

本章将重点介绍傅里叶级数展开方法和傅里叶变换方法。这种方法可以理解为将时域空间的信号映射到频域空间,进而观察在时域空间无法观察到的信号的频率特性,例如,信号含有哪些频率分量,不同的频率分量对时域表现的影响等。通过这两种方法的介绍,将引入信号的频谱、带宽等重要概念以及通过变换方法分析和解决实际问题的思想。

3.1 引言

本章将从傅里叶级数展开开始变换域分析方法及应用相关问题的讨论。尽管讨论是从傅里叶级数开始的,但随着讨论的深入,可以将傅里叶级数看成是傅里叶变换的一种特殊表达形式,或者将傅里叶变换看成是傅里叶级数的一种扩展,这样便从概念和方法上实现了傅里叶级数到傅里叶变换的“无缝”连接。这一思想还应用于从傅里叶变换到拉普拉斯变换、从傅里叶变换到小波变换的过渡。

傅里叶分析方法(也可以理解为频域分析方法)的研究与应用至今已经历了一百余年,百余年来这一方法在电力工程,在通信和控制领域,在力学、光学、量子物理和各种线性系统分析等许多有关数学、物理和工程技术领域中得到了广泛的应用,从而成为信号分析与系统设计不可缺少的重要工具。

然而,傅里叶方法仍有其一定的局限性,并非对解决实际问题中的一切问题都那么有效。例如对非线性系统和非平稳信号等问题的分析就很显不足。也正因为如此,20 世纪 70 年代以来,人们对其他正交变换方法产生了浓厚的兴趣,如沃尔什变换(基于一种正交函数的变换),小波变换(一种在时空域都具有局部分析能力的变换)等。但是,傅里叶方法在上述众多领域不仅始终有着极其广泛的应用,而且也是研究其他变换方法的基础,应该牢靠掌握。

3.2 傅里叶级数

在 1.1.6 节中已经详尽讨论了正交函数、正交函数集及完备正交函数集的相关概念,并得到结论:在均方误差为零的情况下,任何与完备正交函数集有相同定义域的函数都可以分解为该函数集中正交函数的代数和。三角函数集是一个完备的正交函数集,傅里叶级数就是利用三角函数集对任意周期函数的分解。

在时间域观察周期信号,只能看到周期信号的周期 T ,进而可以计算其频率 $f=1/T$,除此之外再也无法看出其含有的其他频率分量。在实际应用中,常需要了解周期信号含有的所有频率分量,进而得到其频谱和带宽。为了实现这一目的,对周期信号做傅里叶级数展开。



3.2.1 傅里叶级数的三种形式

傅里叶级数展开包括基本形式、余弦形式(正弦形式)和指数形式三种,下面对其分别进行介绍。

1. 傅里叶级数的基本形式

设 $f(t)$ 为任意周期函数,其周期为 T ,角频率为 $\omega_1=2\pi/T$ 。若 $f(t)$ 满足下列狄里赫利条件:

- (1) $f(t)$ 在一个周期内连续或在一个周期内只有有限个第一类间断点;
- (2) $f(t)$ 在一个周期内只有有限个极值点(极大值点或极小值点);

则 $f(t)$ 可以展开成如下基本形式的傅里叶级数:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos \omega_1 t + a_2 \cos 2\omega_1 t + \cdots + b_1 \sin \omega_1 t + b_2 \sin 2\omega_1 t + \cdots \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) \end{aligned} \quad (3-1)$$

式中, ω_1 为原函数 $f(t)$ 的角频率,不同周期的周期函数具有不同的角频率; a_0 、 a_k 和 b_k 为傅里叶系数,各参数都有相应的物理意义。

在工程技术上所遇到的周期函数一般都满足狄里赫利条件,所以在本书以后的描述中若无特别需要不再注明此条件。

式(3-1)中的傅里叶系数,可根据式(1-62)求得,也可根据三角函数集的正交性很方便得求知。

首先求傅里叶系数 a_0 。直接对式(3-1)等号两端从 $-T/2$ 到 $T/2$ 逐项积分,得:

$$\int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt = \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2} dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) dt = \frac{Ta_0}{2}$$

即有:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt \quad (3-2)$$

式(3-2)表明, $\frac{a_0}{2}$ 是 $f(t)$ 在积分周期内的平均值,所以称 $\frac{a_0}{2}$ 为周期信号 $f(t)$ 的直流分量。

其次求傅里叶系数 a_k, b_k 。用 $\cos n\omega_1 t$ 乘以式(3-1)等式两端,并从 $-T/2$ 到 $T/2$ 积分,根据三角函数的正交性,可得:

$$\begin{aligned} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos n\omega_1 t dt &= \int_{-T/2}^{T/2} \frac{a_0}{2} \cos n\omega_1 t dt + \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega_1 t + b_k \sin k\omega_1 t) \cos n\omega_1 t dt \\ &= \begin{cases} Ta_k/2, & n = k \\ 0, & n \neq k \end{cases} \end{aligned}$$

即:

$$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_1 t dt \quad k = 1, 2, \cdots \quad (3-3)$$

同理,用 $\sin n\omega_1 t$ 乘以式(3-1)等式两端,并取一个周期的定积分得:

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_1 t dt \quad k=1,2,\dots \quad (3-4)$$

2. 傅里叶级数的余弦形式

若将式(3-1)中的同频率项加以合并,则式(3-1)可以写成:

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k) \quad (3-5)$$

或者

$$f(t) = \frac{d_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \sin(k\omega_1 t + \theta_k) \quad (3-6)$$

式(3-5)称为傅里叶级数的余弦形式,式(3-6)称为傅里叶级数的正弦形式。比较式(3-1)和式(3-5)、式(3-6),可构造如图 3-1 所示的关系三角形,并从中可以得出傅里叶级数中各系数间的关系。

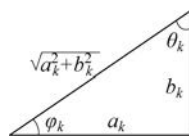


图 3-1 傅里叶系数的关系三角形

$$\begin{cases} a_0 = A_0 = d_0 \\ A_k = d_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ a_k = A_k \cos \varphi_k = d_k \sin \theta_k \\ b_k = -A_k \sin \varphi_k = d_k \cos \theta_k \\ \theta_k = \arctan \frac{a_k}{b_k} \\ \varphi_k = -\arctan \frac{b_k}{a_k} \end{cases} \quad (3-7)$$

式(3-1)和式(3-5)表明,任何周期信号只要满足狄里赫利条件就可以分解成直流分量、正弦或余弦分量的代数和。这些正弦、余弦分量的角频率必定是原函数 $f(t)$ 角频率的整数倍。通常把角频率为 ω_1 的分量称为基波;角频率为 $k\omega_1$ 的分量称为谐波,即角频率为 $2\omega_1, 3\omega_1, \dots$ 的分量分别称为二次谐波,三次谐波等; $\varphi_k (\theta_k)$ 称为第 k 次谐波的初始相位; A_k, d_k 称为第 k 次谐波的幅度,而 a_k, b_k 称为第 k 次谐波的余弦分量幅度和正弦分量幅度。

可以看出,通过对周期信号做傅里叶级数展开,可以得到该周期信号所含有谐波分量,而这些频率分量在没有展开之前的时域信号中是直接看不出来的,这就是傅里叶级数展开所带来的好处。同时,傅里叶级数展开也可以提供信号逼近、近似处理以及波形合成等新方法。

3. 傅里叶级数的指数形式

周期信号展开为傅里叶级数的几种形式如表 3-1 所示。由前面正交分解部分的讲解,知道指数函数集 $\{e^{jk\omega_1 t} | k=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 是一个完备正交函数集,满足狄里赫利条件的周期函数都可以分解为每个正交函数的代数和,这样就可以很容易地得到指数形式傅里叶级数展开式如下:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t} \quad (3-8)$$

其中, F_k 称为傅里叶系数。由正交分解过程可知:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (3-9)$$

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) (\cos k\omega_1 t - j \sin k\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos k\omega_1 t dt - j \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin k\omega_1 t dt \right) \\
 &= \frac{1}{2} (a_k - j b_k)
 \end{aligned} \quad (3-10)$$

从式(3-7)和式(3-10)可以推知几种傅里叶系数之间的关系如下:

$$\begin{aligned}
 F_0 &= \frac{a_0}{2} = \frac{A_0}{2} = \frac{d_0}{2}; F_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k) = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k} \\
 F_{-k} &= \frac{1}{2} (a_k + j b_k); |F_k| = \frac{1}{2} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{1}{2} A_k; \varphi_k = -\varphi_{-k}
 \end{aligned} \quad (3-11)$$

表 3-1 周期信号展开为傅里叶级数的几种形式

形式	展 开 式	傅里叶系数	系数的性质	系数间的关系
指数形式	$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F_k e^{jk\omega_1 t}$	$F_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$ $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$	$F_k = F_k e^{j\varphi_k}$ $ F_k = F_{-k} $ $\varphi_k = -\varphi_{-k}$	$F_k = \frac{1}{2} (a_k - j b_k)$ $= \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}$
三角函数形式	基本形式 $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\omega_1 t) + b_k \sin(k\omega_1 t))$	$a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt$ $b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin(k\omega_1 t) dt$ $\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$ $k = 0, 1, 2, \dots$	$a_k = a_{-k}$ $b_k = -b_{-k}$ $\varphi_k = -\varphi_{-k}$	$a_k = A_k \cos\varphi_k$ $= F_k + F_{-k}$ $b_k = -A_k \sin\varphi_k$ $= j(F_k - F_{-k})$
	余弦形式 $f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_1 t + \varphi_k)$	$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ $\varphi_k = -\arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right)$	$A_k = A_{-k}$ $\varphi_k = -\varphi_{-k}$	$A_k = 2 F_k $ $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$

例 3.1 求图 3-2 所示信号的傅里叶级数展开式。

解 根据 a_0 的计算公式, 有 $a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E dt = E$ 。这表明信号 $f(t)$ 的直流分量为 $a_0/2 = E/2$ 。

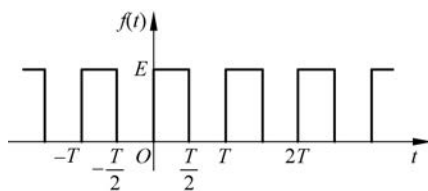


图 3-2 方波信号

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos k\omega_1 t dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \cos k\omega_1 t dt = \frac{2E}{T} \cdot \frac{\sin k\omega_1 t}{k\omega_1} \Big|_0^{T/2}$$

考虑到上式中 $\omega_1 = 2\pi/T$, 则 $a_k = 0$ 。同样可得:

$$\begin{aligned}
 b_k &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(k\omega_1 t) dt = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} E \sin(k\omega_1 t) dt \\
 &= \frac{2E}{T} \frac{-\cos(k\omega_1 t)}{k\omega_1} \Big|_0^{T/2} = \frac{E}{k\pi} [1 - \cos(k\pi)]
 \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \frac{2E}{k\pi}, & k=1,3,5,\dots \\ 0, & k=2,4,6,\dots \end{cases}$$

代入式(3-1),即得 $f(t)$ 的傅里叶级数展开式为:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{k\pi} \sin(k\omega_1 t) \\ &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \dots \right] \end{aligned} \quad (3-12)$$

据式(3-7),有:

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0 = E \\ A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \frac{2E}{k\pi}, \quad k=1,3,5,\dots \\ \varphi_k &= -\arctan \frac{b_k}{a_k} = -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

则 $f(t)$ 可按式(3-3)展开为:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{E}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2E}{k\pi} \cos\left(k\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[\cos\left(\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\omega_1 t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right] \end{aligned}$$

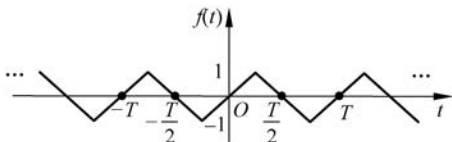
据式(3-10),有:

$$F_k = \frac{1}{2}(a_k - jb_k) = \begin{cases} -j\frac{E}{k\pi}, & k=1,3,5,\dots \\ 0, & k=2,4,6,\dots \end{cases}$$

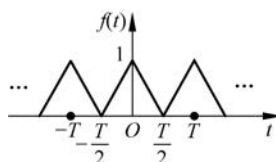
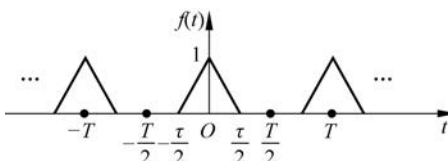
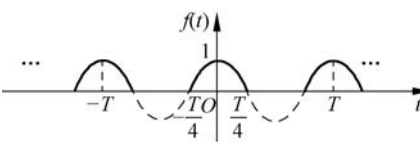
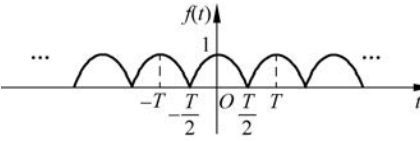
则其指数形式的傅里叶级数展开式为 $f(t) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k=\text{odd}}}^{+\infty} \frac{-jE}{k\pi} e^{jk\omega_1 t}$ 。

由此例不难看出:这样的方波信号包含直流和奇次谐波分量,不含偶次谐波分量。这是一般规律。如表 3-2 给出了常用周期信号的傅里叶级数。

表 3-2 常用周期信号的傅里叶级数

名称	函数形式与信号波形	傅里叶级数系数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
三角波	$f(t) = \begin{cases} -\frac{4}{T}(t-nT) - 2, & nT - \frac{T}{2} < t \leq nT - \frac{T}{4} \\ \frac{4}{T}(t-nT), & nT - \frac{T}{4} < t \leq nT + \frac{T}{4} \\ -\frac{4}{T}(t-nT) + 2, & nT + \frac{T}{4} < t \leq nT + \frac{T}{2} \end{cases}$ 	$\begin{aligned} a_n &= 0 \\ b_n &= \frac{8}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \\ &= \frac{4}{n\pi} \text{Sa}\left(\frac{n\pi}{2}\right) \end{aligned}$

