深圳大学《高等数学》期末考试试卷（A）

深圳大学 试卷纸 班级____ 学号____ 姓名

答 题 不 要 超 过 密 封 线

题号	一	二	三	四	总分
得分					

阅卷人	得分

一、单项选择题（8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）将每题的正确答案的代号 A、B、C 或 D 填入下表中.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案								

1．已知 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，且满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则必有（　）.

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

2.极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=($　$)$.

(A) 0　(B) 1　(C) 2　(D)不存在

3．下列函数中，$\mathrm{d}f=\Delta f$ 的是(　).

（A）$f(x,y)=xy$　（B）$f(x,y)=x+y+c_0$，c_0为实数

（C）$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$　（D）$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$

4．函数 $f(x,y)=xy(3-x-y)$，原点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的(　).

（A）驻点与极值点　（B）驻点，非极值点

（C）极值点，非驻点　（D）非驻点，非极值点

5．设平面区域 $D:(x-1)^2+(y-1)^2\le 2$，若 $I_1=\iint\limits_D\dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，则有（　）.

（A）$I_1<I_2<I_3$　（B）$I_1>I_2>I_3$　（C）$I_2<I_1<I_3$　（D）$I_3<I_1<I_2$

6．设椭圆 L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$ 的周长为 l，则 $\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$（　　）.

(A) l　(B) $3l$　(C) $4l$　(D) $12l$

7．设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为交错级数，$a_n\to0\ (n\to+\infty)$，则（　　）.

(A)该级数收敛　(B)该级数发散

(C)该级数可能收敛也可能发散　(D)该级数绝对收敛

8. 下列四个命题中，正确的命题是（　　）.

（A）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也发散

（B）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 发散，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散

（C）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛

（D）若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛

阅卷人	得分

二、填空题(7 个小题，每小题 2 分，共 14 分).

1. 直线 $\begin{cases}3x-4y+2z-6=0\\x+3y-z+a=0\end{cases}$ 与 z 轴相交，则常数 a 为_________________.

2．设 $f(x,y)=\ln(x+\dfrac{y}{x})$，则 $f_y'(1,0)=$_______________________.

3．函数 $f(x,y)=x+y$ 在 $(3,4)$ 处沿增加最快的方向的方向导数为________________.

4．设 $D:x^2+y^2\le 2x$，二重积分 $\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}\sigma=$__________________.

5．设 $f(x)$ 是连续函数，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le 9-x^2-y^2\}$，$\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$ 在柱面坐标系下

的三次积分为______________________ .

6. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$ 的收敛域是__________ .

7. 将函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le0\\1+x^2, & 0<x\le\pi\end{cases}$ 以 2π 为周期延拓后，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛

于______________.

阅卷人	得分

三、综合解答题一（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1．设 $u = xf(x, \frac{x}{y})$，其中 f 有连续的一阶偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：

2．求曲面 $\mathrm{e}^z + z + xy = 3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：

3. 交换积分次序，并计算二次积分 $\int_0^\pi \mathrm{d}x \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \mathrm{d}y$.

解：

4．设 Ω 是由曲面 $z = xy, y = x, x = 1$ 及 $z = 0$ 所围成的空间闭区域，求 $I = \iiint\limits_{\Omega} xy^2 z^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

解：

5．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ 的和.

解：

深圳大学 试卷纸 班级____ 学号______ 姓名

答 题 不 要 超 过 密 封 线

深圳大学 试卷纸 班级____ 学号____ 姓名

答 题 不 要 超 过 密 封 线

阅卷人	得分

四、综合解答题二（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分，解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

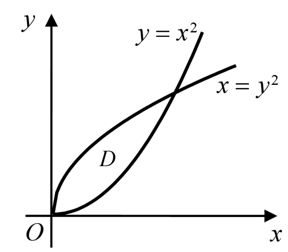
1. 从斜边长为 1 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解

2．计算积分 $\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）.

解：

3．利用格林公式，计算曲线积分 $I=\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域 D 的正向边界曲线.



4．计算 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$，$\Sigma$ 为平面 $x+y+z=1$ 在第一卦限部分.

解：

5．利用高斯公式计算对坐标的曲面积分蝌$_{S}$ $x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，

其中Σ为圆锥面$z^2=x^2+y^2$介于平面$z=0$及$z=1$之间的部分的下侧.

