

1 目的

実際の物理実験の測定において「ゆらぎ」の現象は必ず生じている。このゆらぎは様々な物理的要因に由来し、それらは定量的に扱うことができる。

今回はあえてアンプでゆらぎを増幅させ、その要因となる物理理論からボルツマン定数 k_B 、及び電気素量 e を測定する。

2 原理

2.1 増幅器の特性と雑音指数 F

今回は増幅器を用いてあえてゆらぎを増幅して、その挙動を調べる。しかし増幅器も内部の抵抗成分などにより増幅率の周波数特性が存在する。つまり電圧増幅率 G には

$$G = G(f) \quad (1)$$

というように周波数依存性がある。今回は一定の入力電圧 v_i に対する増幅を見ていくため、その周波数依存特性の曲線の生成する面積 S に対して成り立つ

$$S = v_i^2 \int G^2(f) df \quad (2)$$

という関係を用いて

$$\langle V^2 \rangle = \frac{\langle v^2 \rangle}{\Delta f} \int G^2(f) df \quad (3)$$

$$\frac{\langle v^2 \rangle}{\Delta f} = \frac{\langle V^2 \rangle v_i^2}{S} \quad (4)$$

となる。

2.2 熱雑音とボルツマン定数

抵抗にはその両端に自由電子の熱的運動に起因する雑音が生じる。この雑音を熱雑音と呼ぶがその熱雑音電圧 v として、抵抗 R 電圧を測定する帯域幅を Δf 、抵抗の温度を T 、ボルツマン定数を k_B とすると

$$\langle v^2 \rangle = 4k_B T R \Delta f \quad (5)$$

として v の 2 乗平均は評価される。この式 (5) はナイキストの熱雑音の式という。

ただし今回は上記のように増幅器の特性を考慮しなければならないため、周波数幅 Δf と電圧平均は定義を式 (4) のように変える必要がある。したがって実験的には

$$\langle V^2 \rangle = \frac{4k_B T S}{v_i^2} R \quad (6)$$

$$\log \langle V^2 \rangle = \log(R) - \log\left(\frac{v_i^2}{S} \frac{1}{4k_B T}\right) \quad (7)$$

という式を用いてデータを処理する。今回は複数の R に対して $\langle V^2 \rangle$ を測定することでボルツマン定数を求めるのに使用する。

2.3 散雑雑音

フォトダイオードなど、光-電圧変換の際に生じるゆらぎを散雑雑音といい、ここではそれを調べる。抵抗 R と直列につないだフォトダイオードにフィラメントなどによる光を入射させた場合、測定した電流ゆらぎの 2 乗平均値 $\langle I^2 \rangle = \frac{\langle V^2 \rangle}{R^2}$ と平均電流 $\langle i \rangle$ の間には

$$\langle I^2 \rangle = \frac{\langle i_n^2 \rangle}{\Delta f} \int G^2(f) df = \frac{\langle i_n^2 \rangle}{\Delta f} \frac{S}{v_i^2} \quad (8)$$

の関係が成り立つ。また電気素量は

$$e = \langle I^2 \rangle \frac{v_i^2}{S} \frac{1}{2 \langle i \rangle} \quad (9)$$

とかけるため、対数表記にして

$$\log \langle I^2 \rangle = \log \langle i \rangle - \log\left(\frac{v_i^2}{S} \frac{1}{2e}\right) \quad (10)$$

というグラフを実験から得ることができる。この切片から電気素量を計算していく。

3 測定手順

3.1 増幅器とフィルターの増幅特性の測定

1. 抵抗分割器を介して発振器出力をプリアンプの A 入力端子に、プリアンプの出力をバンドパスフィルターの入力に、バンドパスフィルターの出力をオシロスコープにそれぞれ接続。
2. 入力電圧 $v_i = 1.01 \times 10^{-4} \text{V}$ の一定にし、周波数 f を 50Hz-20kHz の範囲で変化させ、オシロスコープで正弦波の V_{pp} 値を測定。

3.2 ボルツマン定数の測定

1. 可変抵抗をプリアンプの入力に、プリアンプの出力をバンドパスフィルターを通してオシロスコープに接続。
2. 入力である可変抵抗の抵抗値を変えながら、 $\langle V^2 \rangle$ の値を測定。

3.3 電気素量 e の測定

1. 「ボルツマン定数の測定」の入力を可変抵抗から出力を変化できるフィラメントに対するフォトダイオードの検波装置に切り替えた。なお、検波装置には抵抗 R が直列に配置されており、オシロスコープには抵抗にかかる電圧波形が表示されるようになっている。
2. フィラメントの光の出力を変えながら、検波回路に流れる平均電流 $\langle i \rangle$ と電圧ゆらぎの 2 乗平均値 $\langle V^2 \rangle$ を測定。