续表

名称	函数形式与信号波形	傅里叶级数系数 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
三角波	$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{T}(t-nT)+1, nT-\frac{T}{2} < t \leq nT \\ -\frac{2}{T}(t-nT)+1, nT < t \leq nT+\frac{T}{2} \end{cases}$ 	$a_0 = 1$ $a_n = \frac{4}{(n\pi)^2} \sin^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $b_n = 0$
三角脉冲	$f(t) = \begin{cases} \frac{2}{\tau}(t-nT)+1, nT-\frac{\tau}{2} < t \leq nT \\ -\frac{2}{\tau}(t-nT)+1, nT < t \leq nT+\frac{\tau}{2} \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 	$\frac{a_0}{2} = \frac{\tau}{2T}$ $a_n = \frac{4T}{\tau} \cdot \frac{1}{(n\pi)^2} \sin^2\left(\frac{n\omega_1\tau}{4}\right)$ $= \frac{T}{4\tau} \text{Sa}^2\left(\frac{n\omega_1\tau}{4}\right)$ $b_n = 0$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
半波余弦信号	$f(t) = \begin{cases} \cos(\omega_1 t), nT-\frac{1}{4}T < t < nT+\frac{1}{4}T \\ 0, \text{其他} \end{cases}$ 	$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\pi}$ $a_n = \frac{2}{(1-n^2)\pi} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ $b_n = 0$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
全波余弦信号	$f(t) = \cos(\omega_1 t) $ 	$\frac{a_0}{2} = \frac{2}{\pi}$ $a_n = (-1)^{n+1} \frac{4}{(n^2-1)\pi}$ $b_n = 0$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$



3.2.2 波形合成和误差分析的 MATLAB 实现

依据式(3-12),图 3-3 给出基于 MATLAB 画出的一个周期的方波信号 $f(t)$ 的组成情况。其程序如下:

```
T=20;
w=2*pi/T;
t=0:0.01:20;
f=1/2+2/pi*(sin(w*t));
f1=1/2+2/pi*(sin(w*t)+1/3*sin(3*w*t));
```

```

f2 = 1/2 + 2/pi * (sin(w * t) + 1/3 * sin(3 * w * t) + 1/5 * sin(5 * w * t));
f3 = 1/2 + 2/pi * (sin(w * t) + 1/3 * sin(3 * w * t) + 1/5 * sin(5 * w * t) + 1/7 * sin(7 * w * t));
figure(1);
plot(f);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
figure(2);
plot(f1);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
figure(3);
plot(f2);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');
figure(4);
plot(f3);
xlabel('t');
ylabel('f(t)');

```

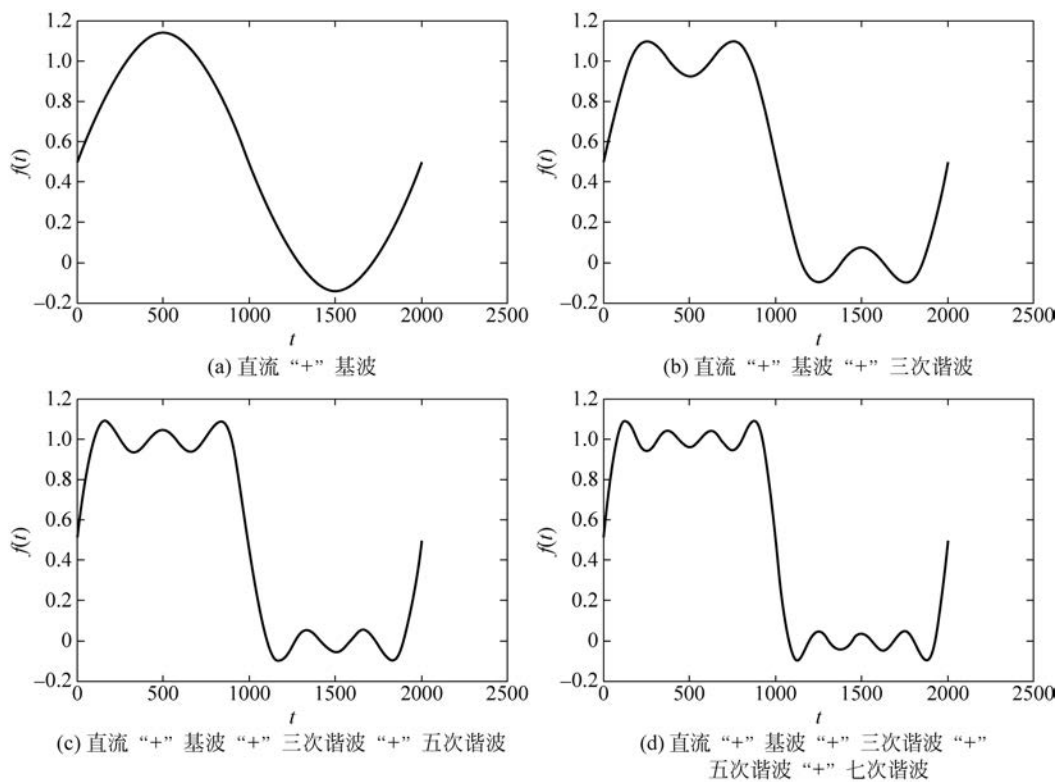


图 3-3 不同谐波组成的方波信号

由图可见,当它包含的谐波分量越多时,波形越接近于原来的方波信号,其均方误差越小。还可看出,频率较低的谐波,其振幅较大,它们组成方波的主体,而频率较高的高次谐波振幅较小,它们主要影响波形的细节,波形中所包含的高次谐波越多,波形的边缘越陡峭。

波形合成就是用有限项正交函数的代数和逼近这个波形。这时必然会带来误差,其均

方误差公式如下,其中 $k_r = \int_{t_1}^{t_2} g_r^2(t) dt$ 。

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^n c_i g_i(t)$$

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{t_2 - t_1} \left[\int_{t_1}^{t_2} f^2(t) dt - \sum_{i=1}^n c_i^2 k_i \right] \quad (3-13)$$

这里以例 3.1 的结果为依据,计算用有限项级数逼近 $f(t)$ 引起的均方误差。这里取 $E=1, t_2=T, t_1=0, K_0=T, K_j=T/2 (j \neq 0)$ 。

根据均方误差的计算公式,可得其均方误差为:

$$\begin{aligned} \overline{\epsilon^2} &= \frac{1}{T} \left[\int_0^T f^2(t) dt - (a_0)^2 T - \sum_{j=1}^n b_j^2 \frac{T}{2} \right] \\ &= \frac{1}{T} \left[\int_0^{T/2} dt - \left(\frac{1}{2} \right)^2 T - \frac{T}{2} \sum_{j=1}^n b_j^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_j^2 \end{aligned}$$

当只有直流和基波时, $\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 = 0.047$

当取直流、基波和三次谐波时, $\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 = 0.0246$

当取直流、一、三、五次谐波时, $\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 = 0.0165$

当取直流、一、三、五、七次谐波时,

$$\overline{\epsilon^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{7\pi} \right)^2 = 0.01236$$

以上结果表明,选取的项数越多,合成波形和理想波形之间的均方误差就越小。可以依据给定的误差要求,选取适当的谐波数,实现不同周期信号的合成。

例 3.2 利用正弦波合成一个幅度为 5V, 频率 10kHz, 均方误差不超过 0.42 的方波信号。

通过 MATLAB 分析均方误差 $\overline{\epsilon^2}$ 和项数 n 之间的关系,给出 $\overline{\epsilon^2}=0.1$ 时的项数及合成波形。

解 由式(3-12)可知方波信号的傅里叶展开式如下:

$$f(t) = \frac{E}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2E}{k\pi} \sin(k\omega_1 t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi} \left[\sin(\omega_1 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_1 t) + \frac{1}{5} \sin(5\omega_1 t) + \cdots \right]$$

依据上式及幅度为 5V、频率为 10kHz 的参数要求,容易选择具体的信号参数为 2.5V 的直流,频率分别为 10kHz、30kHz、50kHz,幅度分别为 3.18V、1.06V、0.64V 的三个谐波。

依据式(3-13)可以算出直流、一、三及五次谐波 4 个信号合成方波时的均方误差为:

$$\overline{\epsilon^2} = 5^2 \times \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5\pi} \right)^2 \right) = 0.4125$$

误差小于 0.42, 满足要求, 所以选择并产生这 4 个信号且保持同相位, 将这 4 个信号采用运算放大器叠加, 就可以得到一个幅度为 5V, 频率为 10kHz 的方波信号。具体波形相似于图 3-3(c)。

依据式(3-12)和式(3-13), 取 $E=5, T=20$, 可通过如下 MATLAB 程序得到均方误差 $\overline{\epsilon^2}$ 和 n 的关系曲线(见图 3-4)。


```

clear;
for i = 1:60
a(i) = cumpt(i);                                % 计算不同次谐波下的误差
end
set(gca, 'Fontname', 'Times New Roman', 'FontSize', 12); % 设置字体及大小
plot(a(i), 'k')                                  % 绘制图像
xlabel('n');
ylabel('均方误差');
function [s] = cumpt(n)
s = 0.25 * 25;
for i = 1:n
a = (2/((2 * i - 1) * 3.14)) * (2/((2 * i - 1) * 3.14)) * 0.5 * 25; % 计算谐波成分
s = s - a;                                       % 叠加每个谐波成分
end
end

```

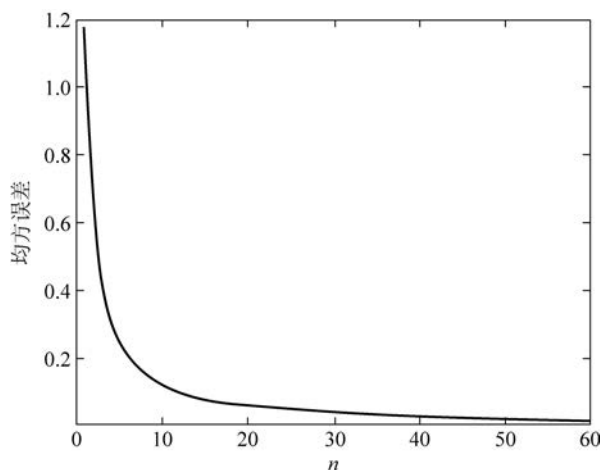


图 3-4 谐波项数与均方误差关系

通过 cumpt() 函数可知, 谐波项数等于 23 时误差小于 0.1, 此时编程计算合成的波形如图 3-5 所示。

```

T = 20;
w = 2 * pi / T;
t = 0:0.01:90;
f = sin(w * t) + sin(3 * w * t) / 3 + sin(5 * w * t) / 5 + sin(7 * w * t) / 7 + sin(9 * w * t) / 9 +
sin(11 * w * t) / 11 + sin(13 * w * t) / 13 + sin(15 * w * t) / 15 + sin(17 * w * t) / 17 + sin(19 * w *
t) / 19 + sin(21 * w * t) / 21 + sin(23 * w * t) / 23;
f = 2.5 + f * 2 / pi;
plot(t, f);
xlabel('t');
ylabel('合成波形 f(t)');

```

由此可见, 根据傅里叶级数展开式, 参考上面的方法, 还可以用正弦波方便地合成锯齿波、三角波等。原则上看, 采用正弦波可合成任意周期信号的波形。通过 MATLAB 编程可以自己验证。

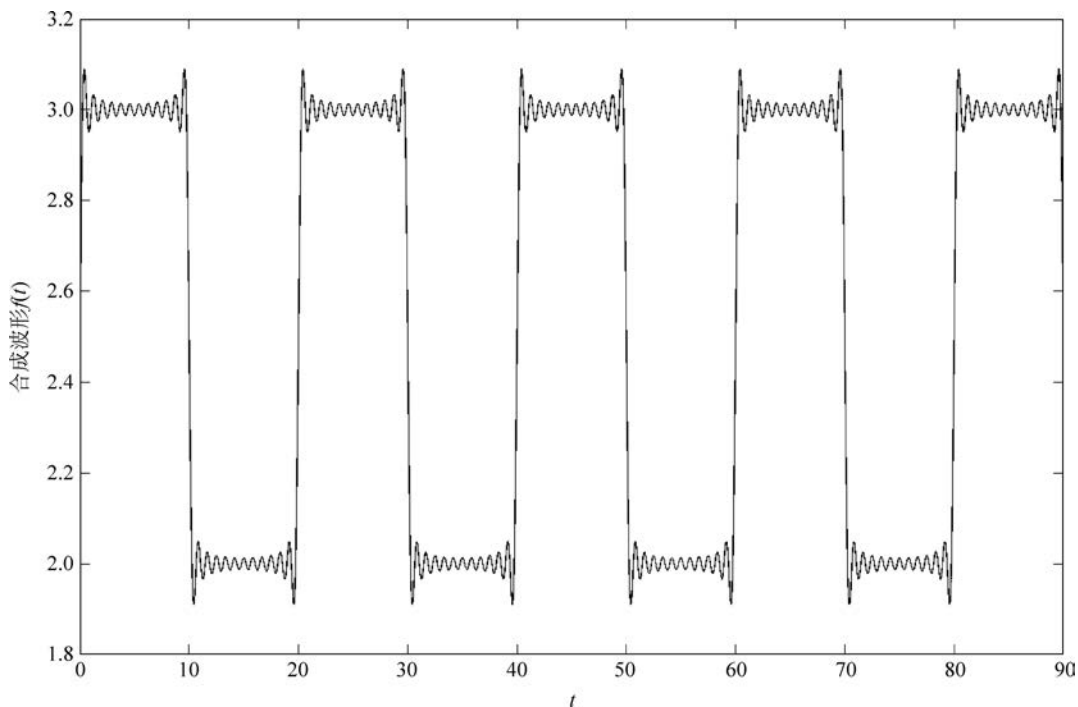


图 3-5 谐波项数等于 23 且均方误差小于 0.1 时合成波形



3.2.3 周期信号的频谱

傅里叶级数揭示了周期信号是由一系列不同振幅和不同相位的谐波分量叠加而成。通过傅里叶级数,可以把一个周期信号分解为一组具有谐波关系的复指数信号的线性组合。这表明,只要知道了一个谐波分量的角频率和复振幅,这个分量也就完全确定了。换句话说,如果知道了一个周期信号 $f(t)$ 所包含的全部谐波分量的频率和复振幅,这个周期信号 $f(t)$ 也就完全确定了。因此,只要将一个周期信号 $f(t)$ 的所有谐波分量的复振幅随频率的分布表示出来,就等于表示了信号本身。称周期信号的所有谐波分量的复振幅随频率的分布为周期信号的频谱。将复振幅随角频率的分布绘制成的图形,称为频谱图。由于复振幅包含了谐波分量的幅度和相位,除少数情况外,将其绘制在一幅图中一般比较困难,因此,在绘制频谱图时,常常分别绘制出幅度与频率的关系和相位与频率的关系,前者称为幅度频谱,后者称为相位频谱。

