[Tarea 09] Ejercicios Unidad 04-A-B | Eliminación gaussiana vs Gauss-Jordan

Richard Tipantiza

Tabla de Contenidos

1. Para cada uno de los siguientes sistemas lineales, obtenga, de ser posible, una solución con métodos gráficos. Explique los resultados desde un punto de vista geométrico.

a.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ -2x_1 - 4x_2 = 6 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = -1 \\ x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases}$$

d.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

def solve_and_plot_system(A, b, variables):
    """
    Resuelve y visualiza un sistema de ecuaciones lineales Ax = b.

    Args:
        A (list or np.array): Matriz de coeficientes.
        b (list or np.array): Vector de términos constantes.
        variables (list of str): Nombres de las variables (ej. ['x ', 'x ']).
    """
    A = np.array(A, dtype=float)
    b = np.array(b, dtype=float)
    num_equations, num_vars = A.shape

    print(f"Sistema con {num_equations} ecuaciones y {num_vars} variables.")
    print("Matriz A:\n", A)
    print("\nVector b:\n", b)

    solution = None
    interpretation = ""

    # --- Solución Numérica ---
    try:
        if num_equations >= num_vars:
            # Para sistemas cuadrados o sobredeterminados, usamos mínimos cuadrados
            x, residuals, rank, s = np.linalg.lstsq(A, b, rcond=None)
```

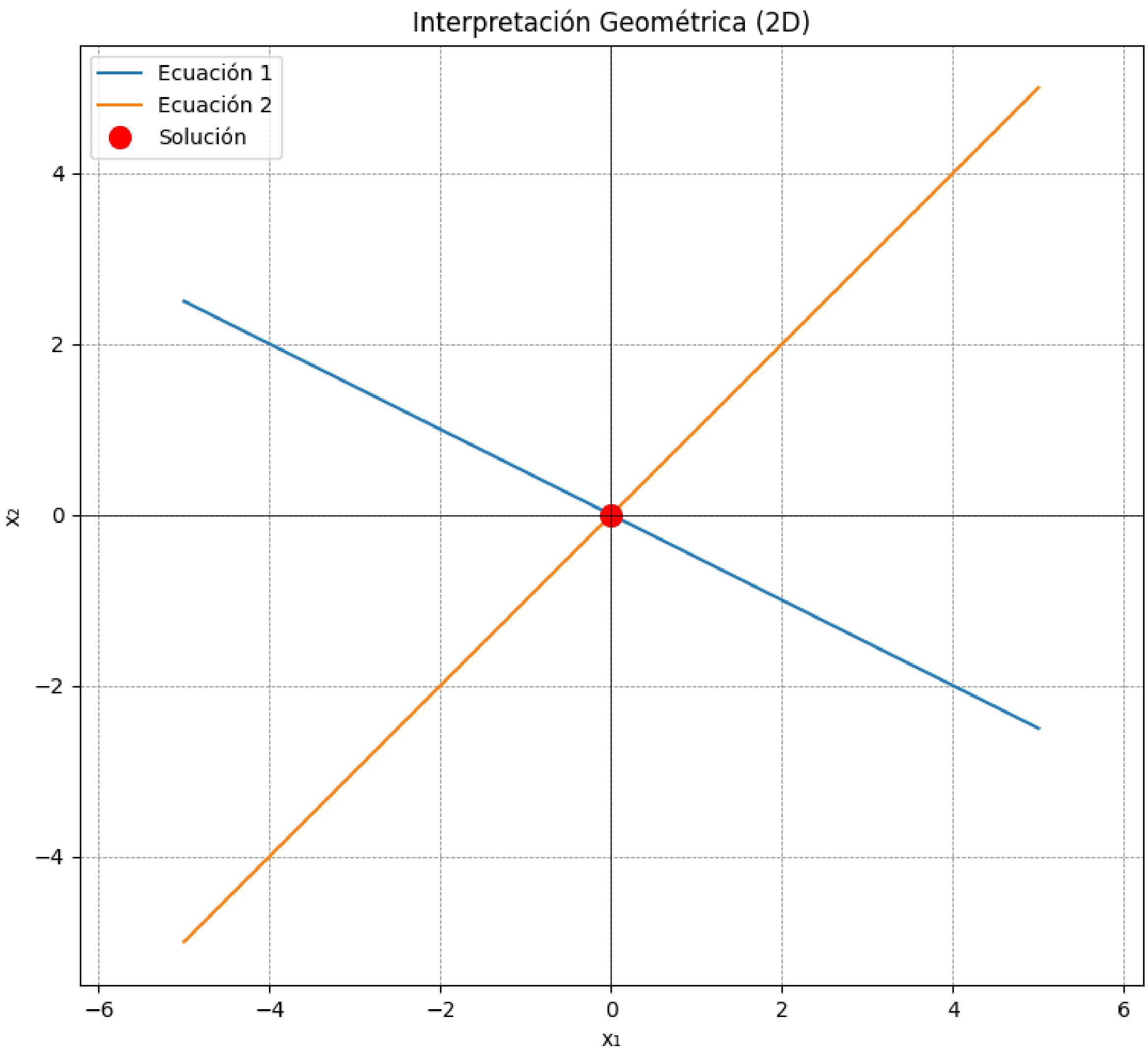
```
        if np.allclose(A @ x, b):
            solution = x
            interpretation = f"El sistema es consistente. Solución encontrada: {np.round
        else:
            interpretation = "El sistema es inconsistente (no tiene solución). Las líneas
    else: # Sistema subdeterminado
        # Comprobamos la consistencia con los rangos
        rank_A = np.linalg.matrix_rank(A)
        rank_Ab = np.linalg.matrix_rank(np.c_[A, b])
        if rank_A == rank_Ab:
            interpretation = "El sistema tiene infinitas soluciones."
            if num_vars == 3 and num_equations == 2:
                interpretation += " La intersección de los dos planos forma una línea."
        else:
            interpretation = "El sistema es inconsistente (sin solución)."

except np.linalg.LinAlgError as e:
    # Caso de matriz singular para np.linalg.solve (no usado aquí, pero es buena práctica
    interpretation = f"Error de álgebra lineal: {e}. El sistema puede ser singular."

# Verificación final para casos especiales (líneas paralelas/coincidentes)
if num_vars == 2 and num_equations == 2:
    det_A = np.linalg.det(A)
    if np.isclose(det_A, 0):
        # Rango de A y [A|b]
        rank_A = np.linalg.matrix_rank(A)
        rank_Ab = np.linalg.matrix_rank(np.c_[A, b])
        if rank_A < rank_Ab:
            interpretation = "El sistema no tiene solución. Geométricamente, son líneas p
        else:
            interpretation = "El sistema tiene infinitas soluciones. Geométricamente, las

print("\nInterpretación: " + interpretation)

