Perceptron
Réseau de neurones (I)

Cours 4
ARF   Master DAC

Nicolas Baskiotis
nicolas.baskiotis@lip6.fr
http://webia.lip6.fr/~baskiotisn

équipe MLIA, Laboratoire d'Informatique de Paris 6 (LIP6)
Université Pierre et Marie Curie (UPMC)

S2 (2016-2017)

Résumé des épisodes

Notions abordées

- Ensemble d'apprentissage : $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x^i}, y^i) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}\}_{i=1,\dots,N}, \mathcal{X} \in \mathbb{R}^d$
- Ensemble de test
- Régression : $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}$
- Apprentissage supervisée : $\mathcal{Y}$ discret
- Apprentissage non supervisée : pas de $\mathcal{Y}$
- Apprentissage : trouver $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ qui fait le moins d'erreurs
- Erreur : $0-1$, moindres carrés
- Sélection de modèle : validation croisée

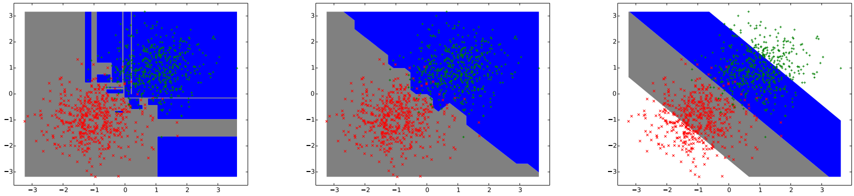
Approches et algorithmes

- Estimation de densité
- Arbres de décision
- Classifieur bayésien, décision bayésienne, vraissemblance
- Régression logistique
- Descente de gradient

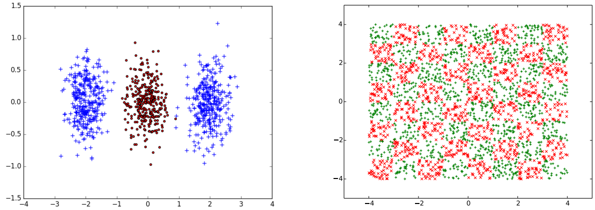
Plan

On réfléchit un peu

Quelle approche correspond à quelle frontière ?

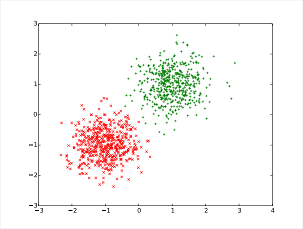


Et pour ces cas ?

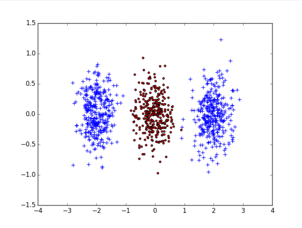


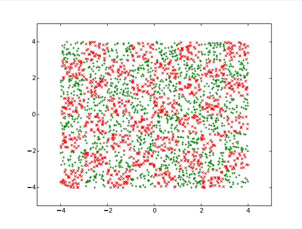
Espace linéairement séparable

Linéairement séparable



Non linéairement séparable





Conclusion (temporaire)

Importance :

- de l'espace de fonctions considérées (choisie a priori)
- du paramètrage des algorithmes

$\rightarrow$ notion d'expressivité . . . *à suivre.*

Plan

Inspiration biologique

Le cerveau

- Robuste, tolérant aux fautes
- Flexible, sait s'adapter
- Gère les informations incomplètes
- Capable d'apprendre

Composé de neurones !

- 10^{11} neurones dans un cerveau humain
- 10^{4} connexions par neurones
- Potentiel d'action, neuro-transmetteurs, période réfractaire
- Signaux excitateurs / inhibiteurs

Problèmes

- Opacité des raisonnements
- Opacité des résultats

Inspiration biologique

Le cerveau

- Robuste, tolérant aux fautes
- Flexible, sait s'adapter
- Gère les informations incomplètes
- Capable d'apprendre

Composé de neurones !