具体来说,就是将式(3-5)所示的余弦形式和式(3-8)所示的指数形式的傅里叶级数的频率 $k\omega_1$ 及其对应振幅 A_k ($|F_k|$) 以及对应的相位 φ_k 画在两张图上,分别称为幅度谱和相位谱。基于余弦形式傅里叶级数画出的称为单边谱,基于指数形式傅里叶级数画出的称为双边谱。单边谱和双边谱可以通过式(3-14)进行转换。

$$F_k = |F_k| e^{j\varphi_k} = \frac{1}{2} A_k e^{j\varphi_k}, \quad |F_k| = |F_{-k}|, \quad \varphi_{-k} = -\varphi_k \quad (3-14)$$

例 3.3 已知周期信号 $f(t) = 1 + 3\cos(\pi t + 10^\circ) + 2\cos(2\pi t + 20^\circ) + 0.4\cos(3\pi t + 45^\circ) + 0.8\cos(6\pi t + 30^\circ)$, 试绘出该信号的单边及双边频谱图。

解 依据式(3-5)中余弦形式傅里叶级数展开式,容易看出该信号的谐波分量、振幅及相位的对应关系,据此画出的单边谱如图 3-6 所示。依据式(3-8)或者式(3-14)中系数转换

关系及奇偶性,可以得到双边谱如图 3-7 所示。

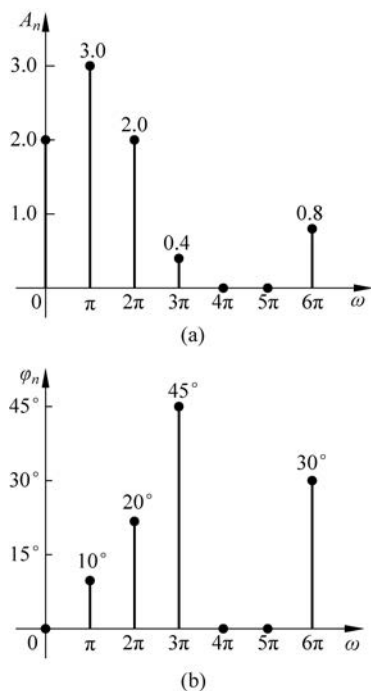


图 3-6 单边振幅和相位谱

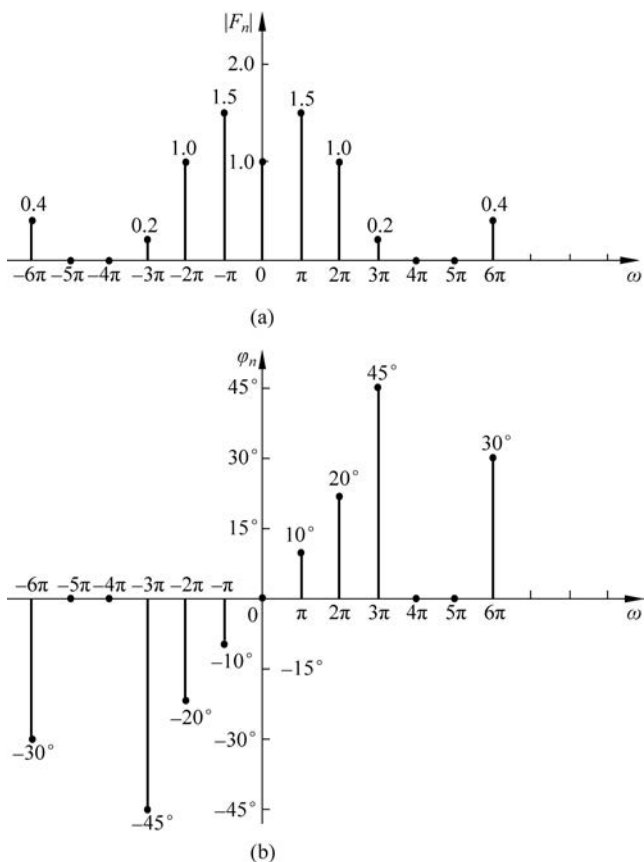


图 3-7 双边振幅和相位谱

例 3.4 如图 3-8(a)所示, $f(t)$ 是一个周期矩形脉冲信号, 其幅度为 1, 脉冲宽度为 τ , 重复周期为 T , 角频率为 $\omega_1 = 2\pi/T$, 分析其频谱。

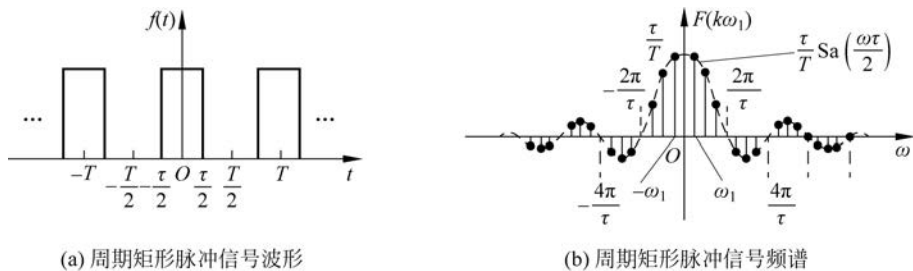


图 3-8 周期矩形脉冲信号

解 可以看出这是一个偶函数, 所以容易计算得到 $b_k = 0$, 也容易求出 $a_0 = \frac{2\tau}{T}$ 。

$$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} f(t) \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{4}{T} \int_0^{\tau/2} \cos(k\omega_1 t) dt = \frac{4}{T} \cdot \frac{\sin(k\omega_1 t)}{k\omega_1} \Big|_0^{\tau/2}$$

$$= \frac{4 \sin\left(k\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{k\omega_1 T} = \frac{2\tau}{T} \frac{\sin\left(k\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{k\omega_1 \frac{\tau}{2}}$$

则周期矩形脉冲信号三角形式的傅里叶级数为:

$$f(t) = \frac{\tau}{T} + \frac{2\tau}{T} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin\left(k\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{k\omega_1 \frac{\tau}{2}} \cos(k\omega_1 t)$$

根据式(3-11),可直接写出 $f(t)$ 的傅里叶级数的指数形式:

$$f(t) = \frac{\tau}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\sin\left(k\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{k\omega_1 \frac{\tau}{2}} e^{jk\omega_1 t}$$

也可以直接计算:

$$\begin{aligned} F_k &= \frac{a_k}{2} = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jk\omega_1 t} dt \\ &= \frac{\tau}{T} \frac{\sin\left(k\omega_1 \frac{\tau}{2}\right)}{k\omega_1 \frac{\tau}{2}} \end{aligned} \quad (3-15)$$

观察上式,可以看出周期矩形脉冲信号 $f(t)$ 的傅里叶展开系数为 $\frac{\sin x}{x}$ 形式的函数,称为抽样函数,记为:

$$\text{Sa}(x) = \frac{\sin x}{x}$$

这个函数应用很广,并具有如下重要特性:

- (1) $\text{Sa}(x)$ 是偶函数;
- (2) $\text{Sa}(x)$ 是以 $\frac{1}{x}$ 为振幅的正弦函数,因而对于 x 的正负两半轴都为衰减正弦振荡;
- (3) 在 $x=n\pi$ 处 ($n=\pm 1, \pm 2, \dots$), $\sin(x)=0$, 即 $\text{Sa}(x)=0$; 而在 $x=0$ 处有 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$;
- (4) $\int_0^{\infty} \text{Sa}(x) dx = \frac{\pi}{2}$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \text{Sa}(x) dx = \pi$ 。

由此得出的 $\text{Sa}(x)$ 函数的波形如图 3-9 所示。

应用抽样函数的表示,可以将式(3-15)重写为:

$$F_k = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_1 \tau}{2}\right)$$

依据该式可画出周期矩形脉冲的频谱图如图 3-8(b)。分析图 3-8(b),可以得到:

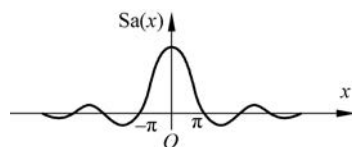


图 3-9 $\text{Sa}(x)$ 函数的波形

(1) 周期矩形脉冲信号的频谱是离散的。即 ω 只能取离散值 $0, \pm\omega_1, \pm2\omega_1, \dots$ 。

相邻谱线之间的间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T$, 且脉冲重复周期 T 愈大, 谱线之间的间隔愈小, 谱线愈稠密, 当 T 趋于无穷时, 谱线将会粘连变为连续谱, 这时, 周期信号将退化为非周期信号。

周期矩形脉冲信号的频谱具有谐波性, 即 ω 只能取 ω_1 的整数倍 $k\omega_1$ 。周期矩形脉冲信号的频谱具有收敛性, 即当 $k \rightarrow \infty$ 时, $F_k \rightarrow 0$ 。离散性、谐波性及收敛性是周期信号频谱的三个重要特点。

(2) 频谱图过零点的坐标可令 $\sin \frac{k\omega_1\tau}{2} = 0$, 即 $\frac{k\omega_1\tau}{2} = \pm n\pi$ 求得为:

$$k\omega_1 = \pm \frac{2n\pi}{\tau}, \quad n = 1, 2, \dots$$

并可由此确定出第一个零点之内谱线的根数 M :

$$M = \frac{\frac{2\pi}{\tau}}{\omega_1} = \frac{\frac{2\pi}{\tau}}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{T}{\tau}$$

可见, 第一个零点之间谱线的根数与信号脉宽 τ 成反比, 与信号周期 T 成正比。

(3) 尽管周期矩形脉冲信号包含无穷条谱线, 但其主要能量却集中在第一个零点 $\frac{2\pi}{\tau}$ 之内。实际上, 在允许一定失真的条件下, 那些次数较高的频率分量可忽略不计, 因此一般情况下, 将 ω 在 $(0 \sim \frac{2\pi}{\tau})$ 这段频率范围称为周期矩形脉冲信号的频带宽度, 记为:

$$B_\omega = \frac{2\pi}{\tau} \quad \text{或} \quad B_f = \frac{1}{\tau} \quad (3-16)$$

这是一个非常重要的结果: 脉冲信号的频带宽度与脉冲信号的时间宽度 τ 成反比关系, 脉冲持续时间愈长, 其频带愈窄; 反之, 信号脉冲愈窄, 其频带愈宽。

(4) 直流分量、基波及各次谐波分量的大小正比于脉冲幅度和脉冲宽度 τ , 反比于周期 T , 且各谱线的幅度按 $\text{Sa}(k\omega_1\tau/2)$ 包络线的规律而变化。亦可将 F_k 看成是包络线的离散抽样。

3.2.4 周期信号的功率

周期信号的能量是无限的, 而其平均功率是有界的, 因而是功率信号。为了方便, 往往将周期信号在 1Ω 电阻上消耗的平均功率定义为周期信号的功率。显然, 对于周期信号 $f(t)$, 无论它是电压信号还是电流信号, 其平均功率均为:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f^2(t) dt$$

将 $f(t)$ 的级数展开 $f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t}$ 代入上式可得:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t} \right|^2 dt$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \int_{-T/2}^{T/2} |e^{j(k\omega_1 t + \varphi_k)}|^2 dt \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |F_k|^2 \\
 &= |F_0|^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} |F_k|^2 = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2
 \end{aligned} \quad (3-17)$$

由式(3-17)看出,周期信号的功率就是其各个谐波分量功率之和。这说明傅里叶级数展开没有损失原信号的功率,也可以间接说明三角函数集是一个完备集。一般情况下,频谱分析仪看到的周期信号的功率谱就是式(3-17)的 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_k^2$ 。

3.2.5 函数的对称性与傅里叶系数的关系

在傅里叶系数的计算中,利用原函数波形的对称性不仅有利于简化计算,而且可以直接判断周期信号含有哪些频率分量。

1. 偶函数

若 $f(t)$ 是时间 t 的偶函数, $f(t) = f(-t)$, 则其波形对称于纵坐标轴, 如图 3-10 所示。

当 $f(t)$ 是偶函数时, 式(3-3)中被积函数 $f(t) \cos k\omega_1 t$ 是 t 的偶函数, 在对称区间 $(-T/2, T/2)$ 的积分等于其半区间 $(0, \frac{T}{2})$ 的二倍; 式(3-4)中的被积函数 $f(t) \sin k\omega_1 t$ 是 t 的奇函数, 在对称区间的积分为零, 即

$$\left. \begin{aligned} a_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \cos k\omega_1 t dt, \quad k=0, 1, 2, \dots \\ b_k &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3-18)$$

