

# 目录

第一章 方法、图像和直线	3
第二章 三角学回顾	7
第三章 极限导论	14
第四章 求解多项式的极限问题	17
第五章 连续性和可导性	22
第六章 求解微分问题	24
第七章 三角函数的极限和导数	28
第八章 隐函数求导和相关变化率	32
第九章 指数函数和对数函数	39
第十章 反函数和反三角函数	43
第十一章 导数和图像	47

目 录	2
第十二章 绘制函数图像	50
第十三章 最优化和线性化	53
第十四章 洛必达法则及极限问题总结	55
第十五章 积分	58
第十六章 定积分	59
第十七章 微积分的基本定理	62
第十八章 积分的方法 I	65
第十九章 积分的方法 II	70
第二十章 反常积分: 基本概念	81
第二十一章 反常积分: 如何解题	88
第二十二章 数列和级数: 基本概念	106
第二十三章 求解级数问题	111
第二十四章 泰勒多项式、泰勒级数和幂级数导论	124
第二十五章 求解估算问题	127
第二十六章 泰勒级数和幂级数: 如何解题	132
第二十七章 体积、弧长和表面积	140
附录 A 极限合集	142

# 第一章 方法、图像和直线

## 1. 函数

函数是将一个对象转化为另一个对象的规则. 起始对象称为**输入**, 来自称为**定义域**的集合. 返回对象称为**输出**, 来自称为**上域**的集合.

一个函数必须给每一个有效的输入指定唯一的输出.

**值域**是所有可能的输出所组成的集合.

**例 1.**

$$f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R})$$

在该示例中, 定义域为  $\mathbb{R}$ , 值域为  $\mathbb{R}^+$ , 上域为  $\mathbb{R}$

区间定义:

$[a, b]$  表示所有介于  $a$  和  $b$  之间 (包括  $a$  和  $b$ ) 的实数的集合, 称为**闭区间**.

$(a, b)$  表示所有介于  $a$  和  $b$  之间 (不包括  $a$  和  $b$ ) 的实数的集合, 称为**开区间**.

$[a, b)$  表示所有介于  $a$  和  $b$  之间 (包括  $a$ , 不包括  $b$ ) 的实数的集合, 称为**半开区间**.

注意事项:

(1) 分数的分母不能是零.

(2) 不能取负数的偶次方根.

(3) 不能取负数或零的对数.

垂线检验: 当任何一条垂直线与图像相交多于一次时, 该图像不是函数; 反之则图像为函数

## 2. 反函数

反函数的条件:

- 1) 从一个函数  $f$  出发, 使得对于在  $f$  值域中的任意  $y$ , 都只有唯一的  $x$  值满足  $f(x) = y$ ;
- 2)  $f^{-1}$  的定义域和  $f$  的值域相同;
- 3)  $f^{-1}$  的值域和  $f$  的定义域相同;
- 4)  $f^{-1}(y)$  的值就是满足  $f(x) = y$  的  $x$ . 即

$$\text{如果 } f(x) = y, \text{ 则 } f^{-1}(y) = x$$

水平线检验: 如果每一条水平线和一个函数的图像相交至多一次, 那么这个函数有反函数; 如果即使只有一条水平线和函数的图像相交多余一次, 那么这个函数没有反函数.

原始函数与反函数关于  $y = x$  对称

对于反函数, 有如下规则:

- 1) 对于  $f$  值域中的所有  $y$ , 都有  $f(f^{-1}(y)) = y$ ;
- 2) 对于  $f$  定义域中的  $x$ , 只有当  $f$  满足水平线检验时, 才有  $f^{-1}(f(x)) = x$ .

例.

$$f(x) = \sin(x), \text{ 求 } f^{-1}(f(x))$$

推导过程:

当  $f(x)$  满足水平线检验时,  $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

此时  $f^{-1}(f(x)) = x$

### 3. 复合函数

令  $g(x) = x^2$ ,  $h(x) = \cos(x)$ , 而  $f(x) = \cos(x^2)$ , 则  $f(x) = h(g(x))$ , 也可表示为  $f = h \circ g$ ,  $f$  为  $g$  与  $h$  的复合函数.

### 4. 奇函数与偶函数

如果  $f$  对定义域内的所有  $x$  有  $f(-x) = f(x)$ , 则  $f$  为偶函数.

如果  $f$  对定义域内的所有  $x$  有  $f(-x) = -f(x)$ , 则  $f$  为奇函数.

偶函数的图像关于  $y$  轴具有镜面对称性.

奇函数的图像关于原点有  $180^\circ$  的点对称性.

### 5. 线性函数

形如  $f(x) = mx + b$  的函数叫做线性函数.

