

第五章作业

一、(10分) 请解释下语言类的封闭性，并举出至少5种运算，使得正则语言在这些运算下保持封闭性。

解：如果任意的、属于同一语言类的语言在某一特定运算下（如并、交等）所得的结果仍然是该类语言，则称该语言类对此运算是封闭的。

正则语言在并、乘积、克林闭包、交、补运算下是封闭的。

二、(10分) 设 $\Sigma=\{a, b\}$ ，DFA M_1 识别最多含有一对连续的a的串，DFA M_2 识别长度为奇数的串，请设计一个DFA，使其识别最多含有一对连续的a且长度为奇数的串。

说明	状态	a	b
开, 终	q1	q2	q1
终	q2	q3	q1
终	q3	q5	q4
终	q4	q3	q4
	q5	q5	q5

说明	状态	a	b
开	p1	p2	p2
终	p2	p1	p1

解：DFA的定义如下：

说明	状态	a	b	说明	状态	a	b
开	(q1,p1)	(q2,p2)	(q1,p2)	终	(q1,p2)	(q2,p1)	(q1,p1)
	(q2,p1)	(q3,p2)	(q1,p2)	终	(q2,p2)	(q3,p1)	(q1,p1)
	(q3,p1)	(q5,p2)	(q4,p2)	终	(q3,p2)	(q5,p1)	(q4,p1)
	(q4,p1)	(q3,p2)	(q4,p2)	终	(q4,p2)	(q3,p1)	(q4,p1)
	(q5,p1)	(q5,p2)	(q5,p2)		(q5,p2)	(q5,p1)	(q5,p1)

注意：(1) 开始状态！终止/接受状态！

三、(40分) 请使用泵引理证明以下语言不是正则语言。

1. $L = \{0^i 1^j \mid 0 < i \text{ 且 } i < j < 2i\}$.

2. $L = \{0^i 1^j \mid i \neq j\}$ (提示：利用RL在补运算下是封闭的)。

解：1. 证明如下：

假设L是正则语言，则它满足泵引理。

设N是泵引理所指的仅依赖于L的正整数 ($N > 1$)。

取句子 $z = 0^N 1^{N+1}$ 。显然 $z \in L$ 。

按照泵引理所述，必存在u, v, w使得 $z = uvw$ ，且 $|v| \geq 1$ 和 $|uv| \leq N$ 。

不妨设 $v = 0^n$ 和 $u = 0^m$ ， $1 \leq n \leq N$ ， $0 \leq m \leq N$ 。此时有 $w = 0^{N-m-n} 1^{N+1}$ 。

从而有 $uv^k w = 0^m 0^{nk} 0^{N-m-n} 1^{N+1} = 0^{N+(k-1)n} 1^{N+1}$ 。【注：这里使用k，避免与题中i重名】

取 $k=3$ 时，有 $N+(k-1)n = N+2n > N+1$ ，因此， $uv^3 w$ 不是语言L的句子。

这与泵引理矛盾。所以L不是RL。

2. 证明如下：

假设L是正则语言，因为正则语言在补运算下是封闭的，所以其补集 $L_1 = \{0,1\}^* - L$ 也是正则的。因此 L_1 满足泵引理。

设N是泵引理所指的仅依赖于 L_1 的正整数。

取句子 $z = 0^N 1^N$ 。显然 $z \notin L$ ，即 $z \in L_1$ 。

按照泵引理所述，必存在u, v, w使得 $z = uvw$ ，且 $|v| \geq 1$ 和 $|uv| \leq N$ 。

不妨设 $v=0^n$ 和 $u=0^m$, $1 \leq n \leq N$, $0 \leq m \leq N$ 。此时有 $w=0^{N-m-n}1^N$ 。

从而有 $uv^k w = 0^m 0^{nk} 0^{N-m-n} 1^N = 0^{N+(k-1)*n} 1^N$ 。【注：这里使用 k ，避免与题中 i 重名】

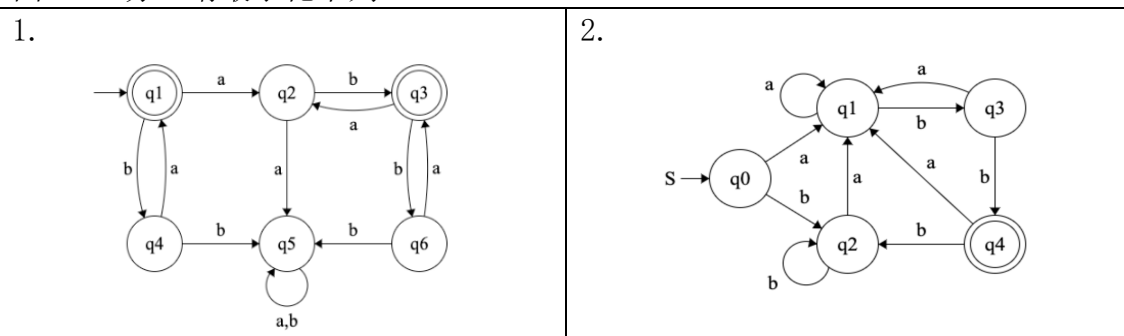
取 $k=2$ 时，有 $N+(k-1)*n=N+n \neq N$ ，因此， $uv^2 w$ 是 L 的句子，即 $uv^2 w$ 不是 L_1 的句子。这与泵引理矛盾。所以 L_1 不是 RL。因此，根据封闭性， L 也不是正则的。

注意：(1) 泵引理中的正整数一般使用 N 表示。也可用其他符号，但需明显说明，如“设 P 是泵引理所指的仅依赖于 L 的正整数”。

(2) $\{0^i 1^j \mid i \neq j\}$ 的补集不是 $\{0^i 1^j \mid i = j\}$ 。

(3) 题目要求“使用泵引理”。

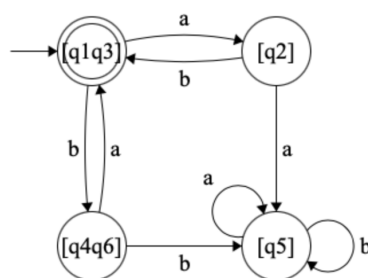
四、(40分) 请最小化下列 DFA。



解：1. 可区分状态（标X）如下所示：

	q2	q3	q4	q5	q6
q1	X	4,6	X	X	X
q2	--	X	X	X	X
q3	--	--	X	X	X
q4	--	--	--	X	1,3
q5	--	--	--	--	X

根据可区分关系表，状态集可分为四个子集： $\{q1, q3\}$, $\{q2\}$, $\{q4, q6\}$, $\{q5\}$
合并状态子集后，得到最小 DFA：

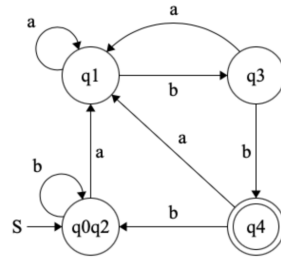


2. 可区分状态（标 X）如下所示：

	q1	q2	q3	q4
q0	X		X	X
q1	--	X	X	X
q2	--	--	X	X
q3	--	--	--	X

根据可区分关系表，状态集可分为四个子集： $\{q0, q2\}$, $\{q1\}$, $\{q3\}$, $\{q4\}$ 。

合并状态子集后，得到最小 DFA：



- 注意：（1）需给出最终 DFA，只给合并后状态子集是不够的。
- （2）只要最终 DFA 正确即可，但如果结果不对，且没有过程，扣分很严重。