这表明偶函数的傅里叶级数不含正弦分量, 只含有直流和余弦分量。

2. 奇函数

若 $f(t)$ 是时间 t 的奇函数, $f(t) = -f(-t)$, 则其波形对称于坐标原点, 如图 3-11 所示。

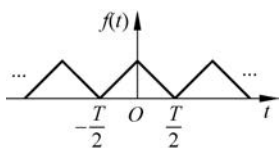


图 3-10 偶函数的例子

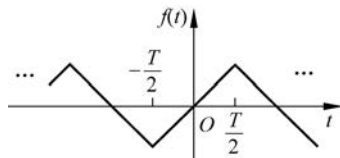


图 3-11 奇函数示例

当 $f(t)$ 是奇函数时, 式(3-3)中被积函数 $f(t) \cos k\omega_1 t$ 是 t 的奇函数, 式(3-4)中被积函数 $f(t) \sin k\omega_1 t$ 是 t 的偶函数。在这种情况下, 有:

$$\left\{ \begin{aligned} a_k &= 0 \\ b_k &= \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(t) \sin k\omega_1 t dt, \quad k=0, 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (3-19)$$

这表明奇函数的傅里叶级数不含直流和余弦分量, 而只含有正弦分量。

3. 半波镜像对称函数

若 $f(t)$ 是一个半波镜像对称函数, 则将 $f(t)$ 的前半周期波形移动 $\frac{T}{2}$ 后与后半周期波形关于横轴镜像对称, 满足:

$$f(t) = -f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (3-20)$$

半波镜像对称函数的傅里叶级数展开式中不含偶次谐波分量, 有:

$$a_0 = a_2 = a_4 = \cdots = b_2 = b_4 = \cdots = 0$$

换句话说, 半波镜像对称函数的傅里叶展开式中只含有奇次谐波分量, 故将其称为奇谐函数, 如图 3-12 所示。

4. 半波对称函数

若 $f(t)$ 是一个半波对称函数, 则将 $f(t)$ 的前半周期波形移动 $\frac{T}{2}$ 后与后半周期波形完全重合, 满足:

$$f(t) = f\left(t \pm \frac{T}{2}\right) \quad (3-21)$$

半波对称函数的傅里叶级数展开式中不含奇次谐波分量, 有:

$$a_1 = a_3 = \cdots = b_1 = b_3 = \cdots = 0$$

换句话说, 半波对称函数的傅里叶展开式中只含有偶次谐波分量, 故也将其称为偶谐函数, 如图 3-13 所示。

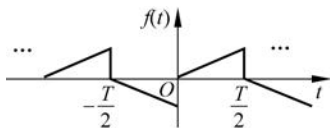


图 3-12 奇谐函数示例

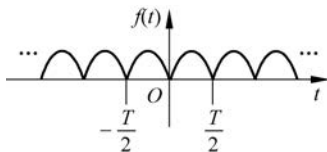


图 3-13 偶谐函数示例

5. 关于对称性有关问题的讨论

(1) 实际上, 一个函数是否为偶函数(或奇函数)不仅与周期函数 $f(t)$ 的波形有关, 而且与坐标原点选择有关。

图 3-14 中的三个波形图实际上是同一个信号在不同坐标原点下的结果。图 3-14(a) 是一个偶函数, $b_k = 0$, 若将其纵轴左移 $T/4$ 所得到的图 3-14(b) 是一个非奇非偶的函数, 则其 a_k, b_k 都不等于零; 若再将横轴上移 $1/2$ 形成的图 3-14(c) 为一个奇函数, 也是一个奇谐函数, 则 $a_k = 0, b_2 = b_4 = \cdots = 0$ 。

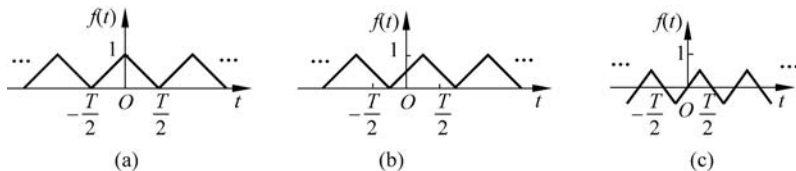


图 3-14 坐标原点对函数对称性的影响

可以看出,信号在时间轴上位置的移动会引起信号各谐波初始相位的变化,横轴的平移,会改变信号的直流分量,但是其所包含的频率成分并没有改变。

例 3.5 将图 3-15 所示的方波信号展开为傅里叶级数。

解 从图 3-15 可知 $f(t)$ 是一个奇函数,即 $f(t) = -f(-t)$, 故 $a_k = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ 。 $f(t)$ 又是一个奇谐函数,即 $f(t) = -f(t \pm T/2)$, 故又有 $b_k = 0, k = 2, 4, \dots$ 。所以,可以省略对 a_k 的计算,并用 $b_2 = b_4 = \dots = 0$ 检验计算结果。

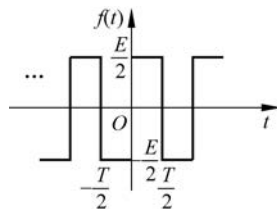


图 3-15 方波信号的波形

$$b_k = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^0 \left(-\frac{E}{2}\right) \sin k\omega_1 t dt + \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{E}{2}\right) \sin k\omega_1 t dt = \frac{E \cos k\omega_1 t}{k\omega_1 T} \Big|_{-\frac{T}{2}}^0 + \frac{-E \cos k\omega_1 t}{k\omega_1 T} \Big|_0^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{E}{k\pi} (1 - \cos k\pi) = \begin{cases} \frac{2E}{k\pi}, & k \text{ 为奇数} \\ 0, & k \text{ 为偶数} \end{cases}$$

最后得到信号的傅里叶级数展开为:

$$f(t) = \frac{2E}{\pi} \left(\sin \omega_1 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_1 t + \dots + \frac{1}{2k-1} \sin(2k-1)\omega_1 t + \dots \right)$$

比较例 3.5 中的图 3-15 和例 3.1 中的图 3-2, 容易看出两者之间只是差了直流分量, 其展开式也正好差了一个直流项, 其他完全相同。这说明在允许和必要的情况下, 可以移动函数的坐标使波形具有某种对称性, 以简化计算。

当 $E=2, T=0.02\text{s}$ 时, 该方波信号产生及频谱分析的 MATLAB 程序及结果(见图 3-16)如下:

```
clear;
N=5000;T=0.02;n=1:8*N;
D=2*pi/(N*T);
f=square(2*pi*n*T); %产生方波
F=T*fftshift(fft(f));
k=floor(-(8*N-1)/2:8*N/2);
subplot(2,1,1);
plot(n*T,f);
axis([0,10,-1.5,1.5]);
ylabel('f(t)');
line([-1,50],[0,0]);
line([0,0],[-6.1,4.1]);
subplot(2,1,2);
plot(k*D,abs(F));
ylabel('幅度');
axis([-1000,1000,-10,300]);
```

(2) 由于任何实函数 $f(t)$ 都可以分解为偶函数和奇函数两个部分之和, 即

$$f(t) = f_e(t) + f_o(t)$$

其中, $f_e(t)$ 是偶函数部分(简称偶部), $f_o(t)$ 是奇函数部分(简称奇部)。将其代入式(3-9), 利用奇偶函数傅里叶系数的特点可以得到:

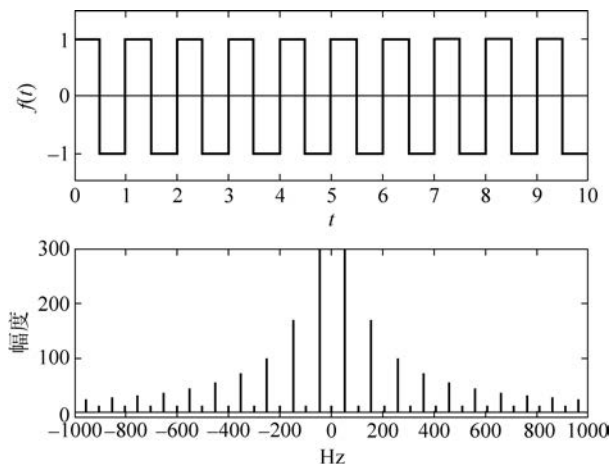


图 3-16 MATLAB 绘制方波信号及其频谱

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [f_e(t) + f_o(t)] e^{-jk\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_e(t) \cos k\omega_1 t dt - j \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_o(t) \sin k\omega_1 t dt \\
 &= \frac{1}{2} a_k - j \frac{1}{2} b_k
 \end{aligned}$$

式中, $\frac{1}{2}a_k$ 是偶部 $f_e(t)$ 的傅里叶级数的系数, $\frac{1}{2}b_k$ 是奇部 $f_o(t)$ 的傅里叶级数的系数。换句话说, 实信号的偶部对应着信号频谱的实部; 实信号的奇部对应着信号频谱的虚部。

3.3 傅里叶变换

前面讨论了周期信号的傅里叶级数, 研究了傅里叶级数的若干特性, 并得到了它的离散频谱。本节将从傅里叶级数出发, 导出傅里叶变换, 把上述傅里叶分析方法推广到分析非周期信号中去。

3.3.1 从傅里叶级数到傅里叶变换

傅里叶级数只能对周期信号进行频谱分析, 一个周期为 T 的周期信号可以看成是一个时间有限的非周期信号以周期 T 扩展而成。一个时间有限的非周期信号可以看成周期 T 为无穷大的周期信号。

换一个角度看, 周期信号的频谱是离散的, 相邻谱线之间的间隔为 $\omega_1 = 2\pi/T$, 随着 T 的增加 ω_1 减小, 谱线间的间隔减小, 谱线变密, 当周期 T 趋于无限大时, 周期信号就变成只含有一个波形的非周期信号, 这时谱线间隔 ω_1 将趋于无穷小, 离散谱就变成了连续谱, 但是其振幅也将变成无穷小。

下面就沿着这个思路, 从周期信号的傅里叶级数推导出非周期信号的傅里叶变换, 并说明频谱密度函数的含义。



为了方便,重写式(3-8)和式(3-9)如下:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t}$$

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$$

由上式可知,当周期 $T \rightarrow \infty$ 时, $F_k \rightarrow 0$, 但 F_k 和无穷小量 $1/T$ 之比在 $T \rightarrow \infty$ 时的极限可以是一个有限值,据此可定义一个频谱密度函数 $F(j\omega)$ 如式(3-22)所示。由于 $1/T$ 的量纲为频率,所以由此式定义的频谱密度函数 $F(j\omega)$ 的物理意义就是信号 $f(t)$ 单位频率的振幅,也就是其频谱密度。

$$F(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{F_k}{\frac{1}{T}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad (3-22)$$

相应的原函数可写成:

$$f(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{F_k}{\frac{1}{T}} e^{jk\omega_1 t} \frac{1}{T} \quad (3-23)$$

当周期 $T \rightarrow \infty$ 时,有:

$$\begin{cases} \omega_1 = 2\pi/T \rightarrow d\omega \\ k\omega_1 \rightarrow \omega \end{cases} \quad (3-24)$$

则式(3-22)可以写成:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \quad (3-25)$$

又由于 $\omega_1 = 2\pi/T$, 即 $1/T = \omega_1/2\pi$, 故当 $T \rightarrow \infty$ 时, $1/T \rightarrow d\omega/2\pi$, 同时式(3-23)中的求和变为积分,从而有:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (3-26)$$

式(3-25)称为傅里叶变换或傅里叶积分;式(3-26)称为傅里叶逆变换。为了书写方便,用符号 $FT[f(t)]$ 表示 $f(t)$ 的傅里叶变换,而 $f(t)$ 的傅里叶逆变换用符号 $FT^{-1}[F(j\omega)]$ 表示,即:

$$F(j\omega) = FT[f(t)] \quad (3-27)$$

$$f(t) = FT^{-1}[F(j\omega)] \quad (3-28)$$

习惯上,称式(3-25)和式(3-26)构成一个傅里叶变换对,并用如下符号表示:

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \quad (3-29)$$

需要说明的是,前面在推导傅里叶变换对关系时,侧重于理顺思路和突出物理概念,并未遵循数学上的严格步骤。数学证明指出,函数 $f(t)$ 的傅里叶变换存在的充分条件是在无限区间内 $f(t)$ 绝对可积,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty \quad (3-30)$$

但式(3-30)并非是 $f(t)$ 的傅里叶变换存在的必要条件。当引入广义函数的概念之后,许多不满足绝对可积条件的函数也能进行傅里叶变换,这给信号与系统分析带来了很大方便,也

使得采用傅里叶变换方法统一处理周期信号和非周期信号成为可能。

3.3.2 非周期信号的频谱

前面通过从傅里叶级数到傅里叶变换的讨论,引入了频谱密度函数,并特别说明了频谱密度—单位频率的振幅这一概念。下面着重研究频谱密度函数 $F(j\omega)$ 。

从式(3-25)可得:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin\omega t dt \\ &= R(\omega) + jI(\omega) \end{aligned} \quad (3-31)$$

$$\begin{aligned} R(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos(\omega t) dt \\ I(\omega) &= - \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin(\omega t) dt \end{aligned} \quad (3-32)$$

分别是 $F(j\omega)$ 的实部和虚部,并分别称为 $f(t)$ 的实部频谱和虚部频谱。

若对 $f(t)$ 做奇偶分解,即 $f(t) = f_e(t) + f_o(t)$,其中 $f_e(t)$ 为 $f(t)$ 的偶部, $f_o(t)$ 为 $f(t)$ 的奇部,将其代入式(3-31)可得:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (f_e(t) + f_o(t)) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t) e^{-j\omega t} dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_o(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t) \cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t) \sin\omega t dt + \int_{-\infty}^{+\infty} f_o(t) \cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_o(t) \sin\omega t dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_e(t) \cos\omega t dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} f_o(t) \sin\omega t dt \\ &= R(\omega) + jI(\omega) \end{aligned} \quad (3-33)$$