点斜式方程:

如果已知直线通过点  $(x_0, y_0)$ , 斜率为  $m$ , 则它的方程为  $y - y_0 = m(x - x_0)$

如果一条直线通过点  $(x_1, y_1)$  和  $(x_2, y_2)$ , 则它的斜率等于  $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

## 6. 常见函数

### 1) 多项式

形如  $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 10$  的函数

基本项  $x^n$  的倍数叫做  $x^n$  的系数

最大的幂指数  $n$  (该项系数不能为零) 叫做多项式的次数

最高次数项的系数称为首项系数

### 2) 有理函数

形如  $\frac{p(x)}{q(x)}$ , 其中  $p$  和  $q$  为多项式

### 3) 指数函数和对数函数

形如  $y = a^x$  的函数, 称为指数函数

形如  $\log_a(x)$  的函数, 称为对数函数

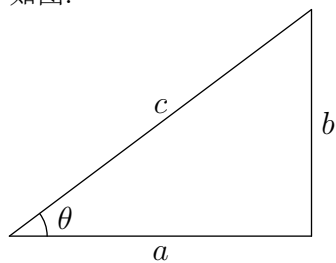
### 4) 带有绝对值的函数

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

## 第二章 三角学回顾

### 1. 基本知识

如图.



基本公式列表:

$$\begin{aligned}\sin(\theta) &= \frac{b}{c} & \cos(\theta) &= \frac{a}{c} & \tan(\theta) &= \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{b}{a} \\ \csc(\theta) &= \frac{1}{\sin(\theta)} = \frac{c}{b} & \sec(\theta) &= \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{c}{a} & \cot(\theta) &= \frac{1}{\tan(\theta)} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

常见三角函数值:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*

## 2. 三角函数值

求三角函数值步骤:

1. 找出角所在象限;
2. 当角在 x/y 轴上, 参考三角函数图像;
3. 如果角不在 x/y 轴上, 找出该角与 x 轴形成的最小角度, 即**参考角**;
4. 当参考角为特殊角时, 参考常见三角函数值表;
5. 利用 ASTC(all/sin/tan/cos) 决定是否需要添加负号.

例 1.

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

- 1)  $\frac{\pi}{4}$  在第一象限, sin 值为正
- 2) 与 x 轴形成的角为  $\frac{\pi}{4}$

结果为:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 2.



$$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

1)  $\frac{5\pi}{6}$  在第二象限,  $\cos$  值为负

2) 与  $x$  轴形成的角为  $\frac{\pi}{6}$

结果为:

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

例 3.

$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

1)  $\frac{4\pi}{3}$  在第三象限,  $\tan$  值为正

2) 与  $x$  轴形成的角为  $\frac{\pi}{3}$

结果为:

$$\tan \frac{4\pi}{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

例 4.

$$\cot\left(\frac{5\pi}{3}\right)$$

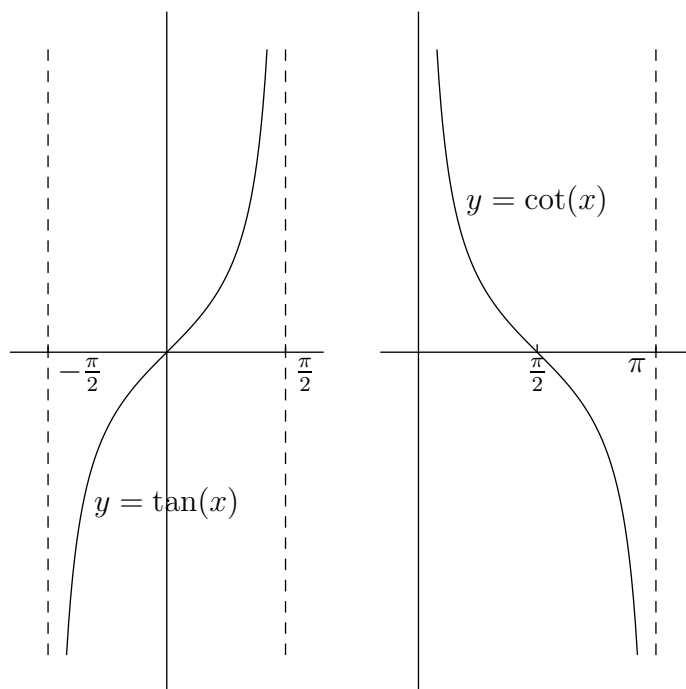
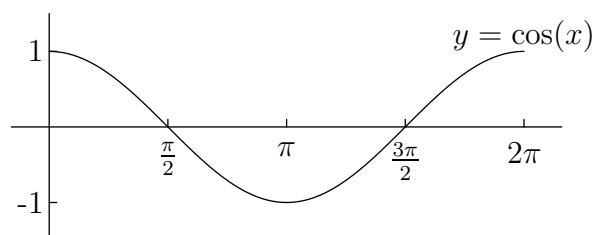
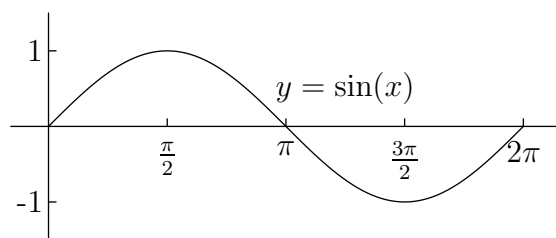
1)  $\frac{5\pi}{3}$  在第四象限,  $\cot$  值为负

