深圳大学期末考试试卷

(273)

开/闭卷 闭卷　　　　　　A/B 卷 B

课程编号 1900640001　课序号 01-11，13-23，25-29　课程名称 高等数学 A(2)　学分 5

命题人(签字) 高等数学 A(2)命题组　审题人(签字) 黄超　2023 年 6 月 6 日

	一	二	三	四	总分	附加题
得分						
评卷人						

一、填空题（本题共 6 小题，每小题 3 分，满分 18 分，请将答案写在横线上）

1. 二阶微分方程 $y''+2y'+5y=0$ 的通解为________.

2. 已知 $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=5$，且满足 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，则 $|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$ =________.

3. 曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 在 $(1,1,1)$ 处的切线方程是________.

4. 设函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$，则当 $x=1$， $y=2$ 时， $dz=$ ________.

5. 设 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$，则 $\overrightarrow{grad}\, f(0,0,0)=$ ________.

6. 设函数 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为 $f(x)=2\sin\frac{x}{3}$，将 $f(x)$ 展开为傅里叶级数 $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则系数 $a_n=$ ________.

二、选择题（本题共 8 小题，每小题 3 分，满分 24 分，每题只有一个正确答案，请将答案填在括号内）

1. $y=1, y=x, y=x^2$ 是某二阶非齐次线性微分方程的三个解，则该方程的通解为（　）

(A) $C_1+C_2x+x^2$　　(B) $C_1x+C_2x^2+1$

(C) $C_1(x-1)+C_2(x^2-1)+1$　　(D) $C_1(x^2-x)+C_2(x-1)$

2. 微分方程 $y''-y=e^x\sin x$ 的特解形式为（　）

(A) $e^x(A\cos x+B\sin x)$　　(B) $xe^x(A\cos x+B\sin x)$

(C) $e^xA(\cos x+\sin x)$　　(D) $xe^xA(\cos x+\sin x)$

3、下列结论中错误的是(　　)

(A) $z+2x^2+3y^2=0$ 表示旋转抛物面　　(B) $4x^2+y^2-z^2=4$ 表示单叶双曲面

(C) $x^2+y^2-2y=0$ 表示圆柱面　　(D) $2z^2+3y=0$ 表示抛物柱面

4. 考虑二元函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

(1) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；　(2) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续；

(3) $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微分；　(4) $f_x(x,y)$、$f_y(x,y)$ 存在；

若用 "$P\Rightarrow Q$" 表示可由性质 P 推出性质 Q，则下列四个选项正确的是(　　)

(A) $(3)\Rightarrow(2)\Rightarrow(1)$　　(B) $(2)\Rightarrow(3)\Rightarrow(1)$

(C) $(3)\Rightarrow(4)\Rightarrow(1)$　　(D) $(3)\Rightarrow(1)\Rightarrow(4)$

5. 设有平面区域 $D=\{(x,y)|-a\le x\le a, x\le y\le a\}$，$D_1=\{(x,y)|0\le x\le a, x\le y\le a\}$，

则 $\iint\limits_{D}(xy+\cos x\sin y)dxdy=$(　　)

(A) $2\iint\limits_{D_1}xydxdy$　　(B) $2\iint\limits_{D_1}\cos x\sin ydxdy$

(C) $4\iint\limits_{D_1}(xy+\cos x\sin y)dxdy$　　(D) 0

6. 设曲面 Σ 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 的内侧，则 $\oiint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dydz=$(　　)

(A) 0　　(B) $-2\pi R^4$　　(C) πR^4　　(D) $2\pi R^4$

7. 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 是正项级数，下列结论中正确的是(　　)

(A) 若 $a_n>a_{n+1}$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ 收敛，则 $a_n>a_{n+1}$

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则存在常数 $p>1$，使得 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在

(D) 若存在常数 $p>1$，使得 $\lim_{n\to\infty}n^p a_n$ 存在，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛

8. 设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在区间 $[-\pi,\pi)$ 上的定义为

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi,\end{cases}$$

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=\pi$ 处收敛于(　　)

(A) π　　(B) $-\dfrac{\pi}{2}$　　(C) 0　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

三、计算题（本题共6小题，每小题8分，满分48分，无计算过程不计分）

1. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2(\ln y-x)}$ 的通解.

2. 设函数 $z(x,y)$ 由方程 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$ 所确定，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$.

3. 计算 $I=\iint\limits_{D}\ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中D是由圆周 $x^2+y^2=1$ 及坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域.

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d).

记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$.

(1) 证明：曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

5. 求旋转抛物面 $z=x^2+y^2$ 与平面 $x+y-2z=2$ 之间的最短距离.

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数.

四、(满分 10 分) 已知 Σ 是 yOz 面上经过原点的单调上升光滑曲线 $y=f(z)(0\le z\le h)$ 绕着 z 轴旋转一周而成的曲面，其法向量与 z 轴正向夹角小于 $\dfrac{\pi}{2}$. 现有稳定流动的密度为 1 的不可压缩流体，其速度场为 $\vec{v}=x(1+z)\vec{i}-yz\vec{j}+\vec{k}$，设在单位时间内流过曲面 Σ 的流体的质量为 $\Phi(h)$，为使当 h 增加时，$\Phi(h)$ 增加的速度恒为 π，$y=f(z)$ 应为什么曲线？