# --- Visualización Gráfica ---
if num_vars > 3:
    print("\nNo es posible realizar una gráfica para sistemas con más de 3 variables.")
    return

fig = plt.figure(figsize=(9, 8))

if num_vars == 2:
```

```
        ax = fig.add_subplot(111)
        ax.set_title("Interpretación Geométrica (2D)")
        x_vals = np.linspace(-5, 5, 400)

        for i in range(num_equations):
            if not np.isclose(A[i, 1], 0):
                y_vals = (b[i] - A[i, 0] * x_vals) / A[i, 1]
                ax.plot(x_vals, y_vals, label=f'Ecuación {i+1}')
            else:
                x_vert = b[i] / A[i, 0]
                ax.axvline(x=x_vert, label=f'Ecuación {i+1}', color=f'C{i}')

        if solution is not None and len(solution) == 2:
            ax.plot(solution[0], solution[1], 'ro', markersize=10, label='Solución')

        ax.set_xlabel(variables[0])
        ax.set_ylabel(variables[1])
        ax.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
        ax.axvline(0, color='black', linewidth=0.5)
        ax.grid(color='gray', linestyle='--', linewidth=0.5)
        ax.legend()
        ax.axis('equal')

    elif num_vars == 3:
        ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')
        ax.set_title("Interpretación Geométrica (3D)")
        x_surf = np.linspace(-5, 5, 50)
        y_surf = np.linspace(-5, 5, 50)
        X, Y = np.meshgrid(x_surf, y_surf)

        colors = plt.cm.viridis(np.linspace(0, 1, num_equations))
        for i in range(num_equations):
            if not np.isclose(A[i, 2], 0):
                Z = (b[i] - A[i, 0] * X - A[i, 1] * Y) / A[i, 2]
                ax.plot_surface(X, Y, Z, alpha=0.7, color=colors[i], label=f'Plano {i+1}')

        if num_equations == 2 and "infinitas" in interpretation:
            try:
                dir_vec = np.cross(A[0], A[1])
                A_2x2 = A[:, :2]
                p_on_line_xy = np.linalg.solve(A_2x2, b)
                p_on_line = np.array([p_on_line_xy[0], p_on_line_xy[1], 0])
```

```
                t = np.linspace(-5, 5, 100)
                line_points = p_on_line.reshape(-1, 1) + dir_vec.reshape(-1, 1) * t
                ax.plot(line_points[0, :], line_points[1, :], line_points[2, :], 'k-', linewi
            except np.linalg.LinAlgError:
                pass

        if solution is not None and len(solution) == 3:
            ax.scatter(solution[0], solution[1], solution[2], color='r', s=150, marker='o', c

        ax.set_xlabel(variables[0])
        ax.set_ylabel(variables[1])
        ax.set_zlabel(variables[2])
        ax.view_init(elev=20, azim=-65)

    plt.show()
```

```
A_ejemplo = [[1, 2],
             [1, -1]]

b_ejemplo = [0, 0]
variables_ejemplo = ['x ', 'x ']
solve_and_plot_system(A_ejemplo, b_ejemplo, variables_ejemplo)
```

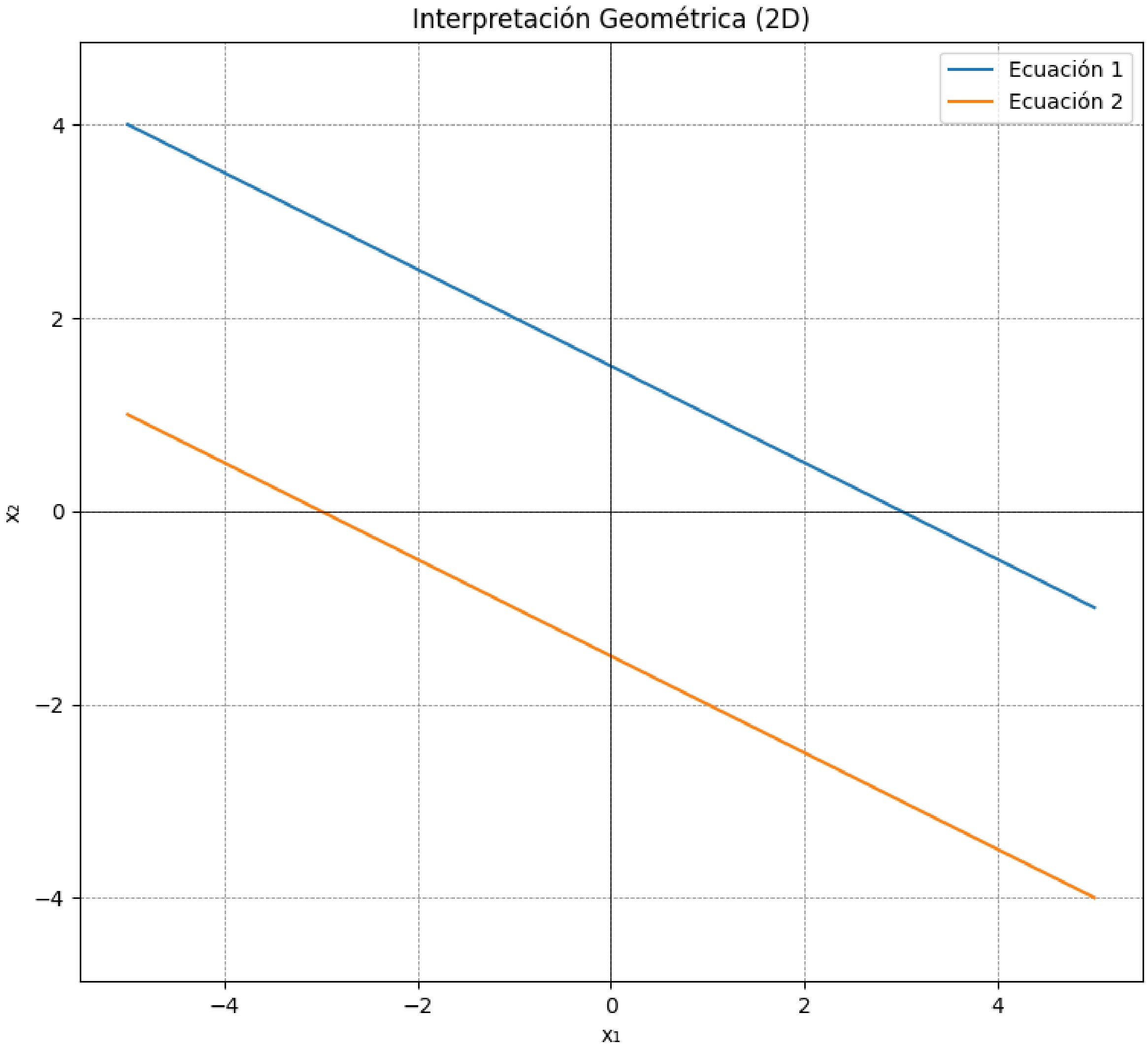
```
Sistema con 2 ecuaciones y 2 variables.
Matriz A:
 [[ 1.  2.]
 [ 1. -1.]]

Vector b:
 [0. 0.]

Interpretación: El sistema es consistente. Solución encontrada: [0. 0.]
```




```
A_ejemplo = [[1, 2],
             [-2, -4]]

b_ejemplo = [3, 6]
variables_ejemplo = ['x ', 'x ']
solve_and_plot_system(A_ejemplo, b_ejemplo, variables_ejemplo)
```