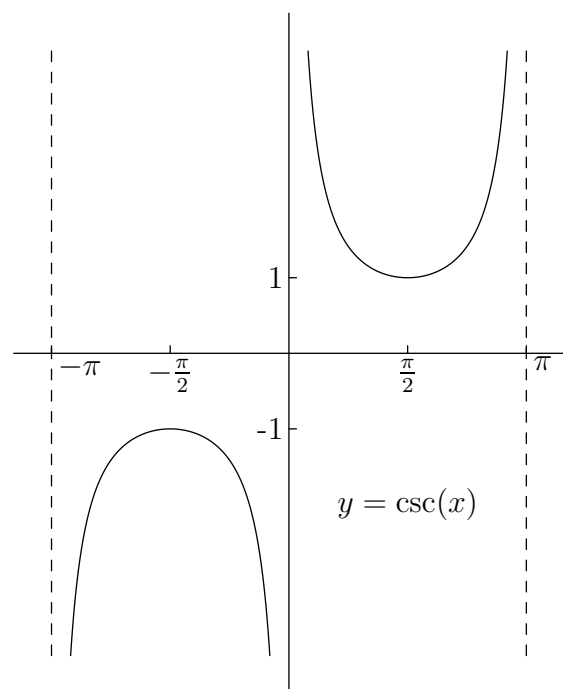
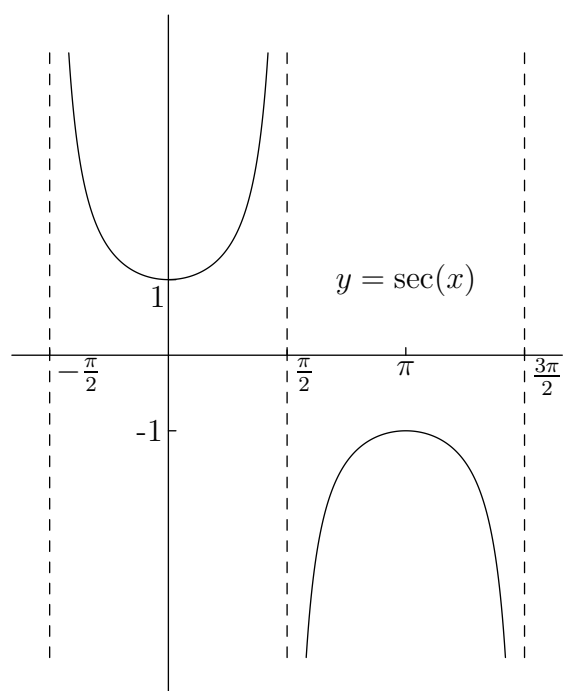
2) 与  $x$  轴形成的角为  $\frac{\pi}{3}$

结果为:

$$\cot \frac{5\pi}{3} = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

### 3. 三角函数图像





汇总

$\sin(x)$ 、 $\tan(x)$ 、 $\cot(x)$ 、 $\csc(x)$  都是  $x$  的奇函数.  
 $\cos(x)$  和  $\sec(x)$  都是  $x$  的偶函数

#### 4. 三角恒等式

毕达哥拉斯定理:

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

等式两边除以  $\cos^2(x)$ :

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

等式两边除以  $\sin^2(x)$ :

$$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$$

余角公式:

$$\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \cot(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \csc(x) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \tan(x) = \cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \sec(x) = \csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

和/差角公式:

$$\sin(A + B) = \sin(A) \cos(B) + \cos(A) \sin(B)$$

$$\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \sin(A) \sin(B)$$

$$\sin(A - B) = \sin(A) \cos(B) - \cos(A) \sin(B)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A) \cos(B) + \sin(A) \sin(B)$$

倍角公式:

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2 \cos^2(x) - 1 = 1 - 2 \sin^2(x)$$

### 第三章 极限导论

函数  $g$  的定义域是所有实数, 并且  $g(x)$  可以被定义为如下的分段函数:

$$g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{if } x \neq 2 \\ 3 & \text{if } x = 2 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$  与  $g(2)$  的值是不相关的, 关键在于  $x$  接近于 2 时,  $g(x)$  的值, 结果为:  $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1$ .

