vecteurs modaux est donnée en (12). Par ailleurs, le choix des fonctions radiales se fait en suivant les règles suivantes, toujours basées sur les critères de convergence de Wilcox donnés en 3.1.1.2 et 3.1.1.4 :

$$s_i = \begin{cases} 1 & \text{si } r < r_c \\ 4 & \text{si } r > r_c \end{cases}, \quad s = \begin{cases} 1 & \text{si } r < r_c \\ 4 & \text{si } r > r_c \end{cases}, \quad s' = \begin{cases} 1 & \text{si } r < r_c' \\ 4 & \text{si } r > r_c' \end{cases}$$

De plus, le champ électromagnétique total s'exprime comme la superposition des différents champs :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}^i \\ \vec{H}^i \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{E}^d \\ \vec{H}^d \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{E}^{d'} \\ \vec{H}^{d'} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

Une remarque importante ressort de cette relation. En effet, de part et d'autre de la sphère  $\Sigma$ , le champ électromagnétique est la somme d'une onde progressive,  $s = 4$ , et d'une onde non progressive,  $s = 1$ . De plus, à l'intérieur de la sphère  $\Sigma$ , le champ électromagnétique n'est représenté que par une onde non progressive,  $s = 1$ .

### 3.3.2 Diffraction par une coquille

Le problème traité précédemment concernant le champ électromagnétique total au sein d'une coquille peut être généralisé à un ensemble de sphères concentriques dans lequel le cœur serait associé à  $\Sigma'$  et chacune des autres sphères serait équivalente à  $\Sigma$ . Ainsi, il apparaît possible de déterminer le lien entre les coefficients modaux des problèmes internes et externes associés à une sphère  $\Sigma_c$  de rayon  $r_c$  centrée sur l'origine du système de coordonnées. Le champ électromagnétique total s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ j/\eta \end{Bmatrix} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \sum_{s=1,4} \left( a_{mn}^{\sigma s} \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} + b_{mn}^{\sigma s} \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}s} \\ \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}s} \end{Bmatrix} \right) \quad (53)$$

avec  $\begin{cases} a_{mn}^{\sigma 4} = 0 \\ b_{mn}^{\sigma 4} = 0 \end{cases}$  dans le cas où  $\Sigma_c$  représente la sphère de cœur,

et  $\begin{cases} a_{mn}^{\sigma 1} = a_{mn}^{i\sigma 1} \\ b_{mn}^{\sigma 1} = b_{mn}^{i\sigma 1} \end{cases}$  dans le cas où  $\Sigma_c$  représente la sphère externe.

Il est donc dès à présent possible d'appliquer les conditions de passage appliquées au champ total en  $r = r_c$ , à savoir la continuité des composantes tangentielles du champ électromagnétique total à la frontière entre les deux diélectriques :

$$\hat{r} \times \begin{Bmatrix} \vec{E}(r_c^- \cdot \hat{r}) \\ \vec{H}(r_c^- \cdot \hat{r}) \end{Bmatrix} = \hat{r} \times \begin{Bmatrix} \vec{E}(r_c^+ \cdot \hat{r}) \\ \vec{H}(r_c^+ \cdot \hat{r}) \end{Bmatrix} \quad (54)$$

où  $r_c^+$  représente la limite supérieure de la sphère de rayon  $r_c$  ( $r_c^+ = r_c + 0$ ) et  $r_c^-$  représente la limite inférieure de la sphère de rayon  $r_c$  ( $r_c^- = r_c - 0$ ). De la même manière, est considérée la convention suivante : pour toute grandeur  $T$ , scalaire ou vectorielle,  $T^\pm = T((kr_c)^\pm)$  ou  $T^\pm = T(r_c^\pm)$  selon la définition de  $T$ .

Afin de ne pas alourdir les équations, est définie le rapport  $\chi_n^s = Z_n^s / K_n^s$ . De plus, la partie tangentielle de tout vecteur  $\vec{a}$  est notée  $\vec{a}_{\parallel}$ . Ainsi,  $\vec{a}_{\parallel} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \hat{r}) \hat{r}$ . Par ailleurs, les divisions de fonctions sont à considérer au sens symbolique. En effet, pour remédier aux formes indéterminées, la division doit être remplacée par la limite au point considéré du rapport des fonctions en cause. Ressort alors l'expression du champ tangentiel :

$$\hat{r} \times \begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \pm \begin{Bmatrix} 1 \\ j/\eta \end{Bmatrix} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \sum_{s=1,4} \left( a_{mn}^{\sigma s} \begin{Bmatrix} \chi_n^s \\ 1/\chi_n^s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{N}_{mn//}^{\sigma s} \\ \vec{M}_{mn//}^{\sigma s} \end{Bmatrix} - b_{mn}^{\sigma s} \begin{Bmatrix} 1/\chi_n^s \\ \chi_n^s \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn//}^{\bar{\sigma}s} \\ \vec{N}_{mn//}^{\bar{\sigma}s} \end{Bmatrix} \right) \quad (55)$$

Chaque mode sphérique est orthogonal aux autres. Il en est nécessairement de même pour les modes tangents entre eux. Ainsi, la relation de continuité est vérifiée pour chacun des modes tangents :

$$\begin{aligned} \pm \left\{ \frac{1}{j/\eta^+} \right\} \sum_{s=1,4} a_{mn}^{\sigma s} & \left\{ \begin{array}{l} \chi_n^{s+} \\ 1/\chi_n^{s+} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}_{mn//}^{\sigma s} \\ \tilde{M}_{mn//}^{\sigma s} \end{array} \right\}^+ = \pm \left\{ \frac{1}{j/\eta^-} \right\} \sum_{s=1,4} a_{mn}^{\sigma s} & \left\{ \begin{array}{l} \chi_n^{s-} \\ 1/\chi_n^{s-} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tilde{N}_{mn//}^{\sigma s} \\ \tilde{M}_{mn//}^{\sigma s} \end{array} \right\}^- \\ \mp \left\{ \frac{1}{j/\eta^+} \right\} \sum_{s=1,4} b_{mn}^{\sigma s} & \left\{ \begin{array}{l} 1/\chi_n^{s+} \\ \chi_n^{s+} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{mn//}^{\bar{\sigma}s} \\ \tilde{N}_{mn//}^{\bar{\sigma}s} \end{array} \right\}^+ = \mp \left\{ \frac{1}{j/\eta^-} \right\} \sum_{s=1,4} b_{mn}^{\sigma s} & \left\{ \begin{array}{l} 1/\chi_n^{s-} \\ \chi_n^{s-} \end{array} \right\} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \tilde{M}_{mn//}^{\bar{\sigma}s} \\ \tilde{N}_{mn//}^{\bar{\sigma}s} \end{array} \right\}^- \end{aligned} \quad (56)$$

La projection de ces équations sur les vecteurs de la base sphérique, en utilisant les relations d'orthogonalité associées aux fonctions associées de Legendre, données en annexes, et aux fonctions circulaires, aboutit aux relations matricielles suivantes :

$$Z_n^{a+} \cdot A_{mn}^{\sigma+} = Z_n^{a-} \cdot A_{mn}^{\sigma-}, \quad Z_n^{b+} \cdot B_{mn}^{\sigma+} = Z_n^{b-} \cdot B_{mn}^{\sigma-}, \quad (57)$$

où les grandeurs utilisées sont définies par :

$$\begin{aligned} Z_n^{a+} &= \begin{bmatrix} Z_n^{1+} & Z_n^{4+} \\ K_n^{1+} & K_n^{4+} \end{bmatrix}, \quad Z_n^{a-} = \begin{bmatrix} Z_n^{1-} & Z_n^{4-} \\ \tau K_n^{1-} & \tau K_n^{4-} \end{bmatrix}, \quad Z_n^{b+} = \begin{bmatrix} K_n^{1+} & K_n^{4+} \\ Z_n^{1+} & Z_n^{4+} \end{bmatrix}, \quad Z_n^{b-} = \begin{bmatrix} K_n^{1-} & K_n^{4-} \\ \tau Z_n^{1-} & \tau Z_n^{4-} \end{bmatrix}, \\ A_{mn}^{\sigma\pm} &= \begin{bmatrix} a_{mn}^{\sigma 1\pm} \\ a_{mn}^{\sigma 4\pm} \end{bmatrix}, \quad B_{mn}^{\sigma\pm} = \begin{bmatrix} b_{mn}^{\sigma 1\pm} \\ b_{mn}^{\sigma 4\pm} \end{bmatrix}, \\ \tau &= \eta^+ / \eta^- . \end{aligned}$$

Il est à noter que ces matrices sont inversibles. En effet, leur déterminant est lié au Wronskien  $W_{1,4}^n(z) = 1/z^2$ , défini en annexes, associé aux fonctions sphériques de Bessel à l'ordre  $n$  :

$$\begin{aligned} \left| Z_n^{a+} \right| &= -j \cdot W_{1,4}^{n+} \neq 0, \quad \left| Z_n^{a-} \right| = -j \cdot \tau \cdot W_{1,4}^{n-} \neq 0, \quad \left| Z_n^{b+} \right| = j \cdot W_{1,4}^{n+} \neq 0 \text{ et} \\ \left| Z_n^{b-} \right| &= j \cdot \tau \cdot W_{1,4}^{n-} \neq 0 \end{aligned} \quad (58)$$

Ceci implique que les déterminants ne s'annulent jamais. Les matrices sont bien inversibles. Chacun des systèmes considérés est par conséquent de Cramer et peut donc être inversé :

Il en ressort les relations de passage suivantes :

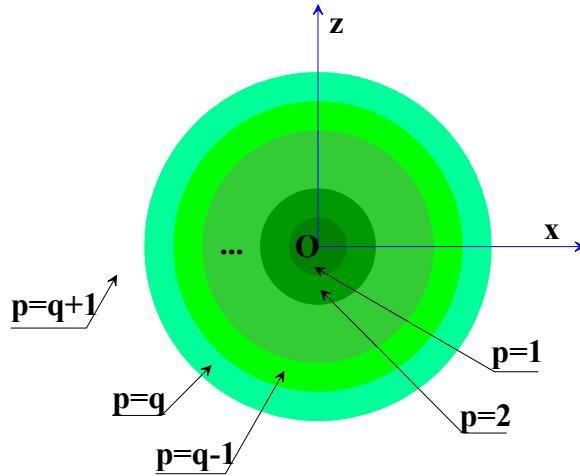
$$\begin{aligned} A_{mn}^{\sigma+} &= M_n^a \cdot A_{mn}^{\sigma-}, \quad \text{et} \quad B_{mn}^{\sigma+} = M_n^b \cdot B_{mn}^{\sigma-}, \\ \text{avec } M_n^a &= \left[ Z_n^{a+} \right]^{-1} \cdot Z_n^{a-}, \quad \text{et} \quad M_n^b = \left[ Z_n^{b+} \right]^{-1} \cdot Z_n^{b-}. \end{aligned} \quad (59)$$

Ces matrices sont également inversibles ; leur déterminant ne s'annule jamais :

$$\left| M_n^a \right| = \left| M_n^b \right| = \Delta_n = \left( \frac{k^+}{k^-} \right)^2 \frac{\eta^+}{\eta^-} \neq 0 \quad (60)$$

### 3.3.3 Diffraction par une structure sphérique stratifiée

Dans la sous-section précédente, la diffusion par une coquille sphérique a été complètement caractérisée. Il apparaît donc possible de généraliser ce résultat au cas d'une structure sphérique multicouche. En effet, est dès à présent considéré un emboîtement de  $q$  coquilles sphériques concentriques centrées sur l'origine du système de coordonnées, comme indiqué en **Figure 23**. Les caractéristiques des coquilles sont  $\{(r_p, \mu_p, \epsilon_p, \eta_p, k_p) | p=1, \dots, q+1\}$  avec l'indice  $(q+1)$  correspondant au milieu extérieur dans lequel est plongée la structure et  $r_p$  le rayon de la coquille  $p$ .



**Figure 23** Définition de la structure multicouche.

Les relations obtenues dans la sous-section précédente restent valables au niveau de chacune des interfaces. Ainsi, afin de différentier les effets de chaque interface, chacune des grandeurs se trouve indexée du numéro associé à la couche : pour la couche  $p$ , + est remplacé par  $p+1$  et - par  $p$ . Par voie de conséquence, les relations de passage suivantes, obtenues via l'ensemble des équations de passage de (57) à (60), sont vérifiées :

$$\forall p \in \{1, \dots, q\}, A_{mn}^{\sigma, p+1} = M_n^{a,p} \cdot A_{mn}^{\sigma, p}, \text{ et } B_{mn}^{\sigma, p+1} = M_n^{b,p} \cdot B_{mn}^{\sigma, p}, \quad (61)$$

avec  $M_n^{a,p} = [Z_n^{a,p+1}]^{-1} \cdot Z_n^{a,p}$ , et  $M_n^{b,p} = [Z_n^{b,p+1}]^{-1} \cdot Z_n^{b,p}$ ,

$$Z_n^{a,p+1} = \begin{bmatrix} Z_n^1(k_{p+1}r_{p+1}) & Z_n^4(k_{p+1}r_{p+1}) \\ K_n^1(k_{p+1}r_{p+1}) & K_n^4(k_{p+1}r_{p+1}) \end{bmatrix}, \quad Z_n^{a,p} = \begin{bmatrix} Z_n^1(k_p r_p) & Z_n^4(k_p r_p) \\ \tau_p \cdot K_n^1(k_p r_p) & \tau_p \cdot K_n^4(k_p r_p) \end{bmatrix},$$

$$Z_n^{b,p+1} = \begin{bmatrix} K_n^1(k_{p+1}r_{p+1}) & K_n^4(k_{p+1}r_{p+1}) \\ Z_n^1(k_{p+1}r_{p+1}) & Z_n^4(k_{p+1}r_{p+1}) \end{bmatrix}, \quad Z_n^{b,p} = \begin{bmatrix} K_n^1(k_p r_p) & K_n^4(k_p r_p) \\ \tau_p \cdot Z_n^1(k_p r_p) & \tau_p \cdot Z_n^4(k_p r_p) \end{bmatrix},$$

$$\tau_p = \eta_{p+1} / \eta_p,$$

$$\left| M_n^{a,p} \right| = \left| M_n^{b,p} \right| = \Delta_n^p = \left( \frac{k_{p+1}}{k_p} \right)^2 \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \neq 0,$$

$$A_{mn}^{\sigma,p} = \begin{bmatrix} a^{p\sigma 1}_{mn} \\ a^{p\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix}, \text{ et } B_{mn}^{\sigma,p} = \begin{bmatrix} b^{p\sigma 1}_{mn} \\ b^{p\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix}.$$

Ainsi, il devient maintenant possible de relier les coefficients décrivant le cœur de la lentille aux coefficients associés au milieu extérieur par une simple mise en cascade des relations de passage matricielles précédentes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a^{q+1\sigma 1}_{mn} \\ a^{q+1\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} &= T_n^a \cdot \begin{bmatrix} a^{1\sigma 1}_{mn} \\ a^{1\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} \text{ avec } T_n^a = \prod_{p=q}^1 M_n^{a,p}, \\ \begin{bmatrix} b^{q+1\sigma 1}_{mn} \\ b^{q+1\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} &= T_n^b \cdot \begin{bmatrix} b^{1\sigma 1}_{mn} \\ b^{1\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} \text{ avec } T_n^b = \prod_{p=q}^1 M_n^{b,p}, \end{aligned} \quad (62)$$

où le produit est défini par  $\prod_{i=q}^1 A_i = A_q \cdot A_{q-1} \cdots \cdot A_1$ .

Le déterminant associé à ces matrices de transfert est donc non nul :

$$\left| T_n^a \right| = \left| T_n^b \right| = \prod_{p=q}^1 \Delta_n^p \neq 0. \quad (63)$$

L'inversion des matrices de transfert est alors possible.

Par ailleurs, afin de respecter les critères de convergence donnés en 3.1.1.4, les contraintes suivantes doivent être respectées :

$$\begin{cases} a^{1\sigma 4}_{mn} = 0 & (\text{sphère de cœur}), \text{ et} \\ b^{1\sigma 4}_{mn} = 0 & (\text{milieu extérieur}). \end{cases} \quad (64)$$

Il en ressort donc les relations suivantes :

$$\begin{bmatrix} a^{1\sigma 1}_{mn} \\ a^{q+1\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} = T_n^a \cdot \begin{bmatrix} a^{1\sigma 1}_{mn} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ et } \begin{bmatrix} b^{1\sigma 1}_{mn} \\ b^{q+1\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} = T_n^b \cdot \begin{bmatrix} b^{1\sigma 1}_{mn} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (65)$$

En tenant compte du fait que les matrices de transfert sont inversibles (63), les systèmes précédents sont nécessairement de Cramer : il existe une et une seule solution par système. Par voie de conséquence, les coefficients de cœur et extérieurs s'expriment de la manière suivante :

$$a^{1\sigma 1}_{mn} = \frac{1}{T_{n,11}^a} a^{1\sigma 1}_{mn}, a^{q+1\sigma 4}_{mn} = \frac{T_{n,21}^a}{T_{n,11}^a} a^{1\sigma 1}_{mn}, b^{1\sigma 1}_{mn} = \frac{1}{T_{n,11}^b} b^{1\sigma 1}_{mn} \text{ et } b^{q+1\sigma 4}_{mn} = \frac{T_{n,21}^b}{T_{n,11}^b} b^{1\sigma 1}_{mn}, \quad (66)$$

où  $T_{n,ij}^\alpha$  correspond à l'élément  $(i,j)$  de la matrice de transfert  $T_n^\alpha$ . Les systèmes étant de Cramer, il n'y a pas de division par zéro. Cette propriété est à relier à la finitude de l'énergie rayonnée : toute division par zéro dans ces relations impliquerait l'existence de coefficients de module infini dans la description du champ électromagnétique. Ainsi, l'énergie rayonnée divergerait vers l'infinie, ce qui n'a aucune signification physique.

Par suite, la mise en cascade des  $(p-1)$  relations de passage matricielles données en (61) permet d'aboutir aux coefficients décrivant la coquille  $p$  différente de celle de cœur :

$$\begin{bmatrix} a^{p\sigma 1}_{mn} \\ a^{p\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} = \left( \prod_{i=p-1}^1 M_n^{a,i} \right) \cdot \begin{bmatrix} a^{1\sigma 1}_{mn} \\ 0 \end{bmatrix} \text{ et } \begin{bmatrix} b^{p\sigma 1}_{mn} \\ b^{p\sigma 4}_{mn} \end{bmatrix} = \left( \prod_{i=p-1}^1 M_n^{b,i} \right) \cdot \begin{bmatrix} b^{1\sigma 1}_{mn} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

Il est à noter que ces coefficients existent et sont uniques. En effet, les matrices invoquées sont inversibles :

$$\left| \prod_{i=p-1}^1 M_n^{a,i} \right| = \left| \prod_{i=p-1}^1 M_n^{b,i} \right| = \prod_{i=p-1}^1 \Delta_n^i \neq 0. \quad (68)$$

Ceci assure que les systèmes sont bien de Cramer et termine la détermination des coefficients sphériques en tout point de l'espace.

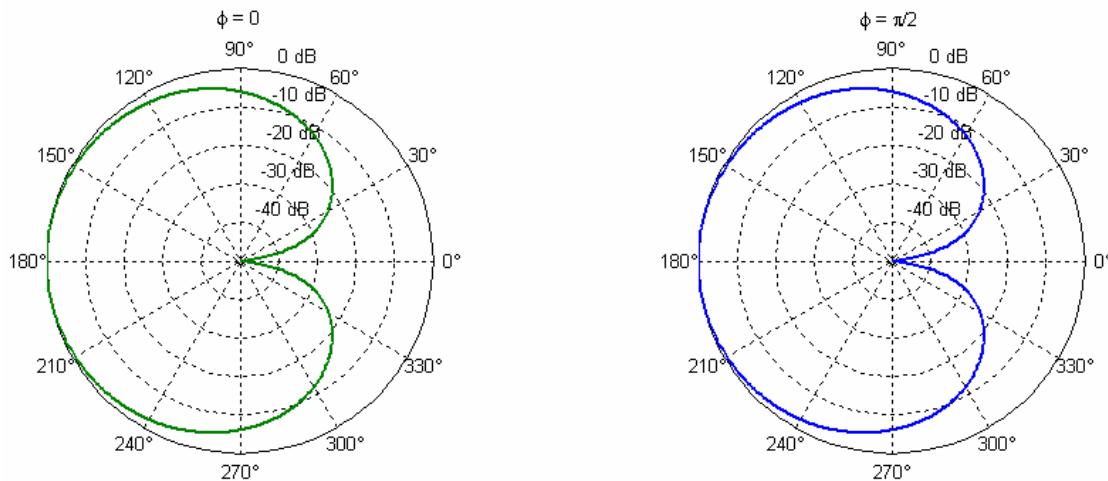
Finalement, connaissant les caractéristiques géométriques et électromagnétiques de la lentille ainsi que l'excitation, il est possible de déterminer les coefficients sphériques, et donc le champ électromagnétique, en tout point de l'espace, lentille comprise. Malgré tout, cette technique, bien que simple à mettre en œuvre, possède une limitation majeure. En effet, elle prend certes en compte les propriétés de diffusion intrinsèques à la lentille mais occulte complètement l'effet du champ rétro diffusé sur l'excitateur lorsque celui-ci n'est pas ponctuel. Ceci se conçoit parfaitement en considérant une antenne type pastille : la présence d'une structure métallique génère des effets qui peuvent être qualifiés d'ombrage (le rayonnement arrière reste en grande partie tributaire des parties métalliques). De plus, ce métal constraint le champ diffusé par la lentille à respecter un certain nombre de conditions aux limites, comme la nullité des composantes tangentielles sur tout métal parfaitement conducteur. Ceci n'est jamais pris en compte dans cette section.

### 3.3.4 Validations

Comme il a été montré dans l'état de l'art, un certain nombre de travaux traitent des lentilles diélectriques à gradient d'indice comme la lentille discrète de Lüneburg. Ainsi, le but de cette section est de valider l'ensemble de la théorie développée précédemment via des comparaisons à résultats de publications antérieures ou à des mesures. Ces confrontations sont surtout effectuées en termes de diagrammes de rayonnement en champ lointain. Cette limitation provient du simple fait que la plupart de ces travaux se destinent plus à présenter une méthode d'analyse illustrée par des diagrammes de rayonnement en champ lointain que d'exposer des résultats concrets.

#### 3.3.4.1 Association source complexe de Huygens - lentille discrète

Le type de source utilisé dans (Mieras 1982 #15), pour l'illustration de sa méthode d'étude de la diffusion engendrée par une lentille sphérique décrite en 3.3, est décrit en 3.2.4.3 pour une position imaginaire  $b$  nulle : il s'agit de la source de Huygens. Son diagramme de rayonnement en champ lointain est donné en **Figure 24**.

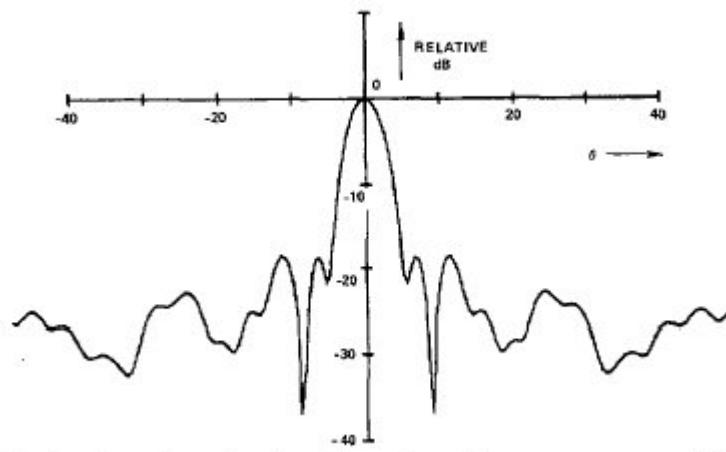


**Figure 24** Diagramme de rayonnement en champ lointain d'une source complexe de Huygens.

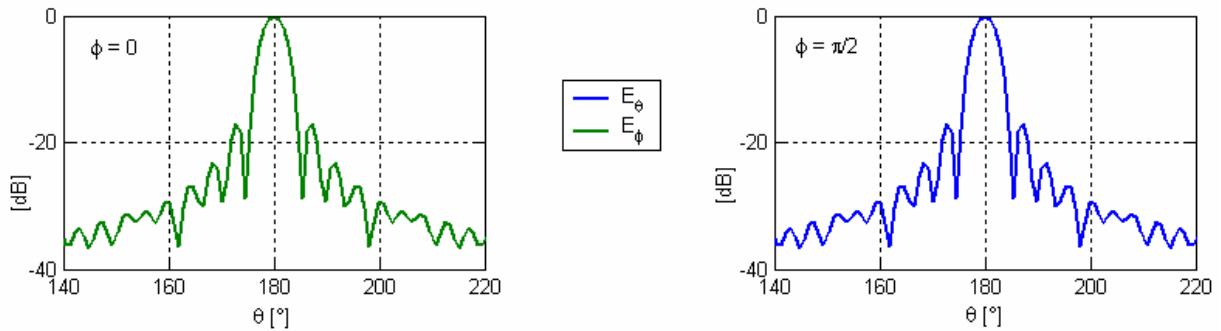
A la fin de sa publication, il se propose de montrer le diagramme de rayonnement en champ lointain engendré par une lentille discrète de Lüneburg composée de sept couches. Leurs caractéristiques sont données dans le tableau suivant :

|              |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $r/a$        | 1.0000 | 0.9028 | 0.7667 | 0.6667 | 0.5883 | 0.4667 | 0.3323 |
| $\epsilon_r$ | 1.095  | 1.303  | 1.486  | 1.609  | 1.724  | 1.840  | 1.972  |

La source complexe de Huygens est placée en  $z = -1.05a$ , où  $a$  représente le rayon de la lentille. Le calcul est effectué à la fréquence normalisée  $ka = 41.9$ . Les résultats obtenus par Mieras sont donnés en **Figure 25** et ceux obtenus par la théorie développée précédemment en **Figure 26**.



**Figure 25** Diagramme de rayonnement en champ lointain obtenu par Mieras en plan E.



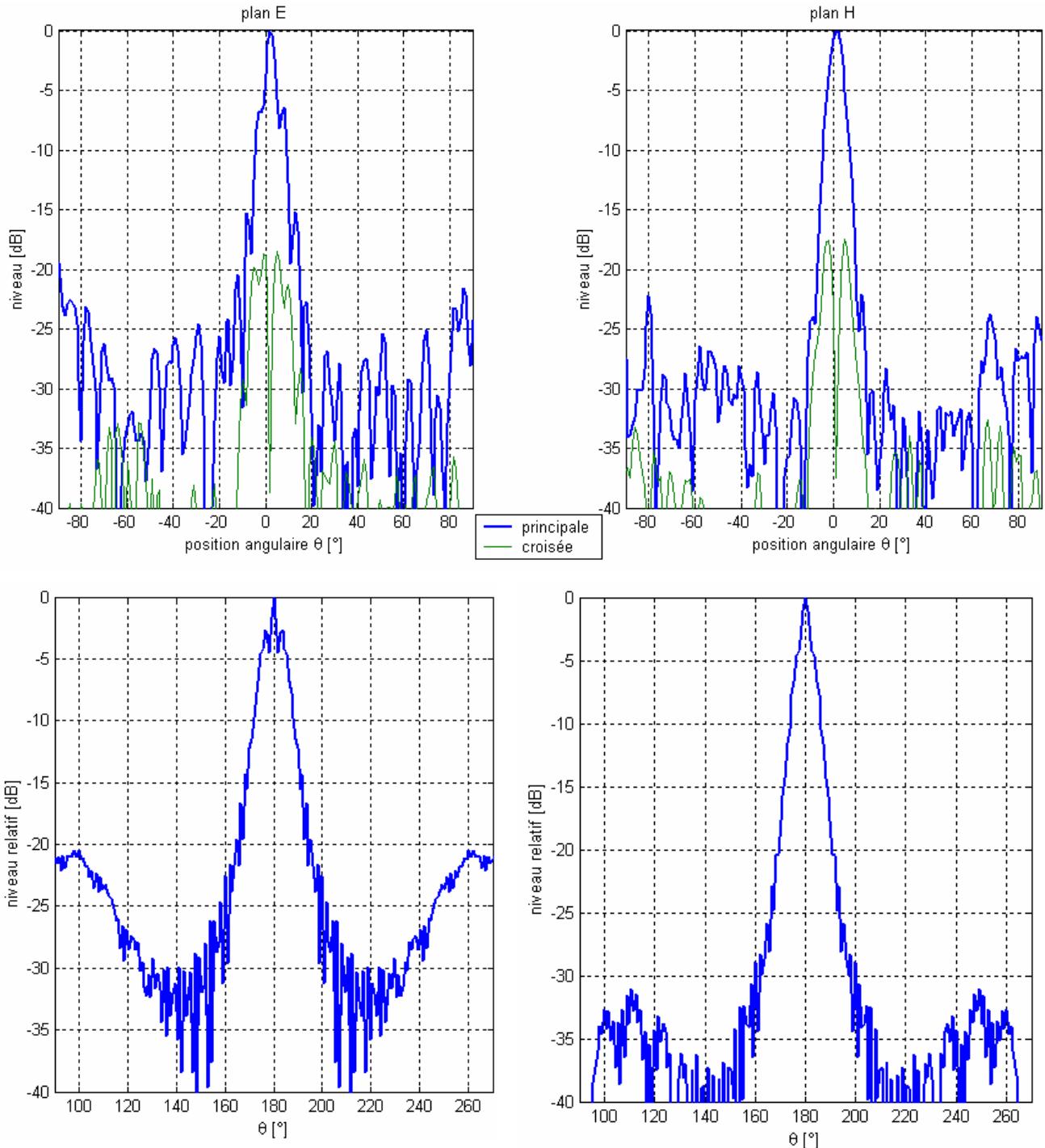
**Figure 26** Diagramme de rayonnement en champ lointain obtenu par la théorie développée en 3.3.

Il en ressort que l'allure générale des résultats obtenus par Mieras et ceux déduit de la théorie développée dans ce document est la même. Malgré tout, des différences apparaissent à partir des lobes secondaires. Les niveaux ne sont pas les mêmes. Il est à remarquer que l'évolution des lobes secondaires du diagramme prévue par Mieras est en désaccord avec l'ensemble des publications présentées dans le chapitre 2. En effet, toutes prédisent une décroissance prononcée des lobes secondaires qui est d'autant plus importante que la fréquence normalisée est grande, ce qui est le cas ici.

### 3.3.4.2 Association guide d'onde ouvert - lentille à gradient quasi continu

Très souvent, les lentilles sont associées à des ouvertures de guide d'onde. Il est donc important de valider cette association en effectuant une comparaison avec la mesure. A cet effet, l'ouverture de guide d'onde est discrétisée selon la technique décrite en 3.1.2.3. La lentille utilisée est la lentille « tranche » décrite dans le chapitre 5. Sa distribution d'indice est quasi continue. Ainsi, elle est assimilée à une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 coquilles. Ce choix d'un nombre important de coquilles permet d'approcher assez fidèlement le gradient d'indice pseudo continu de la lentille tranche.

Les résultats de la simulation et de la mesure effectuées à 27.5GHz sont donnés en **Figure 27**. Il s'en déduit que les mesures proposées sont en accord avec les prévisions théoriques. Comme précédemment, les composantes n'existent pas dans la théorie du fait des symétries parfaites de la structure géométrique, ce qui n'est pas le cas pour la structure réelle.



**Figure 27** Comparaison théorie (partie inférieure) – mesure (partie supérieure) des diagrammes de rayonnement en champ lointain plans E, à gauche, et H, à droite, simulés à 27.5GHz pour l’association lentille tranche – ouverture de guide d’onde. L’ouverture est simulée via la technique de discréttisation des sources étendues décrite précédemment. La distribution de la lentille est approchée par une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 coquilles

### **3.3.4.3 Conclusion**

Un certain nombre de validations concernant la théorie de la diffusion ont été réalisées. Toutes montrent un bon accord sur l'allure générale des diagrammes, y compris la comparaison avec des résultats expérimentaux. Cette technique est donc fonctionnelle.

Il est à noter que John Sanford, dans la revue IEEE TAP 42 de mai 1994, a publié une technique de diffusion analogue. Cette similitude a été remarquée pendant l'implémentation de cette technique de calcul. Par ailleurs, il apparaît important de remarquer que pour obtenir les coefficients sphériques associés à sa source, Sanford utilise des équivalences de développements limités au premier ordre et des analogies avec les fonctions sphériques de Bessel. Ses résultats sont alors à relativiser du fait de ces approximations. De plus, sa convention temporelle est en  $e^{-j\omega t}$ , contrairement à celle employée ici. Malgré tout, ces remarques ne remettent en cause en aucune façon la qualité du travail présenté par Sanford, mais permettent simplement de différencier ses résultats de ceux exposés dans la présente thèse.

Ainsi, la technique de diffusion ainsi que le développement en modes sphériques d'un grand nombre d'éléments rayonnants se voient validés. Il est donc dès à présent possible de les utiliser afin d'effectuer un certain nombre de prévisions sur les lentilles de Lüneburg.

## **3.4 Résultats numériques**

Aux vues du chapitre 2, un constat s'impose : un grand nombre de travaux concernant les gaps d'air, la directivité, l'optimisation de diagrammes, l'optimisation du nombre de couches composant la lentille, etc., ont déjà été réalisés et publiés. Il apparaît être sans intérêt de calculer de nouveau ces résultats. Ainsi, les prévisions numériques suivantes se veulent complémentaires de celles exposées dans le chapitre 2. Elles sont de cinq ordres. Tout d'abord, selon le chapitre 2, la distribution proposée par Lüneburg est basée sur l'optique. Ainsi, il apparaît important de montrer que sa distribution permet de focaliser toute onde électromagnétique. Après cela, est mise en évidence l'influence de la position relative de la sonde par rapport à la lentille. Puis, est exposée la distribution en champ proche d'une lentille illuminée par une onde plane. Ensuite, est donnée l'évolution de la directivité en fonction des gaps d'air. Et pour finir, est faite une étude du niveau des lobes secondaires.

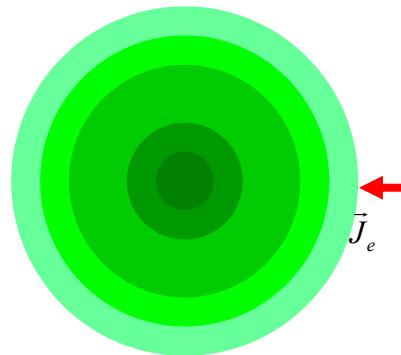
### **3.4.1 Focalisation d'ondes électromagnétiques**

Lüneburg propose une distribution d'indice au sein d'une sphère permettant de focaliser l'énergie d'une source ponctuelle. L'extension de ce résultat à toute source électromagnétique n'est toutefois pas évidente. Afin de vérifier le pouvoir focalisant de la lentille de Lüneburg, deux types de sources électromagnétiques primaires

sont utilisées pour illuminer la lentille : un dipôle électrique élémentaire ainsi qu'un dipôle magnétique élémentaire. En ce qui concerne les lentilles utilisées, il s'agit de lentilles diélectriques multicouches de type lentille discrète homogène de Lüneburg. Leur distribution n'est rien d'autre que la version discrétisée de la distribution continue de Lüneburg. La valeur de l'indice de la couche est donnée par l'indice de la distribution continue pris à la distance radiale égale au rayon moyen de la coquille considérée. Pour une discréétisation réalisée en  $N$  coquilles, la distribution de la lentille est donnée par la relation  $\forall i, 1 \leq i \leq N, r_i = i/N, \epsilon_{ri} = 2 - [(2i-1)/2N]^2$ .

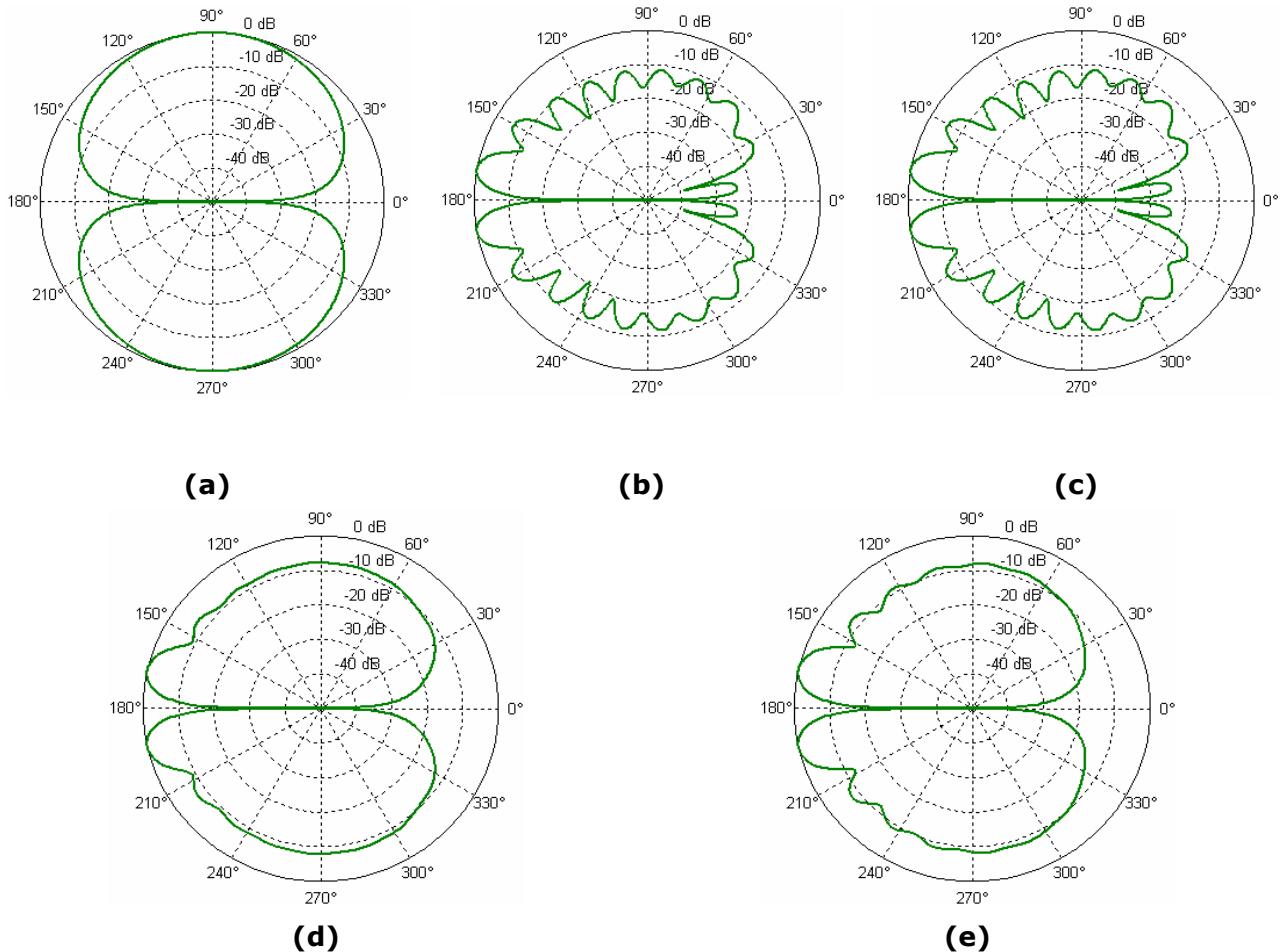
### 3.4.1.1 Illumination par un dipôle électrique élémentaire

Afin de vérifier le pouvoir focalisant de la distribution de Lüneburg, deux cas canoniques sont traités. Le premier concerne l'éclairage d'une lentille discrète homogène de Lüneburg par un dipôle électrique élémentaire tangentiel, comme le montre la **Figure 28**.



**Figure 28** Lentille de Lüneburg éclairée par un dipôle électrique élémentaire radial.

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain de la structure sont présentés en **Figure 29**. Différents cas sont traités : le cas du dipôle seule puis des lentilles à une, deux, trois et vingt couches. Il en ressort un certain nombre de remarques. Tout d'abord, la lentille agit comme une pompe en faisant focaliser l'énergie. Par ailleurs, plus le nombre de couches est important et moins le rayonnement du demi espace arrière est affecté par la présence de la lentille. Pour finir, à partie de trois coquilles, le diagramme de rayonnement évolue peu. Même si un phénomène de focalisation apparaît, celui-ci n'est pas optimum car il a lieu dans la direction du minimum de rayonnement de la source de rayonnement.

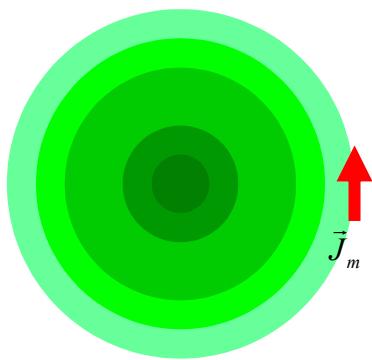


**Figure 29** Diagrammes de rayonnement en champ lointain à  $k_0 r_{max} = 10.0$  de l'association d'un dipôle électrique radial et d'une lentille discrète homogène de Lüneburg, (a) sans lentille, (b) lentille avec une coquille, (c) lentille avec deux coquilles, (d) lentille avec trois coquilles, (e) lentille avec vingt coquilles.

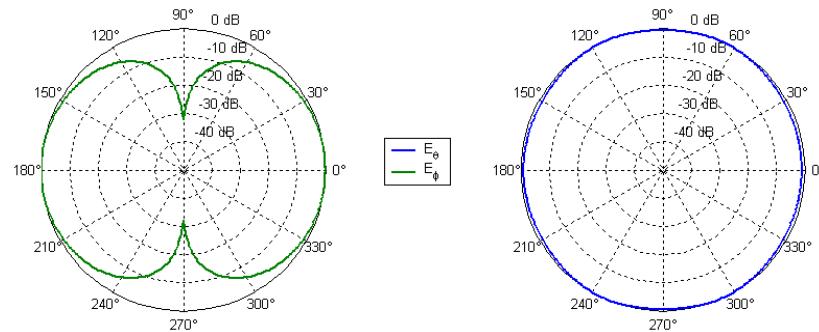
### 3.4.1.2 Illumination par un dipôle magnétique élémentaire

Le second cas canonique traité concerne l'illumination de lentilles discrètes homogènes de Lüneburg par un dipôle magnétique tangentiel, comme le montre la **Figure 30**.

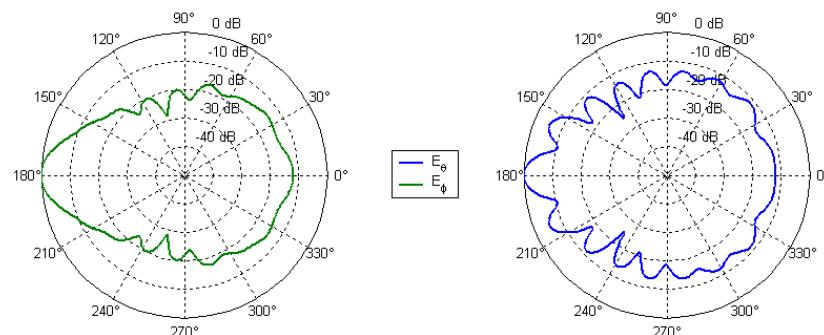
Les diagrammes de rayonnement obtenus sont donnés en **Figure 31**. Les mêmes constats que pour le cas précédent ressortent. En effet, la lentille agit comme une pompe en faisant focaliser l'énergie. Plus le nombre de couches est important et moins le rayonnement du demi espace arrière est affecté par la présence de la lentille. Et, à partir de trois coquilles, le diagramme de rayonnement évolue peu. Pour ce cas du dipôle magnétique tangentiel élémentaire, l'effet de focalisation est beaucoup plus flagrant. Ceci provient du fait que la focalisation s'effectue dans la direction du maximum de rayonnement de la source élémentaire, ici le dipôle magnétique.



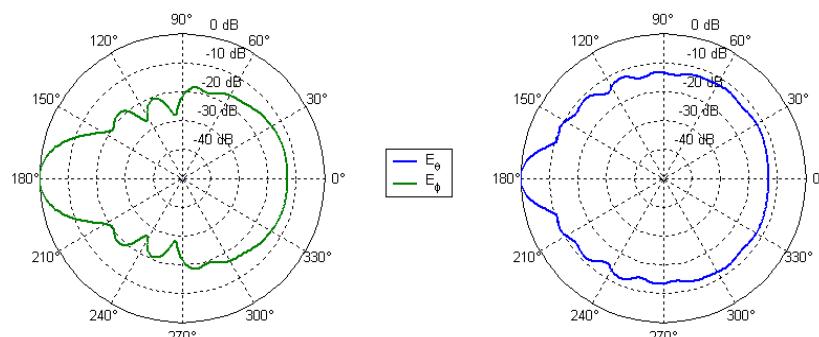
**Figure 30** Lentille de Lüneburg éclairée par un dipôle magnétique élémentaire tangentiel.



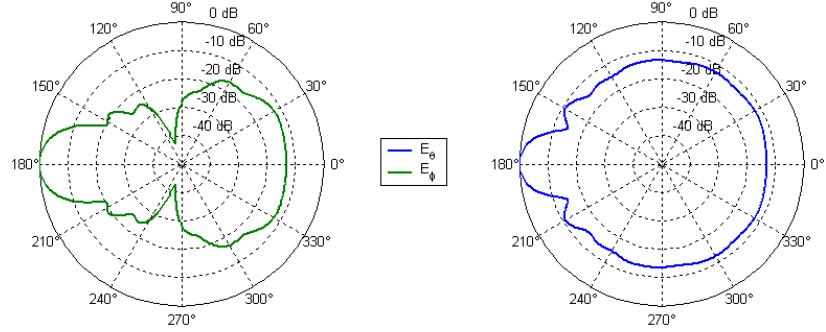
(a)



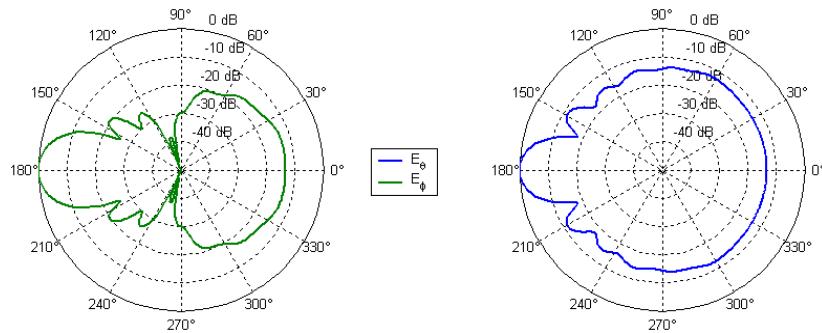
(b)



(c)



(d)



(e)

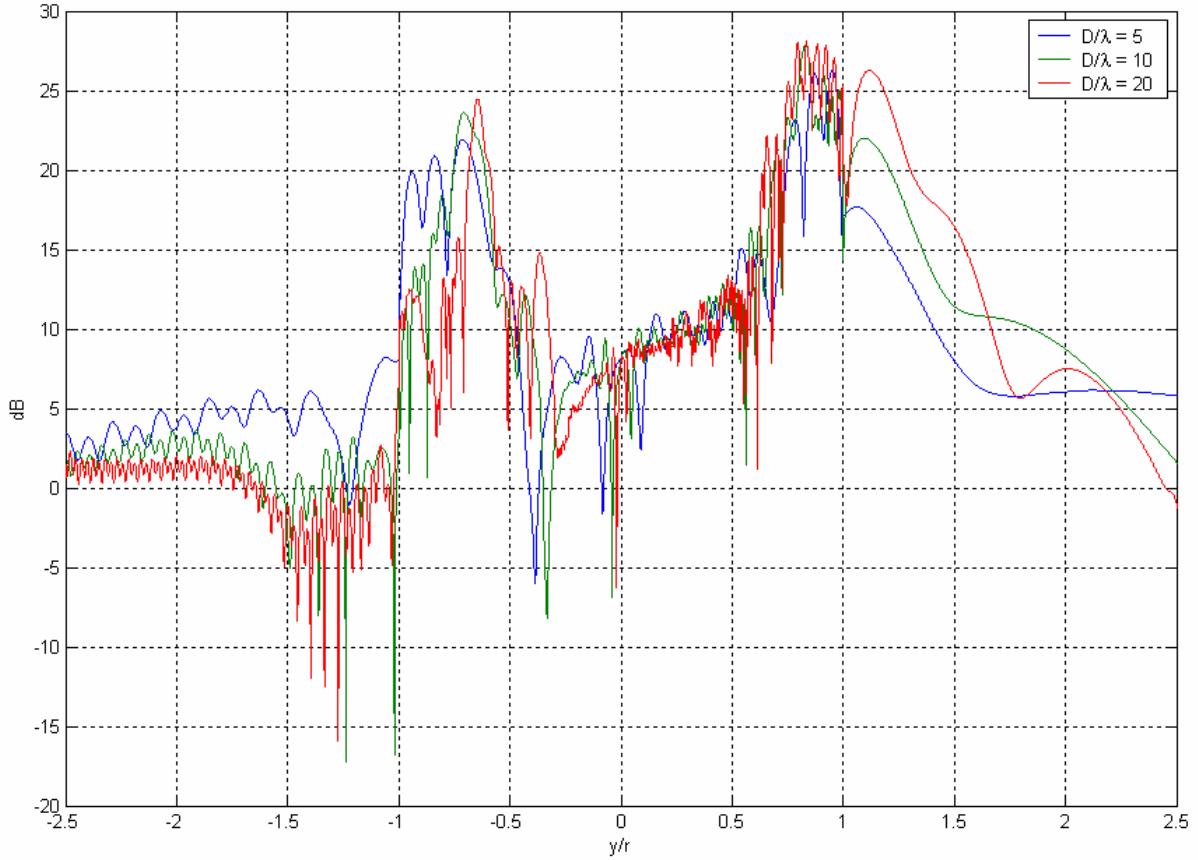
**Figure 31** Diagrammes de rayonnement en champ lointain à  $k_0 r_{max} = 10.0$  de l'association d'un dipôle magnétique tangentiel et d'une lentille discrète homogène de Lüneburg (a) sans lentille, (b) lentille avec une coquille, (c) lentille avec deux coquilles, (d) lentille avec trois coquilles, (e) lentille avec vingt coquilles. Les diagrammes de droite correspondent au plan  $\varphi = 0$  et ceux de gauche au plan  $\varphi = \pi/2$ .

Par conséquent, la distribution de Lüneburg permet non seulement de focaliser les ondes lumineuses, mais aussi toute onde électromagnétique. Elle permet d'améliorer le diagramme de rayonnement dans les cas canoniques du dipôle électrique radial et dipôle magnétique tangentiel. Malgré tout, cette amélioration n'est que relative. En effet, le rayonnement arrière reste important.

### 3.4.2 Zone de focalisation

La distribution proposée par Lüneburg focalise l'énergie sur la surface extérieure de la lentille. Lorsqu'une discréétisation est effectuée, l'énergie ne se concentre pas nécessairement en ce point. A cet effet, la **Figure 32** montre l'évolution de la densité d'énergie en fonction de la position radiale et ce pour différents diamètres de lentille. Il est à noter que le choix s'est porté sur des lentilles homogènes, une seule couche de permittivité diélectrique  $\epsilon_r = 2.6$ , pour des raisons de temps de calcul. Il en ressort deux constats. Tout d'abord, plus le diamètre de la lentille est grand et plus il apparaît nécessaire d'éloigner le capteur du bord de la lentille. De plus, le diamètre de la lentille ne doit pas être inférieur à un diamètre limite sous peine de quoi la concentration

maximale d'énergie a lieu à l'intérieur même de la lentille. Ainsi, le capteur ne peut être placé à cette position optimale. Ces remarques se trouvent pleinement vérifiées par les expérimentations effectuées au chapitre 5. Par ailleurs, ressort de cette figure l'existence d'un second point de focalisation au sein même de la lentille.

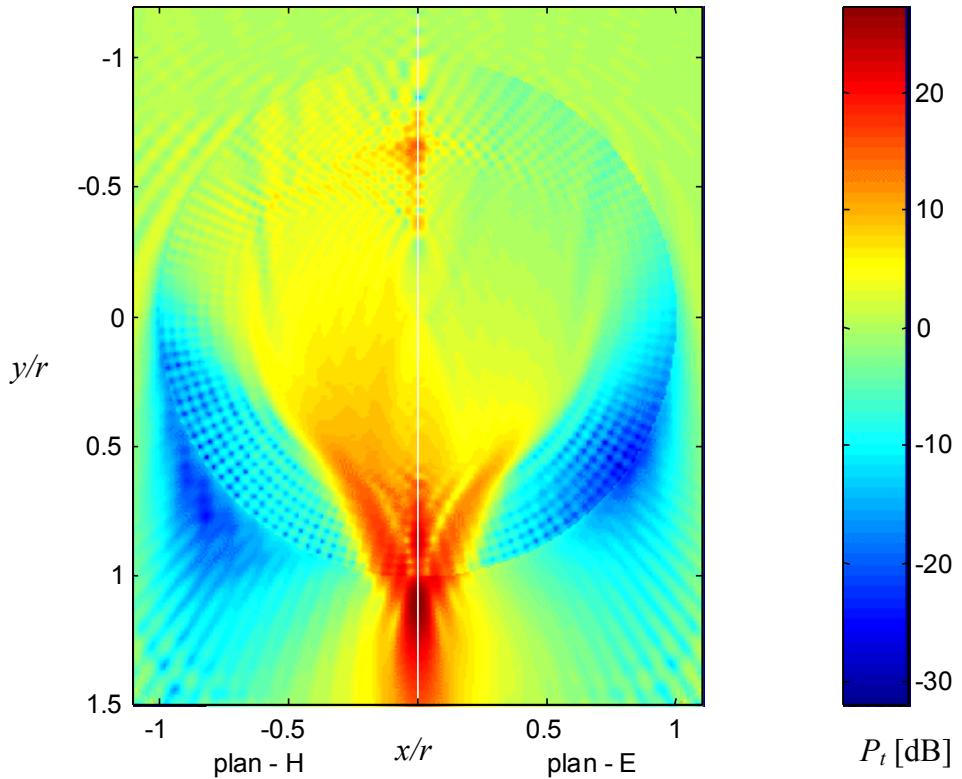


**Figure 32** Distribution radiale de la densité d'énergie normalisée au voisinage d'une lentille sphérique homogène,  $\varepsilon_r = 2.6$ , excitée par une onde plane se propageant selon  $\hat{y}$ .

### 3.4.3 Champ proche

L'un des gros avantages de travailler dans le cadre des vecteurs modaux sphériques est qu'aucune distinction champ proche – champ lointain n'est faite sur l'expression des coefficients sphériques. Ainsi, il est tout à fait possible de déterminer la densité d'énergie en tout point de l'espace. A cet effet, la **Figure 33** montre la distribution de la densité d'énergie au voisinage d'une lentille sphérique homogène,  $\varepsilon_r = 2.6$ , de rayon  $r = 10\lambda$ , illuminée par une onde plane se propageant selon  $\hat{y}$ . Cette figure met en évidence les remarques faites précédemment sur la position du maximum de densité d'énergie. Par ailleurs, elle montre également qu'il n'existe pas de point focal dans le cas de la lentille homogène, mais plutôt d'une zone de focalisation. De plus, l'effet de pompage de l'énergie latérale pour être redistribuée dans la zone focale y est parfaitement visible. Autre

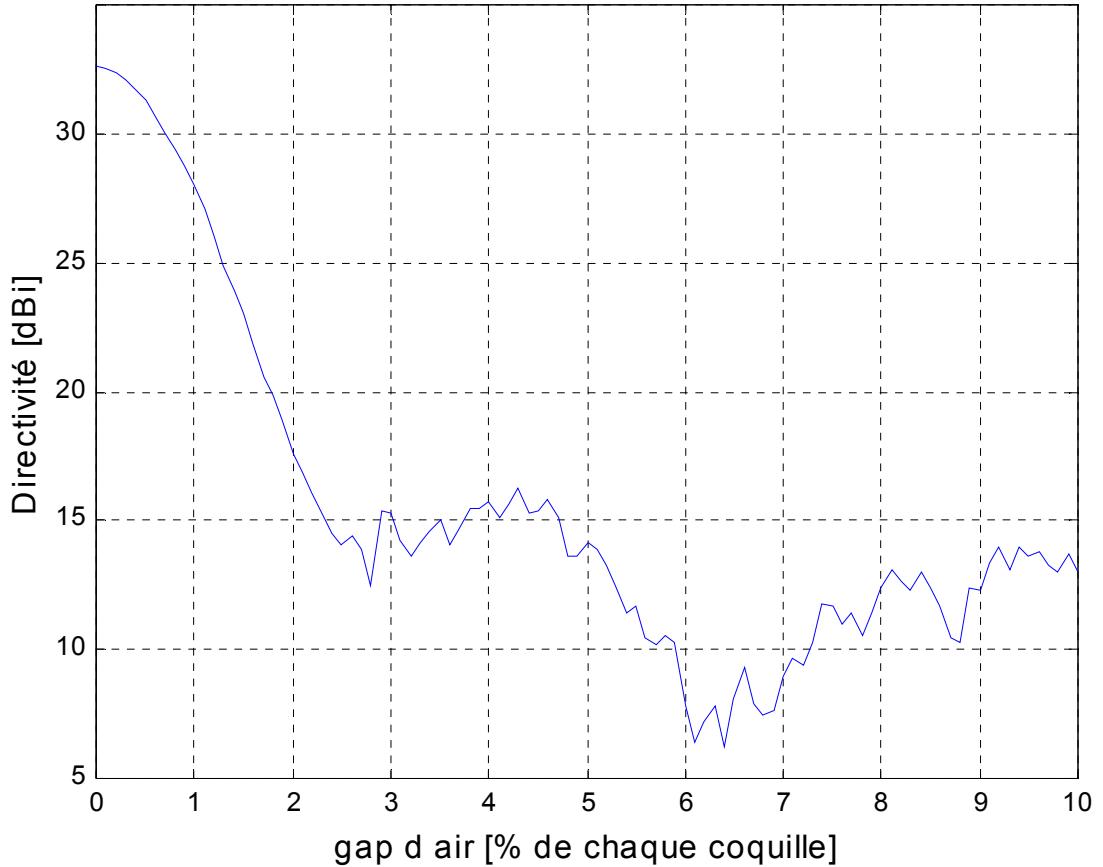
remarque importante, une seconde zone de focalisation apparaît dans la moitié illuminée de la lentille, comme le prédit la **Figure 32**.



**Figure 33** Distribution de la densité d'énergie normalisée associée au champ proche au voisinage d'une lentille sphérique homogène,  $\varepsilon_r = 2.6$ , de rayon  $r = 10\lambda$ , éclairée par une onde plane se propageant selon  $\hat{y}$ .

### 3.4.4 Gaps d'air

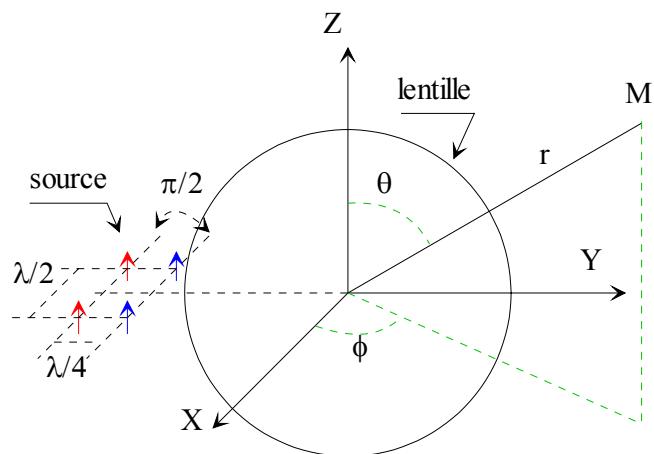
Dans les publications du chapitre 2, il est certes fait mention que les gaps d'air perturbent le fonctionnement de la lentille, mais sans réellement quantifier ce phénomène. Ainsi, la **Figure 34** propose de montrer la détérioration apportée sur la directivité par le pourcentage de gap d'air présent entre les coquilles d'une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 coquilles, de rayon  $15\lambda$ , et illuminée par l'antenne type « End Fire » décrite précédemment. Le schéma d'ensemble est donné en **Figure 35**. Chaque gap d'air entre deux couches consécutives est modélisé par une couche intermédiaire « remplie » d'air. Ceci double le nombre de coquilles dans le modèle. Il en ressort que ce paramètre est critique : une présence de 1% de gap d'aire entraîne la baisse de 5dB de la directivité.



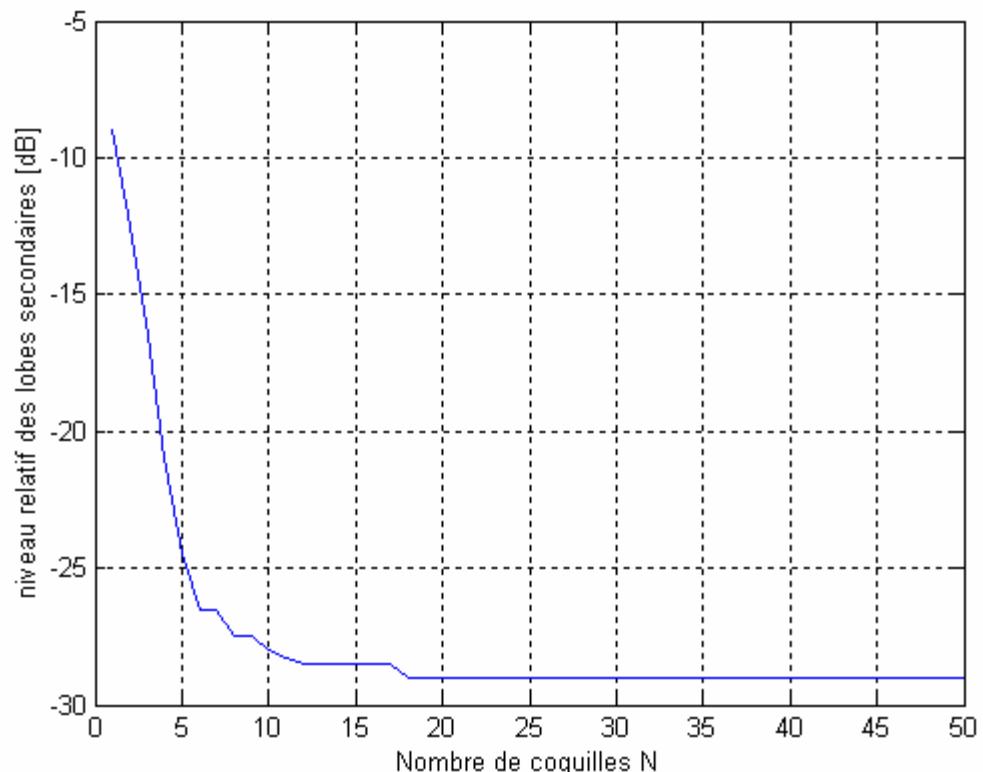
**Figure 34** Influence des gaps d'air sur la directivité d'une lentille de Lüneburg discrète homogène, composée de 20 coquilles, de rayon  $15\lambda$ , éclairée par l'antenne type « End Fire » décrite précédemment.

### 3.4.5 Lobes secondaires

Une grandeur importante en antennes est le niveau des lobes secondaires. Ainsi, la **Figure 36** montre l'évolution du niveau des lobes secondaires en fonction du nombre de coquilles composant une lentille discrète homogène de Lüneburg de  $15\lambda$  de rayon illuminée par une source type « End Fire », comme le montre la **Figure 35**. Le principal constat qui en découle est qu'il suffit de peu de coquilles, en fait 3, pour que le niveau des lobes secondaires soit plus 15dB en dessous du lobe principal.



**Figure 35** Schéma de principe de l'association lentille – antenne type « End Fire ».



**Figure 36** Evolution des lobes secondaires de la structure décrite en **Figure 35**. Le rayon de la lentille discrète homogène de Lüneburg est  $r = 15\lambda$ .

### **3.5 Conclusion**

L'utilisation des vecteurs modaux sphériques a permis d'aboutir à de nombreux outils permettant d'étudier les lentilles à distributions sphériques. Ces outils ont tous été validés soit par comparaison avec des publications antérieures, soit par confrontation avec des résultats expérimentaux. Ceci montre que l'objectif de créer un code permettant d'analyser les lentilles à distributions sphériques est atteint.

Il est à noter que les parties métalliques des sources ont été considérées comme étant inexistantes dans ce chapitre. Les phénomènes d'ombrage dus aux parties métalliques, inhérentes aux sources électromagnétiques, ne sont donc pas pris en compte ici. Ainsi, il semble désormais nécessaire de développer une technique parvenant à prendre en compte ces parties métalliques. Ceci est le cœur même du chapitre suivant.

### **3.6 Bibliographie**

Angot, A. (1961). Compléments de Mathématiques à l'Usage des Ingénieurs de l'Electronique et des Télécommunications, Revues d'Optique, Paris.

Balanis, C.A. (1997). Antenna Theory : Analysis and Design, 2nd ed., J. Wiley & Sons, Inc. New York

Bouwkamp, C.J., H.B.G. Casimir (1954). On Multipole Expansions in the Theory of Electromagnetic Radiation, Physica 29, pp 539-554

Chew, W. C. (1990). Waves and Fields in Inhomogeneous Media, Van Nostrand Reinhold. New York.

Cruzan, O.R. (1962). Translation Addition Theorems for Spherical Vector Wave Functions, Quart. Appl. Math. 20, pp 33-40

Colton, D., R. Kress (1983). Integral Equation Methods in Scattering Theory, chapter 4, Wiley, New York

Hansen, W. W. (1935). A new type of expansion in radiation problems. Physical Review 47: 139-143.

Hansen, W. W. (1936). Physics 7: 460-465.

Hansen, W. W. (1937). Journal of Applied Physics 8: 284-286.

Harrington, R. F. (1961). Time Harmonic Electromagnetic Fields. New York.

J.E. Hanson, ed. (1988). Spherical Near-Field Antenna Measurements, Peter Peregrinus Ltd., London

John H. Bruning, Yen T. Lo (1971). Multiple Scattering of EM Waves by Spheres, Part II - Numerical and Experimental Results, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 19 (3), pp 391-400

Jones, D. S. (1964). Theory of Electromagnetism. Mac Millan, New York.

Kennaugh, E.M. (1959), Multipole Expansions and their Use in Approximate Solutions of Electromagnetic Scattering, Ph. D. Dissertation, Ohio State University, Columbus

M. Abramowitz, I.A. Stegun, (1970). Handbook of Mathematical Functions, 9<sup>th</sup> ed. Dover, New York

Mieras, H. (1982), Radiation Pattern Computation of a Spherical Lens Using Mie Series, IEEE Transactions on Antennas and Propagation 30 (6), pp 1221-1224

P.M. Morse, H. F. (1953). Methods of Theoretical Physics. M. G. Hill. New York: 1865-1968.

S.S. Vinogradov, E.D. Vinogradova, P.D. Smith (1998). Accurate Modelling of a Scanning Luneberg Lens Antenna: Mie Series Approach, University of Dundee, Scotland

Stein, S. (1961). Addition Theorems for Spherical Wave Functions, Quart. Appl. Math. 19 (1), pp 15-24

Stratton, J. A. (1961). Theorie de l'Electromagnétisme. Paris.

V.H. Weston, R. H. (1962). High-Frequency Scattering From a coated Sphere. Journal of Research NBS 66D(5).

Vanbladel, J. (1964). Electromagnetic Field. Mac Graw Hill. New York.

Wilcox, C.H. (1956), An Expansion Theorem for Electromagnetic Fields, Comm. Pure Appl. Math.9, pp 115-134

Y.T. Lo, S.W. Lee ed. (1988). Antenna Handbook, Theory, Applications and Design, Van Nostrand Reinhold Company, New York



## **4. REGULARISATION - STRUCTURES SPHERIQUES**

---

L'intérêt porté aux antennes pastilles conformes imprimées sur sphères est manifeste. La raison principale réside dans la diversité de ses applications : téléphones cellulaires, stations de base pour communications dites « indoor », terminaux mobiles, etc. En effet, ces antennes offrent, dans leur design, un degré de liberté supérieur à celui des antennes conformées sur cylindres ou cônes.

La première analyse (B. Ke 1991), basée sur la méthode dite de la cavité, traite d'antennes circulaires imprimées sur sphères. Ces antennes sont modélisées par un disque sphérique en métal parfaitement conducteur placé sur une coquille diélectrique enfermant une sphère, également en métal parfaitement conducteur, faisant office de masse. Dans le même ordre d'idée, Wong, Hsiao et Chen dans (K.L. Won 1993) s'intéressent à des antennes imprimées conformées sur sphères multicouches. Leur technique d'analyse se base sur les fonctions de Green dans le domaine spectral ainsi que la Méthode des Moments de Galerkin. Plus tard, un certain nombre d'études comme (Kishk 1993) et (T.T. Chen 1997) combinent des anneaux imprimés à des masses sphériques. L'état de l'art, à la date 1990, de ces antennes à géométries sphériques et/ou circulaires se trouve résumé au sein de l'ouvrage (Wong 1999). L'analyse de ces antennes conformées sur sphères se fait bien souvent via des variantes de la Méthode des Moments. Par ailleurs, en raison de sa très grande flexibilité, la méthode des différences finies dans le domaine temporel, encore appelée FDTD, est implémentée dans de nombreux logiciels commerciaux destinés à l'analyse d'antennes imprimées, y compris celles dont le substrat possède une courbure.