```
Sistema con 2 ecuaciones y 2 variables.
Matriz A:
 [[ 1.  2.]
 [-2. -4.]]
```

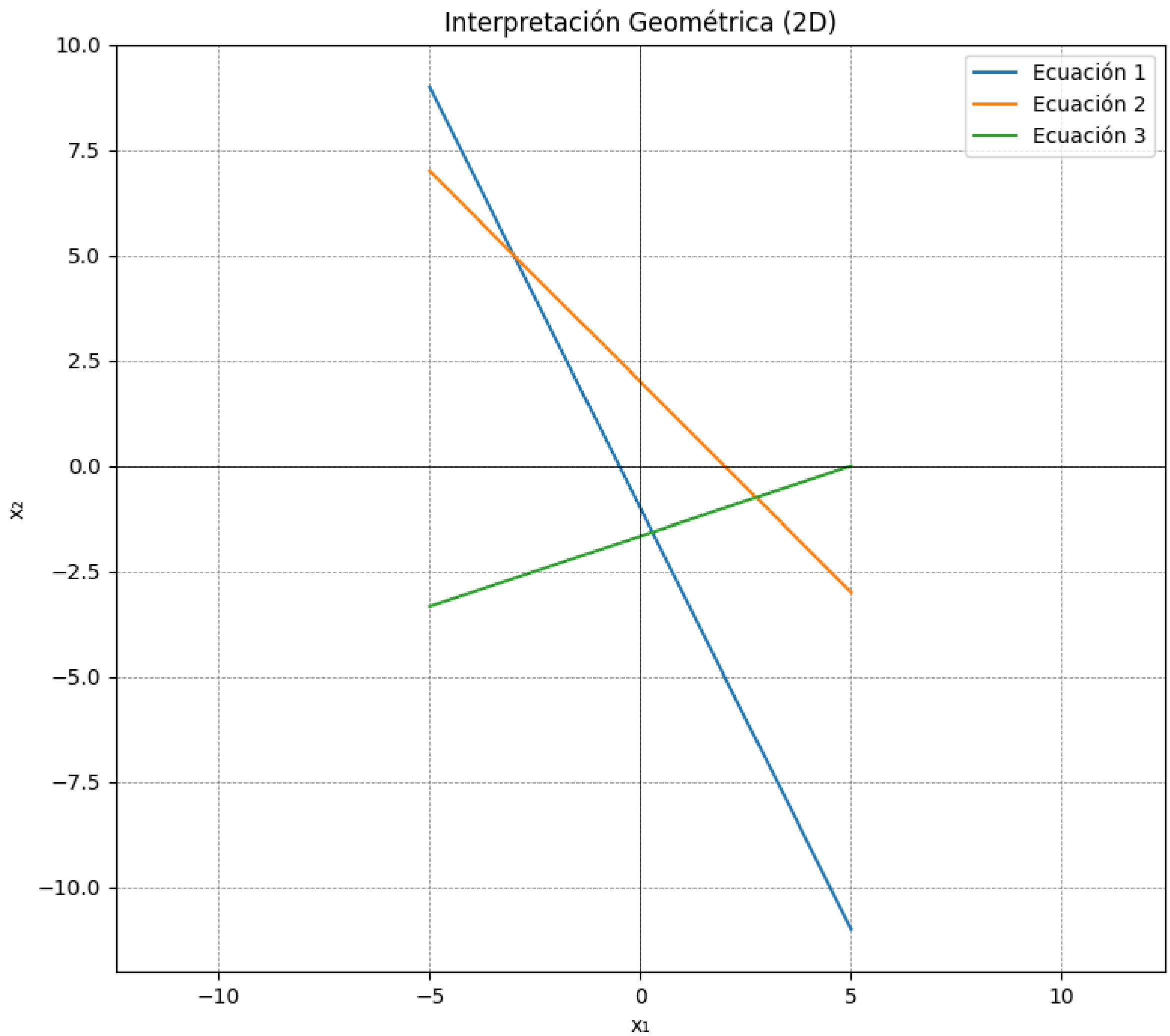
```
Vector b:
 [3. 6.]

Interpretación: El sistema no tiene solución. Geométricamente, son líneas paralelas distintas
```




```
A_ejemplo = [[2, 1],
             [1, 1],
             [1, -3]]

b_ejemplo = [-1, 2, 5]
```

```python
variables_ejemplo = ['x ', 'x ', 'x ']
solve_and_plot_system(A_ejemplo, b_ejemplo, variables_ejemplo)
```

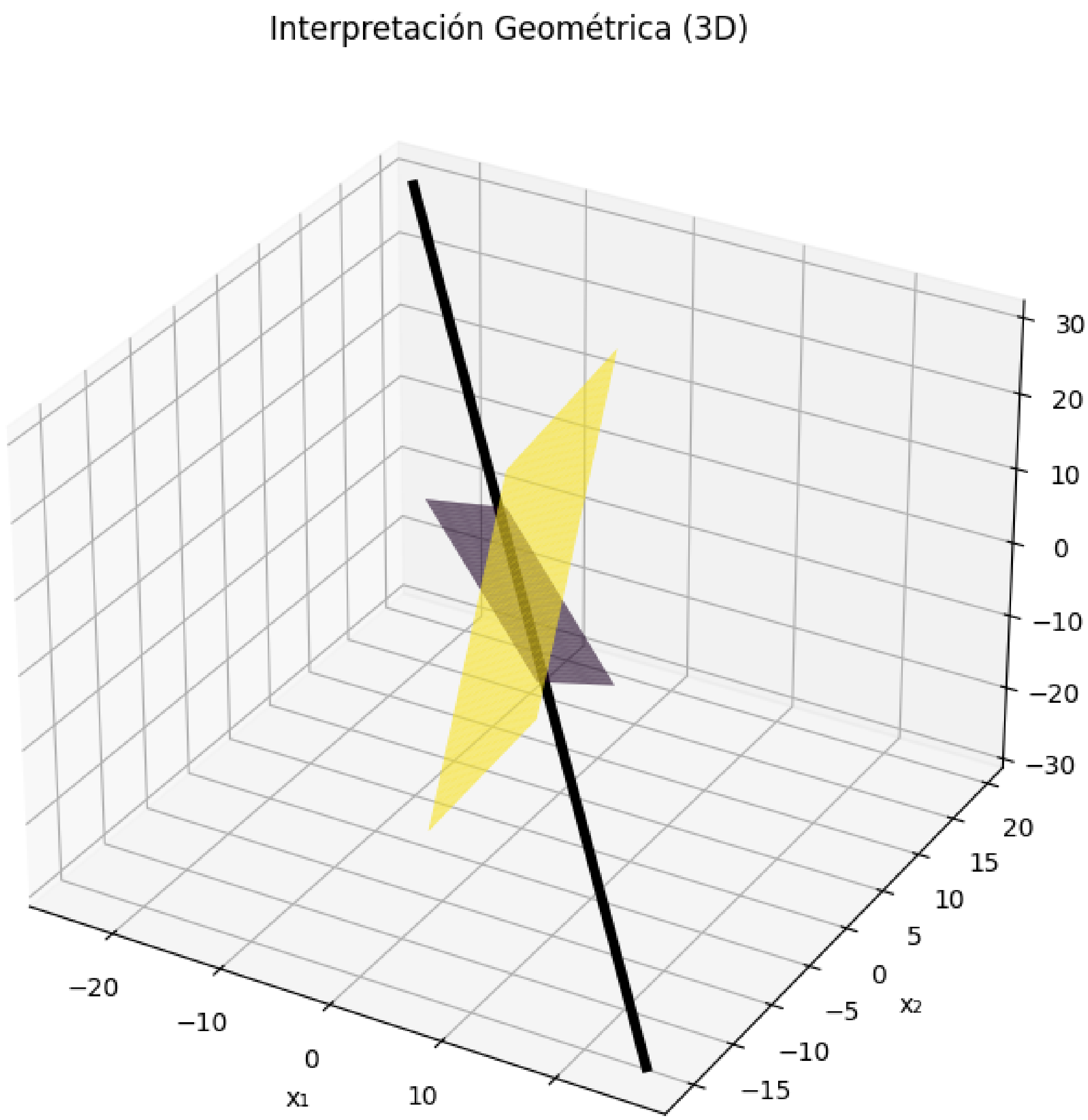
```
Sistema con 3 ecuaciones y 2 variables.
Matriz A:
 [[ 2.  1.]
 [ 1.  1.]
 [ 1. -3.]]

Vector b:
 [-1.  2.  5.]

Interpretación: El sistema es inconsistente (no tiene solución). Las líneas/planos no se inte
```




```
A_ejemplo = [[2, 1, 1],
             [2, 4, -1]]

b_ejemplo = [1, -1]
variables_ejemplo = ['x ', 'x ']
solve_and_plot_system(A_ejemplo, b_ejemplo, variables_ejemplo)
```

```
Sistema con 2 ecuaciones y 3 variables.
Matriz A:
 [[ 2.  1.  1.]
 [ 2.  4. -1.]]
```

```
Vector b:
 [ 1. -1.]