左极限: 描述函数的自变量从左边接近于某一个值时, 相对应的函数变化的趋势. 表示为

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

右极限: 描述函数的自变量从右边接近于某一个值时, 相对应的函数变化的趋势. 表示为

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

仅当左极限和右极限在  $x = a$  处都存在且相等, 双侧极限在  $x = a$  处存在. 用数学语言描述为:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad \text{且} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

等价于

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

垂直渐近线的定义:

“ $f$  在  $x = a$  处有一条垂直渐近线”说的是,  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , 其中至少有一个极限是  $\infty$  或  $-\infty$

水平渐近线的定义:

“ $f$  在  $y = L$  处有一条右侧水平渐近线”意味着  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .  
 “ $f$  在  $y = M$  处有一条左侧水平渐近线”意味着  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = M$ .

对于大的数和小的数的非正式定义:

- 如果一个数的绝对值是非常大的数, 则这个数是大的
- 如果一个数非常接近于 0(但不是真的等于 0), 则这个数是小的

一个函数可以有不同的右侧和左侧水平渐近线, 但最多只能有两条水平渐近线 (一条在右侧, 一条在左侧), 也有可能一条都没有, 或者只有一条.

一个函数可以有很多条垂直渐近线.

三明治定理 (夹逼定理):

如果对于所有在  $a$  附近的  $x$  都有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ , 且

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .



## 第四章 求解多项式的极限问题

1.  $x \rightarrow a$  时的有理函数的极限

有理函数: 两个多项式之比  $\frac{p(x)}{q(x)}$

解题方法:

(1) 当  $f(a) = \frac{m}{n}$  ( $m/n$  皆不为 0)

例.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(-1)^2 - 3 \times (-1) + 2}{-1 - 2} = \frac{6}{-3} = 2$$

2) 当  $f(a) = \frac{0}{0}$ , 分子分母进行因式分解, 并删除公因子

例.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 1) = 1$$

3) 当  $f(a) = \frac{m}{0}$ , 验证极限点左右两边的符号是否相同

例.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 6}{x(x-1)^3} \\
& \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3} = \frac{(+)(-)}{(+)(+)} = - \\
& \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3} = \frac{(+)(-)}{(+)(-)} = + \\
& \therefore \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 6}{x(x-1)^3} \text{ 左右两侧极限符号不相等, 所有极限不存在}
\end{aligned}$$

2.  $x \rightarrow a$  时的平方根的极限

解题方法: 将分子分母同时乘以共轭表达式

例.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} \\
& \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x^2 - 9} + 4}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x^2 - 9} + 4)} \\
& = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x+5}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \frac{5+5}{\sqrt{25-9}+4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$

3.  $x \rightarrow \infty / -\infty$  时的有理函数的极限

对于任意的  $n > 0$ , 只要  $C$  是常数, 满足

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x^n} = 0$$

解题方法: 分组分母分别除以其最高项内容, 再乘以该内容

例 1.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 8x^4}{7x^4 + 5x^3 + 2000x^2 - 6} \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 8x^4}{7x^4 + 5x^3 + 2000x^2 - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x-8x^4}{-8x^4} \times (-8x^4)}{\frac{7x^4+5x^3+2000x^2-6}{7x^4} \times 7x^4} \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \times (-8x^4)}{1 \times 7x^4} = -\frac{8}{7}
\end{aligned}$$

例 2.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 + 3x - 99)(2 - x^5)}{(18x^7 + 9x^6 - 3x^2 - 1)(x + 1)} \\
& \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^4 + 3x - 99)(2 - x^5)}{(18x^7 + 9x^6 - 3x^2 - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{x^4 + 3x - 99}{x^4} \times x^4\right)\left(\frac{2 - x^5}{-x^5} \times (-x^5)\right)}{\left(\frac{18x^7 + 9x^6 - 3x^2 - 1}{18x^7} \times 18x^7\right)\left(\frac{x + 1}{x} \times x\right)} \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 \times (-x^5)}{18x^7 \times x} \\
& = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{x}{18} \\
& = -\infty
\end{aligned}$$

例 3.