- 10^{11} neurones dans un cerveau humain
- 10^{4} connexions par neurones
- Potentiel d'action, neuro-transmetteurs, période réfractaire
- Signaux excitateurs / inhibiteurs

Problèmes

- Opacité des raisonnements
- Opacité des résultats

Inspiration biologique

Le cerveau

- Robuste, tolérant aux fautes
- Flexible, sait s'adapter
- Gère les informations incomplètes
- Capable d'apprendre

Composé de neurones !

- 10^{11} neurones dans un cerveau humain
- 10^4 connexions par neurones
- Potentiel d'action, neuro-transmetteurs, période réfractaire
- Signaux excitateurs / inhibiteurs

Problèmes

- Opacité des raisonnements
- Opacité des résultats

Historique

Prémisses

- McCullogh et Pitts (1943) : 1er modèle de neurone formel. Base de l'IA
- Règle de Hebb (1949) : apprentissage par renforcement du couplage synaptique

Premières réalisations

- Adaline (Widrow-Hoff, 1960)
- Perceptron (Rosenblatt, 1958-1962)
- Analyse de Minsky et Papert (1969)

Développement

- Réseau bouclé (Hopfield 1982)
- Réseau multi-couches (1985)

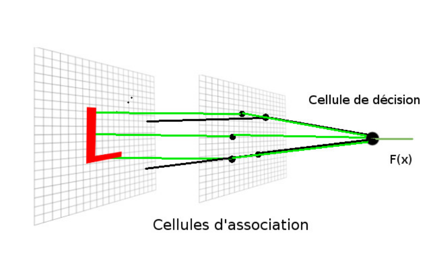
Deuxième renaissance

- Réseaux profonds (2000-)

Le perceptron de Rosenblatt (1960)

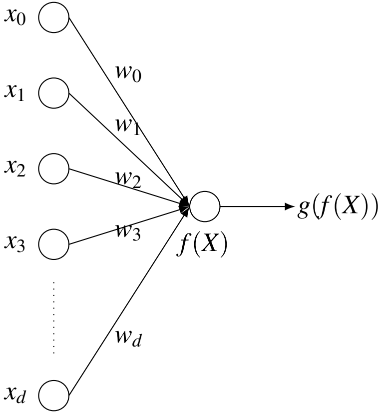
L'idée

- Reconaissance de forme (*pattern*) entre deux classes
- Inspirée du cortex visuel



- Chaque cellule d'association produit une sortie $f_i(S)$ en fonction d'un stimulus
- La cellule de décision répond selon une fonction seuil $f_d(\sum w_i f_i(S_i))$

Formalisation



Le perceptron considère

- $f(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{d} x_i w_i =< \mathbf{x}, \mathbf{w} >$
- Fonction de décision : $g(x) = sign(x)$

$\rightarrow$ Sortie : $g(f(\mathbf{x})) = sign(< \mathbf{x}, \mathbf{w} >)$

Algorithme d'apprentissage

Algorithme du perceptron

- Initialiser au hasard $\mathbf{w}$
- Tant qu'il n'y a pas convergence :
  - pour tous les exemples (x^i, y^i) :
    - si $(y^i \times < \mathbf{w}.\mathbf{x}^i >) < 0$ alors $\mathbf{w} = \mathbf{w} + \epsilon y^i \mathbf{x}^i$
- Décision : $f(x) = sign(< \mathbf{wx} >)$

Théorème de convergence (Novikov, 1962)

- Si
  - $\exists R, \forall x : \|x\| \leq R$
  - les données peuvent être séparées avec une marge ρ
  - l'ensemble d'apprentissage est présenté au perceptron un nombre suffisant de fois
- alors après au plus R^2/ρ^2 corrections, l'algorithme converge.

