ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
FACULTAD DE INGENIERÍA DE SISTEMAS
MÉTODOS NUMÉRICOS

Conjunto de Ejercicios 1

Richard Tipantiza

2025-04-26

- **Resuelva los siguientes ejercicios, tome en cuenta que debe mostrar el desarrollo completo del ejercicio.**

1. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.

a. $p = \pi, \quad p^* = \frac{22}{7}$

$\pi = 3.14159265$, $fl(p^*) = 3.142857143$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |p - p^*| = |3.14159265 - 3.142857143| = 1.264492857 \times 10^{-3}$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left|\frac{p - p^*}{p}\right| = \left|\frac{3.14159265 - 3.142857143}{3.14159265}\right| = 4.025006234 \times 10^{-4}$$

b. $p = \pi, \quad p^* = 3.1416$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |3.14159265 - 3.1416| = 7.35 \times 10^{-6}$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left|\frac{3.14159265 - 3.1416}{3.14159265}\right| = 2.339577666 \times 10^{-6}$$

c. $p = e, \quad p^* = 2.718$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |2.718281828 - 2.718| = 2.81828459 \times 10^{-4}$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left|\frac{2.71828182 - 2.718}{2.71828182}\right| = 1.03678896 \times 10^{-4}$$

d. $p = \sqrt{2}, \quad p^* = 1.414$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |1.414213562 - 1.414| = 2.13562373 \times 10^{-4}$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left| \frac{1.414213562 - 1.414}{1.414213562} \right| = 1.510114022 \times 10^{-4}$$

2. Calcule los errores absoluto y relativo en las aproximaciones de p por p^*.

a. $p = e^{10}, \quad p^* = 22000$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |22026.46579 - 22000| = 26.46579481$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left| \frac{22026.46579 - 22000}{22026.46579} \right| = 1.201599778 \times 10^{-3}$$

b. $p = 10^{\pi}. \quad p^* = 1400$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |1385.455731 - 1400| = 14.54426863$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left| \frac{1385.455731 - 1400}{1385.455731} \right| = 0.010497822$$

c. $p = 8!, \quad p^* = 39900$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |40320 - 39900| = 420$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left| \frac{40320 - 39900}{40320} \right| = 0..010416666$$

d. $p = 9!, \quad p^* = \sqrt{18\pi}(\frac{9}{e})^9$

Error absoluto:

$$error_{abs} = |362880 - 359536.8728| = 3343.127158$$

Error relativo:

$$error_{rel} = \left| \frac{362880 - 359536.8728}{362880} \right| = 9.21276223 \times 10^-3$$

3. Encuentre el intervalo más largo en el que se debe encontrar p^* para aproximarse a p con error relativo máximo de 10^{-4} para cada valor de p.