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 3x - 99)(2 - x^5)}{(18x^7 + 9x^6 - 3x^2 - 1)(x + 1)} \\
& \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x^4 + 3x - 99)(2 - x^5)}{(18x^7 + 9x^6 - 3x^2 - 1)(x + 1)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{x^4 + 3x - 99}{x^4} \times x^4\right)\left(\frac{2 - x^5}{-x^5} \times (-x^5)\right)}{\left(\frac{18x^7 + 9x^6 - 3x^2 - 1}{18x^7} \times 18x^7\right)\left(\frac{x + 1}{x} \times x\right)} \\
& = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 \times (-x^5)}{18x^7 \times x} \\
& = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{x}{18} \\
& = \infty
\end{aligned}$$

情况分布:

- (1) 如果  $p$  的次数等于  $q$  的次数, 极限是有限的且非零
- (2) 如果  $p$  的次数大于  $q$  的次数, 极限是  $\infty$  或  $-\infty$
- (3) 如果  $p$  的次数小于  $q$  的次数, 极限是 0.

4.  $x \rightarrow \infty / -\infty$  时的多项式型函数的极限

多项式型函数: 类似于多项式, 但包含分数次数或  $n$  次根

解题方法: 分子分母分别除以其最高项内容, 再乘以该内容

例 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{16x^4 + 8} + 3x}{2x^2 + 6x + 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{16x^4 + 8} + 3x}{4x^2} \times 4x^2}{\frac{2x^2 + 6x + 1}{2x^2} \times 2x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 \times 4x^2}{1 \times 2x^2} = 2 \end{aligned}$$

例 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 5x^5} - 2x^3}{\sqrt[3]{27x^6 + 8x}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4x^6 - 5x^5} - 2x^3}{\sqrt[3]{27x^6 + 8x}} \times \frac{\sqrt{4x^6 - 5x^5} + 2x^3}{\sqrt{4x^6 - 5x^5} + 2x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^6 - 5x^5) - 4x^6}{\sqrt[3]{27x^6 + 8x}(\sqrt{4x^6 - 5x^5} + 2x^3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x^5}{\left(\frac{\sqrt[3]{27x^6 + 8x}}{3x^2} \times 3x^2\right)\left(\frac{\sqrt{4x^6 - 5x^5} + 2x^3}{4x^3} \times 4x^3\right)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{5x^5}{3x^2 \times 4x^3} \\ &= -\frac{5}{12} \end{aligned}$$

例 3.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 8}}{2x^3 + 6x + 1}$$

由于  $\sqrt{4x^6}$  为正数, 而  $2x^3$  为负数

所以  $\sqrt{4x^6} = -2x^3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^6 + 8}}{2x^3 + 6x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^6 + 8}}{-2x^3} \times (-2x^3)}{\frac{2x^3 + 6x + 1}{2x^3} \times 2x^3} = -1$$

## 5. 包含绝对值的函数的极限

例.

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2}$$

$$\because p(x) > 0, |p(x)| = p(x)$$

$$p(x) < 0, |p(x)| = -p(x)$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2} \text{ 无双侧极限}$$

## 第五章 连续性和可导性

### 1. 在一点处连续

如果  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ , 函数  $f$  在点  $x = a$  处连续

### 2. 在区间上连续

在区间  $(a, b)$  上连续 - 函数在区间范围内的所有点都连续 (不包括  $a, b$ )

在区间  $[a, b]$  上连续 - (1) 函数在  $(a, b)$  上连续; (2) 函数在  $x = a$  处右连续

(即  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ); (3) 函数在  $x = b$  处左连续 (即  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ )

**介值定理:** 如果  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 并且  $f(a) < 0$  且  $f(b) > 0$ , 那么在区间  $(a, b)$  上至少有一点  $c$ , 使得  $f(c) = 0$ . 代之以  $f(a) > 0$  且  $f(b) < 0$ , 同样成立.

**最大值与最小值定理:** 如果  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 那么  $f$  在  $[a, b]$  上至少有一个最大值和一个最小值.

求导公式:

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

二阶及多阶导数:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}$$

...

如果一个函数 $f$ 在 $x$ 上可导, 那么它在 $x$ 上连续
------------------------------------

## 第六章 求解微分问题

### 1. 使用定义求导

$$\frac{d}{dx}(x) = 1$$

证明:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

证明:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

证明:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

## 2. 运算法则

## (1) 常数倍

$$\frac{d}{dx}(Cx^a) = (Ca)x^{a-1}$$

## (2) 加/减法法则

$$\frac{d}{dx}(x^a + \sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^a) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

## (3) 乘积法则

乘积法则 (版本 1) 如果  $h(x) = f(x)g(x)$ , 那么  $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ .

