# 高等数学重要公式手册

## 三角函数

平方关系：

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$

$\cot^2\alpha + 1 = \csc^2\alpha$

积的关系：

$\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha$

$\cos\alpha=\cot\alpha\sin\alpha$

$\tan\alpha=\sin\alpha\sec\alpha$

$\cot\alpha=\cos\alpha\csc\alpha$

$\sec\alpha=\tan\alpha\csc\alpha$

$\csc\alpha=\sec\alpha\cot\alpha$

倒数关系：

$\tan\alpha\cot\alpha=1$ $\sin\alpha\csc\alpha=1$ $\cos\alpha\sec\alpha=1$

直角三角形 ABC 中,角 A 的

正弦等于角 A 的对边比斜边

余弦等于角 A 的邻边比斜边

正切等于对边比邻边

三角函数恒等变形公式

两角和与差的三角函数：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$

$\tan(\alpha+\beta)=(\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$

$\tan(\alpha-\beta)=(\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$

三角和的三角函数：

sin(α+β+γ)=sinαcosβcosγ+cosαsinβcosγ+cosαcosβsinγ-sinαsinβsinγ

cos(α+β+γ)=cosαcosβcosγ-cosαsinβsinγ-sinαcosβsinγ-sinαsinβcosγ

tan(α+β+γ)=(tanα+tanβ+tanγ-tanαtanβtanγ)/(1-tanαtanβ-tanβtanγ-tanγtanα)

辅助角公式：

$A\sin\alpha+B\cos\alpha=\frac{\sin(\alpha+t)}{\sqrt{A^2+B^2}}$，其中

$\sin t=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\cos t=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\tan t=\frac{B}{A}$

$A\sin\alpha+B\cos\alpha=\frac{\cos(\alpha-t)}{\sqrt{A^2+B^2}}$，$\tan t=\frac{A}{B}$

倍角公式：

sin(2α)=2sinα·cosα=2/(tanα+cotα)

cos(2α)=cos^2(α)-sin^2(α)=2cos^2(α)-1=1-2sin^2(α)

tan(2α)=2tanα/[1-tan^2(α)]

三倍角公式：

sin(3α)=3sinα-4sin^3(α)

cos(3α)=4cos^3(α)-3cosα

半角公式：

$\sin(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$\cos(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

$\tan(\alpha/2)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$ =sinα/(1+cosα)=(1-cosα)/sinα

降幂公式

sin^2(α)=(1-cos(2α))/2

cos^2(α)=(1+cos(2α))/2

tan^2(α)=(1-cos(2α))/(1+cos(2α))

万能公式：

sinα=2tan(α/2)/[1+tan^2(α/2)]

cosα=[1-tan^2(α/2)]/[1+tan^2(α/2)]

tanα=2tan(α/2)/[1-tan^2(α/2)]

积化和差公式：

sinα·cosβ=(1/2)[sin(α+β)+sin(α-β)]

cosα·sinβ=(1/2)[sin(α+β)-sin(α-β)]

cosα·cosβ=(1/2)[cos(α+β)+cos(α-β)]

sinα·sinβ= -(1/2)[cos(α+β)-cos(α-β)]

和差化积公式：

sinα+sinβ=2sin[(α+β)/2]cos[(α-β)/2]

sinα-sinβ=2cos[(α+β)/2]sin[(α-β)/2]

cosα+cosβ=2cos[(α+β)/2]cos[(α-β)/2]

cosα-cosβ=-2sin[(α+β)/2]sin[(α-β)/2]

推导公式

tanα+cotα=2/sin2α

tanα-cotα=-2cot2α

1+cos2α=2cos^2α

1-cos2α=2sin^2α

1+sinα=(sinα/2+cosα/2)^2

其他：

sinα+sin(α+2π/n)+sin(α+2π*2/n)+sin(α+2π*3/n)+……+sin[α+2π*(n-1)/n]=0

cosα+cos(α+2π/n)+cos(α+2π*2/n)+cos(α+2π*3/n)+……+cos[α+2π*(n-1)/n]=0

sin^2(α)+sin^2(α-2π/3)+sin^2(α+2π/3)=3/2

tanAtanBtan(A+B)+tanA+tanB-tan(A+B)=0

导数公式：

$$(\tan x)' = \sec^2 x$$
$$(\cot x)' = -\csc^2 x$$
$$(\sec x)' = \sec x \cdot \tan x$$
$$(\csc x)' = -\csc x \cdot \cot x$$
$$(a^x)' = a^x \ln a$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$$
$$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$C' = 0 \quad (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$$