Autre formulation

A quoi correspond la règle de mise à jour :

- Si $(y < \mathbf{w}.\mathbf{x} >) > 0$ ne rien faire
- Si $(y < \mathbf{w}.\mathbf{x} >) < 0$ corriger $\mathbf{w} = \mathbf{w} + y\mathbf{x}$?

Autre formulation

A quoi correspond la règle de mise à jour :

- Si $(y < \mathbf{w}.\mathbf{x} >) > 0$ ne rien faire
- Si $(y < \mathbf{w}.\mathbf{x} >) < 0$ corriger $\mathbf{w} = \mathbf{w} + y\mathbf{x}$?

Hinge loss

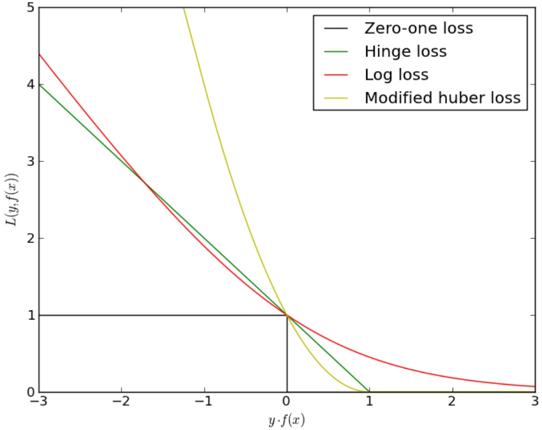
$l(f(x), y) = max(0, \alpha - yf(x))$

Descente de gradient !

- $l(f_w(x), y) = max(0, -y < w.\mathbf{x} >)$
- $\nabla_w l(f_w(x), y) = \begin{cases} 0 & \text{si } (y < w.\mathbf{x} >) > 0 \\ -yx_i & \text{sinon} \end{cases}$

Pourquoi ce changement dans la fonction de coût ?

Et pourquoi pas d'autres erreurs ?

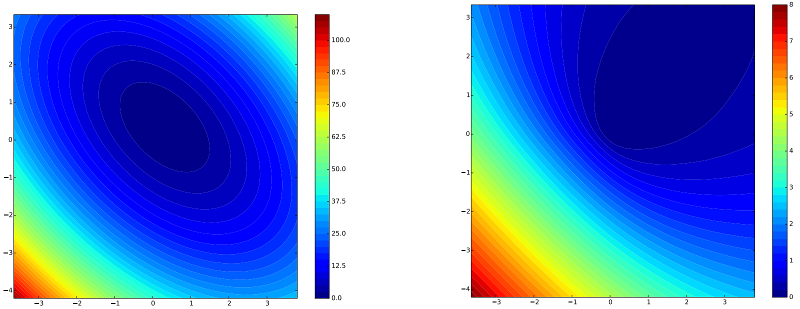


Exploration de l’espace des solutions

Vision duale de l’espace des exemples

- $R_{hinge}(f_\mathbf{w}) = \mathbb{E}(l_{hinge}(f_\mathbf{w}(x), y)) = \mathbb{E}(max(0, -f_\mathbf{w}(x)y))$
- $R_{mse}(f_\mathbf{w}) = \mathbb{E}(l_{mse}(f_\mathbf{w}(x), y)) = \mathbb{E}((f_\mathbf{w}(x) - y)^2)$

Pour un ensemble fixé de données, le risque est vu comme une fonction de $\mathbf{w}$.



Variantes de l'algorithme

- Cas hors-ligne (ou batch) :
  Pour chaque époque (correction de w), on itère sur toute la base d'exemples
- Cas en-ligne (stochastique) :
  Une correction de w est faîte par rapport à un exemple tiré au hasard dans la base.
- hybride : mini-batch
  Des petits sous-ensembles d'exemples sont tirés au hsard, la correction se fait selon le gradient calculé sur ces exemples.

Avantages et inconvénients ?

- Batch : plus stable, plus rapide
- Stochastique : bien meilleur tolérance au bruit !