乘积法则 (版本 2) 如果  $y = uv$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx}$$

乘积法则 (三个变量) 如果  $y = uvw$ , 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}vw + u \frac{dv}{dx}w + uv \frac{dw}{dx}$$

## (4) 商法则

商法则 (版本 1) 如果  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ , 那么

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

商法则 (版本 2) 如果  $y = \frac{u}{v}$ , 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(5) 链式求导法则

链式求导法则 (版本 1) 如果  $h(x) = f(g(x))$ , 那么  $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$ .

链式求导法则 (版本 2) 如果  $y$  是  $u$  的函数, 并且  $u$  是  $x$  的函数, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

3. 导数伪装的极限

例.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+h} - 2}{h}$$

证明:

$$\text{设 } f(x) = \sqrt[5]{x}$$

$$\therefore f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{x+h} - x}{h} = \frac{1}{5} x^{-\frac{4}{5}}$$

$$\therefore f'(32) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+h} - \sqrt[5]{32}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{32+h} - 2}{h} = \frac{1}{5} \times 32^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{1}{16} = \frac{1}{80}$$

4. 分段函数的导数

检验方式: 分段函数再连接点上极限相等, 并且导数再连接点上的极限也相等

例.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{如果 } x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{如果 } x > 0. \end{cases}$$

$\therefore f(x)$  在连接点  $x = 0$  上的左极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 = 1$$

$f(x)$  在连接点  $x = 0$  上的右极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$\text{由于, } f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果 } x \leq 0, \\ 2x & \text{如果 } x > 0. \end{cases}$$

$\therefore f'(x)$  在连接点  $x = 0$  上的左极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 0 = 0$$

$f'(x)$  在连接点  $x = 0$  上的右极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = 0$$

5. 直接画出导函数的图像

## 第七章 三角函数的极限和导数

1. 三角函数的极限:

(1)  $x \rightarrow 0$  的情况

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

例 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{5x}{x}} \times 5x = 1 \times 5 = 5 \end{aligned}$$

例 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(2x) \cos(5x^{19})}{x \tan(5x^2)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3(2x) \cos(5x^{19})}{x \tan(5x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left[ \frac{(\sin(2x))^3}{(2x)^3} \times (2x)^3 \right] \cos(5x^{19})}{x \left[ \frac{\tan(5x^2)}{5x^2} \times (5x^2) \right]} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{(\sin(2x))^3}{(2x)^3} \cdot \cos(5x^{19})}{\frac{\tan(5x^2)}{5x^2}} \times \frac{(2x)^3}{x(5x^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{8x^3}{5x^3} \\
 &= \frac{8}{5}
 \end{aligned}$$

例 3.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{5}{x}\right) \\
 \lim_{x \rightarrow 0} x \sin\left(\frac{5}{x}\right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\frac{5}{x})}{\frac{1}{x}} \times 5 = 1 \times 5 = 5
 \end{aligned}$$

例 4.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \\
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \times \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1 + \cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

(2)  $x \rightarrow \infty / -\infty$  的情况

例.

$$\begin{aligned}
 &\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin(11x^7) - \frac{1}{2}}{2x^4} \\
 \because -1 &\leq \sin(11x^7) \leq 1 \\
 \therefore -x - \frac{1}{2} &\leq x \sin(11x^7) - \frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \\
 \frac{-x - \frac{1}{2}}{2x^4} &\leq \frac{x \sin(11x^7) - \frac{1}{2}}{2x^4} \leq \frac{x - \frac{1}{2}}{2x^4} \\
 \text{而 } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x - \frac{1}{2}}{2x^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} = 0 \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \frac{1}{2}}{2x^4} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} = 0 \\
 \therefore \text{根据夹逼定理} \\
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sin(11x^7) - \frac{1}{2}}{2x^4} &= 0
 \end{aligned}$$

## (3) 其他情况

面对  $x \rightarrow a$  的极限, 而  $a \neq 0$  时, 使用  $t = x - a$  作替换, 将问题转化为

$t \rightarrow 0$

例.