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$
$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

基本积分表：

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}\,\mathrm{d}x = a\arcsin\frac{x}{a} - \sqrt{a^2-x^2} + C \ (a>0)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2\arctan\sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \ (a<x<b)$$

$$\int \mathrm{e}^x \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x - \cos x) + C$$

$$\int \mathrm{e}^x \cos x \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\sin x + \cos x) + C$$

$$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$$
$$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$$
$$\int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$$
$$\int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\frac{a+x}{a-x} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$$
$$\int \sec x \cdot \tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$$
$$\int \csc x \cdot \cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$$
$$\int a^x\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$$
$$\int \mathrm{sh}\, x\mathrm{d}x = \mathrm{ch}\, x + C$$
$$\int \mathrm{ch}\, x\mathrm{d}x = \mathrm{sh}\, x + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

三角函数的有理式积分：

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad u = \tan\frac{x}{2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

**一些初等函数：**

双曲正弦 $: \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

双曲余弦 $: \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

双曲正切 $: \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

反双曲正弦 :

$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

反双曲余弦 :

$\operatorname{arch} x = \pm \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

反双曲正切 :

$\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$

**两个重要极限：**

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = e = 2.718281828459045...$$

**三角函数公式：**

**·三角函数值**

| 三角函数值 角 / 三角函数 | $0^0$ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\tan\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | 不存在 |
| $\cot\alpha$ | 不存在 | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

• 诱导公式：

| 角 A \ 函数 | sin | cos | tan | cot |
|---|---|---|---|---|
| -α | -sinα | cosα | - tanα | - cotα |
| 90°-α | cosα | sinα | cotα | tanα |
| 90°+α | cosα | -sinα | - cotα | - tanα |
| 180°-α | sinα | -cosα | - tanα | -ctgα |
| 180°+α | -sinα | -cosα | tanα | cotα |
| 270°-α | -cosα | -sinα | cotα | tanα |
| 270°+α | -cosα | sinα | - cotα | - tanα |
| 360°-α | -sinα | cosα | - tanα | - cotα |
| 360°+α | sinα | cosα | tanα | cotα |

• 和差角公式：

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cdot\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}$$

• 和差化积公式：

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

三角函数的角度换算

公式一：

设 α 为任意角，终边相同的角的同一三角函数的值相等：

sin（2kπ＋α）＝sinα

tan（2kπ＋α）＝tanα

cos（2kπ＋α）＝cosα

cot（2kπ＋α）＝cotα

公式二：

设 α 为任意角，π+α 的三角函数值与 α 的三角函数值之间的关系：

sin（π＋α）＝－sinα

tan（π＋α）＝tanα

cos（π＋α）＝－cosα

cot（π＋α）＝cotα

公式三：

任意角 α 与 -α 的三角函数值之间的关系：

sin（－α）＝－sinα

tan（－α）＝－tanα

cos（－α）＝cosα

cot（－α）＝－cotα

公式四：

利用公式二和公式三可以得到 π-α 与 α 的三角函数值之间的关系：

sin（π－α）＝sinα

tan（π－α）＝－tanα

cos（π－α）＝－cosα

cot（π－α）＝－cotα

公式五：

利用公式一和公式三可以得到 2π-α 与 α 的三角函数值之间的关系：

sin（2π－α）＝－sinα

tan（2π－α）＝－tanα

cos（2π－α）＝cosα

cot（2π－α）＝－cotα

公式六：

π/2±α 及 3π/2±α 与 α 的三角函数值之间的关系：

sin（π/2＋α）＝cosα

cos（π/2＋α）＝－sinα

tan（π/2＋α）＝－cotα

cot（π/2＋α）＝－tanα

sin（π/2－α）＝cosα

cos（π/2－α）＝sinα

tan（π/2－α）＝cotα

cot（π/2－α）＝tanα

sin（3π/2＋α）＝－cosα

cos（3π/2＋α）＝sinα

tan（3π/2＋α）＝－cotα

cot（3π/2＋α）＝－tanα

sin（3π/2－α）＝－cosα

cos（3π/2－α）＝－sinα

tan（3π/2－α）＝cotα

cot（3π/2－α）＝tanα

(以上 k∈**Z**)