解：

深圳大学《高等数学》期末考试试卷(A)答案及评分标准

一、单项选择题（8 个小题，每小题 2 分，共 16 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	**D**	**A**	**B**	**B**	**A**	**D**	**C**	**D**

1．已知$\boldsymbol{a}$与$\boldsymbol{b}$都是非零向量，且满足$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，则必有（D　）

(A) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$；　(B) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$　；　(C) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$；　(D) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

2. 极限$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}=$（　A　）

(A) 0；　(B) 1；　(C) 2；　(D)不存在.

3．下列函数中，$\mathrm{d}f=\Delta f$的是(B)；

（A）$f(x,y)=xy$；　（B）$f(x,y)=x+y+c_0,c_0$为实数；

（C）$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$；　（D）$f(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}$.

4．函数$f(x,y)=xy(3-x-y)$，原点$(0,0)$是$f(x,y)$的(B).

（A）驻点与极值点；　（B）驻点，非极值点；

（C）极值点，非驻点；　（D）非驻点，非极值点.

5．设平面区域 D：$(x-1)^2+(y-1)^2\le2$，若$I_1=\iint\limits_D\dfrac{x+y}{4}\mathrm{d}\sigma$，$I_2=\iint\limits_D\sqrt{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，$I_3=\iint\limits_D\sqrt[3]{\dfrac{x+y}{4}}\mathrm{d}\sigma$，则有（　A　）

（A）$I_1<I_2<I_3$；　（B）$I_1>I_2>I_3$；　（C）$I_2<I_1<I_3$；　（D）$I_3<I_1<I_2$.

6．设椭圆L：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的周长为$l$，则$\oint_L(3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$（D　）

(A) l；　(B) $3l$；　(C) $4l$；　(D) $12l$.

7．设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$为交错级数，$a_n\to0$ $(n\to+\infty)$，则（　C　）

(A)该级数收敛；　(B)该级数发散；

(C)该级数可能收敛也可能发散；　(D) 该级数绝对收敛.

8. 下列四个命题中，正确的命题是（　D　）

（A）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$也发散；

（B）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也发散；

（C）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$也收敛；

（D）若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$也收敛.

二、填空题(7 个小题，每小题 2 分，共 14 分).

1. 直线$\begin{cases}3x-4y+2z-6=0\\x+3y-z+a=0\end{cases}$与$z$轴相交，则常数$a$为____3____。

2．设$f(x,y)=\ln(x+\dfrac{y}{x})$,则$f_y'(1,0)=$_______1_____

3．函数$f(x,y)=x+y$在$(3,4)$处沿增加最快的方向的方向导数为___$\sqrt{2}$

4．设$D:x^2+y^2\le2x$，二重积分$\iint\limits_D(x-y)\mathrm{d}\sigma=$____$\pi$________.

5．设$f(x)$是连续函数，$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le9-x^2-y^2\}$，$\iiint\limits_\Omega f(x^2+y^2)\mathrm{d}v$在柱面坐标系下的三次积分为______$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^3\mathrm{d}\rho\int_0^{9-\rho^2}\rho f(\rho^2)\mathrm{d}z$

6. 幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n!}$的收敛域是____$(-\infty,+\infty)$____.

7. 函数 $f(x)=\begin{cases}-1 &, -\pi<x\le 0\\ 1+x^2 &, 0<x\le\pi\end{cases}$，以 2π 为周期延拓后，其傅里叶级数在点 $x=\pi$ 处收敛于___ $\frac{\pi^2}{2}$ ___.

三、综合解答题一（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分.解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1．设 $u=xf(x,\frac{x}{y})$，其中 f 有连续的一阶偏导数，求 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial u}{\partial y}$.

解：$\frac{\partial u}{\partial x}=f+xf_1'+\frac{x}{y}f_2'$ ………………4 分

$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x^2}{y^2}f_2'$. ………………7 分

2．求曲面 $e^z+z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程及法线方程.

解：令 $F(x,y,z)=\mathrm{e}^z+z+xy-3$ ，………………2 分

$\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=(y,x,\mathrm{e}^z+1)$ ，$\boldsymbol{n}\big|_{(2,1,0)}=(1,2,2)$ ，………………4 分

所以在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程为 $(x-2)+2(y-1)+2z=0$ ，

即 $x+2y+2z-4=0$ ；………………6 分

法线方程为 $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{2}$. ………………7 分

3. 交换积分次序，并计算二次积分 $\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y$；

解：$\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_x^{\pi}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}y\int_0^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$ ………………4 分

$=\int_0^{\pi}\sin y\mathrm{d}y=2$ ………………7 分

4．设 Ω 是由曲面 $z=xy, y=x, x=1$ 及 $z=0$ 所围成的空间区域，求 $I=\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

解：注意到曲面 $z=xy$ 经过 x 轴、y 轴，………………2 分

$\Omega=\{(x,y,z):0\le z\le xy, 0\le y\le x, 0\le x\le 1\}$ ………………4 分

故 $I=\iiint\limits_{\Omega}xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\mathrm{d}z=\frac{1}{364}$. ………………7 分

5．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 的和函数 $S(x)$，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$ 的和.