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \\ & \text{设 } t = x - \frac{\pi}{2}, \text{ 则} \\ & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{t} \\ & \because \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x \\ & \therefore \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(-x) = -\sin x \\ & \therefore \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin t}{t} = -1 \end{aligned}$$

## 2. 三角函数的导数

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x)$$

$$\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \tan(x)$$

$$\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) \cot(x)$$

例 1.

$$\frac{d}{dx} x^2 \sin x$$

根据乘积法则:

$$u = x^2, v = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = 2x, \frac{dv}{dx} = \cos x$$

$$\frac{dy}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} = x^2 \cos x + 2x \sin x$$

例 2.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sec x}{x^5} \right)$$

根据商法则:

$$u = \sec x, v = x^5$$

$$\frac{du}{dx} = \tan x \sec x, \frac{dv}{dx} = 5x^4$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx}}{v^2} = \frac{x^5 \tan x \sec x - 5x^4 \sec x}{x^{10}} = \frac{\sec x (x \tan x - 5)}{x^6}$$

例 3.

$$\frac{d}{dx} \cot x^3$$

根据链式求导法则:

设  $u = x^3$ , 则:

$$\frac{dy}{du} = -\csc^2 u$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = -3x^2 \csc^2(x^3)$$

## 第八章 隐函数求导和相关变化率

### 1. 隐函数求导

例.

$$x^2 + y^2 = 4$$

推导过程:

设  $u = y^2$ , 则:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

原函数两边对  $x$  求导:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

### 2. 隐函数求二阶导数

例.

$$2y + \sin(y) = \frac{x^2}{\pi} + 1$$

推导过程:

设  $u = \sin(y)$ , 则:

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos(y) \frac{dy}{dx}$$



原函数两边对  $x$  求导:

$$2\frac{dy}{dx} + \cos(y)\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2 + \cos(y))}$$

两边再次对  $x$  求导:

$$\begin{aligned} 2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\cos(y)\frac{dy}{dx}\right) &= \frac{2}{\pi} \Rightarrow 2\frac{d^2y}{dx^2} - \sin(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cos(y)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi} \\ \Rightarrow (2 + \cos(y))\frac{d^2y}{dx^2} - \sin(y)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 &= \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

将  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2 + \cos(y))}$  代入结果:

$$\begin{aligned} (2 + \cos(y))\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{2}{\pi} + \sin(y)\left(\frac{2x}{\pi(2 + \cos(y))}\right)^2 \\ \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{2}{\pi(2 + \cos(y))} + \sin(y) \cdot \frac{4x^2}{\pi^2(2 + \cos(y))^3} \end{aligned}$$

### 3. 相关变化率

如果  $Q$  是某个量, 那么  $Q$  的变化率是  $\frac{dQ}{dt}$

设  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  为两个变量的变化率, 由于  $x$  和  $y$  都是关于时间  $t$  的函数, 所以  $x$  与  $y$  必定存在某种关系, 这种关系称为**相对变化率**

求解相关变化率的方法:

- (1) 识别出哪一个量需要求相关变化率;
- (2) 写出一个关联所有量的方程;
- (3) 对方程关于时间  $t$  做隐函数求导;
- (4) 将已知值带入方程中做替换.

例 1.

用打气筒给一个完美球体的气球充气. 空气以常数速率  $12\pi$  立方英寸每秒进入气球.

- (1) 当气球的半径达到 2 英寸时, 气球的半径的变化率是多少?  
(2) 从外, 当气球的体积达到  $36\pi$  立方英寸时, 气球的半径的变化率又是多少?

解:

球体体积公式:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

方程对时间  $t$  进行隐式求导:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dx} \quad (i)$$

- (1) 将  $r = 2$  和  $\frac{dV}{dt} = 12\pi$  代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 2^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{3}{4}$$

- (2) 根据球体体积公式, 得:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r = 3$$

将  $r = 3$  和  $\frac{dV}{dt} = 12\pi$  代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 3^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{1}{3}$$

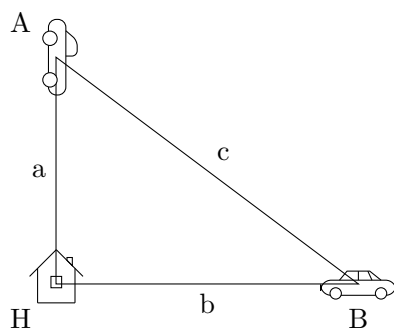
例 2.

假设有两辆汽车 A 和 B. 汽车 A 在一条路上径直向北行驶远离你家, 而汽车 B 在另一条路上径直向西行驶接近你家. 汽车 A 以 55 英里/小时的速度

行驶, 而汽车 B 以 45 英里/小时的速度行驶. 当 A 到达你家北面 21 英里, 而 B 到达你家东面 28 英里时, 两辆汽车间的距离的变化率是多少?

解:

如图.