Interpretación: El sistema tiene infinitas soluciones. La intersección de los dos planos forr

IndexError: list index out of range
---------------------------------------------------------------------------
IndexError                                Traceback (most recent call last)
Cell In[5], line 6
      4 b_ejemplo = [1, -1]
      5 variables_ejemplo = ['x ', 'x ']
----> 6 solve_and_plot_system(A_ejemplo, b_ejemplo, variables_ejemplo)
Cell In[1], line 125, in solve_and_plot_system(A, b, variables)
    123     ax.set_xlabel(variables[0])
    124     ax.set_ylabel(variables[1])
--> 125     ax.set_zlabel(variables[2])
    126     ax.view_init(elev=20, azim=-65)
    128 plt.show()
IndexError: list index out of range
```


Interpretación Geométrica (3D)
x1
x2
−20
−10
0
10
20
−20
−15
−10
−5
0
5
10
15
20
−30
−20
−10
0
10
20
30

2. Utilice la eliminación gaussiana con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo de dos dígitos para resolver los siguientes sistemas lineales. No reordene las ecuaciones. (La solución exacta para cada sistema es $x_1 = -1, x_2 = 2, x_3 = 3$.)

a.

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 + x_3 = 8 \\ \frac{5}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -5 \\ \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2 - \frac{1}{3}x_3 = -1 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$$

```
import numpy as np

def round_to_digits(n, digits=2):
    """
    Redondea un número a una cantidad específica de dígitos significativos.
    """
    if n == 0:
        return 0
    # Usar formato de notación científica para redondear a dígitos significativos
    # Ejemplo: round_to_digits(0.0123, 2) -> 0.012
    # Ejemplo: round_to_digits(12345, 2) -> 12000.0
    format_string = f"{{:.{digits-1}e}}"
    return float(format_string.format(n))

def solve_gauss_with_rounding(A, b, digits, exact_solution=None):
    """
    Resuelve un sistema de ecuaciones Ax=b usando eliminación gaussiana
    con sustitución hacia atrás y aritmética de redondeo.

    Args:
        A (list of lists): Matriz de coeficientes.
        b (list): Vector de términos constantes.
        digits (int): El número de dígitos significativos para el redondeo.
        exact_solution (list, optional): La solución exacta para calcular el error.
    """
    # 1. Configuración inicial y redondeo de entradas
```

```
    A_float = np.array(A, dtype=float)
    b_float = np.array(b, dtype=float).reshape(-1, 1)
    n = len(b_float)

    # Redondear la matriz y el vector iniciales a la precisión dada
    A_rounded = np.vectorize(lambda x: round_to_digits(x, digits))(A_float)
    b_rounded = np.vectorize(lambda x: round_to_digits(x, digits))(b_float)

    augmented_matrix = np.hstack([A_rounded, b_rounded])
    print("--- PASO 1: Matriz Aumentada Inicial (con redondeo) ---")
    print(augmented_matrix)
    print("-" * 50)

    # 2. Eliminación Gaussiana (hacia adelante)
    print("--- PASO 2: Eliminación Gaussiana con Redondeo ---")
    M = np.copy(augmented_matrix)

    for i in range(n):
        pivot = M[i, i]
        if pivot == 0:
            print("Error: Elemento pivote es cero. No se puede continuar sin reordenar.")
            return None

        for j in range(i + 1, n):
            # Calcular el multiplicador y redondearlo
            multiplier = round_to_digits(M[j, i] / pivot, digits)
            print(f"\nPaso: F{j+1} = F{j+1} - ({multiplier}) * F{i+1}")

            # Aplicar la transformación a la fila, redondeando en cada operación
            for k in range(i, n + 1):
                term = round_to_digits(multiplier * M[i, k], digits)
                new_val = round_to_digits(M[j, k] - term, digits)
                M[j, k] = new_val

            print("Matriz actual:\n", M)

    print("-" * 50)
    print("--- PASO 3: Matriz Triangular Superior Resultante ---")
    print(M)
    print("-" * 50)

    # 3. Sustitución hacia atrás
```

```
    print("--- PASO 4: Sustitución hacia atrás con Redondeo ---")
    x = np.zeros(n)

    # Resolver para la última variable
    val = M[n - 1, n] / M[n - 1, n - 1]
    x[n - 1] = round_to_digits(val, digits)
    print(f"x{n} = {M[n-1, n]} / {M[n-1, n-1]} = {val:.4f} -> (redondeo) -> {x[n-1]}")

    # Resolver para las variables restantes
    for i in range(n - 2, -1, -1):
        sum_val = 0
        # Calcular la suma de términos conocidos, redondeando en cada paso
        for j in range(i + 1, n):
            term = round_to_digits(M[i, j] * x[j], digits)
            sum_val = round_to_digits(sum_val + term, digits)

        # Calcular el valor de la variable actual, redondeando en cada paso
        numerator = round_to_digits(M[i, n] - sum_val, digits)
        denominator = M[i, i]
        val = numerator / denominator
        x[i] = round_to_digits(val, digits)
        print(f"x{i+1} = ({M[i,n]} - {sum_val}) / {denominator} = {val:.4f} -> (redondeo) ->

    print("-" * 50)
    print("--- PASO 5: Resultados Finales ---")
    print("Solución Calculada (con redondeo):", x)

    # 4. Cálculo de Error
    if exact_solution is not None:
        exact_solution = np.array(exact_solution)
        absolute_error = np.abs(exact_solution - x)
        print("Solución Exacta:", exact_solution)
        print("Error Absoluto:", absolute_error)
        # Prevenir división por cero en el error relativo
        with np.errstate(divide='ignore', invalid='ignore'):
            relative_error = np.where(exact_solution != 0, absolute_error / np.abs(exact_solu
            print("Error Relativo (%):", relative_error)

    return x
```

```
A_a = [[-1, 4, 1],
       [5/3, 2/3, 2/3],
```

```python
       [2, 1, 4]]

b_a = [8, 1, 11]

precision_digitos = 2

solucion_exacta = [-1, 2, 3]

print("****** RESOLVIENDO SISTEMA 'a' CON REDONDEO DE 2 DÍGITOS ******")
solucion_calculada_a = solve_gauss_with_rounding(
    A=A_a,
    b=b_a,
    digits=precision_digitos,
    exact_solution=solucion_exacta
)
```

```
****** RESOLVIENDO SISTEMA 'a' CON REDONDEO DE 2 DÍGITOS ******
--- PASO 1: Matriz Aumentada Inicial (con redondeo) ---
[[-1.    4.    1.    8.  ]
 [ 1.7   0.67  0.67  1.  ]
 [ 2.    1.    4.   11.  ]]
--------------------------------------------------
--- PASO 2: Eliminación Gaussiana con Redondeo ---

Paso: F2 = F2 - (-1.7) * F1
Matriz actual:
 [[-1.   4.   1.   8. ]
 [ 0.   7.5  2.4 15. ]
 [ 2.   1.   4.  11. ]]

Paso: F3 = F3 - (-2.0) * F1
Matriz actual:
 [[-1.   4.   1.   8. ]
 [ 0.   7.5  2.4 15. ]
 [ 0.   9.   6.  27. ]]

Paso: F3 = F3 - (1.2) * F2
Matriz actual:
 [[-1.   4.   1.   8. ]
 [ 0.   7.5  2.4 15. ]
 [ 0.   0.   3.1  9. ]]
--------------------------------------------------
```

