

第二章作业

一、(25分) 已知文法 $S \rightarrow \epsilon \mid 0S1 \mid SS$ 。请分析以下哪些串属于文法的句子？哪些串属于文法的句型？对于文法的每个句子或句型，分别给出其一个推导。

$S, 0011, 01S01, 0110, SSS$

解：属于文法的句子有：0011

属于文法的句型有： $S, 0011, 01S01, SSS$

每个句型（含句子）的推导如下：

$S \Rightarrow^* S$ 或 $S \Rightarrow SS \Rightarrow S$

$S \Rightarrow 0S1 \Rightarrow 00S11 \Rightarrow 0011$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow 0S1S \Rightarrow 01S \Rightarrow 01SS \Rightarrow 01S0S1 \Rightarrow 01S01$

$S \Rightarrow SS \Rightarrow SSS$

注：①句子也是句型；

②“ \Rightarrow ”与“ \rightarrow ”的区别；

③ $S \Rightarrow^* S$, 0步推导；

④一步一步地推导

二、(55分) 文法设计题

(1) (5分) $\{a^n b^n \mid n \geq 3\}$ 。

(2) (5分) $\{a^n b^m \mid n, m \geq 0\}$ 。

(3) (5分) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \bmod 3 = 1\}$ ，其中 $|w|$ 表示 w 的长度。

(4) (8分) $\{w \mid w = w^T, w \in \{a, b, c\}^*\}$ 。

(5) (8分) $\{wxw^T \mid x, w \in \{a, b, c\}^*\}$ 。

(6) (8分) $\{a^n b^k c^m \mid k=n+m, n, k, m \geq 0\}$ 。

(7) (8分) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w| \bmod 2 = 0$ ，且 w 包括abc}。

(8) (8分) $\{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a \bmod 3 = 2\}$ ，其中 $|w|_a$ 表示 w 中 a 的个数。

解：(1) $S \rightarrow aaabbb \mid aSb$

注：① $S \rightarrow aaaSbbb \mid \epsilon$ 生成的语言是 $\{a^{3n}b^{3n} \mid n \geq 0\}$

② $S \rightarrow a^3b^3$ 跟 $S \rightarrow aaabbb$ 是不一样的

(2) $S \rightarrow AB \quad A \rightarrow \epsilon \mid aA \quad B \rightarrow \epsilon \mid bB$

注：① $S \rightarrow aS \mid bS \mid \epsilon$ 生成的语言是 $\{\{a, b\}^n \mid n \geq 0\}$

(3) $S \rightarrow A \mid AAAS \quad A \rightarrow a \mid b \mid c$

注：①不同变量表示不同模的串， $S \rightarrow [模3为1], A \rightarrow XB, B \rightarrow XC, C \rightarrow XA$ ，空串表示模3为0，可加在A,B或C；

(4) $S \rightarrow aSa \mid bSb \mid cSc \mid a \mid b \mid c \mid aa \mid bb \mid cc$

注：①串的长度，如a或aa；

②思考题：若 $w \in \{a, b, c\}^*$ ？

(5) 思路一：(中间部分记为X)

$S \rightarrow X \mid aSa \mid bSb \mid cSc \quad X \rightarrow \epsilon \mid aX \mid bX \mid cX$

思路二：(由于 w 允许为空，将所有字符串都当作 X ，即 w 和 w^T 为空，对吗？)

$S \rightarrow X \quad X \rightarrow \epsilon \mid aX \mid bX \mid cX$

思路三：（由于 x 允许为空，将所有字符串都当作 w 或 w^T ，即 X 为空，对吗？）

$$S \rightarrow \epsilon \mid aSa \mid bSb \mid cSc$$

注：① x 和 w 的可空性；

②思考题：若 $w \in \{a, b, c\}^*$ ？

(6) （思路：可重写为 $a^n b^n c^m$ ，再分解为 $a^n b^n$ 和 $b^m c^m$ ）

$$S \rightarrow AB \quad A \rightarrow aAb \mid \epsilon \quad B \rightarrow bBc \mid \epsilon$$

注：①思考题：若重写为 $a^n b^m c^n$ ？

(7) $S \rightarrow EabcF \mid FabcE$

$$E \rightarrow AF \mid \epsilon \quad (\text{偶数串}) \quad F \rightarrow AE \quad (\text{奇数串})$$

$$A \rightarrow a \mid b \mid c$$

注：① abc 的位置：奇数位或偶数位；

② $S \rightarrow AA$ 和 $A \rightarrow a|aA$ 并不能保证生成偶数串。

③思考题：是否存在满足要求的正则文法？

(8) （思路：假设字母表只有 a ，然后考虑在任意位置插入任意 bc 串）

$$S \rightarrow TaTaT \mid TaTaTaTS \quad T \rightarrow \epsilon \mid bT \mid cT$$

注：① a 的个数！

②不同变量表示不同模的串， $S \rightarrow [模 3 为 2]$, $A \rightarrow aB|XA$, $B \rightarrow aC|XB$, $C \rightarrow aA|XC$, 空串表示模 3 为 0，可加在 A, B 或 C ；

三、(20 分) 设 $L = \{0^n \mid n \geq 1\}$, 请分别构造满足要求的下列文法 G 。

(1) (5 分) G 是 RG。

(2) (5 分) G 是 CFG，但不是 RG。

(3) (5 分) G 是 CSG，但不是 CFG。

(4) (5 分) G 是 PSG，但不是 CSG。

解：

(1) $S \rightarrow 0 \mid 0S$

(2) $S \rightarrow 0 \mid SS$

(3) $S \rightarrow 0 \mid AS \quad A0 \rightarrow 00$

(4) $S \rightarrow 0 \mid AAS \quad AA \rightarrow 0$

注：①先保证生成的语言是 $\{0^n \mid n \geq 1\}$ ；

②只需一条“特殊”的产生式即可；

③空产生式要排除；