Conception et Pratique de l'Algorithmique

http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/cpa2016

Binh-Minh Bui-Xuan

Paris, Janvier 2016

Organisation

EQUIPE PÉDAGOGIQUE :

- Binh-Minh Bui-Xuan (semaines 1-3, 10)
- Michèle Soria (semaines 4-6)
- Christoph Dürr (semaines 7-9)
- Vincent Botbol (TME)

CONTRÔLES :

- projet principal (25 Février) + mini projets
- session 1 = projets + examen écrit mi-Mai
- session 2 (rattrapage) = uniquement examen écrit mi-Juin

Résumé

Géométrie algorithmique :

– collision d'objets, conteneur (cercle, rectangle, polygone)
– qualité vs. performance

Algorithme de construction d'arbres :

– arbre couvrant, arbre de Steiner, décomposition arborescente
– concours de programmation

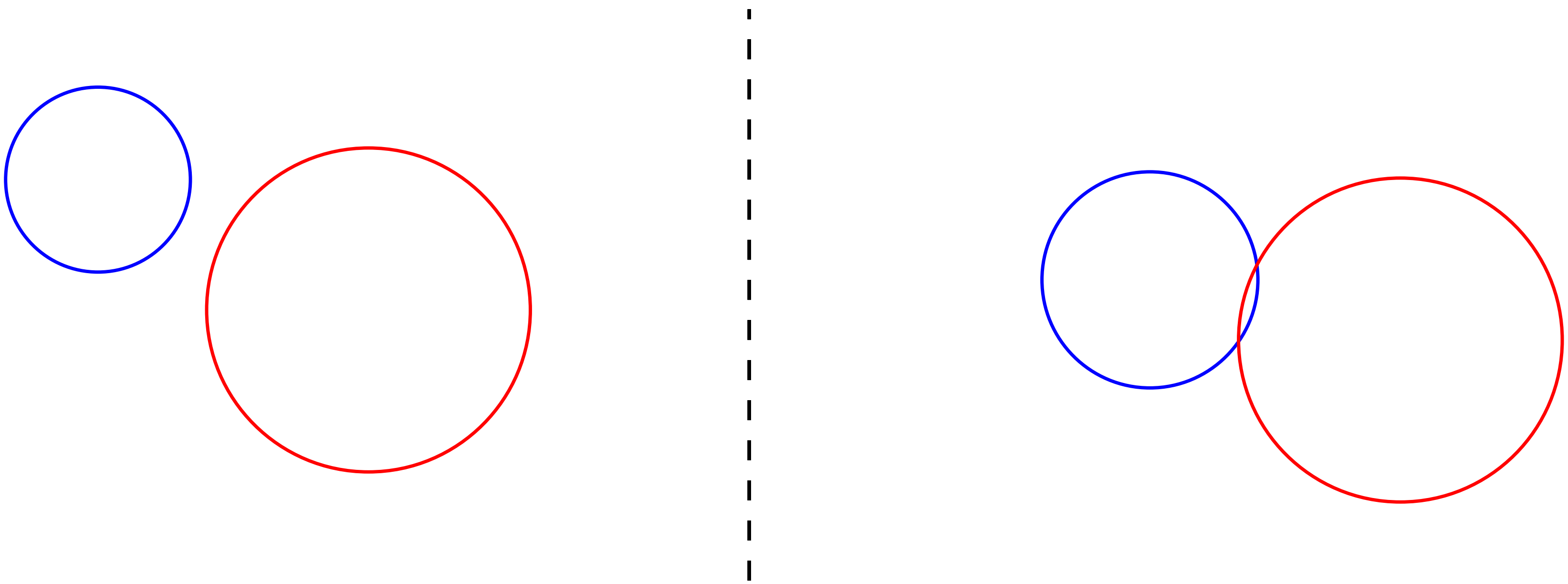
Algorithme de flux :

– analyse de log, partitionnement spatial des données
– complexité sous-linéaire

Géométrie algorithmique

Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?



Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?

Collision d'objets géométriques

QUESTION : touché ?

Exercice : collision entre cercles

EXERCICE : Soient deux cercles `c1` et `c2` de rayons `c1.radius` et `c2.radius`, dont les coordonnées des centres sont `(c1.x,c1.y)` et `(c2.x,c2.y)`. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles s'intersectent.