Cependant, les méthodes numériques conventionnelles produisent des équations matricielles de très grande taille et nécessitent à la fois une importante capacité de mémoire et un temps de calcul énorme. Par conséquent, il n'est pas surprenant qu'aucune des analyses publiées ne montre la dépendance fréquentielle des principales caractéristiques d'antennes imprimées sur une très large bande de fréquence. De plus, ces méthodes ne garantissent en rien la convergence de leur solution : matrices mal conditionnées, instabilités numériques, vulnérabilité aux résonances à fort facteur de qualité, etc, comme l'indiquent (Dudley 1985; G.L. Hower 1993). Par conséquent, il apparaît fort attractif de développer une technique qui assure une convergence à la fois uniforme et rapide de la solution, et capable d'estimer l'erreur associée au calcul. Pour y parvenir, la Méthode de Régularisation Analytique, encore appelée MAR (Nosich 1999) ou aussi Méthode de Semi-Inversion, donne la marche à suivre. De façon générale, la MAR convertie une intégrale singulière de première espèce en une équation matricielle de Fredholm de seconde espèce bien posée, i.e. avec une diagonale principale dominante.

Cette matrice sert en fait de pré conditionneur idéal au problème initial mal posé. Ainsi, la convergence numérique et la rapidité sont assurées, l'erreur associée à la troncature de la matrice se trouve également parfaitement contrôlée.

Le cas de l'antenne circulaire imprimée sur une coquille de diélectrique enfermant une sphère parfaitement conductrice, excitée par un dipôle électrique radial centré est traité par (V. Radchenko 2000) dans le cadre de la MAR. Dans cette publication, la MAR est basée sur une technique précédemment développée en acoustique et en diffusion d'ondes électromagnétiques par des disques sphériques en espace libre (Vinogradov 1978; S.S. Vinogradov 1980; Vinogradov 1983; R.W. Ziolkowski 1988; S.S. Vinogradov 2000). Cette technique élimine toute formulation en terme d'équation intégrale et débute par l'introduction des potentiels de Debye – fonctions auxiliaires solutions de l'équation scalaire d'Helmholtz. En exprimant ces potentiels en termes de fonctions de Legendre, à l'intérieur et à l'extérieur des domaines sphériques délimités par les calottes métalliques, et en appliquant les conditions aux limites, ressortent des équations duales sous forme de séries. Elles sont ensuite décomposées en termes de partie statique et partie dynamique. Leur inversion peut alors être effectuée grâce aux propriétés de la représentation des fonctions de Legendre en termes d'intégrales d'Abel. Ainsi, cette régularisation aboutit l'inversion d'une équation matricielle de Fredholm de seconde espèce.

La technique développée ici est, dans ses grandes lignes, similaire à celle présentée dans (V. Radchenko 2000), mais en diffère de part le choix de représentation des champs : au lieu des potentiels de Debye est utilisée l'expression des champs en termes de fonctions modales sphériques. Par ailleurs, la limitation de la surface de masse et le couplage à des lentilles sphériques compliquent considérablement les équations. Est donc tout d'abord présentée ici l'étude d'une antenne imprimée, conformée sur sphère avec une surface de masse limitée, et alimentée en son centre par une sonde coaxiale. Ensuite, est traitée sa généralisation à une structure multicouche. Puis, le cas de l'alimentation par sonde décentrée est présenté dans le cadre d'une structure multicouche. Et pour clore ce chapitre, la technique est étendue au cas de l'alimentation par fente.

## 4.1 Principe général

La technique de régularisation débute par l'application des conditions dites « duales » au champ électromagnétique. Celles-ci aboutissent, en termes d'opérateurs, à une équation de première espèce  $GX = Y$ , où  $X$  représente le vecteur d'inconnues et  $Y$  le vecteur des éléments connues. Malheureusement, une inversion directe de  $G$  est généralement impossible. Même si une inversion numérique s'avérait possible, rien ne pourrait en garantir la convergence. Ainsi,  $G$  est scindé en deux parties (Nosich 1999) :  $G = G_1 + G_2$ , avec  $G_1^{-1}$  un opérateur connu. De cette manière, le problème de première espèce se trouve converti en un problème de seconde espèce  $X + AX = B$ , où  $A = G_1^{-1} G_2$  et  $B = G_1^{-1} Y$ . De plus, en imposant à  $G_1$  de posséder la principale

singularité de l'opérateur  $G$ , l'équation devient du type de Fredholm de seconde espèce, c'est-à-dire que  $A$  est compacte, i.e.  $\|A\|_{L^2} < +\infty$ . Lorsque que  $\|B\|_{L^2} < +\infty$ , les théorèmes de Fredholm sur les opérateurs assurent qu'il existe une et un seule solution (D. Colton 1983) dont l'allure est  $X = (I + A)^{-1}B$ , où  $I$  représente l'opérateur identité. De plus, ces théorèmes garantissent une convergence numérique de la solution. En effet, l'implémentation de ces équations nécessite une troncature à un ordre  $N$ :  $X^N + A^N X^N = B^N$ , où l'opérateur matriciel  $A^N$  est tel que son noyau contienne tous les modes d'ordre supérieurs à  $N$ . Dans ces conditions, l'erreur relative associée à la troncature se comporte comme suit :

$$e(N) = \frac{\|X - X^N\|_{L^2}}{\|X\|_{L^2}} \leq \|(I + A)^{-1}\|_{L^2} \cdot \|A - A^N\|_{L^2}. \quad (1)$$

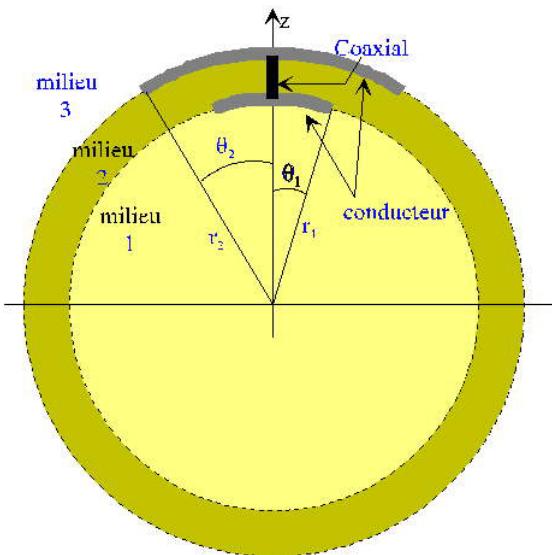
Comme l'opérateur  $(I + A)^{-1}$  est borné et que  $A^N \rightarrow A$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , il est immédiat que  $e(N \rightarrow +\infty) \rightarrow 0$ . La convergence ponctuelle est donc vérifiée. Plus l'ordre de troncature est grand et donc plus la précision se rapproche de la précision machine. Il est à noter que de telles propriétés ne sont pas vérifiées par les équations matricielles de première espèce dans la méthode des moments conventionnelle.

## 4.2 Antenne seule alimentée par sonde en son centre

Dans cette section, la MAR est appliquée à l'étude d'antennes imprimées, conformées sur sphères composées de deux disques sphériques parfaitement conducteurs, placés aux interfaces d'une coquille diélectrique, et alimentée par une sonde coaxiale. Par convention, le disque conducteur interne se réfère à la masse et l'externe à la pastille, bien que cette terminologie puisse être inversée. Les deux conducteurs possèdent le même axe de symétrie sur lequel est placée la sonde. Par conséquent, l'antenne étudiée est une généralisation d'une simple antenne circulaire imprimée sur sphère comme celle présentée dans (V. Radchenko 2000). Bien que les antennes imprimées sont fréquemment utilisées dans le cadre d'un rayonnement principalement orienté dans l'axe, les excitations par sondes centrées radiales génèrent des diagrammes de rayonnement à symétrie de révolution. De tels rayonnements omnidirectionnels dans le plan horizontal sont recherchés pour les communications mobiles (Y.J. Guo 1997), les radio-LAN (Y.J. Guo 1997), et les systèmes de diffusion multimédia (A.G. Pino 2000). La taille variable de la masse apporte un degré supplémentaire dans la synthèse d'antennes.

### 4.2.1 Géométrie de l'antenne

La structure de l'antenne considérée est donnée en **Figure 1**. Il s'agit d'une sphère diélectrique double couche dont les interfaces internes et externes sont respectivement de rayons  $r_1$  et  $r_2$  et de constantes diélectriques  $\epsilon_1$  et  $\epsilon_2$ . Le milieu extérieur est en fait l'espace libre. Entre ces deux couches est placé un disque métallique sphérique de demi angle au sommet  $\theta_1$ . Il s'agit de la masse. La surface extérieure de la sphère diélectrique est surmontée d'un autre disque métallique sphérique de demi angle au sommet  $\theta_2$ . Celui-ci représente la pastille. Comme indiqué sur la **Figure 1**, l'antenne est alimentée par une sonde coaxiale, modélisée par un courant électrique circulant entre les deux centres des conducteurs. Les disques métalliques sont pris infiniment minces et parfaitement conducteurs. Masse et patch peuvent être intervertis.



**Figure 1** Description de la structure de l'antenne conforme.

### 4.2.2 Modélisation électromagnétique

L'esprit de cette section réside dans l'énoncé des propriétés de base nécessaires à l'obtention du champ électromagnétique rayonné par la structure décrite précédemment.

#### 4.2.2.1 Modélisation de la source

L'alimentation choisie est une sonde coaxiale centrée dont le courant est orienté selon l'axe  $\hat{z}$  avec l'amplitude constante  $I_0$  comme indiqué en (2). Ce choix étant justifié par la faible épaisseur de substrat. Ceci ne réduit en rien l'aspect général de la technique présentée. En effet, dans le cas d'un substrat d'épaisseur d'ordre équivalent ou même supérieur à la longueur d'onde, il suffit simplement de moduler l'amplitude du courant selon les distributions habituelles (sinusoïdes, triangulaires, etc.).

$$\vec{J}^e(r, \theta, \varphi) = \frac{I_o}{r^2 \sin \theta} \mathbf{1}(r_1, r_2) \delta(\theta) \delta(\varphi) \hat{r} \text{ et } \vec{J}^m = \vec{0}. \quad (2)$$

Ici,  $\delta(\cdot)$  représente la distribution de Dirac et  $\mathbf{1}(A)$  la fonction unité sur l'ensemble  $A$  et nulle ailleurs. Il est à noter que la distribution de courants primaires donnée en (2) est radiale et indépendante de  $\varphi$ . Ainsi, le champ électrique possède une composante selon  $\hat{r}$  et une selon  $\hat{\theta}$ . Le champ magnétique a sa composante selon  $\hat{\varphi}$  et est également indépendant de  $\varphi$ :

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}, \vec{H} = H_\varphi \hat{\varphi}. \quad (3)$$

#### 4.2.2.2 Conditions duales

Comme les disques métalliques ne couvrent qu'une partie des interfaces de la sphère diélectrique, le champ électromagnétique doit vérifier les conditions duales sur ces surfaces. Ainsi, en premier lieu, le champ électrique tangentiel  $\vec{E}_{\parallel}(r, \theta)$  s'annule sur toute surface parfaitement conductrice :

$$\begin{cases} \vec{E}_{\parallel}(r_1^{\pm}, \theta) = \vec{0}, & 0 \leq \theta < \theta_1 \\ \vec{E}_{\parallel}(r_2^{\pm}, \theta) = \vec{0}, & 0 \leq \theta < \theta_2 \end{cases}, \quad (4)$$

où  $r_{1,2}^{\pm} = r_{1,2} \pm 0$ . Ensuite, les conditions de continuité imposent au champ tangentiel d'être le même de part et d'autre des interfaces diélectriques :

$$\begin{cases} \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{H}_{\parallel} \end{array} \right\}(r_1^-, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{H}_{\parallel} \end{array} \right\}(r_1^+, \theta), & \theta_1 < \theta \leq \pi \\ \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{H}_{\parallel} \end{array} \right\}(r_2^-, \theta) = \left\{ \begin{array}{l} \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{H}_{\parallel} \end{array} \right\}(r_2^+, \theta), & \theta_2 < \theta \leq \pi \end{cases} \quad (5)$$

#### 4.2.2.3 Conditions de rayonnement

La condition de rayonnement de Silver-Muller (D. Colton 1983), qui est un analogue de la condition scalaire de Sommerfeld, impose au champ lointain de se comporter comme une onde sphérique se propageant à l'infinie. Ainsi, cette remarque couplée avec (3) aboutit à :

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{1}{\eta_0} H_\varphi(r, \theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} f(\theta) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)(r \rightarrow +\infty), \quad E_r(r, \theta) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)(r \rightarrow +\infty), \quad (6)$$

où, pour des raisons de commodité, il est posé  $E_0 = k_0 \eta_0 I_0 / 4\pi$ .  $f$  représente en fait le diagramme de rayonnement en champ lointain associé à la structure.

#### 4.2.2.4 Condition de bord

D'un point de vue physique, la puissance contenue dans tout volume  $V_0$  de l'espace est finie :

$$\iiint_{V_0} \left[ \epsilon |\vec{E}(r, \theta)|^2 + \mu |\vec{H}(r, \theta)|^2 \right] dV(r, \theta) < +\infty. \quad (7)$$

Comme cette relation doit être vérifiée même si  $V_0$  contient un disque métallique parfaitement conducteur, cela détermine le degré de la singularité que le champ peut avoir :

$$E_r = E_\theta = O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right) (\rho \rightarrow 0), H_\varphi = O\left(\sqrt{\rho}\right) (\rho \rightarrow 0), \quad (8)$$

où  $\rho$  représente la distance au bord du disque métallique dans le plan  $(r, \theta)$ . Ceci est la condition de bord.

#### 4.2.2.5 Théorème d'unicité

Sous les conditions (4) à (8) associées aux équations de Maxwell, le théorème d'unicité affirme que le problème décrit par la géométrie décrite en **Figure 1** et alimentée par la distribution (2) possède une et une seule solution. Ainsi, tout le problème est maintenant d'approcher le plus possible, en termes de calcul numérique, cette solution.

### 4.2.3 Expression du champ et relations fondamentales

L'ensemble des relations précédentes est exprimé dans un cadre extrêmement générale inexploitable directement. Par conséquent, et compte tenu de la géométrie sphérique de la structure étudiée, il apparaît complètement naturel de travailler dans le cadre de la théorie développée dans le chapitre précédent, à savoir, les fonctions modales sphériques vectorielles.

#### 4.2.3.1 Coefficients associés à la source

Les coefficients sphériques associés à la distribution de courants primaires (2) s'expriment, via la relation (24) du chapitre 3 :

$$a_{mn}^{i\sigma} = 0, b_{mn}^{i\sigma} = 0, b_{0n}^{i\sigma}(r) = E_0 \alpha_n^{is}(r), n = 1, \dots, +\infty, m = 0, 1, \dots, +\infty, s = 1, 4, \sigma = e, o, \quad (9)$$

$$\text{avec } \alpha_n^{i1}(r) = \int_{k_2 r_1}^{k_2 r} \frac{Z_n^4(u)}{u} du, \alpha_n^{i4}(r) = \int_{k_2 r}^{k_2 r_2} \frac{Z_n^1(u)}{u} du.$$

#### 4.2.3.2 Expression générale du champ électromagnétique

Les disques sphériques métalliques représentent des éléments perturbateurs qui produisent une réponse à une excitation donnée. Comme, par ailleurs, le champ associé à la source, les bords de la structure métallique et les conditions de rayonnement sont indépendants de  $\varphi$ , aucune autre composante que celles produites par le champ primaire, i.e. le champ incident, n'apparaît dans le champ secondaire, i.e. le champ diffusé. Par voie de conséquence, les coefficients  $b_{0n}^{os}$  sont les seuls coefficients modaux sphériques non nuls et ce dans chaque région  $q = 1, 2, 3$ . Par ailleurs, l'indice  $m = 0$  et l'exposant  $e$  sont dès à présent supprimés et l'exposant  $q$  est

ajouté afin d'alléger les notations. En introduisant les coefficients sphériques normalisés  $\alpha_n^{sq} = b_n^{sq} / E_0$ , le champ électromagnétique secondaire devient :

$$\vec{E}^q = E_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1,4} \alpha_n^{sq} \vec{N}_{0n}^{es}, \quad \vec{H}^q = j \frac{E_0}{\eta_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1,4} \alpha_n^{sq} \vec{M}_{0n}^{es}, \quad (10)$$

où  $q = 1, 2, 3$  dénote le numéro de la couche considérée.

#### 4.2.3.3 Équations de séries duales

En appliquant les conditions duales données par (4) et (5) à l'expression générale du champ électromagnétique (10), ressortent les quatre équations de séries duales suivantes :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \alpha_n^{11} \\ \alpha_n^{43} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} K_n^1(k_1 r_1) \\ K_n^4(k_3 r_2) \end{Bmatrix} \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (11)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \alpha_n^{11} \cdot u_n + \alpha_n^{43} \cdot \tilde{\delta}_n \\ \alpha_n^{43} \cdot v_n + \alpha_n^{11} \cdot \tilde{\gamma}_n \end{Bmatrix} \cdot P_n^1(\cos \theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} \beta_n^{i1} \cdot u_n^i + \beta_n^{i4} \cdot \delta_n^i \\ \beta_n^{i4} \cdot v_n^i + \beta_n^{i1} \cdot \gamma_n^i \end{Bmatrix} \cdot P_n^1(\cos \theta), \quad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} < \theta \leq \pi, \quad (12)$$

$$\text{avec } u_n = Z_n^1(k_1 r_1) / \eta_1 - K_n^1(k_1 r_1) \cdot R_n / \eta_2, \quad v_n = Z_n^4(k_3 r_2) / \eta_3 - K_n^4(k_3 r_2) \cdot S_n / \eta_2, \quad (13)$$

$$u_n^i = (Z_n^1(k_2 r_1) - K_n^1(k_2 r_1) \cdot R_n) / \eta_2, \quad v_n^i = (Z_n^4(k_2 r_2) - K_n^4(k_2 r_2) \cdot S_n) / \eta_2, \quad (14)$$

$$\tilde{\gamma}_n = j W_{1,4}^n(k_2 r_2) K_n^1(k_1 r_1) / \eta_2 \Delta_n, \quad \tilde{\delta}_n = -j W_{1,4}^n(k_2 r_1) K_n^4(k_3 r_2) / \eta_2 \Delta_n, \quad (15)$$

$$\gamma_n^i = j W_{1,4}^n(k_2 r_2) K_n^1(k_2 r_1) / \eta_2 \Delta_n, \quad \delta_n^i = -j W_{1,4}^n(k_2 r_1) K_n^4(k_2 r_2) / \eta_2 \Delta_n, \quad (16)$$

$$R_n = (K_n^4(k_2 r_2) \cdot Z_n^1(k_2 r_1) - Z_n^4(k_2 r_1) \cdot K_n^1(k_2 r_2)) / \Delta_n, \quad (17)$$

$$S_n = (Z_n^4(k_2 r_2) \cdot K_n^1(k_2 r_1) - K_n^4(k_2 r_1) \cdot Z_n^1(k_2 r_2)) / \Delta_n, \quad (18)$$

$$\Delta_n = K_n^4(k_2 r_2) \cdot K_n^1(k_2 r_1) - K_n^4(k_2 r_1) \cdot K_n^1(k_2 r_2), \quad W_{1,4}^n(z) = 1/z^2 \text{ et } \beta_n^{i1,4} = \alpha_n^{i1,4}(r_{2,1}). \quad (19)$$

#### 4.2.3.4 Classe d'expansion des coefficients sphériques

L'association de (7) à (10) en utilisant les relations d'orthogonalité données en annexes, et appliquée aux volumes intérieurs  $r < r_1$  et  $r_2 < r < r_c$ , aboutit à deux inégalités définissant la classe d'expansion des coefficients sphériques :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n \cdot K_n^1(k_1 r_1)|^2 |\alpha_n^{11}|^2 < +\infty, \quad (20)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n \cdot K_n^4(k_3 r_2)|^2 |\alpha_n^{43}|^2 < +\infty. \quad (21)$$

#### 4.2.4 Régularisation

Afin de suivre la technique de régularisation quant à l'inversion des équations duales (11) et (12), il apparaît nécessaire de changer d'inconnues :

$$\begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} = \frac{n(n+1)}{2n+1} \begin{Bmatrix} \alpha_n^{11} \cdot u_n \\ \alpha_n^{43} \cdot v_n \end{Bmatrix}. \quad (22)$$

Par voie de conséquence, il est simple de voir que :

$$\begin{Bmatrix} \alpha_n^{11} \cdot K_n^1(k_1 r_1) \\ \alpha_n^{43} \cdot K_n^4(k_3 r_2) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \end{Bmatrix} \cdot \left( 1 - \begin{Bmatrix} g_n \\ h_n \end{Bmatrix} \right). \quad (23)$$

Après un peu d'algèbre, tout cela impose :

$$\Omega_x = 2 \frac{\eta_1}{k_1 r_1} \frac{1}{1 + \frac{\eta_1}{\eta_2} \frac{k_2}{k_1}}, \quad \Omega_y = -2 \frac{\eta_3}{k_3 r_2} \frac{1}{1 + \frac{\eta_3}{\eta_2} \frac{k_2}{k_3}}, \quad (24)$$

$$g_n = 1 - \frac{1}{\Omega_x} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{K_n^1(k_1 r_1)}{u_n}, \quad h_n = 1 - \frac{1}{\Omega_y} \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{K_n^4(k_3 r_2)}{v_n}, \quad (25)$$

où  $g_n = O(k_0 r_1/n) + O((r_1/r_2)^{2n})$ ,  $h_n = O(k_0 r_1/n) + O((r_1/r_2)^{2n})$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , et  $\Omega_x$  et  $\Omega_y$  deux constantes.

Les équations duales (11) et (12) deviennent alors :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} \cdot \left( 1 - \begin{Bmatrix} g_n \\ h_n \end{Bmatrix} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad 0 \leq \theta < \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (26)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \frac{2n+1}{n(n+1)} \left( \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} y_n \cdot \delta_n \\ x_n \cdot \gamma_n \end{Bmatrix} \right) - (2n+1) \begin{Bmatrix} p_n \\ q_n \end{Bmatrix} \right] \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0, \quad \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} < \theta \leq \pi, \quad (27)$$

où les notations introduites sont définies par :

$$p_n = \frac{\beta_n^{i1} \cdot u_n^i + \beta_n^{i4} \cdot \delta_n^i}{2n+1}, \quad q_n = \frac{\beta_n^{i4} \cdot v_n^i + \beta_n^{i1} \cdot \gamma_n^i}{2n+1}, \quad \gamma_n = \frac{\tilde{\gamma}_n}{u_n} \text{ et } \delta_n = \frac{\tilde{\delta}_n}{v_n}. \quad (28)$$

Par passage aux équivalents, ressort l'évolution de ces grandeurs :  $p_n$ ,  $q_n$ ,  $\gamma_n$  et  $\delta_n$  sont en  $O(k_0 r_1/n) + O((r_1/r_2)^{2n})$ , lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Ainsi, grâce à (20) et (21), les suites de coefficients  $x_n$  et  $y_n$  doivent être dans la classe déterminée par les inégalités :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |y_n|^2 < +\infty. \quad (29)$$

Maintenant, l'équation (26) est intégrée terme à terme selon  $\theta$  en considérant la propriété  $P_n^1(\cos \theta) = \partial P_n(\cos \theta) / \partial \theta$ , afin d'obtenir :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} \cdot \left( 1 - \begin{Bmatrix} g_n \\ h_n \end{Bmatrix} \right) \cdot P_n(\cos \theta) = \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} \cdot P_0(\cos \theta), 0 \leq \theta < \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Les constantes d'intégration  $C_x$  et  $C_y$  sont pour le moment inconnues mais seront extraites ultérieurement.

Les formules de Mehler-Dirichlet donne la représentation intégrale des polynômes de Legendre (M. Abramowitz 1985) :

$$P_n(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi, \quad (31)$$

$$P_n^1(\cos \theta) = \frac{-\sqrt{2}}{\pi \sin \theta} \frac{2n(n+1)}{2n+1} \int_\theta^\pi \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) \sin \varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi.$$

Les équations de séries duales deviennent alors :

$$\int_0^\theta \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} \cdot \left( 1 - \begin{Bmatrix} g_n \\ h_n \end{Bmatrix} \right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right) - \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right] \frac{d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} = 0, 0 \leq \theta < \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (32)$$

$$\int_\theta^\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \left( \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} y_n \cdot \delta_n \\ x_n \cdot \gamma_n \end{Bmatrix} \right) - n(n+1) \begin{Bmatrix} p_n \\ q_n \end{Bmatrix} \right] \frac{\cos\left(\frac{2n+1}{2}\varphi\right)}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} d\varphi = 0, \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} < \theta \leq \pi. \quad (33)$$

Chacune de ces équations est une équation intégrale homogène d'Abel à second membre nul et de noyau continu et de carré sommable. Ainsi, chaque intégrand s'annule sur l'ensemble de l'intervalle où l'équation est valide. D'où l'écriture suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right) = \begin{cases} \begin{Bmatrix} C_x \\ C_y \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} x_n \cdot g_n \\ y_n \cdot h_n \end{Bmatrix} \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right), & 0 \leq \theta < \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \\ - \sum_{n=1}^{+\infty} \left[ \begin{Bmatrix} y_n \cdot \delta_n \\ x_n \cdot \gamma_n \end{Bmatrix} - n(n+1) \begin{Bmatrix} p_n \\ q_n \end{Bmatrix} \right] \cos\left(\frac{2n+1}{2}\theta\right), & \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} < \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (34)$$

En multipliant cette équation de part et d'autre par  $\cos((2m+1)\theta/2)$  et en intégrant en  $\theta$  de 0 à  $\pi$ , découle un ensemble d'équations linéaires pour les coefficients  $x_m$  et  $y_m$ . Ce processus correspond à la projection de ces relations sur l'espace de Fourier. L'extraction des constantes  $C_x$  et  $C_y$  est réalisée grâce au cas  $m=0$ . D'où les deux équations couplées de matrice infinies :

$$\begin{Bmatrix} x_m \\ y_m \end{Bmatrix} - \sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} x_n \cdot g_n \\ y_n \cdot h_n \end{Bmatrix} S_{m,n} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} + \sum_{n=1}^{+\infty} \begin{Bmatrix} y_n \cdot \delta_n \\ x_n \cdot \gamma_n \end{Bmatrix} T_{m,n} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \begin{Bmatrix} p_n \\ q_n \end{Bmatrix} T_{m,n} \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad (35)$$

$$\text{où, } Q_{m,n}(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{\sin((m+n+1)x)}{m+n+1} + \frac{\sin((m-n)x)}{m-n} \right], S_{m,n}(x) = \frac{2}{\pi} \left[ Q_{m,n}(x) - \frac{Q_{m,0}(x) \cdot Q_{0,n}(x)}{Q_{0,0}(x)} \right], \quad (36)$$

$T_{m,n}(x) = \delta_{m,n} - S_{m,n}(x)$ , avec  $\delta_{m,n}$  représentant le symbole de Krönecker.

Sont dès à présent collectés de l'ensemble des inconnues dans un seul vecteur colonne  $Z = \{x_n, y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  et tout le membre de droite dans le vecteur colonne connu  $B$  décrivant la source excitatrice, qui contient les caractéristiques de la source. De plus est introduite la matrice  $A$  infinie de blocks  $2 \times 2$  composée des éléments décrivant la géométrie de l'antenne imprimée. Dans le cas étudié ici,  $A = \{A^{ps}\}_{p,s=1,2}^{+\infty}$  où les blocks  $A^{ps} = \{A_{mn}^{ps}\}_{m,n=1}^{+\infty}$  sont générés via (35). Ainsi, (35) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$Z + AZ = B. \quad (37)$$

Il est à noter que chacun des coefficients du block  $A^{ps}$  est le produit de deux fonctions :

$$A_{mn}^{ps} = A_n^{ps(1)}(r_1, r_2, k_1, k_2, k_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \cdot A_{mn}^{ps(2)}(\theta_1, \theta_2). \quad (38)$$

La première fonction s'annule lorsque  $k_0 r_1 \rightarrow 0$  et  $r_1/r_2 \rightarrow 0$ . Ceci indique que lors de la construction de (37), a été inversée la partie statique du problème associé avec chacun des disques sphériques en espace libre.

Par ailleurs, les évolutions de ces fonctions pour de grands ordres est :

$$A_n^{ps(1)}(r_1, r_2, k_1, k_2, k_3, \eta_1, \eta_2, \eta_3) = O\left(\frac{1}{n}\right)(n \rightarrow +\infty), \quad (39)$$

$$A_{mn}^{ps(2)}(\theta_1, \theta_2) = O\left(\frac{1}{m-n}\right)(n \rightarrow +\infty), \quad A_{mn}^{ps(2)}(\theta_1, \theta_2) = O(1)(n \rightarrow +\infty). \quad (40)$$

L'introduction de l'espace des suites de carrés sommables  $L_2^2 = L_2 \times L_2$  permet de voir que  $\|A\|_{L_2^2} < +\infty$ , i.e.  $A$  est compact. De la même manière  $\|B\|_{L_2} < +\infty$ . De cette façon, il est certain que (37) est une équation matricielle de Fredholm de seconde espèce assurant au problème d'être bien posé et inversible dont l'unique solution est donnée par  $X = (I + A)^{-1}B$ . De plus, la solution associée à l'équation tronquée à l'ordre  $N$  est donnée par :

$$X^N = (I_{2N} + A^N)^{-1} \cdot B^N, \quad (41)$$

où chaque block de la matrice  $2 \times 2 A^N$  possède la dimension  $N \times N$ .

La dernière étape nécessaire à la vérification de la condition de bord (7) provient de l'étude, pour de grandes valeurs de  $m$ , des coefficients  $A_{mn}^{ps}$  et  $B_m^p$ . Les relations (36) montrent que ces coefficients évoluent en  $O(m^{-1})$ . Ainsi, (27) et (7) sont complètement satisfaites par la solution de l'équation matricielle (35).

Finalement, l'ensemble des conditions requises en 4.2.2.5 quant à l'existence et l'unicité de la solution du problème est vérifié.

## 4.2.5 Caractéristiques d'antenne

Un certain nombre de caractéristiques d'antennes ont été développées dans le chapitre précédent en termes de modes sphériques. Il est également possible de les exprimer en termes de solutions régularisées afin d'en assurer la stabilité numérique. Ainsi, le diagramme de rayonnement en champ lointain, la puissance rayonnée, l'impédance, la directivité et les courants sont développés dans ce cadre.

### 4.2.5.1 Diagramme de rayonnement en champ lointain

De la relation (6), le diagramme de rayonnement peut aisément être extrait. Ainsi, en la couplant avec (22), le diagramme de rayonnement en champ lointain devient :

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{y_n}{v_n} P_n^1(\cos \theta). \quad (42)$$

### 4.2.5.2 Puissance rayonnée

La puissance  $P_{source}$  rayonnée par la distribution donnée en (2) en espace libre est, après intégration :

$$P_{source} = \eta_0 |I_0|^2 \frac{k_0(r_2 - r_1)^2}{12\pi}. \quad (43)$$

Cette grandeur est utilisée pour normaliser la puissance rayonnée par la structure étudiée. Ainsi, son association avec les relations données dans le chapitre précédent concernant la puissance  $P_r$  rayonnée par la structure aboutissent à :

$$\frac{P_r}{P_{source}} = \frac{3}{2k_0^2(r_2 - r_1)^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left| \frac{y_n}{v_n} \right|^2. \quad (44)$$

Du fait de la conservation de la puissance, cette grandeur correspond avec la résistance normalisée de radiation d'entrée associée à l'antenne imprimée. Par ailleurs, une résonance locale, respectivement anti-résonance locale, en terme de puissance rayonnée normalisée, est définie par le maximum local, respectivement minimum local, de ce rapport. Lorsque cette valeur devient plus grande, respectivement plus petite, que l'unité, les pastilles métalliques et le substrat améliorent, respectivement détériorent, la puissance rayonnée.

### 4.2.5.3 Impédance

La puissance complexe fournie par la source est définie par la relation :

$$P_s = -\frac{1}{2} \iiint_{espace} \left( \vec{H}^* \cdot \vec{J}^m + \vec{E} \cdot \vec{J}^e \right) dv. \quad (45)$$

Par ailleurs, le champ électromagnétique peut être séparé en termes de champ incident et de champ diffusé :

$$\begin{Bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{E}^{inc} \\ \vec{H}^{inc} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \vec{E}^{dif} \\ \vec{H}^{dif} \end{Bmatrix}. \quad (46)$$

Par conséquent, la puissance fournie par la source devient :

$$P_s = -\frac{1}{2} \iiint_{espace} \left( \vec{H}^{inc*} \cdot \vec{J}^m + \vec{E}^{inc} \cdot \vec{J}^{e*} \right) dv - \frac{1}{2} \iiint_{espace} \left( \vec{H}^{dif*} \cdot \vec{J}^m + \vec{E}^{dif} \cdot \vec{J}^{e*} \right) dv \quad (47)$$

$$P_s = P_s^{inc} + P_s^{dif}.$$

Compte tenu de la définition des coefficients sphériques normalisés  $\alpha_n$  et de celle de  $E_0$ , il ressort :

$$P_s^{dif} = |I_0|^2 \frac{\eta_0}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \sum_{s=1,4} \alpha_n^{s2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{Z_n^s(x)}{x} dx \quad (48)$$

Par ailleurs, l'impédance  $Z_A$  d'une antenne, alimentée par une source de courant électrique d'amplitude  $I_0$  en régime harmonique, est liée à la puissance complexe fournie par la source selon la relation  $P_s = |I_0|^2 Z_A / 2$ . De la linéarité de cette expression, l'impédance peut également être séparée en termes d'impédance de l'alimentation seule et impédance associée à la structure diffusante. Ainsi, l'impédance ramenée par la structure est :

$$Z_A^{dif} = \frac{\eta_0}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} n(n+1) \sum_{s=1,4} \alpha_n^{s2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{Z_n^s(x)}{x} dx = R_A^{dif} + jX_A^{dif}. \quad (49)$$

Il est à noter que la résistance associée à la source est :

$$R_A^{inc} = \eta_0 \frac{k_0^2 (r_2 - r_1)^2}{12\pi}. \quad (50)$$

Son admittance est infinie car la sonde choisie est infiniment mince. Ceci justifie le choix de déterminer l'impédance diffusée au lieu de l'impédance totale.

#### 4.2.5.4 Directivité

Le chapitre précédent donne l'expression de la directivité en termes de modes sphériques. En exprimant ces grandeurs en termes de coefficient régularisés et dans le cadre de la structure étudiée ici, l'expression de la directivité devient :

$$D(\theta) = \frac{\left| \sum_{n=1}^{+\infty} j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{y_n}{v_n} P_n^1(\cos \theta) \right|^2}{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \left| \frac{y_n}{v_n} \right|^2}. \quad (51)$$

#### 4.2.5.5 Courants

Le courant électrique sur une surface  $S$  est obtenu par la différence du champ magnétique tangentiel de part et d'autre de cette surface  $S$ . Par conséquent, la surface de courant électrique sur les disques métalliques de l'antennes imprimée sont :

$$\vec{J}_{1,2}(\theta) = \hat{r}(r_{1,2}, \theta) \times (\bar{H}(r_{1,2}^+, \theta) - \bar{H}(r_{1,2}^-, \theta)). \quad (52)$$

Il en ressort alors les séries suivantes :

$$\vec{J}_1(\theta) = jE_0 \hat{\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} P_n^1(\cos \theta) \cdot \left[ \frac{\alpha_n^{42} \cdot Z_n^4(k_2 r_1) + (\alpha_n^{12} + \beta_n^{i4}) \cdot Z_n^1(k_2 r_1)}{\eta_2} - \frac{\alpha_n^{11} \cdot Z_n^1(k_1 r_1)}{\eta_1} \right], \quad (53)$$

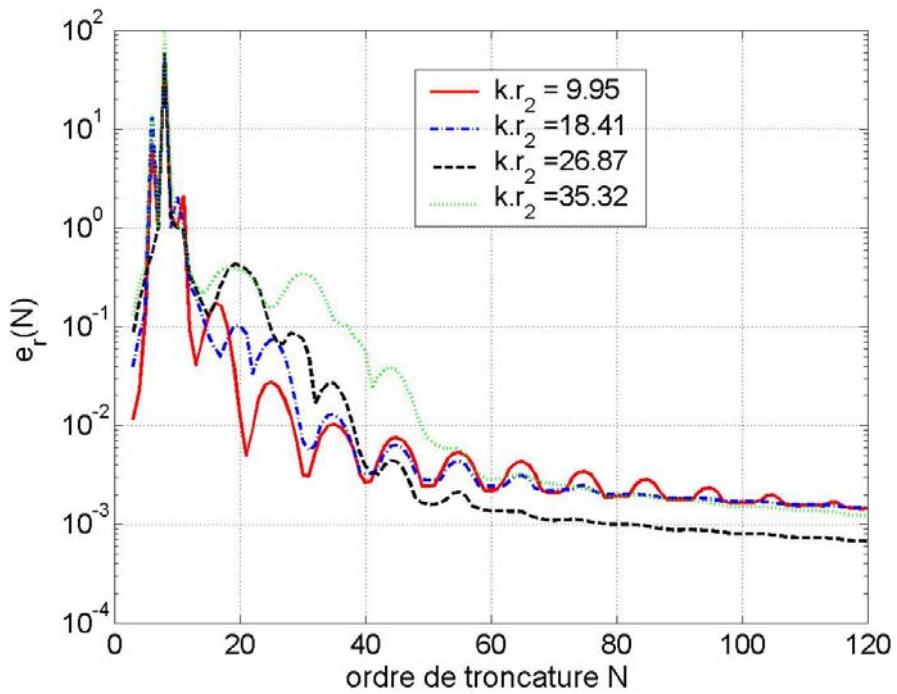
$$\vec{J}_2(\theta) = -jE_0 \hat{\theta} \sum_{n=1}^{+\infty} P_n^1(\cos \theta) \cdot \left[ \frac{\alpha_n^{12} \cdot Z_n^1(k_2 r_2) + (\alpha_n^{42} + \beta_n^{i4}) \cdot Z_n^4(k_2 r_2)}{\eta_2} - \frac{\alpha_n^{43} \cdot Z_n^4(k_3 r_2)}{\eta_3} \right]. \quad (54)$$

#### 4.2.6 Résultats numériques

Un certain nombre de grandeurs caractérisant l'antenne sont décrites dans la section précédente. Toutes ces expressions permettent la mise en avant de l'influence de deux paramètres majeurs de l'antenne conforme : la taille de la masse et la courbure. Le développement étant effectué sur un ensemble compact, toutes les normes associées à ce compact sont équivalentes. Par conséquent, il apparaît plus intéressant d'étudier la vitesse de convergence  $e_r(N)$  associée à la troncature de chaque block de la matrice aux ordres  $N-I$  et  $N$ . cette quantité est définie comme suit :

$$e_r(N) = \frac{\max_{n \leq N} \|Z^N - Z^{N-1}\|_{L_2^2}}{\|Z^N\|_{L_2^2}}. \quad (55)$$

L'allure typique de  $e_r(N)$  est donnée en **Figure 2**. Pour des troncatures à des ordres élevés, ces quantités évoluent comme  $(r_1/r_2)^N$ . Ainsi, l'ensemble des simulations est réalisé avec  $N=120$ . Ce choix est clair à la vue de la **Figure 2**. En effet, la précision est assurée jusqu'à la troisième décimale dans l'inversion de la matrice pour différentes fréquences normalisées et un rapport fixe  $r_1/r_2 = 0.97$ .

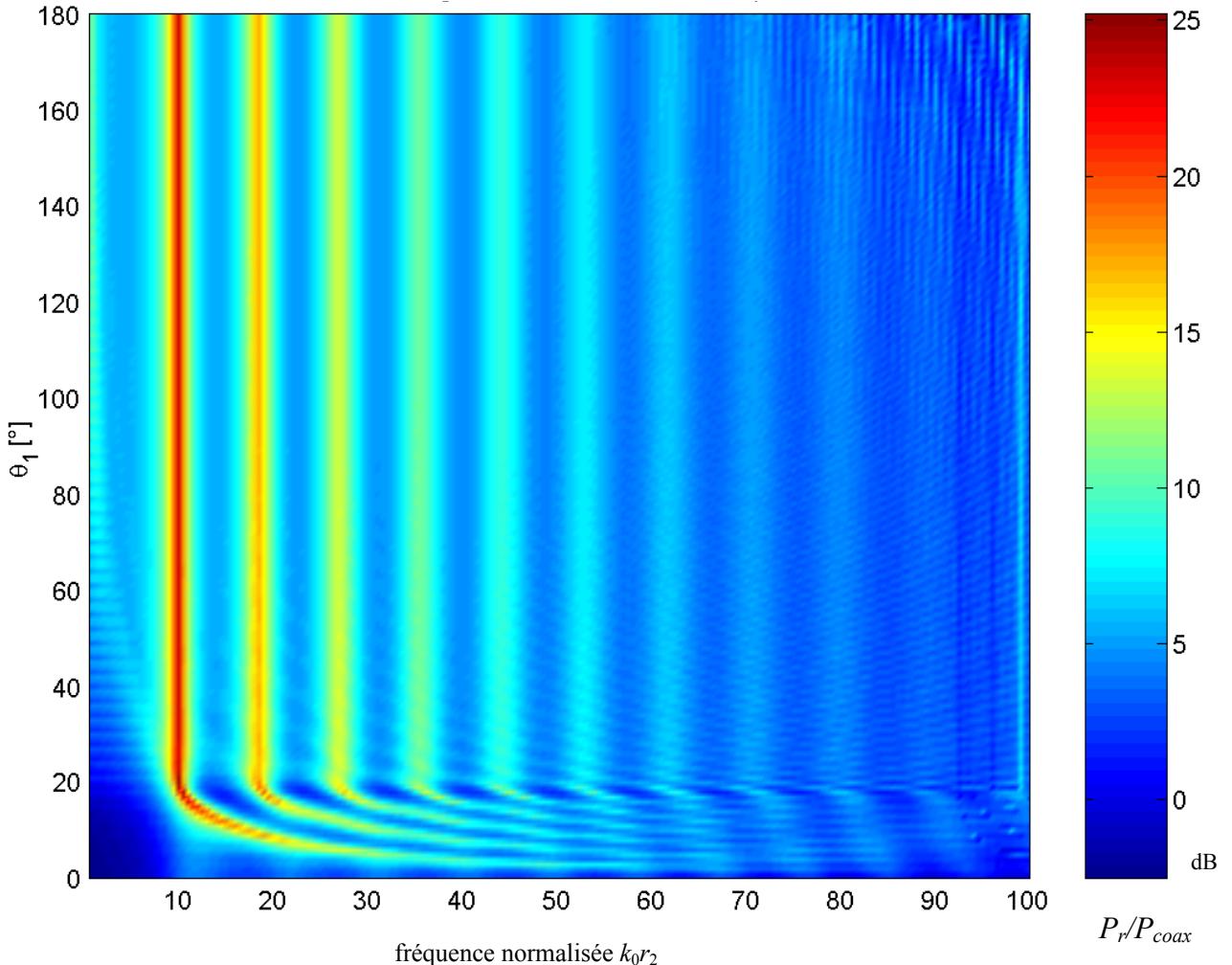


**Figure 2** Vitesse de convergence en fonction de l'ordre de troncature pour différentes fréquences normalisées. Les paramètres utilisés sont :  $\theta_1 = 180.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.30$ .

#### 4.2.6.1 Taille de la masse

La **Figure 3** présente l'influence de la taille, donnée par  $\theta_1$ , de la surface de masse sur la puissance rayonnée normalisée dont l'expression est donnée en (44) et ceci pour un large balayage fréquentiel. Il en ressort que lorsque  $\theta_1 > \theta_2$ , les fréquences de résonance et d'anti-résonance, ainsi que la puissance rayonnée normalisée sont conservées. Alors que lorsque le disque intérieur devient plus petit que le disque extérieur, les fréquences de résonance augmentent et leurs facteurs de qualité comme la puissance rayonnée normalisée diminuent.

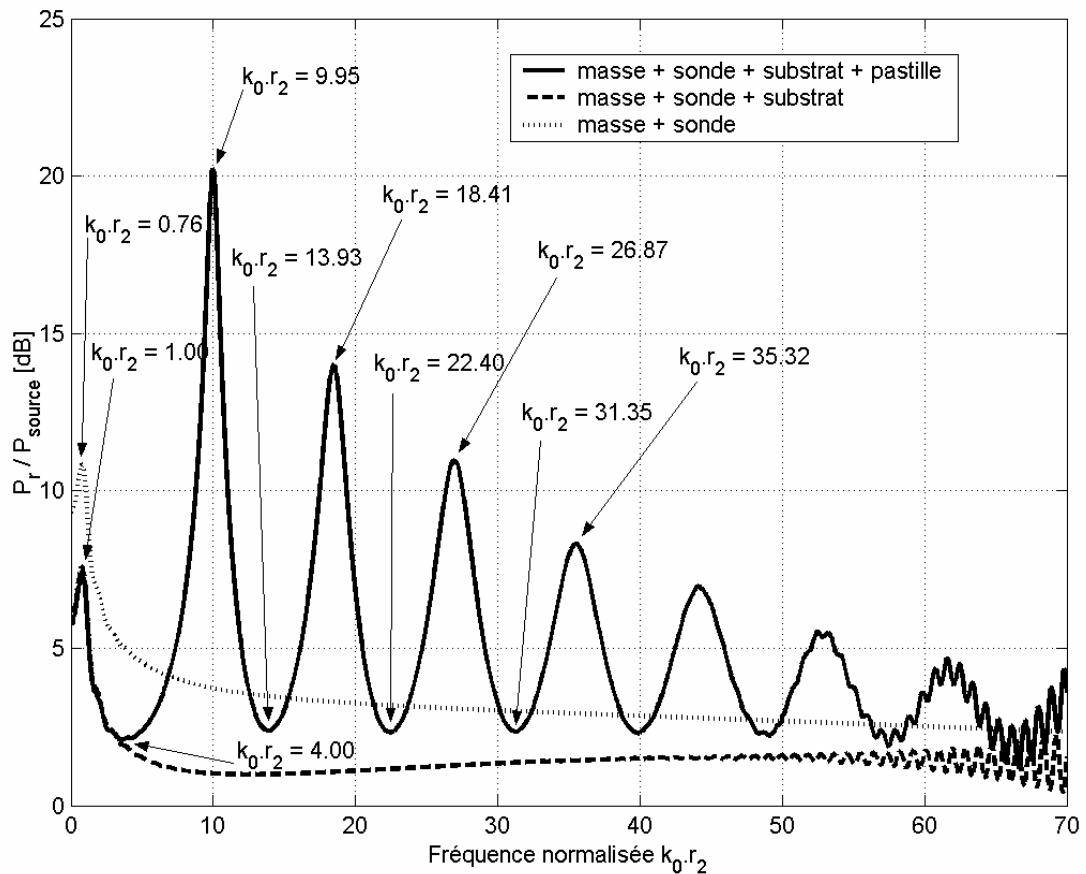
La **Figure 4** correspond à la coupe pour  $\theta_1 = 180^\circ$  de la **Figure 3**, i.e. au cas de la sphère de masse complète. Les valeurs des premières résonances et anti-résonances normalisées de la pastille y sont indiquées. Comme il a été précédemment expliqué, ces valeurs ne changent pas de façon significative quand le conducteur est beaucoup plus grand que celui de l'extérieur. Dans les hautes fréquences, apparaissent des ondulations périodiques de faibles amplitudes produites par la coquille de substrat. Le niveau de ces oscillations est à mettre en relation avec le rapport de l'épaisseur de substrat par la longueur d'onde. Il s'agit d'ondes de surface se propageant tout le long de la coquille de substrat. Par ailleurs, il est à noter la présence, aux alentours de  $k_0 r_2 = 1.00$ , d'une résonance à faible facteur de qualité. Il s'agit en fait de la résonance associée à la sphère de masse elle-même. Ceci est d'autant plus mis en valeur sur la **Figure 4** dans les cas sans pastille et sans substrat. Le périmètre de la sphère étant une longueur d'onde complète, cela correspond bien au résultat attendu  $k_0 r_2 = 1.00$ .



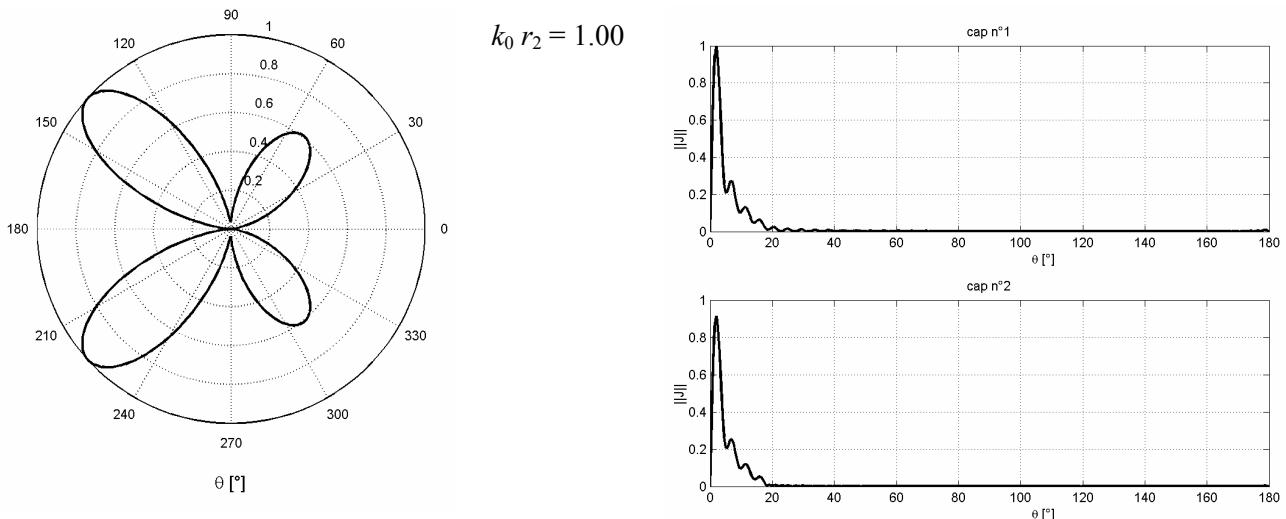
**Figure 3** Puissance normalisée pour différentes tailles de masse à différentes fréquences normalisées. Les paramètres utilisés sont :  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.30$ .

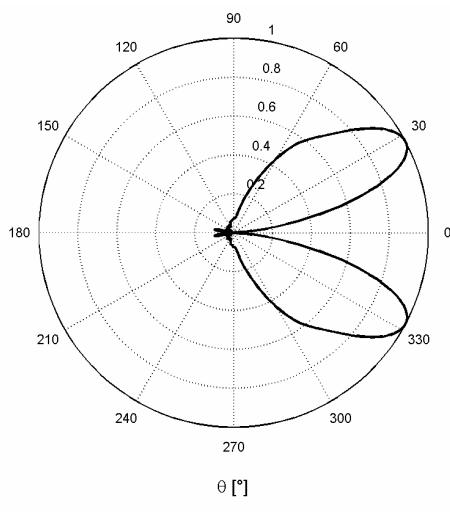
Les diagrammes de rayonnement en champ lointain et les distributions de courants sur les surfaces métalliques sont représentés en **Figure 5**. Il en ressort que les courants sur les disques métalliques sont grossièrement les mêmes. De plus, sur la surface de masse, la distribution de courant décroît de façon continue lors du passage de la position correspondant à la limite de la pastille. En plus de cela, la  $n^{\text{ème}}$  fréquence de résonance est associée à  $n$  oscillations, en amplitude, du courant sur la pastille entre son centre et son bord. Comme l'épaisseur de substrat est inférieur à une demie longueur d'onde dans le diélectrique,  $\varepsilon_r = 1.30$ , pour des fréquences normalisées allant jusqu'à  $k_0 r_2 = 50$ , il y a une seule variation du champ résonant entre les deux disques pour toutes les fréquences de résonances. Ainsi, ces fréquences sont associées avec les résonances des modes quasi  $TM_{0n0}$ . Dans le cas des anti-résonances, il y a une variation majeure et quelques petites oscillations de l'amplitude des courants. La dernière observation concerne le diagramme de rayonnement en champ lointain. Chaque mode quasi  $TM_{0n0}$  associé à la pastille rayonne un diagramme à  $n$  lobes dans le demi espace avant. Par ailleurs, plus la fréquence de normalisation est grande, plus le niveau de rayonnement arrière est élevé, et plus le champ rayonné se concentre autour du cône principal. Si la fréquence est très grande, le lobe principal se trouve

dans le demi espace arrière. Cet effet, appelé aussi « keel-over », ou « squint », a déjà été mentionné, (V. Radchenko 2000), pour des antennes circulaires imprimées conventionnelles.

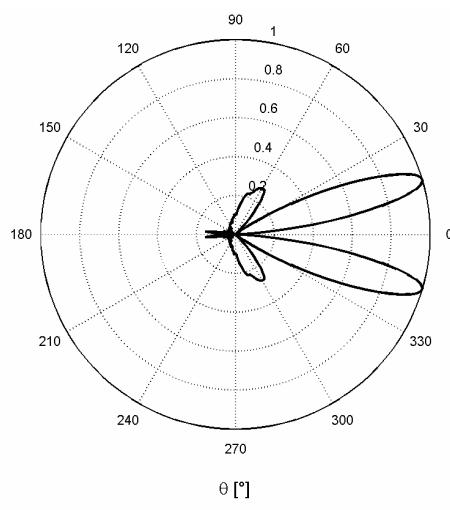
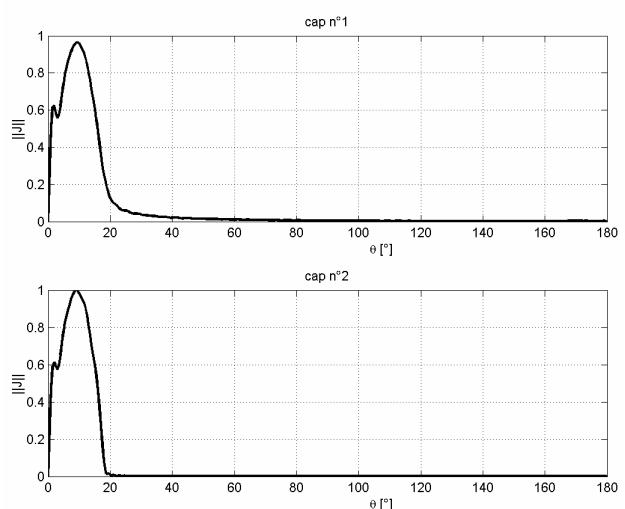


**Figure 4** Puissance rayonnée normalisée.  $\theta_1 = 180.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$  dans le cas de la présence de la pastille et  $\theta_2 = 0.0^\circ$  sinon,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.30$  dans le cas où le substrat est présent et  $\varepsilon_{r2} = 1.00$  sinon.

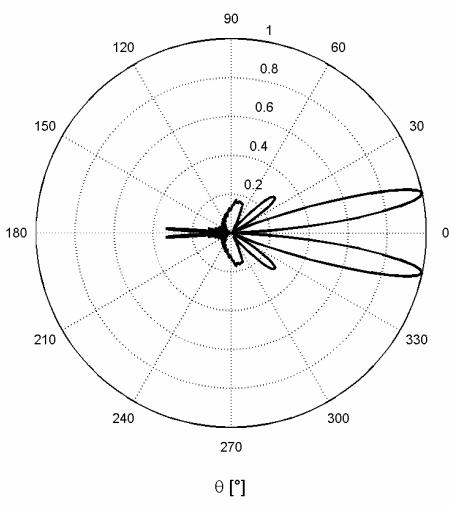
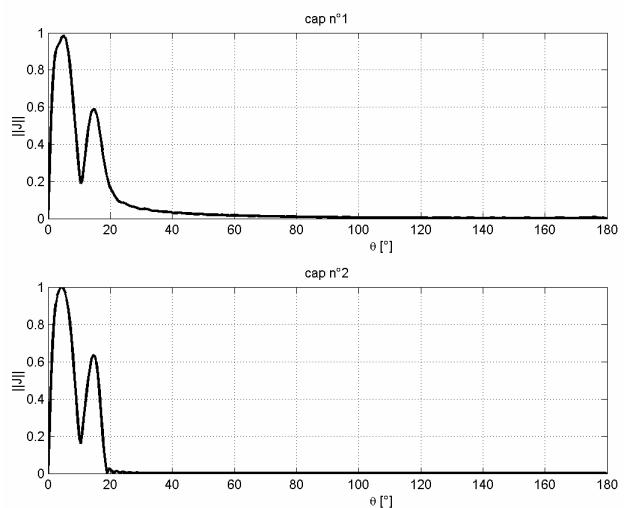




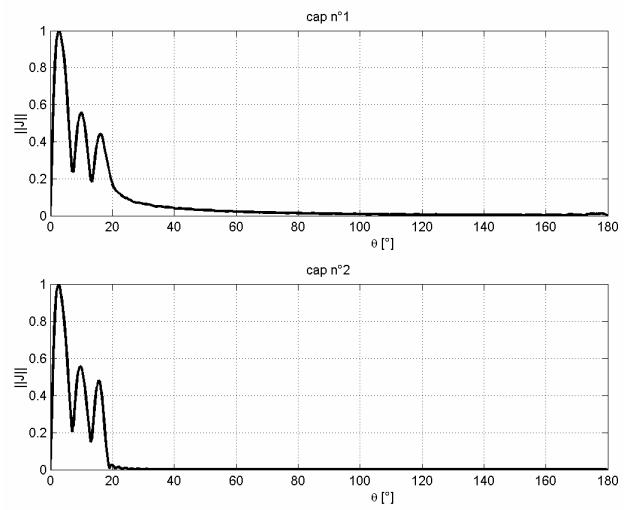
$$k_0 r_2 = 9.95$$

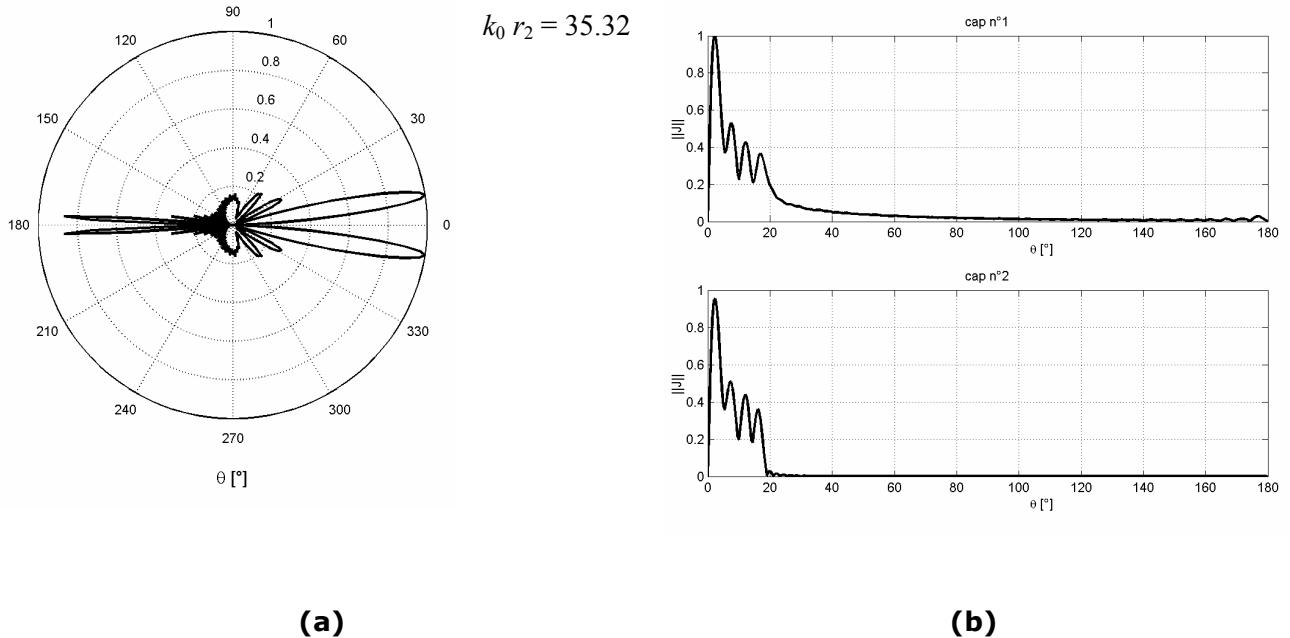


$$k_0 r_2 = 18.41$$



$$k_0 r_2 = 26.87$$



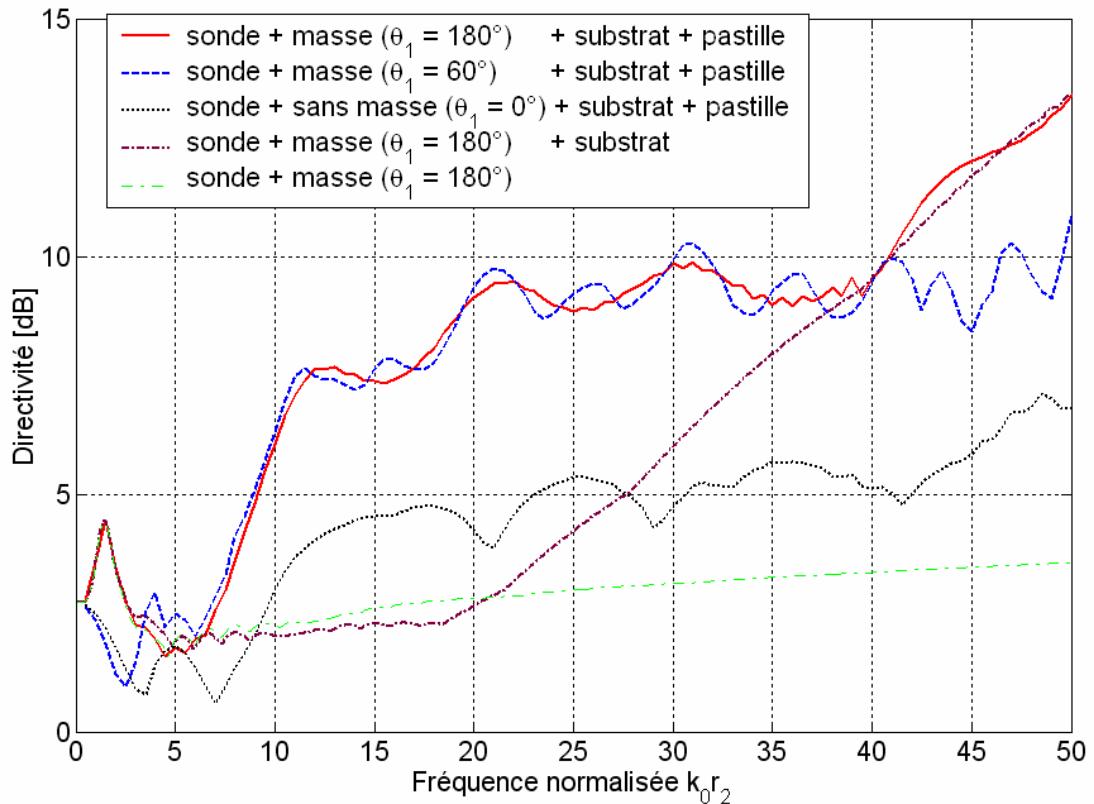


**Figure 5** (a) Diagrammes de rayonnement en champ lointain. (b) Surfaces de courants sur les disques métalliques. Les paramètres utilisés sont :  $\theta_1 = 180.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$ . Les fréquences normalisées correspondent aux fréquences de résonances données en **Figure 4**.

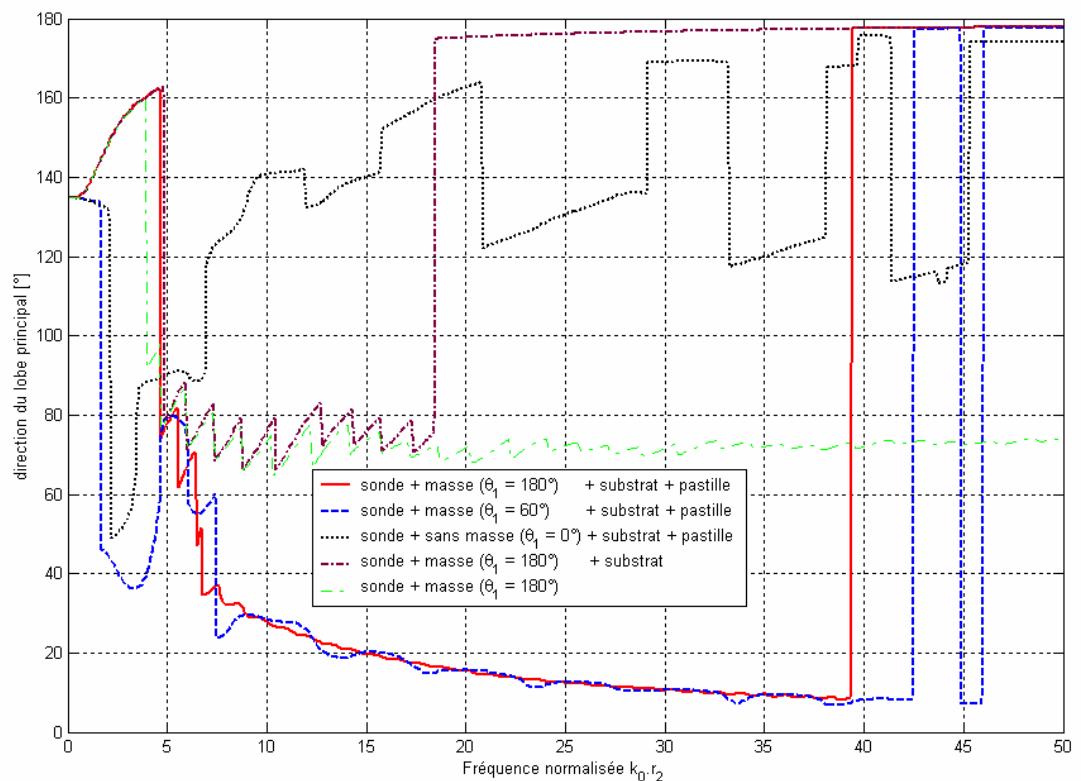
Quant à elle, la **Figure 6** montre la dépendance en fréquence du maximum de directivité. Il est fortement amélioré du fait de la présence de la surface de masse. Par ailleurs, la directivité reste relativement inchangée dans tous les cas où la masse est plus grande que la pastille, excepté lorsque la fréquence est dans la bande du « keel-over ». La direction du lobe principal varie selon la fréquence, comme il est montré en **Figure 7**, où les effets du « keel-over » sont clairement identifiés. Il provient uniquement de la nature type guide d'onde de la coquille de diélectrique qui prédomine sur les effets de la pastille si la fréquence est suffisamment élevée ou l'épaisseur du substrat suffisamment importante. Malgré tout, en positionnant une pastille au dessus de l'alimentation, le « keel-over » se trouve déplacé vers de plus hautes fréquences.

A l'ensemble de ces remarques s'ajoute l'effet de la surface de masse sur les diagrammes de rayonnement en champ lointain. A cet effet, la **Figure 8** en montre les influences pour les premières résonances et anti-résonances marquées en **Figure 4**. Ainsi, lorsque  $\theta_1 > \theta_2$ , l'allure des diagrammes reste relativement inchangée. Lorsque les deux disques métalliques sont de taille équivalente, les diagrammes de rayonnement avant et arrière ont la même forme. Par ailleurs, lorsque le disque intérieur devient plus petit que le disque extérieur, l'orientation des diagrammes se trouve complètement inversée. Ainsi, le disque interne se comporte comme une pastille et l'extérieur comme la masse.

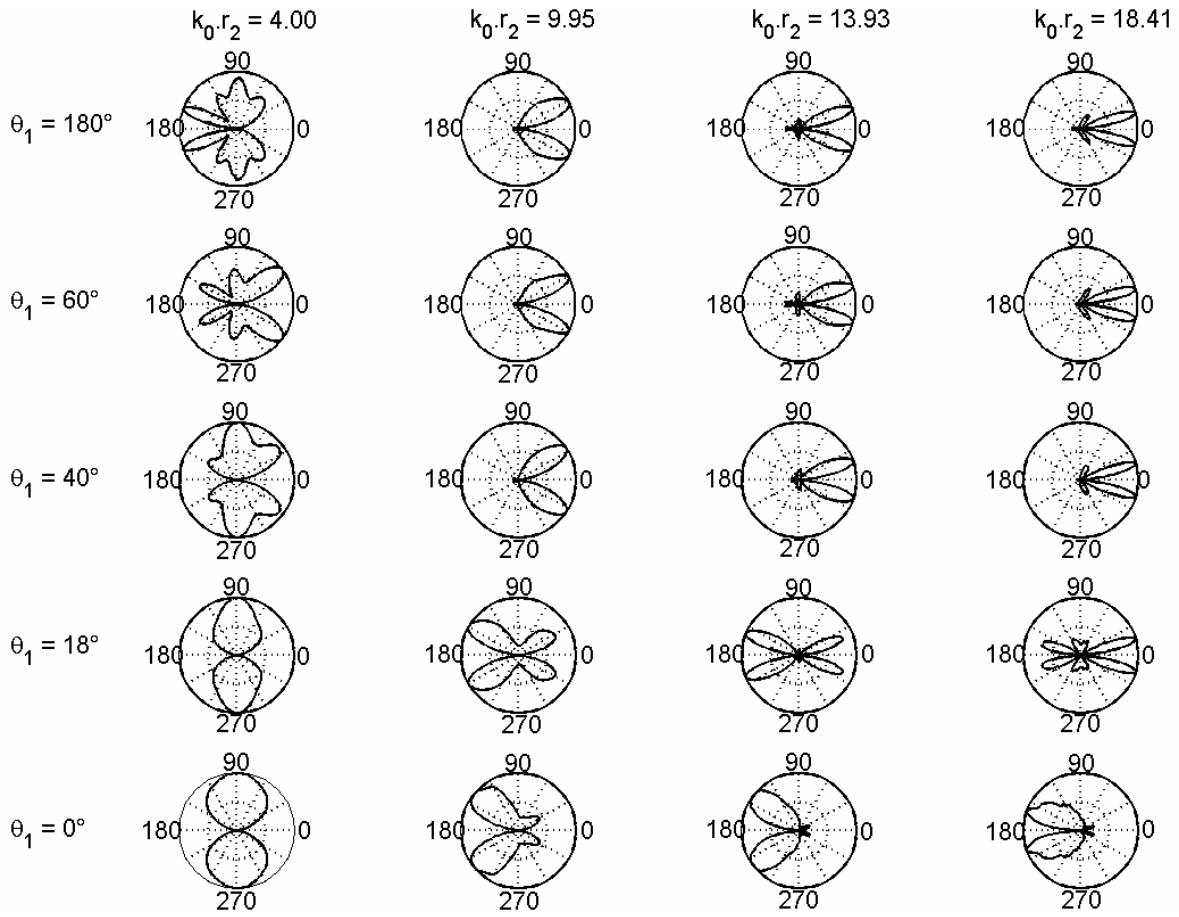
Par conséquent, la principale conclusion de ces observations est que la fréquence de résonance se trouve principalement fixée par le plus petit conducteur métallique. Ceci explique pourquoi la taille de la masse est en soi un paramètre majeur pour ce type d'antenne conforme imprimée.