Plan

Considérations géométriques

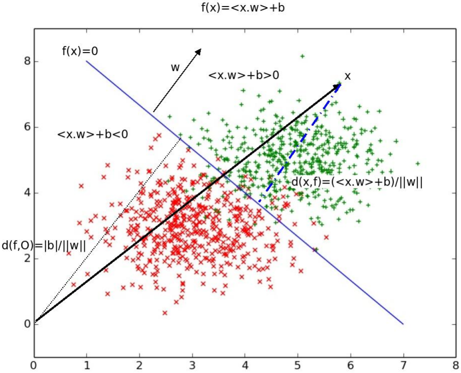
Soit $y(x)$ la sortie attendue :

- Que représente $\mathbf{w}$ par rapport à la séparatrice ?
- Que représente $< \mathbf{w}.\mathbf{x} >$?
- Que représente $y < \mathbf{w}.\mathbf{x} >$?

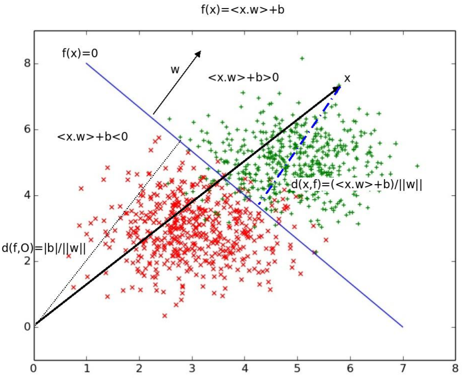
Considérations géométriques

Soit $y(x)$ la sortie attendue :

- Que représente $\mathbf{w}$ par rapport à la séparatrice ?
- Que représente $< \mathbf{w}.\mathbf{x} >$?
- Que représente $y < \mathbf{w}.\mathbf{x} >$?
- A quoi correspond la règle de mise à jour :
  - Si $(y(x) < w.\mathbf{x} >) > 0$ ne rien faire
  - Si $(y(x) < w.\mathbf{x} >) < 0$ corriger $\mathbf{w} = \mathbf{w} + y(x)x$?



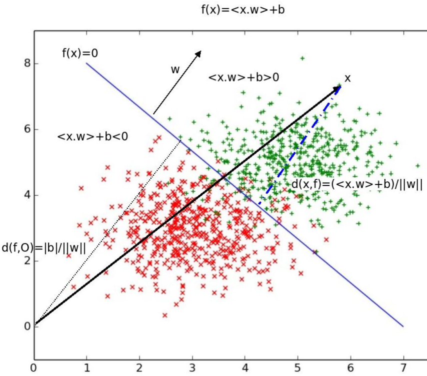
Considérations géométriques



Rappel

Espace de fonction linéaire : $f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}) = \mathbf{w}.\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{d} w_i x_i$, prédiction : $sign(f_{\mathbf{w}}(\mathbf{x}))$

Considérations géométriques

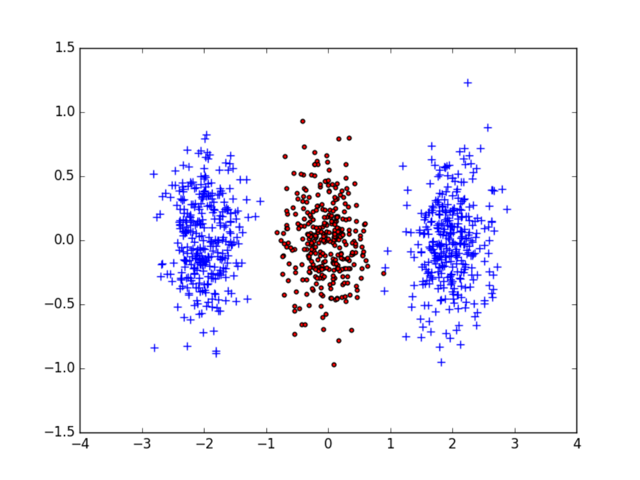


Questions

- Solution unique ?
- Certaines solutions meilleures que d'autres ?

