TD 6 et 7

Préambule : quelques éléments de topologie et d'analyse

- un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ est un ensemble d'éléments tel qu'il soit possible de faire des combinaisons linéaires de ses éléments (E est muni d'une opération d'addition et d'une opération de multiplication par un scalaire) ;
- une fonction $Q : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire ssi :
  1. elle est symétrique : $Q(x, y) = Q(y, x)$;
  2. elle est bilinéaire : $Q(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 Q(x_1, y) + \lambda_2 Q(x_2, y)$;
  3. elle est positive $Q(x, x) \geq 0$ et $Q(x, x) = 0 \iff x = 0$

  On notera souvent $Q(x, y) =< x, y >_E$ et la norme d'un produit scalaire $\|x\|_Q = \sqrt{Q(x, x)}$;
- un espace de Hilbert est est un espace vectoriel complet muni d'un produit scalaire ;
- un noyau est une fonction $k : X \times X \to \mathbb{R}$ tel qu'il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et une fonction (de projection ou *feature map*) $\phi : X \to \mathcal{H}$ telle que $\forall x, x' \in X, k(x, x') =< \phi(x), \phi(x') >_{\mathcal{H}}$

Exercice 1 – Support Vector Machine

On considère ici un problème de classification binaire vers $Y = \{-1, +1\}$ de données dans un espace de description $X \in \mathbb{R}^d$. On note $\{(\mathbf{x}^i, y^i) \in (X, Y)\}, i \in \{1, \ldots, n\}$ l'ensemble d'apprentissage considéré. La fonction de décision du classifieur considéré est donnée par : $f_{\mathbf{w},b}(\mathbf{x}) = sign(\mathbf{w}^T\mathbf{x} + b)$.
On considère dans un premier temps un ensemble de données linéairement séparable. Cet ensemble de données et la frontière de decision sont représentés (en 2D) sur la figure 1.

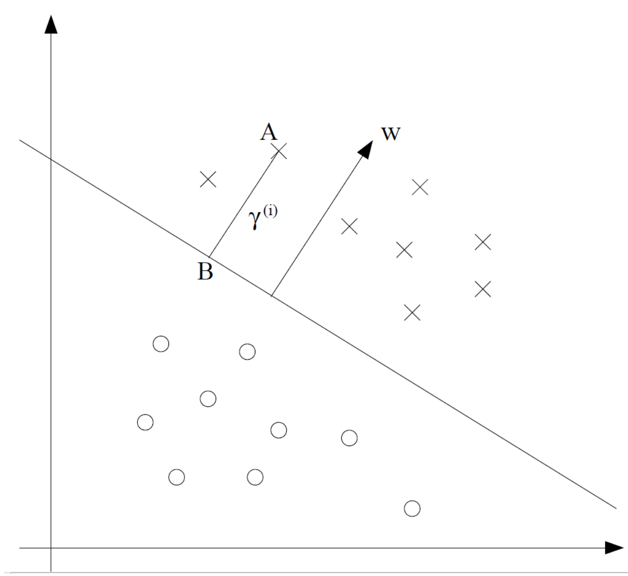

Figure 1 – Ensemble de données linéairement séparables

Q 1.1 Marge
Sur cette figure, l'échantillon $\mathbf{x}^i$ et de label y^i est représenté par le point A. On s'intéresse à sa distance signée γ^i à la frontière de decision (dont le point le plus proche est représenté en B sur la figure).

Q 1.1.1 Sachant que $\mathbf{w}/||\mathbf{w}||$ est un vecteur unitaire othogonal à la frontière de décision, donner l'expression de γ^i en fonction de $\mathbf{x}^i$, y^i, $\mathbf{w}$ et b.

Q 1.1.2 Que cela implique-t-il si l'on souhaite éloigner au maximum (au sens géométrique) les points de la frontière de décision ?

Q 1.2 Formulation du SVM
On considère alors le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\min_{\mathbf{w},b} \frac{1}{2}||\mathbf{w}||^2$$

$$s.t. \qquad y^i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}^i + b) \geq 1, \forall i \in \{1,\ldots,n\}$$

Q 1.2.1 Poser le Lagrangien à considérer pour optimiser ce problème sous contraintes

Q 1.2.2 Donner la solution analytique de la minimisation de ce Lagrangien selon $\mathbf{w}$ et b

Q 1.2.3 En déduire une nouvelle formulation "duale" de notre problème d'optimisation sous contraintes

Q 1.2.4 Que cette nouvelle formulation permet-elle ?

