

深圳大学 2018—2019 学年第一学期

《高等数学 A (一)》期末考试试卷 (B 卷)

(闭卷 时间 120 分钟)

考场登记表序号_____

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						
阅卷人						

一、填空题 (每空 2 分, 共 10 分)

得分

1. 若极限 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - 2h) - f(x_0)}{h} = 2$, 则 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$ _____;
2. 积分 $\int \sin x e^{2 \cos x} dx =$ _____;
3. $y = e^{2(x-1)} + x$ 在 $x = 1$ 在所对应点的切线方程为 _____;
4. 若对定积分 $\int_0^a f(a-2x)dx$ 作换元 $a-2x=u$, 则该定积分化为 _____;
5. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-2x}-1}{x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$ _____;

二、选择题 (每小题 2 分, 共 10 分)

得分

6. 设 $f(x)$ 的导函数为 $\sin x$, 则 $f(x)$ 的一个原函数为 ()。
 (A) $\sin x + 1$ (B) $\sin x + x$
 (C) $1 + \cos x$ (D) $x - \sin x$
7. 设函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续但不可导, 则下列在 $x=1$ 处可导的函数是 ()。
 (A) $f(x)(x+1)$ (B) $f(x)x^2$
 (C) $f(x^2)$ (D) $(x^2-1)f(x)$
8. 下列广义积分收敛的是 ()。
 (A) $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x}{x} dx$ (B) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$
 (C) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx$ (D) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \sqrt{\ln x}} dx$

9. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 内连续的偶函数, $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$, 则原函数 $F(x)$ ()。

- (A) 均为奇函数; (B) 均为偶函数;
(C) 中只有一个奇函数; (D) 既非奇函数也非偶函数.

10. 下列函数中在区间 $[0, 3]$ 上不满足拉格朗日定理条件的是 ()。

- (A) $2x^2 + x + 1$ (B) $\cos(1 + x)$
(C) $\frac{x^2}{(1 - x^2)}$ (D) $\ln(1 + x)$

三、计算题 (每题 8 分, 共 40 分)

得分	
----	--

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\cos x}^1 t \ln t dt}{x^4}。$

12. $\int_0^\pi \sqrt{1 + \cos 2x} dx。$

13. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $(1 + \sin x) \ln x$, 求 $\int x f'(x) dx。$

14. 判定反常积分 $\int_e^{+\infty} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx$ 的收敛性, 如果收敛, 求出其值。

15. 可导函数 $f(x)$ 满足等式 $\int_0^{2x} t f\left(\frac{t}{2}\right) dt = f(x) - 2$, 求函数 $f(x)$ 。

四、证明题（每小题 8 分，共 24 分）

得 分	
-----	--

16. 若 $0 \leq x \leq 1$ ，证明不等式： $\sin \pi x \leq \frac{\pi^2}{2} x(1-x)$ 。

17. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2,2]$ 上连续，在 $(-2,2)$ 上可导，且 $f(-2)=0, f(0)=2, f(2)=0$ 。
证明：曲线段 $y=f(x), (-2 \leq x \leq 2)$ 上至少有一点的切线平行于 $x-2y+6=0$ 。

18. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调递减，证明：对 $\forall x \in [0,1]$ ，有

$$\int_0^x f(t)dt \geq x \int_0^1 f(t)dt。$$

五、解答题（每小题 8 分共 16 分）

得 分	
-----	--

19. 设 $f(x) = \begin{cases} a + e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0 \\ b, & x = 0, \text{ 试问} \\ \frac{\sin x}{e^x - 1}, & x < 0 \end{cases}$

(1) a, b 为何值时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续?

(2) 当 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导?

20. 一只容器由 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$) 绕 y 轴旋转而成.

(1) 如果容器内的水量是容器容量的 $\frac{1}{4}$, 求容器内水面的高度;

(2) 如果要将题(1)中这部分水吸尽, 求外力需要作的功.