SUPPORT :

`http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/files/RBB_collision_canevas.html`

Exercice : collision entre cercles

EXERCICE : Soient deux cercles `c1` et `c2` de rayons `c1.radius` et `c2.radius`, dont les coordonnées des centres sont `(c1.x,c1.y)` et `(c2.x,c2.y)`. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cercles s'intersectent.

SUPPORT :

http://www-apr.lip6.fr/~buixuan/files/RBB_collision_canevas.html

QUESTION : erreurs d'arrondi ?

Problème du cercle minimum

IN : `Points`, une liste de coordonnées de points en 2D

OUT : cercle couvrant tous les points de la liste, de rayon minimum

Solution naïve

LEMME 1 : *si un cercle de diamètre égale à la distance de deux points de la liste couvre tout autre point de la liste, alors ce cercle est un cercle couvrant de rayon minimum.*

LEMME 2 : *en 2D, il existe un et un seul cercle passant par 3 points non-colinéaires.*

Solution naïve

Lemme 1 : *si un cercle de diamètre égale à la distance de deux points de la liste couvre tout autre point de la liste, alors ce cercle est un cercle couvrant de rayon minimum.*

Lemme 2 : *en 2D, il existe un et un seul cercle passant par 3 points non-colinéaires.*

Théorème : *le problème du cercle minimum peut être résolu en temps $O(n^4)$.*

Question : algorithme prouvant ce théorème ?

Notes pour révision

L'agorithme naïf en question :

1. pour tout `p` dans `Points`
2.   pour tout `q` dans `Points`
3.   `c` $\leftarrow$ cercle de centre $\frac{\mathtt{p}+\mathtt{q}}{2}$ de diamètre $|\mathtt{pq}|$
4.   si `c` couvre tous les points de `Points` alors retourner `c`
5. `resultat` $\leftarrow$ cercle de rayon infini
6. pour tout `p` dans `Points`
7.   pour tout `q` dans `Points`
8.   pour tout `r` dans `Points`
9.   `c` $\leftarrow$ cercle circonscrit de `p`, `q` et `r`
10.   si `c` couvre`Points` et `c` plus petit que `resultat`
11.   alors `resultat` $\leftarrow$ `c`
12. retourner `c`

Exercice : estimation du temps

QUESTION : un ordinateur de l'ordre du Giga-Hertz exécutant un algorithme en $O(n^4)$, avec $n = 10000$, quel est le temps d'exécution attendu (en ordre de grandeur) ?

- algorithme en $O(n^3)$?
- algorithme en $O(n^2)$?
- algorithme en $O(n)$?
- algorithme en $O(\log n)$?

Trade-off algorithmique

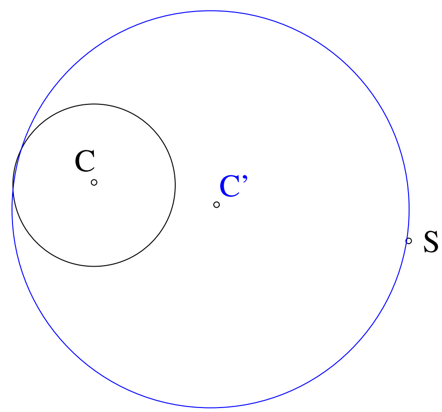
Qualité du résultat vs. temps d'exécution :

Qualité gagne	Temps gagne	Trade-off
imagerie médicale	audio-visuel	concours de prog.
systèmes critiques	appli. en temps réel	critère d'optimisation

Techniques d'approximation

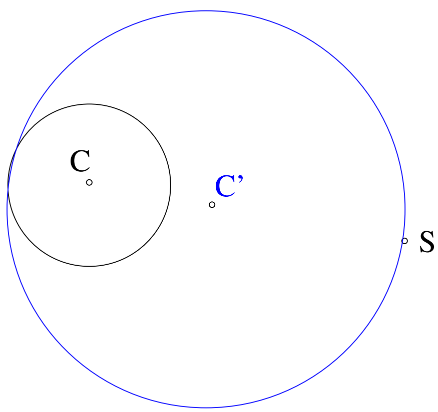
Algorithme incrémental

IDÉE : si un cercle ne couvre pas tous les points, on l'agrandit pour couvrir l'ancien cercle, plus au moins un nouveau point.



Algorithme incrémental

IDÉE : si un cercle ne couvre pas tous les points, on l'agrandit pour couvrir l'ancien cercle, plus au moins un nouveau point.

