不完备总结

2021年11月26日　18:51

1. 绝对值函数可导性：

设$f(x)$在$x = a$处可导，则

（1）当$f(a) \neq 0$时，$|f(x)|$在a处可导

（2）当$f(a) = 0$时，若$f'(a) = 0$，则$|f(x)|$在a处可导；反之不可导.

2. 可导（可微）必连续！

3. 两个重要极限：$\lim\limits_{x \to 0} \frac{sinx}{x} = 1$ 和 $\mathop{lim}\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 或 $\mathop{lim}\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

4. 常用等价无穷小：

当$x \to 0$时，

$\sin x \sim x$

$\tan x \sim x$

$1 - \cos x \sim \frac{1}{2} x^2$

$arcsin\, x \sim x$

$arctan\, x \sim x$

$a^x - 1 \sim x \ln a$（$a > 0$）

$e^x - 1 \sim x$

$\ln(1 + x) \sim x$

$\ln(1 + ax) \sim ax$

$(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

5. 罗尔定理：

如果函数$f(x)$满足以下三个条件

（1）在闭区间$[a, b]$上连续

（2）在开区间(a, b)内可导

（3）$f(a) = f(b)$

则在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f'(\xi)=0(a<\xi<b)$.
三个条件缺一不可：闭区间连续，开区间可导，端点值相等！

6. 拉格朗日中值定理：
如果函数$f(x)$满足以下两个条件
（1）在闭区间$[a,b]$上连续
（2）在开区间(a,b)内可导
则在开区间(a,b)内至少有一点ξ，使得$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$，$a<\xi<b$.
反之，当$a>b$时，拉格朗日中值公式一样成立.

7. 常用麦克劳林公式：
1）$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x)$

2）$sinx=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+R_{2m}(x)$

3）$cosx=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x)$

4）$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+R_n(x)$

5）$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$

8. 莱布尼茨公式：
莱布尼兹(Leibniz)公式：

二项式定理

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} \qquad \boxed{(u+v)^n}$$

$$=C_n^0u^{(n-0)}v^{(0)}+C_n^1u^{(n-1)}v'+C_n^2u^{(n-2)}v''$$

$$+\cdots+C_n^n u^{(n-n)}v^{(n)}.$$

（二项式系数） $\boxed{C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}.}$

9. 常用高阶导数公式：
$(e^{ax})^{(n)}=a^n e^{ax}$

$$(sinx)^{(n)} = sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(cosx)^{(n)} = cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

$$[ln(1 + x)]^{(n)} = (-1)^{n-1}(n - 1)!\,(1 + x)^{-n}$$

$$(x^{\mu})^{(n)} = \mu(\mu - 1)(\mu - 2)\cdots[\mu - (n - 1)]x^{\mu-n}$$

$(x^n)^{(n)} = n!$ 进而 $(x^n)^{(n+k)} = 0(k = 1,2,\cdots)$

10. 弧微分公式：$ds = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$

11. 曲率公式：$K = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}$ 和 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$，$K = \frac{|\varphi'(t)\psi''(t)-\varphi''(t)\psi'(t)|}{[\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$

12. 常用不定积分表：

$$\int kdx = kx + C$$

$$\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu + 1} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = ln|x| + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = arctanx + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = arcsinx + C$$

$$\int cosxdx = sinx + C$$

$$\int sinxdx = -cosx + C$$

$$\int sec^2xdx = \int \frac{dx}{cos^2x} = tanx + C$$

$$\int csc^2xdx = \int \frac{dx}{sin^2x} = -cotx + C$$

$$\int secxtanxdx = secx + C$$

$$\int cscxcotxdx = -cscx + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$$

$$\int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$\int secxdx = ln|secx + tanx| + C$$

$$\int cscxdx = ln|cscx - cotx| + C$$

$$\int tanxdx = -ln|cosx| + C$$

$$\int cotxdx = ln|sinx| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln\left|x \pm \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$$

13. 积分变上限函数求导：

$$\left[\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right]' = \varphi'(x)f[\varphi(x)] - \psi'(x)f[\psi(x)]$$

证明题遇到变上限就求导，计算题一般与洛必达结合使用

14. 分部积分的优先级：

（1）e^x（2）三角函数（3）x^n

15. 一次无理根式换元；二次无理三角换元或配方！

一次无理形如$\sqrt{ax+b}$

二次无理形如$\sqrt{ax^2+bx+c}$

16. 定积分换元要换限！（故证明题上下限改变优先考虑换元）

17. 连续必可积；可积必有界！

连续是可积的充分不必要条件；

可积是有界的充分不必要条件！

18. 定积分中值定理：

如果函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上连续，那么在$[a,b]$上至少有一点ξ，

使得$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)\quad a \le \xi \le b$成立

19. 绝对值函数可积性：

$|f(x)|$在$[a,b]$上可积，$\int_a^b f(x)\,dx$不一定存在.

20. 三角函数的定积分结论：

$$(1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(sinx)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(cosx)\,dx$$

$$(2)\int_0^{\pi} xf(sinx)\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(sinx)\,dx$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n x\,dx = \begin{cases} \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & n\text{为正偶数} \\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{为大于}1\text{的正奇数} \end{cases}$

21. 对称区间的定积分，一般考奇偶性：

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_0^a [f(x)+f(-x)]\,dx$$

(1)偶函数： $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$

(2)奇函数： $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

22. 带根号定积分，化绝对值再利用可加性！

23. 反常积分p指数和q指数：

(1)无穷积分： $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}(a>0)$ 当$p>1$时收敛，$p\le 1$时发散.

(2)瑕积分： $\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ 当$0<q<1$时收敛，$q\ge 1$时发散

24. 瑕积分注意：

瑕点出现在积分区间内，瑕积分利用可加性被瑕点分成两个或多个积分求解时，若其中有一个瑕积分发散，则整个积分区间内的瑕积分都发散！

25. 定积分求面积、体积、弧长：

(1)面积：

直角坐标： $A = \int_a^b f(x)\,dx$

极坐标： $A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}[\rho(\theta)]^2 d\theta$

(2)体积:

旋转体: $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$

绕y轴: $V=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$

已知截面面积: $V=\int_a^b A(x)\,dx$

(3)弧长:

直角坐标: $s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$

参数方程: $s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt$

极坐标$s=\int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,d\theta$

26. 摆线一拱体积、弧长:

$$\begin{cases} x=a(\theta-sin\theta) \\ y=a(1-cos\theta) \end{cases} \quad (0\le\theta\le 2\pi)$$

绕x轴旋转体积: $V=5\pi^2a^3$

绕y轴旋转体积: $V=6\pi^3a^3$

弧长: $s=8a$

27. 微分方程的通解不是所有的解!

28. 齐次方程换元化可分离变量:

(1) 令$u=\frac{y}{x}$, 则$\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$

(2) 令$v=\frac{x}{y}$, 则$\frac{dx}{dy}=v+y\frac{du}{dy}$

29. 一阶线性齐次和非齐次通解公式:

齐次 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=0$ 通解$y=Ce^{-\int P(x)dx}$

非齐次 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ 通解$y=e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C\right)$