式(3-33)中,被积函数 $f_e(t) \sin\omega t$ 和 $f_o(t) \cos\omega t$ 是关于 t 的奇函数,奇函数在对称区间的积分为零。被积函数 $f_e(t) \cos\omega t$ 和 $f_o(t) \sin\omega t$ 是关于 t 的偶函数,偶函数在对称区间的积分不为零。所以得到:

$$R(\omega) = 2 \int_0^{\infty} f_e(t) \cos(\omega t) dt \quad (3-34)$$

$$I(\omega) = -2 \int_0^{\infty} f_o(t) \sin\omega t dt \quad (3-35)$$

式(3-34)表明了两个问题:一是 $R(\omega)$ 是关于 ω 的实偶函数;二是 $R(\omega)$ 可以由原函数 $f(t)$ 的偶部 $f_e(t)$ 的傅里叶变换得到。式(3-35)可以看出, $I(\omega)$ 是 ω 的实奇函数, $I(\omega)$ 可以由原函数 $f(t)$ 的奇部 $f_o(t)$ 的傅里叶变换得到。

由于在一般情况下 $F(j\omega)$ 是一个复函数,可以将其描述成极坐标形式(或者向量形式):

$$F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)} \quad (3-36)$$

式中 $|F(j\omega)|$ 是频谱函数 $F(j\omega)$ 的模,它表示非周期信号 $f(t)$ 各频率分量的振幅的相对大小,称为非周期信号的幅度频谱,简称幅度谱,而 $|F(j\omega)| \sim \omega$ 就是幅度谱曲线,习惯上说的频谱指的就是幅度谱。又由于有:

$$|F(j\omega)| = |F(-j\omega)| \quad (3-37)$$

故信号的幅度频谱是 ω 的偶函数,其频谱曲线具有关于纵轴的对称性。

式(3-36)中的 $\varphi(\omega)$ 是 $F(j\omega)$ 的幅角,它表示非周期信号 $f(t)$ 的各频率分量之间的相位关系,称为非周期信号的相位频谱,简称相位谱,而 $\varphi(\omega) \sim \omega$ 就是相位频谱曲线。又由于有:

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{I(\omega)}{R(\omega)} = -\varphi(-\omega) \quad (3-38)$$

即信号的相位频谱是 ω 的奇函数,其相位谱曲线具有关于原点的对称性。

归纳一下关于频谱密度函数的讨论得到:

- (1) $F(j\omega)$ 通常是一个复函数;
- (2) 幅度频谱 $|F(j\omega)|$ 是 ω 的偶函数,关于纵轴对称;
- (3) 相位频谱 $\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数,关于原点对称;
- (4) 实部频谱 $R(\omega)$ 是 ω 的偶函数,对应着原信号偶部的傅里叶变换;
- (5) 虚部频谱 $I(\omega)$ 是 ω 的奇函数,对应着原信号奇部的傅里叶变换;
- (6) 偶函数的傅里叶变换为实偶函数;
- (7) 奇函数的傅里叶变换为虚奇函数。



3.4 常用信号的傅里叶变换

下面介绍几种常用信号的傅里叶变换。其目的在于熟悉和掌握这些常用信号的时域和频域的特点;通过这些常用信号傅里叶变换的计算和分析,熟悉傅里叶变换基本积分方法的应用与运算技巧;了解各种信号相互表示的方法和技巧。

1. 矩形脉冲信号

宽度为 τ , 幅度为 1 的矩形脉冲,通常也形象地被称为门函数,并习惯用符号 $g_\tau(t)$ 表示。

$$g_\tau(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \frac{\tau}{2} \\ 0, & |t| > \frac{\tau}{2} \end{cases} \quad (3-39)$$

可以根据傅里叶变换的定义,直接对原函数求其傅里叶积分完成其傅里叶变换:

$$\begin{aligned} G_\tau(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g_\tau(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-j\omega t} dt = \frac{e^{-j\omega\tau/2} - e^{j\omega\tau/2}}{-j\omega} \\ &= \frac{2\sin \frac{\omega\tau}{2}}{\omega} = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

即

$$\text{FT}[g_\tau(t)] = \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-40)$$

式(3-40)表明,矩形脉冲信号的傅里叶变换是一个实函数。一般而言,当一个信号的频谱函数为实函数时,该信号的幅度谱和相位谱就可用一条曲线表示。就本例而言,当 $G_\tau(j\omega)$ 为正值时,其相位为 0; 当 $G_\tau(j\omega)$ 为负值时,其相位在正半轴为 π , 在负半轴为 $-\pi$ ($\varphi(\omega)$ 是 ω 的奇函数), 如图 3-17 所示。

2. 单位冲激信号 $\delta(t)$

应用单位冲激函数的抽样性质,可求得单位冲激信号的傅里叶变换为:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = 1 \quad (3-41)$$

这个结果表明,单位冲激信号的频谱遍布于整个频率范围且是均匀分布的,它包含了所有频率分量,且其幅度均为1,相位均为0。这很容易理解,根据信号持续时间与其频带宽度成反比这一关系,由于冲激信号只在瞬时作用,其持续时间趋于零,故其信号带宽无限大。常称具有这种特点的频谱为“白色谱”或“均匀谱”。 $\delta(t)$ 及其频谱如图3-18所示。

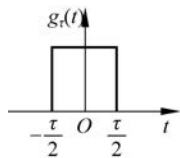


图 3-17 矩形脉冲信号及其频谱

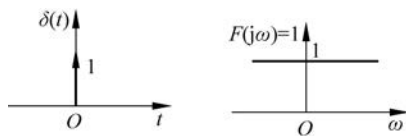


图 3-18 $\delta(t)$ 及其白色谱

由逆变换可得:

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (3-42)$$

这是冲激函数的又一个新的定义。根据广义函数关于 $\delta(t)$ 的定义,有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \varphi(t) dt = \varphi(0) \quad (\varphi(t) \text{ 为检验函数})$$

将函数 $\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega$ 进行这个试验,从而有:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{j\omega t} d\omega \right] \varphi(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(-j\omega) d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(j\omega) e^{j\omega \cdot 0} d\omega = \varphi(0) \end{aligned}$$

由此证明:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t)$$

这说明常数1的傅里叶逆变换是 $\delta(t)$, 即 $\delta(t) \leftrightarrow 1$ 。

3. 单位直流信号

单位直流信号 $f(t)=1, -\infty < t < \infty$, 不满足绝对可积条件,但其傅里叶变换却存在。依据傅里叶变换的定义,可得:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$

对式(3-42)所示的冲激函数定义做变量代换,可得:

$$\delta(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t} dt \quad (3-43)$$

由上述两式可以看出:

$$F(j\omega) = \text{FT}[1] = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-44)$$

这说明单位直流信号的傅里叶变换为强度为 2π 的冲激函数, 冲激函数 $\delta(\omega)$ 的傅里叶逆变换是 $\frac{1}{2\pi}$, 即 $\frac{1}{2\pi} \leftrightarrow \delta(\omega)$ 。

单位直流信号及其频谱如图 3-19 所示。除了上述的方法外, 单位直流信号也可以看成门函数取 $\tau \rightarrow \infty$ 的极限。若记该门函数的傅里叶变换为 $\tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 则由式(3-40)和式(3-44)可得如下的重要结论:

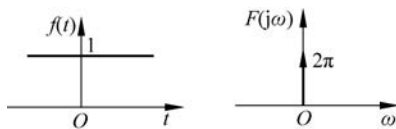


图 3-19 单位直流信号及其冲激谱

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) = 2\pi\delta(\omega) \quad (3-45)$$

$$\delta(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tau}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) \quad (3-46)$$

4. 符号函数 $\text{sgn}(t)$

符号函数(也称正负号函数)也不满足绝对可积条件, 但却存在傅里叶变换。符号函数的数学表达式如下:

$$\text{sgn}(t) = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 0, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (3-47)$$

符号函数可看作是两个单边指数函数在 $a \rightarrow 0$ 时的极限情况的和, 即

$$\text{sgn}(t) = \lim_{a \rightarrow 0} [e^{-at} u(t) - e^{at} u(-t)] \quad (3-48)$$

因此,
$$F(j\omega) = \text{FT}[\text{sgn}(t)] = \lim_{a \rightarrow 0} \left[\int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt - \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt \right]$$

$$= \lim_{a \rightarrow 0} \left[\frac{1}{a + j\omega} - \frac{1}{a - j\omega} \right] = \frac{2}{j\omega} = \left| \frac{2}{\omega} \right| e^{-j\frac{\pi}{2} \text{sgn}(\omega)}$$

即
$$|F(j\omega)| = 2/|\omega|, \quad \varphi(\omega) = \begin{cases} -\pi/2, & \omega > 0 \\ \pi/2, & \omega < 0 \end{cases}$$

$$\text{FT}[\text{sgn}(t)] = 2/j\omega \quad (3-49)$$

符号函数和阶跃函数具有重要关系, 容易得到如下转换表示:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \text{sgn}(t) \quad (3-50)$$

$$\text{sgn}(t) = u(t) - u(-t), \quad \text{sgn}(t) = 2u(t) - 1 \quad (3-51)$$

符号函数及其频谱如图 3-20 所示。

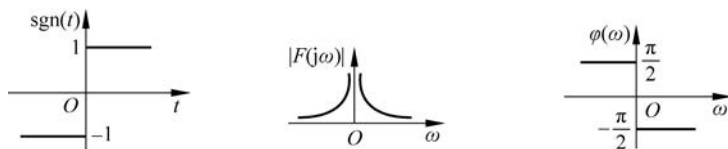


图 3-20 符号函数及其频谱

5. 单位阶跃信号 $u(t)$

单位阶跃信号 $u(t)$ 的定义为:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (3-52)$$

由式(3-50)容易得到:

$$\begin{aligned} U(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \text{FT} \left[\frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2} \text{FT}[\text{sgn}(t)] = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \end{aligned}$$

最后得到:

$$\text{FT}[u(t)] = \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} dt = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \quad (3-53)$$

单位阶跃信号及其频谱如图 3-21 所示。

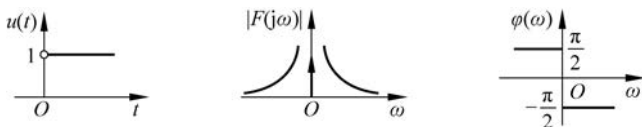


图 3-21 单位阶跃信号及其频谱

6. 高斯信号

高斯信号也依其波形的形状,形象地被称为钟形脉冲信号。

$$f(t) = E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2}, \quad |t| < \infty \quad (3-54)$$

根据傅里叶变换的定义:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-j\omega t} dt \quad (3-55)$$

注意到高斯函数是偶函数,对高斯函数的积分有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$$

则可改写式(3-55)为:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + j\omega t\right]} dt \\ &= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(\frac{t}{\tau}\right)^2 + 2j\frac{\omega\tau}{2} \cdot \frac{t}{\tau} + \left(\frac{j\omega\tau}{2}\right)^2 - \left(\frac{j\omega\tau}{2}\right)^2\right]} dt \\ &= E \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2}\right)^2 + \left(\frac{\tau\omega}{2}\right)^2\right]} dt \\ &= E e^{-\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{t}{\tau} + \frac{j\omega\tau}{2}\right)^2} dt \end{aligned}$$

令 $x = \frac{t}{\tau} + j\frac{\omega\tau}{2}$, $dt = \tau dx$, 则有:

$$F(j\omega) = E e^{-\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \tau dx = E \tau \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{\tau\omega}{2}\right)^2}$$

即:

$$\text{FT} \left[E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2} e^{-j\omega t} dt = E\tau \sqrt{\pi} e^{-\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)^2} \quad (3-56)$$

式(3-56)表明,高斯信号的频谱仍然是一个高斯函数;式(3-56)还是一个正实函数,所以它的相位谱为零。图 3-22 画出了该信号的波形和频谱。

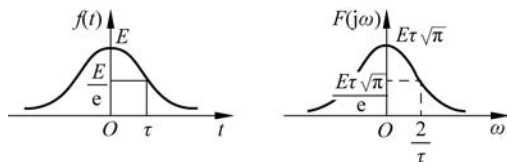


图 3-22 高斯函数信号的波形和频谱

7. 指数函数

这里讨论 4 种形式的指数函数,即单边指数衰减函数、偶双边指数衰减函数、虚指数函数、复指数函数。

1) 单边指数衰减函数

单边指数衰减函数由式(3-57)定义:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{-at}, & t > 0, a > 0 \end{cases} \quad (3-57)$$

它的傅里叶变换为:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{a + j\omega} \quad (3-58)$$

相应的幅度谱和相位谱分别为:

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{cases} \quad (3-59)$$

其频谱图的 MATLAB 画图程序如下:

```
clear;
t = 0:dt:tf; % 定义持续时间
alpha = a; % 定义指数参数
f = exp(-1 * alpha * t); % 生成指数信号
plot(t,f); % 绘图

fs = fs; N = N; % 定义采样频率和数据点数
n = 0:N-1; t = n/fs; % 时间序列
y = fft(f,N); % 对信号进行傅里叶变换
A = abs(y); % 求得傅里叶变换后的振幅
Q = angle(y); % 求得傅里叶变换后的相位
w = n * fs/N; % 频率序列
plot(w,A); % 绘出随频率变化的振幅
plot(w,Q); % 绘出随频率变化的相位
```

单边指数衰减信号的波形及其频谱如图 3-23 所示。

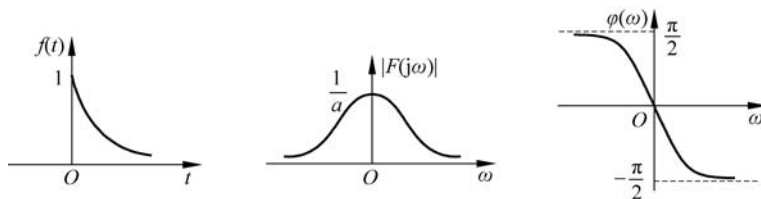


图 3-23 单边指数衰减信号的波形及其频谱

2) 偶双边指数衰减函数

偶双边指数衰减函数有以下定义：

$$f(t) = e^{-a|t|} \quad a > 0 \quad (3-60)$$

它的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^0 e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{-(j\omega - a)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(j\omega + a)t} dt \\ &= \frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3-61)$$

是一个实偶函数，其相应的幅度谱和相位谱分别为：

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{2a}{a^2 + \omega^2} \\ \varphi(\omega) = 0 \end{cases} \quad (3-62)$$