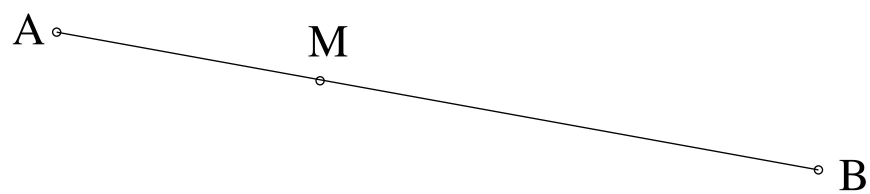


QUESTION : coordonnées de C' sachant C, S, ancien rayon r ?

Coordonnées barycentriques

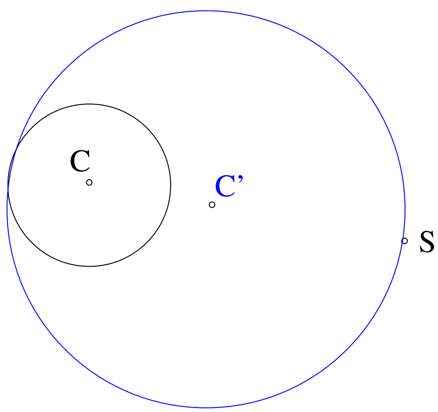
FORMULE : $M = \alpha \cdot A + \beta \cdot B$, **avec**

- $\alpha = |MB|/|AB|$
- $\beta = |MA|/|AB|$



Algorithme incrémental

IDÉE : si un cercle ne couvre pas tous les points, on l'agrandit pour couvrir l'ancien cercle, plus au moins un nouveau point.



QUESTION : coordonnées de C' sachant C, S, ancien rayon r ?

Peut on faire mieux ?

Vue générale de l'algorithmique

Recherche naïve : parcours exhaustif de l'espace de recherche

Exemple : pour toute coordonnée possible du centre du cercle, pour toute valeur possible du rayon du cercle, vérifier si tous les points sont couverts.

Vue générale de l'algorithmique

RECHERCHE ORDONNÉE : réorganisation de l'espace de recherche

EXEMPLE 1 : pour toute coordonnée possible du centre ***définie à partir de deux ou de trois points de la liste, soit*** $\times \times \times$ ***la seule valeur intéressante du rayon***, vérifier si tous les points sont couverts.

EXEMPLE 2 : voir partie "algorithmique des arbres" semaines 4,5,6.

Vue générale de l'algorithmique

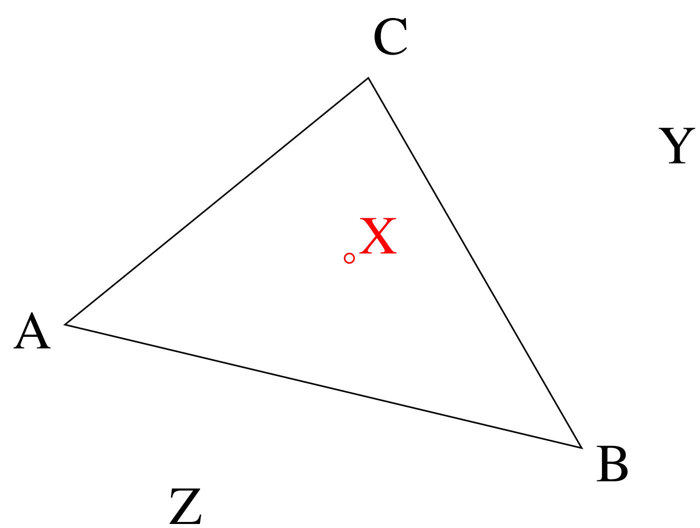
Recherche parcimonieuse : réorganisation de l'espace de recherche + localisation

Exemple 1 : filtrer la donnée par un précalcul (cf. page suivante).

Exemple 2 : voir partie "algorithmique sous-linéaire" semaines 7,8,9.

Borner la recherche par un précalcul

IDÉE : filtrer le “INPUT” pour écarter les zones de recherche inutiles



QUESTION : X est inutile, comment le détecter, numériquement ?

Conclusion, question

CONCLUSION :

– algorithme naïf

– technique incrémental

– technique de filtrage (précalcul)

QUESTION :

– meilleur précalcul ? (voir TME pour une réponse)