解：$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，$S(0)=1$，

由已知的马克劳林展式：$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=1}^{\infty}x^n, |x|<1$，………………2 分

有 $S(x)=(\sum_{n=1}^{\infty}x^n)'=(\frac{1}{1-x}-1)'=\frac{1}{(1-x)^2}$，$|x|<1$，………………5 分

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n-1}}=\frac{1}{2}S(\frac{1}{2})=2$ ………………7 分

四、综合解答题二（5 个小题，每小题 7 分，共 35 分.解答题应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

1. 从斜边长为 1 的一切直角三角形中，求有最大周长的直角三角形.

解 设两个直角边的边长分别为 x，y，则 $x^2+y^2=1$，周长 $C=x+y+1$，需求 $C=x+y+1$ 在约束条件 $x^2+y^2=1$ 下的极值问题. ………………2 分

设拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=x+y+1+\lambda(x^2+y^2-1)$，………………4 分

令 $\begin{cases}F_x=1+2\lambda x=0,\\ F_y=1+2\lambda y=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$

解方程组得 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 为唯一驻点， ………………6 分

又最大周长一定存在，故当 $x=y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时有最大周长. ………………7 分

2．计算积分 $\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$（$a>0$）.

解：L 的极坐标方程为 $\rho=a\cos\theta$，$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$；………………2 分

则 $\mathrm{d}s=\sqrt{\rho^2+(\rho')^2}\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta$，………………4 分

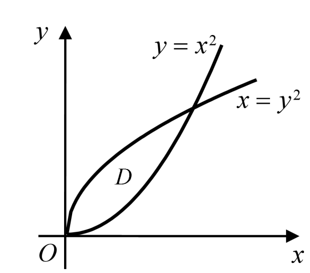
所以 $\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\rho^2a\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}a^3\cos^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\pi a^3}{2}$. ………………7 分

或解：L 的形心 $(\bar{x},\bar{y})=(\frac{a}{2},0)$，$L$ 的周长 πa，

$\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\oint_L ax\mathrm{d}s=a\bar{x}\pi a=\frac{\pi a^3}{2}$

3．利用格林公式，计算曲线积分 $I=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+2xy)\mathrm{d}y$，其中 L 是由抛物线 $y=x^2$ 和 $x=y^2$ 所围成的区域 D 的正向边界曲线.

解：$I=\oint_L(x^2+y^2)\mathrm{d}x+(x+2xy)\mathrm{d}y$



$=\iint\limits_{D} dxdy$ ………………3 分

$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y$ ………………5 分

$=\frac{1}{3}$ ………………7 分

4．计算$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S$，$\Sigma$为平面$x+y+z=1$在第一卦限部分.

解：$\sum$在xoy面上的投影区域为$D_{xy}: x+y\le 1(x\ge 0, y\ge 0)$，………………2 分

又$\sum: z=1-x-y, \frac{\partial z}{\partial x}=-1, \frac{\partial z}{\partial y}=-1,$故$dS=\sqrt{3}dxdy$，………………4 分

所以$\iint\limits_{\Sigma} xdS=\sqrt{3}\iint\limits_{D_{xy}} xdxdy=\sqrt{3}\int_0^1 dx\int_0^{1-x} xdy=\frac{\sqrt{3}}{6}$. ………………7 分

或解：由对称性，$\iint\limits_{\Sigma} xdS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x+y+z)dS=\frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} dS=\frac{\sqrt{3}}{6}$

5．利用高斯公式计算对坐标的曲面积分$\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，其中$\Sigma$为锥面$z^2=x^2+y^2$介于平面$z=0$及$z=1$之间的部分的下侧。

解：补曲面$D: x^2+y^2\le 1, z=1$（取上侧），………………2 分

由高斯公式知

$\oiint_{\Sigma+D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$，………………4 分

故$\oiint_{\Sigma} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$=-\oiint_{D} \mathrm{d}x\mathrm{d}y+\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

$=-\iint\limits_{\{x^2+y^2\le 1\}} dxdy=-\pi$ ………………7 分