```
--- PASO 3: Matriz Triangular Superior Resultante ---
[[-1.   4.   1.   8. ]
 [ 0.   7.5  2.4 15. ]
 [ 0.   0.   3.1  9. ]]
--------------------------------------------------
--- PASO 4: Sustitución hacia atrás con Redondeo ---
x3 = 9.0 / 3.1 = 2.9032 -> (redondeo) -> 2.9
x2 = (15.0 - 7.0) / 7.5 = 1.0667 -> (redondeo) -> 1.1
x1 = (8.0 - 7.3) / -1.0 = -0.7000 -> (redondeo) -> -0.7
--------------------------------------------------
--- PASO 5: Resultados Finales ---
Solución Calculada (con redondeo): [-0.7  1.1  2.9]
Solución Exacta: [-1  2  3]
Error Absoluto: [0.3 0.9 0.1]
Error Relativo (%): [30.         45.          3.33333333]
```

```python
A_a = [[4, 2, -1],
       [1/9, 1/9, -1/3],
       [1, 4, 2]]

b_a = [-5, -1, 9]

precision_digitos = 2

solucion_exacta = [-1, 2, 3]

print("****** RESOLVIENDO SISTEMA 'a' CON REDONDEO DE 2 DÍGITOS ******")
solucion_calculada_a = solve_gauss_with_rounding(
    A=A_a,
    b=b_a,
    digits=precision_digitos,
    exact_solution=solucion_exacta
)
```

```
****** RESOLVIENDO SISTEMA 'a' CON REDONDEO DE 2 DÍGITOS ******
--- PASO 1: Matriz Aumentada Inicial (con redondeo) ---
[[ 4.    2.   -1.   -5.  ]
 [ 0.11  0.11 -0.33 -1.  ]
 [ 1.    4.    2.    9.  ]]
--------------------------------------------------
--- PASO 2: Eliminación Gaussiana con Redondeo ---
```

```
Paso: F2 = F2 - (0.028) * F1
Matriz actual:
 [[ 4.     2.    -1.    -5.   ]
 [ 0.     0.054 -0.3   -0.86 ]
 [ 1.     4.     2.     9.   ]]

Paso: F3 = F3 - (0.25) * F1
Matriz actual:
 [[ 4.     2.    -1.    -5.   ]
 [ 0.     0.054 -0.3   -0.86 ]
 [ 0.     3.5    2.2   10.   ]]

Paso: F3 = F3 - (65.0) * F2
Matriz actual:
 [[ 4.0e+00  2.0e+00 -1.0e+00 -5.0e+00]
 [ 0.0e+00  5.4e-02 -3.0e-01 -8.6e-01]
 [ 0.0e+00  0.0e+00  2.2e+01  6.6e+01]]
--------------------------------------------------
--- PASO 3: Matriz Triangular Superior Resultante ---
[[ 4.0e+00  2.0e+00 -1.0e+00 -5.0e+00]
 [ 0.0e+00  5.4e-02 -3.0e-01 -8.6e-01]
 [ 0.0e+00  0.0e+00  2.2e+01  6.6e+01]]
--------------------------------------------------
--- PASO 4: Sustitución hacia atrás con Redondeo ---
x3 = 66.0 / 22.0 = 3.0000 -> (redondeo) -> 3.0
x2 = (-0.86 - -0.9) / 0.054 = 0.7407 -> (redondeo) -> 0.74
x1 = (-5.0 - -1.5) / 4.0 = -0.8750 -> (redondeo) -> -0.88
--------------------------------------------------
--- PASO 5: Resultados Finales ---
Solución Calculada (con redondeo): [-0.88  0.74  3.  ]
Solución Exacta: [-1  2  3]
Error Absoluto: [0.12 1.26 0.  ]
Error Relativo (%): [12. 63.  0.]
```

3. Utilice el algoritmo de eliminación gaussiana para resolver, de ser posible, los siguientes sistemas lineales, y determine si se necesitan intercambios de fila:

a.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} 2x_1 - 1.5x_2 + 3x_3 = 1 \\ -x_1 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 - 4.5x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} 2x_1 = 3 \\ x_1 + 1.5x_2 = 4.5 \\ -3x_2 + 0.5x_3 = -6.6 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 0.8 \end{cases}$$

d.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = -3 \end{cases}$$

```python
def solve_gauss_with_pivoting(A, b):
    """
    Resuelve un sistema de ecuaciones Ax=b usando eliminación gaussiana
    con pivoteo parcial para determinar si se requieren intercambios de fila.

    Args:
        A (list of lists): Matriz de coeficientes.
        b (list): Vector de términos constantes.

    Returns:
        tuple: Una tupla conteniendo la solución (np.array) y un booleano
               que es True si se realizaron intercambios de fila.
               Devuelve (None, bool) si no hay solución única.
    """
```

```
    # --- 1. Configuración Inicial ---
    # Convertimos a arrays de numpy para operaciones vectoriales
    A = np.array(A, dtype=float)
    b = np.array(b, dtype=float).reshape(-1, 1)
    n = len(b)

    # Creamos la matriz aumentada [A|b]
    M = np.hstack([A, b])
    print("--- Matriz Aumentada Original ---")
    print(M)
    print("-" * 50)

    swaps_performed = False

    # --- 2. Eliminación Gaussiana con Pivoteo Parcial ---
    print("--- Iniciando Eliminación Gaussiana ---")
    for i in range(n):
        # a) Búsqueda del pivote (pivoteo parcial)
        # Buscamos el máximo valor absoluto en la columna actual (desde la fila i hacia abajo
        pivot_row_index = i
        for j in range(i + 1, n):
            if abs(M[j, i]) > abs(M[pivot_row_index, i]):
                pivot_row_index = j

        # b) Intercambio de filas si es necesario
        if pivot_row_index != i:
            print(f"-> Pivoteo requerido en columna {i+1}: Intercambiando fila {i+1} con fila
            # Intercambiamos las filas completas
            M[[i, pivot_row_index]] = M[[pivot_row_index, i]]
            swaps_performed = True
            print("   Matriz después del intercambio:\n", M)

        # c) Verificación de singularidad
        # Si después del pivoteo el elemento en la diagonal sigue siendo cero, la matriz es s
        if M[i, i] == 0:
            print("\n! La matriz es singular (no tiene solución única).")
            return None, swaps_performed

        # d) Eliminación
        # Hacemos cero los elementos debajo del pivote
        for j in range(i + 1, n):
            multiplier = M[j, i] / M[i, i]
```

```python
            M[j, :] -= multiplier * M[i, :]

        print(f"\nMatriz después de la eliminación en la columna {i+1}:\n", M)

    print("-" * 50)
    print("--- Matriz Triangular Superior Final ---")
    print(M)
    print("-" * 50)

    # --- 3. Sustitución hacia atrás ---
    x = np.zeros(n)
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        sum_ax = np.dot(M[i, i+1:n], x[i+1:n])
        x[i] = (M[i, n] - sum_ax) / M[i, i]

    # --- 4. Resultados ---
    print("--- Resultados ---")
    if swaps_performed:
        print("-> Se necesitaron intercambios de fila durante el proceso.")
    else:
        print("-> No se necesitaron intercambios de fila.")

    print("\nSolución Calculada:", x)
    return x, swaps_performed
```

```python
A_a = [[1, -1, 3],
       [3, -3, 1],
       [1,  1, 0]]

# Vector de términos constantes
b_a = [2, -1, 3]

print("****** RESOLVIENDO SISTEMA 'a' CON PIVOTEO ******")
solution_a, swaps_needed_a = solve_gauss_with_pivoting(A=A_a, b=b_a)
```

```
****** RESOLVIENDO SISTEMA 'a' CON PIVOTEO ******
--- Matriz Aumentada Original ---
[[ 1. -1.  3.  2.]
 [ 3. -3.  1. -1.]
 [ 1.  1.  0.  3.]]
--------------------------------------------------
```

```
--- Iniciando Eliminación Gaussiana ---
-> Pivoteo requerido en columna 1: Intercambiando fila 1 con fila 2.
   Matriz después del intercambio:
 [[ 3. -3.  1. -1.]
 [ 1. -1.  3.  2.]
 [ 1.  1.  0.  3.]]