• 倍角公式：

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cot 2\alpha = \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

$$\tan 3\alpha = \frac{3\tan\alpha - \tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}$$

• 半角公式：

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \cot\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$$

• 正弦定理：

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

• 余弦定理：

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

• 反三角函数性质：

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x \qquad \arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\cot x$$

高阶导数公式——莱布尼茨公式：

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

$$= u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v'' + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)} + \cdots + uv^{(n)}$$

## 中值定理与导数应用：

拉格朗日中值定理：$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$

柯西中值定理：$\dfrac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$

当$\mathrm{F}(x)=x$时，柯西中值定理就是拉格朗日中值定理.

## 曲率：

弧微分公式：$\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2}dx$,其中$y'=\tan\alpha$

平均曲率：$\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|$. $\Delta\alpha$ :从M点到M′点，切线斜率的倾角变 化量；Δs：$\overset{\frown}{MM'}$弧长.

M点的曲率：$K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

直线：$K=0$.

半径为$a$的圆：$K=\dfrac{1}{a}$.

## 定积分的近似计算：

矩形法：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{b-a}{n}(y_0+y_1+\cdots+y_{n-1})$

梯形法：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{b-a}{n}\left[\dfrac{1}{2}(y_0+y_n)+y_1+\cdots+y_{n-1}\right]$

抛物线法：$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\approx\dfrac{b-a}{3n}[(y_0+y_n)+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+4(y_1+y_3+\cdots+y_{n-1})]$

## 定积分应用相关公式：

功：$W=F\cdot s$

水压力：$F=p\cdot A$

引力：$F=k\dfrac{m_1m_2}{r^2}$,$k$为引力系数

函数的平均值：$\overline{y}=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

均方根：$\sqrt{\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f^2(t)\mathrm{d}t}$

**微分方程的相关概念：**

一阶微分方程：$y' = f(x,y)$ 或 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$
可分离变量的微分方程：一阶微分方程可以化为$g(y)\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$的形式，
解法：
$\int g(y)\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$ 得$G(y) = F(x) + C$称为隐式通解.
齐次方程：一阶微分方程可以写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y) = \varphi(x,y)$，即写成$\frac{y}{x}$的函数，
解法：
设$u = \frac{y}{x}$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$，所以$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u}$分离变量，积分后将$\frac{y}{x}$代替$u$，
即得齐次方程通解.

**一阶线性微分方程：**

1. 一阶线性微分方程:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$

$$\begin{cases} \text{当}Q(x) = 0\text{时,为齐次方程，}y = C\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \\ \text{当}Q(x) \neq 0\text{时，为非齐次方程，}y = (\int Q(x)\mathrm{e}^{\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C)\mathrm{e}^{-\int P(x)\mathrm{d}x} \end{cases}$$

2. 伯努利方程:$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (n \neq 0,1)$

**全微分方程：**

如果$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$中左端是某函数的全微分方程，即：
$\mathrm{d}u(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$，其中$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y), \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x,y)$
$\therefore u(x,y) = C$应该是该全微分方程的通解.

**二阶微分方程：**

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + P(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + Q(x)y = f(x), \begin{cases} f(x) \equiv 0\text{时为齐次} \\ f(x) \neq 0\text{时为非齐次} \end{cases}$$

二阶常系数齐次线性微分方程及其解法：

$(*)\,y''+py'+qy=0$，其中$p,q$为常数；

求解步骤：

1. 写出特征方程:$(\Delta)\,r^2+pr+q=0$，其中$r^2$，$r$的系数及常数项恰好是$(*)$式中$y'',y',y$的系数；

2. 求出$(\Delta)$式的两个根$r_1,r_2$

3. 根据$r_1,r_2$的不同情况，按下表写出$(*)$式的通解：

| $r_1$，$r_2$的形式 | $(*)$式的通解 |
|---|---|
| 两个不相等实根$(p^2-4q>0)$ | $y=c_1\mathrm{e}^{r_1x}+c_2\mathrm{e}^{r_2x}$ |
| 两个相等实根$(p^2-4q=0)$ | $y=(c_1+c_2x)\mathrm{e}^{r_1x}$ |
| 一对共轭复根$(p^2-4q<0)$<br>$r_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$，$r_2=\alpha-\mathrm{i}\beta$<br>$\alpha=-\dfrac{p}{2}$，$\beta=\dfrac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$ | $y=\mathrm{e}^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$ |

二阶常系数非齐次线性微分方程：

$y''+py'+qy=f(x)$，$p,q$为常数

$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}P_m(x)$型，$\lambda$为常数；

$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$型

空间解析几何与向量代数：

空间两点的距离：$d=\left|M_1M_2\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

向量在轴上的投影：$\Pr j_u\overrightarrow{AB}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\varphi,\varphi$是$\overrightarrow{AB}$与$u$轴的夹角.