4 結果と考察

4.1 増幅器とフィルターの増幅特性の測定

図 1 に増幅器の周波数特性のデータを示す。

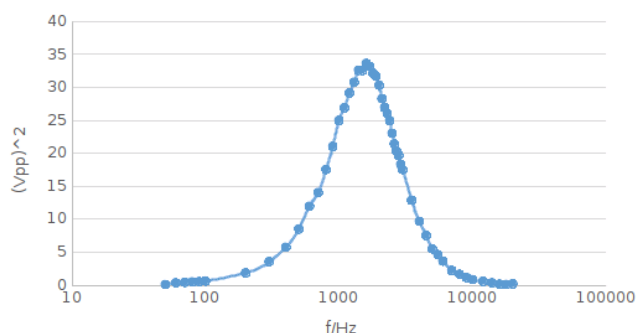


図 1 増幅された電圧波形振幅の周波数依存性

このグラフの面積 S を台形求積により計算すると、

$$S = 32.6kV^2Hz \quad (11)$$

となる。ただし、この面積はあるデータの y 座標に、その x 座標と次のデータの x 座標との差の積をすべてのデータに対して足し合わせたものである。

したがって

$$\frac{v_i^2}{S} = 3.1 * 10^{-13}s \quad (12)$$

となる。この値はその増幅率の特性を示すひとつの評価方法であり、今後使用する。

4.2 ボルツマン定数の測定

測定した熱雑音の波形観測例を図 2 に示す。なお、以降の電圧値などは、波形の最も離れた pp 値をとっている。

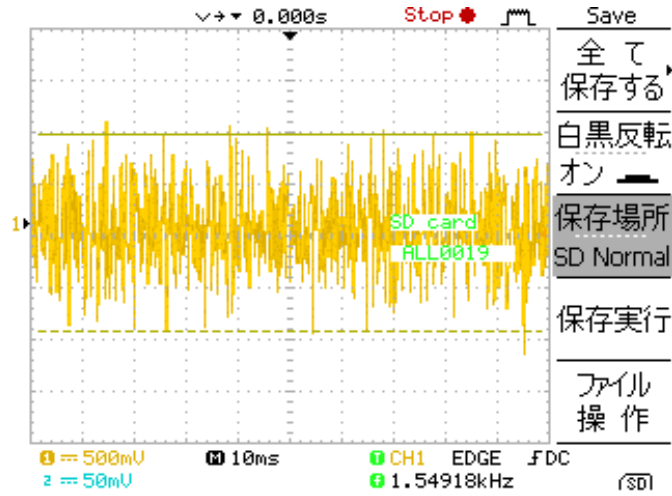


図 2 熱雑音の測定波形例

図 3,4 にそれぞれ 2 乗平均電圧と抵抗値の両対数グラフ、またその中から傾きが一定になる領域を抜粋したものを載せる。

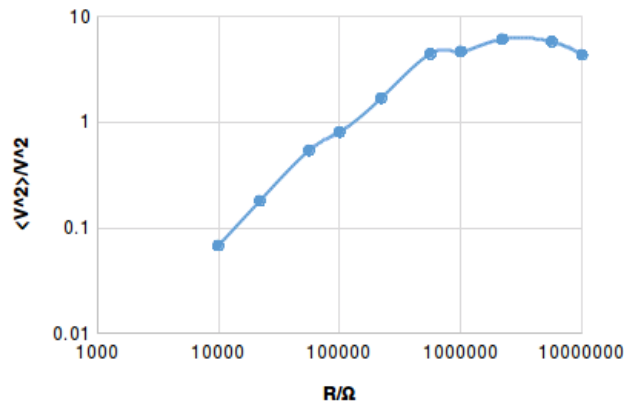


図 3 2 乗平均電圧と抵抗値の両対数グラフ

図 4 と式 (7) の関係によりボルツマン定数が以下のように定まる。

$$k_B = 1.7 * 10^{-21} \text{ J/K} \quad (13)$$

ここで室温が 26 度であったことと、抵抗内部の温度は室温より 1 度程度高いであろうという予想から抵抗の温度は 300K としている。

また式 (6) を用いてボルツマン定数の不確かさを求めることを考える。電気測定器による測定値の不確かさは最小目盛 ± 1 、温度の不確かさは $\pm 0.1\text{K}$ とすると

$$\Delta k_B = \sqrt{\left(\frac{\partial k_B}{\partial v_i} \Delta v_i\right)^2 + \left(\frac{\partial k_B}{\partial \langle V^2 \rangle} \Delta \langle V^2 \rangle\right)^2 + \left(\frac{\partial k_B}{\partial T} \Delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial k_B}{\partial S} \Delta S\right)^2 + \left(\frac{\partial k_B}{\partial R} \Delta R\right)^2}$$

