第一章作业

一、（10 分）设 R={(a,b), (b,c), (c,d)}是集合{a, b, c, d, e}上的二元关系，求

（1）R 的传递闭包。

（2）R 的自反传递闭包。

解：（1）{(a,b), (b,c), (c,d), (a,c), (b,d), (a,d)}

（2）{(a,b), (b,c), (c,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (e,e), (a,c), (b,d), (a,d)}

注意：（1）自反传递闭包少了(e,e)。

（2）需要写出最终结果，不能使用类似 R∪{⋯}的表达式

二、（10 分）假设 $a_{m,n}$ 的定义如下：

$$
\begin{aligned}
a_{0,0} &= 0 \\
a_{m,n} &= \begin{cases} a_{m-1,n}+1 & \text{if } n=0 \text{ and } m>0 \\ a_{m,n-1}+n & \text{if } n>0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

其中 m, n 为自然数。请用递归证明方法，证明 $a_{m,n}$ = m+n(n+1)/2。

解答：（先施归纳于 m，再施归纳于 n。 也可以先 n 后 m）

(1) 证明当 m=0 时，结论对任意 n 成立。

(1.1)当 n=0 时，有 $a_{0,0}$ = 0 = 0+0*(0+1)/2，成立。

(1.2)假设 n=t 时 $a_{0,t}$ = 0+t*(t+1)/2，其中 t⩾0。

当 n=t+1 时，有

$a_{0,t+1}$ = $a_{0,t}$ + (t+1)　　（t+1 > 0）

= 0+t*(t+1)/2 + (t+1)　　（归纳假设）

= 0+(t+1)*((t+1)+1)/2

(1.3)由归纳法原理，当 m=0 时，结论对任意 n 成立。

(2)假设当 m=k 时，结论对任意 n 成立。证明当 m=k+1 时，结论对任意 n 也成立。

(2.1)当 m=k+1,n=0 时，有

$a_{k+1,0}$ = $a_{k,0}$ + 1　　（n = 0, k+1 > 0）

= k+0*(0+1)/2 + 1　　（归纳假设）

= (k+1) + 0*(0+1)/2

(2.2)当 m=k+1，假设 n=t 时 $a_{k+1,t}$ = (k+1)+t*(t+1)/2，其中 t⩾0。

当 n=t+1 时，则有

$a_{k+1,t+1}$ = $a_{k+1,t}$ + (t+1)　　（t+1 > 0）

= (k+1)+t*(t+1)/2 + (t+1)　　（归纳假设）

= (k+1)+(t+1)*((t+1)+1)/2

(2.3)由归纳法原理，当 m=k+1 时，结论对任意 n 仍成立。

(3)综上所述，结论对任意 m、n 都成立。

三、（20 分）给定字符串 abbbbaaabb，计算其所有前缀的集合、后缀的集合、真前缀的集合、真后缀的集合。

（1）（10 分）Σ={aa, ab, ba, bb}

（2）（10 分）Σ={a, bb}

解答：(1)

前缀：{ε, ab, abbb, abbbba, abbbbaaa, abbbbaaabb}
后缀：{ε, bb, aabb, baaabb, bbbaaabb, abbbbaaabb}
真前缀：{ε, ab, abbb, abbbba, abbbbaaa}
真后缀：{ε, bb, aabb, baaabb, bbbaaabb}
(2)
前缀：{ε, a, abb, abbbb, abbbba, abbbbaa, abbbbaaa, abbbbaaabb}
后缀：{ε, bb, abb, aabb, aaabb, bbaaabb, bbbbaaabb, abbbbaaabb}
真前缀：{ε, a, abb, abbbb, abbbba, abbbbaa, abbbbaaa}
真后缀：{ε, bb, abb, aabb, aaabb, bbaaabb, bbbbaaabb}

注意：（1）注意字母表！
（2）需要写出最终结果

四、（60 分）设∑={0, 1}，请给出∑上的下列语言的尽可能形式化的表示。
（注意：**奇数**学号只做**奇数**序号的题，**偶数**学号只做**偶数**序号的题，每人 6 题）
(1) 所有以 1 开头的串
(2) 所有以 0 结尾的串
(3) 所有以 00 开头，以 00 结尾的串
(4) 所有以 10 开头，以 01 结尾的串
(5) 所有长度为偶数的串
(6) 所有长度为奇数的串
(7) 所有包含 3 个连续 0 的串
(8) 所有不包含 3 个连续 0 的串（提示：补集）
(9) 所有正数第 9 个字符是 1 的串
(10) 所有倒数第 9 个字符 0 的串
(11) 所有**最多**有一对连续的 0 **或者** **最多**有一对连续的 1 的串（提示：分情况）
(12) 所有**最多**有一对连续的 0 **并且** **最多**有一对连续的 1 的串（提示：分情况，000 有 2 对连续 0）
解答：(1)1{0,1}*
(2) {0,1}*0
(3) {00} U {000} U {00}{0,1}*{00}
(4) {101} U {10}{0,1}*{01}
(5) ({0,1}{0,1})* 或 $\{0,1\}^{2n}$，其中 n>=0（n>=1 或$(\{0,1\}\{0,1\})^{+}$也算对）
(6) ({0,1}{0,1})*{0,1} 或 $\{0,1\}^{2n+1}$，其中 n>=0
(7) {0,1}*000{0,1}*
(8) {1,01,001}*{ε,0,00} 或者 {0,1}* - {0,1}*000{0,1}*
(9) $\{0,1\}^{8}1\{0,1\}^{*}$
(10) $\{0,1\}^{*}0\{0,1\}^{8}$
(11) ({01,1}*{0, ε} U {01,1}*{00}{10,1}*) U ({10,0}*{1, ε} U {10,0}*{11}{01,0}*)
(12) {0, ε}{10}*{1, ε} U {1, ε}{01}*{00}{10}*{1, ε} U {0, ε}{10}*{11}{01}*{0, ε}
U {1, ε}{01}*{00}{10}*{11}{01}*{0, ε} U {0, ε}{10}*{11}{01}*{00}{10}*{1, ε}
或者({01,1}*{0, ε} U {01,1}*{00}{10,1}*) ∩ ({10,0}*{1, ε} U {10,0}*{11}{01,0}*)
注意：（1）不可以直译，如{w | w 以 1 开头}等。

（2）开头串与结尾串可能有交集，比如 000（00 开头，00 结尾），101（10 开头，01 结尾）等。
（3）{0,1}*{0,1}*并不能表示偶数串
（4）(1*01*)*00(1*01*)*可能并不止一对 0
（5）可能的开头字符和结尾字符