Problèmes “durs”

Non linéairement séparable

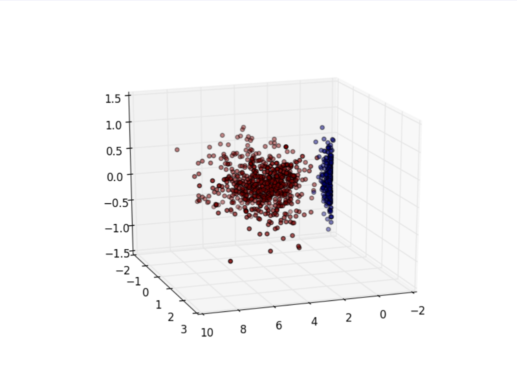


Que faire ?

Problèmes “durs”

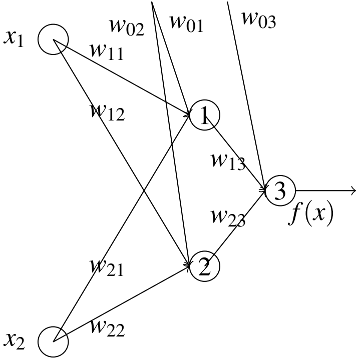
Transformation de la représentation

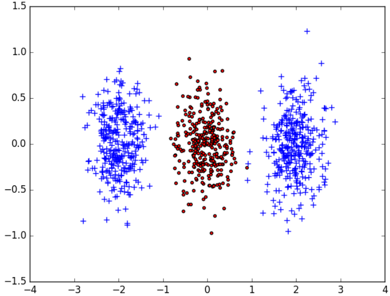
- On augmente d'une dimension : $(x_1, x_2) \rightarrow (x_1^2, x_1 x_2, x_2)$



- Le problème est de nouveau séparable linéairement !
- Autre solution ?

Deux neurones

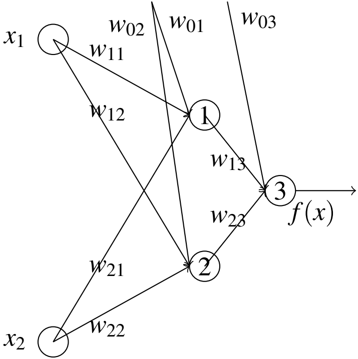


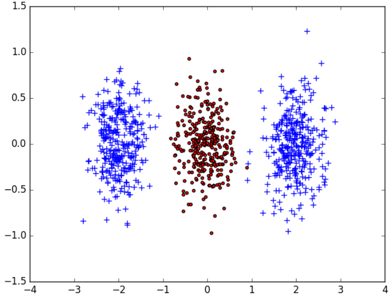


- Combiner des neurones → augmente l'expressivité
- Création de dimensions nouvelles, de nouveaux features

⇒ Est-il facile d'apprendre ses réseaux ?

Deux neurones

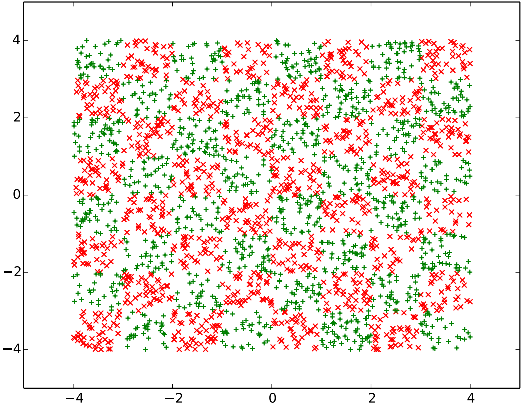




- Combiner des neurones $\rightarrow$ augmente l'expressivité
- Création de dimensions nouvelles, de nouveaux features

$\Rightarrow$ Est-il facile d'apprendre ses réseaux ?

Et pour ce problème ?



Si vous aviez droit à n'importe quelle fonction dans un neurone ?