$\Pr j_u(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\Pr j\vec{a}_1+\Pr j\vec{a}_2$

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$，是一个数量,

两向量之间的夹角：$\cos\theta=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x{}^2+a_y{}^2+a_z{}^2}\cdot\sqrt{b_x{}^2+b_y{}^2+b_z{}^2}}$

$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix},|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\sin\theta.$ 例：线速度：$\vec{v}=\vec{w}\times\vec{r}.$

向量的混合积：$[\vec{a}\vec{b}\vec{c}]=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|\cdot|\vec{c}|\cos\alpha,\alpha$为锐角时，

代表平行六面体的体积.

平面的方程：

1. 点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$，其中$\vec{n}=\{A,B,C\},M_0$坐标为$(x_0,y_0,z_0)$
2. 一般方程：$Ax+By+Cz+D=0$
3. 截距式方程：$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$

平面外任意一点到该平面的距离：$d=\dfrac{\left|Ax_0+By_0+Cz_0+D\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

空间直线的方程：$\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，其中$\vec{s}=\{m,n,p\}$；参数方程：$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$

二次曲面：

1. 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
2. 抛物面：$\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$,（$p,q$同号）
3. 双曲面

单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$（马鞍面）

多元函数微分法及应用：

全微分：$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$

全微分的近似计算：$\Delta z\approx \mathrm{d}z=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$

多元复合函数的求导法：

$z=f[u(t),v(t)] \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial t}$

$z=f[u(x,y),v(x,y)] \qquad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}$

当$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$时，

$\mathrm{d}u=\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y \qquad \mathrm{d}v=\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$

隐函数的求导公式：

隐函数$F(x,y)=0$，$\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$，$\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{F_x}{F_y}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

隐函数$F(x,y,z)=0$，$\quad \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}$，$\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}$

隐函数方程组：$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases} \qquad J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v}\\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{1}{J}\cdot\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$

**微分法在几何上的应用：**

空间曲线$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases}$在点$M(x_0,y_0,z_0)$处的切线方程：$\dfrac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{\omega'(t_0)}$

在点$M$处的法平面方程：$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0$

若空间曲线方程为：$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}$则切向量$\vec{T}=\left\{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix},\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}\right\}$

曲面$F(x,y,z)=0$上一点$M(x_0,y_0,z_0)$，则：

1. 过此点的法向量：$\vec{n}=\{F_x(x_0,y_0,z_0),F_y(x_0,y_0,z_0),F_z(x_0,y_0,z_0)\}$
2. 过此点的切平面方程：$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$
3. 过此点的法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\dfrac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}$

**方向导数与梯度：**

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$沿任一方向$l$的方向导数为：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi+\dfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$

其中$\varphi$为$x$轴到方向$l$的转角.

函数$z=f(x,y)$在一点$p(x,y)$的梯度：$\mathbf{grad}f(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$

它与方向导数的关系是：$\dfrac{\partial f}{\partial l}=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\vec{e}$，其中$\vec{e}=\cos\varphi\cdot\vec{i}+\sin\varphi\cdot\vec{j}$，为$l$方向上的单位向量.

所以$\dfrac{\partial f}{\partial l}$是$\mathbf{grad}f(x,y)$在$l$上的投影.

**多元函数的极值及其求法：**

设$f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$，令：$f_{xx}(x_0,y_0)=A$，$f_{xy}(x_0,y_0)=B$，$f_{yy}(x_0,y_0)=C$，

则 (1) $AC-B^2>0$时，$\begin{cases} A<0,(x_0,y_0)\text{为极大值}, \\ A>0,(x_0,y_0)\text{为极小值}. \end{cases}$

(2) $AC-B^2<0$时，函数无极值.

(3) $AC-B^2=0$时，函数不确定是否有极值.

