

TME3. Diamètre et rectangle minimum.

BM Bui-Xuan

1 IMPORTANT : Enveloppe convexe

Terminer l'implantation d'au moins un des deux algorithmes Jarvis et Graham (modifié) décrits en TME2 avant de continuer.

2 Diamètre

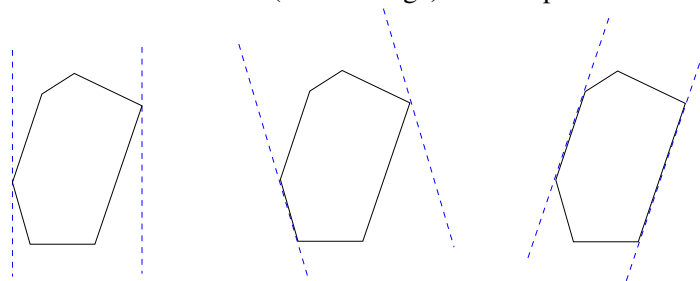
Problème du diamètre d'un ensemble de points : Le diamètre d'un ensemble de points est défini comme la distance maximum entre deux points appartenant à l'ensemble. Il peut être calculé par un algorithme naïf en temps quadratique (à implanter ! voir TME1). Notre objectif est d'améliorer ce temps de calcul.

Soit un ensemble S de points dans le plan.

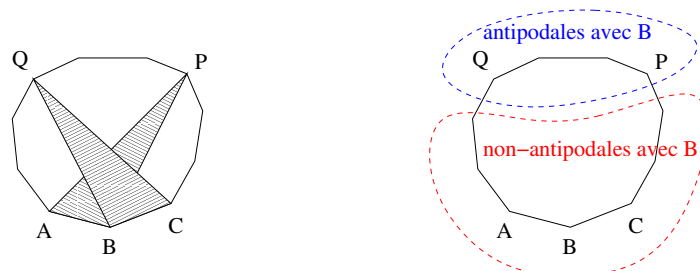
2.1 Algorithme Shamos : de la théorie...

Exercice 1 – Paires antipodales

Une paire $\{A, B\}$ de points de S est antipodale s'il existe 2 droites parallèles passant respectivement par A et B telles que la bande du plan entre ces deux droites contient (au sens large) tous les points de S .



1. Montrer que toute paire antipodale est composée de deux points de l'enveloppe convexe de S .
2. Montrer que le diamètre de S est égale à la distance maximum entre les deux points d'une paire antipodale de S .
3. Soient A, B, C trois points successives sur l'enveloppe convexe de S . Soient P et Q les deux points de l'enveloppe convexe de distance maximum par rapport aux droites \overline{AB} et \overline{BC} . On admet le résultat suivant : les paires antipodales contenant B sont exactement celles contenant un point à mi-chemin entre P et Q suivant l'ordre des points de l'enveloppe convexe.



Avec cette méthode, on est amené à comparer des distances entre un point et une droite passant par deux autres points de S . Proposer une méthode de test ne faisant pas apparaître des racines carrées, avec le produit vectoriel.

4. Proposer les étapes principales d'un algorithme calculant le diamètre de \mathcal{S} .

2.2 ... à la pratique

Exercice 2

1. Planter le calcul du diamètre via les paires antipodales.
2. Analyser sa complexité. On admet que le nombre de paires antipodales est linéaire en le nombre de points de \mathcal{S} .

3 Rectangle minimum

S'inspirer de l'implantation de l'algorithme Shamos (ci-dessus) et proposer une implantation de l'algorithme Tous-saint vu en cours.

Annexe : pseudo-code erroné pour le calcul de la liste des paires antipodales d'un polygone convexe donné par contour positif

Clause de non-responsabilité : Le pseudo-code suivant est distribué gratuitement et sans aucune garantie. Il est à utiliser aux risques et périls propres à l'utilisateur.

Input : p_1, p_2, \dots, p_n le contour positif d'un polygone convexe.

Output : la liste de toutes les paires antipodales du polygone.

$\mathcal{A} \leftarrow \emptyset$

$k \leftarrow 2$

tantque $\text{distance}(p_k, \overline{p_n p_1}) < \text{distance}(p_{k+1}, \overline{p_n p_1})$ **faire :**

$k \leftarrow k + 1$

$i \leftarrow 1$

$j \leftarrow k$

tantque $i \leq k$ et $j \leq n$ **faire :**

tantque $\text{distance}(p_j, \overline{p_i p_{i+1}}) < \text{distance}(p_{j+1}, \overline{p_i p_{i+1}})$ et $j < n$ **faire :**

$\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{(p_i, p_j)\}$

$j \leftarrow j + 1$

$\mathcal{A} \leftarrow \mathcal{A} \cup \{(p_i, p_j)\}$

$i \leftarrow i + 1$

retourner \mathcal{A}