**Figure 6** Directivité associée à différentes tailles de la masse. Les paramètres utilisés sont  $\theta_2 = 18.0^\circ$  dans le cas de la présence de la pastille et  $\theta_2 = 0.0^\circ$  sinon,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$  dans le cas où le substrat est présent et  $\epsilon_{r2} = 1.00$  sinon.



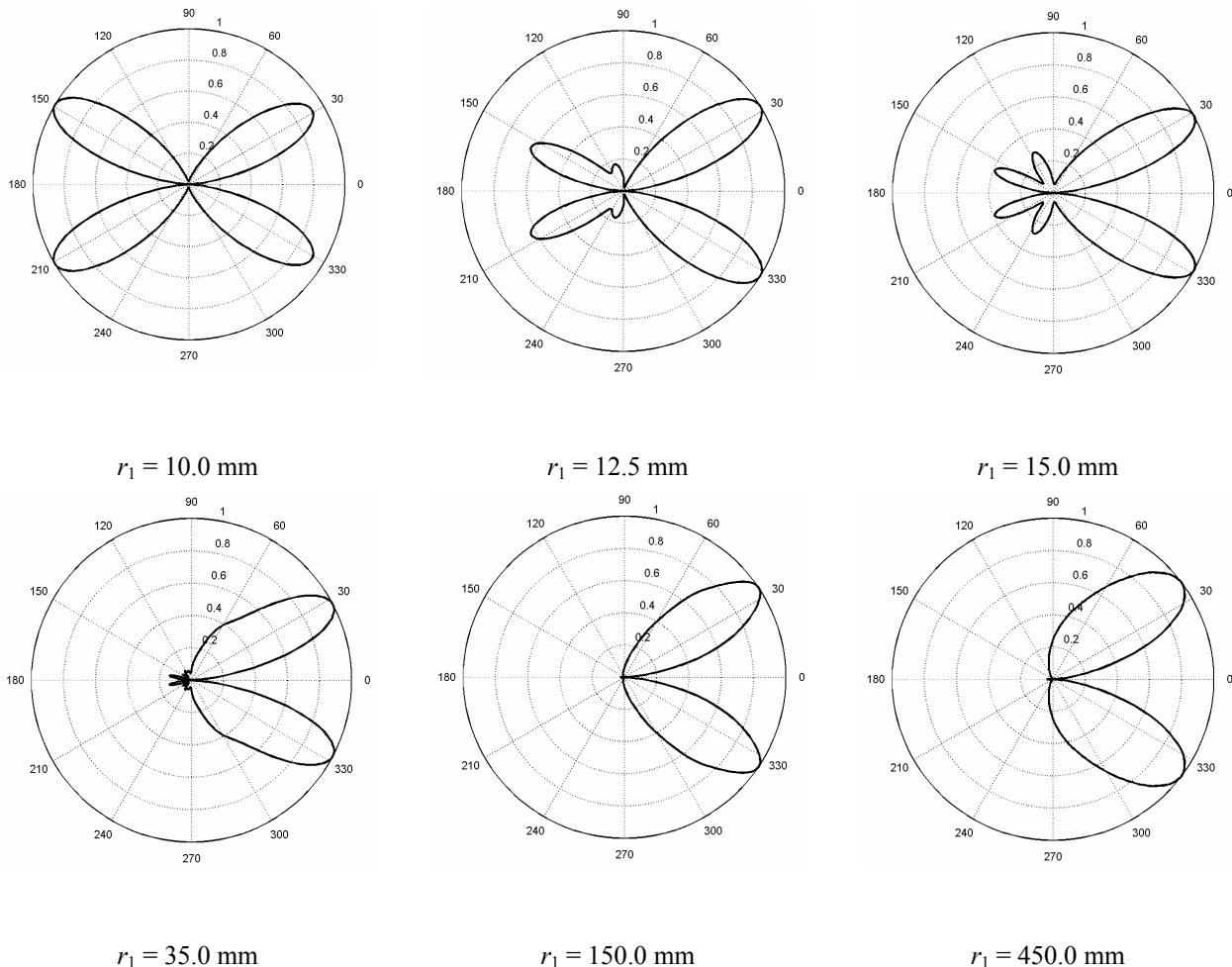
**Figure 7** Direction du lobe principal associée à différentes surfaces de masse. Les paramètres utilisés sont  $\theta_2 = 18.0^\circ$  dans le cas de la présence de la pastille et  $\theta_2 = 0.0^\circ$  sinon,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.30$  dans le cas où le substrat est présent et  $\varepsilon_{r2} = 1.00$  sinon.



**Figure 8** Influence de la taille de la surface de masse sur le diagramme de rayonnement en champ lointain aux résonances et anti-résonances marquées en **Figure 4**. Les paramètres utilisés sont :  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$ .

#### 4.2.6.2 Rayon de courbure

L'influence du rayon de courbure de l'antenne imprimée avec une masse sphérique est montrée en **Figure 9**. Ici, le rayon curviligne de la pastille est fixe,  $\theta_2 r_2 = constante$ , et  $k_0 \sqrt{\epsilon_{r2}} \theta_2 r_2 = 3.83171$ , valeur correspondant à la fréquence de résonance du mode  $TM_{010}$  du modèle dit de la cavité (Balanis 1997) d'une antenne circulaire imprimée sur un substrat plat de faible épaisseur. Bien que cette formule ne représente qu'une approximation, elle demeure, malgré tout, assez réaliste quant à la recherche des résonances de l'antenne imprimée conformée sur sphère tant que  $r_1 < 35.0\text{mm}$ . Ceci est d'autant plus remarquable sur les diagrammes de rayonnement en champ lointain. Pour placer la fréquence de résonance à 10.0GHz, il est nécessaire d'avoir  $r_1 = 35.0\text{mm}$ . Dans ce cas, le diagramme de rayonnement correspond à ceux donnés précédemment. Une situation plus intéressante est  $r_1 > 35.0\text{mm}$ . Ici, l'influence de la variation de la courbure du substrat est faible. Par conséquent, la fréquence de résonance du mode  $TM_{010}$  est définitivement fixée. Les variations sur le diagramme de rayonnement en champ lointain sont infimes. De plus, plus le rayon de courbure est important et plus le diagramme de rayonnement se rapproche du cas du disque circulaire plat sur un plan de masse infini et parfaitement conducteur.



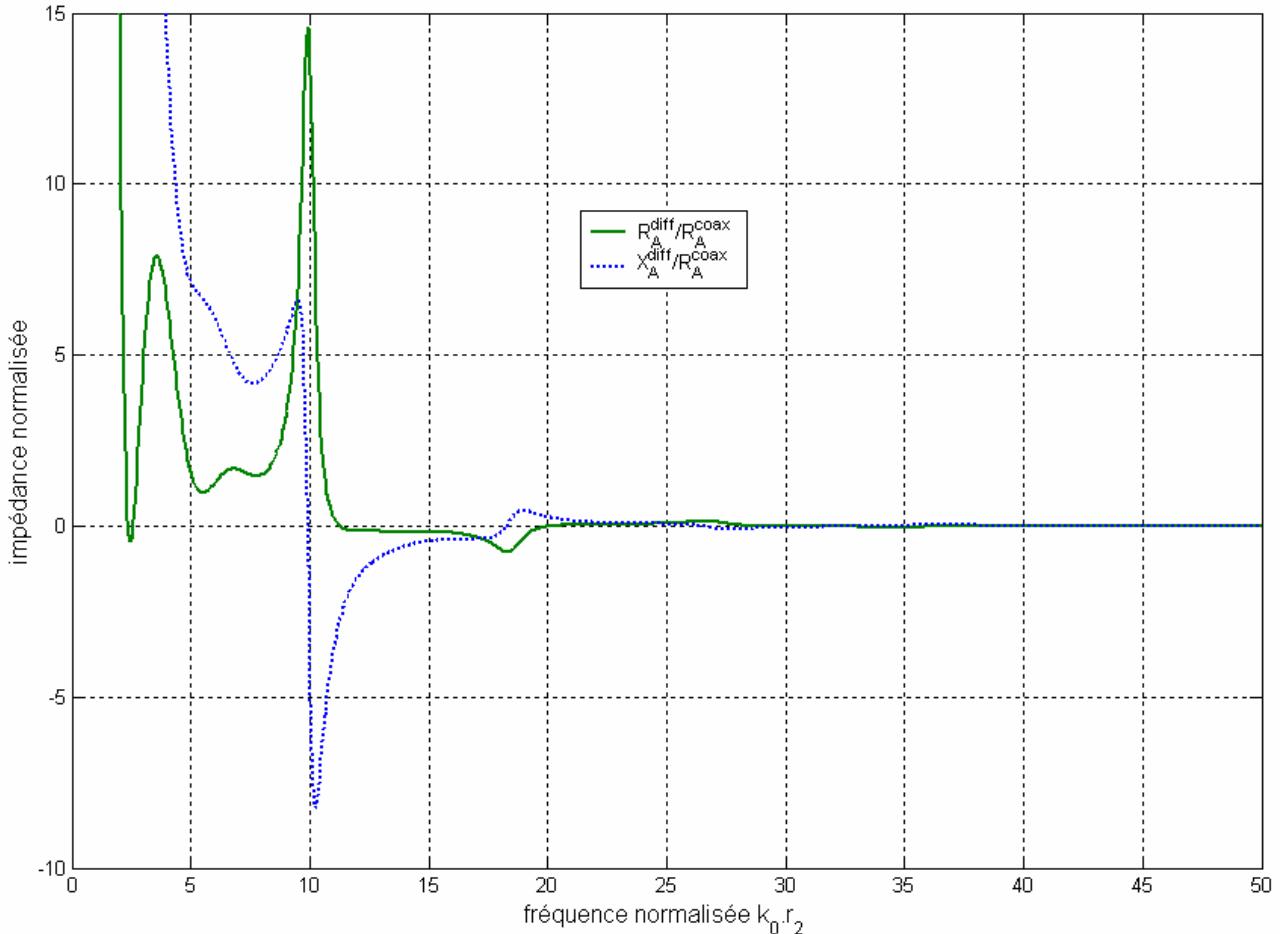
**Figure 9** Influence du rayon de courbure sur les diagrammes de rayonnement à 9.95GHz. Les paramètres utilisés sont :  $\theta_1 = 180.0^\circ$ ,  $\theta_2 r_2 = 15.0\text{mm}$ ,  $r_2-r_1 = 1.4\text{mm}$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.30$ .

#### 4.2.6.3 Impédance

L'impédance calculée à partir de (49) est tracée en **Figure 10**. Il en ressort que la partie imaginaire s'annule bien à chacune des résonances obtenues par la **Figure 4**, et qu'à ces mêmes résonances, la partie réelle admet bien un extremum local. De plus, la résistance admet un fort maximum à l'endroit où se produit la plus forte résonance ( $k_0 r_2 = 9.95$ ). Malgré tout, les valeurs numériques sont erronées. En effet, l'antenne étant passive, sa résistance ne peut être négative, contrairement à ce qui est prévu à la seconde résonance. De plus, la résistance ne peut tendre vers l'infinie lorsque la fréquence tend vers zéros. Ainsi, cette courbe d'impédance permet bien de résigner les différentes résonances, mais propose des valeurs numériques sans réalité physique. Ce phénomène possède malgré tout une explication : le calcul de l'impédance met en jeu l'expression du champ proche et réduit la vitesse de convergence d'un ordre deux. Par conséquent, les positions des résonances naturelles sont bien présentes, mais leur niveau est complètement erroné.

Par ailleurs, du fait de la conservation de l'énergie, la partie réelle a déjà été calculée. En effet, en séparant le champ incident généré par les sources primaires du champ diffusé engendré par les courants secondaires

produits par la présence des coquilles métalliques, il ressort la partie réelle de l'impédance de diffusion due aux coquilles métalliques :  $P_r/P_r^{\text{source}} = 1 + P_r^{\text{diff}}/P_r^{\text{source}} = 1 + R_A^{\text{diff}}/R_A^{\text{source}}$ .



**Figure 10** Impédance normalisée par rapport à la résistance de la sonde coaxiale pour les paramètres suivants :  $\theta_1 = 160.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$ .

#### 4.2.7 Validations

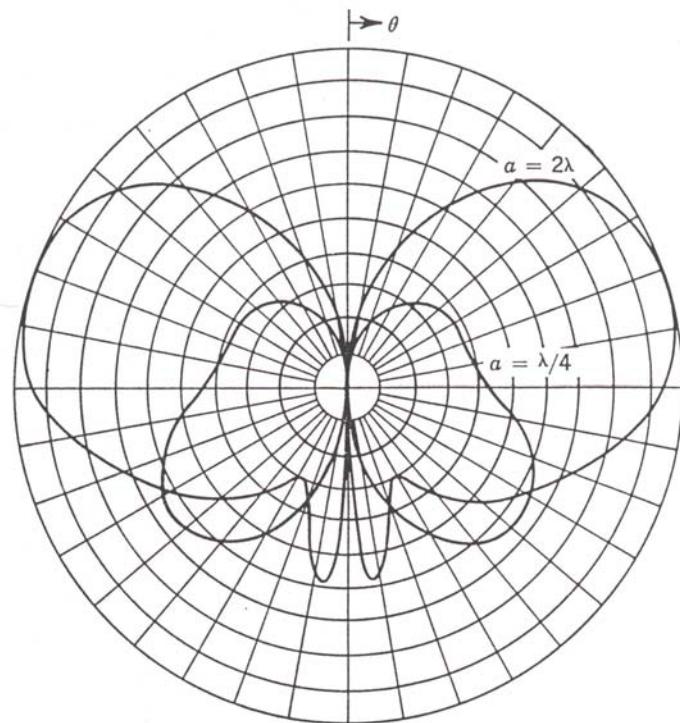
Afin de vérifier le bien fondé de cette technique, un certain nombre de validations sont effectuées. Il s'agit de comparaisons avec des résultats publiés ou obtenus via des logiciels commerciaux ou encore avec des mesures.

##### 4.2.7.1 Comparaison avec des résultats de publications antérieurs

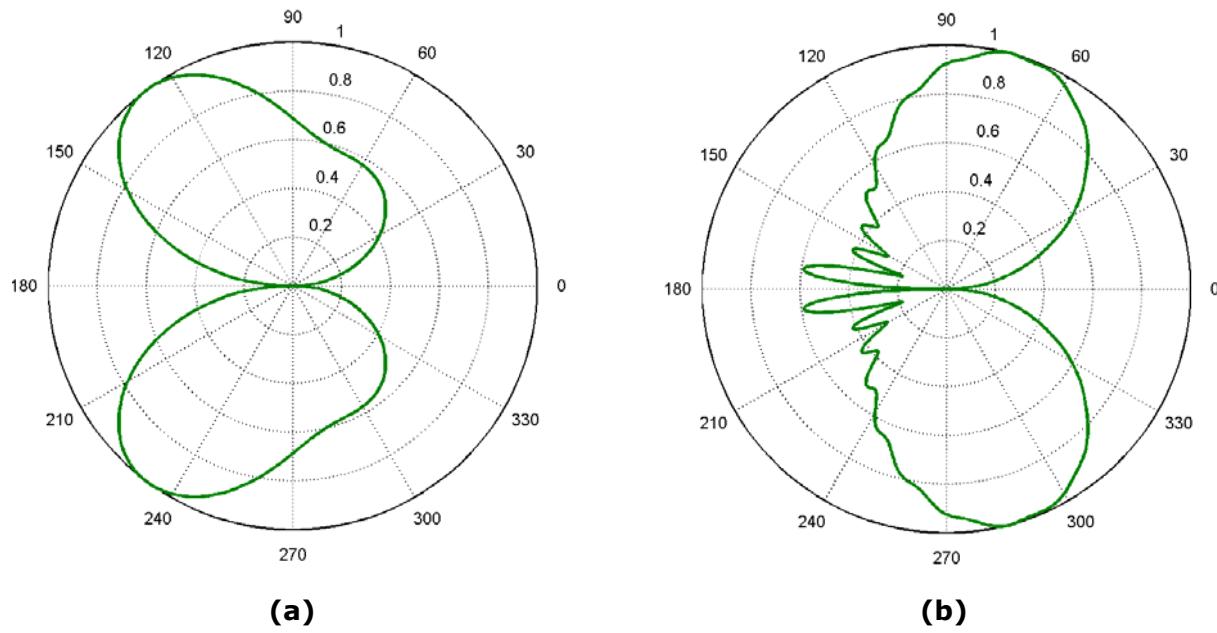
Une partie de la validation de cette méthode est réalisée en recréant les conditions d'étude de (V. Radchenko 2000), i.e. en considérant une surface de masse recouvrant l'ensemble de la sphère et une excitation via un dipôle électrique centré de longueur  $l \rightarrow 0$ . Il est donc nécessaire de remplacer la fonction unité par la distribution de

Dirac dans la dépendance radiale du courant primaire électrique. Les équations obtenues coïncident avec celles proposées dans la publication.

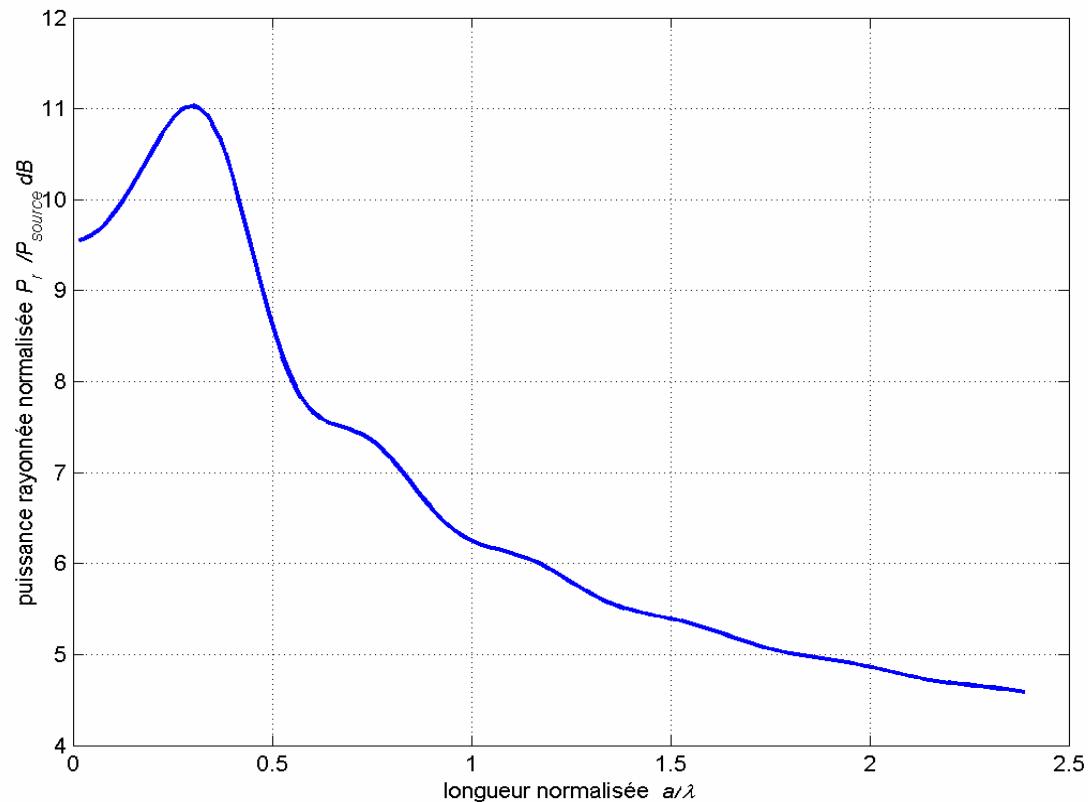
De plus, (Harrington 1961) propose une solution analytique au problème d'une sphère surmontée d'un dipôle électrique radial. Ses résultats sont donnés en **Figure 11**. Ceux obtenus via la MAR sont donnés en **Figure 12**. Les cas  $a = \lambda/4$  coïncident parfaitement alors que la MAR prévoit quelques ondulations en rayonnement arrière pour un rayon  $a = 2\lambda$ . L'explication à ces résultats peut être donnée grâce à **Figure 13**. En effet,  $a = \lambda/4$  correspond à la résonance, ainsi, les coefficients sphériques se somment en ondes constructives alors que pour  $a = 2\lambda$ , la résonance est assez éloignée. Donc de nombreux coefficients s'annulent via des ondes destructives. Ceci est source de légères erreurs numériques.



**Figure 11** Diagrammes de rayonnement en champ lointain d'un dipôle électrique radial placé sur une sphère de rayon  $a$  parfaitement conductrice. Résultats proposés par (Harrington 1961).



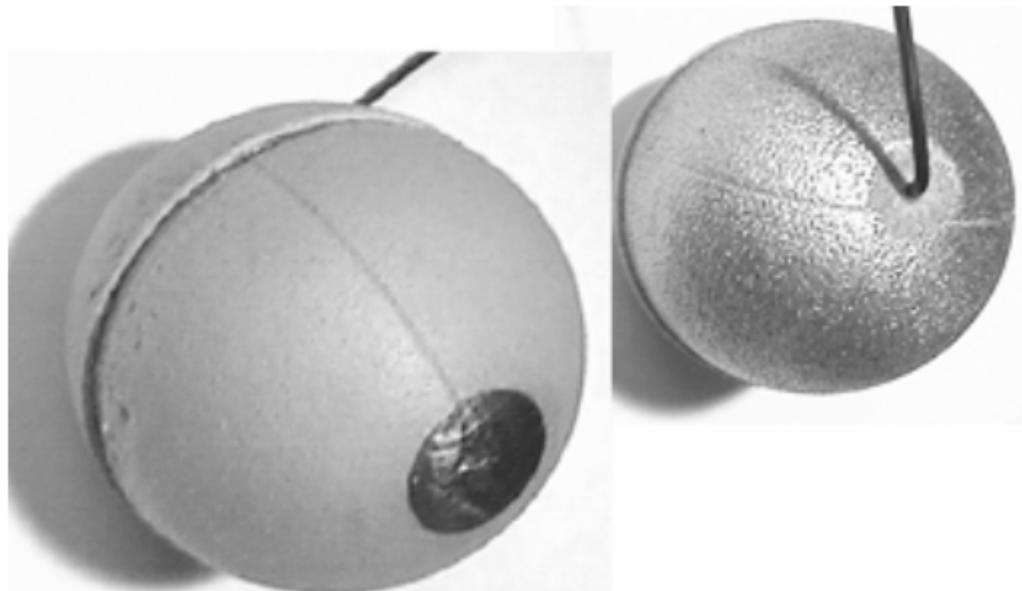
**Figure 12** Diagrammes de rayonnement en champ lointain d'un dipôle électrique radial placé sur une sphère de rayon  $a$  parfaitement conductrice (a)  $a = \lambda/4$ . (b)  $a = 2\lambda$ .



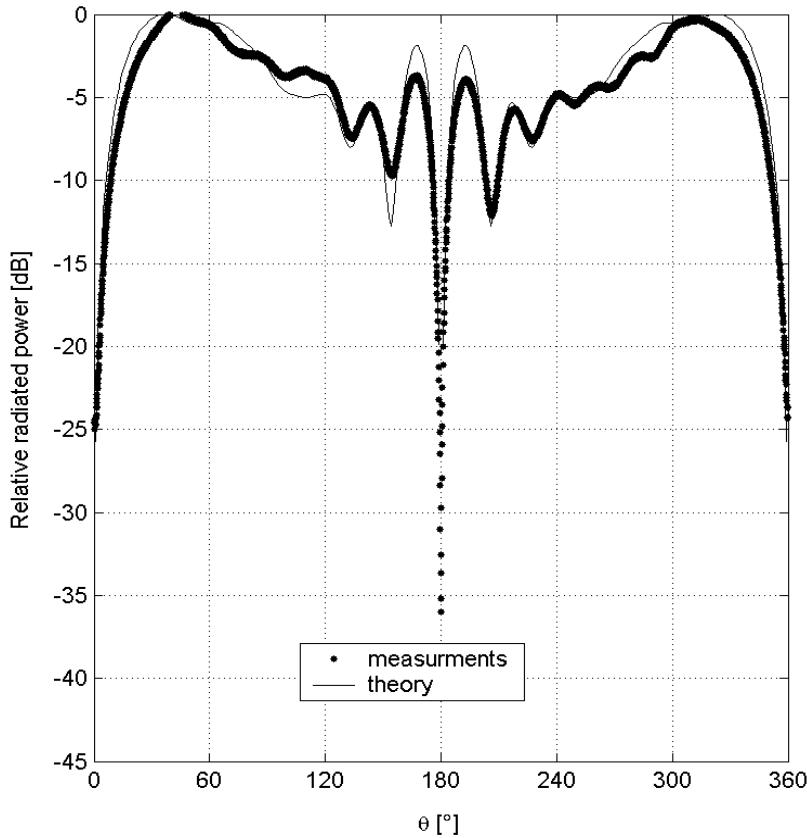
**Figure 13** Puissance rayonnée normalisée d'une sphère métallique de rayon  $a$  surmontée d'un dipôle électrique radial.

#### **4.2.7.2      Comparaison avec la mesure**

Afin de vérifier plus en profondeur la précision de la technique de régularisation développée précédemment, une antenne circulaire imprimée est réalisée (voir **Figure 14**) et utilisée dans la validation expérimentale. Elle est faite en matériau mousse métallisée (B. Jecko 2000; M. Himdi 2001). La gaine de la sonde coaxiale est soudée à la masse au niveau  $\theta = 0^\circ$ . Les paramètres géométriques et électromagnétiques de l'antenne sont :  $\theta_1 = 160.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 16.0^\circ$ ,  $r_1 = 35.0\text{mm}$ ,  $r_2 = 38.0\text{mm}$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.23$ . Comme le montre la **Figure 15**, la mesure est en excellent accord avec les prévisions théoriques. Les quelques décalages proviennent de difficultés à positionner la sphère dans la chambre anéchoïde ainsi que certaines perturbations créées par l'alimentation de la sonde coaxiale.



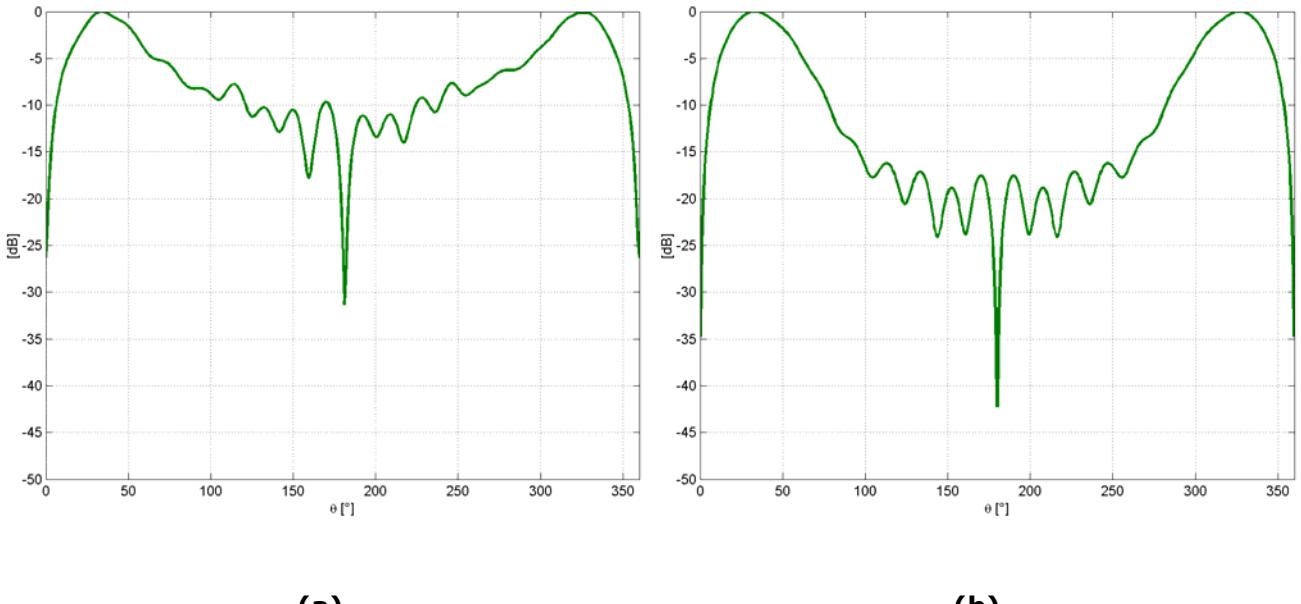
**Figure 14**    *Photographies des antennes conformes utilisées dans la comparaison théorie/expérience.*



**Figure 15** Comparaison entre la théorie et la mesure des diagrammes de rayonnement en champ lointain à 9.00GHz. Les paramètres utilisés sont :  $\theta_1 = 160.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 16.0^\circ$ ,  $r_1 = 35.0\text{mm}$ ,  $r_2 = 38.0\text{mm}$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.23$ .

#### 4.2.7.3 Comparaison avec des logiciels commerciaux

L'antenne, dont les paramètres sont :  $\theta_1 = 160.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$ , est simulée avec différents logiciels commerciaux. La première simulation est effectuée sur CST Microwave Studio. Ce logiciel est basé sur la résolution des équations intégrales dans le domaine temporel. Malheureusement, aucun résultat n'est exploitable car le logiciel ne parvient pas à converger. La seconde simulation est effectuée avec le logiciel commercial HFSS d'Ansoft. Celui-ci est basé sur la méthode des moments. Les résultats obtenus via HFSS et ceux via la MAR sont donnés en **Figure 16**. Les courbes obtenues sont proches à ceci près que le logiciel HFSS disymétrise le diagramme, malgré la symétrie parfaite de la structure, et surestime les niveaux des lobes secondaires.



(a)

(b)

**Figure 16** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne à 10.0GHz dont les paramètres sont :  $\theta_1 = 160.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$ . (a) Simulation effectuée avec le logiciel HFSS. (b) Simulation effectuée via la MAR.

Par ailleurs, il est à noter que le temps de calcul du diagramme de rayonnement en champ lointain via la MAR sur un ordinateur AMD K7 avec un processeur de 1.33GHz et 768Mo de RAM prend de l'ordre de une seconde avec un code non optimisé. A titre comparatif, la simulation avec HFSS est faite sur un ordinateur type Pentium III 866 avec 1Go de RAM dure plus de 16h40 en utilisant l'option « Fast-Sweep » sur trois points de fréquences.

#### 4.2.8 Conclusion

La technique de régularisation proposée met à jour et confirme un certain nombre de résultats. En effet, l'influence de la surface de masse ainsi que de la courbure sur les performances de l'antenne sont capitales. Par ailleurs, cette technique analytique - numérique est puissante et rapide. Elle traite le problème de manière globale : la séparation champ incident – champ réfléchi – champ diffracté n'est pas aussi adaptée que dans le cas de techniques hautes fréquences comme la GTD ou la PTD. Il est plus judicieux de raisonner en terme d'action (alimentation seule) – réaction (influence des substrats et des structures métalliques).

Malgré tout, il reste encore à travailler sur l'impédance : même si l'allure générale est plus ou moins correcte, la solution proposée n'est pas satisfaisante car elle propose des valeurs qui n'ont pas de réalité physique.

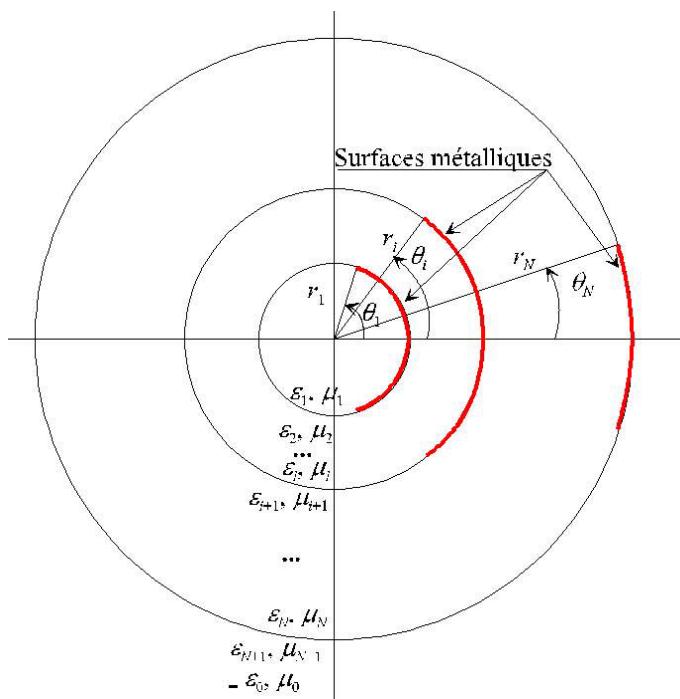
La puissance et le bien fondé de cette technique étant établis, il est dès à présent possible de l'étendre au cas de l'association avec une lentille discrète à gradient d'indice quelconque.

## 4.3 Antenne alimentée par sonde centrée et lentille sphérique

Comme il a été précédemment montré, l'étude des lentilles sphériques stratifiées s'effectue dans le cadre de sources approximées par de simples dipôles électriques et/ou magnétiques. Par ailleurs, la prise en compte des effets de camouflage générés par la présence des structures métalliques pourrait être faite via des techniques basées sur la Méthode des Moments, etc. Malheureusement, ceci n'est en général pas viable. En effet, les lentilles sphériques stratifiées sont le plus de très grande taille en termes de longueur d'onde. Ainsi, le coût de calcul (temps CPU et capacité mémoire) devient prohibitif. Ceci justifie pleinement le développement d'une technique rapide et fiable complètement dédiée à l'étude de l'association de lentilles sphériques stratifiées à des antennes pastilles circulaires conformées sur sphères. Les grandes étapes amenant à la solution de ce problème sont les mêmes que pour la partie traitant de l'antennes seule.

### 4.3.1 Géométrie de l'association antenne - lentille

La structure étudiée est décrite en **Figure 17**. Il s'agit en fait d'une étude générale. En effet, les calottes métalliques et les sondes coaxiales peuvent être placées au sein de n'importe quelle coquille. Lorsque la coquille  $i$  considérée est au sein de la lentille, elle n'est recouverte par aucun métal. Ainsi,  $\theta_i = 0$ . Par ailleurs, les disques métalliques sont pris infiniment minces et parfaitement conducteurs. Le nombre de coquille est noté  $N$ .



**Figure 17** Description de la structure étudiée antenne - lentille. Lorsque la coquille  $i$  fait partie de la lentille, il n'y a pas de métal. Ainsi,  $\theta_i = 0$ .

L'alimentation considérée dans cette section est une succession de courants électriques centrés à distribution radiale. Ainsi, il est possible de modéliser un dipôle électrique centré, une sonde coaxiale, plusieurs sondes coaxiales centrées alimentant différentes calottes métalliques.

### 4.3.2 Modélisation électromagnétique

Il est ici question de donner l'ensemble des conditions permettant d'appliquer le théorème d'unicité quant à la structure étudiée.

#### 4.3.2.1 Modélisation de la source

Comme il a été précédemment dit, la source primaire choisie est une distribution radiale de courant électrique :

$$\vec{J}^e(r, \theta, \varphi) = \frac{I_o}{r^2 \sin \theta} g(r) \delta(\theta) \delta(\varphi) \hat{r} \text{ et } \vec{J}^m(r, \theta, \varphi) = \vec{0}, \quad (56)$$

où  $g$  représente une fonction quelconque. Il devient ainsi possible de définir un grand nombre d'alimentations dont la longueur n'est pas limité à une seule couche. Il est à noter que la distribution de courants primaires donnée en (56) est radiale et indépendante de  $\varphi$ . Ainsi, le champ électrique possède une composante selon  $\hat{r}$  et une selon  $\hat{\theta}$ . Le champ magnétique a sa composante selon  $\hat{\varphi}$  et est également indépendant de  $\varphi$ :

$$\vec{E} = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta}, \vec{H} = H_\varphi \hat{\varphi}. \quad (57)$$

#### 4.3.2.2 Conditions duales

Comme les disques métalliques ne couvrent qu'une partie des interfaces de la sphère diélectrique, le champ électromagnétique doit vérifier les conditions duales sur ces surfaces. Ainsi, en premier lieu, le champ électrique tangentiel  $\vec{E}_{\parallel}(r, \theta)$  s'annule sur toute surface parfaitement conductrice :

$$\forall p = 1, \dots, N, \vec{E}_{\parallel}(r_p^{\pm}, \theta) = \vec{0}, 0 \leq \theta < \theta_p, \quad (58)$$

où  $r_p^{\pm} = r_p \pm 0$ . Ensuite, les conditions de continuité imposent au champ tangentiel d'être le même de part et d'autre des interfaces diélectriques :

$$\forall p = 1, \dots, N, \begin{cases} \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{H}_{\parallel} \end{cases} \Big|_{(r_p^-, \theta)} = \begin{cases} \vec{E}_{\parallel} \\ \vec{H}_{\parallel} \end{cases} \Big|_{(r_p^+, \theta)}, \theta_p < \theta \leq \pi \quad (59)$$

#### 4.3.2.3 Conditions de rayonnement

Tout comme précédemment, la condition de rayonnement de Silver-Muller impose au champ lointain de se comporter comme une onde sphérique se propageant à l'infinie. Ainsi, cette remarque couplée avec (57) aboutit à :

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{1}{\eta_0} H_\phi(r, \theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} f(\theta) + O\left(\frac{1}{r^2}\right)(r \rightarrow +\infty), \quad E_r(r, \theta) = O\left(\frac{1}{r^2}\right)(r \rightarrow +\infty), \quad (60)$$

où, pour des raisons de commodité, il est posé  $E_0 = k_0 \eta_0 I_0 / 4\pi$ .  $f$  représente le diagramme de rayonnement en champ lointain associé à la structure.

#### 4.3.2.4 Condition de bord

D'un point de vue physique, la puissance contenue dans tout volume  $V_0$  de l'espace est finie :

$$\iiint_{V_0} \left[ \varepsilon |\vec{E}(r, \theta)|^2 + \mu |\vec{H}(r, \theta)|^2 \right] dV(r, \theta) < +\infty. \quad (61)$$

Comme cette relation doit être vérifiée même si  $V_0$  contient un disque métallique parfaitement conducteur, cela détermine le degré de la singularité que le champ peut avoir :

$$E_r = E_\theta = O\left(\frac{1}{\sqrt{\rho}}\right)(\rho \rightarrow 0), \quad H_\phi = O\left(\sqrt{\rho}\right)(\rho \rightarrow 0), \quad (62)$$

où  $\rho$  représente la distance au bord du disque métallique dans le plan  $(r, \theta)$ . Ceci est la condition de bord.

#### 4.3.2.5 Théorème d'unicité

Sous les conditions (57) à (62) associées aux équations de Maxwell, le théorème d'unicité affirme que le problème décrit par la géométrie décrite en **Figure 17** et alimentée par la distribution (56) possède une et une seule solution. Ainsi, tout le problème est maintenant d'approcher le plus possible, en termes de calcul numérique, cette solution.

### 4.3.3 Expression du champ et relations fondamentales

L'ensemble des relations précédentes est exprimé dans un cadre extrêmement générale inexploitable directement. Par conséquent, et compte tenu de la géométrie sphérique de la structure étudiée, il apparaît complètement naturel de travailler dans le cadre de la théorie développée dans le chapitre précédent, à savoir, les fonctions modales sphériques vectorielles.

#### 4.3.3.1 Coefficients associés à la source

Les coefficients sphériques associés à la distribution de courants primaires (56) s'expriment, via la relation (24) du chapitre 3 :

$$a_m^{i\infty} = 0, b_m^{i\infty} = 0, b_{0n}^{i\infty}(r) = E_0 \beta_n^{is}(r), n = 1, \dots, +\infty, m = 0, 1, \dots, +\infty, s = 1, 4, \sigma = e, o, \quad (63)$$

$$\text{avec } \beta_n^{i1}(r) = \int_0^r \frac{Z_n^4(kz)}{z} g(z) dz, \quad \beta_n^{i4}(r) = \int_r^{+\infty} \frac{Z_n^1(kz)}{z} g(z) dz.$$

Ici,  $k$  est une fonction de la position radiale  $r$ . En effet, lorsque  $r_p < r < r_{p+1}$ ,  $k$  prend la valeur  $k_{p+1}$ . c'est-à-dire,  $k$  prend la valeur du nombre d'onde associé à la coquille où s'effectue le calcul.

#### 4.3.3.2 Expression générale du champ électromagnétique

Les disques sphériques métalliques représentent des éléments perturbateurs qui produisent une réponse à une excitation donnée. Comme, par ailleurs, le champ associé à la source, les bords de la structure métallique et les conditions de rayonnement sont indépendants de  $\varphi$ , aucune autre composante que celles produites par le champ primaire, i.e. le champ incident, n'apparaît dans le champ secondaire, i.e. le champ diffusé. Par voie de conséquence, les coefficients  $b_{0n}^{os}$  sont les seuls coefficients modaux sphériques non nuls et ce dans chaque région  $q = 1, \dots, N$ . Par ailleurs, l'indice  $m = 0$  et l'exposant  $e$  sont dès à présent supprimés et l'exposant  $q$  est ajouté afin d'alléger les notations. En introduisant les coefficients sphériques normalisés  $\beta_n^{sq} = b_n^{sq} / E_0$ , le champ électromagnétique secondaire devient :

$$\vec{E}^q = E_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1,4} \beta_n^{sq} \vec{N}_{0n}^{es}, \quad \vec{H}^q = j \frac{E_0}{\eta_0} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{s=1,4} \beta_n^{sq} \vec{M}_{0n}^{es}, \quad (64)$$

où  $q = 1, \dots, N+1$  dénote le numéro de la couche considérée.

#### 4.3.3.3 Équations de séries duales

En appliquant les conditions duales données par (58) et (59) à l'expression générale du champ électromagnétique (64), ressortent les équations matricielles suivantes :

$$\forall n \geq 1, \forall \theta \in [0, \pi], K_n^{T1} \cdot X_n^1 - K_n^{i1} \cdot X_n^{i1} = K_n^{T4} \cdot X_n^4 - K_n^{i4} \cdot X_n^{i4}, \quad (65)$$

$$0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \sum_{n=1}^{+\infty} (K_n^{D1} \cdot X_n^1 + K_n^{i4} \cdot X_n^{i4} + K_n^{P4} \cdot X_n^4) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0_N, \quad (66)$$

$$\Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \sum_{n=1}^{+\infty} (Z_n^{T1} \cdot X_n^1 - Z_n^{i1} \cdot X_n^{i1} - Z_n^{T4} \cdot X_n^4 + Z_n^{i4} \cdot X_n^{i4}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0_N, \quad (67)$$

où les vecteurs et matrices sont définis comme suit :

$$X_n^1 = \begin{bmatrix} \beta_n^{11} \\ \vdots \\ \beta_n^{1N} \end{bmatrix}, X_n^4 = \begin{bmatrix} \beta_n^{42} \\ \vdots \\ \beta_n^{4N+1} \end{bmatrix}, X_n^{i1} = \begin{bmatrix} \beta_n^{i12} \\ \vdots \\ \beta_n^{i1N+1} \end{bmatrix}, X_n^{i4} = \begin{bmatrix} \beta_n^{i41} \\ \vdots \\ \beta_n^{i4N} \end{bmatrix}, 1_N = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, 0_N = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \Theta_N = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}, \quad (68)$$

et  $\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2$ ,

$$\begin{aligned} (K_n^{D1})_{p,q} &= K_n^1(k_p r_p) \cdot \delta_{p,q}, & (K_n^{P1})_{p,q} &= K_n^1(k_{p+1} r_p) \cdot \delta_{p+1,q}, & K_n^{T1} &= K_n^{D1} - K_n^{P1}, \\ (K_n^{D4})_{p,q} &= K_n^4(k_{p+1} r_p) \cdot \delta_{p,q}, & (K_n^{P4})_{p,q} &= K_n^4(k_p r_p) \cdot \delta_{p-1,q}, & K_n^{T4} &= K_n^{D4} - K_n^{P4}, \\ (K_n^{i1})_{p,q} &= K_n^1(k_{p+1} r_p) \cdot \delta_{p,q}, & (K_n^{i4})_{p,q} &= K_n^4(k_p r_p) \cdot \delta_{p,q}, \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} (Z_n^{D1})_{p,q} &= Z_n^1(k_p r_p) \cdot \delta_{p,q} / \eta_p, & (Z_n^{P1})_{p,q} &= Z_n^1(k_{p+1} r_p) \cdot \delta_{p+1,q} / \eta_{p+1}, & Z_n^{T1} &= Z_n^{D1} - Z_n^{P1}; \\ (Z_n^{D4})_{p,q} &= Z_n^4(k_{p+1} r_p) \cdot \delta_{p,q} / \eta_{p+1}, & (Z_n^{P4})_{p,q} &= Z_n^4(k_p r_p) \cdot \delta_{p-1,q} / \eta_p, & Z_n^{T4} &= Z_n^{D4} - Z_n^{P4}; \\ (Z_n^{i1})_{p,q} &= Z_n^1(k_{p+1} r_p) \cdot \delta_{p,q} / \eta_{p+1}, & (Z_n^{i4})_{p,q} &= Z_n^4(k_p r_p) \cdot \delta_{p,q} / \eta_p. \end{aligned}$$

Par voie de conséquence, le fait de définir les matrices  $C_n$  décrivant la structure géométrique :

$$\begin{aligned} C_n^K &= K_n^{D4} + K_n^{P1} \cdot K_n^{T1^{-1}} \cdot K_n^{T4}, C_n^{iK4} &= K_n^{P1} \cdot K_n^{T1^{-1}} \cdot K_n^{i4}, C_n^{iK1} &= -\left(I_N + K_n^{P1} \cdot K_n^{T1^{-1}}\right) \cdot K_n^{i1}, \\ C_n^Z &= Z_n^{T4} - Z_n^{T1} \cdot K_n^{T1^{-1}} \cdot K_n^{T4}, C_n^{iZ4} &= Z_n^{i4} - Z_n^{T1} \cdot K_n^{T1^{-1}} \cdot K_n^{i4}, C_n^{iZ1} &= Z_n^{T1} \cdot K_n^{T1^{-1}} \cdot K_n^{i1} - Z_n^{i1}, \end{aligned} \quad (70)$$

permet d'aboutir aux deux équations matricielles de séries duales suivantes :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi], \\ \sum_{n=1}^{+\infty} (C_n^K \cdot X_n^4 - C_n^{iK1} \cdot X_n^{i1} - C_n^{iK4} \cdot X_n^{i4}) \cdot P_n^1(\cos \theta) &= 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (C_n^Z \cdot X_n^4 - C_n^{iZ1} \cdot X_n^{i1} - C_n^{iZ4} \cdot X_n^{i4}) \cdot P_n^1(\cos \theta) &= 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \quad (72)$$

$$\text{et } \forall n = 1, \dots, +\infty, X_n^1 = K_n^{T1^{-1}} \cdot (K_n^{T4} \cdot X_n^4 - K_n^{i4} \cdot X_n^{i4} + K_n^{i1} \cdot X_n^{i1}). \quad (73)$$

#### 4.3.3.4 Classe d'expansion des coefficients sphériques

L'association de (61) à (64) en utilisant les relations d'orthogonalité données en annexes, et appliquée aux volumes intérieurs  $r_p < r < r_{p+1}$  ou  $r_N < r < r_c$ , aboutit aux inégalités définissant la classe d'expansion des coefficients sphériques :

$$\forall p = 1, \dots, N, \sum_{n=1}^{+\infty} |n \cdot K_n^4(k_p r_p)|^2 |\beta_n^{4p}|^2 < +\infty, \quad (74)$$

## 4.3.4 Régularisation

Comme il est expliqué en introduction, les équations duales (71) et (72) ne sont pas directement inversibles. Il est alors nécessaire de suivre la méthode de régularisation du système afin de pouvoir en extraire les inconnues. Contrairement au cas précédent, les changements de variables ne sont pas triviaux. Ainsi, il apparaît nécessaire d'effectuer un certain travail préliminaire sur les matrices définies en (69) et (70). Alors seulement ensuite, le schéma de régularisation de la MAR pourra s'appliquer.

#### 4.3.4.1 Evolution asymptotique des matrices de structure géométrique

La principale difficulté de cette section réside dans l'aspect matriciel des grandeurs utilisées. En effet, la structure étudiée étant constituée d'un nombre  $N$  de coquilles arbitraire et indéfini, il devient nécessaire

d'inverser analytiquement des matrices dans un cadre très général. Malgré tout, les matrices dites de structure géométrique utilisées possèdent suffisamment de propriétés de symétrie qui permettent de trouver leur inverse.

La première remarque provient du fait que les matrices mises en jeux sont triangulaires supérieures et/ou inférieures. Soit donc  $A$  la matrice supérieure inversible de dimension  $N \times N$  définie comme suit :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & a_{1N} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{NN} \end{bmatrix}. \quad (75)$$

Comme  $A$  est inversible, son déterminant est non nul :

$$|A| = \prod_{p=1}^N a_{pp} \neq 0, \text{ et donc } \forall p = 1, \dots, N, a_{pp} \neq 0. \quad (76)$$

Par ailleurs, l'ensemble des matrices supérieures inversibles associé à loi de multiplication habituelle forme un groupe. Ainsi, l'inverse de  $A$ , qui est dès à présent noté  $B$ , est également une matrice triangulaire supérieure inversible. D'où sa structure :

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & b_{1N} \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & b_{NN} \end{bmatrix}. \quad (77)$$

Comme  $AB = BA = I_N$ , il ressort immédiatement :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \sum_{n=1}^N a_{pn} \cdot b_{nq} = \delta_{p,q}. \quad (78)$$

D'où :

$$\forall p = 1, \dots, N, b_{pp} = 1/a_{pp} \text{ et } \forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, b_{pq} = \frac{1}{a_{pp}} \left( \delta_{p,q} - \sum_{n=p+1}^q a_{pn} \cdot b_{nq} \right). \quad (79)$$

Ainsi, la détermination de  $B$  s'effectue de façon décroissante en commençant à  $p = N$  jusqu'à  $p = 1$ , et pour chaque valeur de  $p$ , il faut effectuer un balayage sur  $q$  de  $p$  à  $N$ .

Cette technique permet d'aboutir à l'expression des éléments composant l'ensemble des familles de matrices de structure. Leur expression est donnée en annexes. Afin de pouvoir appliquer la technique de régularisation, il est nécessaire d'étudier l'évolution asymptotique de la famille de matrices  $\{C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}}\}_{n=1, \dots, +\infty}$ . En associant

l'expression de ce produit donnée en annexes avec les expressions asymptotiques des fonctions sphériques de Bessel, il ressort :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \quad (80)$$

si  $q < p-1$  ou  $q > p+1$ ,

$$\left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = 0,$$

si  $q = p-1$ ,

$$\left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = \frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{k_p r_{p-1}}{\eta_p} \left( \frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{n+1} (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty),$$

si  $q = p=1$ ,

$$\left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = \frac{-1}{n+1} \frac{k_{p+1} r_p}{\eta_{p+1}} \left( 1 + \frac{n}{n+1} \left( \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} + \left( 1 - \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} \right) \left( \frac{r_p}{r_{p+1}} \right)^{2n+1} \right) \right) (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty),$$

si  $1 < q = p < N$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = & -\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{k_p r_{p-1}}{\eta_p} \left( \frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{2n} (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty) + \dots \\ & \dots \frac{-1}{n+1} \frac{k_{p+1} r_p}{\eta_{p+1}} \left( 1 + \frac{n}{n+1} \left( \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} + \left( 1 - \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} \right) \left( \frac{r_p}{r_{p+1}} \right)^{2n+1} \right) \right) (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

si  $q = p = N$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = & -\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{k_p r_{p-1}}{\eta_p} \left( \frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{2n} (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty) + \dots \\ & \dots \frac{-1}{n} \frac{k_{p+1} r_p}{\eta_{p+1}} \left( 1 + \frac{n}{n+1} \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} \right) (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

si  $q = p+1$ ,

$$\left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = -\frac{2n+1}{n(n+1)} \frac{k_{p+1} r_p}{\eta_{p+1}} \left( \frac{r_p}{r_{p+1}} \right)^{n+1} (1 + O_{\frac{1}{n}})(n \rightarrow +\infty),$$

#### 4.3.4.2 Application de la MAR

Le schéma désormais classique de la MAR impose que soient posées les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \\ f_n^K \cdot \Omega \cdot (I_N - G_n) \cdot Y_n = C_n^K \cdot X_n^4, \text{ pour } 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \\ f_n^Z \cdot Y_n = C_n^Z \cdot X_n^4, \text{ pour } \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \\ f_n^K \cdot \Omega \cdot Y_n^{iK} = C_n^{iK1} \cdot X_n^{i1} + C_n^{iK4} \cdot X_n^{i4}, \\ f_n^Z \cdot Y_n^{iZ} = C_n^{iZ1} \cdot X_n^{i1} + C_n^{iZ4} \cdot X_n^{i4}. \end{aligned} \quad (81)$$

où les grandeurs introduites doivent vérifier :

$$\Omega \text{ matrice constante et } \forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, (G_n)_{p,q} = O \frac{1}{n} (n \rightarrow +\infty). \quad (82)$$

$I_N$  étant l'opérateur identité. Les nouvelles inconnues sont maintenant décrites par les vecteurs  $Y_n$ . Pour les extraire, il faut au préalable déterminer l'ensemble des nouveaux opérateurs matriciels  $G_n$ ,  $\Omega$ ,  $f^K$  et  $f^Z$ . De ces équations ressort la relation :

$$C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} = \frac{f_n^Z}{f_n^K} \cdot (I_N - G_n)^{-1} \cdot \Omega^{-1}. \quad (83)$$

L'association de (83) aux évolutions asymptotiques (80) et (82) impose les conditions suivantes :

$$\frac{f_n^Z}{f_n^K} = O \frac{1}{n} (n \rightarrow +\infty) \text{ et } \Omega^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f_n^K}{f_n^Z} \cdot C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right). \quad (84)$$

Les équations (71) et (72) deviennent ainsi :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi], \\ \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_n - Y_n^{iK}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \end{aligned} \quad (85)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^Z \cdot (Y_n - Y_n^{iZ}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N. \quad (86)$$

L'intégration de (85) aboutit à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_n - Y_n^{iK}) \cdot P_n(\cos \theta) = A_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \quad (87)$$

où  $A_N$  est un vecteur constant de longueur  $N$ . Par ailleurs, les propriétés des polynômes associés de Legendre permettent d'arriver à la relation suivante :

$$A_N = A_N \cdot 1 = A_N \cdot P_0(\cos \theta), \forall \theta \in [0, \pi]. \quad (88)$$

D'où la nouvelle formulation de (87) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_n - Y_n^{iK}) \cdot P_n(\cos \theta) = A_N \cdot P_0(\cos \theta), 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N. \quad (89)$$

Les relations de Mehler-Dirichlet (31) font aboutir à un couple d'équations matricielles homogènes d'Abel :

$$0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \\ \int_0^\theta \left( \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_n - Y_n^{iK}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \phi - A_N \cos \frac{1}{2} \phi \right) \frac{d\phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \theta}} = 0_N. \quad (90)$$

$$\Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \\ \int_\theta^\pi \left( \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} f_n^Z \cdot (Y_n - Y_n^{iZ}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \phi \right) \frac{\sin \phi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \phi}} d\phi = 0_N. \quad (91)$$

Ces équations sont associées à des noyaux continus de carré sommable. Par conséquent, les fonctions intégrées sont nulles sur les intervalles considérés :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_n - Y_n^{iK}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = A_N \cos \frac{1}{2} \theta, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \quad (92)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} f_n^Z \cdot (Y_n - Y_n^{iZ}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N. \quad (93)$$

Il apparaît donc dès à présent possible de déterminer les expressions des suites de pondérations  $f^K$  et  $f^Z$  en accord avec la condition fixée en (84) :

$$\forall n \geq 1, f_n^K = 1, f_n^Z = \frac{2n+1}{n(n+1)}. \quad (94)$$

Ceci aboutit à l'expression de  $\Omega$  via (80) et (84) :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, (\Omega^{-1})_{p,q} = -\frac{k_{p+1} r_p}{2\eta_{p+1}} \left( 1 + \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} \right) \cdot \delta_{p,q}. \quad (95)$$

De même (74) exprimée avec (81) et (94) donne la classe d'expansion des éléments du nouveau vecteur inconnu  $Y_n$  :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |Y_n|^2 < +\infty. \quad (96)$$

Par ailleurs, les expressions (95) et (94) insérées dans (83) tout en tenant compte de l'évolution asymptotique (80) confirment, sans trop de calculs, l'évolution asymptotique de  $\{G_n\}_{n>0}$  donnée en (82).

Les relations (92) et (93) s'expriment dès à présent comme suit :

$$\forall \theta \in [0, \pi] \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = \begin{cases} A_N \cos \frac{1}{2} \theta + \sum_{n=1}^{+\infty} (G_n \cdot Y_n + Y_n^{iK}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta, & 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} Y_n^{iZ} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N. \end{cases} \quad (97)$$

Il est maintenant nécessaire d'introduire la fonction  $\bar{\bar{f}}$  qui est une fonction généralisée construite à partir de la fonction  $f$  de la manière suivante :

$$\bar{\bar{f}}(\Theta) = \begin{bmatrix} f(\theta_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & f(\theta_N) \end{bmatrix}, \text{ où } \Theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \vdots \\ \theta_N \end{bmatrix}. \quad (98)$$

En multipliant l'équation (97) de part et d'autre par  $\cos((2m+1)\theta/2)$  et en intégrant chaque ligne en  $\theta$  de 0 à  $\pi$ , découle une équation matricielle linéaire pour le vecteur  $Y_m$ . Il s'agit d'une projection du champ électromagnétique sur l'espace de dual de Fourier. L'extraction du vecteur constant  $A$  est réalisée grâce au cas  $m = 0$ . D'où l'équation de matrice infinie :

$$\forall m \geq 1, Y_m = Y_m^{iZ} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{S}}_{mn}(\Theta_N) \cdot (G_n \cdot Y_n + Y_n^{iK} - Y_n^{iZ}), \quad (99)$$

où  $\bar{\bar{S}}$  est définie à partir de (98) et (36).

Tout comme pour le cas de l'antenne sans lentille, les vecteurs inconnus sont dès à présent collectés dans un vecteur colonne  $Z = \{Y_n\}_{n=1}^{+\infty}$  et tout le membre de droite dans le vecteur colonne connu  $B$ , qui contient les caractéristiques de la source. Est de plus introduite la matrice infinie  $A$  de blocks  $N \times N$  composée des éléments décrivant la géométrie de l'antenne imprimée. Dans le cas étudié ici,  $A = \{A^{ps}\}_{p,s=1,\dots,N}$  où les blocks  $A^{ps} = \{A_{mn}^{ps}\}_{m,n=1}^{+\infty}$  sont générés via (99). Ainsi, (99) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$Z + AZ = B. \quad (100)$$

Il est à noter que, comme pour le cas sans lentille, chacun des coefficients du block  $A^{ps}$  est le produit de deux fonctions matricielles :

$$A_{mn}^{ps} = A_{mn}^{ps(2)} \left( \left( \theta_p \right)_{p=1,\dots,N} \right) \cdot A_n^{ps(1)} \left( \left( r_p, k_p, \eta_p \right)_{p=1,\dots,N}, k_0, \eta_0 \right) \quad (101)$$

La seconde s'annule lorsque  $\forall p = 1, \dots, N, k_0 r_p \rightarrow 0$  et  $\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, q > p, r_p / r_q \rightarrow 0$ . Ceci implique que lors de la construction de (99), a été inversée la parti statique du problème associé avec chacun des disques sphériques en espace libre.

Par ailleurs, les évolutions de ces fonctions pour de grands ordres est :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \\ \left( A_n^{ps(1)} \left( (r_p, k_p, \eta_p)_{p=1, \dots, N}, k_0, \eta_0 \right) \right)_{p,q} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow +\infty), \quad (102)$$

$$\left( A_{mn}^{ps(2)} \left( (\theta_r)_{r=1, \dots, N} \right) \right)_{p,q} = O\left(\frac{1}{m-n}\right) (n \rightarrow +\infty), \quad (103)$$

L'introduction de l'espace des suites de carrés sommables  $L_2^N = L_2 \times \dots \times L_2$  permet de voir que  $\|A\|_{L_2^N} < +\infty$ , i.e.  $A$  est compact. De la même manière  $\|B\|_{L_2} < +\infty$ . De cette façon, il est certain que (99) est une équation matricielle de Fredholm de seconde espèce assurant au problème d'être bien posé et inversible dont l'unique solution est donnée par  $X = (I + A)^{-1}B$ . De plus, la solution associée à l'équation tronquée à l'ordre  $M$  est donnée par :

$$X^M = (I_{NM} + A^M)^{-1} \cdot B^M, \quad (104)$$

où chaque block de la matrice  $N \times N A^M$  possède la dimension  $M \times M$ .

La dernière étape nécessaire à la vérification de la condition de bord (61) provient de l'étude, pour de grandes valeurs de  $m$ , des coefficients  $A_{mn}^{ps}$  et  $B_m^p$ . Les relations (36) montrent que ces coefficients évoluent en  $O(m^{-1})$ . Ainsi, (72) et (61) sont complètement satisfaites par la solution de l'équation matricielle (99).

Finalement, l'ensemble des conditions requises en 4.3.2.5 quant à l'existence et l'unicité de la solution du problème est vérifié.

### 4.3.5 Caractéristiques d'antennes

Dans cette section, concernant l'étude de l'association antenne-lentille, il est possible d'exprimer l'ensemble des grandeurs caractérisant les antennes en termes de coefficients régularisées. Malgré tout, il apparaît que ces expressions ne sont pas si simples que pour le cas de l'antenne seule. En effet, le fait d'utiliser des vecteurs de taille correspondant au nombre de couches composant la structure impose qu'un certain nombre d'éléments des matrices et des vecteurs. C'est pourquoi, les expressions des diagrammes de rayonnement en champ lointain, directivité et autres caractéristiques chères aux antennistes, sont obtenues via les formules proposées au chapitre précédent après être retourné aux coefficients sphériques non régularisés.

### 4.3.6 Résultats numériques

La première section de ce chapitre montre sans conteste la puissance de la méthode de régularisation proposée. Ainsi, l'ensemble des grandeurs illustrées dans cette précédente section n'est pas repris ici. Seules celles

caractérisant réellement les antennes sont utilisées dans la présente section. Ainsi, les propriétés de focalisation des diagrammes et la directivité des structures lentille – antenne circulaire imprimées sur sphère sont développées.

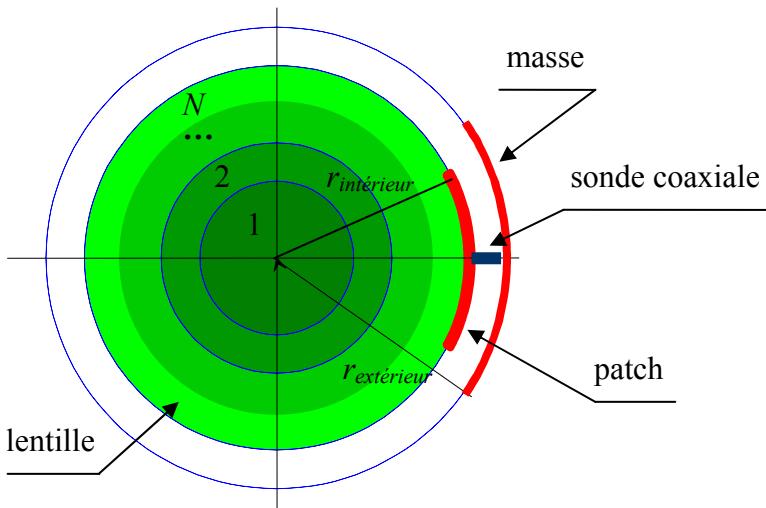
A cet effet, la **Figure 18** montre l'influence de la présence de la lentille sur la fréquence de résonance de la structure. La lentille utilisée est du type Lüneburg discrète uniforme. C'est-à-dire que sa distribution d'indice suit la loi suivante :

$$\forall i = 1, \dots, N, \theta_i = 0, r_i = R_{\text{lentille}} \cdot \frac{i}{N}, \epsilon_{ri} = 2 - \left( \frac{2i-1}{2N} \right)^2, \mu_{ri} = 1.0. \quad (105)$$

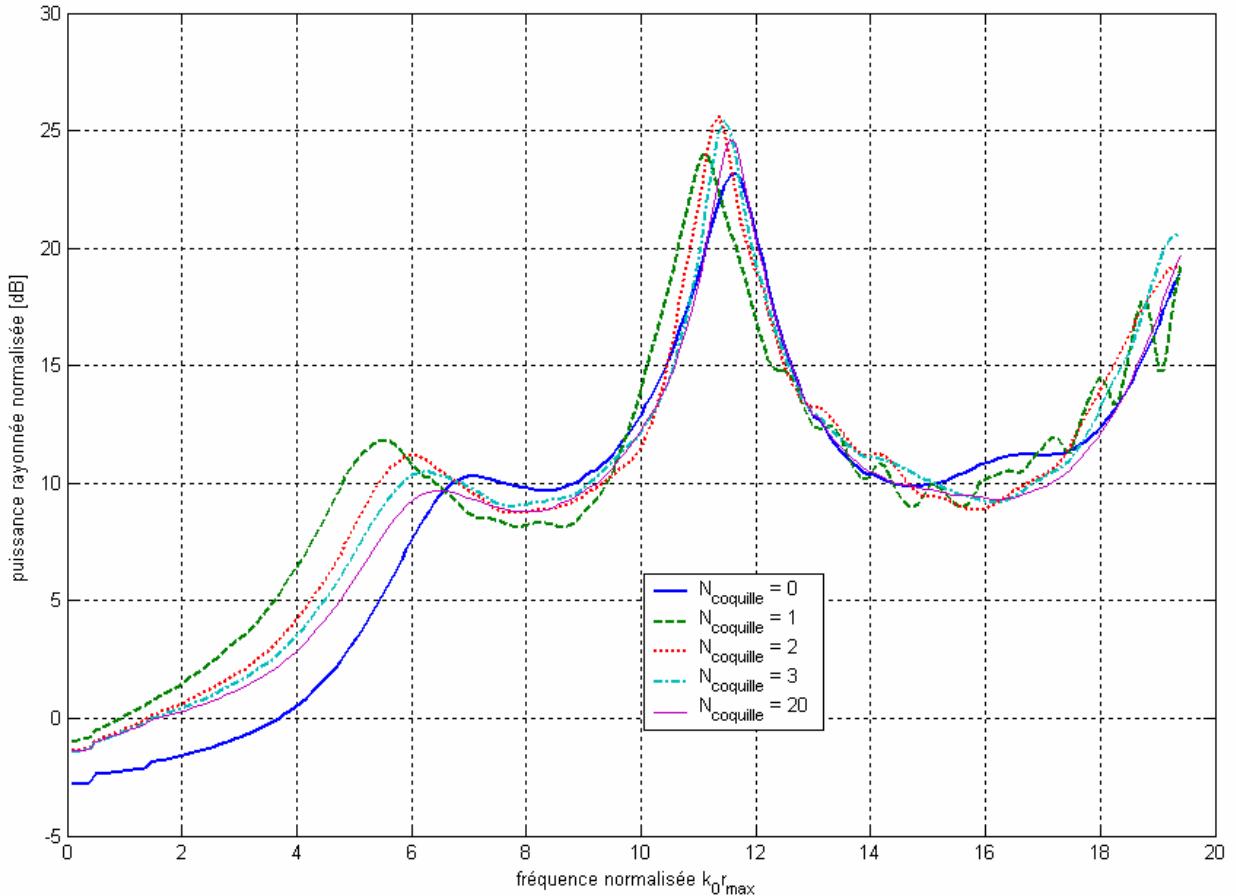
L'antenne imprimée est définie de la façon suivante :

$$\theta_{\text{intérieur}} = 18.0^\circ, \theta_{\text{extérieur}} = 36.0^\circ, \frac{r_{\text{intérieur}}}{r_{\text{extérieur}}} = 97\%, \epsilon_r = \mu_r = 1.0, r_{\text{intérieur}} = R_{\text{lentille}}. \quad (106)$$

La structure étudiée est alors :

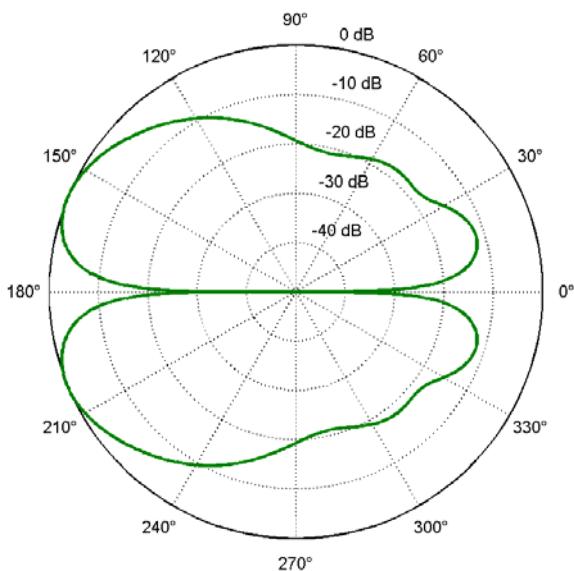


La première remarque ressortant de la **Figure 18** concerne le décalage en fréquence créé par la présence de la lentille ( $N > 0$ ). En effet, la lentille est placée dans la zone réactive de l'antenne. Ainsi, la couche diélectrique externe de la lentille a tendance à désadapter l'antenne. Ceci explique le fait que lorsque le nombre de coquilles croît, la permittivité de la coquille externe se rapproche de celle de l'espace libre et repositionne la résonance de la structure. Par ailleurs, le cas où la lentille est homogène,  $N = 1$ , des ondulations apparaissent à partir de  $k_0 r_{max} = 12.5$ . Ces ondulations apparaissent à de plus hautes fréquences pour les autres cas. Cela provient du fait que l'épaisseur de la coquille, pour le cas de la lentille homogène, est très importante. Du coup, la résonance associée a lieu en « basses fréquences ». Alors que dans les cas où le nombre de coquilles augmente, l'épaisseur des coquilles diminue et les résonances associées à ces coquilles apparaissent à de plus hautes fréquences.