重积分及其应用：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

曲面$z = f(x,y)$的面积$A = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

平面薄片的质心坐标

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}, \qquad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}{\iint_D \mu(x,y)\mathrm{d}\sigma}$$

平面薄片的转动惯量：对于$x$轴$I_x = \iint_D y^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$，　　对于$y$轴$I_y = \iint_D x^2\mu(x,y)\mathrm{d}\sigma$

平面薄片（位于$xOy$平面）对$z$轴上质点$M(0,0,a)(a>0)$的引力：$F = \{F_x, F_y, F_z\}$，其中

$$F_x = f\iint_D \frac{\rho(x,y)x\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_y = f\iint_D \frac{\rho(x,y)y\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad F_z = -fa\iint_D \frac{\rho(x,y)x\mathrm{d}\sigma}{(x^2+y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

柱面坐标和球面坐标：

柱面坐标：$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \\ z = z, \end{cases}$　　$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega F(r,\theta,z) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$

其中$F(r,\theta,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)$

球面坐标：$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$　　$\mathrm{d}v = r\mathrm{d}\varphi\cdot r\sin\varphi\cdot\mathrm{d}\theta\cdot\mathrm{d}r = r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega F(r,\varphi,\theta) r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)} F(r,\varphi,\theta) r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

质心：$\bar{x} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega x\rho\mathrm{d}v$，　$\bar{y} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega y\rho\mathrm{d}v$，　$\bar{z} = \frac{1}{M}\iiint_\Omega z\rho\mathrm{d}v$，　其中$M = \bar{x} = \iiint_\Omega \rho\mathrm{d}v$

转动惯量：$I_x = \iiint_\Omega (y^2+z^2)\rho\mathrm{d}v$，　$I_y = \iiint_\Omega (x^2+z^2)\rho\mathrm{d}v$，　$I_z = \iiint_\Omega (x^2+y^2)\rho\mathrm{d}v$

曲线积分：

第一类曲线积分（对弧长的曲线积分）：

设$f(x,y)$在$L$上连续，$L$的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta)$,则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t(\alpha<\beta)$$

特殊情况$\begin{cases} x=t, \\ y=\varphi(t). \end{cases}$

第二类曲线积分（对坐标的曲线积分）：

设$L$的参数方程为$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

两类曲线积分之间的关系:$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L (P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s$，其中$\alpha$和$\beta$分别为$L$上积分起止点处切向量的方向角.

格林公式:$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$

当$P=-y,Q=x$，即$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=2$时，得到$D$的面积$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x.$

平面上曲线积分与路径无关的条件：

1. $G$是一个单连通区域；

2. $P(x,y)$，$Q(x,y)$在$G$内具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$.注意奇点，如(0,0)，应减去对此奇点的积分，注意方向相反！

二元函数的全微分求积：

在$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$时，$P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$才是二元函数$u(x,y)$的全微分，其中

$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$,通常设$x_0=y_0=0$.

**曲面积分：**

对面积的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}s=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

对坐标的曲面积分：$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中：

$\iint_{\Sigma} R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint_{D_{xy}} R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，取曲面的上侧时取正号；

$\iint_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pm\iint_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，取曲面的前侧时取正号；

$\iint_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\pm\iint_{D_{zx}} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，取曲面的右侧时取正号.

两类曲面积分之间的关系

$$\iint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

**高斯公式：**

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oiint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

高斯公式的物理意义——通量与散度：

散度：$\mathrm{div}\,\vec{v}=\dfrac{\partial P}{\partial x}+\dfrac{\partial Q}{\partial y}+\dfrac{\partial R}{\partial z}$,即单位体积内所产生的流体质量

通量：$\iint_{\Sigma}\vec{A}\cdot\vec{n}\mathrm{d}s=\iint_{\Sigma}A_n\mathrm{d}s=\iint_{\Sigma}(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$，

因此，高斯公式又可写成$\iiint_{\Omega}\mathrm{div}\vec{A}\mathrm{d}v=\oiint_{\Sigma}A_n\mathrm{d}s$

斯托克斯公式——曲线积分与曲面积分的关系：

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

上式左端又可写成：$\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

空间曲线积分与路径无 关的条件：

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y},\quad \frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}$$

旋度：$\mathbf{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$

向量场 $\vec{A}$ 沿有向闭曲线 $\Gamma$ 的环流量：$\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}s$

## 常数项级数：

等比数列：$1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}$

等差数列：$1+2+3+\cdots+n=\frac{(n+1)n}{2}$

调和级数：$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是发散的

## 级数审敛法：

1.正项级数的审敛法——根值审敛法（柯西判别法）：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$，则 $\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

2.比值审敛法：

设：$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{U_{n+1}}{U_n}$，则 $\begin{cases}\rho<1\text{时，级数收敛}\\ \rho>1\text{时，级数发散}\\ \rho=1\text{时，不确定}\end{cases}$

3.定义法：

$s_n=u_1+u_2+\cdots+u_n;\ \lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 存在，则收敛；否则发散.