   a. pi

$$error_{rel} \leq 10^{-4}$$

$$\left| \frac{\pi - p*}{\pi} \right| \leq 10^{-4}$$

$$-10^{-4} \leq \frac{\pi - p*}{\pi} \leq 10^{-4}$$

$$\pi * (-10^{-4}) \leq \pi - p* \leq \pi * 10^{-4}$$

$$\pi * (-10^{-4}) - \pi \leq -p* \leq \pi * 10^{-4} - \pi$$

$$-\pi(10^{-4} + 1) \leq -p* \leq -\pi(1 - 10^{-4})$$

$$\pi(1 + 10^{-4}) \geq p* \geq \pi(1 - 10^{-4})$$

$$\pi(1 - 10^{-4}) \leq p* \leq \pi(1 + 10^{-4})$$

   Intervalo: $[3.141906813 \leq p* \leq 3.141278494]$

   b. e

$$error_{rel} \leq 10^{-4}$$

$$\left| \frac{e - p*}{e} \right| \leq 10^{-4}$$

$$-10^{-4} \leq \frac{e - p*}{e} \leq 10^{-4}$$

$$e * (-10^{-4}) \leq e - p* \leq e * 10^{-4}$$

$$e * (-10^{-4}) - e \leq -p* \leq e * 10^{-4} - e$$

$$-e(10^{-4} + 1) \leq -p* \leq -e(1 - 10^{-4})$$

$$e(1 + 10^{-4}) \geq p* \geq e(1 - 10^{-4})$$

$$e(1 - 10^{-4}) \leq p* \leq e(1 + 10^{-4})$$

Intervalo: $[2.71801 \leq p* \leq 2.7118553657]$
c. $\sqrt{2}$

$$error_{rel} \leq 10^{-4}$$

$$\left| \frac{\sqrt{2} - p*}{\sqrt{2}} \right| \leq 10^{-4}$$

$$-10^{-4} \leq \frac{\sqrt{2} - p*}{\sqrt{2}} \leq 10^{-4}$$

$$\sqrt{2} * (-10^{-4}) \leq \sqrt{2} - p* \leq \sqrt{2} * 10^{-4}$$

$$\sqrt{2} * (-10^{-4}) - \sqrt{2} \leq -p* \leq \sqrt{2} * 10^{-4} - \sqrt{2}$$

$$-\sqrt{2}(10^{-4} + 1) \leq -p* \leq -\sqrt{2}(1 - 10^{-4})$$

$$\sqrt{2}(1 + 10^{-4}) \geq p* \geq \sqrt{2}(1 - 10^{-4})$$

$$\sqrt{2}(1 - 10^{-4}) \leq p* \leq \sqrt{2}(1 + 10^{-4})$$

Intervalo: $[1.414072141 \leq p* \leq 1.414354984]$
d. $\sqrt[3]{7}$

$$error_{rel} \leq 10^{-4}$$

$$\left| \frac{\sqrt[3]{7} - p*}{\sqrt[3]{7}} \right| \leq 10^{-4}$$

$$-10^{-4} \leq \frac{\sqrt[3]{7} - p*}{\sqrt[3]{7}} \leq 10^{-4}$$

$$\sqrt[3]{7} * (-10^{-4}) \leq \sqrt[3]{7} - p* \leq \sqrt[3]{7} * 10^{-4}$$

$$\sqrt[3]{7} * (-10^{-4}) - \sqrt[3]{7} \leq -p* \leq \sqrt[3]{7} * 10^{-4} - \sqrt[3]{7}$$

$$-\sqrt[3]{7}(10^{-4} + 1) \leq -p* \leq -\sqrt[3]{7}(1 - 10^{-4})$$

$$\sqrt[3]{7}(1 + 10^{-4}) \geq p* \geq \sqrt[3]{7}(1 - 10^{-4})$$

$$\sqrt[3]{7}(1 - 10^{-4}) \leq p* \leq \sqrt[3]{7}(1 + 10^{-4})$$

Intervalo: $[1.91273989 \leq p* \leq 1.913122476]$

4. Use la aritmética de redondeo de tres dígitos para realizar lo siguiente. Calcule los errores absoluto y relativo con el valor exacto determinado para por lo menos cinco dígitos.

a. $\frac{\frac{13}{14}-\frac{5}{7}}{2e-5.4}$

$$\frac{13}{14} = 13 \oslash 14 = 0.929$$

$$\frac{5}{7} = 5 \oslash 7 = 0.714$$

$$(13 \oslash 14) \ominus (5 \oslash 7) = 0.929 \ominus 0.714 = 0.215$$

$$2e \ominus 5.4 = 0.0366$$

$$[(13 \oslash 14) \ominus (5 \oslash 7)] \oslash (2e \ominus 5.4) = 1.30 \oslash 0.0366 = 5.87$$

Error absoluto:

$$|p - p*| = 5.860620418 - 5.87 = -9.9796 \times 10^{-3}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{p-p*}{p}\right| = \left|\frac{-9.9796 \times 10^{-3}}{5.860620418}\right| = -1.6004 \times 10^{-3}$$

b. $-10\pi + 6e - \frac{3}{61}$

$$-10 \otimes \pi = -31.4$$

$$6 \otimes e = 16.3$$

$$3 \oslash 61 = 0.0492$$

$$(-10 \otimes \pi) \oplus (6 \otimes e) \ominus (3 \oslash 61) = -31.4 \oplus 16.3 \ominus 0.0492 = -15.1$$

Error absoluto:

$$|p - p*| = |-15.15541589 + 15.1| = 0.055416$$

Error absoluto:

$$\left|\frac{p-p*}{p}\right| = \left|\frac{0.055416}{-15.15541589}\right| = 3.6565 \times 10^{-3}$$

c. $(\frac{2}{9}) \cdot (\frac{9}{11})$

$$2 \oslash 9 = 0.222$$

$$9 \oslash 11 = 0.818$$

$$(2 \oslash 9) \otimes (9 \oslash 11) = 0.222 \otimes 0.818 = 0.182$$

Error absoluto:

$$|p - p*| = |0.181818181 - 0.182| = 1.8182 \times 10^{-4}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{1.8182 \times 10^{-4}}{|0.181818181}\right| = 1.000000005 \times 10^{-3}$$

d. $\frac{\sqrt{13}+\sqrt{11}}{\sqrt{13}-\sqrt{11}}$

$$\sqrt{13} = 3.61$$

$$\sqrt{11} = 3.32$$

$$\sqrt{13} \oplus \sqrt{11} = 3.61 \oplus 3.32 = 6.93$$

$$\sqrt{13} \ominus \sqrt{11} = 3.61 \ominus 3.32 = 0.29$$

$$(\sqrt{13} \oplus \sqrt{11}) \oslash (\sqrt{13} \ominus \sqrt{11}) = 6.93 \oslash 0.29 = 23.9$$

Error absoluto:

$$|p - p*| = |23.95826074 - 23.9| = 0.058261$$

Error relativo:

$$\left|\frac{p - p*}{p}\right| = \left|\frac{0.058261}{|23.95826074}\right| = 2.4318 \times 10^{-3}$$