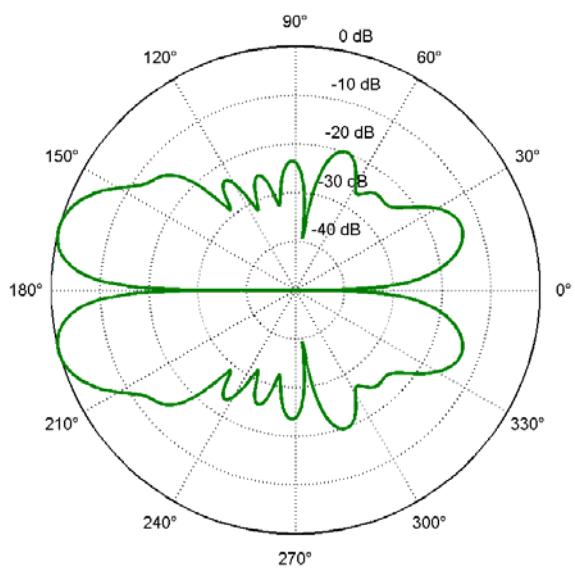


**Figure 18** Influence du nombre de coquilles composant la lentille discrète uniforme de Lüneburg sur la fréquence de résonance.

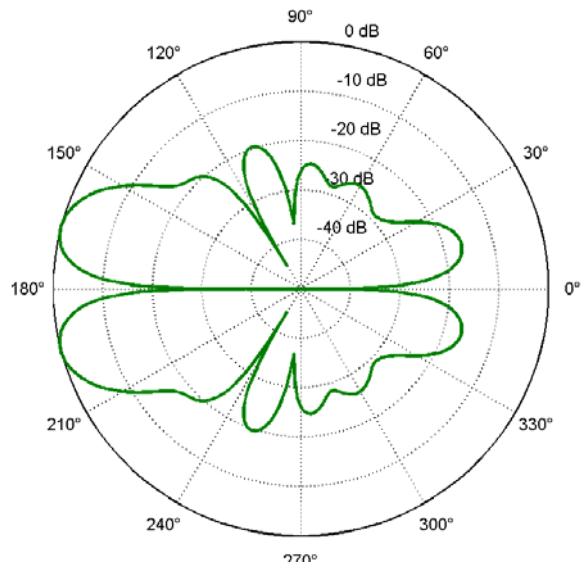
Par ailleurs, le diagramme de rayonnement est aussi affecté par le nombre de coquilles, comme le montre la **Figure 19**. Ainsi, plus la discréttisation est fine, i.e.  $N$  grand, plus le niveau des lobes secondaires diminue. De plus, il ressort que la lentille agit comme une pompe. En effet, l'énergie rayonnée sur les parties latérales est « pompée » pour être re-rayonnée dans la direction axiale. Enfin, les diagrammes de rayonnement en champ lointain sont proches pour les cas de lentilles composées de trois coquilles ou plus.



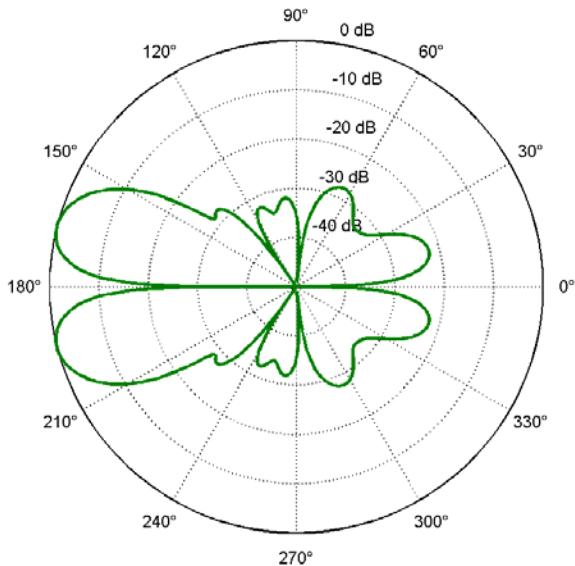
(a)



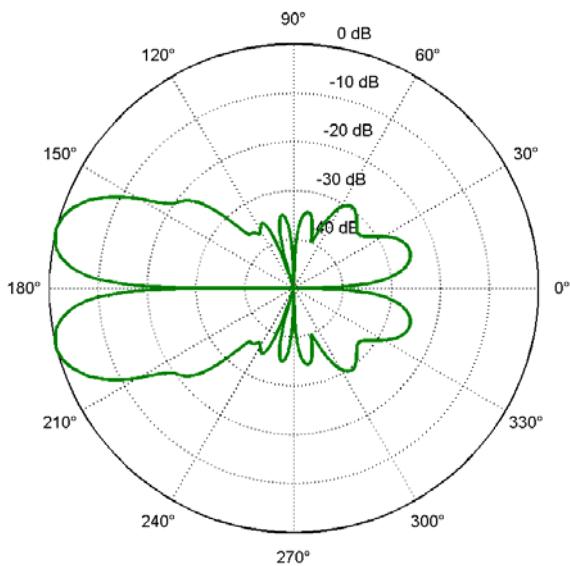
(b)



(c)



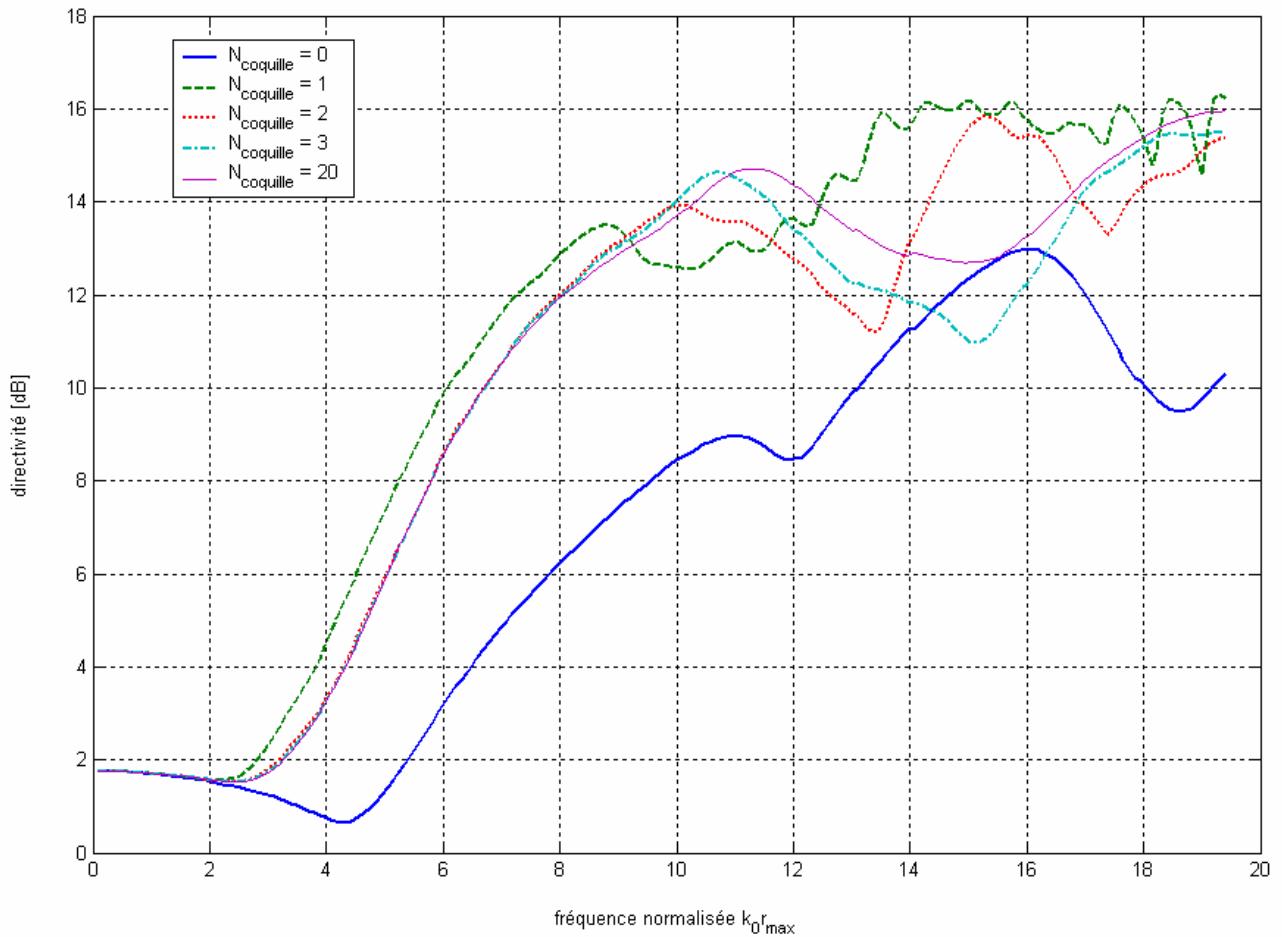
(d)



(e)

**Figure 19** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'association de l'antenne imprimée décrite par (106) et d'une lentille composée de  $N$  coquilles décrite en (105) aux fréquences de résonance obtenues via la **Figure 18**. (a)  $N = 0$ ,  $k_0 r_{max} = 11.65$ . (b)  $N = 1$ ,  $k_0 r_{max} = 11.10$ . (c)  $N = 2$ ,  $k_0 r_{max} = 11.35$ . (d)  $N = 3$ ,  $k_0 r_{max} = 11.45$ . (e)  $N = 20$ ,  $k_0 r_{max} = 11.56$ .

Par ailleurs, l'effet du nombre de coquille composant la lentille influence la directivité de la structure, comme le montre la **Figure 20**. Il en ressort que la lentille améliore fortement la directivité de l'antenne. Ceci était prévisible par nature de la lentille. Par ailleurs, au-delà de trois coquilles, l'accroissement du nombre de coquilles composant la lentille n'apporte que peu d'amélioration. De plus, les ondulations créées par le substrat apparaissent de manière similaire au cas de la puissance rayonnée de la **Figure 18**. Il s'agit du même phénomène.

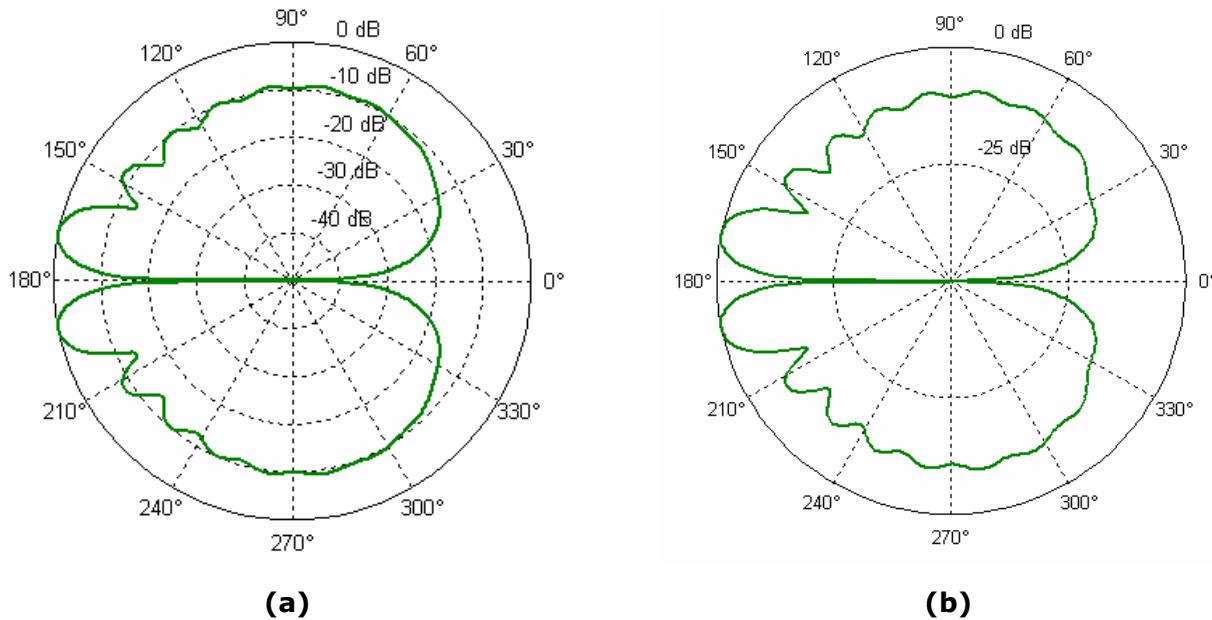


**Figure 20** Directivité de l'association de l'antenne imprimée décrite par (106) et d'une lentille composée de  $N$  décrite en (105).

Afin de vérifier le bien fondé de ces prédictions numériques, un certain nombre de validation est effectué.

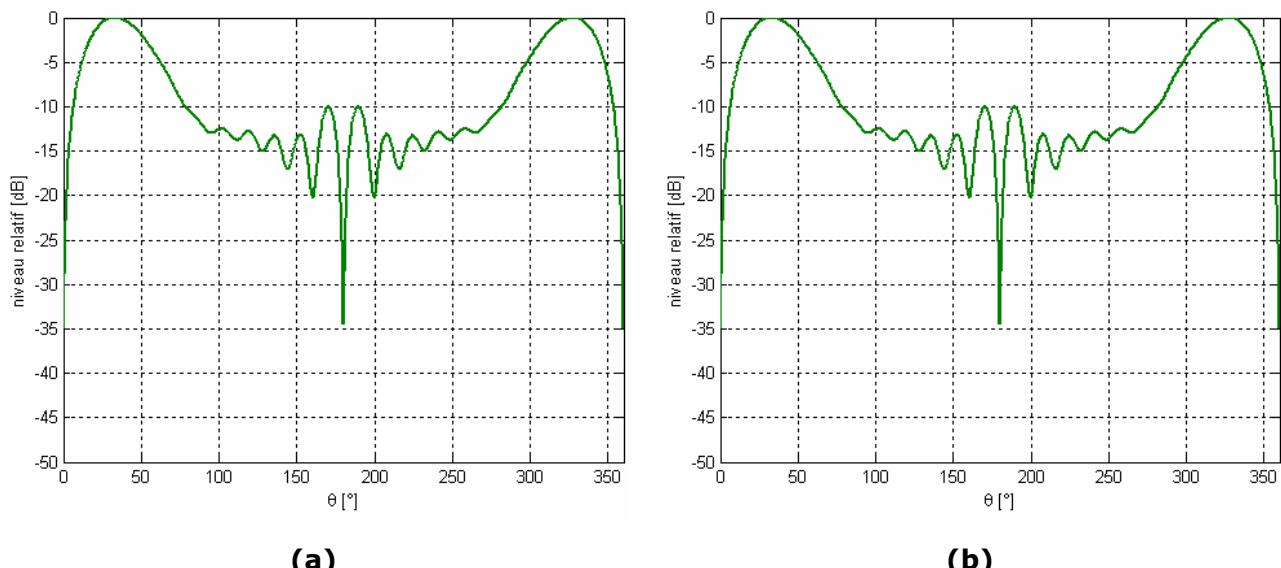
#### 4.3.7 Validations

La première validation concerne la comparaison de cette technique avec celle présentée dans le chapitre précédent pour un dipôle électrique radial placé en périphérie d'une lentille discrète de Lüneburg composée de 20 coquilles à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 11.35$ . Les résultats obtenus sont en excellent accord.



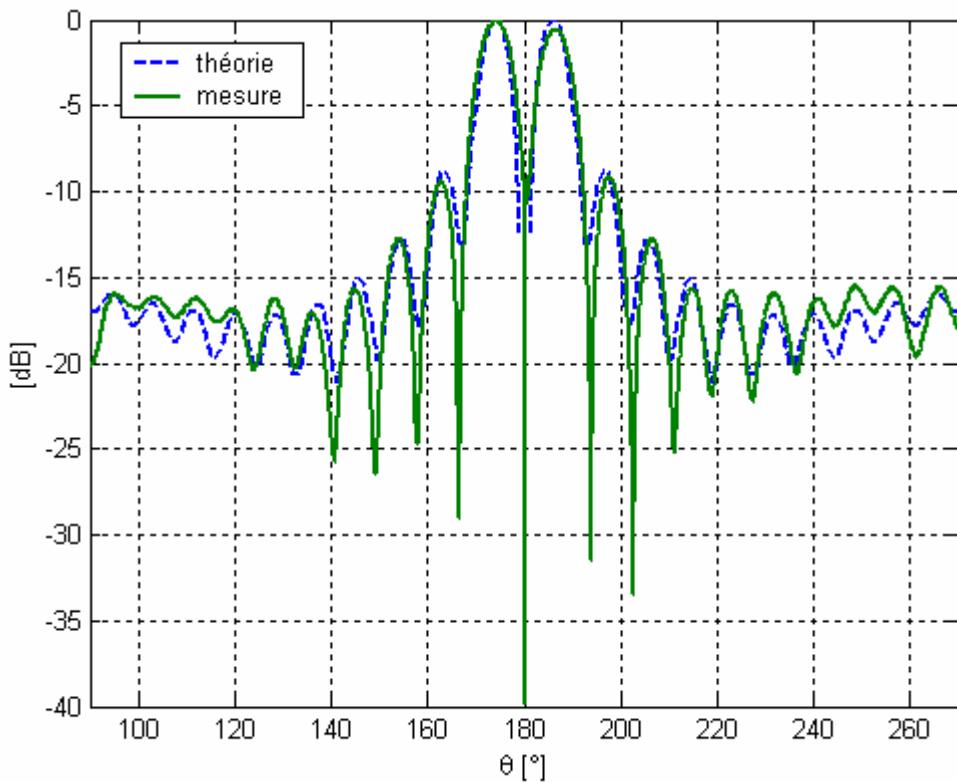
**Figure 21** Comparaison des résultats obtenus, via deux méthodes, de l'association d'un lentille composée de 20 coquilles et d'un dipôle électrique radial à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 11.35$ . (a) Régularisation analytique. (b) Technique développée au chapitre 3.

La seconde validation consiste en la simulation de l'antenne circulaire imprimée sur sphère décrite dans la section précédente. Ces paramètres sont, pour mémoire,  $\theta_1 = 180.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\epsilon_{r1} = \epsilon_{r2} = 1.00$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.30$ . La fréquence normalisée est  $k_0 r_{max} = 10.00$ . Les résultats obtenus sont rigoureusement identiques.



**Figure 22** Comparaison des résultats obtenus, via deux méthodes, à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 10.00$ , de l'antenne dont les paramètres sont  $\theta_1 = 180.0^\circ$ ,  $\theta_2 = 18.0^\circ$ ,  $r_1/r_2 = 0.97$ ,  $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1.00$ ,  $\varepsilon_{r2} = 1.30$ . (a) Régularisation analytique développée en 4.3. (b) Régularisation analytique développée en 4.2.

La troisième et dernière validation confronte la théorie à la pratique. Pour se faire, la lentille utilisée est celle commercialisée par la société Emerson & Cuming sous la référence Eccostok Luneberg lens-P16© de 40cm de diamètre. Sous la demande d'Emerson & Cuming, les caractéristiques de cette lentille ne sont pas divulguées. Ainsi, le lecteur est invité à prendre directement contact avec Emerson & Cuming pour toute information complémentaire concernant la lentille. La comparaison des diagrammes de rayonnement est donnée en **Figure 23**. Les prévisions de la théorie sont en excellent accord avec la mesure. Malgré tout, une remarque quelque peu surprenante apparaît : les creux mesurés sont plus prononcés que ceux de la théorie. En effet, il est coutume d'attribuer à la mesure un effet de lissage quant aux variations brusques prévues par les simulations. Or ici, le phénomène contraire se produit. Aucune justification évidente ne permet d'expliquer cela.



**Figure 23** Comparaison théorie – mesure du diagramme de rayonnement en champ lointain d'une antenne patch alimentée par sonde centrée et placée sur la lentille Eccostok Luneberg lens-P16©. Les paramètres utilisée sont :  $k_0 r_{max} = 20.94$  ( $f = 5.0\text{GHz}$ ),  $r_{int}/r_{ext} = 99\%$ ,  $\theta_{ext} = 2\theta_{int} = 4.0^\circ$ . La mesure a été effectuée au sein de l'IETR.

### 4.3.8 Conclusion

Le fait d'associer une lentille sphérique stratifiée complique la résolution du problème en utilisant la régularisation analytique : l'outil de travail est matriciel et de dimension dépendant du nombre de coquilles composant la structure. Malgré tout, une inversion analytique des matrices est possible, ce qui rend le calcul d'autant plus rapide et d'autant plus précis. La justesse des résultats obtenus montre que cette technique est fiable.

Malgré tout, l'alimentation par sonde centrée n'est pas adaptée aux lentilles, sauf peut être dans le cas d'utilisation de localisation radar nécessitant un zéro dans l'axe. Ainsi, il apparaît nécessaire de développer une théorie basée sur les antennes alimentées par sonde décentrée.

## 4.4 Antenne alimentée par sonde décentrée et lentille sphérique

Le principal avantage d'une antenne alimentée par sonde décentrée sur une antenne alimentée par sonde centrée réside dans son maximum d'énergie rayonnée dans l'axe. Ainsi, une antenne alimentée par sonde décentrée convient particulièrement pour illuminer une lentille.

La géométrie est identique à celle donnée en **Figure 17**.

### 4.4.1 Modélisation électromagnétique

La modélisation électromagnétique de la structure est identique à celle étudiée dans la section précédente, à ceci près que la distribution de courant primaire devient :

$$\vec{J}^e(r, \theta, \varphi) = \frac{I_o}{r^2 \sin \theta} \sum_{p=1}^N g_p(r) \delta(\theta - \theta_p^i) \delta(\varphi - \varphi_p^i) \hat{r} \text{ et } \vec{J}^m(r, \theta, \varphi) = \vec{0}. \quad (107)$$

Les fonctions  $g_p$  correspondent aux pondérations radiales des sondes coaxiales dans chaque coquille composant la structure. Différentes sources peuvent alors être modélisées.

Les conditions duales, de rayonnement et de bord, données de (57) à (62), sont identiques. Cela permet d'appliquer le théorème d'unicité de la même façon.

### 4.4.2 Expression du champ et relations fondamentales

Tout comme précédemment, le cadre de travail concerne les fonctions modales sphériques vectorielles.

#### 4.4.2.1 Coefficients associés à la source

Les coefficients sphériques associés à la distribution de courants primaires (107) s'expriment, via la relation (24) du chapitre 3 :

$$a^{i\sigma}_{mn} = 0, b^{i\sigma}_{mn}(r) = E_0 \beta_{mn}^{i\sigma}(r), n = 1, \dots, +\infty, m = 0, 1, \dots, +\infty, s = 1, 4, \sigma = e, o, \quad (108)$$

$$\text{avec } \beta_{mn}^{i\sigma 1}(r) = 2 \frac{c_{mn}}{e_m} \sum_{p=1}^N t_{mn}^{\bar{\sigma} 3}(\theta_p^i) f_m^\sigma(\phi_p^i) \int_0^r \frac{Z_n^4(kz)}{z} g_p(z) dz,$$

$$\beta_{mn}^{i\sigma 4}(r) = 2 \frac{c_{mn}}{e_m} \sum_{p=1}^N t_{mn}^{\bar{\sigma} 3}(\theta_p^i) f_m^\sigma(\phi_p^i) \int_r^{+\infty} \frac{Z_n^1(kz)}{z} g_p(z) dz.$$

Ici aussi,  $k$  est une fonction de la position radiale  $r$ . En effet, lorsque  $r_p < r < r_{p+1}$ ,  $k$  prend la valeur  $k_{p+1}$ . c'est-à-dire,  $k$  prend la valeur du nombre d'onde associé à la coquille où s'effectue le calcul. De plus, il est posé  $E_0 = k_0 \eta_0 I_0 / 4\pi$ .

#### 4.4.2.2 Expression générale du champ électromagnétique

Les disques sphériques métalliques représentent des éléments perturbateurs qui produisent une réponse à une excitation donnée. Comme, par ailleurs, les bords de la structure métallique et les conditions de rayonnement sont indépendants de  $\varphi$ , aucune autre composante que celles produites par le champ primaire, i.e. le champ incident, n'apparaît dans le champ secondaire, i.e. le champ diffusé. Par voie de conséquence, les coefficients  $b_{mn}^{os}$  sont les seuls coefficients modaux sphériques non nuls et ce dans chaque région  $q = 1, \dots, N$ . Par ailleurs, l'exposant  $q$  est ajouté afin d'alléger les notations. En introduisant les coefficients sphériques normalisés  $\beta_{mn}^{sq} = b_{mn}^{sq} / E_0$ , le champ électromagnétique secondaire devient :

$$\vec{E}^q = E_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \beta_{mn}^{sq} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}}, \quad \vec{H}^q = j \frac{E_0}{\eta_q} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \beta_{mn}^{sq} \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}}, \quad (109)$$

où  $q = 1, \dots, N+1$  dénote le numéro de la couche considérée.

#### 4.4.2.3 Équations de séries duales

En appliquant les conditions duales à l'expression générale du champ électromagnétique (109), ressortent les équations matricielles suivantes :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall m = 0, \dots, +\infty, \forall \sigma = e, o,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (C_n^K \cdot X_{mn}^{\sigma 4} - C_n^{iK1} \cdot X_{mn}^{i\sigma 1} - C_n^{iK4} \cdot X_{mn}^{i\sigma 4}) \cdot \begin{cases} m \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \end{cases} = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \quad (110)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (C_n^Z \cdot X_{mn}^{\sigma 4} - C_n^{iZ1} \cdot X_{mn}^{i\sigma 1} - C_n^{iZ4} \cdot X_{mn}^{i\sigma 4}) \cdot \begin{cases} m \cdot P_n^m(\cos \theta) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos \theta) \end{cases} = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \quad (111)$$

$$\forall n = 1, \dots, +\infty, X_{mn}^{\sigma 1} = K_n^{T1-1} \cdot (K_n^{T4} \cdot X_{mn}^{\sigma 4} - K_n^{i4} \cdot X_{mn}^{i\sigma 4} + K_n^{i1} \cdot X_{mn}^{i\sigma 1}). \quad (112)$$

où les vecteurs sont définis comme suit :

$$X_{mn}^{\sigma 1} = \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{\sigma 11} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{\sigma 1N} \end{bmatrix}, \quad X_{mn}^{\sigma 4} = \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{\sigma 42} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{\sigma 4N+1} \end{bmatrix}, \quad X_{mn}^{i\sigma 1} = \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{i\sigma 12} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{i\sigma 1N+1} \end{bmatrix}, \quad X_{mn}^{i\sigma 4} = \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{i\sigma 41} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{i\sigma 4N} \end{bmatrix}. \quad (113)$$

Toutes les autres grandeurs sont absolument identiques à celle définies dans le cas de la sonde centrée.

#### 4.4.2.4 Classe d'expansion des coefficients sphériques

L'association de l'ensemble des relations précédentes en utilisant les relations d'orthogonalité données en annexes, et appliquée aux volumes intérieurs  $r_p < r < r_{p+1}$  ou  $r_N < r < r_c$ , aboutit aux inégalités définissant la classe d'expansion des coefficients sphériques :

$$\forall p = 1, \dots, N, \forall m \geq 0, \forall \sigma = e, o, \sum_{n=1}^{+\infty} |n \cdot K_n^4 (k_p r_p)^2 | \beta_{mn}^{\sigma 4p} |^2 < +\infty. \quad (114)$$

### 4.4.3 Régularisation

Les matrices structure géométrique mises en jeux étant identiques au cas de la sonde centrée, la technique de régularisation suit alors le même schéma.

#### 4.4.3.1 Application de la MAR

Le schéma désormais classique de la MAR impose que soient posées les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \forall m = 0, \dots, n, \forall \sigma = e, o, \\ f_{mn}^K \cdot \Omega_m \cdot (I_N - G_n) \cdot Y_{mn}^\sigma = C_n^K \cdot X_{mn}^{\sigma 4}, \text{ pour } 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \\ f_{mn}^Z \cdot Y_{mn}^\sigma = C_n^Z \cdot X_{mn}^{\omega 4}, \text{ pour } \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \\ f_{mn}^K \cdot \Omega_m \cdot Y_{mn}^{iK\sigma} = C_n^{iK1} \cdot X_{mn}^{i\sigma 1} + C_n^{iK4} \cdot X_{mn}^{i\sigma 4}, \\ f_{mn}^Z \cdot Y_{mn}^{iZ\sigma} = C_n^{iZ1} \cdot X_{mn}^{i\sigma 1} + C_n^{iZ4} \cdot X_{mn}^{i\sigma 4}. \end{aligned} \quad (115)$$

où les grandeurs introduites doivent vérifier :

$$\forall m \geq 0, \Omega_m \text{ matrice constante et } \forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, (G_n)_{p,q} = O_n^{\frac{1}{n}} (n \rightarrow +\infty). \quad (116)$$

$I_N$  étant l'opérateur identité. De ces équations ressort la relation :

$$\forall n \geq 1, \forall m = 0, \dots, n, C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} = \frac{f_{mn}^Z}{f_{mn}^K} \cdot (I_N - G_n)^{-1} \cdot \Omega_m^{-1}. \quad (117)$$

Ceci permet d'aboutir à :

$$\forall m \geq 0, \frac{f_{mn}^Z}{f_{mn}^K} = O_{\frac{1}{n}}(n \rightarrow +\infty) \text{ et.} \quad \Omega_m^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f_{mn}^K}{f_{mn}^Z} \cdot C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right). \quad (118)$$

Les équations (110) et (111) deviennent ainsi :

pour  $m = 0$  :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{0n}^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_{0n}^\sigma - Y_{0n}^{iK\sigma}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \quad (119)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{0n}^Z \cdot (Y_{0n}^\sigma - Y_{0n}^{iZ\sigma}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N, \quad (120)$$

pour  $m \geq 1$  :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{mn}^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_{mn}^\sigma - Y_{mn}^{iK\sigma}) \cdot P_n^m(\cos \theta) = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \quad (121)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{mn}^Z \cdot (Y_{mn}^\sigma - Y_{mn}^{iZ\sigma}) \cdot P_n^m(\cos \theta) = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N. \quad (122)$$

La première remarque qui ressort concerne les équations (119) et (120). Elles sont en tout point équivalentes aux équations (85) et (86). Elles ont donc déjà résolues. Physiquement, cette équivalence provient du fait que le décalage de la sonde excite des modes supplémentaires,  $m > 0$ , au cas centré,  $m = 0$ .

Il reste alors à travailler sur le cas  $m > 0$ . Pour ce faire, il est nécessaire de trouver les relations généralisées à tout degré  $m$  et tout ordre  $n$  des polynômes et fonctions associées de Legendre sous forme intégrale proches de (31). Ainsi, dans (Bateman 1953), une forme assez proche de l'expression recherchée est proposée. La forme généralisée de la formule dite de Mehler-Dirichlet est :

$$P_\nu^\mu(\cos \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(\sin \theta)^\mu}{\Gamma(\frac{1}{2} - \mu)} \int_0^\theta \frac{\cos[(\nu + \frac{1}{2})\alpha]}{(\cos \alpha - \cos \theta)^{\mu + \frac{1}{2}}} d\alpha, 0 < \theta < \pi, \operatorname{Re} \mu < \frac{1}{2}. \quad (123)$$

Pour aboutir à la forme souhaitée, il est impératif de prendre  $\mu$  et  $\nu$  entiers naturels et d'exprimer la fonction  $\Gamma$  en termes de factoriels suivie d'une intégration par parties. Il en ressort alors :

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{m! 2^{2m}}{(2m)!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{1}{\sin^m \theta} \int_0^\theta (\cos \phi - \cos \theta)^{m-\frac{1}{2}} \cos(n + \frac{1}{2})\phi d\phi, m > 1, 0 < \theta < \pi \quad (124)$$

La seconde égalité est obtenue via les changements de variable  $\phi$  en  $\pi - \phi$  et  $\theta$  en  $\pi - \theta$ :

$$P_n^m(\cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{m! 2^{2m}}{(2m)!} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{(-1)^m}{\sin^m \theta} \int_0^\pi (\cos \theta - \cos \phi)^{m-\frac{1}{2}} \sin(n + \frac{1}{2})\phi d\phi, \quad (125)$$

pour  $m > 1, 0 < \theta < \pi$ . Ainsi, (124) est injectée dans (121) et (125) dans (122). Il en ressort un couple d'équations matricielles homogènes d'Abel à noyaux continus de carré sommable. Le second membre des chacune des équations étant nul, les fonctions intégrées sont nulles sur les intervalles considérés. D'où les relations :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \forall m > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} f_{mn}^K \cdot ((I_N - G_n) \cdot Y_{mn}^\sigma - Y_{mn}^{iK\sigma}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N, \quad (126)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} f_{mn}^Z \cdot (Y_{mn}^\sigma - Y_{mn}^{iZ\sigma}) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N. \quad (127)$$

La dérivation de (127) abouti à :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (2n+1) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} f_{mn}^Z \cdot (Y_{mn}^\sigma - Y_{mn}^{iZ\sigma}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N. \quad (128)$$

Il apparaît donc dès à présent possible de déterminer les expressions des suites de pondérations  $f^K$  et  $f^Z$  en accord avec la condition fixée en (118) :

$$\forall n \geq 1, \forall m \geq 0, f_{mn}^K = \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \text{ et } f_{mn}^Z = \frac{1}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}. \quad (129)$$

Par voie de conséquence, la relation (118) donne accès à la famille de matrices constantes :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, (\Omega_m^{-1})_{p,q} = -2 \frac{k_{p+1} r_p}{\eta_{p+1}} \left( 1 + \frac{\eta_{p+1} k_p}{\eta_p k_{p+1}} \right) \cdot \delta_{p,q}. \quad (130)$$

Le nouveau système d'équations s'écrit alors :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \forall m > 0,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Y_{mn}^\sigma \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} (G_n \cdot Y_{mn}^\sigma + Y_{mn}^{iK\sigma}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} Y_{mn}^{iZ\sigma} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \end{cases} \quad (131)$$

En utilisant la définition (98), en multipliant l'équation (131) de part et d'autre par  $\cos((2i+1)\theta/2)$ , en intégrant chaque ligne en  $\theta$  de 0 à  $\pi$ , et en utilisant le fait que les coefficients sphériques sont nuls lorsque  $i > n$ , découle une équation matricielle linéaire pour le vecteur  $Y_i$ .

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi], \forall \sigma = e, o, \forall m > 0, \forall i > 0,$$

$$Y_{mi}^\sigma - \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{\bar{Q}}_{in}(\Theta_N) \cdot G_n \cdot Y_{mn}^\sigma = Y_{mi}^{iZ\sigma} + \sum_{n=m}^{+\infty} \bar{\bar{Q}}_{in}(\Theta_N) \cdot G_n \cdot (Y_{mn}^{iK\sigma} - Y_{mn}^{iZ\sigma}). \quad (132)$$

Tout comme pour le cas de l'antenne centrée, les vecteurs inconnus sont dès à présent collectés dans un vecteur colonne  $Z_m^\sigma = \{Y_{mn}^\sigma\}_{n=1}^{+\infty}$  et tout le membre de droite dans le vecteur colonne connu  $B_m^\sigma$  qui contient les caractéristiques de la source. Sont de plus introduites les matrices infinies  $A_m$  de blocks  $N \times N$  composées des éléments décrivant la géométrie de l'antenne imprimée. Dans le cas étudié ici,  $A_m = \{A_m^{ps}\}_{p,s=1,\dots,N}$  où les blocks  $A_m^{ps} = \{A_{m,in}^{ps}\}_{i,n=1}^{+\infty}$  sont générés via (132). Ainsi, (132) peut être écrite sous la forme matricielle suivante :

$$\forall \sigma = e, o, \forall m > 0, Z_m^\sigma + A_m Z_m^\sigma = B_m^\sigma. \quad (133)$$

Il est à noter que, comme pour le cas centré, chacun des coefficients du block  $A^{ps}$  est le produit de deux fonctions matricielles :

$$A_{m,in}^{ps} = A_{m,in}^{ps(2)}\left(\left(\theta_p\right)_{p=1,\dots,N}\right) \cdot A_n^{ps(1)}\left(\left(r_p, k_p, \eta_p\right)_{p=1,\dots,N}, k_0, \eta_0\right). \quad (134)$$

La seconde s'annule lorsque  $\forall p = 1, \dots, N, k_0 r_p \rightarrow 0$  et  $\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, q > p, r_p / r_q \rightarrow 0$ . Ceci implique que lors de la construction de (132), a été inversée la partie statique du problème associé avec chacun des disques sphériques en espace libre.

Par ailleurs, les évolutions des ces fonctions pour de grands ordres est :

$$\begin{aligned} \forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \\ \left(A_n^{ps(1)}\left(\left(r_p, k_p, \eta_p\right)_{p=1,\dots,N}, k_0, \eta_0\right)\right)_{p,q} = O\left(\frac{1}{n}\right)(n \rightarrow +\infty), \end{aligned} \quad (135)$$

$$\left(A_{m,in}^{ps(2)}\left(\left(\theta_r\right)_{r=1,\dots,N}\right)\right)_{p,q} = O\left(\frac{1}{i-n}\right)(n \rightarrow +\infty), \quad \left(A_{m,mn}^{ps(2)}\left(\left(\theta_r\right)_{r=1,\dots,N}\right)\right)_{p,q} = O(1)(n \rightarrow +\infty). \quad (136)$$

L'introduction de l'espace des suites de carrés sommables  $L_2^N = L_2 \times \dots \times L_2$  permet de voir que  $\|A_m\|_{L_2^N} < +\infty$ , i.e. les  $A_m$  sont compacts. De la même manière  $\|B_m^\sigma\|_{L_2} < +\infty$ . De cette façon, il est certain que (132) est une équation matricielle de Fredholm de seconde espèce assurant au problème d'être bien posé et inversible dont l'unique solution est donnée par  $X_m^\sigma = (I + A_m)^{-1} B_m^\sigma$ . De plus, la solution associée à l'équation tronquée à l'ordre  $M$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \forall \sigma = e, o, \forall m = 1, \dots, M, \\ X_m^{\sigma M} = \left(I_{N(M-m+1)} + A_m^M\right)^{-1} \cdot B_m^{\sigma M}, \end{aligned} \quad (137)$$

où chaque block de la matrice  $N \times N A_m^M$  possède la dimension  $(M-m+1) \times (M-m+1)$ .

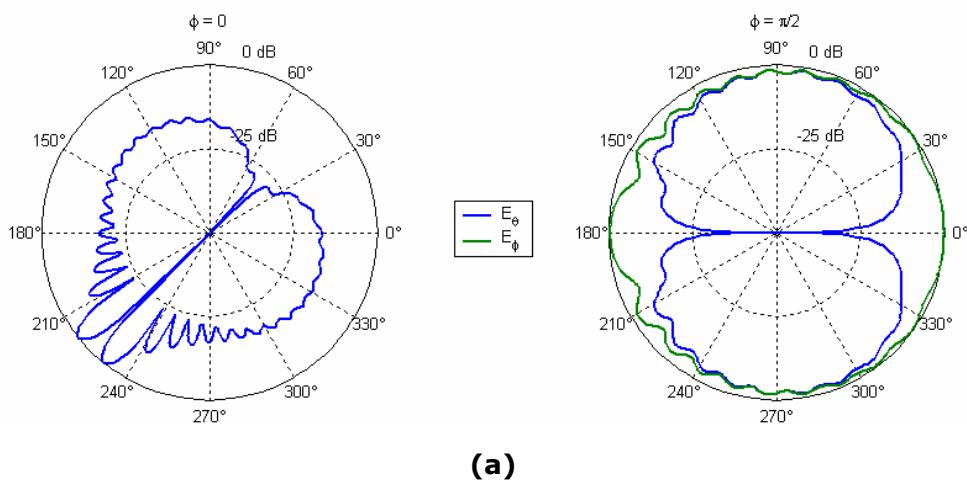
La dernière étape nécessaire à la vérification de la condition de bord provient de l'étude, pour de grandes valeurs de  $m$ , des coefficients  $A_{m,in}^{ps}$  et  $B_m^p$ . Les relations (36) montrent que ces coefficients évoluent en  $O(m^{-1})$ . Ainsi, toutes les conditions requises en 4.4.1 et 4.4.2 sont complètement satisfaites par la solution de l'équation matricielle (132). Finalement, l'ensemble des conditions requises quant à l'existence et l'unicité de la solution du problème est vérifié.

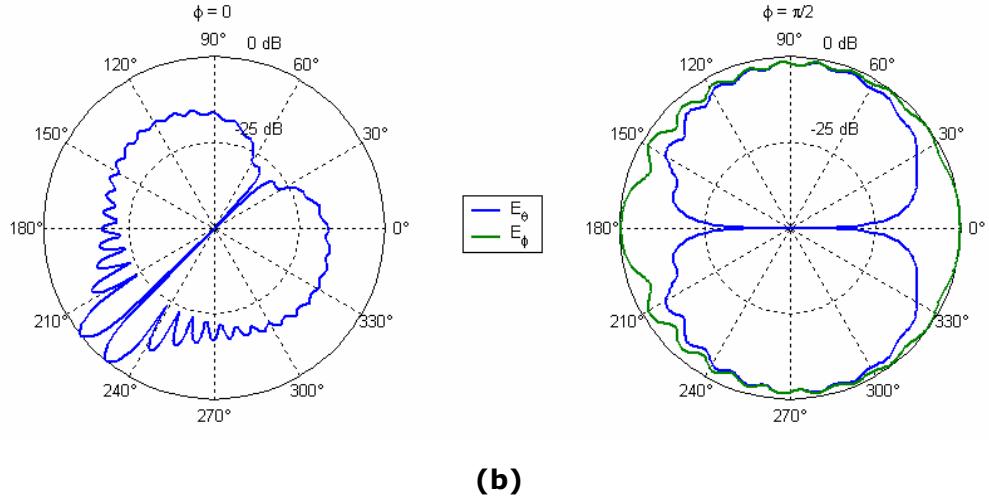
#### 4.4.4 Résultats numériques

La convergence numérique ainsi que la puissance rayonnée ont été calculées. Il en ressort des courbes complètement erronées dont la distribution semble plus suivre un bruit qu'autre chose. Celles-ci étant contraires au principe même de la MAR, deux hypothèses ressortent. Premièrement, soit une erreur se cache dans les calculs présentés précédemment, soit une erreur dans la technique d'implémentation de l'algorithme. La première hypothèse est peu probable car la technique de régularisation du cas d'une alimentation par fente centrée est très proche du cas de l'alimentation par sonde centrée, cas dont la véracité des résultats est prouvée. La seconde hypothèse est privilégiée. En effet, la technique d'implémentation influence de façon sensible la stabilité numérique des calculs : des nombres d'ordre de grandeur très différents sont mis en compétition.

#### 4.4.5 Validations

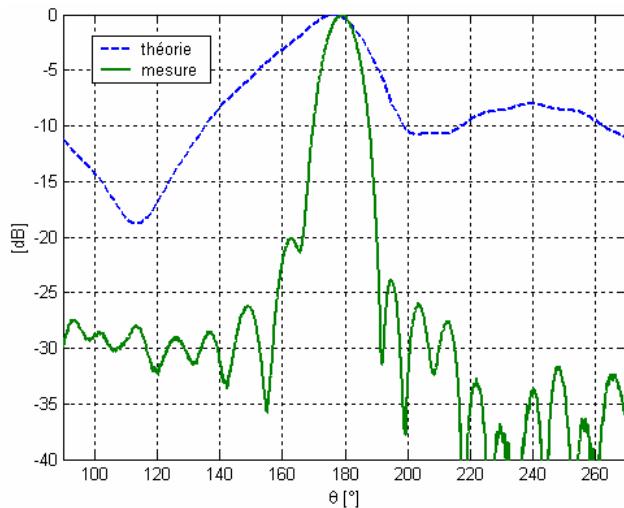
La première validation concerne le cas où les calottes métalliques sont supprimées et la sonde radiale et décalée de  $45^\circ$  par rapport au centre d'une lentille de Lüneburg discrète homogène composée de 20 coquilles à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 21.0$ . Les diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'analyse par la MAR et par la théorie de diffusion explicité au chapitre 3 sont donnés en **Figure 24**. Les résultats obtenus sont en très bon accord. Par ailleurs, lorsque la sonde devient centrée, les équations obtenues sont identiques à celles présentées et validées en 4.3. Ceci valide une partie des équations.





**Figure 24** Dipôle électrique radial décalé de  $45^\circ$  illuminant une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 couches à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 21.0$  via deux méthodes : (a) MAR. (b) théorie de diffusion développée au chapitre 3

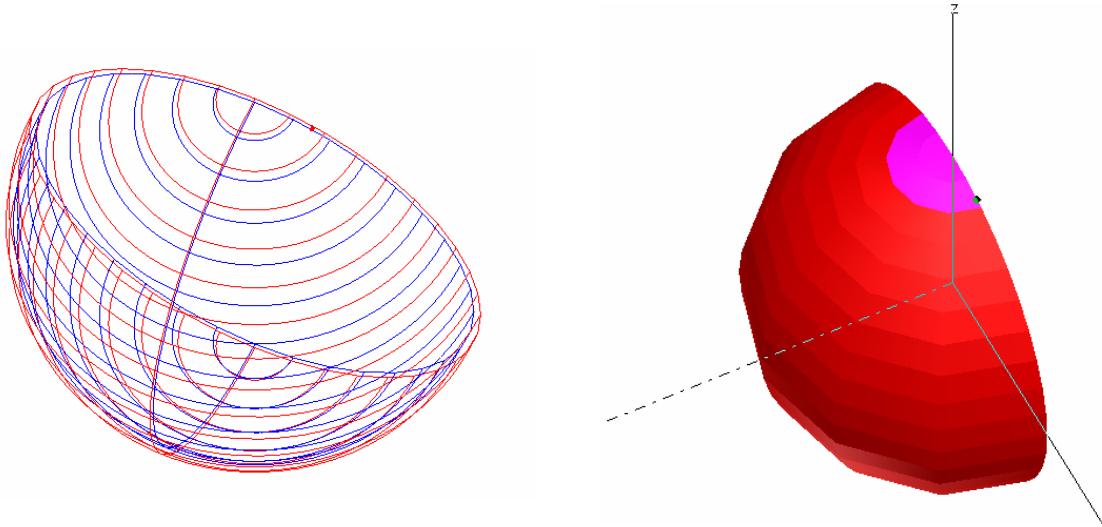
Compte tenu des problèmes rencontrés, lorsque les calottes métalliques sont ajoutées, lors de l'étude de la convergence, il est fort probable que les résultats numériques, en présence de calottes polaires métalliques, soient erronés. La **Figure 25** confirme cette remarque. En effet, il en ressort que le diagramme de rayonnement en champ lointain simuler n'est en aucune mesure comparable à la mesure.



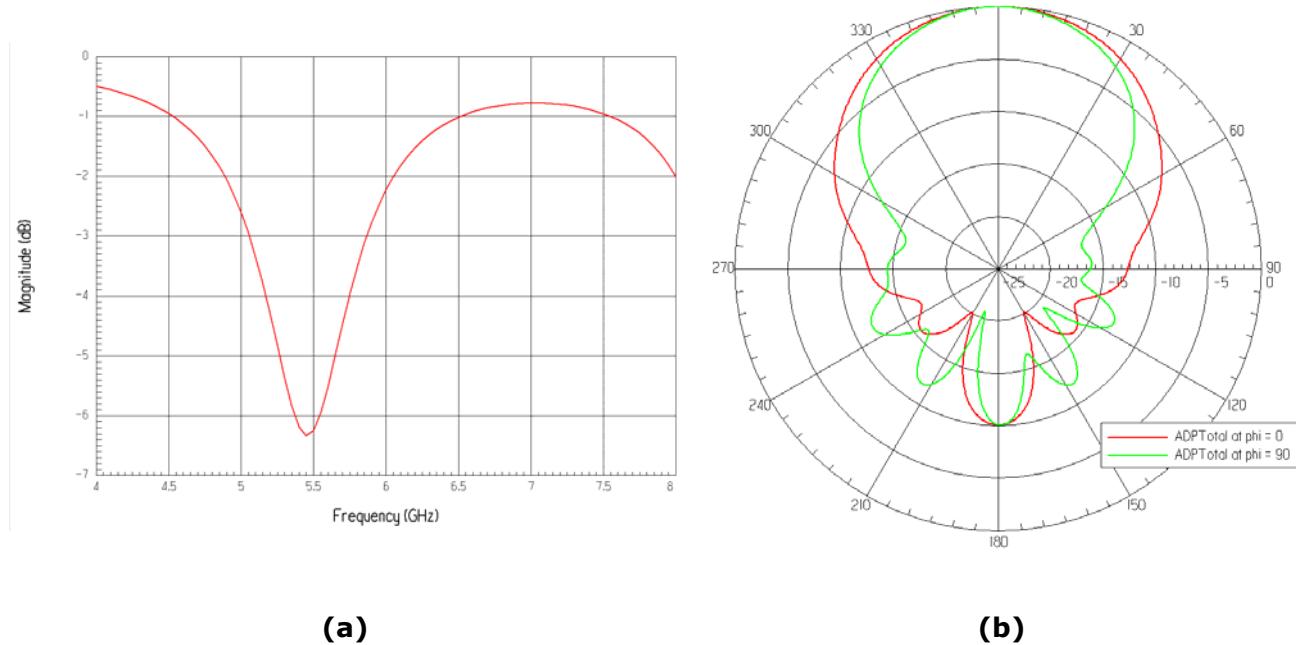
**Figure 25** Comparaison théorie – mesure du diagramme de rayonnement plan  $E$  en champ lointain d'une antenne patch alimentée par sonde centrée et placée sur la lentille Eccostok Luneberg lens-P16©. Les paramètres utilisée sont :  $k_0 r_{max} = 20.94$  ( $f = 5.0\text{GHz}$ ),  $r_{int}/r_{ext} = 99\%$ ,  $\theta_{ext} = 2\theta_{int} = 4.0^\circ$ ,  $\theta_{sonde} = 1.5^\circ$ .

Afin de comparer les temps de calcul, une simulation est réalisée via le logiciel HFSS de la société Ansoft. Les résultats obtenus sont donnés en **Figure 26** et **Figure 27**. Après plus de 45 heures de calculs sur un ordinateur type PIII 866 ayant 1Go de RAM, il ressort des diagrammes proches de ceux d'un patch circulaire

planaire. Il est à noter qu'aucune lentille n'est présente et que la structure est de faible dimension ( $1.75\lambda$  de diamètre). Même si les résultats obtenus sont corrects, ce temps de calcul ramené au volume de la structure montre une nouvelle fois le besoin de développer un outil rapide. Ainsi, même si la technique de régularisation n'est pas encore opérationnelle pour le cas d'une alimentation par sonde décentrée, elle devient absolument nécessaire pour pouvoir étudier ce type de d'antennes.



**Figure 26** Géométrie de l'antenne circulaire imprimée conformée sur sphère alimentée par sonde décentrée, dont les paramètres sont :  $r_1 = 46.32\text{mm}$ ,  $r_2 = 47.75\text{mm}$ ,  $h = 1.43\text{mm}$ ,  $\epsilon_{r1}=\epsilon_{r3}=1.0$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.3$ ,  $\theta_1 = 160^\circ$ ,  $\theta_2 = 18^\circ$ .



**Figure 27** (a) Paramètre  $s_{11}$ . (b) Diagrammes de rayonnement en champ lointain plans E et H à la fréquence de 5.5GHz. Les paramètres sont :  $r_1 = 46.32\text{mm}$ ,  $r_2 = 47.75\text{mm}$ ,  $h = 1.43\text{mm}$ ,  $\epsilon_{r1}=\epsilon_{r3}=1.0$ ,  $\epsilon_{r2} = 1.3$ ,  $\theta_1 = 160^\circ$ ,  $\theta_2 = 18^\circ$ .

#### 4.4.6 Conclusion

La technique de régularisation analytique est fonctionnelle, dans le cas d'une alimentation par sonde décalée, lorsque aucune calotte métallique n'est présente. Par contre, ses prévisions sont complètement erronées lorsque les calottes polaires entrent en scène. Il reste donc un certain travail à effectuer sur les fonctions angulaires de la technique de régularisation, car celles-ci représentent les calottes métalliques.

### 4.5 Antenne alimentée par fente et lentille sphérique

L'antenne alimentée par fente est une alternative à l'antenne alimentée par sonde décentrée. Elle aussi possède un rayonnement maximum d'énergie dans l'axe. Elle convient donc également à l'illumination d'une lentille.

La géométrie de la structure reste toujours identique à celle donnée en **Figure 17**.

#### 4.5.1 Modélisation électromagnétique

La modélisation électromagnétique de la structure est duale de celle étudiée dans les sections précédentes, à ceci près que la distribution de courant primaire devient :

$$\vec{J}^e(r, \theta, \varphi) = \vec{0} \text{ et } \vec{J}^m(r, \theta, \varphi) = \frac{V_0}{r^2 \sin \theta} \sum_{p=1}^N g_p \delta(r - r_p^i) \delta(\theta - \theta_p^i) \delta(\varphi - \varphi_p^i) \hat{\theta}. \quad (138)$$

Les pondérations  $g_p$  permettent de définir ou non des alimentations à n'importe quel niveau  $r_p^i$  dans chaque coquille composant la structure. Différentes sources peuvent alors être modélisées : antennes avec parasites, etc.

Les conditions duales, données par (58) et (59), sont inchangées. Par contre, les conditions de rayonnement diffèrent légèrement. En effet, deux types de mode sont excités : les modes TM et les modes TE. Il en ressort la nouvelle condition de rayonnement de Silver-Muller. Ainsi, cette remarque couplée avec (57) aboutit à :

$$E_\theta(r, \theta) = \frac{1}{\eta_0} H_\phi(r, \theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} f_m(\theta) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) (r \rightarrow +\infty), \quad E_r(r, \theta) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) (r \rightarrow +\infty), \quad (139)$$

$$E_\phi(r, \theta) = \frac{-1}{\eta_0} H_\theta(r, \theta) = E_0 \frac{e^{-jk_0 r}}{k_0 r} f_e(\theta) + O\left(\frac{1}{r^2}\right) (r \rightarrow +\infty), \quad H_r(r, \theta) = O\left(\frac{1}{r^2}\right) (r \rightarrow +\infty),$$

où, pour des raisons de commodité, il est posé  $E_0 = k_0 V_0 / 4\pi$ .  $f_e$  et  $f_m$  représentent les diagrammes de rayonnement en champ lointain associés à la structure pour les deux types de modes.

Par ailleurs, les conditions de bord (61) et (62) restent inchangées. Tout cela permet d'appliquer le théorème d'unicité de la même façon.

## 4.5.2 Expression du champ et relations fondamentales

Tout comme précédemment, le cadre de travail concerne les fonctions modales sphériques vectorielles.

### 4.5.2.1 Coefficients associés à la source

Les coefficients sphériques associés à la distribution de courants primaires (138) s'expriment, via la relation (24) du chapitre 3 :

$$a_{mn}^{i\sigma p} = E_0 \alpha_{mn}^{i\sigma p}, b_{mn}^{i\sigma p} = E_0 \beta_{mn}^{i\sigma p}, n = 1, \dots, +\infty, m = 0, 1, \dots, +\infty, s = 1, 4, \sigma = e, o, \quad (140)$$

$$\text{avec } \alpha_{mn}^{i\sigma p} = 2 \frac{c_{mn}}{e_m} g_p \cdot t_{mn}^{\sigma 2}(\theta_p^i) f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi_p^i) \frac{K_n^{\bar{s}}(k_p r_p^i)}{k_p r_p^i}, \text{ et } \beta_{mn}^{i\sigma p} = 2 \frac{c_{mn}}{e_m} g_p \cdot t_{mn}^{\bar{\sigma} 1}(\theta_p^i) f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi_p^i) \frac{Z_n^{\bar{s}}(k_p r_p^i)}{k_p r_p^i}.$$

Ici,  $p$  dénote le numéro de la couche dans laquelle les coefficients sphériques incidents sont calculés.  $p = 1, \dots, N$ .

### 4.5.2.2 Expression générale du champ électromagnétique

La formulation de ce problème est générale. Ainsi, tous les modes sont susceptibles d'être excités. L'expression du champ électromagnétique prend donc une forme générale. Par ailleurs, l'exposant  $q$  est ajouté afin d'alléger les notations. En introduisant les coefficients sphériques normalisés  $\alpha_{mn}^{s\sigma q} = a_{mn}^{s\sigma q} / E_0$  et  $\beta_{mn}^{s\sigma q} = b_{mn}^{s\sigma q} / E_0$ , le champ électromagnétique secondaire devient :

$$\vec{E}^q = E_0 \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \alpha_{mn}^{s\sigma q} \vec{M}_{mn}^{\sigma} + \beta_{mn}^{s\sigma q} \vec{N}_{mn}^{\bar{\sigma}}, \quad \vec{H}^q = j \frac{E_0}{\eta_q} \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{\sigma=e,o} \alpha_{mn}^{s\sigma q} \vec{N}_{mn}^{\sigma} + \beta_{mn}^{s\sigma q} \vec{M}_{mn}^{\bar{\sigma}}, \quad (141)$$

où  $q = 1, \dots, N+1$  dénote le numéro de la couche considérée.

### 4.5.2.3 Classe d'expansion des coefficients sphériques

L'association de l'ensemble des relations précédentes en utilisant les relations d'orthogonalité données en annexes, et appliquée aux volumes intérieurs  $r_p < r < r_{p+1}$  ou  $r_N < r < r_c$ , aboutit aux inégalités définissant la classe d'expansion des coefficients sphériques :

$$\forall p = 1, \dots, N, \forall m \geq 0, \forall \sigma = e, o, . \quad (142)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |n \cdot Z_n^4(k_p r_p)|^2 |\alpha_{mn}^{\sigma 4p}|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} |n \cdot K_n^4(k_p r_p)|^2 |\beta_{mn}^{\sigma 4p}|^2 < +\infty.$$

#### 4.5.2.4 Équations de séries duales

En appliquant les conditions duales à l'expression générale du champ électromagnétique (141), ressortent les quatre équations matricielles différentielles couplées suivantes :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall m = 0, \dots, +\infty, \forall \sigma = e, o, \quad (143)$$

$$\frac{m}{\sin \theta} F_{am}^{Z\sigma}(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} F_{bm}^{K\sigma}(\theta) = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F_{am}^{Z\sigma}(\theta) + \frac{m}{\sin \theta} F_{bm}^{K\sigma}(\theta) = 0_N, 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N,$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F_{am}^{K\sigma}(\theta) + \frac{m}{\sin \theta} F_{bm}^{Z\sigma}(\theta) = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N,$$

$$\frac{m}{\sin \theta} F_{am}^{K\sigma}(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} F_{bm}^{Z\sigma}(\theta) = 0_N, \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N,$$

où les fonctions utilisées sont définies par :

$$F_{am}^{Z\sigma}(\theta) = \sigma(-1) \sum_{n=1}^{+\infty} (Z_{an}^{D1} \cdot X_{amn}^{\sigma 1} + Z_{an}^{P4} \cdot X_{amn}^{\sigma 4} + Z_{an}^{i4} \cdot X_{amn}^{i\sigma 4}) \cdot P_n^m(\cos \theta),$$

$$F_{bm}^{K\sigma}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (K_{bn}^{D1} \cdot X_{bmn}^{\sigma 1} + K_{bn}^{P4} \cdot X_{bmn}^{\sigma 4} + K_{bn}^{i4} \cdot X_{bmn}^{i\sigma 4}) \cdot P_n^m(\cos \theta),$$

$$F_{am}^{K\sigma}(\theta) = \bar{\sigma}(-1) \sum_{n=1}^{+\infty} (K_{an}^{T1} \cdot X_{amn}^{\sigma 1} - K_{an}^{T4} \cdot X_{amn}^{\sigma 4} + K_{an}^{i4} \cdot X_{amn}^{i\sigma 4}) \cdot P_n^m(\cos \theta).$$

$$F_{bm}^{Z\sigma}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} (Z_{bn}^{T1} \cdot X_{bmn}^{\sigma 1} - Z_{bn}^{T4} \cdot X_{bmn}^{\sigma 4} + Z_{bn}^{i4} \cdot X_{bmn}^{i\sigma 4}) \cdot P_n^m(\cos \theta)$$

$$\sigma(-1) = \begin{cases} -1, & \text{si } \sigma = e \\ +1, & \text{si } \sigma = o \end{cases}$$

Les vecteurs sont définis comme suit :

$$\begin{aligned} X_{amn}^{\sigma 1} &= \begin{bmatrix} \alpha_{mn}^{\sigma 11} \\ \vdots \\ \alpha_{mn}^{\sigma 1N} \end{bmatrix}, & X_{amn}^{\sigma 4} &= \begin{bmatrix} \alpha_{mn}^{\sigma 42} \\ \vdots \\ \alpha_{mn}^{\sigma 4N+1} \end{bmatrix}, & X_{amn}^{i\sigma 1} &= \begin{bmatrix} \alpha_{mn}^{i\sigma 12} \\ \vdots \\ \alpha_{mn}^{i\sigma 1N+1} \end{bmatrix}, & X_{amn}^{i\sigma 4} &= \begin{bmatrix} \alpha_{mn}^{i\sigma 41} \\ \vdots \\ \alpha_{mn}^{i\sigma 4N} \end{bmatrix}. \\ X_{bmn}^{\sigma 1} &= \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{\sigma 11} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{\sigma 1N} \end{bmatrix}, & X_{bmn}^{\sigma 4} &= \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{\sigma 42} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{\sigma 4N+1} \end{bmatrix}, & X_{bmn}^{i\sigma 1} &= \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{i\sigma 12} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{i\sigma 1N+1} \end{bmatrix}, & X_{bmn}^{i\sigma 4} &= \begin{bmatrix} \beta_{mn}^{i\sigma 41} \\ \vdots \\ \beta_{mn}^{i\sigma 4N} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Les matrices  $Z_{bn}^{\alpha s}$ , respectivement  $K_{bn}^{\alpha s}$ ,  $\alpha \in \{i, D, T, P\}$ ,  $s = 1, 4$ , sont absolument identiques aux matrices  $Z_n^{\alpha s}$  respectivement  $K_n^{\alpha s}$ ,  $\alpha \in \{i, D, T, P\}$ ,  $s = 1, 4$ , définies en (69). Par ailleurs, les matrices  $Z_{an}^{\alpha s}$ , respectivement  $K_{an}^{\alpha s}$ ,  $\alpha \in \{i, D, T, P\}$ ,  $s = 1, 4$ , sont également identiques aux matrices  $K_{bn}^{\alpha s}$ , respectivement  $Z_{bn}^{\alpha s}$ ,  $\alpha \in \{i, D, T, P\}$ ,  $s = 1, 4$ , à ceci près que les fonctions de Bessel  $Z^s$  sont remplacées par les fonctions

modifiées de Bessel  $K^s$  et inversement. Toutes les autres grandeurs sont absolument identiques à celle définies dans le cas de la sonde.

#### 4.5.2.5 Résolution des équations différentielles

Afin de résoudre les équations différentielles, l'équation suivante est considérée sur un ensemble  $D$  quelconque, où  $f$  et  $g$  sont deux fonctions sur  $D$  :

$$\forall m = 0, 1, \dots, +\infty, \forall \theta \in D, \frac{m}{\sin \theta} f(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} g(\theta) = 0, \text{ et } \frac{m}{\sin \theta} g(\theta) + \frac{\partial}{\partial \theta} f(\theta) = 0. \quad (144)$$

Le cas trivial  $m = 0$  impose aux fonctions  $f$  et  $g$  d'être constantes sur  $D$ . Pour résoudre le cas où  $m$  est non nul, il est nécessaire d'effectuer un changement de variable  $f(\theta) = F(\theta)/\sin \theta$ . Ceci aboutit à l'équation suivante :

$$\sin^2 \theta \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} F(\theta) - \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} F(\theta) + (1 - m^2) F(\theta) = 0. \quad (145)$$

Pour  $m = 1$ , la solution est triviale et aboutie à :

$$f(\theta) = a \cdot \tan \frac{\theta}{2} + b \cdot \cot \frac{\theta}{2}, \quad g(\theta) = -a \cdot \tan \frac{\theta}{2} + b \cdot \cot \frac{\theta}{2}, \quad \theta \in D, \quad a \text{ et } b \text{ complexes.} \quad (146)$$

Pour  $m > 1$ , en posant  $G(\cos \theta) = F(\theta)$ , il ressort une équation différentielle dont la recherche de la solution sort du cadre de cette étude :

$$(1 - z^2) \cdot G(z) + (1 - m^2) \cdot G'(z) = 0. \quad (147)$$

Par conséquent, le cas d'une fente décentrée ne peut pas être traité. Par contre, le fait de centrer la fente,  $\theta_p^i = 0$ , impose  $m = 1$ . L'équation différentielle correspondante est déjà résolue. Par conséquent, tous les indices correspondant à  $m = 1$  sont dès à présent supprimés. Ainsi, les solutions de (143) sont :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \quad (148)$$

$$F_{a1}^{Z\sigma}(\theta) = F_a^{Z\sigma}(\theta) = a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2} + b^{Z\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, \quad 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N,$$

$$F_{b1}^{Z\sigma}(\theta) = F_b^{Z\sigma}(\theta) = -a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2} + b^{Z\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, \quad 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N,$$

$$F_{a1}^{K\sigma}(\theta) = F_a^{K\sigma}(\theta) = a^{K\sigma} \tan \frac{\theta}{2} + b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, \quad \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N,$$

$$F_{b1}^{K\sigma}(\theta) = F_b^{K\sigma}(\theta) = -a^{K\sigma} \tan \frac{\theta}{2} + b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, \quad \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N,$$

avec  $a^{Z\sigma}, b^{Z\sigma}, a^{K\sigma}, b^{K\sigma}$  étant des vecteurs constants de longueur  $N$ . Par ailleurs, les conditions de bord imposent un champ électromagnétique fini en tout point de l'espace et en particulier en  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . Par conséquent,  $b^{Z\sigma}$  et  $a^{K\sigma}$  doivent être nuls. D'où :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \quad (149)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sigma(-1) (Z_{an}^{D1} \cdot X_{an}^{\sigma 1} + Z_{an}^{P4} \cdot X_{an}^{\sigma 4} + Z_{an}^{i4} \cdot X_{an}^{i\sigma 4}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2}, \quad 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left( K_{bn}^{D1} \cdot X_{bn}^{\sigma 1} + K_{bn}^{P4} \cdot X_{bn}^{\sigma 4} + K_{bn}^{i4} \cdot X_{bn}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = -a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2}, & 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\sigma}(-1) \left( K_{an}^{T1} \cdot X_{an}^{\sigma 1} - K_{an}^{T4} \cdot X_{an}^{\sigma 4} + K_{an}^{i4} \cdot X_{an}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left( Z_{bn}^{T1} \cdot X_{bn}^{\sigma 1} - Z_{bn}^{T4} \cdot X_{bn}^{\sigma 4} + Z_{bn}^{i4} \cdot X_{bn}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N
\end{aligned}$$

En utilisant les équivalences décrites en fin du paragraphe 4.5.2.4 et en faisant de même avec (70), ces équations prennent la nouvelle forme :

$$\begin{aligned}
& \forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, & (150) \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_{an}^Z \cdot X_{an}^{\sigma 4} - C_{an}^{iZ1} \cdot X_{an}^{i\sigma 1} - C_{an}^{iZ4} \cdot X_{an}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = \sigma(-1) a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2}, & 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_{bn}^K \cdot X_{bn}^{\sigma 4} - C_{bn}^{iK1} \cdot X_{bn}^{i\sigma 1} - C_{bn}^{iK4} \cdot X_{bn}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = -a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2}, & 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_{an}^K \cdot X_{an}^{\sigma 4} - C_{an}^{iK1} \cdot X_{an}^{i\sigma 1} + C_{an}^{iK4} \cdot X_{an}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = \bar{\sigma}(-1) b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \\
& \sum_{n=1}^{+\infty} \left( C_{bn}^Z \cdot X_{bn}^{\sigma 4} - C_{bn}^{iZ1} \cdot X_{bn}^{i\sigma 1} + C_{bn}^{iZ4} \cdot X_{bn}^{i\sigma 4} \right) \cdot P_n^1(\cos \theta) = b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2}, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N
\end{aligned}$$

### 4.5.3 Régularisation

Comme pour les cas de la sonde, les équations duales précédentes ne sont pas directement inversibles. Il est alors nécessaire de suivre la méthode de régularisation du système afin de pouvoir en extraire les inconnues. Pour cela, il apparaît nécessaire d'effectuer un certain travail préliminaire sur les matrices de structure géométrique. Alors seulement ensuite, le schéma de régularisation de la MAR pourra s'appliquer.