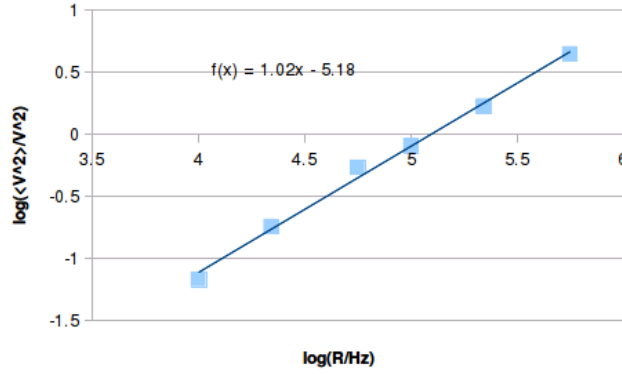


図4 2乗平均電圧と抵抗値の抜粋

$$\frac{\Delta k_B}{k_B} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta v_i}{v_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle V^2 \rangle}{\langle V^2 \rangle}\right)^2 + \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2}$$

$$\Delta k_B = 2 * 10^{-22} J/K$$

となる。ただしここで $\frac{\Delta S}{S}$ は、図1より S を台形求めた場合は傾きの変化量が最も大きい区間でその実際の面積との誤差が大きくなるため、頂点を含む区画の実際の曲線からの台形の差分を ΔS 、その区間の台形の面積を S としている。そのため $\frac{\Delta S}{S}$ 比を最も大きくなるように見積もっている。また合成不確かさの式は [2] の記事を参考にした。

ここでボルツマン定数の測定値と文献値 [1] を以下に比較する。

$$k_B \pm \Delta k_B = (1.7 \pm 0.2) * 10^{-21} J/K$$

$$k_B(\text{文献値}) = 1.4 * 10^{-23} J/K$$

これをみると今回のボルツマン定数の測定値は文献値と、不確かさの幅を考えても全く異なっている。桁が2桁ずれていることがわかる。これは台形求積法による S の見積りが小さくなったために、 $\langle V^2 \rangle - R$ グラフの切片の絶対値に対して k_B が大きくなってしまったものと考えられる。対数グラフで数字が違っている点で、桁が多少異なっていることもわかる。

4.3 電気素量 e の測定

測定した散射雑音の波形観測例を図5に示す。なお、以降の $\langle I^2 \rangle = \frac{\langle V^2 \rangle}{R^2}$ の電圧値などは、波形の最も離れた pp 値をとっている。

測定した電流ゆらぎの2乗平均値と平均電流の両対数グラフを図6に示す。

このグラフと式 (10) から、電気素量の測定値は

$$e = 1.2 * 10^{-22} C \quad (14)$$

となることがわかる。さらにその不確かさは、式 (9) から [2]

$$\Delta e = \sqrt{\left(\frac{\partial e}{\partial \langle I^2 \rangle} \Delta \langle I^2 \rangle\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial v_i} \Delta v_i\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial S} \Delta S\right)^2 + \left(\frac{\partial e}{\partial \langle i \rangle} \Delta \langle i \rangle\right)^2}$$