Matriz después de la eliminación en la columna 1:
 [[ 3.         -3.          1.         -1.        ]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.33333333]
 [ 0.          2.         -0.33333333  3.33333333]]
-> Pivoteo requerido en columna 2: Intercambiando fila 2 con fila 3.
   Matriz después del intercambio:
 [[ 3.         -3.          1.         -1.        ]
 [ 0.          2.         -0.33333333  3.33333333]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.33333333]]

Matriz después de la eliminación en la columna 2:
 [[ 3.         -3.          1.         -1.        ]
 [ 0.          2.         -0.33333333  3.33333333]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.33333333]]

Matriz después de la eliminación en la columna 3:
 [[ 3.         -3.          1.         -1.        ]
 [ 0.          2.         -0.33333333  3.33333333]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.33333333]]
--------------------------------------------------
--- Matriz Triangular Superior Final ---
[[ 3.         -3.          1.         -1.        ]
 [ 0.          2.         -0.33333333  3.33333333]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.33333333]]
--------------------------------------------------
--- Resultados ---
-> Se necesitaron intercambios de fila durante el proceso.

Solución Calculada: [1.1875 1.8125 0.875 ]
```

```
A_b = [[2, -1.5, 3],
       [-1, 0, 2],
       [4, -4.5, 5]]
B_b = [1, 3, 1]
```

```python
solve_gauss_with_pivoting(A_b, B_b)
```

```
--- Matriz Aumentada Original ---
[[ 2.  -1.5  3.   1. ]
 [-1.   0.   2.   3. ]
 [ 4.  -4.5  5.   1. ]]
--------------------------------------------------
--- Iniciando Eliminación Gaussiana ---
-> Pivoteo requerido en columna 1: Intercambiando fila 1 con fila 3.
   Matriz después del intercambio:
 [[ 4.  -4.5  5.   1. ]
 [-1.   0.   2.   3. ]
 [ 2.  -1.5  3.   1. ]]

Matriz después de la eliminación en la columna 1:
 [[ 4.    -4.5    5.     1.   ]
 [ 0.    -1.125  3.25   3.25 ]
 [ 0.     0.75   0.5    0.5  ]]

Matriz después de la eliminación en la columna 2:
 [[ 4.         -4.5         5.          1.        ]
 [ 0.         -1.125       3.25        3.25      ]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.66666667]]

Matriz después de la eliminación en la columna 3:
 [[ 4.         -4.5         5.          1.        ]
 [ 0.         -1.125       3.25        3.25      ]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.66666667]]
--------------------------------------------------
--- Matriz Triangular Superior Final ---
[[ 4.         -4.5         5.          1.        ]
 [ 0.         -1.125       3.25        3.25      ]
 [ 0.          0.          2.66666667  2.66666667]]
--------------------------------------------------
--- Resultados ---
-> Se necesitaron intercambios de fila durante el proceso.

Solución Calculada: [-1. -0.  1.]
```

```
(array([-1., -0.,  1.]), True)
```

```python
A_c = [[2, 0, 0, 0],
       [1, 1.5, 0, 0],
        [0, -3, 0.5, 0],
         [2, -2, 1, 1]]

B_c = [3, 4.5, -6.6, 0.8]

solve_gauss_with_pivoting(A_c, B_c)
```

```
--- Matriz Aumentada Original ---
[[ 2.   0.   0.   0.   3. ]
 [ 1.   1.5  0.   0.   4.5]
 [ 0.  -3.   0.5  0.  -6.6]
 [ 2.  -2.   1.   1.   0.8]]
--------------------------------------------------
--- Iniciando Eliminación Gaussiana ---

Matriz después de la eliminación en la columna 1:
 [[ 2.   0.   0.   0.   3. ]
 [ 0.   1.5  0.   0.   3. ]
 [ 0.  -3.   0.5  0.  -6.6]
 [ 0.  -2.   1.   1.  -2.2]]
-> Pivoteo requerido en columna 2: Intercambiando fila 2 con fila 3.
   Matriz después del intercambio:
 [[ 2.   0.   0.   0.   3. ]
 [ 0.  -3.   0.5  0.  -6.6]
 [ 0.   1.5  0.   0.   3. ]
 [ 0.  -2.   1.   1.  -2.2]]

Matriz después de la eliminación en la columna 2:
 [[ 2.          0.          0.          0.          3.        ]
 [ 0.         -3.          0.5         0.         -6.6       ]
 [ 0.          0.          0.25        0.         -0.3       ]
 [ 0.          0.          0.66666667  1.          2.2       ]]
-> Pivoteo requerido en columna 3: Intercambiando fila 3 con fila 4.
   Matriz después del intercambio:
 [[ 2.          0.          0.          0.          3.        ]
 [ 0.         -3.          0.5         0.         -6.6       ]
 [ 0.          0.          0.66666667  1.          2.2       ]
 [ 0.          0.          0.25        0.         -0.3       ]]

Matriz después de la eliminación en la columna 3:
```

```
 [[ 2.          0.          0.          0.          3.        ]
 [ 0.         -3.          0.5         0.         -6.6       ]
 [ 0.          0.          0.66666667  1.          2.2       ]
 [ 0.          0.          0.         -0.375      -1.125     ]]

Matriz después de la eliminación en la columna 4:
 [[ 2.          0.          0.          0.          3.        ]
 [ 0.         -3.          0.5         0.         -6.6       ]
 [ 0.          0.          0.66666667  1.          2.2       ]
 [ 0.          0.          0.         -0.375      -1.125     ]]
--------------------------------------------------
--- Matriz Triangular Superior Final ---
[[ 2.          0.          0.          0.          3.        ]
 [ 0.         -3.          0.5         0.         -6.6       ]
 [ 0.          0.          0.66666667  1.          2.2       ]
 [ 0.          0.          0.         -0.375      -1.125     ]]
--------------------------------------------------
--- Resultados ---
-> Se necesitaron intercambios de fila durante el proceso.

Solución Calculada: [ 1.5  2.  -1.2  3. ]

(array([ 1.5,  2. , -1.2,  3. ]), True)
```

```
A_d = [[1, 1, 0, 1],
       [2, 1, -1, 1],
       [4, -1, -2, 2],
       [3, -1, -1, 2]]

B_d = [2, 1, 0, -3]

solve_gauss_with_pivoting(A_d, B_d)
```

```
--- Matriz Aumentada Original ---
[[ 1.  1.  0.  1.  2.]
 [ 2.  1. -1.  1.  1.]
 [ 4. -1. -2.  2.  0.]
 [ 3. -1. -1.  2. -3.]]
--------------------------------------------------
--- Iniciando Eliminación Gaussiana ---
-> Pivoteo requerido en columna 1: Intercambiando fila 1 con fila 3.
   Matriz después del intercambio:
```

```
[[ 4. -1. -2.  2.  0.]
 [ 2.  1. -1.  1.  1.]
 [ 1.  1.  0.  1.  2.]
 [ 3. -1. -1.  2. -3.]]