#### 4.5.3.1 Evolution asymptotique des matrices de structure géométrique

Les analogies décrites en fin du paragraphe 4.5.2.4 associées aux définitions données en (70) indique que toutes les inversion matricielles ont été effectuées en 4.3.4.1 et que l'évolution asymptotique des matrices  $\left\{ C_{bn}^Z \cdot C_{bn}^{K-1} \right\}_{n=1, \dots, +\infty}$  est donnée par (80). Il reste donc à évaluer l'évolution asymptotique de la famille de matrice  $\left\{ C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z-1} \right\}_{n=1, \dots, +\infty}$ . Les analogies de structure décrites en 4.5.2.4 permettent d'y parvenir très facilement. Il en ressort :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \quad (151)$$

si  $q < p-1$  ou  $q > p+1$ ,

$$\left( C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right)_{p,q} = 0,$$

si  $q = p-1$ ,

$$\left( C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right)_{p,q} = \frac{2n+1}{k_p r_p \eta_p} \left( \frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{n+1} \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty),$$

si  $q = p=1$ ,

$$\left( C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right)_{p,q} = \frac{-n}{k_{p+1} r_p \eta_{p+1}} \left( \frac{2n+1}{n} \left( \frac{r_p}{r_{p+1}} \right)^{n+2} + \left( 1 - \frac{\eta_{p+1} k_{p+1}}{\eta_p k_p} \right) \right) \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty),$$

si  $1 < q = p < N$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right)_{p,q} = & -\frac{2n+1}{k_p r_p \eta_p} \left( \frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{2n} \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty) + \dots \\ & \dots \frac{-n}{k_{p+1} r_p \eta_{p+1}} \left( \frac{2n+1}{n} \left( \frac{r_p}{r_{p+1}} \right)^{n+2} + \left( 1 - \frac{\eta_{p+1} k_{p+1}}{\eta_p k_p} \right) \right) \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

si  $q = p = N$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right)_{p,q} = & -\frac{2n+1}{k_p r_p \eta_p} \left( \frac{r_{p-1}}{r_p} \right)^{2n} \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty) + \dots \\ & \dots \frac{-n}{k_{p+1} r_p \eta_{p+1}} \left( 1 + \frac{\eta_{p+1} k_{p+1}}{\eta_p k_p} \right) \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

si  $q = p+1$ ,

$$\left( C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right)_{p,q} = \frac{2n+1}{k_{p+1} r_p \eta_{p+1}} \left( \frac{r_p}{r_{p+1}} \right)^n \left( 1 + \frac{n+1}{2n+1} \frac{\eta_{p+1} k_{p+1}}{\eta_p k_p} \left( 1 - \frac{n+1}{k_{p+1} r_p} \right) \right) \left( 1 + O_{\frac{1}{n}} \right) (n \rightarrow +\infty).$$

#### 4.5.3.2 Application de la MAR

Le schéma désormais classique de la MAR impose que soient posées les relations suivantes :

$$\forall n \geq 1, \forall \sigma = e, o,$$

$$f_{an}^Z \cdot \Omega_a \cdot (I_N - G_{an}) \cdot Y_{an}^\sigma = C_{an}^Z \cdot X_{an}^{\sigma 4}, \text{ pour } 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N,$$

$$f_{bn}^K \cdot \Omega_b \cdot (I_N - G_{bn}) \cdot Y_{bn}^\sigma = C_{bn}^K \cdot X_{bn}^{\sigma 4}, \text{ pour } 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N,$$

$$f_{an}^K \cdot Y_{an}^\sigma = C_{an}^K \cdot X_{an}^{4\sigma}, \text{ pour } \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N,$$

$$f_{bn}^Z \cdot Y_{bn}^\sigma = C_{bn}^Z \cdot X_{bn}^{4\sigma}, \text{ pour } \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N,$$

$$f_{an}^Z \cdot \Omega_a \cdot Y_{an}^{i\sigma Z} = C_{an}^{iZ1} \cdot X_{an}^{i\sigma 1} + C_{an}^{iZ4} \cdot X_{an}^{i\sigma 4}, \quad f_{bn}^K \cdot \Omega_b \cdot Y_{bn}^{i\sigma K} = C_{bn}^{iK1} \cdot X_{bn}^{i\sigma 1} + C_{bn}^{iK4} \cdot X_{bn}^{i\sigma 4},$$

$$f_{an}^K \cdot Y_{an}^{i\sigma K} = C_{an}^{iK1} \cdot X_{an}^{i\sigma 1} + C_{an}^{iK4} \cdot X_{an}^{i\sigma 4}, \quad f_{bn}^Z \cdot Y_{bn}^{i\sigma Z} = C_{bn}^{iZ1} \cdot X_{bn}^{i\sigma 1} + C_{bn}^{iZ4} \cdot X_{bn}^{i\sigma 4},$$

où les grandeurs introduites doivent vérifier :

$$\Omega_{a,b} \text{ matrices constantes et } \forall (p,q) = (1, \dots, N)^2, (G_{a,bn})_{p,q} = O_{\frac{1}{n}}(n \rightarrow +\infty). \quad (153)$$

$I_N$  étant l'opérateur identité. De ces équations ressortent les relations :

$$C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} = \frac{f_{an}^K}{f_{an}^Z} \cdot (I_N - G_{an})^{-1} \cdot \Omega_a^{-1}, \quad C_{bn}^Z \cdot C_{bn}^{K^{-1}} = \frac{f_{bn}^Z}{f_{bn}^K} \cdot (I_N - G_{bn})^{-1} \cdot \Omega_b^{-1}. \quad (154)$$

L'association de (153) aux évolutions asymptotiques (151) et (152) impose les conditions suivantes :

$$\frac{f_{an}^K}{f_{an}^Z} = O_{\frac{1}{n}}(n \rightarrow +\infty), \quad \Omega_a^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f_{an}^Z}{f_{an}^K} \cdot C_{an}^K \cdot C_{an}^{Z^{-1}} \right), \quad (155)$$

$$\frac{f_{bn}^Z}{f_{bn}^K} = O_{\frac{1}{n}}(n \rightarrow +\infty), \quad \Omega_b^{-1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{f_{bn}^K}{f_{bn}^Z} \cdot C_{bn}^Z \cdot C_{bn}^{K^{-1}} \right).$$

Les équations (150) deviennent ainsi :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \quad (156)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{an}^Z \cdot ((I_N - G_{an}) \cdot Y_{an}^\sigma - Y_{an}^{i\sigma Z}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = \sigma(-1) \Omega_a^{-1} a^{Z\sigma} \tan \frac{\theta}{2},$$

$$0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{bn}^K \cdot ((I_N - G_{bn}) \cdot Y_{bn}^\sigma - Y_{bn}^{i\sigma K}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = -\Omega_b^{-1} b^{K\sigma} \tan \frac{\theta}{2},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{an}^K \cdot (Y_{an}^\sigma - Y_{an}^{i\sigma K}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = \bar{\sigma}(-1) b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2},$$

$$\Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_{bn}^Z \cdot (Y_{bn}^\sigma - Y_{bn}^{i\sigma Z}) \cdot P_n^1(\cos \theta) = b^{K\sigma} \cot \frac{\theta}{2},$$

Sachant que :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sin \theta} \int_0^\theta \frac{\sin \frac{\phi}{2} \sin \phi}{\sqrt{\cos \phi - \cos \theta}} d\phi, \quad \cot \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{1}{\sin \theta} \int_\theta^\pi \frac{\cos \frac{\phi}{2} \sin \phi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \phi}} d\phi. \quad (157)$$

La relation de Mehler-Dirichlet (31) associée à (157) aboutit à quatre équations matricielles homogènes d'Abel à noyaux continus de carré sommable. Le second membre des chacune des équations étant nul, les fonctions intégrées sont nulles sur les intervalles considérés. D'où les relations :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \quad (158)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} f_{an}^Z \cdot ((I_N - G_{an}) \cdot Y_{an}^\sigma - Y_{an}^{i\sigma Z}) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta &= \sigma(-1) \Omega_a^{-1} a^{Z\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, \\ 0_N \leq \theta \cdot 1_N &< \Theta_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} f_{bn}^K \cdot ((I_N - G_{bn}) \cdot Y_{bn}^\sigma - Y_{bn}^{i\sigma K}) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta &= -\Omega_b^{-1} a^{Z\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} f_{an}^K \cdot (Y_{an}^\sigma - Y_{an}^{i\sigma K}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta &= \sigma(-1) b^{K\sigma} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n(n+1)}{2n+1} f_{bn}^Z \cdot (Y_{bn}^\sigma - Y_{bn}^{i\sigma Z}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta &= -b^{K\sigma} \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

L'association de (151), (155) et (158) aboutit à :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad (159) \\ f_{an}^Z = \mathcal{V}_{n(n+1)}, & \quad f_{an}^K = \frac{2n+1}{n(n+1)}, & \quad f_{bn}^Z = \mathcal{V}_{n(n+1)}, & \quad f_{bn}^K = \frac{2n+1}{n(n+1)}. \\ \forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \\ (\Omega_a^{-1})_{p,q} = \frac{-1}{2k_{p+1}r_p\eta_{p+1}} \left(1 + \frac{\eta_{p+1}k_{p+1}}{\eta_p k_p}\right) \cdot \delta_{p,q} & \quad (\Omega_b^{-1})_{p,q} = -2 \frac{k_{p+1}r_p}{\eta_{p+1}} \left(1 + \frac{\eta_{p+1}k_p}{\eta_p k_{p+1}}\right) \cdot \delta_{p,q}. \end{aligned}$$

(158) devient alors :

$$\begin{aligned} \forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \quad (160) \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} ((I_N - G_{an}) \cdot Y_{an}^\sigma - Y_{an}^{i\sigma Z}) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta &= \sigma(-1) \Omega_a^{-1} a^{Z\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, \\ 0_N \leq \theta \cdot 1_N &< \Theta_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} ((I_N - G_{bn}) \cdot Y_{bn}^\sigma - Y_{bn}^{i\sigma K}) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta &= -\Omega_b^{-1} a^{Z\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, \\ \sum_{n=1}^{+\infty} (Y_{an}^\sigma - Y_{an}^{i\sigma K}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta &= \sigma(-1) b^{K\sigma} \cos \frac{\theta}{2}, \\ \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} (Y_{bn}^\sigma - Y_{bn}^{i\sigma Z}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta &= -b^{K\sigma} \cos \frac{\theta}{2}, \end{aligned}$$

La dérivation par rapport à  $\theta$  de (160) et (160) permet de travailler sur les mêmes fonctions circulaires :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \quad (161)$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Y_{an}^\sigma \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} (G_{an} \cdot Y_{an}^\sigma + Y_{an}^{i\sigma Z}) \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta + \sigma(-1) \Omega_a^{-1} a^{Z\sigma} \cos \frac{\theta}{2}, & 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} Y_{an}^{i\sigma K} \cdot \cos \frac{2n+1}{2} \theta + \sigma(-1) b^{K\sigma} \cos \frac{\theta}{2}, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \end{cases}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} Y_{bn}^\sigma \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} (G_{bn} \cdot Y_{bn}^\sigma + Y_{bn}^{i\sigma K}) \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta - \Omega_b^{-1} a^{Z\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, & 0_N \leq \theta \cdot 1_N < \Theta_N \\ \sum_{n=1}^{+\infty} Y_{bn}^{i\sigma Z} \cdot \sin \frac{2n+1}{2} \theta - b^{K\sigma} \sin \frac{\theta}{2}, & \Theta_N < \theta \cdot 1_N \leq \pi \cdot 1_N \end{cases}$$

En utilisant la définition (98), en multipliant l'équation (161) de part et d'autre par  $\cos((2m+1)\theta/2)$  et l'équation (161) de part et d'autre par  $\sin((2m+1)\theta/2)$ , en intégrant chaque ligne en  $\theta$  de 0 à  $\pi$ , et en utilisant le fait que les coefficients sphériques sont nuls lorsque  $m > n$ , découlent deux équations matricielles linéaires pour les vecteurs  $Y_m^{a\sigma}$  et  $Y_m^{b\sigma}$ :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \forall m = 0, 1, \dots, +\infty, \quad (162)$$

$$m \neq 0,$$

$$Y_{am}^\sigma = \sigma(-1) \cdot \bar{\bar{Q}}_{m0}^a(\Theta_N) \cdot (\Omega_a^{-1} a^{Z\sigma} - b^{K\sigma}) + Y_{am}^{i\sigma K} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{Q}}_{mn}^a(\Theta_N) \cdot (G_{an} \cdot Y_{an}^\sigma + (Y_{an}^{i\sigma Z} - Y_{an}^{i\sigma K})),$$

$$Y_{bm}^\sigma = -\bar{\bar{Q}}_{m0}^b(\Theta_N) \cdot (\Omega_b^{-1} a^{Z\sigma} - b^{K\sigma}) + Y_{bm}^{i\sigma Z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{Q}}_{mn}^b(\Theta_N) \cdot (G_{bn} \cdot Y_{bn}^\sigma + (Y_{bn}^{i\sigma K} - Y_{bn}^{i\sigma Z})),$$

$$m = 0,$$

$$0_N = \sigma(-1) \cdot \bar{\bar{Q}}_{00}^a(\Theta_N) \cdot (\Omega_a^{-1} a^{Z\sigma} - b^{K\sigma}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{Q}}_{0n}^a(\Theta_N) \cdot (G_{an} \cdot Y_{an}^\sigma + (Y_{an}^{i\sigma Z} - Y_{an}^{i\sigma K})),$$

$$0_N = -\bar{\bar{Q}}_{00}^b(\Theta_N) \cdot (\Omega_b^{-1} a^{Z\sigma} - b^{K\sigma}) + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{Q}}_{0n}^b(\Theta_N) \cdot (G_{bn} \cdot Y_{bn}^\sigma + (Y_{bn}^{i\sigma K} - Y_{bn}^{i\sigma Z})),$$

où,

$$\bar{\bar{Q}}_{mn}^a(\theta) = \frac{\theta}{\pi} \left( \frac{\sin(m-n)\theta}{(m-n)\theta} + \frac{\sin(m+n+1)\theta}{(m+n+1)\theta} \right), \quad \bar{\bar{Q}}_{mn}^b(\theta) = \frac{\theta}{\pi} \left( \frac{\sin(m-n)\theta}{(m-n)\theta} - \frac{\sin(m+n+1)\theta}{(m+n+1)\theta} \right).$$

Les équations obtenues avec  $m = 0$  permettent d'éliminer les vecteurs constants. Ainsi :

$$\forall \theta \in [0, \pi], \forall \varphi \in [0, 2\pi[, \forall \sigma = e, o, \forall m = 1, \dots, +\infty, \quad (163)$$

$$Y_{am}^\sigma = Y_{am}^{i\sigma K} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{S}}_{mn}^a(\Theta_N) \cdot (G_{an} \cdot Y_{an}^\sigma + (Y_{an}^{i\sigma Z} - Y_{an}^{i\sigma K})),$$

$$Y_{bm}^\sigma = Y_{bm}^{i\sigma Z} + \sum_{n=1}^{+\infty} \bar{\bar{S}}_{mn}^b(\Theta_N) \cdot (G_{bn} \cdot Y_{bn}^\sigma + (Y_{bn}^{i\sigma K} - Y_{bn}^{i\sigma Z})), \text{ où :}$$

$$S_{mn}^a(\theta) = Q_{mn}^a(\theta) - Q_{m0}^a(\theta) \cdot Q_{0n}^a(\theta) / Q_{00}^a(\theta), \quad S_{mn}^b(\theta) = Q_{mn}^b(\theta) - Q_{m0}^b(\theta) \cdot Q_{0n}^b(\theta) / Q_{00}^b(\theta).$$

Tout comme pour le cas de l'antenne alimentée par sonde, les vecteurs inconnus sont dès à présent collectés dans des vecteurs colonnes  $Z_{a,b}^\sigma = \{Y_{a,bn}^\sigma\}_{n=1}^{+\infty}$  et tout les membres de droite dans les vecteurs colonnes connus  $B_{a,b}^\sigma$  qui contiennent les caractéristiques de la source. Sont de plus introduites les matrices infinies  $A_{a,b}$  de blocks  $N \times N$  composées des éléments décrivant la géométrie de l'antenne imprimée. Dans le cas étudié ici,  $A_{a,b} = \{A_{a,b}^{ps}\}_{p,s=1,\dots,N}$  où les blocks  $A_{a,b}^{ps} = \{A_{a,bmn}^{ps}\}_{n=1}^{+\infty}$  sont générés via (163). Ainsi, (163) peut être écrite sous les formes matricielles suivantes :

$$\forall \sigma = e, o, \forall \alpha = a, b, Z_\alpha^\sigma + A_\alpha Z_\alpha^\sigma = B_\alpha^\sigma. \quad (164)$$

Il est à noter que, comme pour le cas des sondes, chacun des coefficients du block  $A_{a,b}^{ps}$  est le produit de deux fonctions matricielles :

$$A_{a,bn}^{ps} = A_{a,bmn}^{ps(2)}\left(\left(\theta_p\right)_{p=1,\dots,N}\right) \cdot A_{a,bn}^{ps(1)}\left(\left(r_p, k_p, \eta_p\right)_{p=1,\dots,N}, k_0, \eta_0\right). \quad (165)$$

La seconde s'annule lorsque  $\forall p = 1, \dots, N, k_0 r_p \rightarrow 0$  et  $\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, q > p, r_p / r_q \rightarrow 0$ . Ceci implique que lors de la construction de (163), a été inversée la partie statique du problème associé avec chacun des disques sphériques en espace libre.

Par ailleurs, les évolutions des ces fonctions pour de grands ordres est :

$$\forall (p, q) = (1, \dots, N)^2, \forall \alpha = a, b,$$

$$\left(A_{\alpha n}^{ps(1)}\left(\left(r_p, k_p, \eta_p\right)_{p=1,\dots,N}, k_0, \eta_0\right)\right)_{p,q} = O\left(\frac{1}{n}\right) (n \rightarrow +\infty), \quad (166)$$

$$\left(A_{\alpha,mn}^{ps(2)}\left(\left(\theta_r\right)_{r=1,\dots,N}\right)\right)_{p,q} = O\left(\frac{1}{m-n}\right) (n \rightarrow +\infty), \quad \left(A_{\alpha,nn}^{ps(2)}\left(\left(\theta_r\right)_{r=1,\dots,N}\right)\right)_{p,q} = O(1) (n \rightarrow +\infty). \quad (167)$$

L'introduction de l'espace des suites de carrés sommables  $L_2^N = L_2 \times \dots \times L_2$  permet de voir que  $\|A_m\|_{L_2^N} < +\infty$ , i.e. les  $A_\alpha$  sont compacts. De la même manière  $\|B_{a,b}^\sigma\|_{L_2} < +\infty$ . De cette façon, il est certain que (163) est une équation matricielle de Fredholm de seconde espèce assurant au problème d'être bien posé et inversible dont l'unique solution est donnée par  $X_\alpha^\sigma = (I + A_\alpha)^{-1} B_\alpha^\sigma$ . De plus, la solution associée à l'équation tronquée à l'ordre  $M$  est donnée par :

$$\forall \sigma = e, o, \forall \alpha = a, b,$$

$$X_{\alpha}^{\sigma M} = \left( I_{N(M-m+1)} + A_{\alpha}^M \right)^{-1} \cdot B_{\alpha}^{\sigma M}, \quad (168)$$

où chaque block de la matrice  $N \times N A_{\alpha}^M$  possède la dimension  $(M - m + 1) \times (M - m + 1)$ .

La dernière étape nécessaire à la vérification de la condition de bord provient de l'étude, pour de grandes valeurs de  $m$ , des coefficients  $A_{a,bmn}^{ps}$  et  $B_{a,b}^p$ . Les relations (162) montrent que ces coefficients évoluent en  $O(m^{-1})$ . Ainsi, toutes les conditions requises en 4.5.2.1 et 4.5.2.2 sont complètement satisfaites par la solution de l'équation matricielle (163). Finalement, l'ensemble des conditions requises quant à l'existence et l'unicité de la solution du problème est vérifié.

#### 4.5.4 Résultats numériques

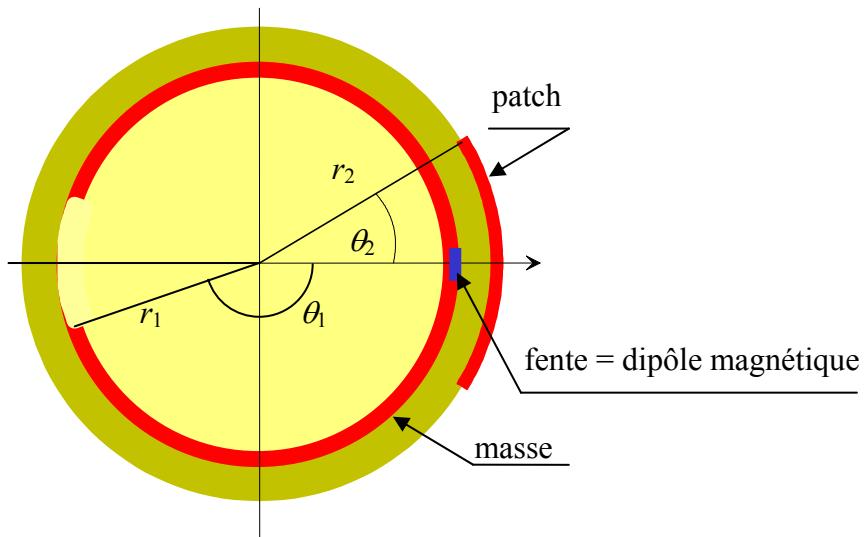
Un certain nombre de calculs sont réalisés. Ils concernent tout d'abord une antenne circulaire conformée sur sphère, alimentée par fente, et dont le substrat est épais. Puis, le cas du substrat fin est pris en compte et enfin l'association avec une lentille est traitée.

##### 4.5.4.1 Antenne avec substrat épais

L'antenne à substrat épais étudiée alimentée par fente est décrite de la façon suivante :

$$\theta_{patch} = \theta_2 = 18^\circ, r_1/r_2 = 0.50, \epsilon_r 1 = 1.0, \epsilon_r 2 = 1.3, \mu_r 1 = \mu_r 2 = 1.0 \quad (169)$$

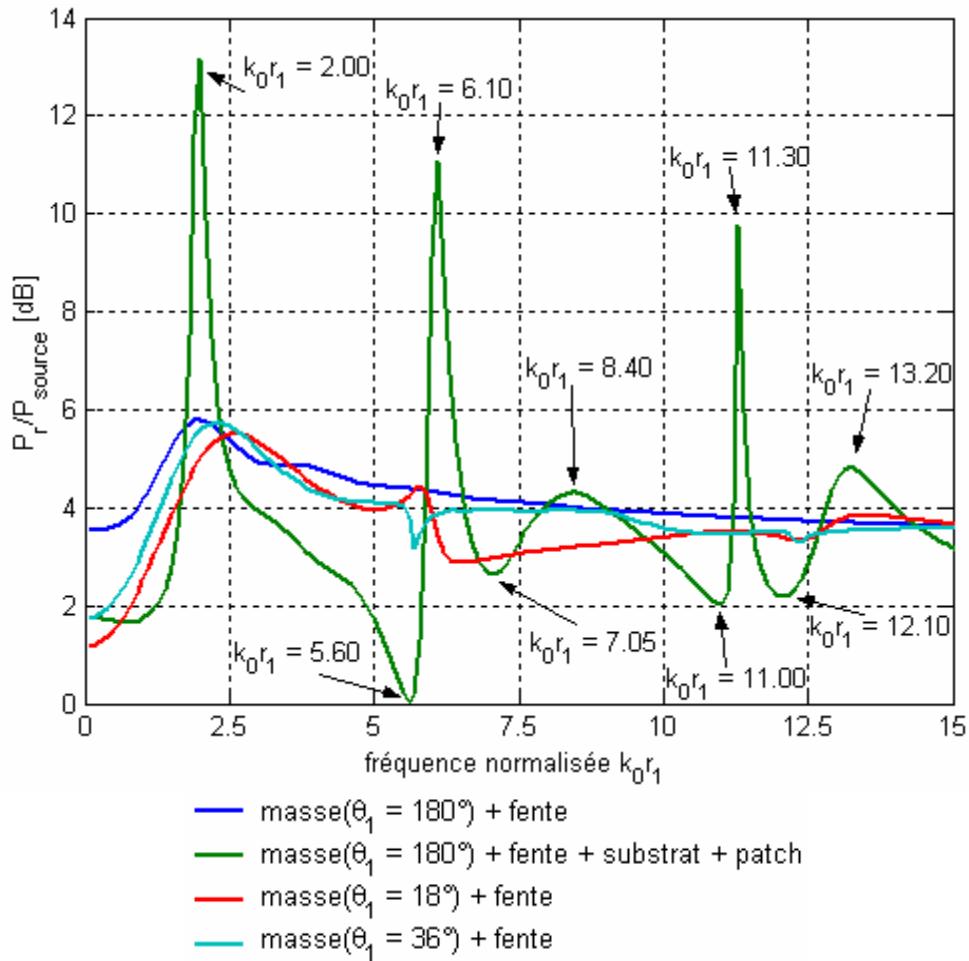
Le schéma correspondant est donné en **Figure 28**.



**Figure 28** Schéma de l'antenne imprimée circulaire alimentée par fente et à substrat épais..

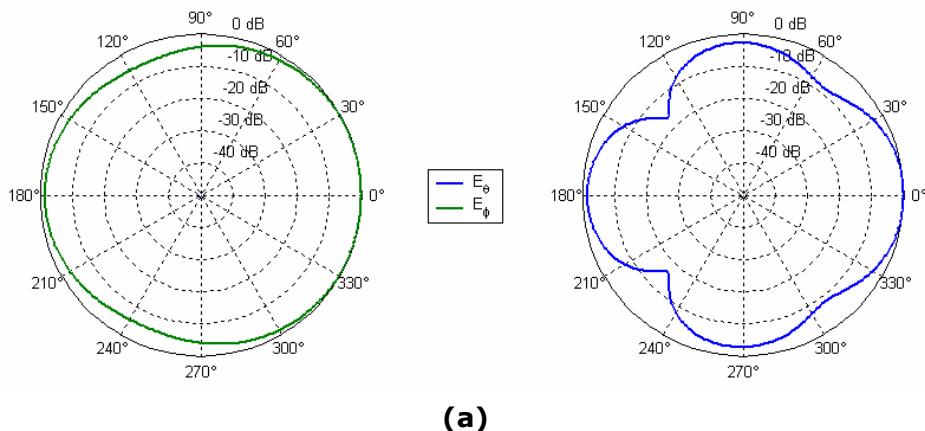
Afin de déterminer les fréquences de résonances, la puissance rayonnée normalisée, qui est directement liée à la partie réelle de l'impédance, est calculée et représentée en **Figure 29**. Ceci permet d'obtenir les diagrammes

de rayonnement en champ lointain pour les trois principales résonances comme le montre la **Figure 30** en plans *E* et *H*.

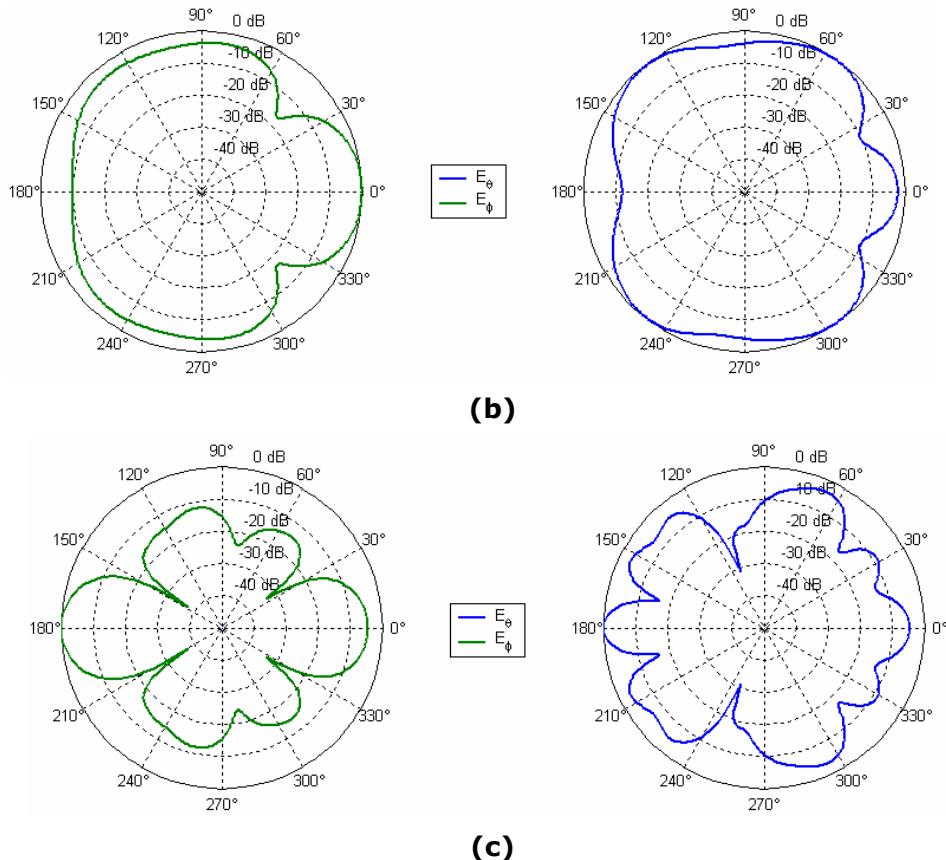


**Figure 29** Puissance rayonnée normalisée de la structure décrite en (169).

Un point important ressort de ces diagrammes : le rayonnement arrière est important. De plus, le nombre de lobes dans le demi plan avant *E* est  $2n+1$  lorsque  $n$  désigne l'ordre de la résonance considérée.



(a)



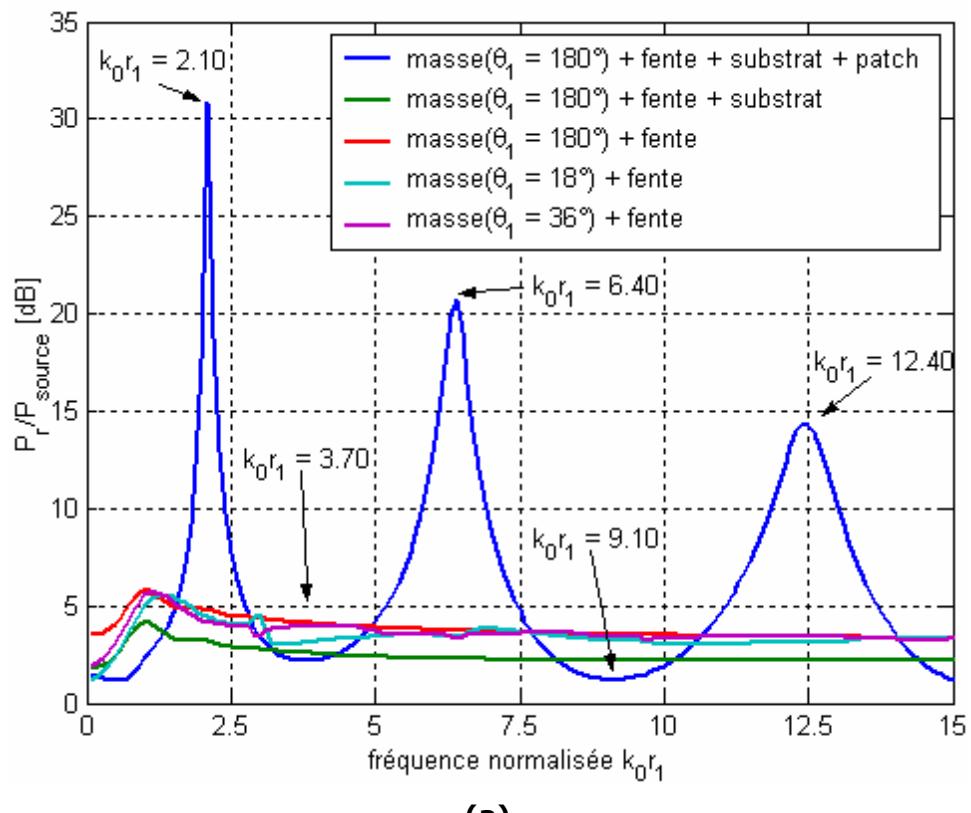
**Figure 30** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de la structure décrite en (169) pour les premières résonances (a)  $k_0r_1 = 2.00$ , (b)  $k_0r_1 = 6.10$ , (c)  $k_0r_1 = 11.30$ .

#### 4.5.4.2 Antenne avec substrat fin

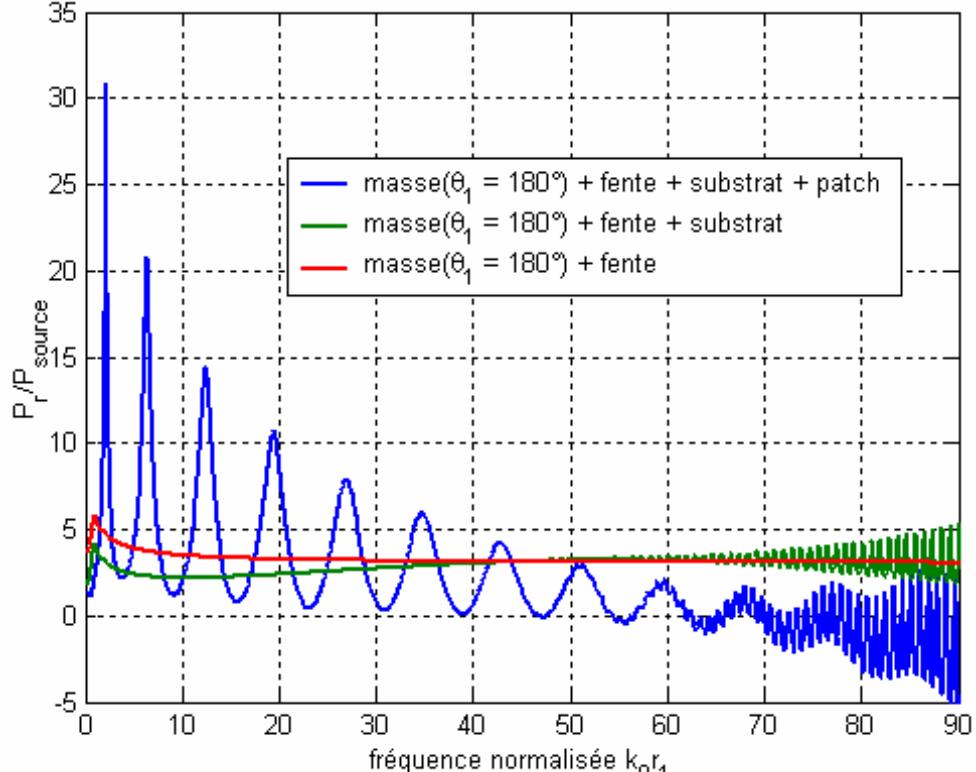
Après avoir traité le cas d'antennes sur substrat épais est maintenant étudié le cas d'antennes imprimées sur substrat fin. La géométrie de l'antenne est décrite en (170).

$$\theta_{patch} = \theta_2 = 18^\circ, r_1/r_2 = 0.97, \epsilon_r 1 = 1.0, \epsilon_r 2 = 1.3, \mu_r 1 = \mu_r 2 = 1.0 \quad (170)$$

Afin de déterminer les résonances associées à cette structure, la puissance rayonnée normalisée, ou encore résistance de diffusion, est représentée en **Figure 31**. Il en ressort une courbe de résonance très similaire à celle proposée en **Figure 4** dans le cadre de l'alimentation centrée. Ceci provient du fait que la géométrie est rigoureusement identique. Seule l'excitation diffère. Donc les résonances liées uniquement à la structure de la géométrie ne peuvent que réapparaître : résonance due à la masse, résonances en hautes fréquences dues à la faible épaisseur du substrat. Les résonances dues au patch diffèrent car les modes excités par la fente sont différents de ceux excités par la sonde coaxiale centrée. Ces courbes de résonances permettent d'obtenir les diagrammes de rayonnement aux résonances principales comme données en **Figure 32**.



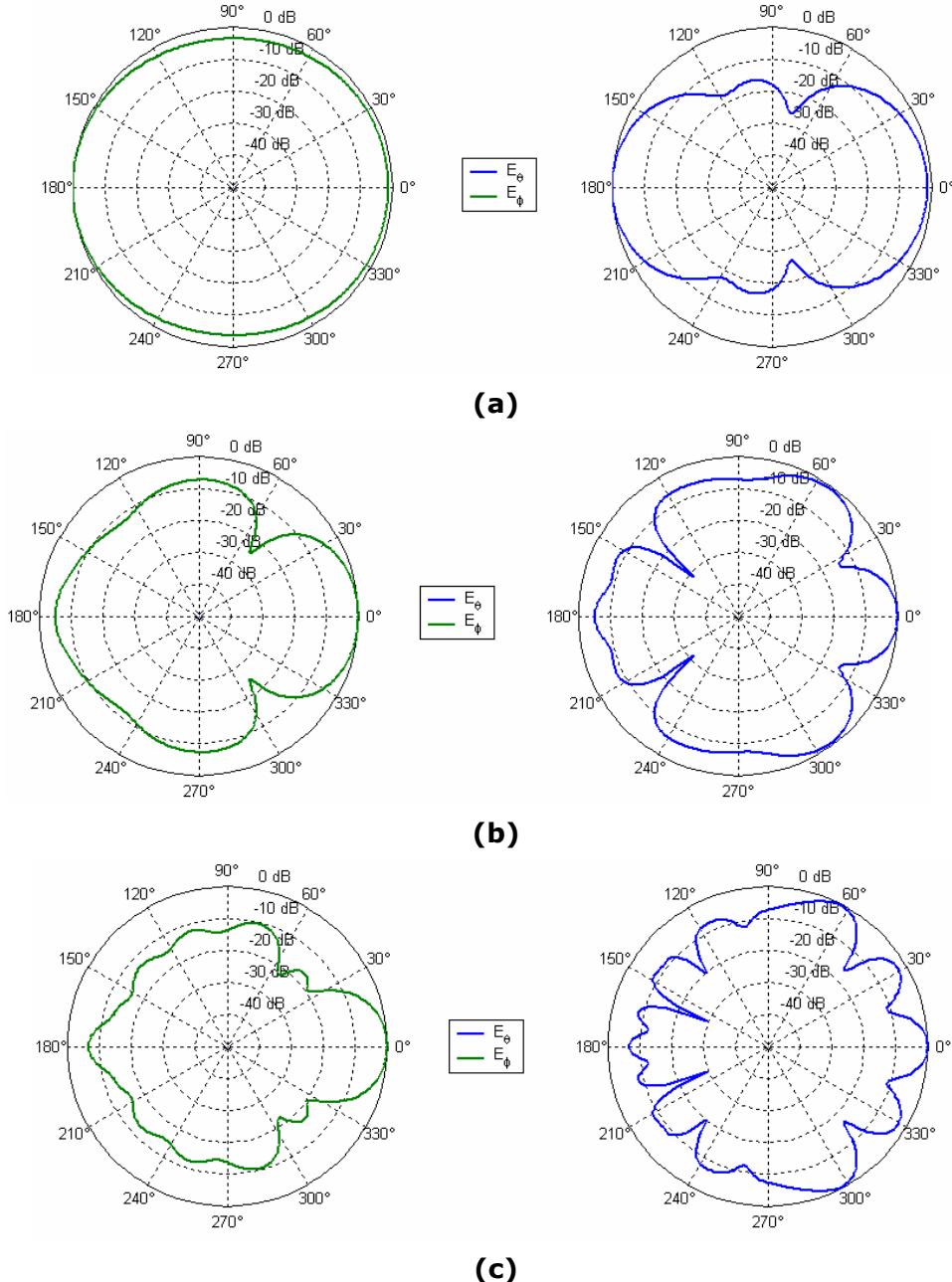
(a)



(b)

**Figure 31** Puissance rayonnée normalisée de la structure décrite en (170), (a) sur une large bande de fréquence, (b) sur une bande de fréquence réduite.

Des diagrammes de rayonnement donnés en **Figure 32**, ressortent un certain nombre de résultats. Tout d'abord, le nombre de lobes est relié à l'ordre de résonance de la même manière que pour le cas du substrat épais. Par contre, le fait de considérer un substrat fin permet de réduire sensiblement le rayonnement arrière.

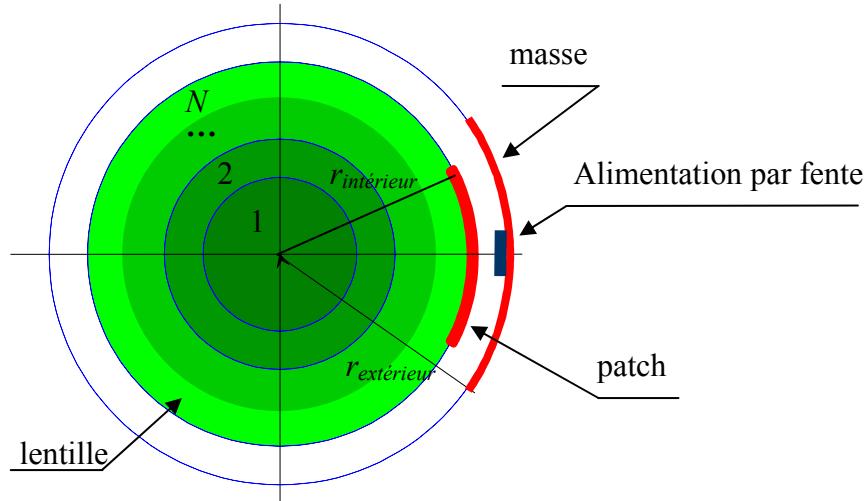


**Figure 32** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de la structure décrite en (170) pour les premières résonances (a)  $k_0 r_1 = 2.10$ , (b)  $k_0 r_1 = 6.40$ , (c)  $k_0 r_1 = 12.40$ .

#### 4.5.4.3 Antenne associée à une lentille discrète homogène de Lüneburg

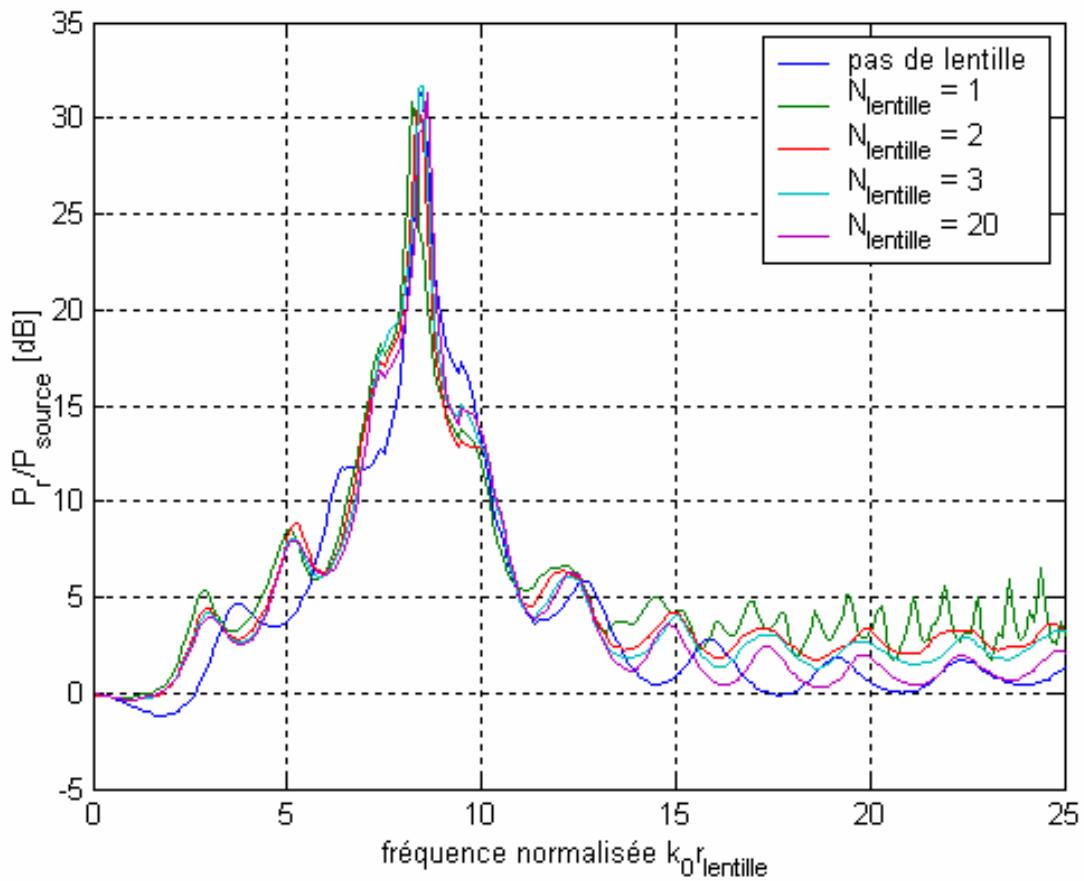
En plus d'antennes conformées sur sphère, la technique de calcul permet également de traiter l'association à une lentille discrète homogène de Lüneburg dont la distribution est donnée en (105). L'antenne conforme circulaire est décrite en (171). La structure complète est décrite en **Figure 33**.

$$\theta_{int} = 1^\circ, \theta_{ext} = 2^\circ, r_{int}/r_{ext} = 0.99, \varepsilon_r = 1.0, \mu_r = 1.0. \quad (171)$$



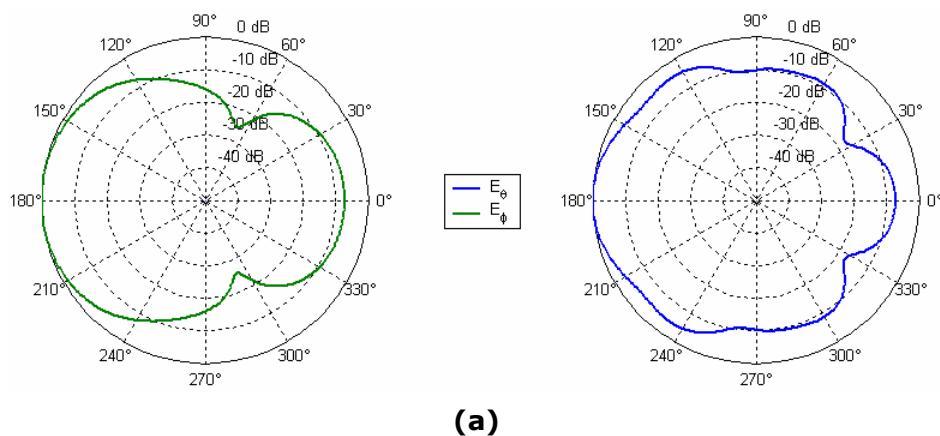
**Figure 33** Vue en coupe de l'association lentille de Lüneburg discrète homogène et antenne conformée sur sphère alimentée par fente.

Afin de déterminer les fréquences de résonance de l'association, la puissance rayonnée normalisée, ou encore résistance de diffusion normalisée, est représentée en **Figure 34**. Comme pour le cas de la sonde centrée, la fréquence de résonance principale varie avec le nombre de couche, mais de façon moindre. La raison de cette variation de la résonance principale est identique au cas de la sonde centrée : la lentille est placée dans la zone réactive de l'antenne. Ainsi, la couche diélectrique externe de la lentille a tendance à désadapter l'antenne. Ceci explique le fait que lorsque le nombre de coquilles croît, la permittivité de la coquille externe se rapproche de celle de l'espace libre et repositionne la résonance de la structure. Par ailleurs, le cas où la lentille est homogène,  $N=1$ , des ondulations apparaissent à partir de  $k_0 r_{max} = 15.0$ . Ces ondulations apparaissent à de plus hautes fréquences pour les autres cas. Cela provient du fait que l'épaisseur de la coquille, pour le cas de la lentille homogène, est très importante. Du coup, la résonance associée a lieu en « basses fréquences ». Alors que dans les cas où le nombre de coquilles augmente, l'épaisseur des coquilles diminue et les résonances associées à ces coquilles apparaissent à de plus hautes fréquences. Ces oscillations disparaissent lorsque le nombre de coquilles devient infini. Ceci correspond au cas continu.

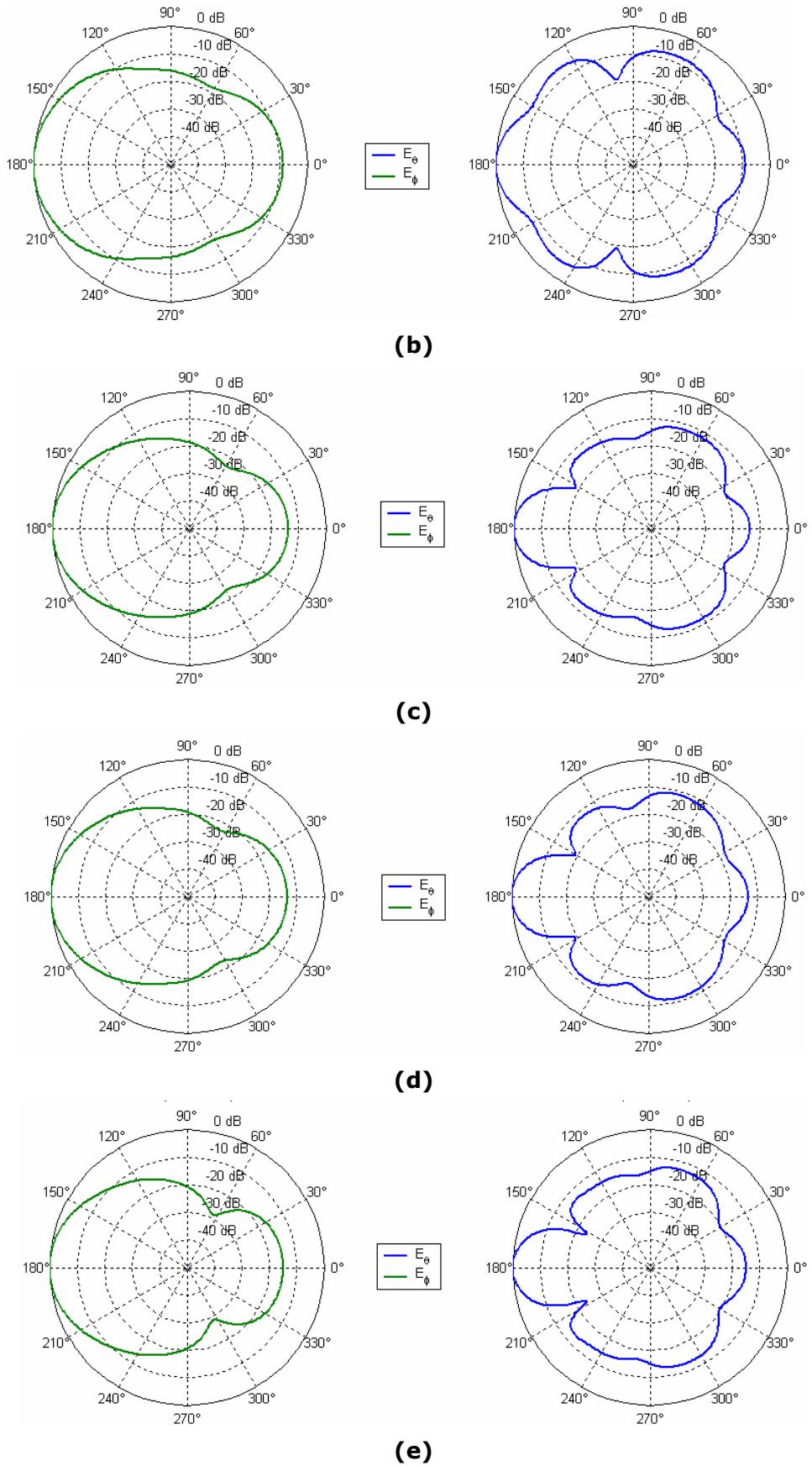


**Figure 34** Puissance rayonnée normalisée de l’association lentille-antenne circulaire décrite en (171).

Les diagramme de rayonnement en champ lointain associés à cette structure pour différent nombre de coquilles composant la lentille sont donnés en **Figure 35**. Il ressort une compression du lobe principal, surtout en plan E. Si son niveau est faible, cela provient du fait que la dimension angulaire de l’antenne est importante. Ainsi, le diamètre de la lentille est faible en termes de longueur d’onde à la résonance :  $k_0 r_{max} = 8.45$ , ce qui correspond à  $r_{lentille} = 1.33\lambda_0$ .



(a)



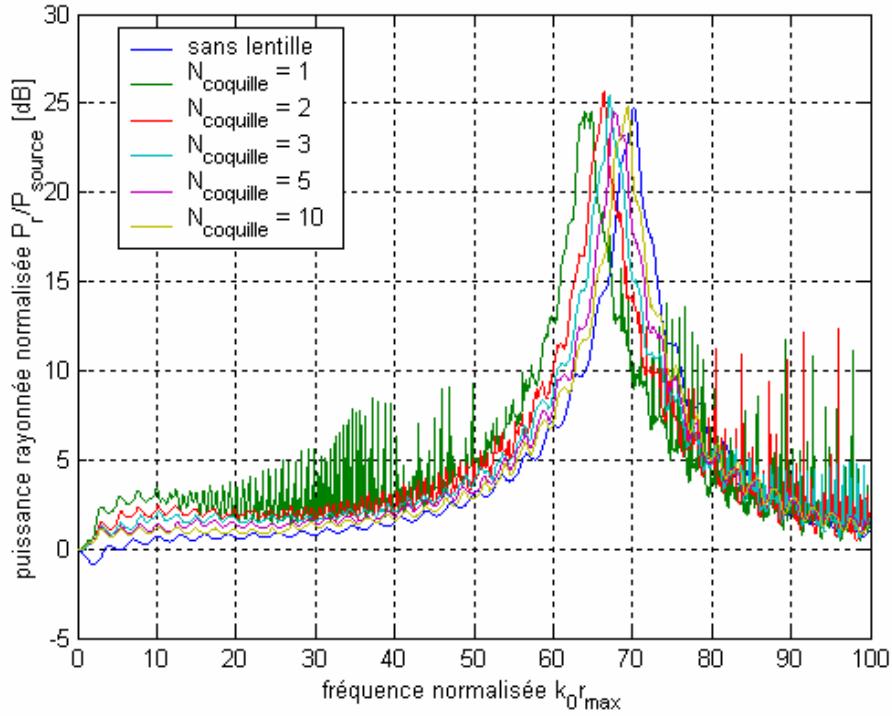
**Figure 35** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'association lentille-antenne circulaire décrite en (171) pour la première résonance (a)  $N = 0$ ,  $k_0 r_{ext} = 8.45$ , (b)  $N = 1$ ,

$k_0 r_{ext} = 8.20$ , (c)  $N = 2$ ,  $k_0 r_{ext} = 8.35$ , (d)  $N = 3$ ,  $k_0 r_{ext} = 8.45$ , (e)  $N = 20$ ,  $k_0 r_{ext} = 8.60$ .  $N$  représente le nombre de coquilles composant la lentille. Le plan E est à droite et le plan H est à gauche.

Pour que le phénomène de convergence ressorte nettement, il est nécessaire que la lentille possède un diamètre de plusieurs longueurs d'onde, comme l'indique le chapitre 2. Le choix est donc fait de prendre une pastille résonant aux environs de  $k_0 r_{lentille} = 70$ , ceci correspond à un rayon de lentille d'environ  $11\lambda_0$ . La méthode de la cavité indique alors que la demie ouverture angulaire de la pastille excitatrice excitée par fente doit être de l'ordre de  $0.01^\circ$ . La structure étudiée alors définie comme suit :

$$\theta_{int} = 0.01^\circ, \theta_{ext} = 0.02^\circ, r_{int}/r_{ext} = 0.999, \epsilon_r = 1.0, \mu_r = 1.0. \quad (172)$$

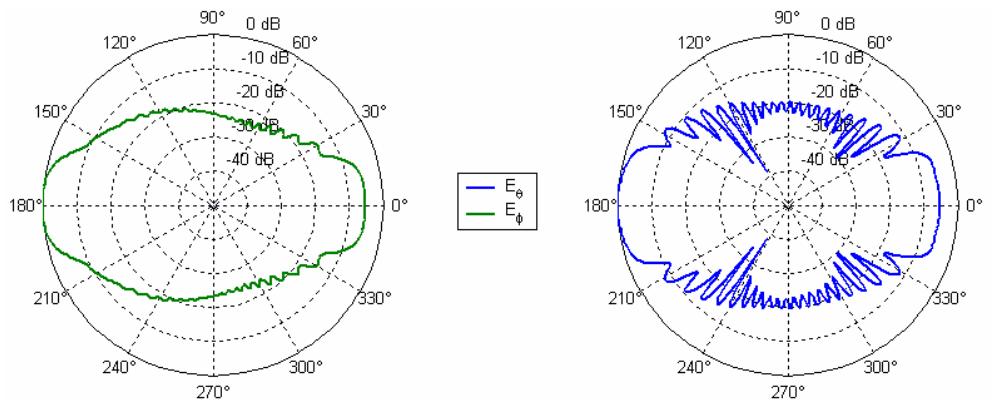
La puissance rayonnée normalisée, ou encore résistance de diffusion normalisée, est donnée en **Figure 36**. La résonance de l'antenne pastille seule est bien de l'ordre de 70 en terme de fréquence normalisée. Par ailleurs, l'ajout de lentille décale bien la résonance vers les basses fréquences. En fait, les remarques sont identiques à celles déduites du cas où la lentille est de faible dimension, à ceci près que la résonance principale est déplacée vers les hautes fréquences normalisées : les oscillations secondaires diminuent en amplitude pour correspondre parfaitement avec le cas sans lentille lorsque le nombre de coquilles composant la lentille croît à l'infini. Ceci correspond au cas limite continu.



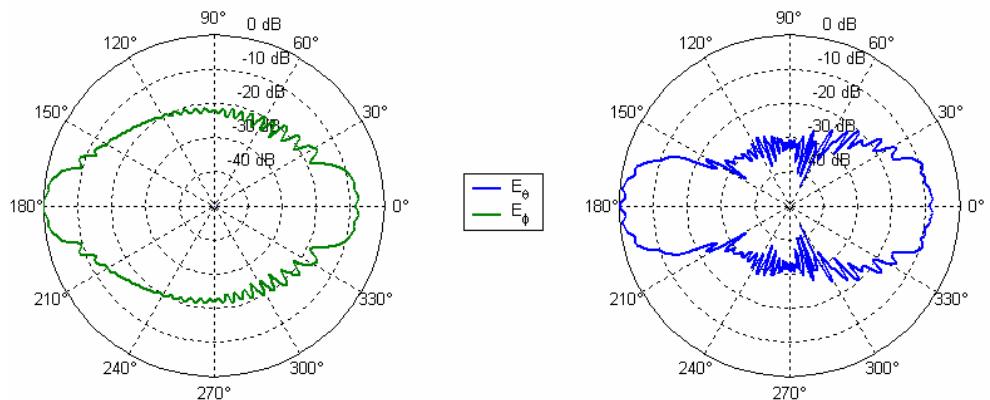
**Figure 36** Puissance rayonnée normalisée de l'association lentille-antenne circulaire décrite en (172).

Les diagrammes de rayonnement en champ lointain obtenus sont donnés en **Figure 37**. Le phénomène de compression du lobe est mis en avant. Par ailleurs, pour une lentille composée de 3 coquilles ou plus, la

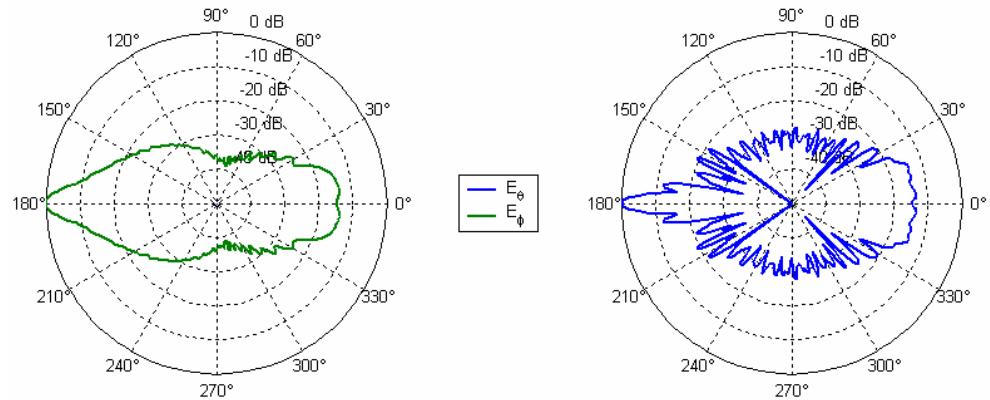
focalisation du faisceau varie peu. De plus, plus le nombre de coquilles augmente, plus le niveau des lobes secondaires diminue.



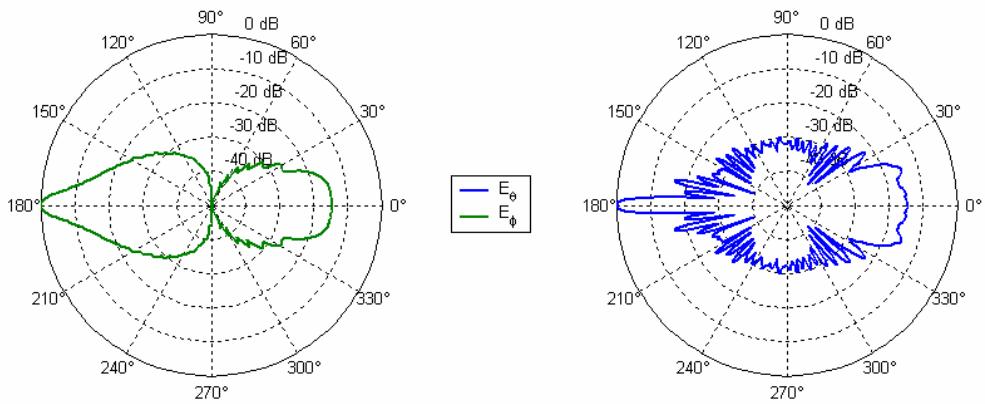
(a)



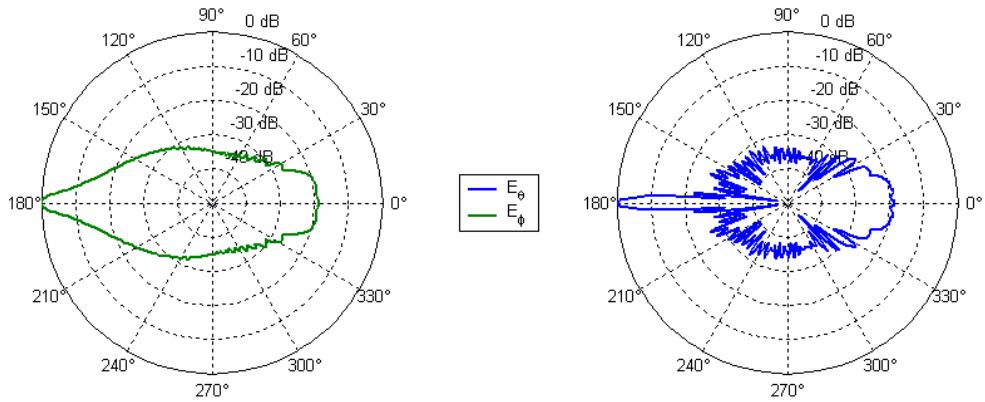
(b)



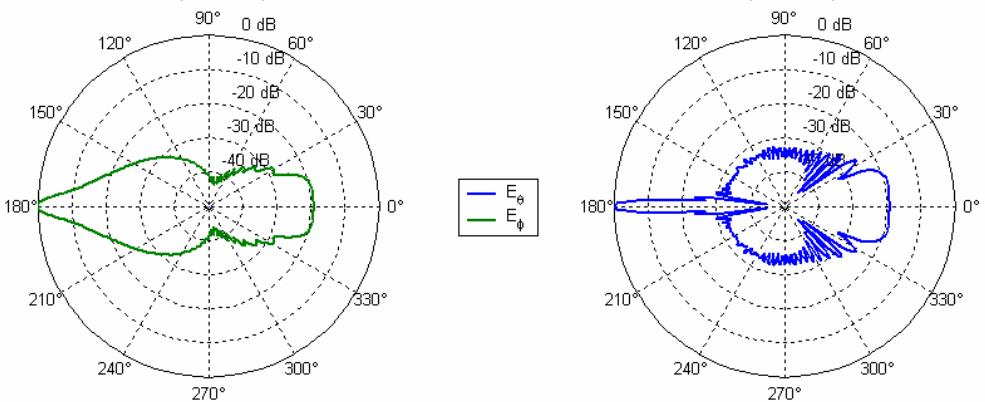
(c)



(d)



(e)

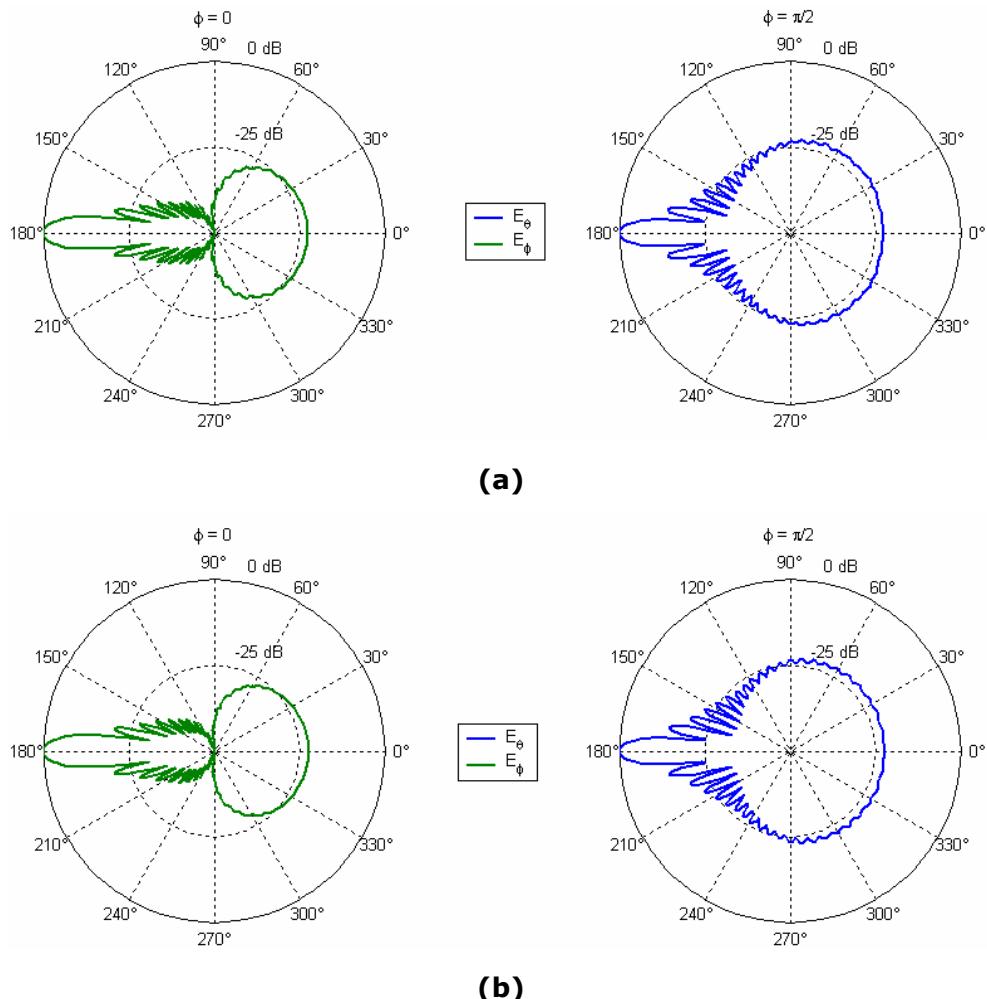


(f)

**Figure 37** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'association lentille-antenne circulaire décrite en (172) pour la première résonance (a)  $N = 0$ ,  $k_0 r_{ext} = 70.15$ , (b)  $N = 1$ ,  $k_0 r_{ext} = 64.04$ , (c)  $N = 2$ ,  $k_0 r_{ext} = 66.43$ , (d)  $N = 3$ ,  $k_0 r_{ext} = 67.08$ , (e)  $N = 5$ ,  $k_0 r_{ext} = 67.81$ , (f)  $N = 10$ ,  $k_0 r_{ext} = 69.43$ .  $N$  représente le nombre de coquilles composant la lentille. Le plan  $E$  est à droite et le plan  $H$  est à gauche.

#### 4.5.5 Validations

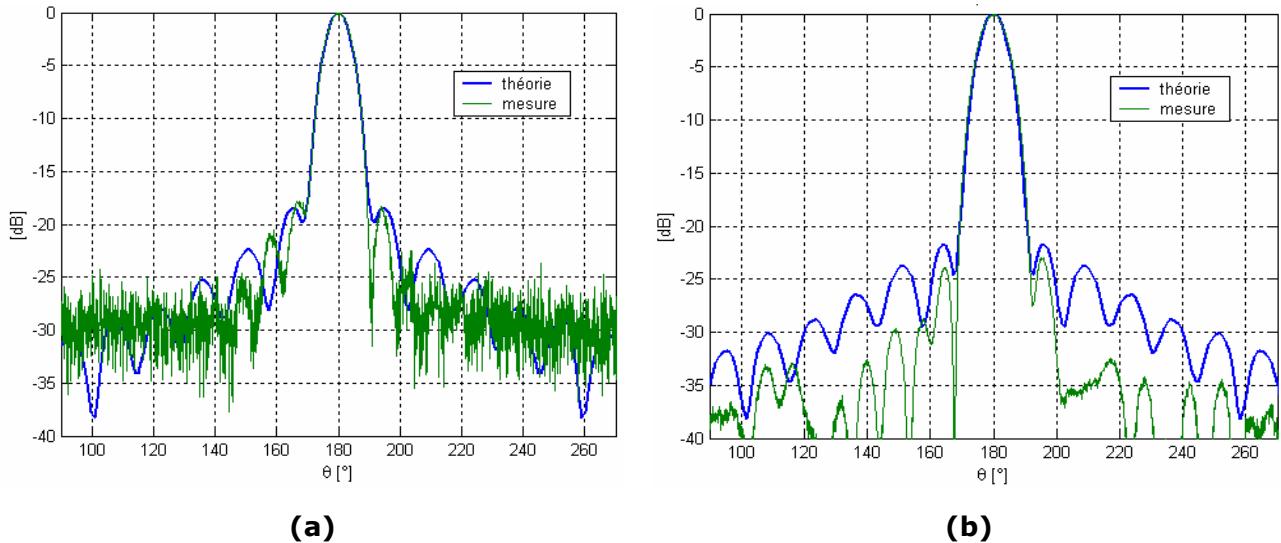
Un certain de validation est réalisé. La première consiste en la comparaison avec la théorie développée au chapitre 3 pour un dipôle magnétique tangentiel placé sur une lentille discrète homogène de Lüneburg, composée de 20 coquilles, à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 25.5$ . Les résultats obtenus, **Figure 38**, sont pratiquement identiques. Ceci provient du fait que la régularisation analytique est une généralisation de la diffusion développée au chapitre 3. En effet, elle contient, comme pour la théorie du chapitre précédent, les conditions de continuité à l'interface entre deux diélectriques. Mais elle contient en plus les conditions limites imposées par la présence du métal.