图 3-24 画出了它的波形和频谱。



图 3-24 偶双边指数信号的波形及其频谱

3) 虚指数信号

根据傅里叶变换的定义，虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的傅里叶变换为：

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

将此式与式(3-44)单位直流信号的傅里叶变换

$$2\pi\delta(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 \cdot e^{-j\omega t} dt$$

比较，可知虚指数信号的傅里叶变换为：

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \\ &= 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \end{aligned} \quad (3-63)$$

即虚指数信号 $e^{j\omega_0 t}$ 的频谱是在 $\omega = \omega_0$ 处出现一个单位冲激,该冲激的强度为 2π ,同理

$$\begin{aligned} \text{FT}[e^{-j\omega_0 t}] &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega + \omega_0)t} dt \\ &= 2\pi\delta(\omega + \omega_0) \end{aligned} \quad (3-64)$$

其频谱图示于图 3-25。

利用式(3-63)和式(3-64)的结果,以及欧拉公式,容易得到:

$$\text{FT}[\cos\omega_0 t] = \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3-65)$$

$$\text{FT}[\sin\omega_0 t] = \frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)] \quad (3-66)$$

4) 复指数信号

对如下形式的复指数信号

$$f(t) = e^{(-a+j\omega_0)t} = e^{-at} e^{j\omega_0 t}, \quad t > 0, a > 0 \quad (3-67)$$

做傅里叶变换:

$$\begin{aligned} F(j\omega) &= \int_0^{\infty} e^{(-a+j\omega_0)t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt \end{aligned}$$

将式(3-58)与此式比较,便可以直接得到式(3-68)所示的复指数信号的傅里叶变换为:

$$F(j\omega) = \int_0^{\infty} e^{-[j(\omega - \omega_0) + a]t} dt = \frac{1}{a + j(\omega - \omega_0)} \quad (3-68)$$

其幅度谱和相位谱分别为:

$$\begin{cases} |F(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + (\omega - \omega_0)^2}} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega - \omega_0}{a}\right) \end{cases} \quad (3-69)$$

图 3-26 画出了它的频谱。

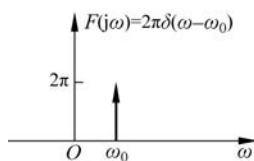


图 3-25 虚指数信号的频谱

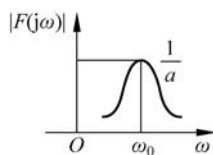


图 3-26 复指数信号的频谱

式(3-68)信号的频谱,实际是将单边指数衰减函数的频谱中心搬移到 ω_0 的位置。

常用傅里叶变换对如表 3-3 所示。

表 3-3 常用傅里叶变换对

编 号	$f(t)$	$F(j\omega)$
1	$g_{\tau}(t)$	$\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$
2	$\tau \text{Sa}(\tau t/2)$	$2\pi g_{\tau}(\omega)$
3	$e^{-at} u(t), a > 0$	$1/(a + j\omega)$

续表

编 号	$f(t)$	$F(j\omega)$
4	$t e^{-at} u(t), a > 0$	$1/(a + j\omega)^2$
5	$e^{-a t }, a > 0$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
6	$\delta(t)$	1
7	1	$2\pi\delta(\omega)$
8	$\cos\omega_0 t$	$\pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$
9	$\sin\omega_0 t$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]/j$
10	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/j\omega$
11	$\text{sgn}(t)$	$2/j\omega, F(0) = 0$
12	$1/\pi t$	$-j\text{sgn}(\omega)$
13	$\delta_T(t)$	$\omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega), \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$
14	$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_1 t}, \omega_1 = \frac{2\pi}{T}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_1)$
15	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at} u(t), a > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
16	$E e^{-(\frac{t}{\tau})^2}, t < \infty$	$E\tau\sqrt{\pi} e^{-(\frac{\tau\omega}{2})^2}$
17	$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$

3.5 傅里叶变换的性质

傅里叶变换有很多重要的性质,这些性质反映了信号在时域描述和频域描述的对应关系,熟悉这些性质对深刻理解傅里叶变换的实质有重要意义。应用这些性质求取 $f(t)$ 的傅里叶变换或逆变换,为在频域分析问题和解决问题带来极大的便利。

1. 线性性质

若

$$f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$$

$$f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$$

则对于任意常数 a_1 和 a_2 ,有:

$$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \leftrightarrow a_1 F_1(j\omega) + a_2 F_2(j\omega) \tag{3-70}$$

以上关系很容易用从傅里叶变换的定义式出发去证明,这里从略。

2. 共轭对称性

如果 $f(t)$ 是时间 t 的实函数,则有:

$$F^*(j\omega) = F(-j\omega) = \text{FT}[f(-t)] \tag{3-71}$$

证明: $\text{FT}[f(-t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(-t) e^{-j\omega t} dt$

令 $\tau = -t$,得:

$$\text{FT}[f(-t)] = \int_{+\infty}^{-\infty} f(\tau) e^{j\omega\tau} d(-\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-j(-\omega)\tau} d\tau = F(-j\omega)$$



$$F^*(j\omega) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right)^* = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{j\omega t} dt = F(-j\omega)$$

证毕。

这个性质说明,实信号的傅里叶变换具有式(3-71)所示共轭对称性,即其共轭等于其反转,也等于原信号反转后的傅里叶变换。这一性质决定了实信号的频谱常常具有双边性(例如 $\cos\omega_0 t$),而复信号的傅里叶变换没有这种共轭对称性,其频谱常常呈现单边性(例如 $e^{\pm j\omega_0 t}$)。

3. 对称性质

$$\begin{aligned} \text{若} \quad & f(t) \leftrightarrow F(j\omega) \\ \text{则:} \quad & F(jt) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{aligned} \quad (3-72)$$

式(3-72)表明,如果函数 $f(t)$ 的频谱函数为 $F(j\omega)$,那么时间函数 $F(jt)$ 的频谱函数是 $2\pi f(-\omega)$,这称为傅里叶变换的对称性。它可证明如下:

将傅里叶逆变换式 $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ 中的 t 换为 $-\omega$, ω 换为 t ,得:

$$f(-\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

两边同乘以 2π ,得到:

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(jt) e^{-j\omega t} dt$$

上式表明,时间函数 $F(jt)$ 的傅里叶变换为 $2\pi f(-\omega)$,即式(3-72)。证毕。

例如, $\delta(t) \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$ ($\delta(\omega)$ 是 ω 的偶函数)。

$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$, 由对称性可得:

$$\text{Sa}\left(\frac{\tau t}{2}\right) \leftrightarrow \frac{2\pi}{\tau} g_\tau(\omega) \quad (3-73)$$

取 $\tau = 2\pi$, 显然有:

$$\text{Sa}(\pi t) \leftrightarrow g_{2\pi}(\omega) \quad (3-74)$$

一般情况下,当 $\tau = 2a$ ($a > 0$) 时,可得一般的关系式:

$$\text{Sa}(at) \leftrightarrow \frac{\pi}{a} g_{2a}(\omega) \quad (3-75)$$

由式(3-75)的结果,容易计算如下积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{at} e^{-j\omega t} dt = \frac{\pi}{a} g_{2a}(\omega) \quad (3-76)$$

取式(3-76)中的 $\omega = 0$, 可得:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin at}{at} dt = \frac{\pi}{a} \quad (3-77)$$

例如, $\text{sgn}(t) \leftrightarrow \frac{2}{j\omega}$, 由对称性可得:

$$\frac{1}{\pi t} \leftrightarrow -j \text{sgn}(\omega) \quad (3-78)$$

4. 尺度变换性质

尺度变换是一种对信号波形的展缩变换,其概念已在第1章中作了详细讨论,这里仅给出变换前、后傅里叶变换的关系。

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$

则: $f(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$ (3-79)

式(3-79)表明,若信号 $f(t)$ 在时间坐标上压缩到原来的 $1/a$,那么其频谱函数在频率坐标上将展宽 a 倍,同时幅度减小到原来的 $1/|a|$,即在时域中信号占据时间的压缩对应于其频谱在频域中占有频带的扩展,反之亦然。这一规律称为尺度变换或时频展缩特性。

证明 设 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则有: $\text{FT}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(at) e^{-j\omega t} dt$

令 $x = at$, 则 $t = \frac{x}{a}$, $dt = \frac{1}{a} dx$

当 $a > 0$ 时, $\text{FT}[f(at)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a} x} dx = \frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$

当 $a < 0$ 时, $\text{FT}[f(at)] = \int_{+\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega \frac{x}{a}} \cdot \frac{1}{a} dx = -\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\frac{\omega}{a} x} dx = -\frac{1}{a} F\left(j \frac{\omega}{a}\right)$

综合以上两种情况,即得式(3-79),证毕。

由尺度变换特性可知,信号的持续时间与信号的占有频带宽度成反比。例如,对于门函数 $g_\tau(t)$,其频带宽度 $\Delta f = 1/\tau$ 。在通信技术中,为了加快信息传输速度,就需要将信号持续时间缩短,其付出的代价就是信号的带宽被扩展。

例 3.6 作为尺度变换的应用,本例给出了矩形脉冲信号 $f(at) = g_\tau(at)$ 中, $a=1$, $a=1/2$, $a=2$ 时信号波形及其频谱(见图 3-27),其分析过程可自己完成。

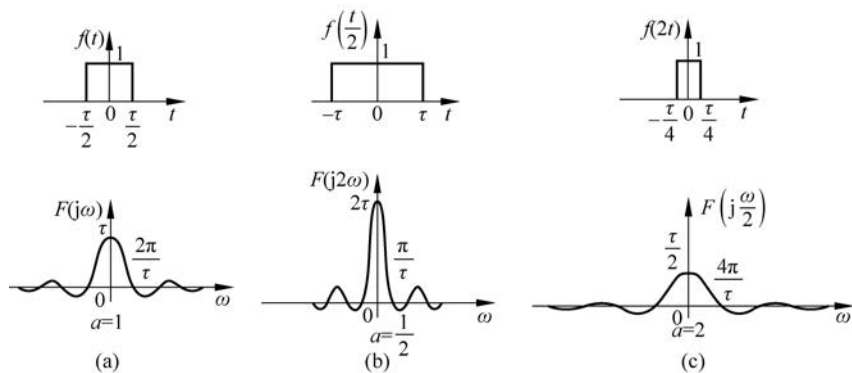


图 3-27 不同尺度下的带宽

5. 时移性质

时移特性也称为延时特性。若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, t_0 为常数,则有:

$$f(t \pm t_0) \leftrightarrow e^{\pm j\omega t_0} F(j\omega) = |F(j\omega)| e^{j(\varphi(\omega) \pm \omega t_0)} \quad (3-80)$$

式(3-80)表示,在时域中信号沿时间轴右移(即延时) t_0 ,则在频域中所有频率“分量”相应落

后一相位 ωt_0 , 而其幅度保持不变, 即时域的时间平移引起的是频域的相位平移。

证明 若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则迟延信号的傅里叶变换为:

$$\text{FT}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-j\omega t} dt$$

令 $x = t - t_0$, 则上式可以写为:

$$\text{FT}[f(t - t_0)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega(x+t_0)} dx = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega t_0} F(j\omega)$$

同理可得: $\text{FT}[f(t + t_0)] = e^{j\omega t_0} F(j\omega)$

可以证明, 如果信号既有时移又有尺度变换, 则有:

$$f(at - b) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} e^{-j\frac{b}{a}\omega} F\left(j\frac{\omega}{a}\right) \quad (3-81)$$

显然, 尺度变换和时移特性是式(3-81)的两种特殊情况。

例 3.7 求图 3-28 所示信号的频谱函数。

解 由图看出 $f(t) = g_\tau(t - \tau/2)$, 已知标准门函数的傅里叶变换为:

$$g_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

根据时移特性可求得: $f(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau/2) e^{-j\omega\tau/2}$

其相位谱如图 3-29 所示。

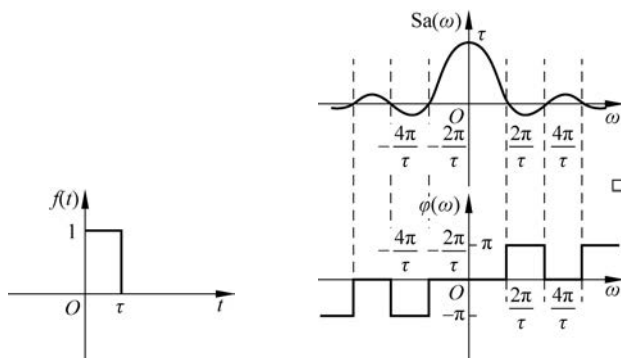


图 3-28 门函数右平移 $\tau/2$

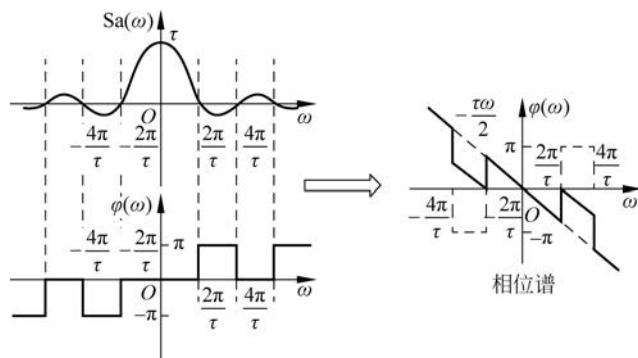


图 3-29 $f(t)$ 的相位谱

6. 频移性质

频移特性也称为调制特性。若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 且 ω_0 为常数, 则:

$$f(t) e^{\pm j\omega_0 t} \leftrightarrow F[j(\omega \mp \omega_0)] \quad (3-82)$$

式(3-82)表明, 将信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{j\omega_0 t}$, 对应于将频谱函数沿 ω 轴右移 ω_0 ; 将信号 $f(t)$ 乘以因子 $e^{-j\omega_0 t}$, 对应于将频谱函数左移 ω_0 。式(3-82)直接从傅里叶变换定义出发即可证明, 请读者自己完成, 这里从略。