Matriz después de la eliminación en la columna 1:
[[ 4.   -1.   -2.    2.    0.  ]
 [ 0.    1.5   0.    0.    1.  ]
 [ 0.    1.25  0.5   0.5   2.  ]
 [ 0.   -0.25  0.5   0.5  -3.  ]]

Matriz después de la eliminación en la columna 2:
[[ 4.         -1.         -2.          2.          0.        ]
 [ 0.         1.5         0.          0.          1.        ]
 [ 0.         0.          0.5         0.5         1.16666667]
 [ 0.         0.          0.5         0.5        -2.83333333]]

Matriz después de la eliminación en la columna 3:
[[ 4.         -1.         -2.          2.          0.        ]
 [ 0.         1.5         0.          0.          1.        ]
 [ 0.         0.          0.5         0.5         1.16666667]
 [ 0.         0.          0.          0.         -4.        ]]

! La matriz es singular (no tiene solución única).

(None, True)
```

4. Use el algoritmo de eliminación gaussiana y la aritmética computacional de precisión de 32 bits para resolver los siguientes sistemas lineales.

a.

$$\begin{cases} \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 = 9 \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 8 \\ \frac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

b.

$$\begin{cases} 3.333x_1 + 15920x_2 - 10.333x_3 = 15913 \\ 2.222x_1 + 16.71x_2 + 9.612x_3 = 28.544 \\ 1.5611x_1 + 5.1791x_2 + 1.6852x_3 = 8.4254 \end{cases}$$

c.

$$\begin{cases} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{5}x_4 = \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{5}x_3 + \frac{1}{6}x_4 = \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{5}x_2 + \frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{7}x_4 = \frac{1}{9} \end{cases}$$

d.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 3x_5 = 7 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 2 \\ -2x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = -5 \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 5x_5 = 6 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = -3 \end{cases}$$

```python
def solve_gauss_32bit(A, b):
    """
    Resuelve un sistema Ax=b usando eliminación gaussiana con pivoteo parcial
    y forzando el uso de aritmética de precisión de 32 bits (float32).

    Args:
        A (list of lists): Matriz de coeficientes.
        b (list): Vector de términos constantes.
    """
    # --- 1. Configuración Inicial con Precisión de 32 bits ---
    # La clave es dtype=np.float32. NumPy forzará a que todos los
    # números y cálculos se mantengan en esta precisión.
    try:
        A_32 = np.array(A, dtype=np.float32)
        b_32 = np.array(b, dtype=np.float32).reshape(-1, 1)
        n = len(b_32)
    except ValueError:
        print("Error: Asegúrate de que todas las filas de la matriz A tengan el mismo número
        return None

    # La matriz aumentada se crea y se mantiene en 32 bits.
    M = np.hstack([A_32, b_32])
    print("--- Matriz Aumentada Original (convertida a precisión 32-bit) ---")
    print(M)
    print("-" * 60)

    # --- 2. Eliminación Gaussiana con Pivoteo Parcial ---
    print("--- Iniciando Eliminación Gaussiana (aritmética 32-bit) ---")
```

```
    for i in range(n):
        # Pivoteo parcial para estabilidad numérica
        pivot_row_index = i
        # Buscamos la fila con el mayor pivote en la columna actual
        for j in range(i + 1, n):
            if abs(M[j, i]) > abs(M[pivot_row_index, i]):
                pivot_row_index = j

        # Si encontramos un mejor pivote, intercambiamos filas
        if pivot_row_index != i:
            M[[i, pivot_row_index]] = M[[pivot_row_index, i]]
            print(f"-> Pivoteo: Fila {i+1} <-> Fila {pivot_row_index+1}")

        # Verificación de singularidad (si el mejor pivote es 0, la matriz es singular)
        if M[i, i] == 0:
            print("\n! La matriz es singular (no tiene solución única).")
            return None

        # Eliminación: hacemos cero los elementos debajo del pivote
        for j in range(i + 1, n):
            # Todas las operaciones (división, multiplicación, resta)
            # se realizan manteniendo la precisión de 32 bits.
            multiplier = M[j, i] / M[i, i]
            M[j, :] -= multiplier * M[i, :]

    print("\n--- Matriz Triangular Superior Final ---")
    print(M)
    print("-" * 60)

    # --- 3. Sustitución hacia atrás ---
    # El vector solución también se inicializa y calcula en 32 bits
    x = np.zeros(n, dtype=np.float32)
    for i in range(n - 1, -1, -1):
        # np.dot y el resto de operaciones respetan el dtype de los arrays
        sum_ax = np.dot(M[i, i+1:n], x[i+1:n])
        x[i] = (M[i, n] - sum_ax) / M[i, i]

    # --- 4. Resultados ---
    print("--- Resultados ---")
    print("Solución Calculada (precisión 32-bit):")
    # Imprimimos con alta precisión para ver el valor decimal exacto que representa el float3
    for i in range(n):
```

```python
        print(f"  x{i+1} = {x[i]:.8f}")

    return x
```

```python
A_a = [[1/4, 1/5, 1/6],
       [1/3, 1/4, 1/5],
       [1/2, 1,   2]]
b_a = [9, 8, 8]
solve_gauss_32bit(A_a, b_a)
print("\n" + "="*80 + "\n")
```

```
--- Matriz Aumentada Original (convertida a precisión 32-bit) ---
[[0.25       0.2        0.16666667 9.        ]
 [0.33333334 0.25       0.2        8.        ]
 [0.5        1.         2.         8.        ]]
------------------------------------------------------------
--- Iniciando Eliminación Gaussiana (aritmética 32-bit) ---
-> Pivoteo: Fila 1 <-> Fila 3

--- Matriz Triangular Superior Final ---
[[ 0.5         1.          2.          8.        ]
 [ 0.         -0.4166667  -1.1333333   2.6666665 ]
 [ 0.          0.         -0.01733333  3.0800002 ]]
------------------------------------------------------------
--- Resultados ---
Solución Calculada (precisión 32-bit):
  x1 = -227.07696533
  x2 = 476.92321777
  x3 = -177.69236755

================================================================================
```

```python
A_b = [[3.333, 15920, -10.333],
       [2.222, 16.71, 9.612],
       [1.5611, 5.1791, 1.6852]]
b_b = [15913, 28.544, 8.4254]
solve_gauss_32bit(A_b, b_b)
print("\n" + "="*80 + "\n")
```

```
--- Matriz Aumentada Original (convertida a precisión 32-bit) ---
[[ 3.3330e+00  1.5920e+04 -1.0333e+01  1.5913e+04]
```

```
 [ 2.2220e+00  1.6710e+01  9.6120e+00  2.8544e+01]
 [ 1.5611e+00  5.1791e+00  1.6852e+00  8.4254e+00]]
------------------------------------------------------------
--- Iniciando Eliminación Gaussiana (aritmética 32-bit) ---

--- Matriz Triangular Superior Final ---
[[ 3.3329999e+00  1.5920000e+04 -1.0333000e+01  1.5913000e+04]
 [ 0.0000000e+00 -1.0596623e+04  1.6500668e+01 -1.0580122e+04]
 [ 0.0000000e+00  0.0000000e+00 -5.0780745e+00 -5.0786133e+00]]
------------------------------------------------------------
--- Resultados ---
Solución Calculada (precisión 32-bit):
  x1 = 0.99970937
  x2 = 1.00000012
  x3 = 1.00010610

================================================================================
```

```python
A_d = [[2,  1, -1,  1, -3],
       [1,  0,  2, -1,  1],
       [0, -2, -1,  1, -1],
       [3,  1, -4,  0,  5],
       [1, -1, -1, -1,  1]]
b_d = [7, 2, -5, 6, -3]
solve_gauss_32bit(A_d, b_d)
print("\n" + "="*80 + "\n")
```