**Figure 38** Dipôle magnétique tangentiel illuminant une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 couches à la fréquence normalisée  $k_0 r_{max} = 25.5$  via deux méthodes : (a) MAR. (b) théorie de diffusion développée au chapitre 3.

Par ailleurs, des mesures ont été réalisées avec une antenne circulaire alimentée par fente centrée illuminant la lentille Eccostok Luneberg lens-P16© à la fréquence 6.0GHz, **Figure 39**. Il en ressort que l'allure générale des diagrammes de rayonnement est la même. Mais, la théorie surestime légèrement le niveau des lobes secondaires.

Ce décalage reste à relativiser car il apparaît à 20dB en deçà du maximum de rayonnement. Plusieurs raisons peuvent être invoquées pour justifier ce décalage. Premièrement, la convergence peut encore être améliorée. Ceci influence de façon certaine les résultats obtenus. De plus, l'utilisation simultanée de fonctions de Bessel et de Neumann génère une forte sensibilité sur le nombre de conditionnement du système linéaire régularisé. Une possible voie permettant de résoudre ce problème est de trouver une autre architecture de remplissage des matrices de régularisation afin de réduire au minimum l'influence de ces instabilités numériques.



**Figure 39** Comparaison théorie – mesure du diagramme de rayonnement en champ lointain d'une antenne patch alimentée par fente centrée et placée sur la lentille Eccostok Luneberg lens-P16©. Les paramètres utilisée sont :  $k_0 r_{max} = 25.5$  ( $f = 6.0\text{GHz}$ ),  $r_{int}/r_{ext} = 99\%$ ,  $\theta_{ext} = 2\theta_{int} = 4.0^\circ$ . (a) Plan E. (b) Plan H.

#### 4.5.6 Conclusion

La régularisation analytique appliquée à l'association d'une lentille sphérique discrète à une antenne circulaire imprimée alimentée par fente centrée fonctionne correctement. Malgré tout, comme le montre la comparaison théorie – mesure, le diagramme peut encore être amélioré. Ces petites différences sont associées à la présence des structures métalliques qui ont tendance déconditionner le système final lorsque de simples variations sont ajoutées. Ces petites variations sont le fruit de l'utilisation de Bessel de première espèce et de Neumann qui évoluent de façon antagoniste. La sensibilité numérique est donc un paramètre extrêmement sensible.

## 4.6 Conclusion

La méthode de régularisation analytique est généralisée à plusieurs configurations : elle permet la prise en compte d'un nombre quelconque de structures métalliques circulaires conformées sur sphères concentriques, contrairement à la théorie de diffusion développée dans le chapitre 3. De plus, elle peut inclure des lentilles discrètes à distribution sphérique quelconque. Le cas où la sonde est centrée est complètement opérationnel, à l'exception de l'estimation de l'impédance dont une étude plus approfondie doit être effectuée : la technique numérique employée diminue d'un ordre deux la vitesse de convergence de la série mise en jeux. Il apparaît donc nécessaire de repenser l'approche amenant à l'estimation de l'impédance. Le cas où la sonde est décentrée ne fonctionne que pour les cas où aucune calotte métallique n'est présente. Il reste donc un certain travail à effectuer sur les fonctions angulaires, représentatives des calottes métalliques, quant au décentrage de la sonde. Lorsque l'alimentation de l'antenne patch est réalisée par fente, les prévisions faites par la MAR sont cohérentes avec les résultats expérimentaux. Malgré tout, en raison de légers problèmes de convergence et d'instabilités numériques, les niveaux des lobes secondaires sont légèrement surestimés.

Par voie de conséquence, un certain travail reste à faire sur la convergence dans les cas de sonde décentrée ou de fente centrée. L'analyse des solutions de l'équation différentielle permettrait de résoudre le cas d'une fente décentrée, et par la même occasion, d'une fente longue. De plus, cette technique semble appropriée à l'étude de grand réflecteurs alimentés par des antennes patches, plus physiques que les sources de Huygens ou point source couramment utilisées, car l'effet d'ombrage créé par la source est pris en compte dans la MAR et non dans les cas de source de Huygens, point source, etc.

Par ailleurs, les logiciels commerciaux, lorsqu'ils parviennent à prédire un résultat, ce qui se produit uniquement si la structure reste de faible dimension en termes de longueur d'onde, le font dans des temps beaucoup trop important. Ainsi, l'étude des lentilles en est exclue. Ceci justifie pleinement le développement de cette technique de régularisation, qui, lorsqu'elle est au point, comme c'est le cas pour les alimentations par sonde et fente centrées, s'avère être extrêmement rapide et très précise dans ces prédictions, même lorsque les structures sont de grandes dimensions.

## 4.7 Bibliographie

A.G. Pino, A. M. A.-A., J.O. Rubinos-Lopez (2000). "An Omnidirectional Dual-Shaped Reflector Antenna." Microwave Optical Technology Letters **27**(5): 371-374.

B. Jecko, F. J., M. Himdi, J.P. Daniel (2000). Design and Tehcnologies of 2D and 3D Antennas from L-Band up to V-Band. Fukuoka.

B. Ke, A. A. K. (1991). "Analysis of Spherical-Circular Microstrip Antennas." Proc. IEE **138**: 542-548.

Balanis, C. A. (1997). Antenna Theory: Analysis and Design. New York.

Bateman, H. (1953). Higher Transcendental Functions. New York, Toronto, London.

D. Colton, R. K. (1983). Integrale Equation Methods in Scattering Theory. New York.

Dudley, D. G. (1985). "Error Minimization and Convergence in Numerical Methods." Electromagnetics **5**(2-3): 89-97.

G.L. Hower, R. G. O., J.D. Earls, J.B. Schneider (1993). "Inaccuracies in Numerical Calculation of Scattering Near Natural frequencies of Penetrable Objects." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **41**(7): 982-986.

Harrington, R. F. (1961). Time Harmonic Electromagnetic Field. New York.

K.L. Won, S. F. H., H.T. Chen (1993). "Resonances and Radiation of a Superstrate-Loaded Spherical-Circular Microstrip Patch Antenna." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **41**(5): 686-690.

Kishk, A. A. (1993). "Annalysis of a Spherical Annular Microstrip Antenna." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **41**(3): 338-343.

M. Abramowitz, I. A. S. (1985). Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover.

M. Himdi, S. C., J.P. Daniel (2001). Technologie d'Antennes 2D et 3D en Mousse Métallisée. Paris.

Nosich, A. I. (1999). "The Method of Analytical Regularization in Wave-Scattering and Eigen-Value Problems: Foundations and Review of Solutions." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **41**(3): 25-49.

R.W. Ziolkowski, D. P. M., L.F. Libelo, G.E. Pisane (1988). "Scattering from an Open Spherical Shell having a Circular Aperture and Enclosing a Concentric Dielectric Sphere." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **36**(7): 985-999.

S.S. Vinogradov, E. D. V., A.I. Nosich, A. Atlintas (2000). "Analytical Regularization based Analysis of a Spherical Reflector Symmetrically Illuminated by an Acoustic Beam." J. Acoustical Soc. America **107**(6): 2999-3005.

S.S. Vinogradov, Y. A. T., V.P. Shestopalov (1980). "Summatory Equations with Kernels in the form of Jacobi Polynomials." Soviet Physics Doklady (English Translation) **25**(7): 531-532.

T.T. Chen, H. D. C., Y.T. Cheng (1997). "Full-Waves Analysis of the Annular-Ring Loaded Spherical-Circular Microstrip Antenna." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **45**(11): 1581-1583.

V. Radchenko, A. I. N., S.S. Vinogradov, J.P. Daniel (2000). "A Conformal Spherical-Circular Microstrip Antenna: Axisymmetric Excitation by an Electric Dipole." Microwave Optical Technology Letters **46**(3): 176-182.

Vinogradov, S. S. (1978). "A Soft Spherical Cap in the Field of a Plane Sound Wave." USSR J. Mathem. Physics Computat. Mathematics (English Translation) **18**(5): 244-249.

Vinogradov, S. S. (1983). "Reflectivity of a Spherical Shield." Radiophysics Quantum Electronics (English Translation) **26**(1): 78-88.

Wong, K. L. (1999). Design of Nonplanar Microstrip Antennas and Transmission Lines. New York.

Y.J. Guo, A. P., R.A. Sadeghadeh, S.K. Barton (1997). "A Circular Patch Antenna for Radio Lans." IEEE Transaction on Antennas and Propagation **45**(1): 177-178.

Y.J. Guo, R. J. L. (1997). "Patch Antenna Equivalent to Simple Monopole." Electronics Letters **33**(9): 727-728.



## **5. TECHNOLOGIES DE REALISATION - APPLICATIONS**

---

L'ensemble des chapitres précédents relève d'un aspect plus analyse théorique et génie logiciel quant aux lentilles sphériques et aux antennes conformes. Malgré tout, un certain nombre de problèmes technologiques, concernant leurs réalisations, sont à résoudre. Ainsi, le but ce chapitre est d'ouvrir ou d'approfondir un certain nombre de pistes à ce sujet. Dans un premier lieu sont traitées les antennes conformées sur mousse, puis les lentilles.

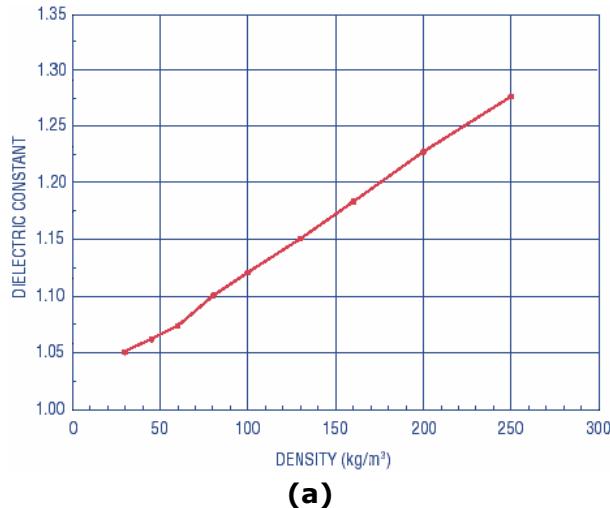
### **5.1 Matériaux mousse**

Les lentilles étudiées dans ce document sont à géométrie sphérique. Il apparaît alors tout naturel de les illuminer par des structures possédant le même type de courbure. Ainsi, l'utilisation d'antennes pastilles conformées sur sphères y est approprié, comme le montre le chapitre 4. Pour se faire, un certain nombre d'investigations sont réalisées. Tout d'abord, sont présentées les caractéristiques électromagnétiques du matériau, puis, sa métallisation, et enfin les techniques permettant de l'exploiter en micro ondes.

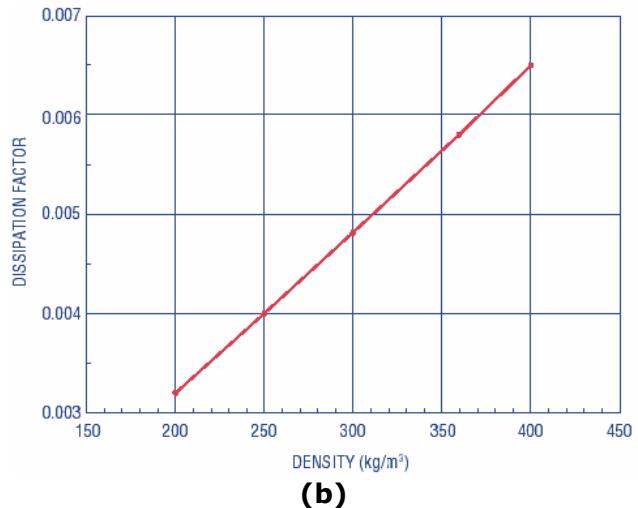
#### **5.1.1 Caractéristiques électromagnétiques**

Le matériau mousse utilisé au laboratoire est un mélange de différents plastiques plus ou moins expansés. Les plastiques mis en jeu sont le polychlorure de vinyle, le polyuréthane et le polystyrène. Les dosages sont au secret du constructeur et dépendent des propriétés mécaniques et/ou diélectriques recherchées. L'expansion est réalisée grâce à des réactions exothermiques à base d'acides au sein du mélange plastique permettant la formation de bulles de gaz, du dioxyde de carbone majoritairement, générant cette expansion. Plus la durée d'expansion est importante et plus la densité du matériau obtenu est faible. Trois types de mousse sont utilisés ici, correspondant à des mélanges différents et des densités différentes : le matériau noté M1, de densité  $200\text{kg.m}^{-3}$ , le matériau noté M2 de densité  $360\text{kg.m}^{-3}$  et le matériau noté M3 de densité  $110\text{kg.m}^{-3}$ . Ces valeurs mettent en évidence une propriété importante de ce type de matériau : le très faible poids.

Les mélanges utilisés sont à base de différents matériaux plastiques expansés. Par conséquent, les permittivités diélectriques relatives doivent se situer entre celle de l'air, 1.00, et celles des matériaux plastiques, entre 2.00 et 2.50 selon les plastiques. Le constructeur propose une gamme de résultats concernant la caractérisation de ses matériaux dans la bande 8.0GHz – 12.0GHz. Ces résultats sont proposés en **Figure 1**, **Figure 2** et **Figure 3** pour les permittivités diélectriques relatives et pertes diélectriques. Ainsi, dans la bande 8.0GHz – 12.0GHz, le matériau M1 a une permittivité diélectrique relative de 1.22 pour une tangente de pertes de  $3.2 \cdot 10^{-3}$ , alors que le matériau M2 possède une permittivité diélectrique relative de 1.45 pour une tangente de pertes de  $5.8 \cdot 10^{-3}$ . Le matériau M3 a une permittivité diélectrique relative de 1.14 et une tangente de pertes de  $1.9 \cdot 10^{-3}$ .

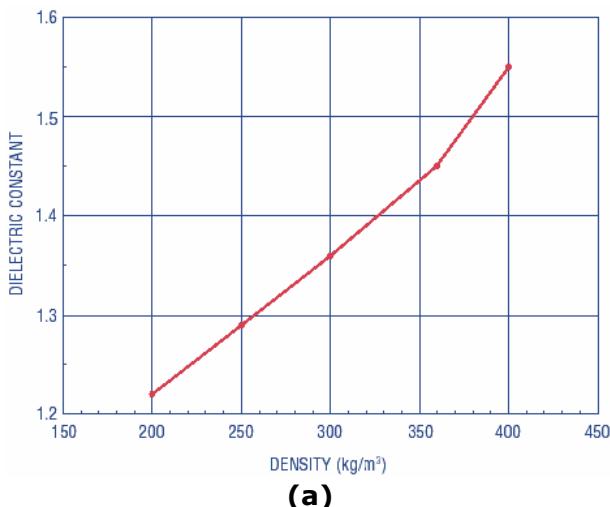


(a)

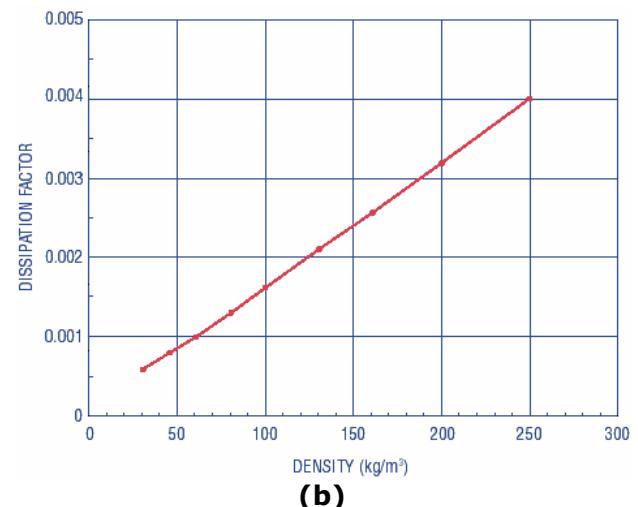


(b)

**Figure 1** (a) Permittivités diélectriques relatives et (b) pertes diélectriques données par le constructeur en bande X pour le matériau M1.

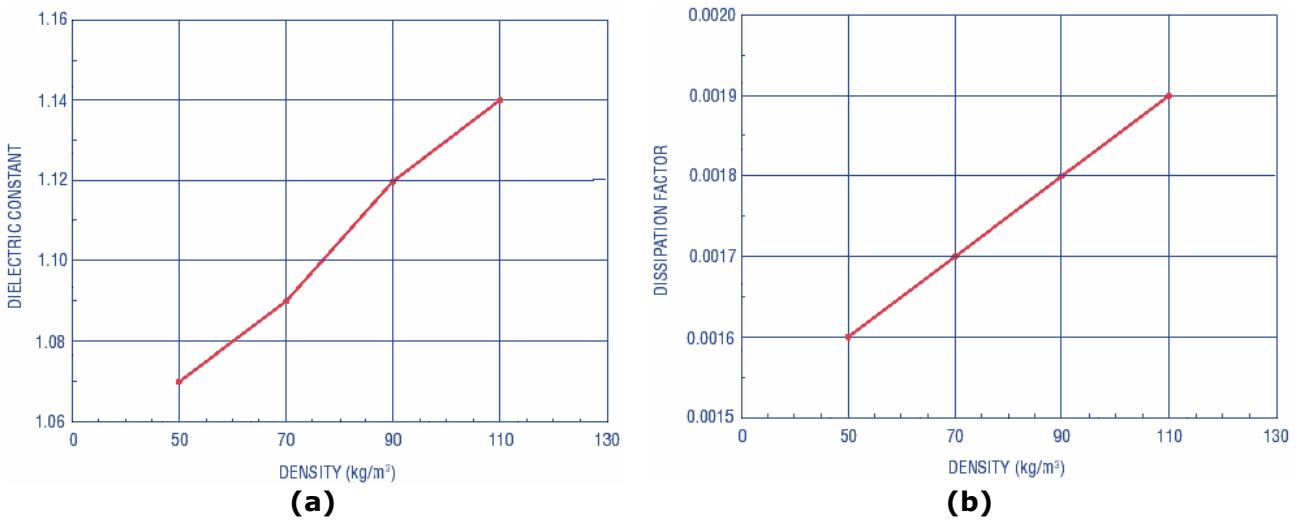


(a)



(b)

**Figure 2** (a) Permittivités diélectriques relatives et (b) pertes diélectriques données par le constructeur en bande X pour le matériau M2.



**Figure 3** (a) Permittivités diélectriques relatives et (b) pertes diélectriques données par le constructeur en bande X pour le matériau M3.

Ces résultats sont restreints à la bande X. Ainsi, il apparaît intéressant d'effectuer des caractérisations jusqu'en bande millimétrique. Deux techniques sont utilisées : la cavité résonnante et l'espace libre.

#### 5.1.1.1 Cavité résonnante

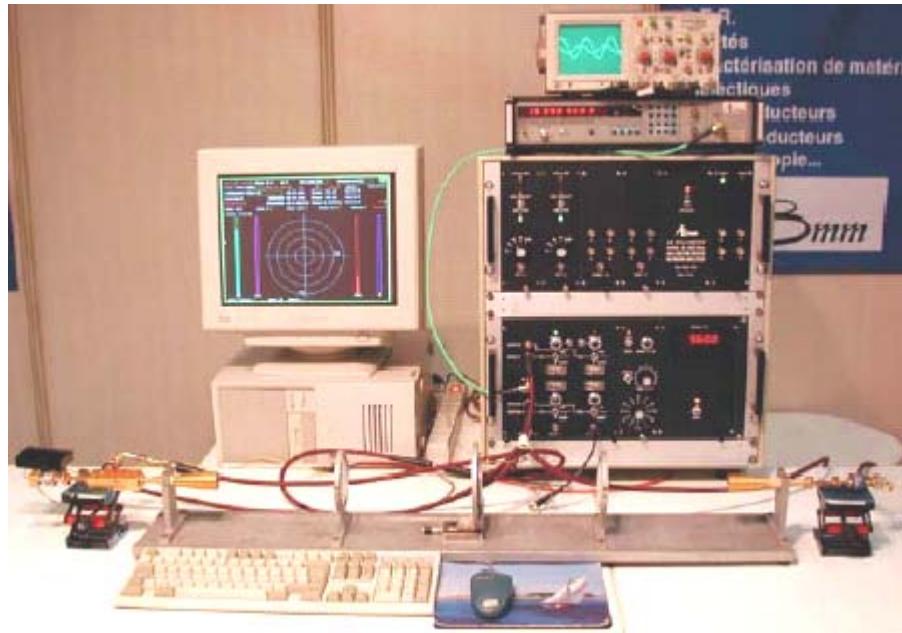
Il s'agit de placer un petit pavé de substrat de volume  $V_s$ , dans une cavité résonante monomode  $\text{TE}_{013}$  rectangulaire de volume  $V_c$ , fermée de part et d'autre par un émetteur et un récepteur. La fréquence de résonance à vide  $f_v$  de la cavité est au préalable déterminée et le niveau de puissance  $P_v$  transmise à vide est relevé. Ensuite, est recherchée la fréquence  $f_s$  de résonance de la cavité en présence du substrat. A cette fréquence, est également relevés la puissance transmise  $P_s$  en présence du substrat. Les parties réelles,  $\epsilon_r'$ , et imaginaires,  $\epsilon_r''$ , de la permittivité diélectrique relatives  $\epsilon_r$  se déduisent alors des formules suivantes :

$$\epsilon_r' = 1 + C_1 \frac{V_c}{V_s} \frac{f_v - f_s}{f_v}, \quad \epsilon_r'' = C_2 \frac{V_c}{2V_s} \left( \frac{1}{\sqrt{P_s}} - \frac{1}{\sqrt{P_v}} \right). \quad (1)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  sont préalablement déterminées via un étalonnage avec des matériaux dont les caractéristiques diélectriques sont connues.

#### 5.1.1.2 Espace libre

Dans cette technique, proposée par (D. Bourreau 2001), il est question de mesurer l'ensemble des paramètres S d'un dispositif composé de deux cornets émetteurs/récepteurs dont l'énergie est focalisée par deux lentille biconvexes ayant un point focal en commun où est placé l'échantillon de substrat comme le montre la Figure 4.



**Figure 4** Banc de caractérisation en espace libre.

#### 5.1.1.3 Résultats

L'ensemble des résultats obtenus est résumé dans le tableau suivant :

|                   |             | M2           |                            | M3           |                            |
|-------------------|-------------|--------------|----------------------------|--------------|----------------------------|
|                   |             | $\epsilon_r$ | $\operatorname{tg} \delta$ | $\epsilon_r$ | $\operatorname{tg} \delta$ |
| Constructeur      | 8.0–12.0GHz | 1.45         | $5.8 \cdot 10^{-3}$        | 1.14         | $1.9 \cdot 10^{-3}$        |
| Cavité résonnante | 91.7GHz     |              |                            | 1.126        | $4.3 \cdot 10^{-3}$        |
| Espace libre      | 71.0GHz     | 1.484        | $8.1 \cdot 10^{-3}$        | 1.119        | $2.8 \cdot 10^{-3}$        |
|                   | 112.0GHz    | 1.488        | $8.1 \cdot 10^{-3}$        | 1.121        | $2.8 \cdot 10^{-3}$        |

La méthode de la cavité résonnante ne peut être appliquée qu'avec le matériau M3. En effet, pour les matériaux M1 et M2, la forte atténuation rend les mesures inexploitables. Les résultats obtenus par la méthode de la cavité résonnante sont proches de ceux obtenus via la technique de mesure en espace libre. Malgré tout, il ressort de l'ensemble de ces mesures que la valeur de la permittivité diélectrique reste stable en fréquence, mais que les pertes augmentent avec la fréquence.

## **5.1.2 Métallisation**

En vue de leur utilisation en tant qu'éléments rayonnant en micro ondes, les matériaux mousse doivent être associés à des surfaces métalliques. Plusieurs procédés existent à ce sujet. Certains sont de type « dépôt de peinture », d'autres sont de l'ordre thermomécanique ou encore chimique.

### **5.1.2.1 Techniques dites de« dépôt de peinture »**

Un certain nombre de techniques visant au dépôt de métaux existent. La plus évidente est la sérigraphie. Il s'agit, en fait, de cuire à basse température, 120°C au maximum, une encre déposée sur du polypropylène préalablement séchée. Cette encre est un liant organique chargé à 75% en argent. Cette technique se limite aux structures planaires.

Le LEST, de l'Université de Bretagne Occidentale de Brest, a breveté deux autres techniques de ce type. Le premier, (Bretagne 2002), consiste en un dépôt directe de peinture dont l'épaisseur est dictée par la technique de dépôt utilisée : spray, trempé, pochoir, pinceau. La seconde technique consiste en la métallisation par clinquant cuivre-laiton. Elle permet de réaliser des structures tridimensionnelles en l'associant avec de la mousse Rohacell ©.

### **5.1.2.2 Procédé thermomécanique**

Le dépôt de métal par procédé thermomécanique est en fait le pressage à chaud, 170°C sous une pression de 10bar, d'un feuillard de cuivre sur du polypropylène (Tarot 1995). La face du feuillard qui est en contact direct avec le polymère est au préalable oxydée pour mieux accrocher. Les antennes ou circuits sont ensuite obtenus par le procédé classique de gravure photo lithographique.

Ce procédé thermomécanique est repris pour réaliser un stratifié par l'association du matériau M1 avec un feuillard de cuivre de 17.5µm d'épaisseur par l'intermédiaire d'une fine pellicule de matériau, en l'occurrence un Prépreg ©, semi polymérisé. Le temps de pressage à chaud est de 30 minutes. Ce temps correspond en fait au temps nécessaire au Préprep © pour finir sa polymérisation assurant l'adhésion entre le matériau M1 et la face oxydée du feuillard de cuivre. Ce procédé permet l'obtention d'une surface de faible rugosité. En effet, le polymère remplit les cellules ouvertes de la surface du matériau M1. Ainsi, la zone de dépôt du cuivre est quasiment plane, comme montré en **Figure 5** et **Figure 6**.



**(a)**

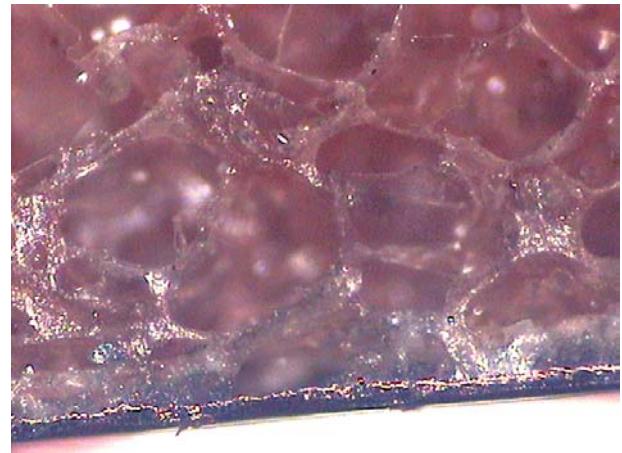


**(b)**

**Figure 5** Matériau M1 recouvert de polymère. (a) vue de dessus. (b) vue en coupe. Les stries de la figure (a) proviennent des imperfections de la surface des plaques de moulage.



**(a)**



**(b)**

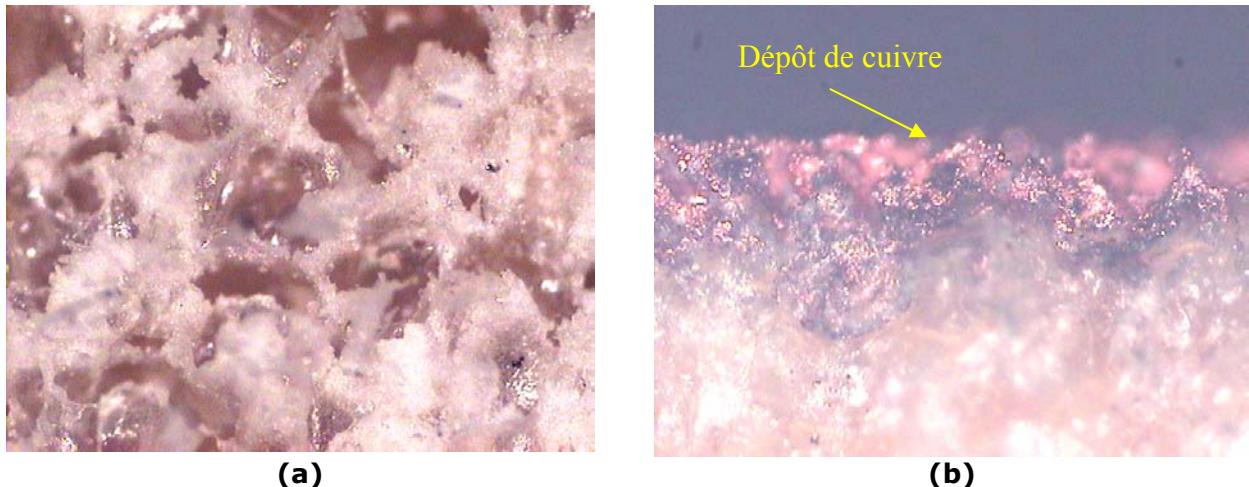
**Figure 6** Stratifié matériau M1 – polymère – cuivre (a) vue d'ensemble. (b) vue en coupe.

#### 5.1.2.3 Procédé chimique

L'Université de Rennes 1 a développé et breveté une technique de métallisation par voie chimique et électrolytique (M. Himdi 1998). Ce procédé débute par le dépôt chimique d'une pellicule de cuivre de  $1\mu\text{m}$ . Cette pellicule d'amorce est ensuite augmentée jusqu'aux  $17.5\mu\text{m}$  habituels via une électrolyse. Cette technique est simple, faible coût et s'applique à toute forme de surface, planaire comme tridimensionnelle. La gravure des circuits et antennes est réalisée par les procédés classiques comme l'usinage, la gravure photoélectrique, l'utilisation d'encre épargnes, etc.

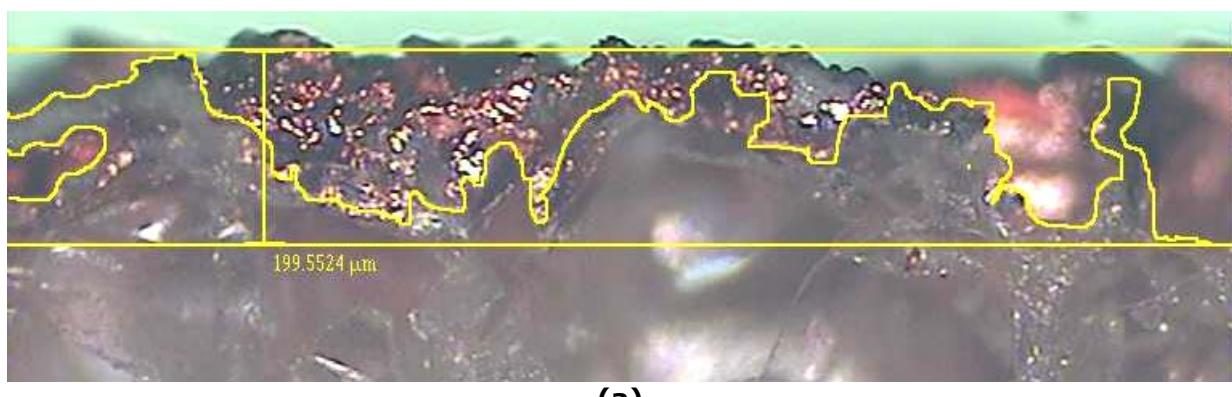
Les mousses utilisées (M1, M2 et M3) sont à cellules fermées. Malgré tout, un certain nombre de cellules de surface sont ouvertes du fait de l'usinage des pains de mousse en bloc et en plaques. Ainsi, la **Figure 7** montre

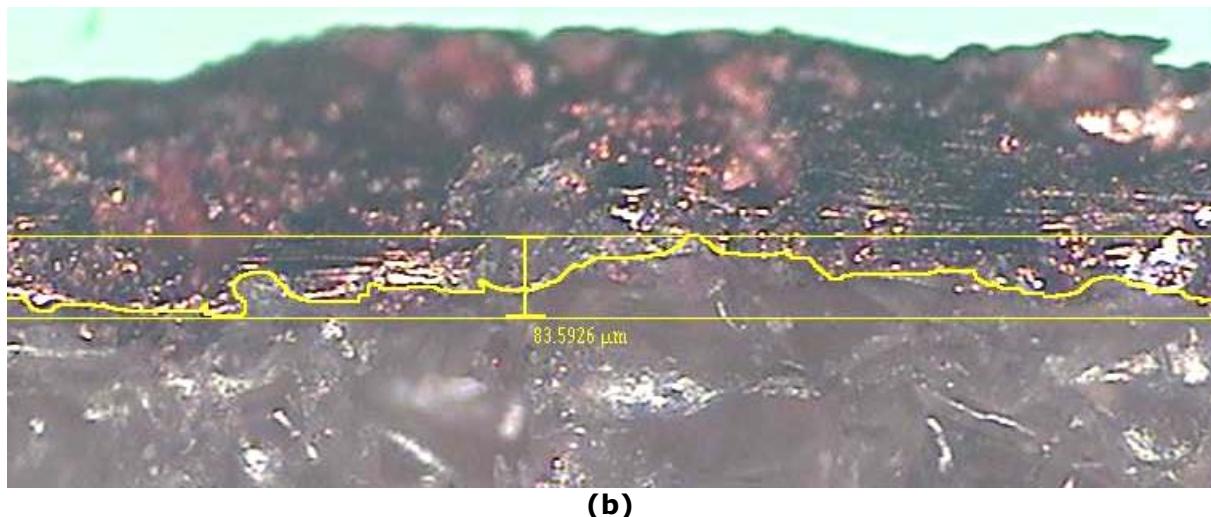
la rugosité du matériau M1. Ces rugosités sont à l'origine de pertes. Il apparaît donc nécessaire d'effectuer un prétraitement de surface afin de minimiser les pertes par rugosité.



**Figure 7** Matériau M1 sans prétraitement de surface (a) avant métallisation en vue de dessus. (b) après métallisation en vue de coupe.

Une technique d'amoindrissement de la rugosité des mousse est mise en œuvre. Il s'agit là encore d'un pressage, à 260bar, à chaud, 170°C, pendant sept minutes trente, d'une plaque de mousse surdimensionnée d'un dixième de millimètre. Ainsi, les cellules ouvertes de surface sont refermées par écrasement. Elles sont maintenues refermées du fait de l'élévation en température, les amenant à être écrasées, et de l'abaissement en température sous pression, pour qu'elles gardent définitivement la forme imposée. L'ajustement est assuré par des calles métalliques de côtes finies correspondant à la hauteur finale recherchée. Le refroidissement est réalisé in situ afin de ne pas déformer les plaques. La **Figure 8** et la **Figure 9** montrent les états de surface avec et sans prétraitement de surface. La métallisation est réalisée après le prétraitement de surface, lorsque celui-ci a lieu.



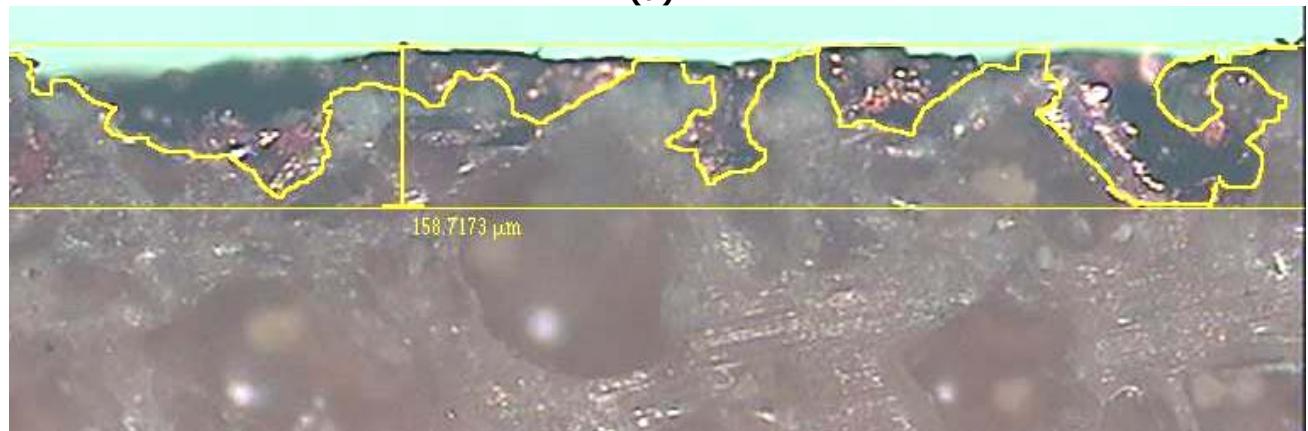


(b)

**Figure 8** Matériau M1 métallisé (a) sans prétraitement de surface. (b) avec prétraitement de surface.



(a)



(b)

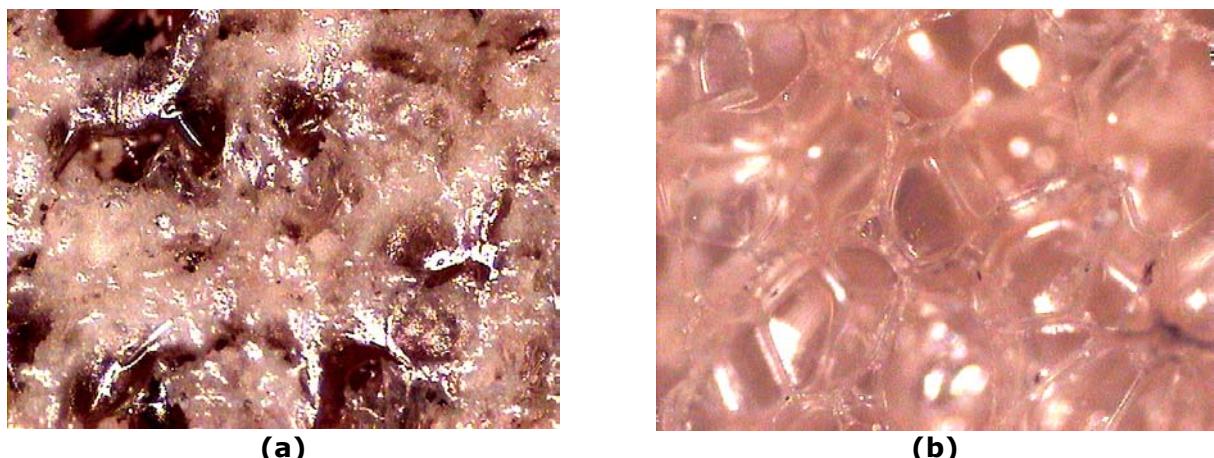
**Figure 9** Matériau M2 métallisé (a) sans prétraitement de surface. (b) avec prétraitement de surface.

Les rugosités mesurées sont résumées dans le tableau suivant :

|                            | matériau M1        |                    | matériau M2        |                    |
|----------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|--------------------|
|                            | avec prétraitement | sans prétraitement | avec prétraitement | sans prétraitement |
| rugosité [ $\mu\text{m}$ ] | 10                 | 55                 | 45                 | 45                 |

Cette rugosité est en fait l'écart type de la hauteur de l'interface cuivre-mousse, représentée en trait jaune sur la **Figure 8** et la **Figure 9**. Ce prétraitement améliore considérablement la rugosité du matériau M1, alors qu'il ne modifie en rien celle du matériau M2. Ceci s'explique par la densité et la taille des cellules de chacun des matériaux. En effet, la mousse M1 possède une densité de  $200\text{kg.m}^{-3}$ , alors que celle de la mousse M2 est de  $360\text{kg.m}^{-3}$ , et les cellules du matériau M1 ont un diamètre de  $300\mu\text{m}$  alors que celles de la mousse M2 mesurent  $200\mu\text{m}$  de diamètre. Ainsi, le prétraitement du matériau M1 s'effectue sur des cellules de grande dimension et de parois de faible épaisseur, car la densité du matériau est faible. Donc l'écrasement des cellules de surface est réalisé sans difficulté. A contrario, pour le matériau M2, les cellules sont de plus faible dimension et leurs parois sont plus épaisses. Donc le pressage à chaud devient difficile. Une solution serait d'augmenter la température, mais, au-delà de  $170^\circ\text{C}$ , les cellules de surface brûlent plutôt que de se ramollir, ce qui n'est pas souhaité. L'augmentation de la pression n'est pas testée car la limite de la presse est atteinte. Ces remarques sur l'application d'un pressage à chaud efficace sur des matériaux à faible densité composés de cellules de grande dimension sont confirmées par les résultats de ces manipulations sur le matériaux M3, dont l'étude est l'un des objets de la thèse (Chainon 2002).

Par ailleurs, ce pressage à chaud ne modifie pas les propriétés électromagnétiques du matériau : la présence des calles empêche tout écrasement de l'ensemble du matériau, comme le montre la **Figure 10**. Ainsi, seule une fine pellicule en surface, dont l'épaisseur correspond à la rugosité, est écrasée. Cette épaisseur est à comparer avec la longueur d'onde de travail pour juger de l'utilisation de ce matériau.



**Figure 10** Matériau M1 ayant subit un prétraitement de surface (a) vue de dessus des cellules de surface. (b) vue en coupe des cellules de cœur.

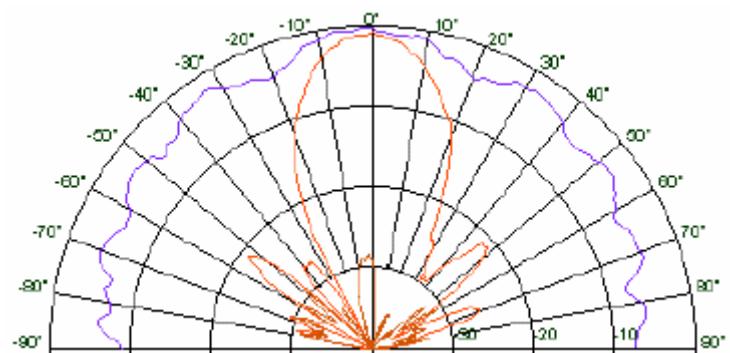
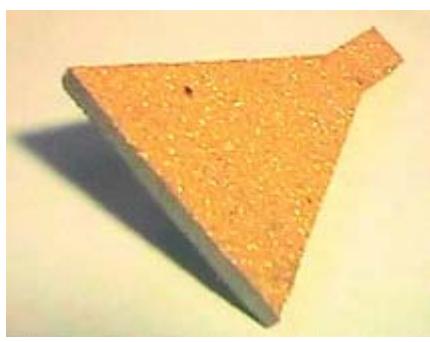
### 5.1.3 Utilisation

Le fait de pouvoir métalliser tout type de structure en mousse offre à cette technologie un nombre impressionnant d'applications. Par ailleurs, cet type de matériaux peut être travaillé de différentes manières : usinage, thermoformage.

#### 5.1.3.1 Usinage

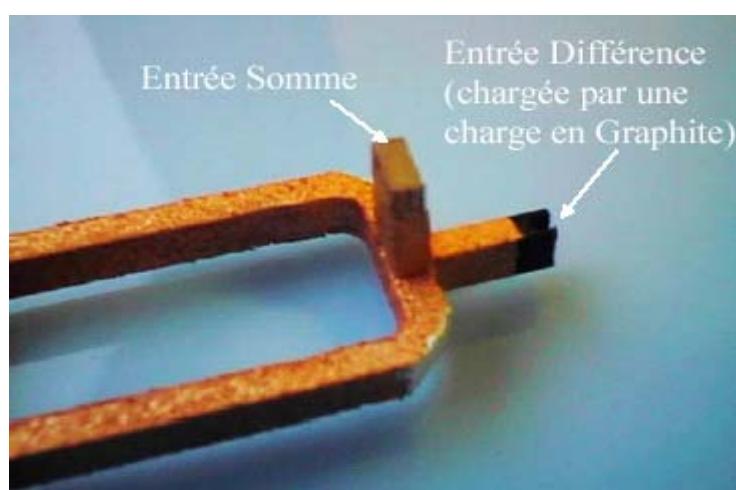
Le matériau mousse est facilement usinable. Les techniques classiques comme le fraisage, le découpage, le tournage, etc., s'appliquent sans grande difficulté tant que la précision demandée reste supérieure à  $100\mu\text{m}$ . En deçà de cette valeur, il est souhaitable de coupler l'usinage avec la technique de prétraitement de surface développée précédemment.

Quelques exemples d'antennes réalisées à partir de mousse métallisée sont donnés afin de montrer la diversité du champ d'application de ce type de matériau, (M.Himdi 2000). En **Figure 11** est présenté un cornet plat de  $0.25\lambda$  d'épaisseur ayant une efficacité de 90% en millimétrique.



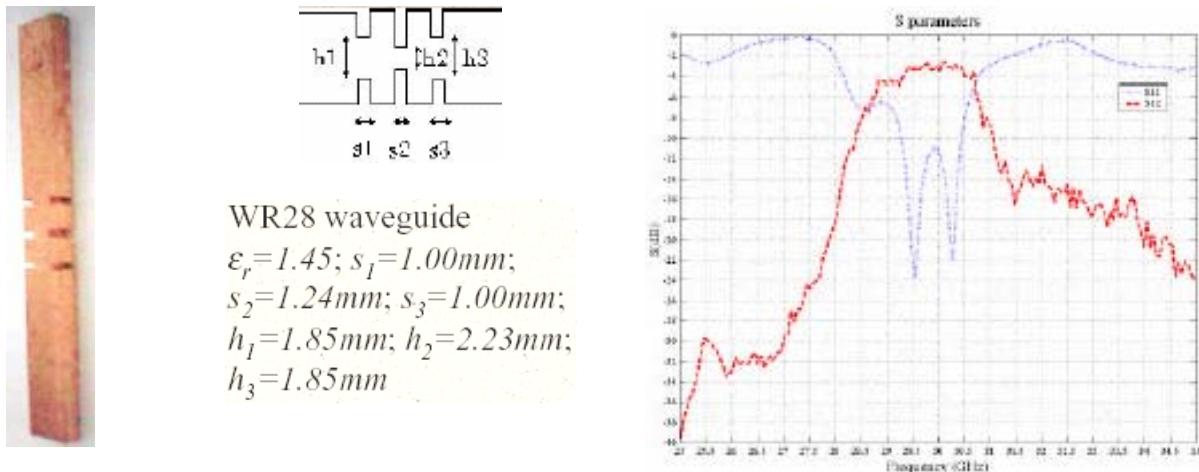
**Figure 11** Cornet en mousse métallisée et son diagramme de rayonnement en champ lointain mesuré en plan E et plan H. (M.Himdi 2000)

Autre exemple, un assemblage de guides d'onde formant un Té Magique fonctionnant à 35GHz en **Figure 12**.



**Figure 12** Té Magique à 35GHz. (M.Himdi 2000)

Il est possible aussi de fabriquer des filtres en mousse métallisée pour la bande millimétrique, (S. Chainon 2002).



**Figure 13** Filtre guide d'onde réalisé en mousse métallisée. (S. Chainon 2002)

Il est par ailleurs possible d'usiner des antennes patch conformées sur sphères, comme le montre la **Figure 14**.



**Figure 14** Antenne patch conformée sur sphère par usinage.

Cette application demande une très grande précision d'usinage et est difficile à réaliser. Ainsi le conformage par presse thermostatée lui est préféré.

#### 5.1.3.2 Thermoformage

Le laboratoire possédant une presse thermostatée, **Figure 15**, il a été aisément d'opter pour le conformage de mousses. Cette technique est une alternative simple au thermomoulage qui nécessite une installation onéreuse gérant l'injection sous pression. Ici, seuls des moules sont requis.

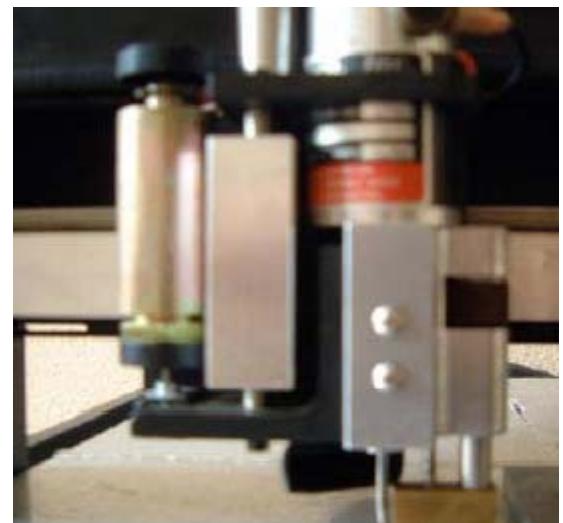


**Figure 15** Presse thermostatée de l'IETR.

Afin de simplifier le travail, la propriété de ductilité du cuivre est utilisée. En effet, le but principal est, dans ce travail, d'obtenir des pastilles conformées sur sphères. Ainsi, la première étape consiste à graver le motif sur une plaque de mousse, préalablement métallisée, via une micro graveuse, **Figure 16**.



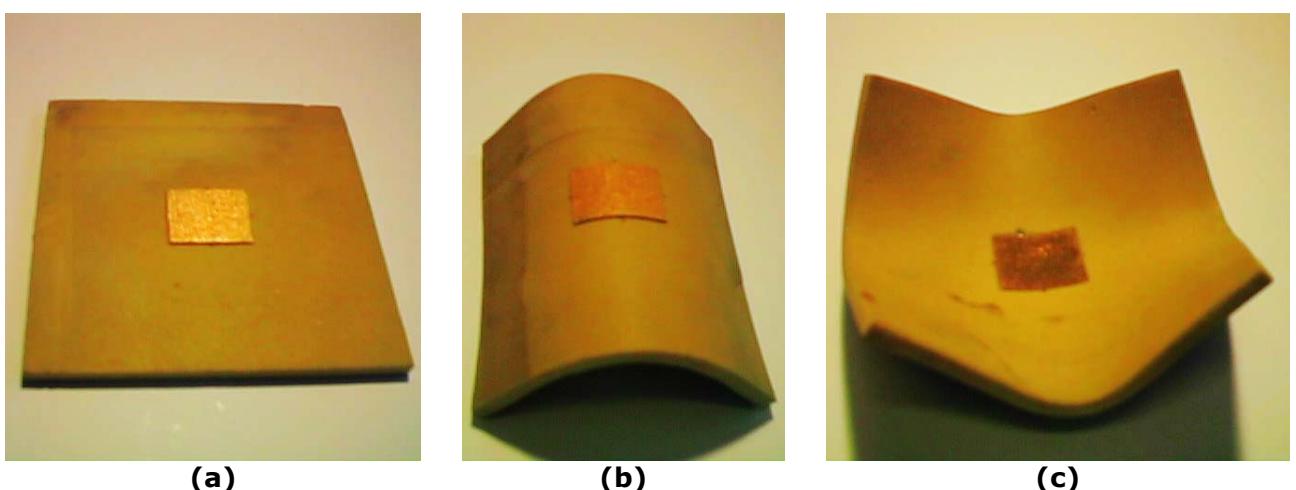
(a)



(b)

**Figure 16** Micro graveuse de l'IETR pilotée par ordinateur (a) vue d'ensemble. (b) détail du mandrin.

Ensuite, la plaque est placée dans une étuve à 170°C pendant une quinzaine de minute, le temps que l'ensemble de la plaque soit à température. Puis, la plaque chauffée est rapidement mise dans un moule monté sur la presse thermostatée, préchauffée à 170°C. A ce moment, la pression est peu à peu montée de sorte que le matériau prenne progressivement la forme du moule sans se briser. Par ailleurs, la ductilité du cuivre, même chauffé à 170°C, n'étant pas infinie, lorsque le rayon de courbure à atteindre est inférieur à 60% de la plus grande dimension de la zone métallisée extérieure, des micros coupures apparaissent sur cette zone cuivrée extérieure. Ainsi, il apparaît nécessaire de les combler avec de la laque d'argent ou toute autre peinture ou encre conductrice.



**Figure 17** (a) Plaque de matériau M1 sur laquelle est gravée une antenne patch avant conformage. (b) Antenne patch conformée sur cylindre. (c) Antenne patch conformée sur sphère.

Par ailleurs, l'emploi de plaque rectangulaire, **Figure 17**, pour le conformage sur sphère apparaît inadapté. Il est donc nécessaire de d'utiliser des disques au lieu de rectangles, comme le montre la **Figure 18**.



**Figure 18** Antenne patch circulaire conformée sur sphère.

La technologie de conformage du matériau mousse est donc opérationnelle. Elle est applicable à la fabrication d'antennes patchs circulaires conformées sur sphères pour les lentilles de Lüneburg, comme celles

étudiées dans le chapitre 4. Le centre d'intérêt de la partie technologie et application se déplace donc dès à présent vers la fabrication de lentilles.

## 5.2 Lentille de Lüneburg dite « en tranches »

Comme l'indique l'état de l'art concernant la lentille de Lüneburg, un certain nombre de techniques ont été mises en œuvre quant à la réalisation du gradient d'indice. La plus classique, mais aussi celle étudiée dans le cadre théorique des chapitres 3 et 4, approxime le gradient en imbriquant un certain nombre de coquilles. Il s'agit de la technique dite « des poupées russes ». Cette dernière possède le désavantage, d'un point de vue coût de fabrication, d'avoir à disposition toute une gamme de différents média recouvrant des permittivités couvrant la plage 1 - 2. A cet effet, le brevet d'invention de Zimmerman et al. (K.A. Zimmerman 1997) propose la technique de fabrication du gradient simple à comprendre mais difficile à mettre en œuvre compte tenu de l'utilisation d'un usinage tridimensionnel, comme il est montré dans le chapitre 2. L'idée de base de la méthode développée ici est la même, mais la fabrication est infiniment plus simple.

### 5.2.1 Description de la méthode

La base de la technique proposée réside dans la simple approximation linéaire proposée dans (K.A. Zimmerman 1997; K. Sato 2000) : lorsque deux produits  $p_1$  et  $p_2$  de permittivités diélectriques respectives  $\epsilon_{r1}$  et  $\epsilon_{r2}$  sont mélangés de façon homogène en quantités respectives  $v_1$  et  $v_2$ , la permittivité diélectrique effective  $\epsilon_{r\text{eff}}$  du produit résultant n'est autre que le barycentre de l'association :

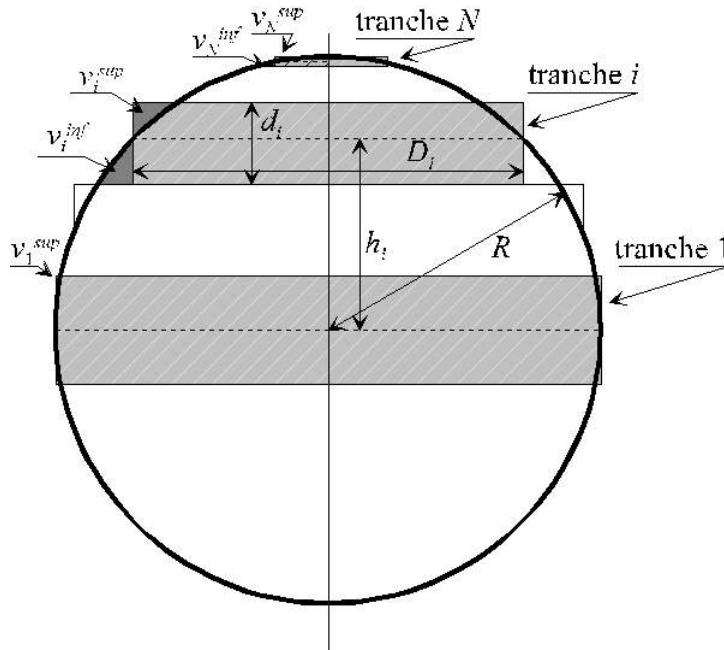
$$\epsilon_{r\text{eff}} = \frac{v_1}{v_1 + v_2} \epsilon_{r1} + \frac{v_2}{v_1 + v_2} \epsilon_{r2}. \quad (2)$$

Sachant que pour le cas de la lentille de Lüneburg, la distribution de permittivité diélectrique couvre complètement la plage 1 – 2, il est nécessaire de choisir des matériaux dont les permittivités sont le plus proche possible de la frontière. Ainsi, l'air,  $\epsilon_{r1} = 1.00$ , apparaît comme le plus adapté pour la limite inférieure et le téflon,  $\epsilon_{r2} = 2.04$ , pour la limite supérieure.

Toute l'astuce de la technique, qui vise à simplifier la réalisation, se trouve dans le choix des volumes de mélange  $v_1$  et  $v_2$ . Un usinage par perçage d'une pièce plastique plate sur des axes de rotation, et donc de perçage, tous parallèles est sans difficulté. Ainsi, la sphère, future lentille de Lüneburg, est découpée en tranches où sont ensuite percés des cylindres tous parallèles. Les dimensions des tranches, les rayons et les positions des trous sont à fixer.

### 5.2.1.1 Discrétisation de la sphère

La sphère de rayon  $R$  qui va servir de lentille est discrétisée en  $N$  tranches parallèles comme indiqué en **Figure 19**. La tranche indexée  $i$  se trouve à la hauteur  $h_i$  à partir du centre de la sphère. Son épaisseur est notée  $d_i$ . Le volume de la tranche  $i$  qui sort de la sphère est noté  $v_i^{sup}$ . Celui de la sphère qui n'est pas contenu dans la tranche  $i$  est noté  $v_i^{inf}$ . En fait, il faut discréteriser la sphère en minimisant la différence de volume entre la sphère continue et la sphère discrète  $\Sigma_i |v_i^{sup} - v_i^{inf}|$ . Le cercle de contact entre la sphère et la tranche  $i$  est à égale distance entre le disque supérieur et le disque inférieur de la tranche.



**Figure 19** Paramètres de discrétisation de la sphère.

Les équations en présence sont :

$$\sum_{i=1}^N d_i = R, \quad h_1 = 0, \quad \forall i = 2, \dots, N, \quad h_i = h_{i-1} + \frac{1}{2}d_{i-1} \geq 0. \quad (3)$$

A cela sont ajoutées  $N$  équations de symétrie quant à la géométrie de la sphère discrétisée :

$$d_1 = D_N \text{ et } \forall i = 2, \dots, N, \quad d_i = D_{N-i+1} - D_{N-i+2}, \text{ i.e. } \forall i = 1, \dots, N, \quad D_i = \sum_{p=1}^{N-i+1} d_p. \quad (4)$$

Ainsi, les seules inconnues sont maintenant  $\{d_i\}_{i=1}^N$ . Il reste donc à exprimer le volume  $V_d$  occupé par la demi sphère discrète supérieure en fonction de ces inconnues :

$$V_d = \frac{1}{2}d_1 \frac{1}{4}\pi D_1^2 + \sum_{i=2}^N d_i \frac{1}{4}\pi D_i^2 = \frac{1}{4}\pi \left( \frac{1}{2}d_1 \left( \sum_{p=1}^N d_p \right)^2 + \sum_{i=2}^N d_i \left( \sum_{p=1}^{N-i+1} d_p \right)^2 \right). \quad (5)$$

Par ailleurs, le volume  $V_c$  occupé par la demi sphère continue est donné par la relation  $V_c = \frac{2}{3}\pi R^3$ . Ainsi, la minimisation des volumes d'erreur  $|v_i^{sup} - v_i^{inf}|$  revient à trouver un zéro de la fonction :

$$f(\Delta_1, \dots, \Delta_N) = \frac{V_d - V_c}{V_c} = \frac{1}{6} \left( \frac{1}{2} \Delta_1 \left( \sum_{p=1}^N \Delta_p \right)^2 + \sum_{i=2}^N \Delta_i \left( \sum_{p=1}^{N-i+1} \Delta_p \right)^2 \right) - 1, \quad (6)$$

où,  $\forall i = 1, \dots, N, \Delta_i = d_i/R > 0$ .

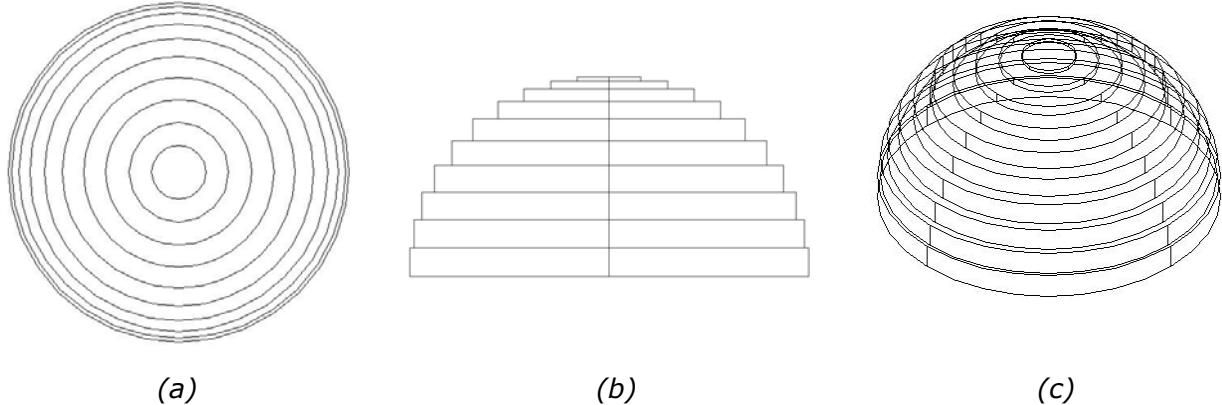
Pour des raisons de simplicité et de temps de fabrication, est fait le choix de prendre  $N = 10$ . Les dimensions obtenues sont alors :

| $i$        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7      | 8      | 9      | 10     |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $h_i$      | 0.0716 | 0.2133 | 0.3524 | 0.4880 | 0.6153 | 0.7321 | 0.8305 | 0.9043 | 0.9564 | 0.9872 |
| $D_i/2R$   | 0.9974 | 0.9770 | 0.9358 | 0.8728 | 0.7883 | 0.6812 | 0.5570 | 0.4268 | 0.2920 | 0.1594 |
| $\Delta_i$ | 0.1433 | 0.1401 | 0.1381 | 0.1332 | 0.1214 | 0.1123 | 0.0846 | 0.0630 | 0.0411 | 0.0204 |

De plus, le diamètre extérieur est choisi  $R = 150$  mm. Ainsi, les rayons dénormalisés sont :

| $i$        | 1      | 2      | 3      | 4      | 5      | 6      | 7     | 8     | 9     | 10    |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| $D_i$ [mm] | 149.61 | 146.55 | 140.37 | 130.92 | 118.25 | 102.18 | 83.55 | 64.02 | 43.80 | 23.91 |
| $d_i$ [mm] | 10.75  | 10.51  | 10.36  | 9.99   | 9.11   | 8.42   | 6.35  | 4.73  | 3.08  | 1.53  |

Une représentation de la demi sphère supérieure discrétisée est donnée en **Figure 20**.



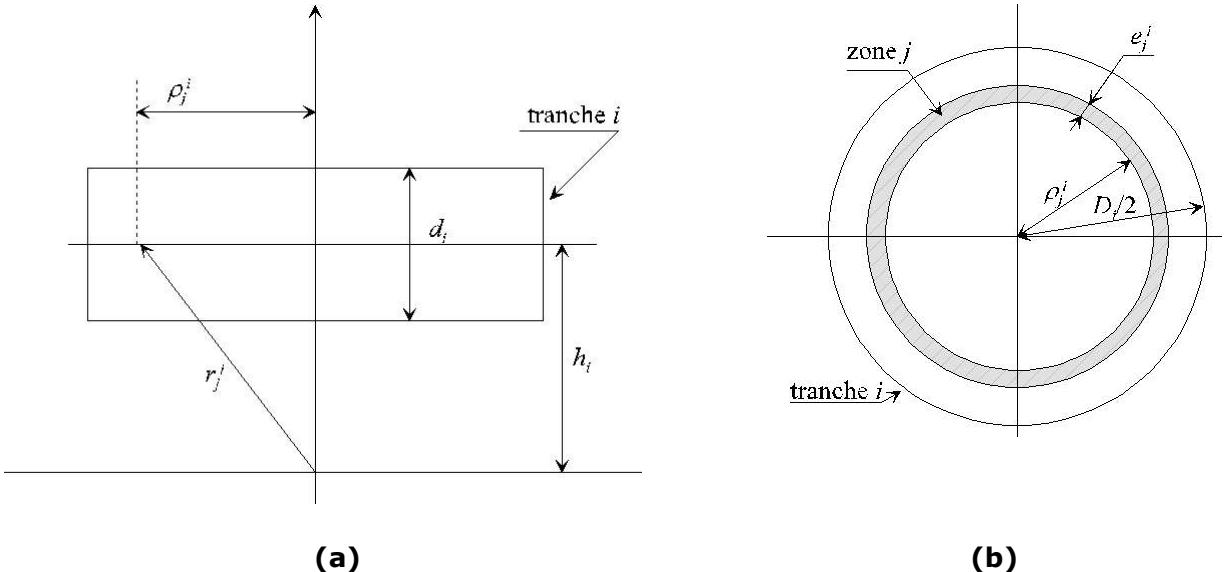
**Figure 20** Représentation de la demi sphère supérieure discrétisée. (a) vue de dessus, (b) vue de côté, (c) vue isométrique.

### 5.2.1.2 Emplacements et dimensionnement des trous

La loi de distribution de permittivité à approcher est :

$$\varepsilon_r(r) = 2 - \left( \frac{r}{R} \right)^2. \quad (7)$$

Pour ce faire, il faut dès à présent considérer la tranche  $i$ . Son centre est placé sur l'axe et à la hauteur  $h_i$ . Ce cylindre plein est maintenant découpé en  $N_i$  cylindres creux de rayon interne  $\{\rho_j^i\}_{j=1}^{N_i}$  et de rayon externe  $\{\rho_j^i + e_j^i\}_{j=1}^{N_i}$ . La zone externe est indexée 1. L'ensemble de ces paramètres est défini en **Figure 19** et **Figure 21**.



**Figure 21** Définitions des paramètres géométriques associés à la tranche  $i$ , vue de côté sur (a), pour la zone cylindrique  $j$ , vue de dessus sur (b).

La largeur  $e_j^i$  de la zone  $j$  dans la tranche  $i$  est considérée suffisamment faible pour que les variations de la distribution (7) y soient négligeables. Ainsi, la valeur effective de la permittivité y est prise en son cercle milieu :

$$\varepsilon_{rj}^i = \varepsilon_r(r_j^i) = \varepsilon_r\left(\sqrt{h_i^2 + \rho_j^{i2}}\right). \quad (8)$$

Les  $n_j^i$  trous réalisés dans cette zone sont tous de diamètre  $\delta_j^i$ . Ainsi le volume  $v_j^i$  de trous dans cette zone est :

$$v_j^i = n_j^i \cdot d_i \cdot \frac{1}{4}\pi \cdot \delta_j^{i2}. \quad (9)$$

Par ailleurs, le volume de cette zone est :

$$V_j^i = \pi \cdot d_i \cdot e_j^i \cdot (2\rho_j^i + e_j^i). \quad (10)$$

Ainsi, en regroupant (7), (8), (9) et (10), (2) devient :

$$\varepsilon_r\left(\sqrt{h_i^2 + \rho_j^{i2}}\right) = 2 - \frac{h_i^2 + \rho_j^{i2}}{R^2} = \frac{v_j^i}{V_j^i} \varepsilon_{r1} + \left(1 - \frac{v_j^i}{V_j^i}\right) \varepsilon_{r2} = n_j^i \frac{\delta_j^i}{4e_j^i(2\rho_j^i + e_j^i)} (\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2}) + \varepsilon_{r2}. \quad (11)$$

Cette relation permet d'extraire le nombre de trous nécessaires à la réalisation de la permittivité effective :

$$n_j^i = 4e_j^i \frac{2\rho_j^i + e_j^i}{\delta_j^i(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})} \left( (2 - \varepsilon_{r2}) - \frac{h_i^2 + \rho_j^{i2}}{R^2} \right). \quad (12)$$

Comme il y n'y a que très peu de chance que ce nombre soit un entier, le nombre réel de trous correspond à l'entier le plus proche de cette valeur.