5. Los primeros tres términos diferentes a cero de la serie de Maclaurin para la función arcotangente son: $x-(\frac{1}{3})x^3+(\frac{1}{5})x^5$. Calcule los errores absoluto y relativo en las siguientes aproximaciones de π mediante el polinomio en lugar del arcotangente:

   a.
$$4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})]$$

$$arctan(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - (\frac{1}{3})(\frac{1}{2})^3 + (\frac{1}{5})(\frac{1}{2})^5 = 0.464583333$$

$$arctan(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3} - (\frac{1}{3})(\frac{1}{3})^3 + (\frac{1}{5})(\frac{1}{3})^5 = 0.321810699$$

$$4[arctan(\frac{1}{2}) + arctan(\frac{1}{3})] = 0.464583333 + 0.321810699) = 3.145576128$$

Error absoluto:

$$|\pi - 3.145576128| = 3.98347441 \times 10^{-3}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{\pi - 3.145576128}{\pi}\right| = \frac{3.98347441 \times 10^{-3}}{\pi} = 1.267979286 \times 10^{-3}$$

b.

$$16arctan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239})$$

$$\text{arctan}(\frac{1}{5}) = \frac{1}{5} - (\frac{1}{3})(\frac{1}{5})^3 + (\frac{1}{5})(\frac{1}{5})^5 = 0.197397333$$

$$arctan(\frac{1}{239} = \frac{1}{239} - (\frac{1}{3})(\frac{1}{239})^3 + (\frac{1}{5})(\frac{1}{239})^5 = 4.184076002 \times 10^{-3}$$

$$16arctan(\frac{1}{5}) - 4arctan(\frac{1}{239}) = 16(0.197397333) - 4(4.184076002) = 3.141621029$$

Error absoluto:

$$|\pi - 3.141621029| = 2.83754102 \times 10^{-5}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{\pi - 3.141621029}{\pi}\right| = \frac{2.83754102 \times 10^{-5}}{\pi} = 9.032173591 \times 10^{-6}$$

6. El número se puede definir por medio de $e = \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{n!})$, donde $n! = n(n-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1$ para $n \neq$ y $0! = 1$. Calcule los errores absoluto y relativo en la siguiente aproximación de e:

a. $\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!})$
$e = 2.718281828$

$$\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!}) = (\frac{1}{0!}) + (\frac{1}{1!}) + (\frac{1}{2!}) + (\frac{1}{3!}) + (\frac{1}{4!}) + (\frac{1}{5!})$$

$$\sum_{n=0}^{5}(\frac{1}{n!}) = 2.716666667$$

Error absoluto:

$$|2.718281828 - 2.716666667| = 1.615161 \times 10^{-3}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{2.718281828 - 2.716666667}{2.718281828}\right| = 5.94184526 \times 10^{-3}$$

b. $\sum_{n=0}^{10}(\frac{1}{n!})$

$$\sum_{n=0}^{10}(\frac{1}{n!}) = (\frac{1}{0!}) + (\frac{1}{1!}) + (\frac{1}{2!}) + (\frac{1}{3!}) + (\frac{1}{4!}) + ... + (\frac{1}{10!})$$

$$\sum_{n=0}^{10}(\frac{1}{n!}) = 2.718281801$$

Error absoluto:

$$|2.718281828 - 2.71818801| = 2.745904 \times 10^{-8}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{2.718281828 - 2.71818801}{2.718281828}\right| = 1.010161629 \times 10^{-8}$$

7. Suponga que dos puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) se encuentran en línea recta con $y_1 \neq y_0$. Existen dos fórmulas para encontrar la intersección de la línea:

$$x = \frac{x_0 y_1 - x_1 y_0}{y_1 - y_0} \quad \text{y} \quad x = x_0 - \frac{(x_1 - x_0)y_0}{y_1 - y_0}$$

a. Use los datos $(x_0, y_0) = (1.31, 3.24)$ y $(x_1, y_1) = (1.93, 5.76)$ y la aritmética de redondeo de tres dígitos para calcular la intersección con x de ambas maneras. ¿Cuál método es mejor y por qué?

Primer Método:

$$x = \frac{(1.31)(5.76) - (1.93)(3.24)}{5.76 - 3.24}$$

$$x = \frac{7.55 - 6.25}{2.52}$$

$$x = 0.516$$

Error absoluto:

$$|0.5128571429 - 0.516| = 3.1428571 \times 10^{-3}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{0.5128571429 - 0.516}{0.5128571429}\right| = 6.128133699 \times 10^{-3}$$

Segundo Método:

$$x = 1.31 - \frac{(1.93 - 1.31)(3.24)}{5.76 - 3.24}$$

$$x = 1.31 - \frac{(0.62)(3.24)}{2.52}$$

$$x = 0.512$$

Error absoluto:

$$|0.5128571429 - 0.512| = 8.571429 \times 10^{-4}$$

Error relativo:

$$\left|\frac{0.5128571429 - 0.512}{0.5128571429}\right| = 1.671309276 \times 10^{-3}$$

¿Cuál método es mejor y por qué?

El segundo método es el mejor ya que su error relativo es mucho menor que el del primer método.