```
--- Matriz Aumentada Original (convertida a precisión 32-bit) ---
[[ 2.  1. -1.  1. -3.  7.]
 [ 1.  0.  2. -1.  1.  2.]
 [ 0. -2. -1.  1. -1. -5.]
 [ 3.  1. -4.  0.  5.  6.]
 [ 1. -1. -1. -1.  1. -3.]]
------------------------------------------------------------
--- Iniciando Eliminación Gaussiana (aritmética 32-bit) ---
-> Pivoteo: Fila 1 <-> Fila 4
-> Pivoteo: Fila 2 <-> Fila 3

--- Matriz Triangular Superior Final ---
[[ 3.          1.         -4.          0.          5.          6.        ]
 [ 0.         -2.         -1.          1.         -1.         -5.        ]
 [ 0.          0.          3.5000002  -1.1666666  -0.50000006  0.8333334 ]
```

```
 [ 0.          0.          0.          1.6666666  -6.285714    1.8095238 ]
 [ 0.          0.          0.          0.         -4.885715   -0.45714247]]
------------------------------------------------------------
--- Resultados ---
Solución Calculada (precisión 32-bit):
  x1 = 1.88304090
  x2 = 2.80701756
  x3 = 0.73099399
  x4 = 1.43859613
  x5 = 0.09356716

================================================================================
```

5. Dado el sistema lineal:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + \alpha x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - \alpha x_3 = 3 \\ \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

a. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema no tiene soluciones.
b. Encuentre el valor(es) de α para los que el sistema tiene un número infinito de soluciones.
c. Suponga que existe una única solución para una α determinada, encuentre la solución.

```python
import sympy

def analyze_system_with_parameter(A_symbolic, b_symbolic, symbol):
    """
    Analiza un sistema de ecuaciones lineales Ax=b con un parámetro simbólico.

    Args:
        A_symbolic (sympy.Matrix): Matriz de coeficientes con el símbolo.
        b_symbolic (sympy.Matrix): Vector de constantes con el símbolo.
        symbol (sympy.Symbol): El símbolo utilizado en las matrices.
    """
    if not A_symbolic.is_square:
        print("Error: La matriz de coeficientes debe ser cuadrada.")
        return

    # --- ANÁLISIS DE LA MATRIZ Y SU DETERMINANTE ---
    print("--- Análisis del Determinante ---")
```

```
    # 1. Calcular el determinante en términos del símbolo
    det_A = A_symbolic.det()
    print(f"La matriz de coeficientes A es:\n{A_symbolic}")
    print(f"\nEl determinante de A es: det(A) = {sympy.simplify(det_A)}")

    # 2. Encontrar los valores críticos del símbolo resolviendo det(A) = 0
    print("\nSe busca para qué valores del símbolo el determinante es cero.")
    critical_values = sympy.solve(det_A, symbol)
    print(f"El determinante es cero cuando {symbol} está en {critical_values}.")
    print("-" * 60)

    # --- ANÁLISIS DE LOS CASOS CRÍTICOS (det(A) = 0) ---
    print("--- Análisis de los Casos Críticos (No hay solución única) ---")
    for val in critical_values:
        print(f"\nAnálisis para {symbol} = {val}:")

        # Sustituir el valor crítico en la matriz aumentada
        A_sub = A_symbolic.subs(symbol, val)
        b_sub = b_symbolic.subs(symbol, val)
        augmented_matrix = A_sub.row_join(b_sub)
        print("Matriz aumentada para este valor:\n", augmented_matrix)

        # Llevar a la forma escalonada reducida por filas (RREF) para analizar el rango
        rref_matrix, _ = augmented_matrix.rref()
        print("\nForma escalonada reducida por filas (RREF):\n", rref_matrix)

        # Verificar si hay una contradicción (fila [0, 0, ..., n] con n != 0)
        inconsistent = any(all(elem == 0 for elem in row[:-1]) and row[-1] != 0 for row in r

        if inconsistent:
            print(f"\nConclusión (a): Para {symbol} = {val}, el sistema es inconsistente y N
        else:
            print(f"\nConclusión (b): Para {symbol} = {val}, el sistema es consistente y tie
    print("-" * 60)

    # --- ANÁLISIS DEL CASO GENERAL (det(A) != 0) ---
    print("--- Análisis del Caso General (Solución única) ---")
    print(f"Existe una solución única siempre que {symbol} no sea uno de los valores crítico

    # 3. Usar la Regla de Cramer para encontrar la solución general
    print("\nUsando la Regla de Cramer para encontrar la solución en términos del símbolo:")
```

```
    solutions = []
    for i in range(A_symbolic.cols):
        # Crear la matriz Ai reemplazando la columna i por el vector b
        Ai = A_symbolic.copy()
        Ai[:, i] = b_symbolic

        det_Ai = Ai.det()
        # Simplificar la solución xi = det(Ai) / det(A)
        xi = sympy.simplify(det_Ai / det_A)
        solutions.append(xi)
        print(f"  x{i+1} = det(A{i+1}) / det(A) = ({sympy.simplify(det_Ai)}) / ({sympy.simpl

    print("\nConclusión (c): La solución única para un   dado (distinto de los valores crític
    for i, sol in enumerate(solutions):
        print(f"  x{i+1} = {sol}")
```

```
# --- DATOS DE ENTRADA DEL PROBLEMA ---

# 1. Definir 'alpha' como un símbolo matemático
alpha = sympy.Symbol(' ')

# 2. Definir la matriz de coeficientes A con el símbolo
A_system = sympy.Matrix([
    [1,     -1,   alpha],
    [-1,     2,  -alpha],
    [alpha,  1,       1]
])

# 3. Definir el vector de constantes b
b_system = sympy.Matrix([-2, 3, 2])

# --- LLAMADA A LA FUNCIÓN DE ANÁLISIS ---
analyze_system_with_parameter(A_symbolic=A_system, b_symbolic=b_system, symbol=alpha)
```

```
--- Análisis del Determinante ---
La matriz de coeficientes A es:
Matrix([[1, -1,  ], [-1, 2, - ], [ , 1, 1]])

El determinante de A es: det(A) = 1 -  **2

Se busca para qué valores del símbolo el determinante es cero.
```

```
El determinante es cero cuando  está en [-1, 1].
------------------------------------------------------------
--- Análisis de los Casos Críticos (No hay solución única) ---

Análisis para  = -1:
Matriz aumentada para este valor:
 Matrix([[1, -1, -1, -2], [-1, 2, 1, 3], [-1, 1, 1, 2]])

Forma escalonada reducida por filas (RREF):
 Matrix([[1, 0, -1, -1], [0, 1, 0, 1], [0, 0, 0, 0]])

Conclusión (b): Para  = -1, el sistema es consistente y tiene INFINITAS SOLUCIONES.

Análisis para  = 1:
Matriz aumentada para este valor:
 Matrix([[1, -1, 1, -2], [-1, 2, -1, 3], [1, 1, 1, 2]])

Forma escalonada reducida por filas (RREF):
 Matrix([[1, 0, 1, 0], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 0, 1]])

Conclusión (a): Para  = 1, el sistema es inconsistente y NO TIENE SOLUCIONES.
------------------------------------------------------------
--- Análisis del Caso General (Solución única) ---
Existe una solución única siempre que  no sea uno de los valores críticos [-1, 1].

Usando la Regla de Cramer para encontrar la solución en términos del símbolo:
  x1 = det(A1) / det(A) = (-  - 1) / (1 -  **2) = 1/( - 1)
  x2 = det(A2) / det(A) = (1 -  **2) / (1 -  **2) = 1
  x3 = det(A3) / det(A) = ( + 1) / (1 -  **2) = -1/( - 1)

Conclusión (c): La solución única para un  dado (distinto de los valores críticos) es:
  x1 = 1/( - 1)
  x2 = 1
  x3 = -1/( - 1)
```