Pour des raisons de simplification d'usinage, tous les trous sont réalisés avec un foret unique de diamètre  $\delta_j^i = 1.00\text{mm}$ . De plus, toutes les largeurs  $e_j^i$  de zone sont prises égales à  $2.00\text{mm}$ . Ceci fixe automatiquement les valeurs  $N_i$  des nombres de zones par tranche ainsi que les rayons internes  $\rho_j^i$  des zones. Tous les trous sont

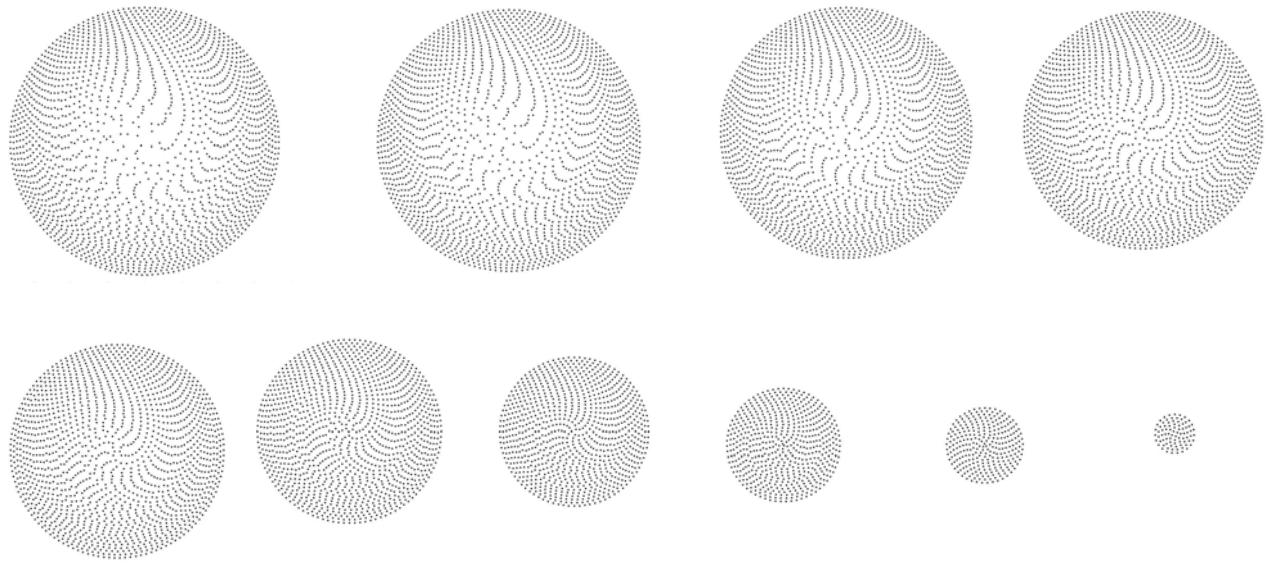
distribués de façon homogène dans chacune des zones. Ainsi, pour la zone  $j$  de la tranche  $i$ , les trous sont placés aux valeurs angulaires :

$$\forall n = 1, \dots, n_j^i, \alpha_j^{in} = \alpha_j^{i0} + \frac{n-1}{n_j^i} 2\pi, \quad (13)$$

où  $\alpha_j^{i0}$  représente la valeur initiale. Cette valeur est prise variable en fonction de la zone considérée afin de ne pas imposer l'existence d'un rayon qui ne possèderait que des trous. Son évolution est donnée comme suit :

$$\alpha_1^{i0} = 0, \forall j = 2, \dots, N_i, \alpha_j^{i0} = \frac{1}{2}(\alpha_{j-1}^{i0} + \alpha_{j-1}^{i1}). \quad (14)$$

Toutes les grandeurs sont maintenant déterminées. Les emplacements des trous sont représentés en **Figure 22**.



**Figure 22** Représentation des trous sur chacune des tranches. L'indexation commence en haut à gauche et finie en bas à droite. Les dimensions relatives sont respectées.

Par ailleurs, le maintien des différentes tranches entre elles est assuré grâce à un évidemment de 1.00mm effectué sur une des surfaces de chaque tranche afin de contenir la tranche supérieure. Cet évidemment est compensé sur la tranche supérieure en lui ajoutant 1.00mm à sa hauteur. Une photographie de la lentille réalisée à l'institut est donnée en **Figure 23**.

Compte tenu de la symétrie de la lentille, les tranches 2 à 10 sont à faire en double. Le décompte du nombre de trous est donné dans le tableau suivant :

| Index tranche | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7   | 8   | 9   | 10 | total |
|---------------|------|------|------|------|------|------|-----|-----|-----|----|-------|
| Nombre trous  | 2033 | 2000 | 1933 | 1804 | 1596 | 1299 | 932 | 579 | 281 | 83 | 23047 |

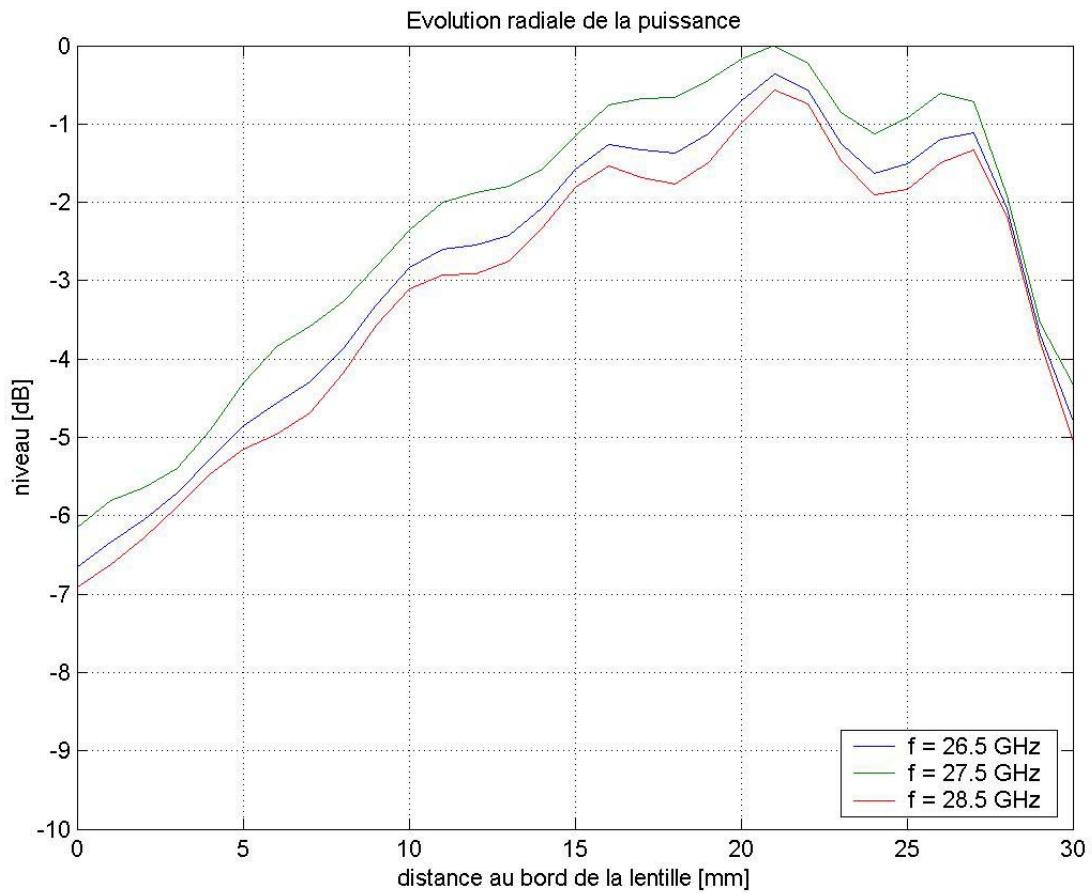
Bien que le nombre de trous à réaliser soit important (23047), le fait d'utiliser une machine à commande numérique sans changer de foret et de fabriquer deux tranches en même temps, du fait de la symétrie de la structure, réduit considérablement la difficulté et le temps de réalisation.



**Figure 23** Photographie de la lentille « tranches » fabriquée à l'IETR.

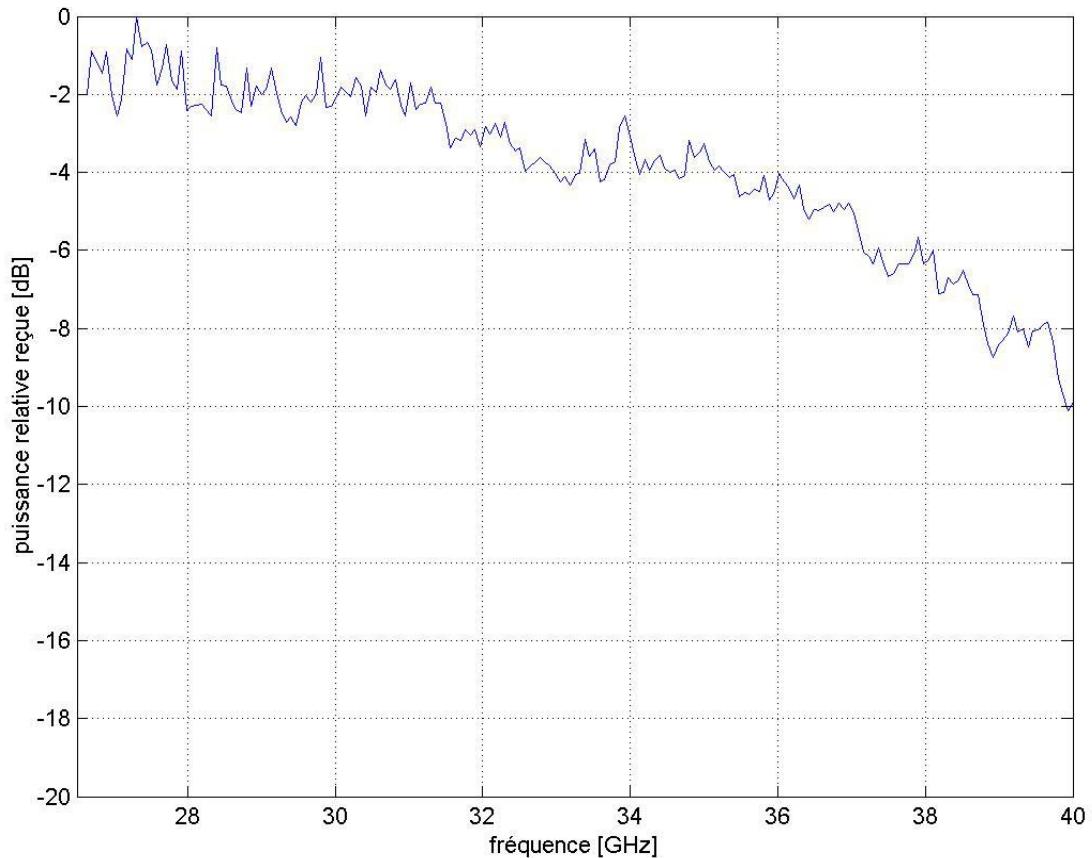
### 5.2.2 Caractérisation de la lentille « tranches »

Une fois réalisée, la lentille est complètement caractérisée. Elle est illuminée par un cornet. Un guide d'onde ouvert est placé en réception juste derrière la lentille. Le premier point de la caractérisation concerne le choix de la plage de fréquence. Elle est fixée par la dimension des trous composant la lentille. Ceux-ci ne doivent pas excéder un dixième de longueur d'onde pour que l'approximation linéaire de la permittivité diélectrique effective (2) reste valable. Le diamètre des trous étant de 1.0mm, la fréquence minimale de caractérisation doit donc être de l'ordre de 30.0GHz. Du fait du matériel disponible au laboratoire, est fait le choix de caractériser la lentille dans la bande 26.0GHz – 40.0GHz. Le second point de la caractérisation concerne le positionnement et plus particulièrement la distance séparant le guide d'onde et la lentille. A cet effet, le guide d'onde est déplacé radialement par rapport à la lentille. La puissance normalisée reçue au cornet est donnée en **Figure 24**. Il en ressort que la position optimale est à 21.0mm du bord de la lentille pour une fréquence de travail de 27.5GHz.



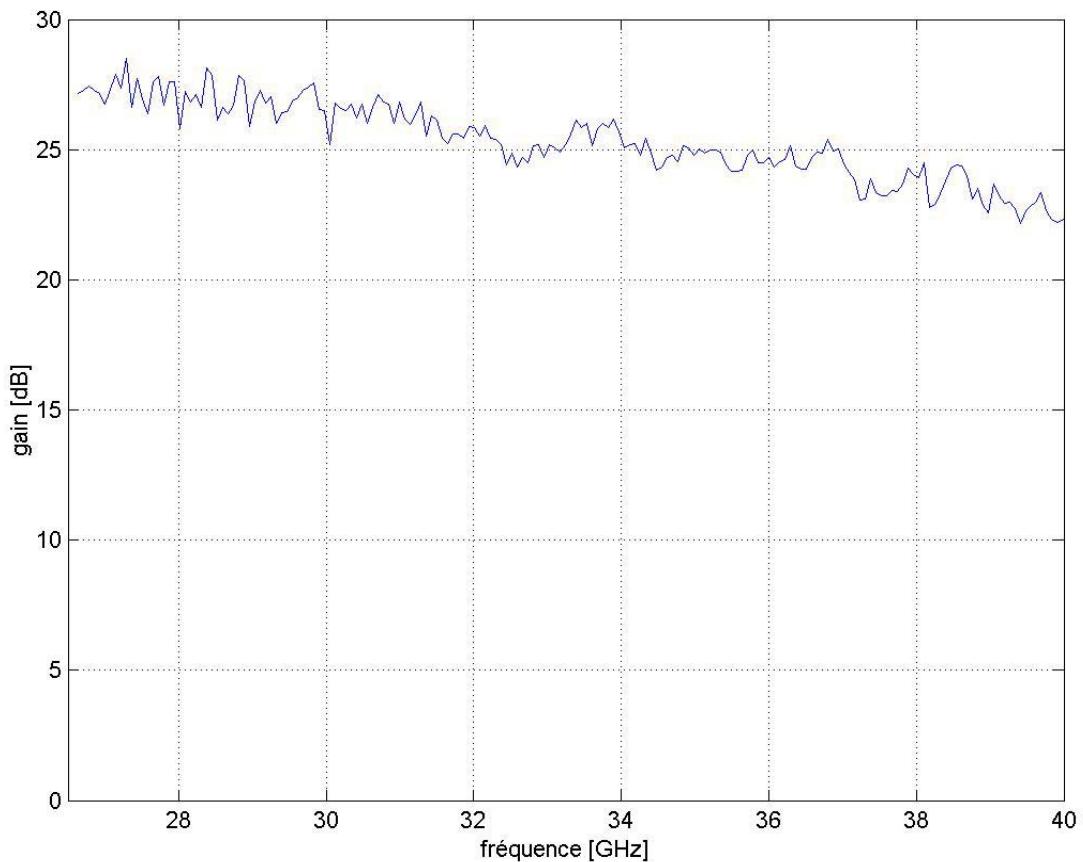
**Figure 24** Evolution de la puissance en fonction de la position du guide d'onde par rapport à la surface de la lentille.

Afin de confirmer cette valeur de fréquence optimale, la **Figure 25** montre l'effet de la fréquence sur la puissance reçue pour un guide d'onde placé à 21.0mm de la surface de la lentille. Ainsi, 27.5GHz est bien la fréquence optimale



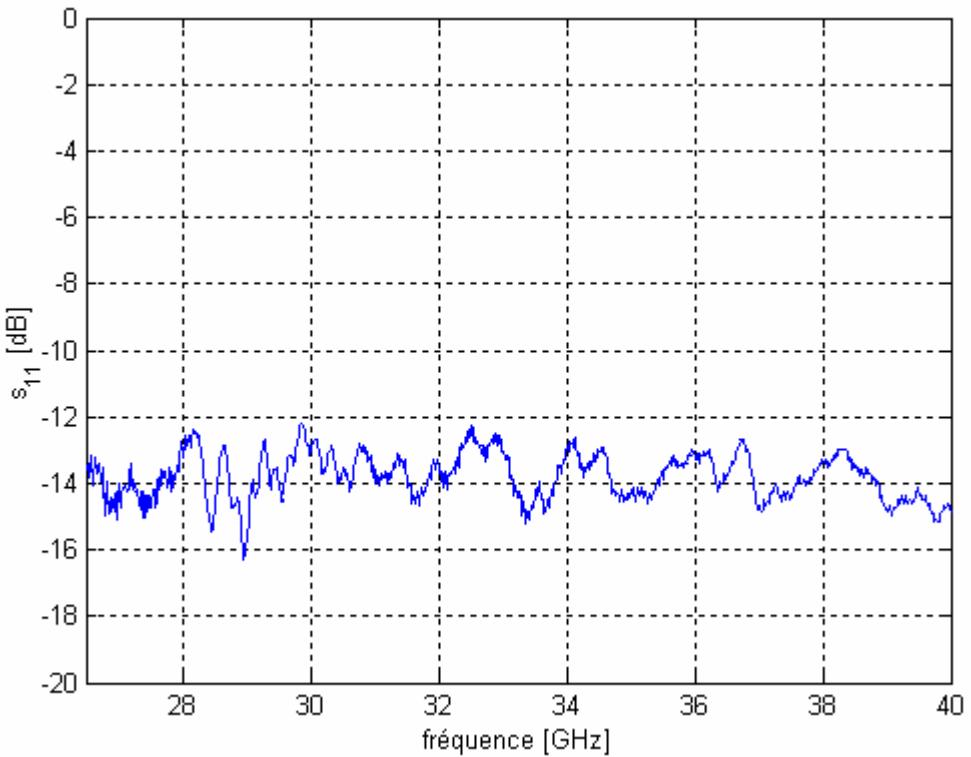
**Figure 25** Evolution de la puissance relative reçue à 21mm de la surface de la lentille dans la bande 26.0GHz – 40.0GHz.

Afin d'éliminer les possibles effets du cornet source sur ces résultats, la **Figure 26** montre l'évolution du gain en fonction de la fréquence de travail. Le gain maximum, qui vaut 28.5dB, a lieu à 27.5GHz. Un remarque importante ressort : la courbe de gain reste très stable sur une très large bande de fréquence.



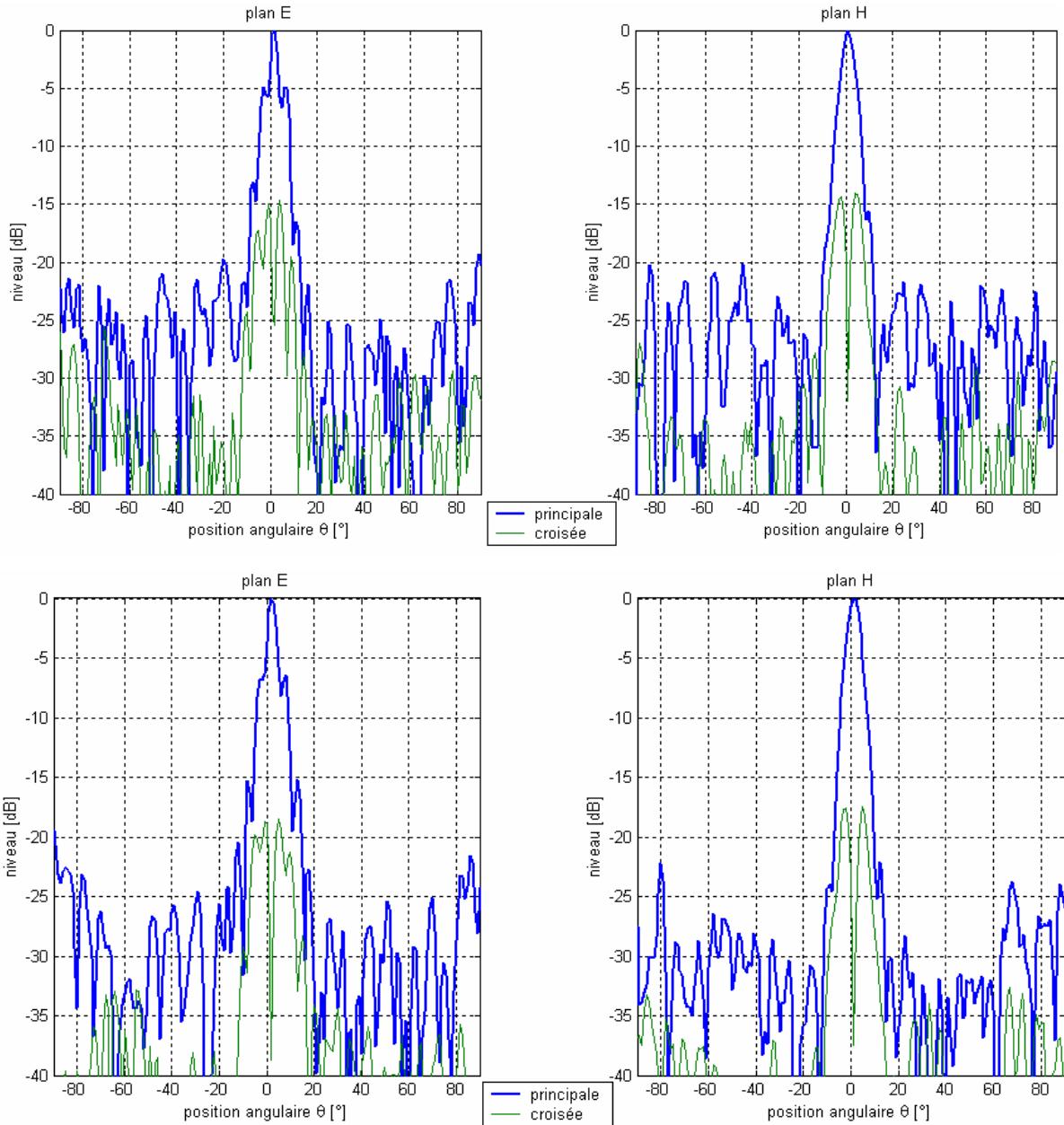
**Figure 26** Courbe de gain pour un guide d'onde ouvert placé à 21mm de la surface de la lentille.

De plus, il est apparu intéressant de voir comment la lentille désadapte l'ouverture du guide d'onde. Les résultats de la mesure du paramètre  $s_{11}$  sont donnés en **Figure 27**. Il ressort que la réflexion est d'environ -14.0dB sur l'ensemble de la bande 26.0GHz – 40.0GHz. Le paramètre  $s_{11}$  est donc très stable et la lentille désadapte peu l'ouverture du guide d'onde.



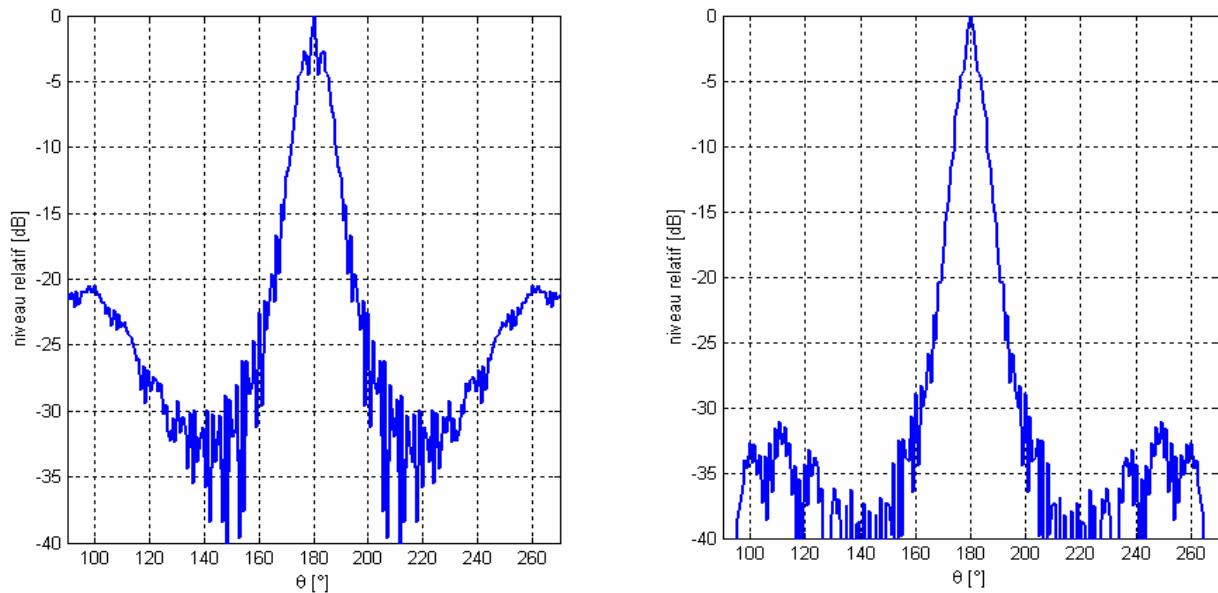
**Figure 27** Désadaptation de l'ouverture du guide d'onde en la présence de la lentille tranche placée à 21.0mm de l'ouverture du guide.

La lentille est ensuite caractérisée en termes de diagrammes de rayonnement en champ lointain, comme le montre la **Figure 28**. La première remarque tirée de cette figure est la grande stabilité en fréquence des diagrammes de rayonnement. En effet, seul les niveaux des lobes secondaires et des composantes croisées diffèrent légèrement : le diagramme est meilleur à 32.0GHz qu'à 27.5GHz. De plus, les diagrammes en plan H sont plus lisses que ceux des plans E.



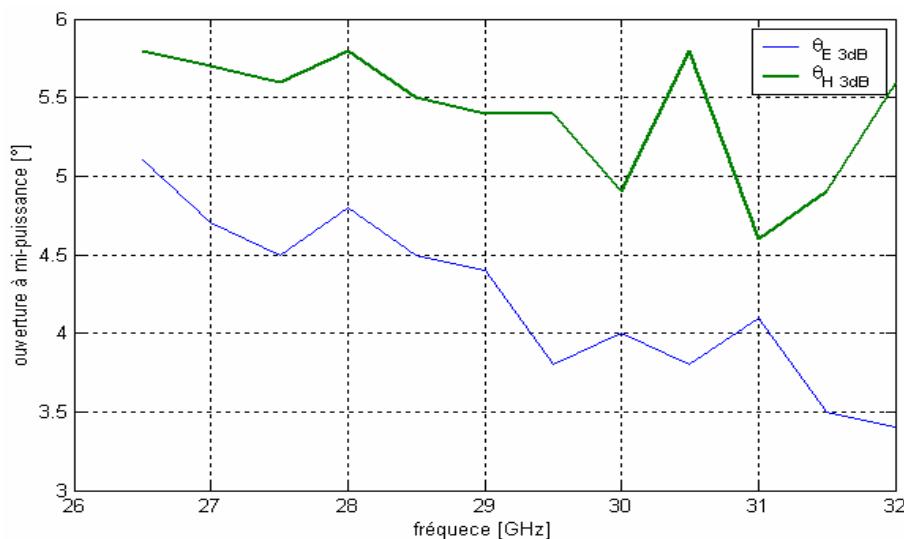
**Figure 28** Diagrammes de rayonnement en champ lointain plans E et H pour l’association lentille tranche – ouverture de guide d’onde. Les diagrammes inférieurs, respectivement supérieurs, sont mesurés à 27.5GHz, respectivement 32.0GHz.

La **Figure 29** montre les prévisions théoriques à 27.5GHz lorsque la lentille est assimilée à une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 coquilles afin d’approcher assez fidèlement le gradient d’indice pseudo continu de la lentille tranche. L’ouverture de guide est discrétisée selon la technique décrite dans le chapitre 3. Les mesures proposées en **Figure 28** sont en accord avec ces prévisions.



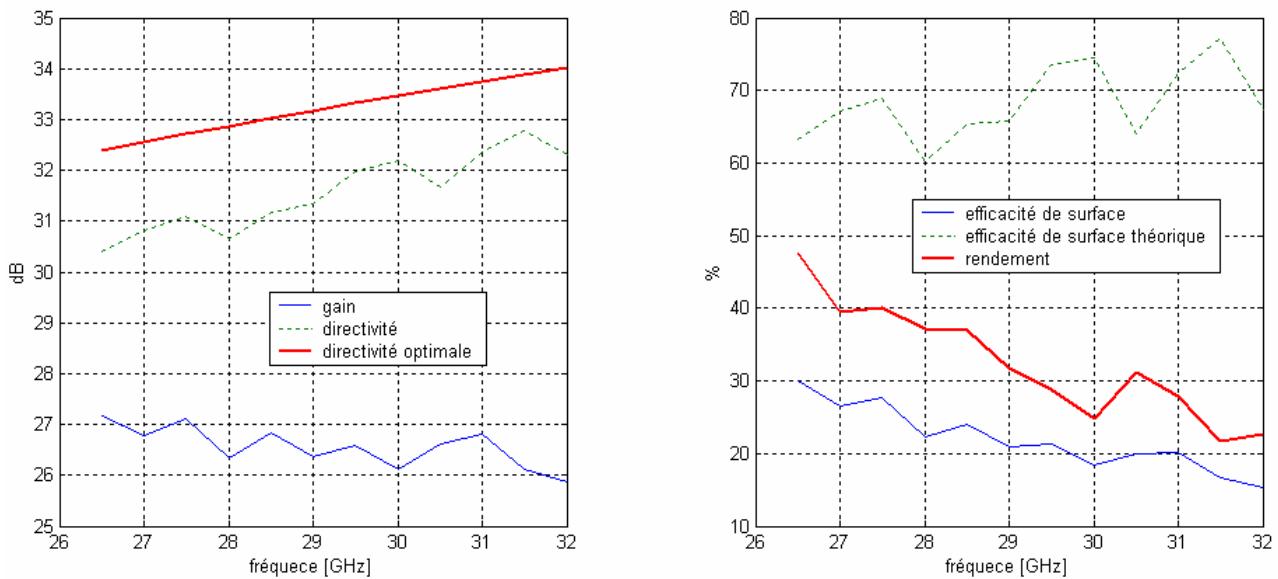
**Figure 29** Diagrammes de rayonnement en champ lointain plans E, à gauche, et H, à droite, simulés à 27.5GHz pour l’association lentille tranche – ouverture de guide d’onde. L’ouverture est simulée via la technique de discréétisation des sources étendues décrite dans le chapitre 3. La distribution de la lentille est approchée par une lentille discrète homogène de Lüneburg composée de 20 coquilles.

Les ouvertures à mi-puissance mesurées dans les plans E et H sont représentées sur la **Figure 30**. Globalement, elles suivent l’évolution habituelle : elles diminuent lorsque la fréquence augmente. Ceci provient du fait que plus la fréquence augmente, plus le diamètre de la lentille augmente, en termes de longueur d’onde, et ainsi, plus l’énergie est focalisée, ce qui se traduit par une diminution des ouvertures à mi-puissance.



**Figure 30** Ouverture à mi-puissance dans les plans E et H de l’association lentille tranche – ouverture de guide d’onde.

Afin de boucler l'analyse de la lentille tranche réalisée, il apparaît nécessaire de relativiser ses performances par rapport aux optima théoriques, comme c'est le cas en **Figure 31**. Ainsi, il ressort que le gain, bien que valant entre 26dB et 27dB environ sur la bande de fréquence, reste très inférieur à ce que la directivité pourrait laisser escompter. Ceci explique le faible rendement de l'ensemble (inférieur à 50%). La directivité optimale est représentée sur cette même figure afin de montrer la valeur maximale que peut atteindre une antenne de même dimension, en l'occurrence une ouverture dont la distribution d'énergie est uniforme. Cette grandeur permet, en outre, de calculer l'efficacité de surface de la structure par normalisation du gain. Celle-ci ne dépasse pas 30% et diminue lorsque la fréquence augmente, pour les mêmes raisons invoquées dans le cadre de l'analyse des ouvertures à mi-puissance.



**Figure 31** Gain, directivité, directivité optimale, rendement, efficacité de surface et efficacité de surface théorique de l'association lentille tranche – ouverture de guide d'onde.

### 5.2.3 Conclusion

Une solution fonctionnelle alternative de fabrication de lentilles de Lüneburg à gradient d'indice a donc été proposée. Celle-ci est basée sur la permittivité diélectrique effective du mélange de deux matériaux. La lentille obtenue possède de bonnes performances, en termes de diagramme de rayonnement en champ lointain, de gain, d'adaptation et d'ouverture à mi-puissance sur l'ensemble de la bande 26.0GHz – 40.0GHz. Ceci rejoint le constat que la distribution proposée par Lüneburg est indépendante de la fréquence. Malgré tout, le rendement et l'efficacité de surface de la structure restent assez faibles.

### 5.3 Couplage - critère de résolution

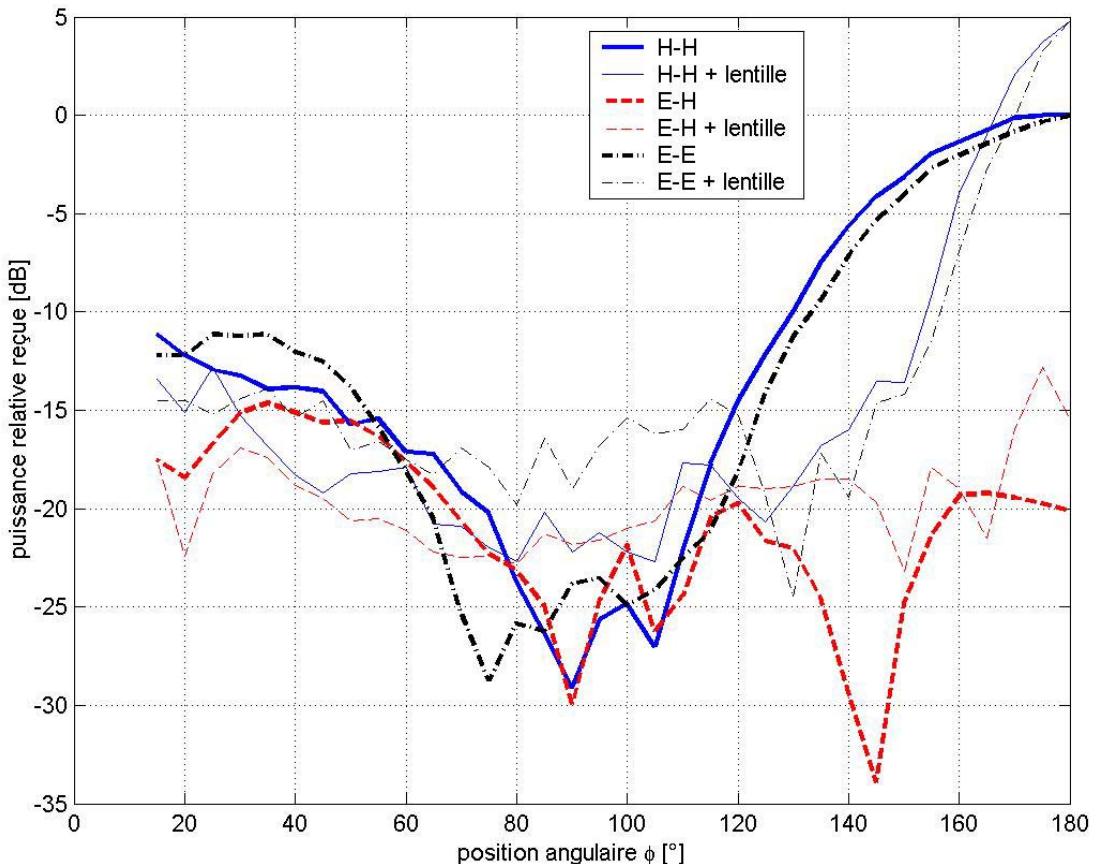
Le but de cette expérimentation est d'évaluer la distance inter élément minimale entre deux antennes sur une lentille de Lüneburg.

La lentille utilisée est du type Eccostok Luneberg lens-P16 de la société Emerson & Cuming. Elle est placée sur un support autour duquel tournent différentes antennes, comme le montre la **Figure 32**.



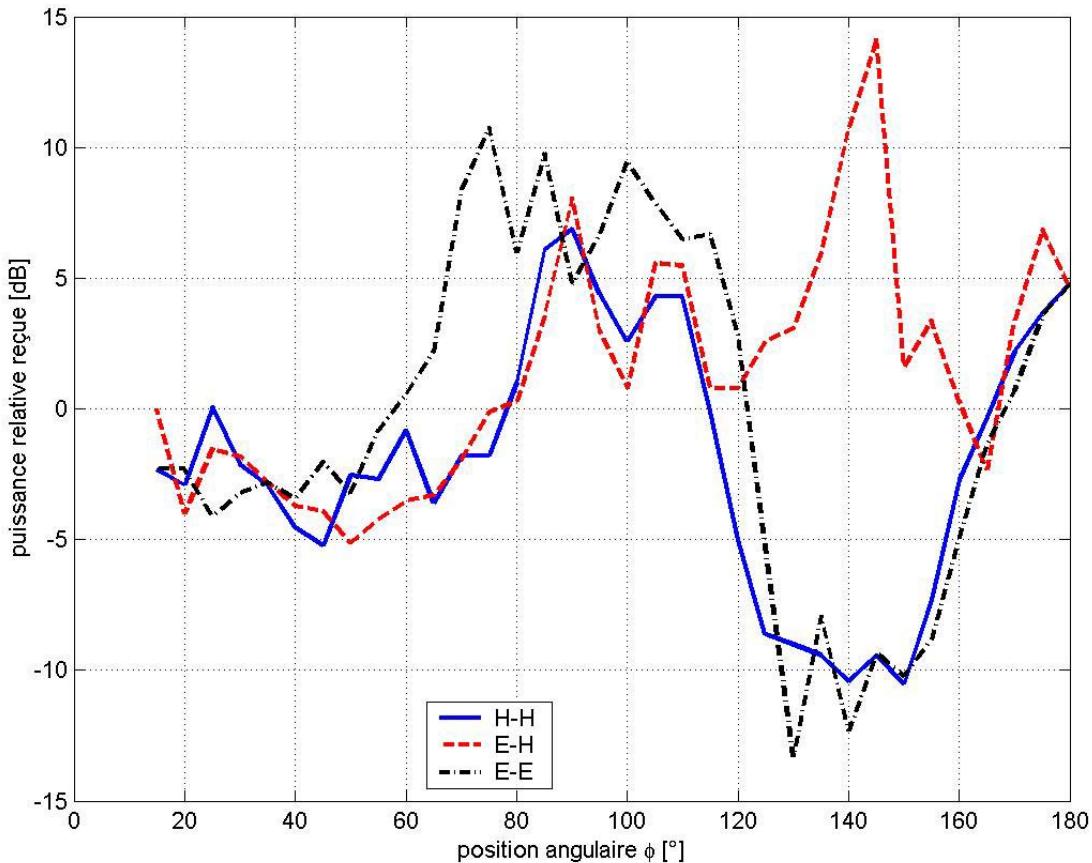
**Figure 32** (a) Vue du support et du banc de mesure de couplage. (b) Lentille Eccostok Luneberg lens-P16 de la société Emerson & Cuming sur le banc de mesure de couplage.

Les antennes utilisées pour effectuer la mesure sont des réseaux imprimés de quatre patchs carrés à polarisation linéaire, comme le montre la **Figure 32 (a)**, espacés de  $0.8\lambda_0$  afin d'optimiser leur directivité. Chaque petit réseau possède une directivité de 13.8dBi à 10.0GHz. Les mesures obtenues sont représentées en **Figure 33**.



**Figure 33** Mesure des champs reçus pour différentes polarisations et avec ou sans la présence de la Lentille Eccostok Luneberg lens-P16 de la société Emerson & Cuming sur le banc de mesure. La fréquence de travail est de 10.0GHz

Pour  $\theta \leq 80^\circ$ , le domaine de travail est le champ proche. Au-delà, le champ n'est certes pas de type lointain mais s'en rapproche. La première remarque qui ressort de cette courbe est que la lentille focalise également l'énergie en zone de champ intermédiaire : le diagramme est resserré et le niveau de puissance reçue augmente de 5dB à la position opposée à la source. Afin de faire ressortir encore plus ces remarques, la **Figure 34** montre les effets de la présence de la lentille sur le diagramme du réseau en effectuant la différence entre les mesures effectuées avec la lentille et celles effectuées sans lentille.



**Figure 34** Effets de la présence de la Lentille Eccostok Luneberg lens-P16 de la société Emerson & Cuming sur le diagramme de rayonnement du réseau à 10.0GHz, normalisés par rapport aux mesures effectuées sans lentille.

Il en ressort que le niveau dans le plan E est abaissé jusqu'à une position de  $60^\circ$ , puis se trouve fortement augmenté. Les niveaux de la polarisation croisée et de plan H ne sont, quant à eux, amplifiés qu'à partir de la position  $\phi = 80^\circ$ . Par la suite, la polarisation croisée reste amplifiée, et subie même un pic d'amplification de 14dB à la position  $\phi = 140^\circ$  dont la forte amplitude est à relativiser du fait de sa représentation différentielle (logarithme d'une grandeur normalisée) pouvant expliquer une partie des pertes par dépolarisation et donc une baisse du rendement de la lentille. A contrario, les deux polarisations principales sont atténuées d'un dizaine de décibels entre  $120^\circ$  et  $160^\circ$ , pour ensuite être amplifiées d'environ 5dB. Cette zone d'atténuation latérale correspond à une zone de « pompage », où l'énergie est « aspirée » pour être rayonnée dans l'axe de la source. A partir de ces résultats, il est possible de placer les capteurs en fonction des couplages maximums autorisés par l'application sur le pourtour de la sphère.

Ces remarques peuvent être affinées par la définition d'un critère de résolution angulaire. Pour se faire, la technique employée est similaire à celle donnée en optique. En effet, la distribution d'énergie autour du point focal est approchée comme étant celle d'une ouverture circulaire de rayon  $a$ . Cette approximation provient de la forme circulaire de la surface de captation de la lentille. La fonction d'onde  $\psi$  associée à l'énergie est alors :

$$\psi(\theta) = C \int_0^{2\pi} \int_0^a r e^{-jkr} \sin \theta \cos \varphi \, dr \, d\varphi = 2\pi C a^2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}, \quad (15)$$

où  $C$  est une constante et  $J_1$  la fonction de Bessel cylindrique de première espèce. L'énergie  $I$  est proportionnelle au module carré de la fonction d'onde. Ainsi :

$$I(\theta) \propto |\psi(\theta)|^2 = 4\pi^2 C^2 a^4 \frac{J_1^2(ka \sin \theta)}{k^2 a^2 \sin^2 \theta} = 4\pi^2 C^2 a^4 A(ka \sin \theta) \propto A(ka \sin \theta), \quad (16)$$

où  $A$  est la fonction de Airy. Selon le critère optique de séparation de Rayleigh, la position du premier zéro  $x_1$  de la fonction de Airy,  $x_1 = 3.83166$  (M. Abramowitz 1970), est la distance minimale entre deux pics d'énergie pour pouvoir les distinguer. Il en résulte, la relation :

$$\sin \theta = \frac{x_1}{2\pi} \lambda/a, \quad (17)$$

où,  $\theta$  représente en fait la séparation angulaire minimum. Géométriquement,  $a$  représente la distance minimale entre deux capteurs placés sur la sphère de focalisation de rayon  $d_f$ . Ainsi, les grandeurs géométriques sont reliées de la manière suivante :

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{a}{2d_f}. \quad (18)$$

Associée avec (17), cette relation devient :

$$\theta = 2 \arcsin \sqrt{\frac{x_1}{8\pi} \frac{\lambda}{d_f}}. \quad (19)$$

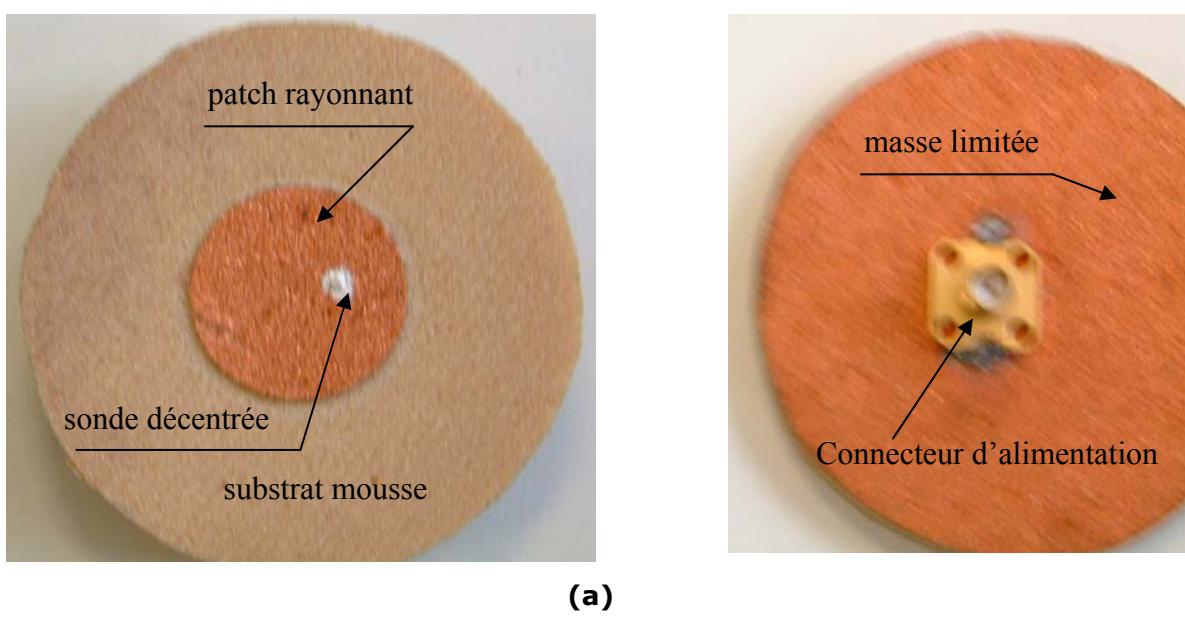
Ainsi, dans le cas de la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 de la société Emerson & Cuming, le point focal est placé à 1.0cm du bord de la lentille qui fait 40.0cm de diamètre. À 10.0GHz, l'écart angulaire minimum entre deux capteurs est alors de 16.8°. Cette relation est à relativiser. En effet, il est nécessaire que les niveaux des maxima des pics d'énergie soient supérieurs aux niveaux des lobes secondaires. Si cette remarque n'est pas respectée, il est alors impossible de savoir si ce que le détecteur reçoit est un lobe secondaire correspondant au signal capté par le voisin ou s'il s'agit bien d'un signal indépendant de ce que capte le détecteur voisin.

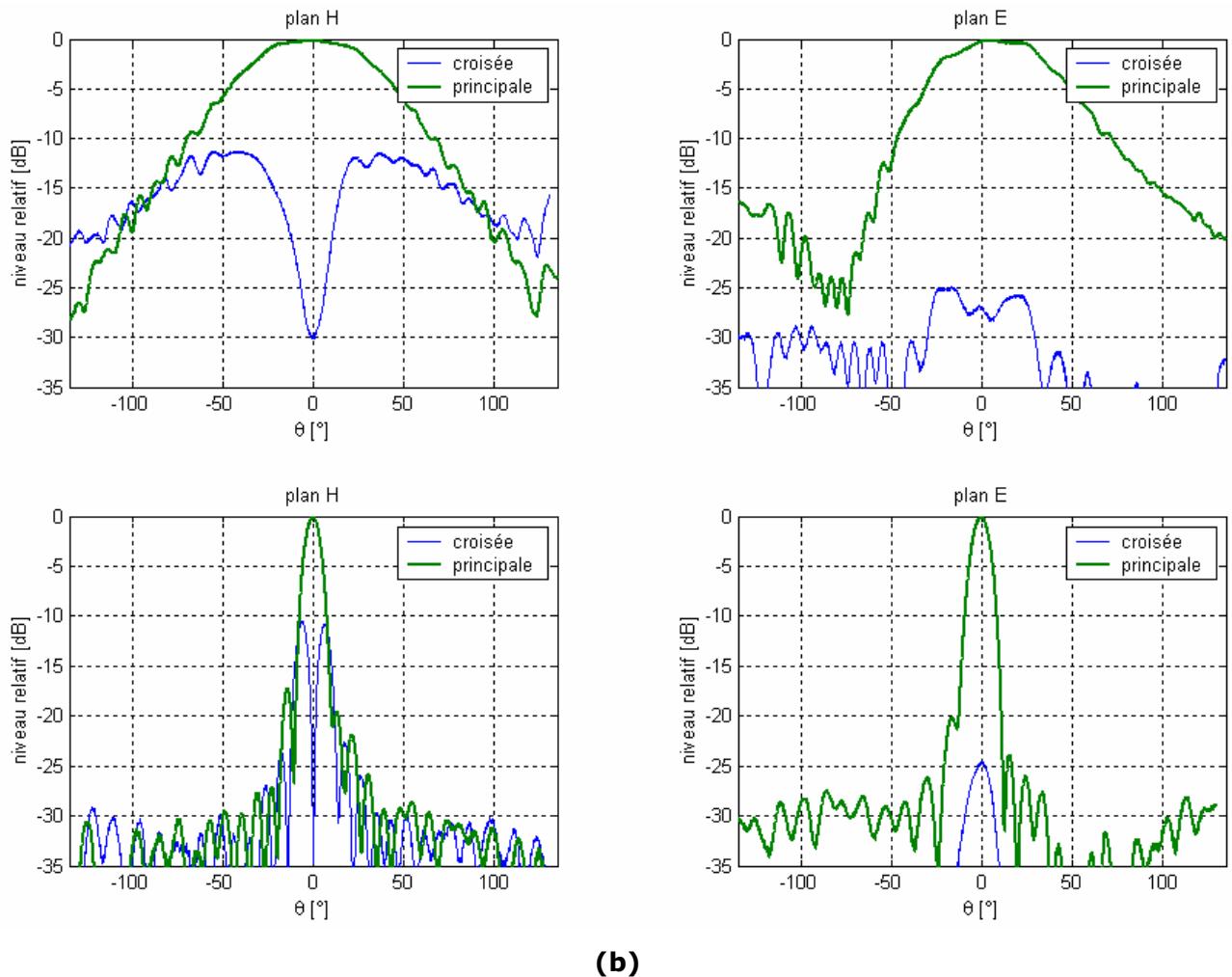
## 5.4 Comparaisons expérimentales de plusieurs associations lentilles - antennes

Le but de cette section est de montrer expérimentalement les influences des antennes primaires associées aux lentilles ainsi que les améliorations et inconvénients engendrés par la présence des lentilles. Les principales grandeurs étudiées sont les ouvertures à mi-puissance dans les plans E et H, notées  $\theta_E$  et  $\theta_H$ , la directivité  $D$ , le gain  $G$ , le rapport d'ellipticité, le rendement, défini comme le rapport entre le gain et la directivité, et enfin l'efficacité de surface, correspondant au rapport entre le gain et la directivité maximale que peut produire une ouverture de même dimension que la structure étudiée.

### 5.4.1 Lentille Emerson & Cuming – antenne alimentée par sonde décentrée

La première structure concerne l'association de la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 avec une antenne patch circulaire conformée sur la lentille et fonctionnant à 5.0GHz décrit en **Figure 35 (a)**. La sonde est placée aux trois quarts du bord du patch pour assurer l'adaptation à  $50\Omega$ . Le substrat utilisé est du type mousse de permittivité diélectrique 1.23. La largeur angulaire du patch est de  $2^\circ$  par rapport au centre de la lentille et celle de la masse est de  $4^\circ$ . L'antenne possède donc une surface de masse très réduite. L'épaisseur entre le patch et la masse est de 1% du rayon de la lentille. L'antenne pastille est conformée sur la lentille par thermoformage après que la métallisation et le retrait des parties métalliques par micro graveuse soient effectués. Les résultats obtenus par la mesure sont donnés en **Figure 35 (b)** et dans le tableau suivant.





(b)

**Figure 35** (a) photos de l'antenne patch conformée excitant la lentille (côté rayonnant à droite et non rayonnant à gauche), (b) diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne patch seule pour la partie supérieure et de l'antenne associée à la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 pour la partie inférieure.

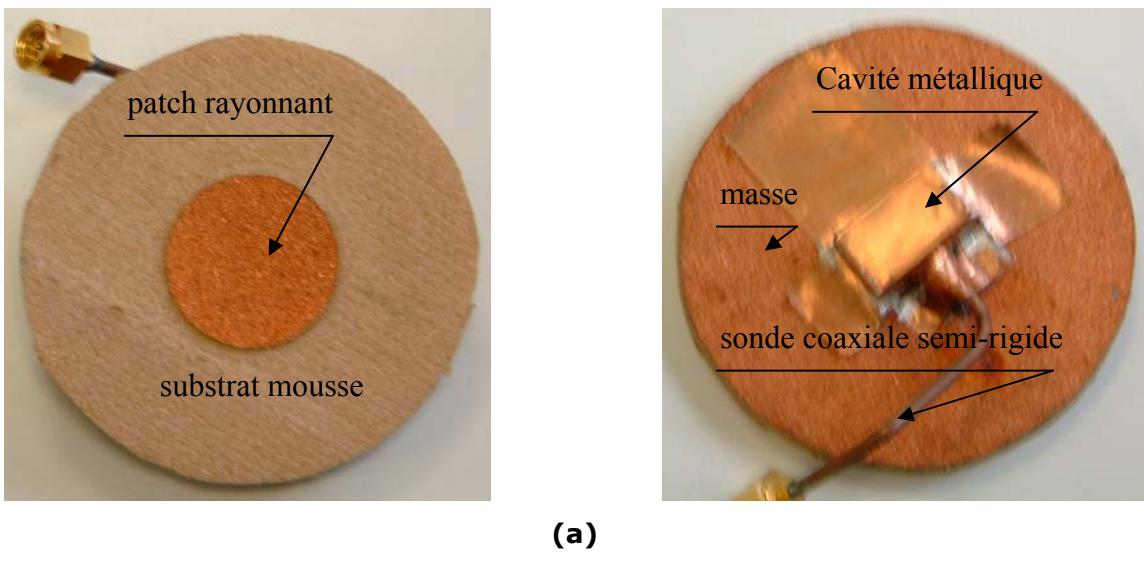
| $f = 5.0\text{GHz}$ | $\theta_E$   | $\theta_H$   | $D$     | $G$    | rendement |
|---------------------|--------------|--------------|---------|--------|-----------|
| Sans lentille       | $64.6^\circ$ | $73.8^\circ$ | 8.3dBi  | 7.5dB  | 83.2%     |
| Avec lentille       | $10.2^\circ$ | $8.9^\circ$  | 25.5dBi | 23.0dB | 56.2%     |

Il en ressort que le phénomène de focalisation a bien lieu : forte réduction des ouvertures à mi-puissance, augmentation de la directivité et du gain lorsque la lentille est présente. Par contre, il ressort une forte baisse du rendement : -32%. Les composantes croisées sont également focalisées, mais leur niveau relatif maximum par rapport à la composante principale est inchangé. Ainsi, comme la composante croisée en plan H est élevée dans le cas sans lentille, elle le reste lorsque la lentille est ajoutée. Ce fort niveau de croisée dans le plan H provient de la faible étendue de la surface de masse (le double de celle du patch). Le fait que cette taille réduite de la masse

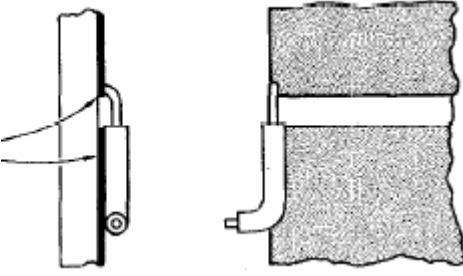
n'influence pas le plan E provient de la symétrie de la structure : le patch et la masse sont des disques circulaires coaxiaux conformés sur des sphères concentriques et l'axe formé par la sonde et les centres du patch et de la masse s'aligne sur la direction des lignes de courants. Ainsi, les effets des courants transversaux s'annihilent et limitent l'apparition de composantes croisées. Cette symétrie est perdue dans le plan H du fait du décentrage de la sonde générant des courants transversaux à l'origine de la composante croisée. Par ailleurs, la lentille permet d'accroître le gain de l'antenne de 15.5dB. De plus, l'efficacité de surface de la structure est de 45.5%.

### 5.4.2 Lentille Emerson & Cuming – antenne alimentée par fente centrée

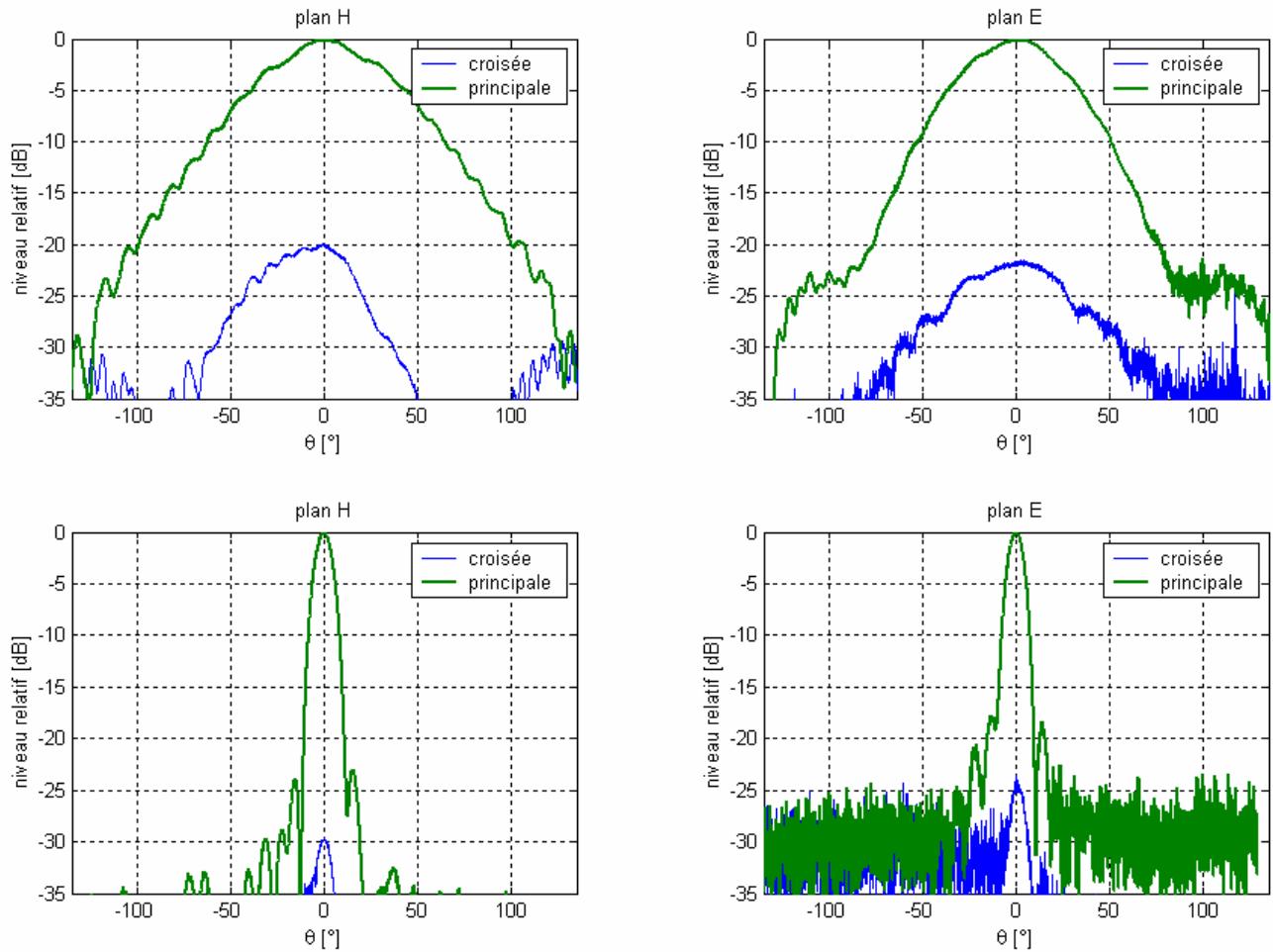
Il s'agit ici de voir l'effet de la présence ou non de la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 devant une antenne patch circulaire alimentée par fente centrée, **Figure 36 (a)**. La largeur angulaire du patch est de  $2^\circ$  par rapport au centre de la lentille et celle de la masse est de  $4^\circ$ . L'antenne possède donc également une surface de masse très réduite. L'épaisseur entre le patch et la masse est de 1% du rayon de la lentille. L'alimentation de la fente est réalisée via une sonde coaxiale, comme indiqué en **Figure 36 (b)** : l'âme de la sonde est soudée d'un côté de la fente et la gaine sur l'autre bord de la fente. Cette alimentation est centrée pour réduire au maximum le niveau de la composante croisée. Par ailleurs, le rayonnement arrière dû à l'alimentation de cette structure est éliminé en plaçant le tout dans une cavité métallique mise au même potentiel que la masse. Les résultats obtenus sont donnés en **Figure 36 (c)**.



âme et gaine de la sonde coaxiale soudées de part et d'autre de la fente.



(b)



(c)

**Figure 36** (a) photos de l'antenne patch conformée excitant la lentille (côté rayonnant à droite et non rayonnant à gauche avec sa cavité éliminant le rayonnement arrière dû à l'alimentation), (b) schéma de l'alimentation de la fente via une sonde coaxiale, (c) diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne patch seule pour la partie supérieure et de l'antenne associée à la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 pour la partie inférieure.

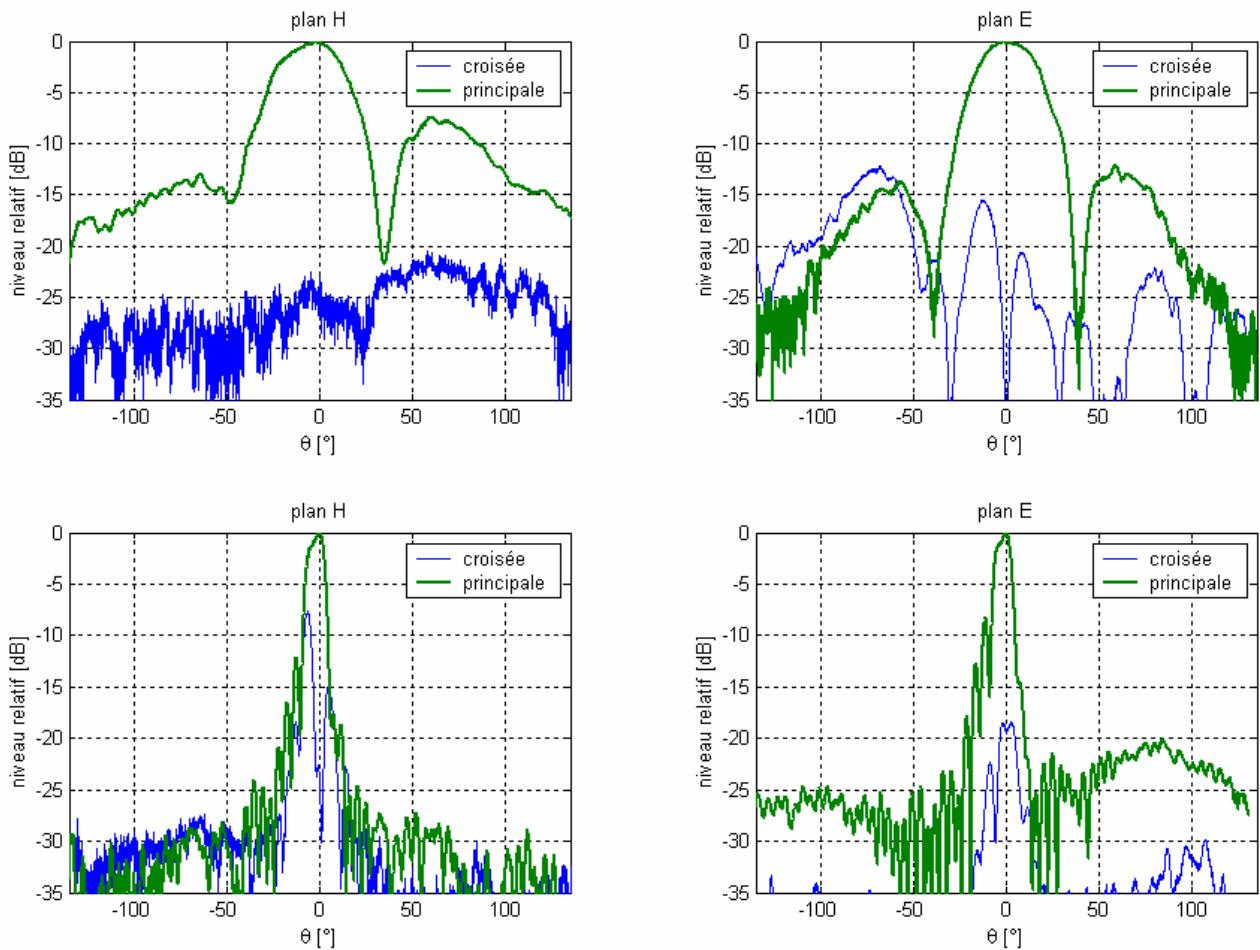
| $f = 6.0\text{GHz}$ | $\theta_E$   | $\theta_H$   | $D$              | $G$             | rendement |
|---------------------|--------------|--------------|------------------|-----------------|-----------|
| Sans lentille       | $51.3^\circ$ | $63.5^\circ$ | $10.0\text{dBi}$ | $7.2\text{dB}$  | $52\%$    |
| Avec lentille       | $8.8^\circ$  | $9.6^\circ$  | $25.8\text{dBi}$ | $19.4\text{dB}$ | $22.9\%$  |

Les remarques dans ce cas de figure sont identiques, à ceci près que le rendement est réduit ici de 56%. De plus, l'accroissement de gain apporté par la lentille est de 12.3dB. Malgré cela, l'efficacité de surface de l'ensemble est faible. Elle attend tout juste 13.8%.

L'avantage d'utiliser une antenne circulaire alimentée par fente centrée réside dans son très faible niveau de composante croisée, inférieure à 25dB du maximum de la composante principale. Ceci s'explique par les bonnes propriétés géométriques de la structure : le fait de centrer la fente sur un patch circulaire, placé au dessus d'une masse elle aussi circulaire et conformée sur une sphère concentrique à celle associée au patch, symétrise tous les courants et, par voie de conséquence, réduit fortement les effets des imperfections de fabrication créant les composantes croisées. Ainsi, l'association de cette antenne avec une lentille génère une structure à fort pouvoir focalisant, faible niveau de lobes secondaires et faibles composantes croisées.

#### 5.4.3 Lentille Emerson & Cuming – réseau de 4 patches

Les cas précédents traitent de la focalisation sur des antennes très peu directives. Il apparaît donc intéressant de voir comment une lentille discrète de Lüneburg, en l'occurrence la lentille Eccostok Luneberg lens-P16, focalise l'énergie rayonnée par une structure déjà focalisante. La structure focalisante choisie est un réseau de quatre patches rectangulaires espaces de  $0.8\lambda_0$  afin de privilégier une forte directivité. La **Figure 37** donne les diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'ensemble. Il est à noter que le plan de masse utilisé est de grande dimension (plusieurs longueurs d'ondes).



**Figure 37** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne réseau, formée de quatre patches, seule pour la partie supérieure et de l'antenne associée à la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 pour la partie inférieure.

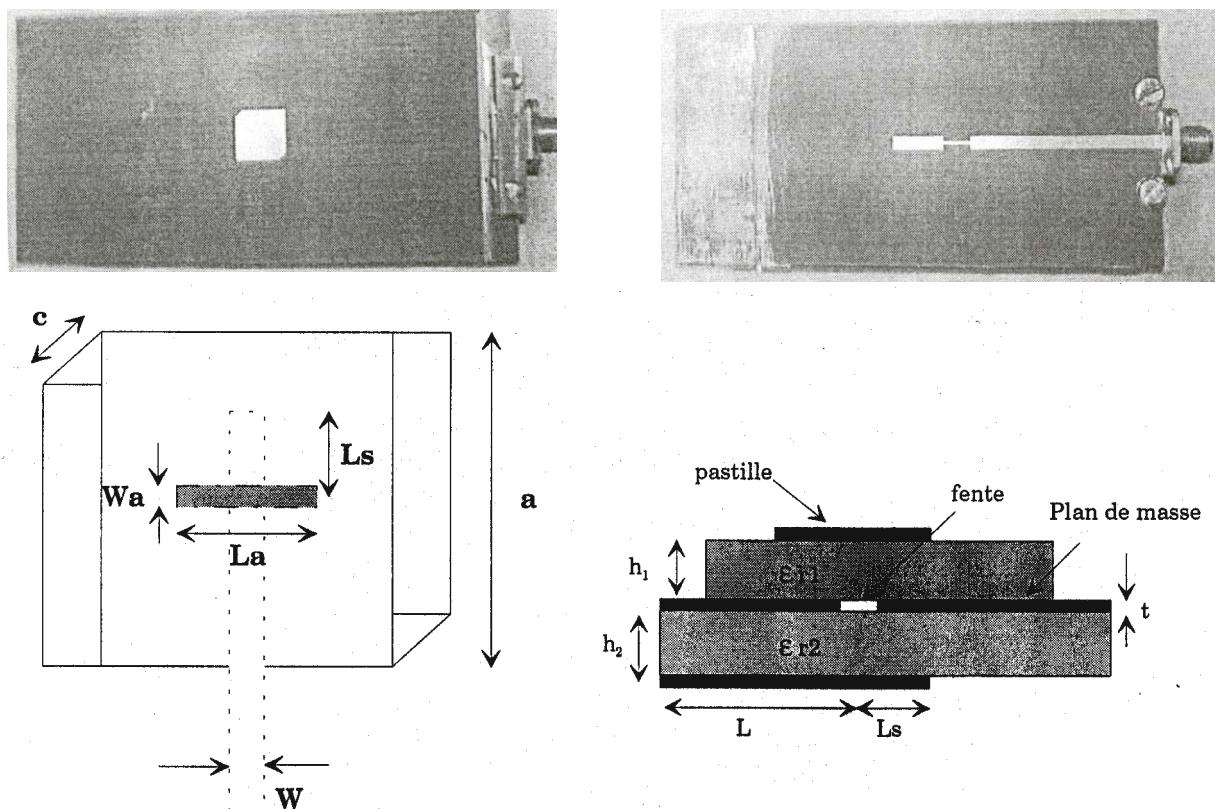
| $f = 5.0\text{GHz}$ | $\theta_E$   | $\theta_H$   | $D$     | $G$    | rendement |
|---------------------|--------------|--------------|---------|--------|-----------|
| Sans lentille       | $34.3^\circ$ | $37.9^\circ$ | 14.0dBi | 12.2dB | 66.1%     |
| Avec lentille       | $9.1^\circ$  | $9.6^\circ$  | 25.7dBi | 21.9dB | 41.7%     |

Les remarques générales sont identiques à celles des deux cas précédents. Ici, le rendement diminue de 37%, l'efficacité de surface vaut 35.3% et la lentille n'augmente le gain que de 9.7dB. Ceci se justifie par le simple fait que la source élémentaire utilise est déjà directive. Ainsi, une grande partie de l'énergie est déjà focalisée d'elle-même. La lentille, qui « pompe » l'énergie latérale, ne peut ainsi redistribuer dans l'axe qu'une quantité réduite du signal. Par ailleurs, dans ce cas précis de réseau, la composante croisée du plan H est très fortement augmentée.