交错级数$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots$(或$-u_1 + u_2 - u_3 + \cdots, u_n > 0$)的审敛法——莱布尼茨定理：

如果交错级数满足$\begin{cases} u_n \geq u_{n+1}, \\ \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0, \end{cases}$那么级数收敛且其和$s \leq u_1$,其余项$r_n$的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$.

**绝对收敛与条件收敛：**

(1)$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$，其中 $u_n$为任意实数；

(2)$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_n| + \cdots$

如果 (2)收敛，则 (1)肯定收敛，且称为绝对 收敛级数；

如果 (2)发散，而 (1)收敛，则称 (1)为条件收敛级数 .

调和级数：$\sum \frac{1}{n}$发散，而 $\sum \frac{(-1)^n}{n}$收敛；

级数：$\sum \frac{1}{n^2}$收敛；

$p$级数：$\sum \frac{1}{n^p}$ $\begin{cases} p \leq 1 \text{ 时发散} \\ p > 1 \text{时收敛} \end{cases}$

**幂级数：**

$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$ $\begin{cases} |x| < 1\text{时，收敛于 } \dfrac{1}{1-x} \\ |x| \geq 1\text{时，发散} \end{cases}$

对于级数 (3)$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$，如果它不是仅在原点 收敛，也不是在全数轴上都收敛，则必存 在$R$，使$\begin{cases} |x| < R\text{时收敛} \\ |x| > R\text{时发散，其中 } R\text{称为收敛半径} \\ |x| = R\text{时不定} \end{cases}$

求收敛半径的方法：设 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$，其中 $a_n$，$a_{n+1}$是(3)的系数，则 $\begin{cases} \rho \neq 0\text{时，} R = \dfrac{1}{\rho} \\ \rho = 0\text{时，} R = +\infty \\ \rho = +\infty\text{ 时，} R = 0 \end{cases}$

**函数展开成幂级数：**

函数展开成泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

余项： $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$, $f(x)$可以展开成泰勒级数的 充要条件是：$\lim\limits_{n\to\infty}R_n=0$

$x_0=0$时即为麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

**一些函数展开成幂级数：**

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n+\cdots \qquad (-1<x<1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\cdots \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

**欧拉公式：**

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \qquad 或 \qquad \begin{cases}\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\\[2mm] \sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}\end{cases}$$

**三角级数：**

$$f(t)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin(n\omega t+\varphi_n)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中，$a_0=aA_0$，$a_n=A_n\sin\varphi_n$，$b_n=A_n\cos\varphi_n$，$\omega t=x.$

正交性：$1,\sin x,\cos x,\sin 2x,\cos 2x\cdots\sin nx,\cos nx\cdots$任意两个不同项的乘积在$[-\pi,\pi]$上的积分＝0.

**傅立叶级数：**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)，\quad 周期=2\pi$$

$$其中\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx \quad (n=0,1,2\cdots)\\[2mm] b_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx \quad (n=1,2,3\cdots)\end{cases}$$

利用函数的傅里叶级数展开式，可以得到一些特殊级数的和：

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{8} \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{24} \qquad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$$

正弦级数：

$a_n=0$，$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin \mathrm{n}x\mathrm{d}x \qquad n=1,2,3\cdots \qquad f(x)=\sum b_n \sin nx$是奇函数

余弦级数：

$b_n=0$，$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos \mathrm{n}x\mathrm{d}x \qquad n=0,1,2\cdots \qquad f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum a_n \cos nx$是偶函数

**周期为 $2l$ 的周期函数的傅立叶级数：**

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),\ \text{周期}=2l$$

$$\text{其中}\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=0,1,2\cdots), \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x\,(n=1,2,3\cdots). \end{cases}$$