Q 1.2.5 Quel est le problème du problème d'optimisation que l'on a considéré ? Proposer une nouvelle formulation qui corrige ce problème

Q 1.2.6 Proposer la formulation duale de ce nouveau problème

Q 1.2.7 Donner la fonction de classification obtenue après optimisation de cette formulation duale du SVM

Q 1.2.8 D'après les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) concernant les propriétés de la solution optimale d'un Lagrangien, on a : $a_i(1 - \xi_i - y^i(\mathbf{w}^T\mathbf{x}^i + b)) = 0,\ \forall i \in \{1..N\}$ et $\beta_i\xi_i = 0,\ \forall i \in \{1..N\}$. Qu'en déduire pour les paramètres a_i obtenus à l'optimum ?

Q 1.2.9 Qu'en déduire pour l'estimation du biais b ?

Exercice 2 – Noyaux

Q 2.1 Montrez que si K et K' sont deux noyaux (i.e. il existe ϕ et ϕ' telles que $K(x,y) =< \phi(x), \phi(y) >$, $K'(x,y) =< \phi'(x), \phi'(y) >$) :

1. cK est un noyau pour $c \in \mathbb{R}^+$
2. $K + K'$ est un noyau ;
3. KK' est un noyau ;
4. $(1+ < x, x' >)^d$ est un noyau.

Q 2.2 RKHS
Soit $x_1, \cdots, x_n \in X$, une fonction $k : X \times X \to \mathbb{R}$, la matrice de Gram de K est la matrice $\mathcal{K} := k_{i,j} = k(x_i, x_j)$. Une matrice est dite définie semi-positive si $\forall c_i \in \mathbb{R}, \sum_{i,j} c_i c_j k_{i,j} \geq 0$. Dans ce cas, la fonction est dite également définie positive.

Q 2.2.1 Exprimez $\sum_{i,j} c_i c_j k_{i,j}$ par un produit scalaire. Montrez qu'un noyau est défini positif.

Q 2.2.2 Le but de cette question est de montrer la contraposée, qu'une fonction symétrique semi définie positive $k : X \times X \to \mathbb{R}$ est un noyau. Pour cela, il nous faut trouver un espace hilbertien $\mathcal{H}$, un produit scalaire $Q : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ et une projection $\phi : X \to \mathcal{H}$ telle que $k(x,y) = Q(\phi(x), \phi(y))\ \ \forall x, y \in X$. On va considérer $\mathcal{H}$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions de la forme $y \to k(y,x)$ pour tout $x \in X$. Un élément de $\mathcal{H}$ est donc une fonction de $X \to \mathbb{R}$.

Soit $\Phi : X \to \mathcal{H} \ := k(.,x)$ un mapping de X aux fonctions de $\mathcal{H}$, $\Phi(x)(x') = k(x',x)$. Soient $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $\beta_i \in \mathbb{R}$, $x_i \in X$, $x'_i \in X$ pour $i \in \{1..n\}$. On définit :

$$f(.) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Phi(x_i)(.), \quad g(.) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \Phi(x'_i)(.), \quad Q(f,g) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j k(x_i, x'_j)$$

f et g sont bien dans $\mathcal{H}$, vu que ce sont des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{H}$.

1. Montrez que $Q(f,g)$ peut s'exprimer uniquement à l'aide des β_j et $f(x'_j)$, ou des α_i et $g(x_i)$
2. Montrez que $Q(f,g)$ est un produit scalaire (on pourra alors remplacer $Q(f,g)$ par $< f, g >$). Pour cela, il s'agit de démontrer que :
   - $Q(f,g)$ est symétrique
   - $Q(f,g)$ est bilinéaire
   - $Q(f,f) \geq 0$ (on montrera dans la dernière question que $Q(f,f) = 0 \iff f = 0$).
3. Montrez que pour des fonctions $f_1, \ldots, f_p$ et des coefficients $\gamma_1, \ldots, \gamma_p \in \mathbb{R}$, $\sum_{i,j=1}^{p} \gamma_i \gamma_j Q(f_i, f_j) \geq 0$.
4. Que vaut $Q(k(.,x), f)$? $Q(k(.,x), k(.,x'))$? Justifiez le nom de k : *reproducing kernel.*
5. En admettant que $Q(f,g)^2 \leq Q(f,f)^2 Q(g,g)^2$, montrez que $|f(x)|^2 \leq k(x,x).Q(f,f)$. Concluez.

Q 2.3 Noyaux sur les chaînes de caractères
Soit S une séquence de mots sur un alphabet $\mathcal{A}$ fini. Montrez que :

1. $K(x,x')$ = nombre de sous-chaînes de longueur 5 que x et x' ont en commun est un noyau ;
2. $K(x,x') = 1$ si x et x' ont au moins une sous-chaîne de longueur 5 en commun, 0 sinon, n'est pas un noyau (indice : considérez 3 chaînes x,x' et x'').