频谱搬移的原理是将信号 $f(t)$ (调制信号) 乘以载频信号 $\cos\omega_0 t$ 或 $\sin\omega_0 t$, 从而得到高频已调信号 $f(t)\cos\omega_0 t$ 或 $f(t)\sin\omega_0 t$ 。因为

$$\cos\omega_0 t = \frac{1}{2}(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}), \quad \sin\omega_0 t = \frac{1}{2j}(e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t})$$

可以导出

$$\begin{cases} F[f(t)\cos\omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(j(\omega - \omega_0)) + F(j(\omega + \omega_0))] \\ F[f(t)\sin\omega_0 t] = \frac{1}{2j}[F(j(\omega - \omega_0)) - F(j(\omega + \omega_0))] \end{cases} \quad (3-83)$$

例 3.8 求图 3-30 所示的高频脉冲信号 $f(t)$ 的频谱。

解 该高频脉冲信号 $f(t)$ 可以表述为门函数 $g_\tau(t)$ 与 $\cos\omega_0 t$ 相乘, 即

$$f(t) = g_\tau(t) \cos\omega_0 t$$

因为 $g_\tau(t) \leftrightarrow \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$, 根据式(3-83)所示的调制定理有:

$$F[f(t)] = \frac{\tau}{2} \left[\text{Sa}\left(\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}\right) + \text{Sa}\left(\frac{(\omega + \omega_0)\tau}{2}\right) \right]$$

上式即为高频脉冲信号的频谱函数, 频谱如图 3-30 所示。

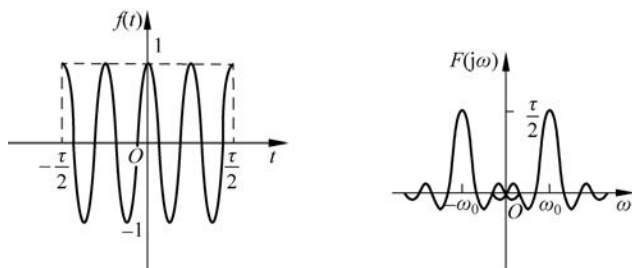


图 3-30 高频脉冲信号及其频谱

7. 卷积性质

1) 时域卷积

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$, 则:

$$f_1(t) * f_2(t) \leftrightarrow F_1(j\omega) F_2(j\omega) \quad (3-84)$$

式(3-84)表明, 在时域中两函数的卷积对应于在频域中两函数频谱的乘积, 证明如下:

根据卷积积分的定义:

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau$$

其傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} \text{FT}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \right] e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \right] d\tau \end{aligned}$$

由时移特性知:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t - \tau) e^{-j\omega t} dt = F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau}$$

代入上式, 得:

$$\begin{aligned} \text{FT}[f_1(t) * f_2(t)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) F_2(j\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_2(j\omega) \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \\ &= F_2(j\omega) F_1(j\omega) \end{aligned}$$

例 3.9 两个实信号在间隔 τ 时刻的相关程度,可以用如下积分式描述,该积分式是间隔 τ 的函数,称为信号 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的互相关函数。求互相关函数的傅里叶变换。

$$R_{f_1 f_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt$$

解 将题中的相关积分式与卷积积分式比较,可得:

$$\begin{aligned} R_{f_1 f_2}(\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t + \tau) f_2(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau + t) f_2(t) dt \\ &= f_1(-\tau) * f_2(\tau) \end{aligned}$$

这表明相关积分运算可以通过卷积积分来完成。应用卷积定理与共轭对称性质,可得相关积分的傅里叶变换为:

$$\begin{aligned} \text{FT}[R_{f_1 f_2}(\tau)] &= \text{FT}[f_1(-\tau) * f_2(\tau)] \\ &= \text{FT}[f_1(-\tau)] \cdot \text{FT}[f_2(\tau)] \\ &= F_1(-j\omega) F_2(j\omega) \\ &= F_1^*(j\omega) F_2(j\omega) \end{aligned}$$

特别地,如果 $f(t) = f_1(t) = f_2(t)$,则: $R_f(\tau) = f(\tau) * f(-\tau)$ 称为 $f(t)$ 自相关函数。其傅里叶变换为 $\text{FT}[R_f(\tau)] = |F(j\omega)|^2$ 。

2) 频域卷积

若 $f_1(t) \leftrightarrow F_1(j\omega)$, $f_2(t) \leftrightarrow F_2(j\omega)$, 则:

$$f_1(t) f_2(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} F_1(j\omega) * F_2(j\omega) \quad (3-85)$$

式中,

$$F_1(j\omega) * F_2(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(j\eta) F_2(j\omega - j\eta) d\eta \quad (3-86)$$

式(3-86)表明,两时间函数乘积的傅里叶变换,等于各函数的傅里叶变换在频域的卷积积分的 $1/2\pi$ 倍。频域卷积的证明类似于时域卷积,这里从略。

8. 微分性质

信号 $f(t)$ 和其频谱函数 $F(j\omega)$ 的导数可用下述符号表示:

$$f^{(n)}(t) = \frac{d^n f(t)}{dt^n}, \quad F^{(n)}(j\omega) = \frac{d^n f(j\omega)}{d\omega^n}$$

1) 时域微分

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则:

$$f^{(n)}(t) \leftrightarrow (j\omega)^n F(j\omega) \quad (3-87)$$

证明 由卷积的微分运算知, $f(t)$ 的一阶导数可写为:

$$f'(t) = f'(t) * \delta(t) = f(t) * \delta'(t)$$

由于:

$$\text{FT}[\delta'(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta'(t) e^{-j\omega t} dt = - (e^{-j\omega t})' \Big|_{t=0} = j\omega$$

根据时域卷积定理,有:

$$\text{FT}[f'(t)] = \text{FT}[f(t)] \text{FT}[\delta'(t)] = j\omega F(j\omega)$$

重复运用以上结果,得: $\text{FT}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(j\omega)$

即式(3-87),证毕。

2) 频域微分

若

$$f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$$

则:

$$(-jt)^n f(t) \leftrightarrow F^{(n)}(j\omega) \quad (3-88)$$

证明 由于 $F(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt$, 所以其导数可以表示为:

$$F^{(1)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-jt)f(t)e^{-j\omega t} dt$$

该式表明: $(-jt)f(t) \leftrightarrow F^{(1)}(j\omega)$, 重复运用以上结果, 可得式(3-88), 证毕。

9. 积分性质

信号 $f(t)$ 和其频谱函数 $F(j\omega)$ 的积分可用下述符号表示:

$$f^{(-1)}(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx, \quad F^{(-1)}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\omega} F(j\eta) d\eta$$

1) 时域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则:

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-89)$$

其中 $F(0) = F(j\omega)|_{\omega=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$, 是 $f(t)$ 的直流分量。如果 $F(0) = 0$, 则式(3-89)变为:

$$f^{(-1)}(t) \leftrightarrow \frac{F(j\omega)}{j\omega} \quad (3-90)$$

证明 函数 $f(t)$ 的积分可写为:

$$f^{(-1)}(t) = f^{(-1)}(t) * \delta(t) = f(t) * \delta^{(-1)}(t) = f(t) * u(t)$$

根据时域卷积性质并考虑到冲激函数的取样性质, 得:

$$\begin{aligned} \text{FT}[f^{(-1)}(t)] &= \text{FT}[f(t)]\text{FT}[u(t)] \\ &= F(j\omega) \left[\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right] \\ &= \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} \end{aligned}$$

证毕。

2) 频域积分

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则:

$$\pi f(0)\delta(t) + \frac{-1}{jt}f(t) \leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega) \quad (3-91)$$

式中 $f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) d\omega$, 如果 $f(0) = 0$, 则有:

$$\frac{-1}{jt}f(t) \leftrightarrow F^{(-1)}(j\omega) \quad (3-92)$$

证明 由于 $\pi f(0)\delta(t) + \frac{-1}{jt}f(t) = f(t) \left(\pi\delta(t) + \frac{-1}{jt} \right)$, 又由于:

$$u(t) \leftrightarrow \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$u(-t) \leftrightarrow \pi\delta(-\omega) + \frac{1}{-j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{-1}{j\omega}$$

由对称性可知: $\pi\delta(t) + \frac{-1}{jt} \leftrightarrow 2\pi U(j\omega)$

由频域卷积性质可得:

$$\text{FT} \left[\pi f(0)\delta(t) + \frac{-1}{jt} f(t) \right] = \frac{1}{2\pi} F(j\omega) * 2\pi U(j\omega) = F^{(-1)}(j\omega), \text{证毕。}$$

例 3.10 利用时域微积分性质计算图 3-31 所示梯形信号的傅里叶变换。

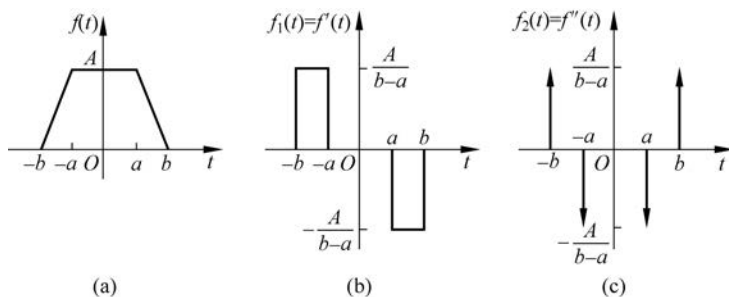


图 3-31 梯形信号及其求导的波形

解 先对 $f(t)$ 求一阶和二阶导数, 得到 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$, 如图 3-31(b) 和图 3-31(c) 所示。由图看出, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t) dt = 0$, 即 $F_2(0) = 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) dt = 0$, 即 $F_1(0) = 0$ 。由时域积分性质可得:

$$\begin{aligned} f_2(t) &\leftrightarrow F_2(j\omega) = \frac{A}{b-a} [e^{j\omega b} - e^{j\omega a} - e^{-j\omega a} + e^{-j\omega b}] \\ &= \frac{2A}{b-a} [\cos\omega b - \cos\omega a] \\ f_1(t) &\leftrightarrow F_1(j\omega) = \frac{F_2(j\omega)}{j\omega} = \frac{2A}{j\omega(b-a)} [\cos\omega b - \cos\omega a] \\ f(t) &\leftrightarrow F(j\omega) = \frac{F_1(j\omega)}{j\omega} = \frac{2A}{b-a} \left[\frac{\cos\omega a - \cos\omega b}{\omega^2} \right] \end{aligned}$$

在应用性质 $\int_{-\infty}^t f(x) dx \leftrightarrow F(j\omega)/j\omega$ 时, 应特别注意 $F(0) = 0$ 这个前提条件。例如, 知道 $\delta(t) \leftrightarrow 1$, 而 $\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t \delta(x) dx$, 但 $\varepsilon(t)$ 的频谱函数绝不是 $1/j\omega$ 。这是因为 $F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$, 不为零, 所以有 $\varepsilon(t) \leftrightarrow \pi F(0)\delta(\omega) + \frac{F(j\omega)}{j\omega} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$ 。

当 $A=1, a=1, b=2$ 时, 基于 MATLAB 的频谱图如图 3-32 所示, 其中 $\omega=0$ 时的幅度为无穷大。

```
clear;
N=101; T=0.1; t=-5:0.1:5; D=2*pi*(N*T);
```

```

ft = (t+2).*(heaviside(t+2)-heaviside(t+1)) + (heaviside(t+1)-heaviside(t-1)) +
(-t+2).*(heaviside(t-1)-heaviside(t-2)); % 产生信号
subplot(3,1,1);
plot(t,ft,'k'); % 绘图
ylabel('f(t)');
F = fftshift(fft(ft)); % 对信号进行傅里叶变换
k = floor(-(N-1)/2:N/2);
subplot(3,1,2);
plot(k*D,abs(F),'k'); % 画出幅频图
ylabel('幅度');
subplot(3,1,3);
plot(k*D,angle(F),'k'); % 画出相频图
ylabel('相位');

```

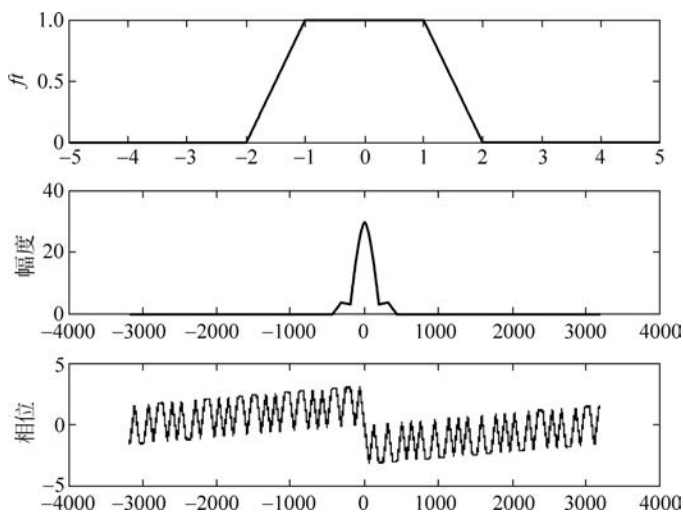


图 3-32 MATLAB 绘制的梯形信号及其频谱图

10. 能量谱

若 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$, 则:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega \quad (3-93)$$

式(3-93)也称为帕塞瓦尔定理,它表明傅里叶变换前信号能量等于变换后的能量,也就是说傅里叶变换没有能量损失。证明如下:

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2 dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t)^* dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)^* e^{-j\omega t} d\omega dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} d\omega e^{-j\omega t} d\omega dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)^2 \delta(t) e^{-j\omega t} d\omega dt \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)^2 d\omega
 \end{aligned}$$