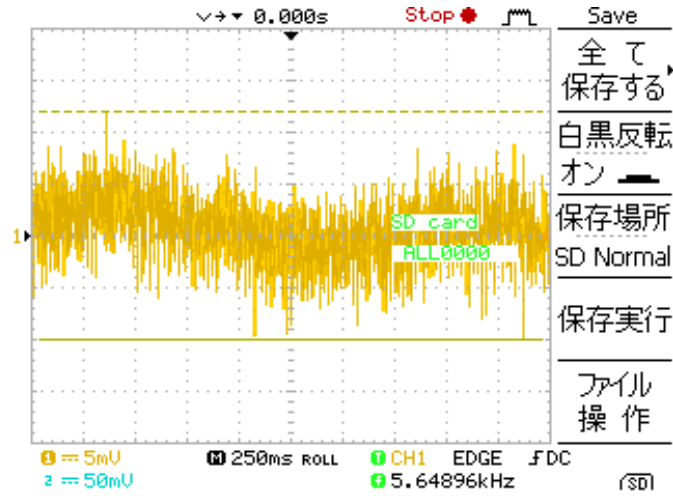


図5 散射雑音の波形観測例

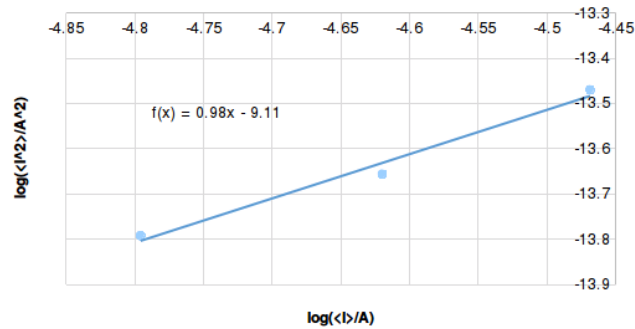


図6 電流ゆらぎの2乗平均と平均電流の両対数グラフ

$$\frac{\Delta e}{e} = \sqrt{\left(\frac{\Delta \langle I^2 \rangle}{\langle I^2 \rangle}\right)^2 + \left(2 \frac{\Delta v_i}{v_i}\right)^2 + \left(\frac{\Delta S}{S}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \langle i \rangle}{\langle i \rangle}\right)^2}$$

$$\Delta e = 1 * 10^{-23} C$$

となる。ただし、 S の不確かさは1の面積の頂点付近で最も大きくなるとして、 $\Delta S = 20V^2Hz$ と見積もっている。

以下に電気素量の測定値と文献値 [1] を比較する。

$$e \pm \Delta e = (1.2 \pm 0.1) * 10^{-22} C$$

$$e(\text{文献値}) = 1.6 * 10^{-19} C$$

ここでも電気素量は測定値と文献値が3桁ほど異なる(ボルツマン定数では2桁)。これより先述の「ボルツマン定数の測定」の項目との共通項から見ても、 S の見積りが小さくなってしまっているという点が確かめられる。さらに今回は $\langle i \rangle$ の読み取り精度が低いことによる不確かさの大きさも、電気素量の測定値と文献値の差異の拡大に寄与していると考えられる。

5 参考文献

[1] 理科年表平成 28 年,p375

[2]<http://www.nite.go.jp/data/000050641.pdf>

6 追記

実験と考察について補足する。今回の実験結果はボルツマン定数、電気素量ともに 2 桁から 3 桁程度文献値からの差異を持っていた。これは本来ありえないことであり、その点について考える。

ただし今回、 v_i^2/S の値に問題はなく、データを整理した限りではこのトラブルを解決しうる値を得ることができなかった。したがってデータの記録ミスという可能性を考えてみた。さらに、データの桁数を除けば測定値と文献値に近い値となることが予想されることから、データ記録の際の単位の記入間違いであることを考える。

はじめにボルツマン定数について。この場合、実験値は文献値に対して 2 桁大きくなっている。これが測定値の原因だとすると、その起因は図 4 の切片の大きさにほかならない。つまり切片が約-7 程度であれば桁は揃う。したがって縦軸の電圧の 2 乗が 2 桁、つまり電圧値が 1 桁大きくなっていたとここでは判断する。この仮定のもと改めて計算してみると

$$\begin{aligned}k_B \pm \Delta k_B &= (1.7 \pm 0.2) * 10^{-23} J/K \\k_B(\text{文献値}) &= 1.4 * 10^{-23} J/K\end{aligned}$$

となる。ここでも不確かさを含めた実験値の幅から $1 * 10^{-24} J/K$ 程度、文献値は離れているが、これは文献値から見た相対誤差で約 7 %といえる。この実験はほとんど確かな値が出ることがないと言えることから、この誤差は妥当なものだと判断する。

また電気素量についても同様に考える。電気素量の場合は測定値が 3 桁、文献値より小さくなっている。この場合図 6 の切片が約-6 程度になっていなければならないため、ここでは横軸の $\langle i \rangle$ が μ と n の単位を間違えて記録していたとする。すると

$$\begin{aligned}e \pm \Delta e &= (1.2 \pm 0.1) * 10^{-19} C \\e(\text{文献値}) &= 1.6 * 10^{-19} C\end{aligned}$$

となる。ここでも実験値の不確かさを含めた幅から文献値が $3 * 10^{-20} C$ 程度離れている。この値の文献値からの相対誤差は約 18 %である。この値もボルツマン定数の測定結果と同様の理由から妥当な値だと判断する。

最後に、ここで考えたのは実験結果の間違いを正に訂正できなかったため、そのデータ記録での人的ミスのうち最も近いと考えられるものを示し、そう仮定して訂正した時の誤差評価をしたものであることをここに示したい。それが多少強引な手段となってしまったことを自覚し、ここに追記として示した。