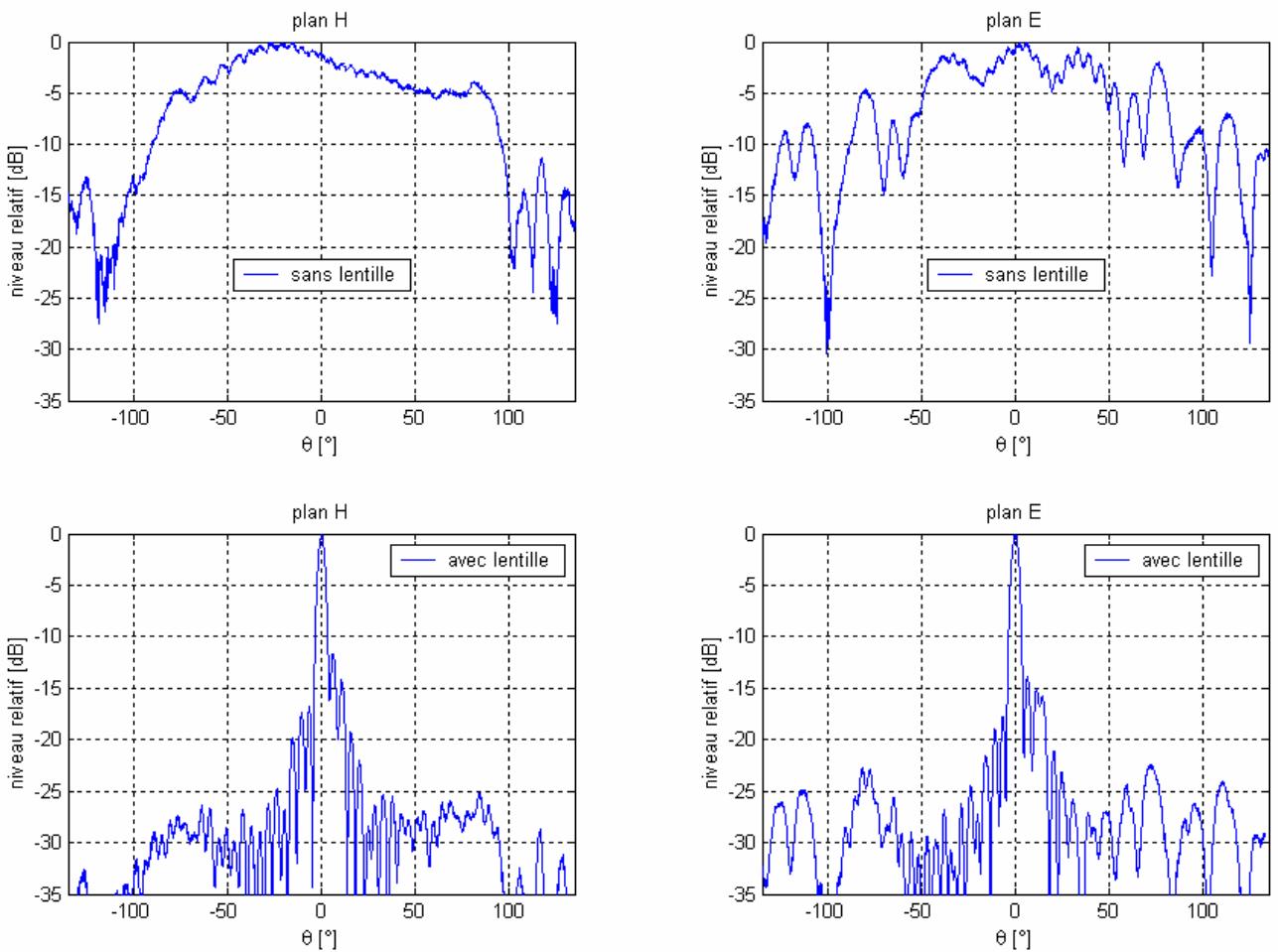
Une dépolarisation de l'onde électromagnétique peut être à l'origine de cette remontée du niveau de composante croisée.

#### 5.4.4 Lentille Emerson & Cuming – antenne à polarisation circulaire

Afin de compléter cette analyse des sources primaires associées à une lentille, il apparaît important de considérer le cas d'une antenne à polarisation circulaire, **Figure 38**. Il s'agit d'une antenne patch carrée alimentée par fente, pour réduire l'effet du rayonnement parasite de la ligne d'alimentation, dont deux coins opposés sont tronqués pour générer la polarisation circulaire. Les digrammes mesurés sont donnés en **Figure 39**.



**Figure 38** Antenne patch carrée à coins tronqués générant la polarisation circulaire.



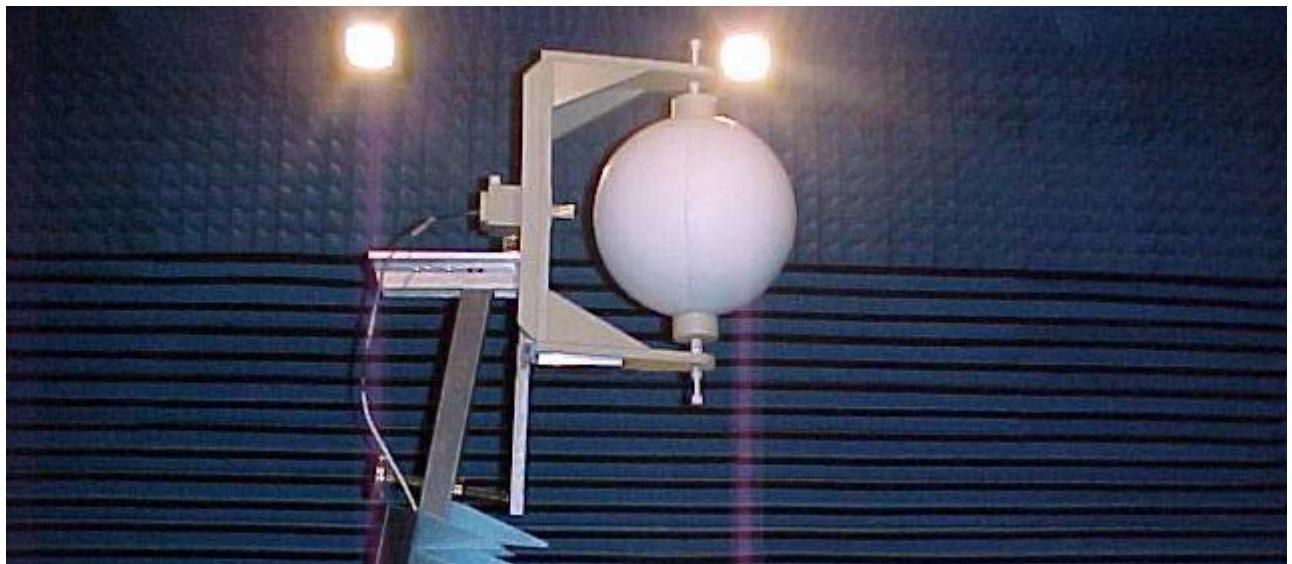
**Figure 39** Diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'antenne à polarisation circulaire seule pour la partie supérieure et de l'antenne associée à la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 pour la partie inférieure

| $f = 9.7\text{GHz}$ | $\theta_E$   | $\theta_H$   | $D$     | $G$    | rendement | rapp. ellipticité |
|---------------------|--------------|--------------|---------|--------|-----------|-------------------|
| Sans lentille       | $92.2^\circ$ | $80.0^\circ$ | 6.4dBi  | 5.6dB  | 83.2%     | 2.5dB             |
| Avec lentille       | $4.1^\circ$  | $3.8^\circ$  | 33.2dBi | 30.4dB | 52.5%     | 1.6dB             |

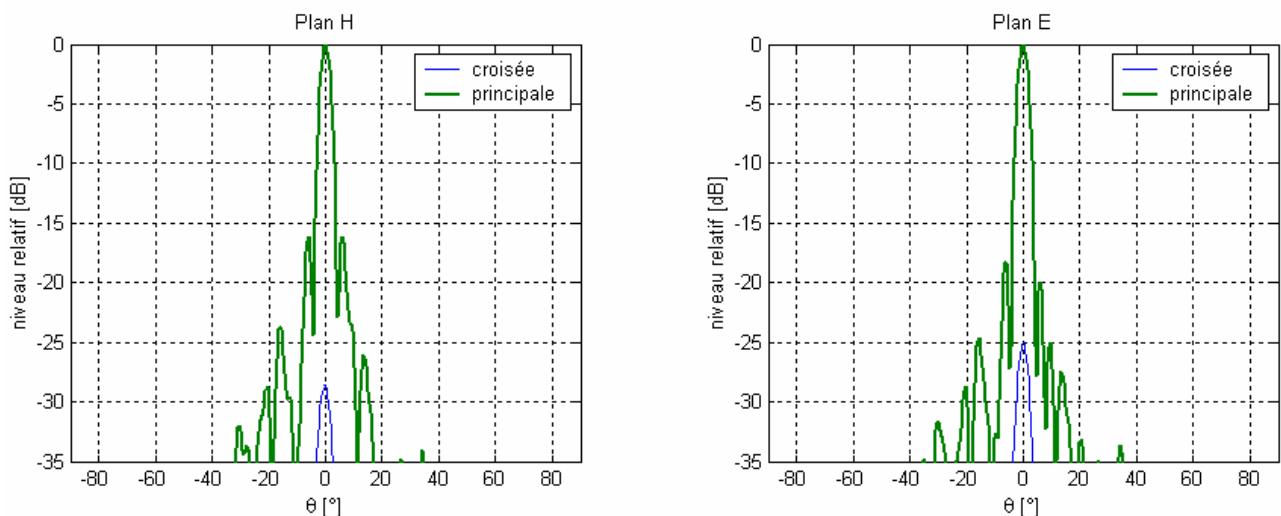
Ainsi, le fait d'ajouter la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 abaisse certes le rendement de 34%, mais surtout augmente le gain de 24.8dB et améliore le rapport d'ellipticité de 0.9dB. L'efficacité de surface de la structure, calculée sans tenir compte des dimensions importantes du plan de masse associé à l'antenne primaire, est de 66.4%. Par contre, le diagramme de rayonnement reste très chahuté. Ceci provient surtout d'un problème de masse. En effet, il a été remarqué que la qualité des diagrammes et de la polarisation sont très sensibles aux dimensions du plan de masse, qui doit absolument être très grand, ce qui est un inconvénient majeur quant à son association avec une lentille sphérique.

### 5.4.5 Lentille Emerson & Cuming – guide d'onde ouvert

Il est maintenant question de voir comment la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 focalise l'énergie rayonnée par un guide d'onde ouvert placé à 10.0mm de la lentille, **Figure 40**. Ce guide est du type WR90 en bande X. La **Figure 41** donne les diagrammes de rayonnement en champ lointain de l'ensemble.



**Figure 40** Photographie du guide d'onde ouvert associé à la lentille Eccostok Luneberg lens-P16, en chambre anéchoïde lors de la mesure du diagramme de rayonnement en champ lointain.



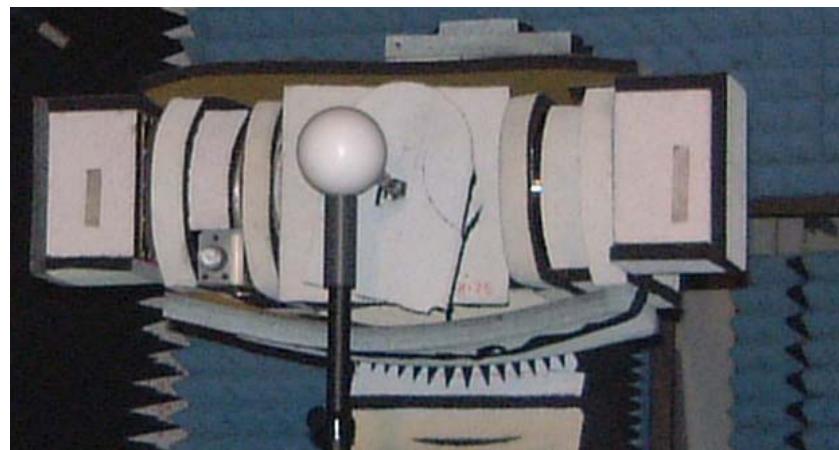
**Figure 41** Diagrammes de rayonnement en champ lointain du guide d'onde ouvert associé à la lentille Eccostok Luneberg lens-P16.

| $f = 11.8\text{GHz}$ | $\theta_E$  | $\theta_H$  | $D$     | $G$    | rendement |
|----------------------|-------------|-------------|---------|--------|-----------|
| Avec lentille        | $3.7^\circ$ | $3.8^\circ$ | 33.6dBi | 32.0dB | 69.0%     |

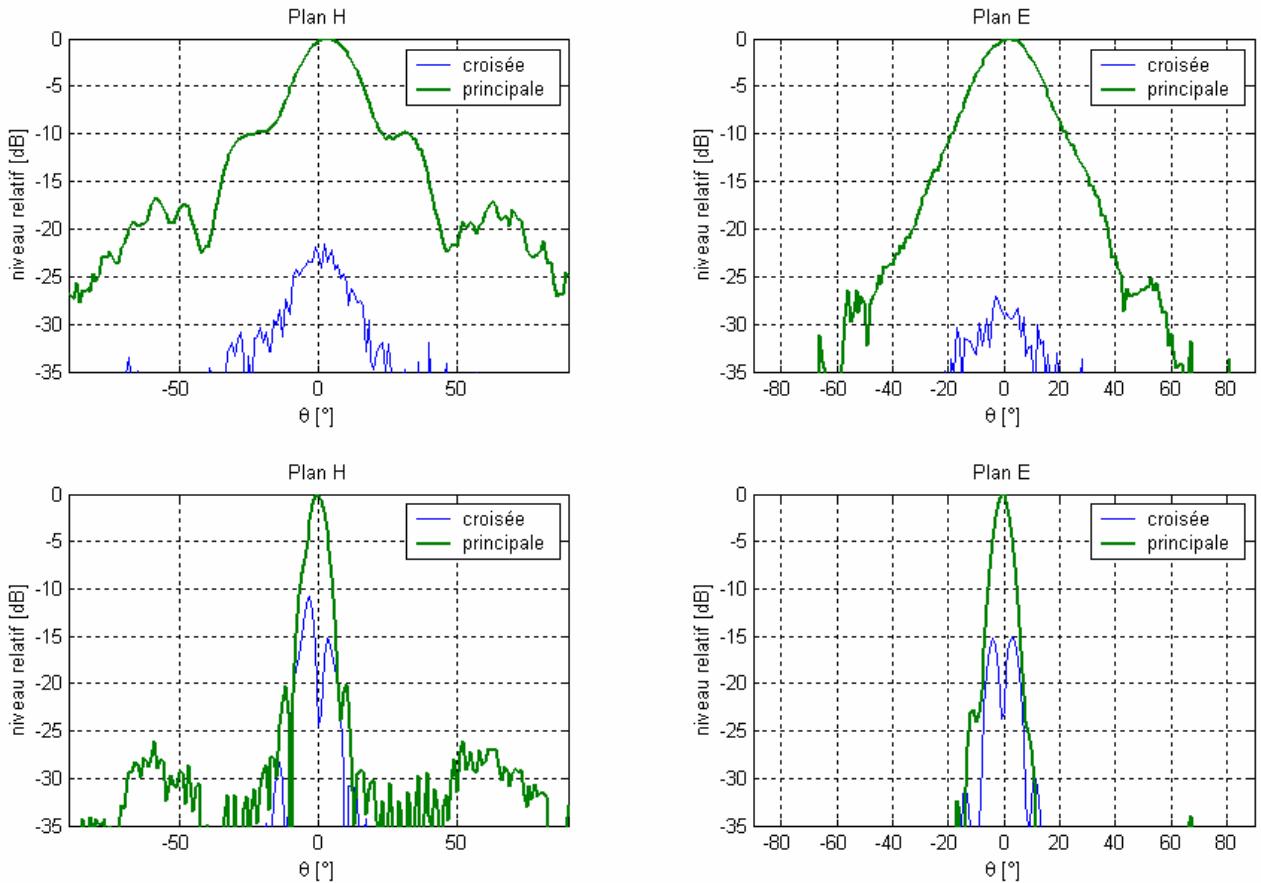
La directivité d'un guide d'onde ouvert sur l'espace libre du type WR90 à 11.8GHz est de 12.2dBi. Le rendement étant optimale, son gain est également de 12.2dB. Ainsi, le fait d'ajouter la lentille Eccostok Luneberg lens-P16 abaisse certes le rendement de 31%, mais surtout augmente le gain de 19.8dB. L'efficacité de surface de l'ensemble est de 64.9%. Par ailleurs, comme le diagramme de rayonnement d'une ouverture de guide d'onde est très peu chahuté, le diagramme de rayonnement de l'association guide d'onde ouvert – lentille est également très peu chahuté.

#### 5.4.6 Lentille homogène – cornet

L'ensemble des cas précédents traitent sont basés sur la lentille discrète de Lüneburg proposée par la société Emerson & Cuming. Il est apparu intéressant de voir le phénomène de focalisation au travers d'une lentille homogène en téflon pur,  $\epsilon_r = 2.2$ , de 10.0cm de diamètre associée a un cornet rectangulaire, dont les caractéristiques sont données en **Figure 42** et **Figure 43**, et distant de 10.0mm de la surface de la lentille. Ce décalage correspond a une zone de focalisation optimale.



**Figure 42** Photographie du cornet rectangulaire associé à la lentille diélectrique homogène de 10.0cm de diamètre en téflon pur,  $\epsilon_r = 2.2$ , en chambre anéchoïde lors de la mesure du diagramme de rayonnement en champ lointain.



**Figure 43** Diagrammes de rayonnement en champ lointain d'un cornet rectangulaire seul pour la partie supérieure et du cornet associé à une lentille diélectrique homogène de 10.0cm de diamètre en téflon pur,  $\epsilon_r = 2.2$ , pour la partie inférieure. Les caractéristiques du cornet sont données via les dimensions classiques suivantes :  $a_1 = 22.0\text{mm}$ ,  $b_1 = 16.9\text{mm}$ ,  $\rho_1 = 30.8\text{mm}$ ,  $\rho_2 = 30.8\text{mm}$ .

| $f = 50.0\text{GHz}$ | $\theta_E$   | $\theta_H$   | $D$              | $G$             | rendement |
|----------------------|--------------|--------------|------------------|-----------------|-----------|
| Sans lentille        | $20.2^\circ$ | $20.2^\circ$ | $19.0\text{dBi}$ | $19.0\text{dB}$ | 100.0%    |
| Avec lentille        | $5.5^\circ$  | $5.8^\circ$  | $30.1\text{dBi}$ | $30.0\text{dB}$ | 97.7%     |

Il ressort du tableau précédent que le rendement n'est abaissé que de 2%. Ceci provient du fait que le matériau utilisé est du téflon pur dont la tangente de pertes est de l'ordre de  $10^{-4}$ . De plus, le fort niveau de gain est à relativiser. En effet, l'efficacité de surface de la structure n'est que de 36.5%. Par ailleurs, l'ajout de la lentille homogène améliore le gain de 11.0dB. Par contre, contrairement au cas de la lentille de Lüneburg, le niveau relatif des composantes croisées n'est pas conservé lors de l'ajout de la lentille homogène : de -22dB par rapport au niveau maximum de la composante principale sans la lentille, la composante croisée remonte à -11dB du

niveau maximum de la composante principale lorsque la lentille est ajoutée. Ceci provient de la dépolarisation engendrée par la courbure de la lentille et le saut d'indice brusque rencontré par l'onde électromagnétique lors du passage air – téflon.

### 5.4.7 Conclusion

Un certain nombre de remarques ressortent de cette analyse expérimentale. Tout d'abord, l'ajout d'une lentille sphérique accroît la directivité. De plus, elle réduit fortement le rendement de l'antenne primaire, du fait des pertes diélectriques de la lentille et des ondes stationnaires créées au sein même de la lentille. Par ailleurs, l'ajout de la lentille de Lüneburg, contrairement au cas de la lentille homogène en téflon, conserve les niveaux relatifs entre maximum de composante croisée et maximum de composante principale. Deux conséquences importantes apparaissent : premièrement, le choix de l'antenne primaire est déterminant quant au niveau de la composante croisée rayonnée par l'association lentille – antenne primaire. L'utilisation d'une antenne primaire à faible composante croisée dans la structure antenne – lentille de Lüneburg génère un rayonnement à faible niveau de composante croisée. Deuxièmement, la qualité de la polarisation circulaire n'est pas détériorée. Le rapport d'ellipticité est même accrut. De plus, l'utilisation d'une antenne primaire possédant déjà une certaine directivité réduit la dynamique d'augmentation de la directivité. Par ailleurs, il apparaît que l'antenne primaire la mieux adaptée à ce genre de structure est l'antenne patch circulaire conformée sur sphère alimentée par fente centrée. En effet, sa géométrie limite fortement la création de composante croisée. De plus, sa forme conformée épouse parfaitement la forme de la lentille. Par ailleurs, elle est très peu encombrante car sa surface de masse est d'entendue très limitée : son rayon vaut deux fois le rayon du patch. Le choix ne peut pas se porter sur l'antenne à polarisation circulaire : malgré ses excellentes performances électromagnétiques, son plan de masse encombrant la rend définitivement inutilisable dans la cadre d'une association avec une lentille sphérique.

## **5.5 Conclusion**

Dans ce chapitre d'ordre plus technique, un certain nombre d'expérimentations sont réalisées. En effet, un matériau polymère faible poids est complètement caractérisé et utilisé dans le cadre du thermoformage et du dépôt de métal. Ensuite, est proposée une technique opérationnelle très simple de fabrication de lentilles à gradient d'indice basée la permittivité diélectrique effective résultant de l'association de deux matériaux. Un prototype est réalisé et caractérisé. Il ressort que cette lentille fonctionne de façon très stable sur une très large bande de fréquence, 26.0GHz – 40.0GHz. Par la suite, est étudié le pouvoir séparateur entre deux antennes primaires placées sur la même lentille. Ce pouvoir séparateur est tout d'abord caractérisé en termes de couplage, puis, un critère de séparation, basé sur le critère optique de Rayleigh est proposé. Enfin, une étude expérimentale est menée à bien en vue de quantifier l'influence du choix de la lentille et de la source primaire à utiliser dans le cadre d'une association lentille – source primaire. Il en ressort que le point le plus critique concerne le choix de l'antenne primaire. Aux vues des résultats obtenus, l'antenne circulaires imprimée conformée sur sphère et alimentée par fente centrée apparaît comme la mieux adaptée tant en termes de performances électromagnétiques que d'encombrement.

## **5.6 Bibliographie**

Bretagne (2002). Rapport Projet RESAIMS.

Chainon, S. (2002). Etude et Conception d'Antennes Composées de Guides d'Onde en Technologie Mousse. Application aux Antennes à Balayage Electronique. Traitement du Signal et Télécommunications. Rennes, Université de Rennes 1.

D. Bourreau, A. P. (2001). Mesures en Espace Libre sans Filtrage Temporel : Caractérisation Large bande de Matériaux et de Dispositifs Quasi-Optiques en bande Ka et W. JNM, Poitier, France.

K. Sato, H. U. (2000). A Plate Luneberg Lens with the Permittivity Distribution Controlled by the Hole Density. ISAP 2000, Fukuoka, Japon.

K.A. Zimmerman, D. L. R. (1997). Luneberg Lens and Method of Constructing same. Etats-Unis d'Amérique, EMS Technologies Inc. Norcross, Ga.

M. Abramowitz, I. A. S. (1970). Hanbook of Mathematical Functions. New York, Dover.

M. Himdi, J. P. D. (1998). Procédé de Revêtement de Mousse pour la Fabrication d'Eléments d'Antenne. France, 9808182.

M.Himdi, S. C., J.P. Daniel (2000). Technologie d'Antennes 2D et 3D en Mousse Métallisée. SEE, Paris, France.

S. Chainon, M. H. (2002). 2D and 3D Metallized Foam Microwave Filter Technology. International Workshop on Microwave Filters, CNES, Toulouse, France, CNES, ESA.

Tarot, A. C. (1995). Etude d'antennes à faible coût pour les télécommunications avec les mobiles. traitement du signal et télécommunications. Rennes, France, Université de Rennes 1.

## **Conclusion Générale et Perspectives**

---

Les objectifs de cette thèse étaient de développer et programmer des techniques permettant l'analyse des lentilles à distribution sphérique. Ainsi, un certain nombre d'outils, basés sur le développement en modes sphériques, a été mis au point et implémentés. Ils traitent aussi bien des sources seules que de la diffusion générée par la lentille.

Bien qu'un nombre important de travaux sur les lentilles sphériques, et plus particulièrement les lentilles de Lüneburg, aient été menées à bien, un certain nombre de nouveautés ont été présentées dans cette thèse. En effet, la principale d'entre elles concerne le transfert de la Méthode de Régularisation Analytique de l'hydrodynamique vers l'électromagnétisme pour les antennes imprimées circulaires conformées sur sphères associées à des lentilles à distribution sphérique. Plusieurs types d'alimentations ont été traités, à savoir, l'alimentation sondes coaxiales centrées et décentrées ainsi que l'alimentation par fentes centrées. Par ailleurs, cette généralisation a été également effectuée dans le choix de la représentation des grandeurs. En effet, toutes les publications antérieures à cette thèse ont utilisé la représentation des grandeurs en termes de fonctions potentielles. Celle-ci reste limitative quand à la modélisation des sources. Par voie de conséquence, le choix a été fait de travailler plutôt en termes de vecteurs modaux sphériques octroyant une grande flexibilité quant à la dérivation des grandeurs caractéristiques d'antennes. Par ailleurs, la généralisation proposée ne limite pas le nombre de coquilles composant la lentille. Cette technique a permis de mettre en évidence un certain nombre phénomènes, comme l'existence de différents types de résonances liées à chacun des éléments composant une antenne imprimée circulaire conformée sur sphère : les résonances de la surface de masse, du diélectrique placé entre la masse et le patch, etc. De plus, les effets de masquage créés par la présence des conducteurs sont également pris en compte. Bien qu'un certain nombre de choses restent à faire, il a été montré que cette technique, une fois mise au point, est rapide et permet de contrôler la précision des résultats obtenus, même pour des structures de grande dimension en termes de longueurs d'onde, contrairement aux logiciels commerciaux qui, lorsqu'ils convergent vers une solution, mettent plus d'une dizaine d'heures à simuler des structures de très petite taille en termes de longueur d'onde.

D'un point de vue technique, un certain nombre de thèmes ont également été traités. Tout d'abord, un matériau léger a été caractérisé et utilisé dans le cadre de la fabrication d'antennes imprimées conformées par thermoformage. De plus, la technique de perçage de trous dans un matériau homogène pour recréer

artificiellement un gradient d'indice a été reprise et améliorée afin de simplifier sans commune mesure la partie usinage de la lentille. Par ailleurs, en vue de l'utilisation des lentilles dans le cadre du multifaisceau, les effets de couplage entre deux sources primaires en fonction de leur position angulaire relative ainsi qu'un critère de séparation de signaux ont été étudiés. Par la suite, une étude expérimentale a été effectuée sur l'importance du choix de l'antenne primaire associée à la lentille ainsi que les conséquences de l'ajout de la lentille sur les grandeurs caractéristiques des antennes : gain, directivité, efficacité, ouverture à mi-puissance, rapport d'ellipticité, etc. Ainsi, le principal objectif de ce chapitre est atteint. En effet, il se voulait novateur et complémentaire du chapitre 2 concernant la description des travaux déjà réalisés sur les lentilles de Lüneburg. Cela justifie le choix d'effectuer des manipulations plus ou moins exotiques.

Un certain nombre de pistes peuvent être envisagées quant à la poursuite de ce travail. Tout d'abord, il est impératif de fixer les problèmes de convergence liés à l'alimentation de l'antenne par fente centrée ou par sonde coaxiale décentrées. Ensuite, la résolution de l'équation différentielle donnée dans le chapitre 4 permettrait de traiter les cas des fentes longues et/ou décentrées. Par voie de conséquences, il apparaîtrait alors possible de travailler sur les grands réflecteurs alimentés par des sources ayant une réalité physique comme les antennes imprimées et non les méthodes utilisant des alimentations purement théoriques comme le point source. Les effets de camouflage créés par les structures métalliques des antennes primaires seraient ainsi pris en compte.

Pour ce qui est des lentilles, l'essentiel est déjà fait en terme d'études théoriques et de modélisation. Ainsi, les travaux futurs à envisager concernent plus l'aspect fabrication. En effet, le principal futur objectif concerne la réalisation d'un gradient d'indice continu. Une voie possible est l'injection en continue, dans un moule sphérique en rotation selon deux axes différents, d'un matériau sous forme liquide ou visqueuse, dont la densité, et/ou la permittivité diélectrique effective, serait progressivement augmentée au cours de l'injection. Ainsi, le gradient serait reconstitué de façon continue de l'extérieure vers l'intérieure. Par ailleurs, un certain nombre d'améliorations peuvent encore être effectuée en termes de poids de matériaux, car les lentilles actuelles sont encore trop lourdes. Ces travaux sur le gradient continu et les matériaux à faible poids, par dopage céramique par exemple, deviennent plus du ressort du génie polymères et matériaux que de l'électromagnétisme.

# ANNEXES

---

## AN.1 Fonctions sphériques de Bessel

La partie radiale du problème étudié dans ce document est régie par les fonctions sphériques de Bessel. Comme pour de nombreuses autres fonctions, les fonctions sphériques de Bessel ont été très étudiées par le passé. Par conséquent, nombre de leurs propriétés ont déjà été mises en évidence : intégrales, récurrences, algorithmes de calculs, etc.

### AN.1.1 Définition

Les fonctions sphériques de Bessel d'ordre  $n$  sont les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$z^2 \frac{d^2 y}{dz^2} + 2z \frac{dy}{dz} + [z^2 - n(n+1)]y = 0 , \quad (1)$$

avec  $n$  entier relatif. Les deux solutions particulières linéairement indépendantes de cette équation sont,

- les fonctions sphériques de Bessel de première espèce et d'ordre  $n, j_n(z)$ ,
- les fonctions sphériques de Bessel de seconde espèce et d'ordre  $n, y_n(z)$ .

Or, toute combinaison linéaire de ces deux solutions est elle-même une solution de l'équation différentielle. Ainsi, les fonctions sphériques de Bessel de troisième espèce, encore appelées fonctions sphériques de Hankel, sont définies comme les combinaisons linéaires de ces fonctions sphériques de Bessel : les fonctions sphériques de Hankel de première et seconde espèce et d'ordre  $n$  :

$$h_n^{(1)}(z) = j_n(z) + j \cdot y_n(z), \quad h_n^{(2)}(z) = j_n(z) - j \cdot y_n(z). \quad (2)$$

Par conséquent,  $j_n$ ,  $y_n$ ,  $h_n^{(1)}$  et  $h_n^{(2)}$  sont solutions de l'équation différentielle et deux à deux linéairement indépendantes.

## AN.1.2 Liens avec les fonctions cylindriques de Bessel

Pour entier relatif  $n$  et tout complexe  $z$ , les fonctions cylindriques et sphériques de Bessel sont liées par les relations :

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot J_{\frac{n+1}{2}}(z) = Z_n^1(z), \quad y_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot Y_{\frac{n+1}{2}}(z) = Z_n^2(z), \quad (3)$$

$$h_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot H_{\frac{n+1}{2}}^{(1)}(z) = Z_n^3(z), \quad h_n^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cdot H_{\frac{n+1}{2}}^{(2)}(z) = Z_n^4(z). \quad (4)$$

## AN.1.3 Relations de récurrence

Pour tout complexe  $z$  et tout entier relatif  $n$ , les fonctions sphériques de Bessel vérifient l'ensemble des relations de récurrence suivantes :

$$\forall f_n \in \{j_n, y_n, h_n^{(1)}, h_n^{(2)}\} \quad (5)$$

$$f_{n-1}(z) + f_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} f_n(z),$$

$$n \cdot f_{n-1}(z) - (n+1) \cdot f_{n+1}(z) = (2n+1) \frac{d}{dz} f_n(z),$$

$$\frac{n+1}{z} \cdot f_n(z) + \frac{d}{dz} f_n(z) = f_{n-1}(z),$$

$$\frac{n}{z} \cdot f_n(z) - \frac{d}{dz} f_n(z) = f_{n+1}(z).$$

## AN.1.4 Premiers ordres

Pour tout complexe  $z$  les premiers ordres des fonctions sphériques de Bessel vérifient l'ensemble des relations suivantes :

$$Z_0^1(z) = j_0(z) = \frac{\sin(z)}{z}, \quad Z_1^1(z) = j_1(z) = \frac{\sin(z)}{z^2} - \frac{\cos(z)}{z}, \quad (6)$$

$$Z_0^2(z) = y_0(z) = -\frac{\cos(z)}{z}, \quad Z_1^2(z) = y_1(z) = -\frac{\cos(z)}{z^2} - \frac{\sin(z)}{z}, \quad (7)$$

$$Z_0^3(z) = h_0^{(1)}(z) = -j \frac{e^{iz}}{z}, \quad Z_0^4(z) = h_0^{(2)}(z) = j \frac{e^{-iz}}{z}, \quad (8)$$

En posant  $K_n^s(z) = \frac{1}{z} \frac{d}{dz} [z \cdot Z_n^s(z)]$ , pour tout entier naturel  $n$  et  $s \in \{1, 2, 3, 4\}$ , ressortent les expressions :

$$K_0^1(z) = \frac{\cos(z)}{z}, \quad K_0^4(z) = \frac{e^{jz}}{z}. \quad (9)$$

### AN.1.5 Wronskien

Pour tout entier naturel  $n$ , le Wronskien associé aux fonctions sphériques de Bessel de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>nde</sup> espèce est donné par :

$$W\{j_n(z), y_n(z)\} = j_n(z) \cdot \frac{d}{dz} y_n(z) - y_n(z) \cdot \frac{d}{dz} j_n(z) = \frac{1}{z^2}, \quad (10)$$

et celui associé aux fonctions sphériques de Hankel de 1<sup>ère</sup> et 2<sup>nde</sup> espèce est :

$$W\{h_n^{(1)}(z), h_n^{(2)}(z)\} = -\frac{2j}{z^2}. \quad (11)$$

### AN.1.6 Produit croisé

Pour tout entier naturel  $n$  le produit croisé est donné par la relation :

$$j_n(z) \cdot y_{n-1}(z) - j_{n-1}(z) \cdot y_n(z) = \frac{1}{z^2}. \quad (12)$$

### AN.1.7 Evolutions asymptotiques

Très utiles pour l'évaluation du champ rayonné à grande distance, ou pour l'application de la technique de régularisation, les évolutions asymptotiques des fonctions sphériques de Bessel sont répertoriées comme suit :

Pour tout entier relatif  $n$  :

$$j_n(z) = \frac{1}{z} \cos\left(z - \frac{n+1}{2}\pi\right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow +\infty), \quad y_n(z) = \frac{1}{z} \sin\left(z - \frac{n+1}{2}\pi\right) + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow +\infty), \quad (13)$$

$$h_n^{(1)}(z) = (-j)^{n+1} \frac{e^{jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow +\infty), \quad h_n^{(2)}(z) = j^{n+1} \frac{e^{-jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow +\infty). \quad (14)$$

$$K_n^4(z) = j^n \frac{e^{jz}}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) (|z| \rightarrow +\infty). \quad (15)$$

Pour tout complexe  $z$  non nul :

$$j_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2\sqrt{nz}} \left( \frac{ez}{2n+1} \right)^{\frac{n+1}{2}}, \quad y_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{\sqrt{nz}} \left( \frac{ez}{2n+1} \right)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad (16)$$

$$h_n^{(1)}(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{j}{\sqrt{nz}} \left( \frac{ez}{2n+1} \right)^{-\frac{n-1}{2}}, \quad h_n^{(2)}(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{-j}{\sqrt{nz}} \left( \frac{ez}{2n+1} \right)^{-\frac{n-1}{2}}. \quad (17)$$

### AN.1.8 Algorithme de calcul

La relation de récurrence de base utilisée pour l'évaluation des fonctions de Bessel est (5) :

$$F_{n-1}(z) + F_{n+1}(z) = \frac{2n+1}{z} F_n(z), \quad (18)$$

dont deux solutions linéairement indépendantes sont  $j_n$  et  $y_n$ . De (16), ressort la relation :

$$j_n(z)/y_n(z) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2} \left( \frac{ez}{2n+1} \right)^{2n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. \quad (19)$$

Par conséquent,  $j_n$  représente la solution minimale et  $y_n$  une solution dominante de la relation de récurrence. La suite  $y_n$  doit donc être évaluée dans le sens des  $n$  croissants avec pour valeurs d'initialisation  $y_0$  et  $y_1$ . Par contre, la suite  $j_n$  doit être calculée à partir de l'algorithme de Miller, (M. Abramowitz 1970) :  $j_p=1$ ,  $j_{p+1}=0$  et la valeur de  $p$  est choisie en fonction de la précision souhaitée. Il est à noter que ces deux germes sont donnés à titre indicatif. Tout autre couple convient Pour une précision assurant la validité des 7 premiers chiffres au point  $z$  de module inférieur à 100 et à un ordre également plus petit que 100, il apparaît nécessaire de prendre l'entier  $p$  de telle sorte que  $n_{\max} + |z| + 15 \leq p < n_{\max} + |z| + 16$ . Pour déplacer la valeur du module maximum de 100 à quelques dizaines de plus, tout en gardant une précision aussi bonne, la valeur 500 à la valeur  $n_{\max}$ . L'algorithme correspondant est :

*faire,*

$$p \leftarrow n_{\max} + E(|z|) + 15$$

$$f'_{p+1} \leftarrow 0$$

$$f'_p \leftarrow 1$$

$$n \leftarrow p$$

*tant que*  $n > 0$ ,

*faire,*

$$f'_{n-1} \leftarrow \frac{2n+1}{z} f'_n - f'_{n+1}$$

$$n \leftarrow n - 1$$

*fin faire,*

*fin tant que,*  
 $j_0 \leftarrow \sin(z)/z$   
*faire,*  
 $si f'_0 = 0, faire \ \forall n \in \{1, \dots, n_{\max}\}, j_n \leftarrow f'_n \cdot j_0 / f'_0$   
*fin faire,*  
*fin faire.*

$E(\alpha)$  représente la partie entière du réel  $\alpha$ .

Dans le cas où  $z$  est un complexe, quelques modifications sont à apporter. Celles-ci sont présentées dans (Toit 1993).

## **AN.2 Polynômes et fonctions associées de Legendre**

L'ensemble de la théorie développée dans ce document est fondé sur l'utilisation des harmoniques sphériques. Une des variations angulaires de ces harmoniques est régie par les polynômes et fonctions associés de Legendre.

### **AN.2.1 Définition**

Les polynômes associés de Legendre de première espèce d'ordre  $m$  et de degré  $n$ ,  $P_n^m$ , sont les fonctions qui vérifient l'équation différentielle suivante :

$$(1-z^2) \frac{d^2y}{dz^2} - 2z \frac{dy}{dz} + \left[ n(n+1) - \frac{m^2}{1-z^2} \right] y = 0, \quad (20)$$

avec  $m$  et  $n$  entiers naturels et qui ne possèdent pas de singularités en  $z = \pm 1$ . Ces polynômes sont donc donnés par les relations :

$$P_n^m(z) = (1-z^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dz^m} P_n(z), \quad P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n, \quad (21)$$

tirées de (M. Abramowitz 1970).

### **AN.2.2 Relations de récurrence**

Les polynômes associés de Legendre satisfont à de nombreuses relations de récurrences, (M. Abramowitz 1970), :

$$(n-m+1)P_{n+1}^m(z) - (2n+1)zP_n^m(z) + (n+m)P_{n-1}^m(z) = 0, \quad (22)$$

$$P_{n-1}^m(z) = zP_n^m(z) - (n-m+1)\sqrt{1-z^2}P_n^{m-1}(z), \quad (23)$$

$$P_{n+1}^m(z) = zP_n^m(z) + (n+m)\sqrt{1-z^2}P_n^{m-1}(z), \quad (24)$$

$$\sqrt{1-z^2}P_n^{m+1}(z) = (n+m+1)zP_n^m(z) - (n-m+1)P_{n+1}^m(z), \quad (25)$$

$$\sqrt{1-z^2}P_n^{m+1}(z) = 2mzP_n^m(z) - (n+m)(n-m+1)\sqrt{1-z^2}P_n^{m-1}(z), \quad (26)$$

$$\sqrt{1-z^2} P_n^m(z) = \frac{1}{2n+1} (P_{n+1}^{m+1}(z) - P_{n-1}^{m+1}(z)), \quad (27)$$

$$\frac{m}{\sqrt{1-z^2}} P_n^m(z) = \frac{1}{2} z [(n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(z) + P_n^{m+1}(z)] + m \sqrt{1-z^2} P_n^m(z), \quad (28)$$

$$(1-z^2) \frac{d}{dz} P_n^m(z) = (n+1)z P_n^m(z) - (n-m+1) P_{n+1}^m(z), \quad (29)$$

$$(1-z^2) \frac{d}{dz} P_n^m(z) = (n+m) P_{n-1}^m(z) - n z P_n^m(z), \quad (30)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos(\theta)) = -\sqrt{1-z^2} \frac{d}{dz} P_n^m(z) = \frac{1}{2} [(n-m+1)(n+m) P_n^{m-1}(z) - P_n^{m+1}(z)], \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos(\theta)) = \frac{1}{\sin(\theta)} [(n-m+1) P_{n+1}^m(\cos(\theta)) - (n+1) \cos(\theta) P_n^m(\cos(\theta))], \quad (32)$$

avec  $z = \cos(\theta)$ .

La plupart des récurrences utilisant un ordre  $m$  différent sont instables. Elles sont donc numériquement dangereuses. Ainsi, il s'avère intéressant d'utiliser plutôt une récurrence en  $n$ , plus stable numériquement, comme par exemple :

$$(n-m) P_n^m(z) = z(2n-1) P_{n-1}^m(z) - (n+m-1) P_{n-2}^m(z), \quad (33)$$

avec  $|z| \leq 1$ . Cette condition sur le module est constamment vérifiée : dans l'ensemble de l'étude, il a été posé  $z = \cos(\theta)$  avec  $\theta \in [0, \pi]$ . Pour montrer la stabilité de cette récurrence, il suffit de prouver que les racines de son équation caractéristique sont dans le cercle unité. L'équation caractéristique asymptotique étant  $na^2 - 2nz a + n = 0$ , les solutions de cette équation sont  $a^\pm = z \pm \sqrt{z^2 - 1}$ . Par conséquent,  $|a^\pm| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$ , ce qui est toujours vérifié pour  $z = \cos(\theta)$  avec  $\theta \in ]0, \pi[$ . Il en ressort que la relation de récurrence choisie pour l'évaluation des polynômes et fonctions associées de Legendre est effectivement stable.

Cette récurrence possède un second intérêt : les valeurs d'initialisation. En effet, pour atteindre la valeur du polynôme  $P_n^m$ , il suffit de partir de deux polynômes connus d'ordres consécutifs et de degré  $m$  :

$$P_m^m(z) = (2m+1)!! (1-z^2)^{\frac{m}{2}}, \quad P_{m+1}^m(z) = z (2m+1) P_m^m(z), \quad P_{m-k}^m(z) = 0 \text{ pour } k > 0. \quad (34)$$

La notation  $p!!$  dénote le produit de tous les entiers naturels impairs non nuls inférieurs ou égaux à  $p$ .

### AN.2.3 Formes numériquement indéterminées

L'ensemble des problèmes numériques pour les polynômes associés de Legendre concernent des divisions numériques par zéro pour les valeurs limites à chacun des pôles 0 et  $\pi$ . Pour palier à ce problème, il suffit de considérer analytiquement la limite des fonctions en ces points délicats. Ainsi, il ressort :

□ Pour  $\theta = 0$  :

$$P_n^m(\cos(\theta)) = \begin{cases} 1, & \text{si } m = 0 \\ 0, & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad m \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} = \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} = \begin{cases} n(n+1)/2, & \text{si } m = 1 \\ 0, & \text{si } m \neq 1 \end{cases} \quad (35)$$

□ Pour  $\theta = \pi$  :

$$P_n^m(\cos(\theta)) = \begin{cases} (-1)^n, & \text{si } m = 0 \\ 0, & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad m \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)} = - \frac{\partial P_n^m(\cos(\theta))}{\partial \theta} = \begin{cases} (-1)^{n+1} n(n+1)/2, & \text{si } m = 1 \\ 0, & \text{si } m \neq 1 \end{cases} \quad (36)$$

### AN.2.4 Relations avec des intégrales

Les relations intégrales, (M. Abramowitz 1970), associées aux polynômes et fonctions associées de Legendre sont utiles pour définir des espaces orthogonaux, comme le montre l'annexe suivante. Celles utilisées dans ce document sont :

$$\int_{-1}^1 P_n^m(z) \cdot P_v^m(z) dz = 0 \text{ pour } v \neq n, \quad \int_{-1}^1 P_n^m(z) \cdot P_n^\mu(z) \frac{dz}{1-z^2} = 0 \text{ pour } \mu \neq m, \quad (37)$$

$$\int_{-1}^1 [P_n^m(z)]^2 dz = \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad \int_{-1}^1 [P_n^m(z)]^2 \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{m} \frac{(n+m)!}{(n-m)!}, \quad (38)$$

$$\int_{-1}^1 P_n(z) \cdot P_v(z) dz = \frac{2}{2n+1} \cdot \delta_{n,v}, \quad \int_{-1}^1 z^v \cdot P_n(z) dz = 2^{n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \cdot \delta_{n,v}, \quad (39)$$

où  $\delta_{p,q}$  représente le symbole de Kronecker.

### AN.2.5 Harmoniques de surface pour la variation en $\theta$

L'ensemble des variations en  $\theta$  est contenu dans les harmoniques de surfaces définis comme suit :

$$t_{mn}^{e,1}(\theta) = \pm m \frac{P_n^m(\cos(\theta))}{\sin(\theta)}, \quad t_{mn}^{e,2}(\theta) = - \frac{\partial}{\partial \theta} P_n^m(\cos(\theta)), \quad t_{mn}^{e,3}(\theta) = n(n+1) P_n^m(\cos(\theta)), \quad (40)$$

où  $n$  décrit l'ensembles des entiers naturels et  $m$  les entiers naturels inférieurs ou égaux à  $n$ . Ces harmoniques forment une famille génératrice d'un espace  $L$  de fonctions réelles. Ces fonctions réelles sont associées à un produit scalaire : pour tout couple de fonctions  $f, g$  de l'espace  $L$ , le produit scalaire entre les fonctions  $f$  et  $g$  est donné par :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\pi f(\theta) \cdot \overline{g(\theta)} \sin(\theta) d\theta \quad (41)$$

où  $\bar{g}$  représente la fonction conjuguée de  $g$ . De cette définition du produit scalaire, ressort un certain nombre de propriétés d'orthogonalité, obtenues à partir des relations données dans la partie précédente en considérant le changement de variable  $z = \cos(\theta)$  :

$$\langle t_{mn}^{\sigma 1} | t_{mv}^{\sigma 1} \rangle = m \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,v}, \quad (42)$$

$$\langle t_{mn}^{\sigma 2} | t_{mv}^{\sigma 2} \rangle = \left( 2n \frac{n+1}{2n+1} - m \right) \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,v}, \quad (43)$$

$$\langle t_{mn}^{\sigma 3} | t_{mv}^{\sigma 3} \rangle = n^2(n+1)^2 \frac{2}{2n+1} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \delta_{n,v}, \quad (44)$$

$$\langle t_{mn}^{\sigma 1} | t_{\mu\nu}^{\sigma 1} \rangle = \langle t_{mn}^{\sigma 1} | t_{mv}^{\sigma 1} \rangle \cdot \delta_{m,\mu}, \quad \langle t_{mn}^{\sigma 2} | t_{\mu\nu}^{\sigma 2} \rangle = \langle t_{mn}^{\sigma 2} | t_{mv}^{\sigma 2} \rangle \cdot \delta_{m,\mu}, \quad \langle t_{mn}^{\sigma 3} | t_{\mu\nu}^{\sigma 3} \rangle = \langle t_{mn}^{\sigma 3} | t_{mv}^{\sigma 3} \rangle \cdot \delta_{m,\mu}. \quad (45)$$

Les valeurs aux points limites sont :

□ Pour  $\theta = 0$ ,

$$t_{mn}^{e_1}(\theta) = \begin{cases} \pm n(n+1)/2, & \text{si } m = 1 \\ 0, & \text{si } m \neq 1 \end{cases} \quad (46)$$

$$t_{mn}^{e_2}(\theta) = \begin{cases} -n(n+1)/2, & \text{si } m = 1 \\ 0, & \text{si } m \neq 1 \end{cases}, \quad (47)$$

$$t_{mn}^{e_3}(\theta) = \begin{cases} n(n+1), & \text{si } m = 0 \\ 0, & \text{si } m \neq 0 \end{cases}, \quad (48)$$

□ Pour  $\theta = \pi$  :

$$t_{mn}^{e_1}(\theta) = \begin{cases} \pm (-1)^{n+1} n(n+1)/2, & \text{si } m = 1 \\ 0, & \text{si } m \neq 1 \end{cases}, \quad (49)$$

$$t_{mn}^{e_2}(\theta) = \begin{cases} (-1)^{n+1} n(n+1)/2, & \text{si } m=1 \\ 0, & \text{si } m \neq 1 \end{cases}, \quad (50)$$

$$t_{mn}^{e_3}(\theta) = \begin{cases} (-1)^n n(n+1), & \text{si } m=0 \\ 0, & \text{si } m \neq 0 \end{cases}. \quad (51)$$

## AN.2.6 Propriété importante de translation

Pour toute fonction arbitraire  $g$  définie sur la surface d'une sphère et dont toutes les dérivées premières et secondes étant continues sur cette sphère, il existe un développement en séries d'harmoniques de surface convergeant absolument vers  $g$ . Ce développement est de la forme :

$$g(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \alpha_{n0} P_n(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (\alpha_{nm} \cos m\varphi + \beta_{nm} \sin m\varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \right). \quad (52)$$

Il s'agit d'un développement en série de Fourier-Legendre, (Courant 1931). Les coefficients s'obtiennent de la manière suivant :

$$\alpha_{n0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \cdot P_n(\cos \theta) \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (53)$$

$$\alpha_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \cos m\varphi \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi, \quad (54)$$

$$\beta_{nm} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\theta, \varphi) \cdot P_n^m(\cos \theta) \cdot \sin m\varphi \cdot \sin \theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (55)$$

## AN.3 Relations d'orthogonalité

### AN.3.1 Fonctions circulaires

Les fonctions trigonométriques utilisées dans cette étude sont définies par :

$$f_m^\sigma(\varphi) = \begin{cases} \sin(m\varphi), & \text{si } \sigma = e \\ \cos(m\varphi), & \text{si } \sigma = o \end{cases}, \quad (56)$$

avec  $n \in \{1, \dots, +\infty\}$ ,  $m \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi[$  et  $\sigma \in \{e, o\}$ . Le produit scalaire associé à deux fonctions  $f$  et  $g$  de l'espace engendré par ces fonctions est :

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cdot \overline{g(\varphi)} \, d\varphi, \quad (57)$$

où  $\overline{g}$  représente la fonction conjuguée de  $g$ . La norme associée devient alors :

$$\|f\|^2 = \langle f | f \rangle = \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 \, d\varphi. \quad (58)$$

Les relations d'orthogonalité qui en découlent sont alors :

$$\langle f_m^\sigma | f_{m'}^{\sigma'} \rangle = \int_0^{2\pi} f_m^\sigma(\varphi) \cdot \overline{f_{m'}^{\sigma'}(\varphi)} \, d\varphi = \|f_m^\sigma\|^2 \delta_{m,m'} \delta_{\sigma,\sigma'} \text{ avec } \|f_m^\sigma\|^2 = \langle f_m^\sigma | f_m^\sigma \rangle = \pi \cdot e_m^\sigma, \quad (59)$$

avec :

$$e_m^\sigma = \begin{cases} e_m, & \text{si } \sigma = o \\ e'_m, & \text{si } \sigma = e \end{cases} = 1 + \sigma(-1) \cdot \delta_{m,0}, \quad \sigma(-1) = \begin{cases} +1, & \text{si } \sigma = o \\ -1, & \text{si } \sigma = e \end{cases}, \quad (60)$$

$$e_m = \begin{cases} 2, & \text{si } m = 0 \\ 1, & \text{si } m \neq 0 \end{cases} = 1 + \delta_{m,0}, \quad e'_m = \begin{cases} 0, & \text{si } m = 0 \\ 1, & \text{si } m \neq 0 \end{cases} = 1 - \delta_{m,0}.$$

### AN.3.2 Modes sphériques

Les expressions des vecteurs de modes sphériques  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont :

$$\begin{aligned} \vec{M}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) &= -t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) \cdot Z_n^s(x) \cdot f_m^\sigma(\varphi) \cdot \hat{\theta} + t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) \cdot Z_n^s(x) \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \cdot \hat{\phi}, \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s}(\vec{r}) &= t_{mn}^{\sigma 3}(\theta) \cdot \frac{Z_n^s(x)}{x} \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \cdot \hat{r} - t_{mn}^{\sigma 2}(\theta) \cdot K_n^s(x) \cdot f_m^{\bar{\sigma}}(\varphi) \cdot \hat{\theta} - t_{mn}^{\sigma 1}(\theta) \cdot K_n^s(x) \cdot f_m^\sigma(\varphi) \cdot \hat{\phi}. \end{aligned} \quad (61)$$

Pour  $n \in \{1, \dots, +\infty\}$ ,  $m \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\sigma \in \{e, o\}$  et  $s \in \{1, 4\}$ , les vecteurs  $\vec{M}_{mn}^{\sigma s}$  et  $\vec{N}_{mn}^{\sigma s}$  sont orthogonaux. Compte tenu des propriétés d'orthogonalité des fonctions trigonométriques et de la variation en  $\theta$  des harmoniques de surface, un certain nombre de propriétés intégrales sur les vecteurs de modes sphériques apparaissent :

$$\oint_{S_r} \left( \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \vec{M}_{m'n'}^{\sigma's} \\ \vec{N}_{m'n'}^{\sigma's} \end{Bmatrix}^* \right) \cdot \overrightarrow{dS} = 0, \quad (62)$$

$$\oint_{S_r} \left( \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \times \vec{N}_{m'n'}^{\sigma's} \right)^* \cdot \overrightarrow{dS} = \frac{\lambda_{mn}^{\sigma}}{|k|^2} \left[ |x|^2 \cdot Z_n^s(x) \cdot \overline{K_n^s(x)} \right]_{x=kr} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{m, m'} \cdot \delta_{n, n'}, \quad (63)$$

$$\oint_{S_r} \left( \begin{Bmatrix} \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \\ \vec{N}_{mn}^{\sigma s} \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \vec{M}_{m'n'}^{\sigma's} \\ \vec{N}_{m'n'}^{\sigma's} \end{Bmatrix}^* \right) dS = \frac{\lambda_{mn}^{\sigma}}{|k|^2} \left[ \left\{ n(n+1) \cdot \left| Z_n^s(x) \right|^2 + \left| x \cdot K_n^s(x) \right|^2 \right\}_{x=kr} \cdot \delta_{\sigma, \sigma'} \cdot \delta_{m, m'} \cdot \delta_{n, n'} \right], \quad (64)$$

$$\oint_{S_r} \left( \vec{M}_{mn}^{\sigma s} \cdot \vec{N}_{m'n'}^{\sigma's} \right)^* dS = 0, \quad (65)$$

$$\lambda_{mn}^{\sigma} = \pi \cdot \frac{e^{\bar{\sigma}}}{c_{mn}}, \quad c_{mn} = \frac{2n+1}{2n(n+1)} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}, \quad (66)$$

où  $S_r$  représente la sphère de rayon  $r$  centré sur l'origine. L'élément de surface est défini par  $dS = r^2 \cdot \sin(\theta) d\theta d\phi$  et  $\overrightarrow{dS} = \hat{r} \cdot dS$ . L'obtention de ces relations s'effectue par un simple développement sur les composantes en tenant compte de l'ensemble des relations d'orthogonalité données précédemment.

## AN.4 Matrices de régularisation

Le chapitre 4 est basé sur des séries couplées de matrices. L'expression analytique de chacune de ces matrices, y compris l'inversion, est obtenue après un certain nombre de calculs fastidieux. Comme ces calculs ne présentent pas le moindre intérêt en soit, les coefficients des principales matrices entrant en jeu dans la régularisation sont directement donnés.

### AN.4.1 Matrice $C_n^K$

$$\forall (p, q) \in \{1, \dots, N\}^2, \forall n = 1, \dots, +\infty,$$

$$\begin{aligned} & \text{si } q < p \\ & (C_n^K)_{p,q} = 0, \end{aligned}$$

$$\text{si } q = p < N$$

$$(C_n^K)_{p,q} = K_n^4(k_{p+1}r_p) \cdot \left( 1 - \frac{K_n^4(k_{p+1}r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1}r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^1(k_{p+1}r_{p+1})} \right),$$

$$\text{si } q = p < N$$

$$(C_n^K)_{p,q} = K_n^4(k_{p+1}r_p)$$

$$\text{si } N > q > p$$

$$(C_n^K)_{p,q} = K_n^4(k_{q+1}r_q) \cdot \left( 1 - \frac{K_n^4(k_{q+1}r_{q+1})}{K_n^4(k_{q+1}r_q)} \frac{K_n^1(k_{q+1}r_q)}{K_n^1(k_{q+1}r_{q+1})} \right) \cdot \prod_{m=p+1}^q \frac{K_n^1(k_m r_{m-1})}{K_n^1(k_m r_m)},$$

$$\text{si } N = q > p$$

$$(C_n^K)_{p,q} = K_n^4(k_{q+1}r_q) \cdot \prod_{m=p+1}^q \frac{K_n^1(k_m r_{m-1})}{K_n^1(k_m r_m)},$$

$$\text{si } q < p,$$

$$(C_n^K)_{p,q} = 0.$$

### **AN.4.2 Matrice $C_n^{K-1}$**

$\forall (p, q) \in \{1, \dots, N\}^2, \forall n = 1, \dots, +\infty,$

si  $q = p < N,$

$$\left(C_n^{K-1}\right)_{p,q} = \frac{1}{K_n^4(k_{p+1}r_p)} \left( 1 - \frac{K_n^4(k_{p+1}r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1}r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{K1(k_{p+1}r_{p+1})} \right),$$

si  $q = p = N,$

$$\left(C_n^{K-1}\right)_{p,q} = \frac{1}{K_n^4(k_{p+1}r_p)},$$

si  $q = p+1,$

$$\left(C_n^{K-1}\right)_{p,q} = \frac{-1}{K_n^4(k_{p+1}r_p)} \frac{\frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{K1(k_{p+1}r_{p+1})}}{1 - \frac{K_n^4(k_{p+1}r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1}r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{K1(k_{p+1}r_{p+1})}},$$

si  $q > p+1,$

$$\left(C_n^{K-1}\right)_{p,q} = 0.$$

### **AN.4.3 Matrice $C_n^Z$**

$\forall (p, q) \in \{1, \dots, N\}^2, \forall n = 1, \dots, +\infty,$

si  $q < p-1,$

$$\left(C_n^Z\right)_{p,q} = 0.$$

si  $q = p-1,$

$$\left(C_n^Z\right)_{p,q} = \frac{-Z_n^4(k_p r_p)}{\eta_p} \left( 1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{Z_n^4(k_p r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \right),$$

si  $q = p < N,$

$$\begin{aligned} \left(C_n^Z\right)_{p,q} &= \frac{Z_n^4(k_{p+1}r_p)}{\eta_{p+1}} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{K_n^4(k_{p+1}r_p)}{Z_n^4(k_{p+1}r_p)} \frac{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^1(k_{p+1}r_p)} \dots \right. \\ &\quad \left. \dots \left( 1 + \frac{\eta_p}{\eta_{p+1}} \frac{K_n^1(k_p r_p)}{Z_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^4(k_{p+1}r_{p+1})}{K_n^1(k_{p+1}r_{p+1})} \frac{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^4(k_{p+1}r_p)} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{Z_n^1(k_{p+1}r_p)} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

si  $q = p = N$ ,

$$\left(C_n^Z\right)_{p,q} = \frac{Z_n^4(k_{p+1}r_p)}{\eta_{p+1}} \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{K_n^4(k_{p+1}r_p)}{Z_n^4(k_{p+1}r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)}\right),$$

si  $q = p+1 < N$ ,

$$\left(C_n^Z\right)_{p,q} = \frac{K_n^4(k_{p+2}r_{p+1})}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^1(k_{p+1}r_{p+1})} \left(1 - \frac{K_n^4(k_{p+2}r_{p+2})}{K_n^4(k_{p+2}r_{p+1})} \frac{K_n^1(k_{p+2}r_{p+1})}{K_n^1(k_{p+2}r_{p+2})}\right) \cdot \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}\right),$$

si  $q = p+1 = N$ ,

$$\left(C_n^Z\right)_{p,q} = \frac{K_n^4(k_{p+2}r_{p+1})}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^1(k_{p+1}r_{p+1})} \cdot \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}\right),$$

si  $N > q > p+1$ ,

$$\begin{aligned} \left(C_n^Z\right)_{p,q} &= \frac{K_n^4(k_{q+1}r_q)}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^1(k_{p+1}r_{p+1})} \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}\right) \dots \\ &\dots \left(1 - \frac{K_n^4(k_{q+1}r_{q+1})}{K_n^4(k_{q+1}r_q)} \frac{K_n^1(k_{q+1}r_q)}{K_n^1(k_{q+1}r_{q+1})}\right) \cdot \prod_{m=p+2}^q \frac{K_n^1(k_m r_{m-1})}{K_n^1(k_m r_m)}, \end{aligned}$$

si  $N = q > p+1$ ,

$$\left(C_n^Z\right)_{p,q} = \frac{K_n^4(k_{q+1}r_q)}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}{K_n^1(k_{p+1}r_{p+1})} \left(1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1}r_p)}{Z_n^1(k_{p+1}r_p)}\right) \cdot \prod_{m=p+2}^q \frac{K_n^1(k_m r_{m-1})}{K_n^1(k_m r_m)}.$$

#### AN.4.4 Matrice $C_n^Z$ , $C_n^{K-1}$

$\forall (p, q) \in \{1, \dots, N\}^2$ ,  $\forall n = 1, \dots, +\infty$ ,

$$\left(C_n^Z \cdot C_n^{K-1}\right)_{p,q} = 0,$$

si  $q < p-1$ ,

$$\left(C_n^Z \cdot C_n^{K-1}\right)_{p,q} = \frac{-1}{\eta_p} \frac{Z_n^4(k_p r_p)}{K_n^4(k_p r_{p-1})} \frac{1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{Z_n^4(k_p r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)}}{1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{K_n^4(k_p r_{p-1})} \frac{K_n^1(k_p r_{p-1})}{K_n^1(k_p r_p)}},$$

si  $1 < q = p < N$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} &= \frac{1}{\eta_p} \frac{Z_n^4(k_p r_p)}{K_n^4(k_p r_{p-1})} \frac{K_n^1(k_p r_{p-1})}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{Z_n^4(k_p r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)}}{1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{K_n^4(k_p r_{p-1})} \frac{K_n^1(k_p r_{p-1})}{K_n^1(k_p r_p)}} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^4(k_{p+1} r_p)}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{1}{1 - \frac{K_n^4(k_{p+1} r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1} r_p)}{K_n^1(k_{p+1} r_{p+1})}} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{K_n^4(k_{p+1} r_p)}{Z_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \dots \right. \\ &\dots \left. \left( 1 + \frac{\eta_p}{\eta_{p+1}} \frac{K_n^1(k_p r_p)}{Z_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^4(k_{p+1} r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{Z_n^1(k_{p+1} r_p)}{K_n^1(k_{p+1} r_{p+1})} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1} r_p)}{Z_n^1(k_{p+1} r_p)} \right) \right) \right), \end{aligned}$$

si  $1 < q = p = N$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} &= \frac{1}{\eta_p} \frac{Z_n^4(k_p r_p)}{K_n^4(k_p r_{p-1})} \frac{K_n^1(k_p r_{p-1})}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{Z_n^4(k_p r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)}}{1 - \frac{K_n^4(k_p r_p)}{K_n^4(k_p r_{p-1})} \frac{K_n^1(k_p r_{p-1})}{K_n^1(k_p r_p)}} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^4(k_{p+1} r_p)}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{K_n^4(k_{p+1} r_p)}{Z_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)}}{1 - \frac{K_n^4(k_{p+1} r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1} r_p)}{K_n^1(k_{p+1} r_{p+1})}}, \end{aligned}$$

si  $q = p+1$ ,

$$\begin{aligned} \left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} &= \frac{-1}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^4(k_{p+1} r_p)}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1} r_p)}{K_n^1(k_{p+1} r_{p+1})} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{K_n^4(k_{p+1} r_p)}{Z_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \dots \right. \\ &\dots \left. \left( 1 + \frac{\eta_p}{\eta_{p+1}} \frac{K_n^1(k_p r_p)}{Z_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^4(k_{p+1} r_{p+1})}{K_n^4(k_{p+1} r_p)} \frac{Z_n^1(k_{p+1} r_p)}{K_n^1(k_{p+1} r_{p+1})} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1} r_p)}{Z_n^1(k_{p+1} r_p)} \right) \right) \right) \\ &\dots + \frac{1}{\eta_{p+1}} \frac{Z_n^1(k_{p+1} r_p)}{K_n^1(k_{p+1} r_{p+1})} \left( 1 - \frac{\eta_{p+1}}{\eta_p} \frac{Z_n^1(k_p r_p)}{K_n^1(k_p r_p)} \frac{K_n^1(k_{p+1} r_p)}{Z_n^1(k_{p+1} r_p)} \right), \end{aligned}$$

si  $q > p+1$ ,

$$\left( C_n^Z \cdot C_n^{K^{-1}} \right)_{p,q} = 0.$$

## **AN.5 Bibliographie**

Courant, H. (1931). ch VII, §5. Methoden der Mathematischen Physik.

M. Abramowitz, I. A. S. (1970). Handbook of Mathematical Functions. New York, Dover.

Toit, C. F. D. (1993). "Evaluation of some Algorithms and Programs for the Computation of Integer-Order Bessel Functions of the First and Second Kind with Complex Arguments." IEEE Antennas and Propagation Magazine 35(3): 19-25.



## **Résumés :**

Un nombre important de travaux sur les lentilles sphériques, et plus particulièrement les lentilles de Lüneburg, a déjà été fait. Malgré tout, des nouveautés sont présentées dans cette thèse, dont la principale d'entre elles concerne la Méthode de Régularisation Analytique appliquée aux antennes imprimées circulaires conformées sur sphères associées à des lentilles à distribution sphérique. Plusieurs types d'alimentations sont traités : par sondes coaxiales et par fentes. Par ailleurs, cette technique est pour la première fois utilisée dans le cadre des vecteurs modaux sphériques. De plus, la généralisation proposée ne limite pas le nombre de coquilles composant la lentille. Il en ressort la mise en évidence d'un certain nombre phénomènes de résonances, les effets de masquage créés par la présence des conducteurs, etc. La méthode est par ailleurs rapide et précise, même pour des structures de grande taille.

D'un point de vue technique, un certain nombre de thèmes sont traités. Tout d'abord, un matériau léger a été caractérisé et utilisé dans le cadre de la fabrication d'antennes conformées. De plus, une technique simple de fabrication artificielle du gradient d'indice de la lentille est proposée et testée. Par ailleurs, en vue de l'utilisation des lentilles dans le cadre du multifaisceau, les effets de couplage entre deux sources primaires en fonction de leur position angulaire relative ainsi qu'un critère de séparation de signaux sont étudiés. Par la suite, est réalisée une étude expérimentale sur l'importance du choix de l'antenne primaire associée à la lentille ainsi que les conséquences de l'ajout de la lentille sur les grandeurs caractéristiques des antennes. Ainsi, le type d'antenne le plus approprié, pour être associée avec une lentille de Lüneburg, est une antenne circulaire imprimée conforme sur la lentille et alimentée par fente centrée. Elle est peu encombrante car sa surface de masse est très limitée.

*Several papers on spherical lenses, and particularly on Lüneburg lenses, have already been published. Despite this, novelties are presented in this thesis, whose principal one deals with the so-called Method of Analytical Regularization applied to the circular conformal printed antennas, associated with spherically layered lenses. Several kinds of feeds are treated: coaxial probe and slot fed antennas. Besides, this is the first time that these techniques have been applied to the spherical modal vectors. Furthermore, the proposed generalization does not limit the number of shells that compose the lens. Moreover, it highlights several phenomena such as resonances linked with the ground, the substrate, etc., the shadowing effects due to the presence of the metallic caps, etc. Also, this method is very fast and accurate, even for high-sized structures.*

*For a technical point of view, several themes are treated. First of all, a low weighted material is characterized and used in the conformal antenna manufacturing. In addition to this, a simple method of manufacturing an artificial gradient index lens is proposed and tested. Besides, in order to use lenses as multibeam antennas, both coupling effects between two primary sources according to their relative angular position and a Rayleigh criterion applied to microwave lenses are studied. After that, experimental study is carried out to show how important the choice of primary antenna associated to the lens is. Thus, the most suitably matched antenna for a Lüneburg lens seems to be a centered-slot fed spherical-circular printed conformal antenna. There is also little cluttering due to its limited ground surface.*

## **Mots clés :**

Lentilles sphériques, Lüneburg, antennes conformées, fonctions modales sphériques, diffusion, modélisation analytique, Méthode de Régularisation Analytique, matériau mousse faible poids, caractérisation de matériau, thermoformage, gradient d'indice continu et discret, critère de séparation, couplage.