定义:

$$G(\omega) = \frac{1}{\pi} |F(j\omega)|^2 \quad (3-94)$$

为信号 $f(t)$ 的能量频谱密度,简称能量谱,其量纲为功率。由例 3.9 容易知道,实信号自相关函数的傅里叶变换就是该信号的能量谱,即 $\text{FT}[R_f(\tau)] = |F(j\omega)|^2 = \pi G(\omega)$ 。

由式(3-17)可以得到周期信号的功率谱为:

$$P(n\omega_1) = \left(\frac{A_0}{2}\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} A_n^2 \quad (3-95)$$



3.6 周期信号的傅里叶变换

前面讨论了周期信号的傅里叶级数,也研究了傅里叶级数与傅里叶变换的关系,并指出引入冲激函数之后,可以用傅里叶变换分析周期信号。本节先从一般周期信号的傅里叶变换入手,研究周期信号进行傅里叶变换的共性问题,再通过实例讨论具体的周期信号的傅里叶变换等相关的特殊问题。

3.6.1 一般周期信号的傅里叶变换

如前所述,若 $f_T(t)$ 是周期为 T 的周期函数,则其可展开成指数形式的傅里叶级数:

$$f_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t} \quad (3-96)$$

式中, $\omega_1 = 2\pi/T$ 是基波角频率, F_k 是傅里叶系数:

$$F_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \quad (3-97)$$

对式(3-96)等号两端取傅里叶变换,并应用傅里叶变换的线性性质,得:

$$\begin{aligned} \text{FT}[f_T(t)] &= \text{FT}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k e^{jk\omega_1 t}\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot \text{FT}[e^{jk\omega_1 t}] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} F_k \cdot 2\pi\delta(\omega - k\omega_1) \end{aligned} \quad (3-98)$$

这表明,周期信号的傅里叶变换,即周期信号的频谱密度函数,由无穷多个冲激函数组成(这一点反映了周期信号频谱离散性的特点);这些冲激函数信号的各谐波角频率 $k\omega_1$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$) 均是 ω_1 的整数倍(这一点反映了周期信号频谱的谐波性特点),其强度为 $2\pi F_k$ 。

例 3.11 计算例 3.4 所给出的周期矩形脉冲信号的频谱函数。

解 由例 3.4 可知其傅里叶系数为:

$$F_k = \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_1 \tau}{2}\right)$$

将其代入式(3-98),可得其傅里叶变换为:

$$\begin{aligned}
 F(j\omega) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi F_k \delta(\omega - k\omega_1) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi \cdot \frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_1) \\
 &= \omega_1 \tau \sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{k\omega_1\tau}{2}\right) \delta(\omega - k\omega_1)
 \end{aligned}$$

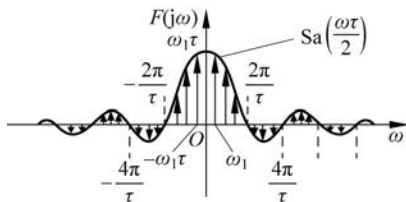


图 3-33 周期矩形脉冲信号的频谱

画出其频谱如图 3-33 所示。

3.6.2 冲激函数序列的傅里叶变换

周期为 T 的冲激函数序列 $\delta_T(t)$ 可表示为：

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (3-99)$$

容易计算其傅里叶系数为：

$$\begin{aligned}
 F_k &= \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_T(t) e^{-jk\omega_1 t} dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta_T(t) e^{-jk\omega_1 t} dt = \frac{1}{T}
 \end{aligned}$$

故有其傅里叶级数展开式为：

$$\delta_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{jk\omega_1 t} \quad (3-100)$$

式(3-100)表明,单位冲激信号序列 $\delta_T(t)$ 的傅里叶级数中,包含 $\omega = 0, \pm\omega_1, \pm 2\omega_1, \dots, \pm n\omega_1, \dots$ 的频率分量,每个频率分量的幅度大小相等,均为 $1/T$ 。

其傅里叶变换为：

$$\begin{aligned}
 \text{FT}[\delta_T(t)] &= \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) \\
 &= \omega_1 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_1) = \omega_1 \delta_{\omega_1}(\omega)
 \end{aligned} \quad (3-101)$$

此式表明,单位冲激信号序列的傅里叶变换仍是一个冲激信号序列,其冲激强度为 ω_1 ,周期为 ω_1 ,如图 3-34 所示。

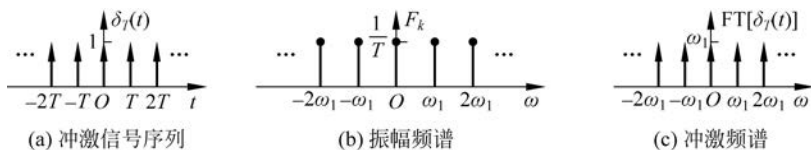


图 3-34 单位冲激信号序列的波形及其频谱

3.7 傅里叶逆变换的计算方法

在傅里叶分析的过程中,常常需要将频域的分析结果转换到时间域,这就需要傅里叶逆变换。傅里叶逆变换一般有三种计算方法,下面分别介绍。

1. 利用傅里叶逆变换定义

傅里叶逆变换的定义为： $f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$ ，依据该定义，利用复变函数的相关知识，计算该积分，得到逆变换。在大多数情况下，由于 $F(j\omega)$ 不规则，都需要采用这种方法计算逆变换。

2. 利用已有的傅里叶变换对

由于信号的傅里叶变换和其逆变换是一一对应的，所以当知道 $f(t) \leftrightarrow F(j\omega)$ 傅里叶变换对时， $F(j\omega)$ 的逆变换一定是 $f(t)$ 。所以可以通过表 3-3 所示常用傅里叶变换对计算逆变换。

3. 利用傅里叶变换的性质

傅里叶变换的性质给出了时间域信号变化与其傅里叶变换变化之间的对应关系，所以可以利用这些性质计算一些特殊信号的逆变换。

当频谱密度函数为有理分式时，可以采用部分分式展开法计算其逆变换，具体算法将在第 5 章详细介绍。

例 3.12 计算下列频域信号的逆变换。

$$\frac{3}{5+j\omega}; \quad -j\operatorname{sgn}(2\omega); \quad \frac{\sin\omega}{\omega}; \quad \frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1}; \quad \frac{\sin\omega}{\omega} e^{-j2\omega}$$

解 查表 3-3 得 $\frac{3}{5+j\omega} \leftrightarrow 3e^{-5t}\epsilon(t)$ ；查表及利用尺度性质可得 $-j\operatorname{sgn}(2\omega) \leftrightarrow \frac{1}{\pi t}$ ；查表可得 $\frac{\sin\omega}{\omega} \leftrightarrow \frac{1}{2}g_2(t)$ ；由频移性质可得 $\frac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} \leftrightarrow \frac{1}{2}g_2(t)e^{jt}$ ；由时移性质可得 $\frac{\sin\omega}{\omega} e^{-j2\omega} \leftrightarrow \frac{1}{2}g_2(t-2)$ 。

例 3.13 计算下列频域信号的逆变换。

$$\frac{7}{-\omega^2 + 3j\omega - 10}$$

解 由于 $\frac{7}{-\omega^2 + 3j\omega - 10} = \frac{7}{(5+j\omega)(-2+j\omega)} = \frac{-1}{5+j\omega} + \frac{1}{-2+j\omega}$

查表 3-3 可得 $\operatorname{FT}^{-1} \left[\frac{7}{-\omega^2 + 3j\omega - 10} \right] = -(e^{-5t} - e^{2t})\epsilon(t)$ 。

本章小结

本章重点介绍了周期信号的傅里叶级数展开方法和非周期信号的傅里叶变换及其性质，给出了信号频域特性的描述方法；重点介绍了信号所含频率分量、频谱以及带宽的概念，为第 4 章的傅里叶分析打下了良好的基础。希望大家深刻理解频谱和带宽的概念，重点掌握傅里叶级数展开方法、傅里叶变换方法以及逆变换的计算方法，牢记常用傅里叶变换对。

习题

3.1 将图 3-35 所示信号展开成三角形式的傅里叶级数,画出频谱图并计算其带宽。

3.2 求图 3-36 所示周期信号的指数型傅里叶级数系数 F_k ,画出频谱图并计算其带宽。

3.3 已知周期函数 $f(t)$ 前四分之一周期的波形如图 3-37 所示。根据下列各情况的要求,画出 $f(t)$ 在一个周期 ($0 \leq t < T$) 的波形。

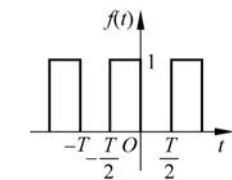


图 3-35 方波信号波形

- (1) $f(t)$ 是偶函数,只含有偶次谐波;
- (2) $f(t)$ 是偶函数,只含有奇次谐波;

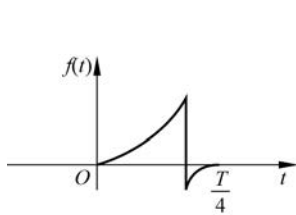
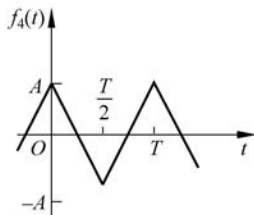
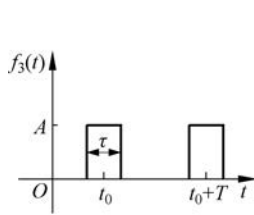
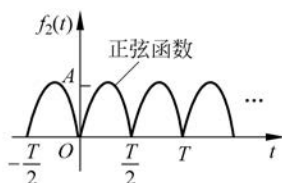
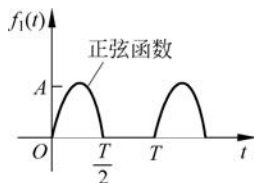


图 3-36 不同周期信号波形

图 3-37 信号 $f(t)$ 前四分之一周期的波形

- (3) $f(t)$ 是偶函数,含有偶次和奇次谐波;
- (4) $f(t)$ 是奇函数,只含有偶次谐波;
- (5) $f(t)$ 是奇函数,只含有奇次谐波;
- (6) $f(t)$ 是奇函数,含有偶次和奇次谐波。

3.4 求图 3-38 所示单周期信号的傅里叶变换。

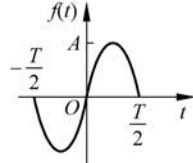
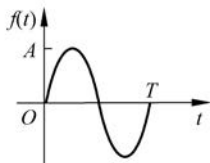
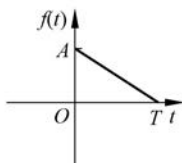
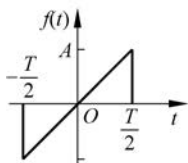


图 3-38 不同信号波形

3.5 已知 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$,试求以下函数的傅里叶变换。

$$tf(2t); \quad (t-2)f(t); \quad (t-2)f(-2t); \quad t \frac{df(t)}{dt}; \quad (1-t)f(1-t)$$

3.6 利用傅里叶变换及其性质证明如下等式。

$$(1) \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}; (2) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin a \omega}{a \omega} d\omega = \frac{\pi}{|a|}$$

3.7 试求下列信号的频谱密度函数。

$$(1) \frac{\sin t \sin 2t}{t^2}; (2) g_{2\pi}(t) \cos 5t; (3) e^{-(2+2t)} u(t); (4) \operatorname{sgn}(t) g_2(t)$$

3.8 求下列频谱函数的傅里叶逆变换。

$$(1) \frac{1}{(2+j\omega)^2}; -\frac{2}{\omega^2}; \delta(\omega-\omega_0); g_{2\omega_0}(\omega)$$

$$(2) \omega^2; \frac{1}{\omega^2}; \delta(\omega-2); 2\cos \omega$$

$$(3) e^{a\omega} U(-\omega); 6\pi\delta(\omega) + \frac{5}{(j\omega-2)(j\omega+3)}$$

3.9 设 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$, 且 $F(j\omega)=0 (|\omega| \geq \omega_m)$, 试在 $K \geq \omega_m$ 条件下化简下式: $\frac{K}{\pi} [f(t) * \operatorname{Sa}(Kt)]$ 。

3.10 设信号 $f(t)$ 的傅里叶变换为 $F(j\omega)$, 试证明:

$$(1) F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt; (2) f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) d\omega$$

$$3.11 \text{ 已知 } f(t) = \frac{1}{t}, \text{ 求 } F(j\omega), \text{ 并求 } f_1(t) = \frac{1}{t} * \frac{1}{t}.$$

3.12 根据给定条件, 完成以下要求。

$$(1) \text{ 证明, 若 } x_p(t) \text{ 是奇谐函数, 则 } x_p(t) = -x_p\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

$$(2) \text{ 证明, 若 } x_p(t) \text{ 满足 } x_p(t) = -x_p\left(t + \frac{T}{2}\right), \text{ 则是奇谐函数.}$$

(3) 假设 $x_p(t)$ 是一个周期为 2 的奇谐周期信号, 且 $x_p(t)=t (0 < t < 1)$, 画出 $x_p(t)$, 并求其傅里叶级数的系数。

3.13 已知 $y(t)=h(t)*x(t)$, $g(t)=h(3t)*x(3t)$, 当 $g(t)=Ay(Bt)$ 时, 求 A 和 B 的值。

3.14 若 $f(t)$ 为复函数, 可表示为 $f(t)=f_r(t)+jf_i(t)$, 且其傅里叶变换为 $F(j\omega)$, 式中 $f_r(t), f_i(t)$ 均为实函数, 试证明:

$$(1) f^*(t) \text{ 的傅里叶变换为 } F^*(-j\omega).$$

$$(2) f_r(t) \text{ 的傅里叶变换为 } \frac{1}{2}[F(j\omega)+F^*(-j\omega)], f_i(t) \text{ 的傅里叶变换为 } \frac{1}{2j}[F(j\omega)-F^*(-j\omega)].$$

3.15 通过 MATLAB 编程计算 $e^{-t}u(t)$ 的傅里叶变换。

3.16 通过 MATLAB 编程实现, 通过正弦波合成周期为 10s, 幅度为 1V 的三角波, 要求其均方误差小于 0.1。