由图可知:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

对时间  $t$  作隐函数求导:

$$2a \frac{da}{dt} + 2b \frac{db}{dt} = 2c \frac{dc}{dt} \quad (\text{ii})$$

由于 A 在远离 H, 所以距离随着时间增加:

$$\frac{da}{dt} = 55$$

而 B 在靠近 H, 所以距离随着时间减少:

$$\frac{db}{dt} = -45$$

将结果带入公式(ii), 得:

$$\frac{dc}{dt} = -3$$

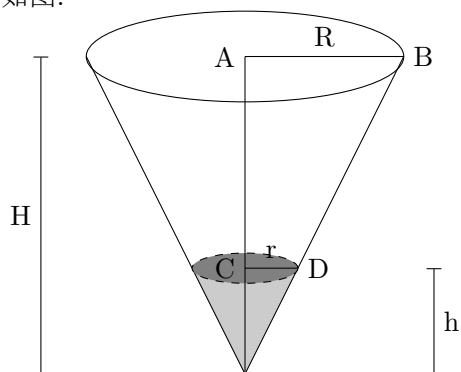
例 3.

有一个奇怪的巨大的圆锥形水罐 (锥尖在下方), 圆锥的高是圆锥半径的两倍. 如果水是以  $8\pi$  立方英尺/秒的速率注入水罐, 求:

- (1) 当水罐中水的体积为  $18\pi$  立方英尺时, 水位的变化率是多少?
- (2) 设想水罐底部有一个小洞, 致使水罐中每一立方英尺的水以一立方英尺每秒的速率流出. 当水罐中水的体积为  $18\pi$  立方英尺时, 水位的变化率是多少?

解:

如图.



圆锥体体积公式, 如下:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

- (1) 将  $V = 18\pi$ ,  $r = \frac{h}{2}$  代入体积公式, 得:

$$\frac{1}{12}\pi h^3 = 18\pi \Rightarrow h = 6$$

将  $r = \frac{h}{2}$  代入体积公式, 并对结果两边关于时间  $t$  隐式求导, 得:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \Rightarrow 8\pi = 9\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9}$$

(2) 根据 (1) 得:

$$h = 6$$

在当前秒, 水罐以  $8\pi$  立方英尺/秒注入水, 并以  $18\pi$  立方英尺/秒流出水, 所以:

$$\frac{dV}{dt} = 8\pi - 18\pi = -10\pi$$

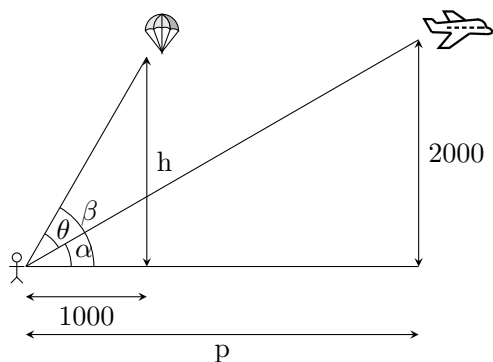
将  $r = \frac{h}{2}$  代入体积公式, 并对结果两边关于时间  $t$  隐式求导, 得:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \Rightarrow -10\pi = 9\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = -\frac{10}{9}$$

例 4.

有一架飞机保持在 2000 英尺的高度远离你朝正东方向飞行. 飞机以 500 英尺每秒的常数速率飞行. 同时, 不久之前有一个跳伞员从直升飞机 (它已经飞走了) 上跳下来. 跳伞员在你东边 1000 英尺处上空垂直地以 10 英尺每秒的常数速率向下飘落, 跳伞员相对于你的方位角与飞机相对于你的方位角之差被标记为  $\theta$ . 求当飞机和跳伞员在同一高度, 但飞机在你东边 8000 英尺时, 角  $\theta$  的变化率是多少?

如图.



由图可知:

$$\tan(\alpha) = \frac{2000}{p} \quad (\text{iii})$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{1000} \quad (\text{iv})$$

$$\theta = \beta - \alpha \quad (\text{v})$$

公式(iii)两边对时间  $t$  进行隐式求导:

$$\sec^2(\alpha) \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2000}{p^2} \frac{dp}{dt} \Rightarrow (\tan^2(\alpha) + 1) \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2000}{8000^2} \frac{dp}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{32000} \times 500 \times \frac{16}{17} \Rightarrow \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{68}$$

公式(iv)两边对时间  $t$  进行隐式求导:

$$\sec^2(\beta) \frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{1000} \frac{dh}{dt} \Rightarrow (\tan^2(\beta) + 1) \frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{100} \times \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{500}$$

公式(v)两边对时间  $t$  进行隐式求导:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{500} + \frac{1}{68} = \frac{-17 + 125}{8500} = \frac{27}{2125}$$

## 第九章 指数函数和对数函数

1. 指数法则:

$$(1) \quad b^0 = 1$$

$$(2) \quad b^1 = b$$

$$(3) \quad b^x b^y = b^{x+y}$$

$$(4) \quad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$(5) \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

2. 对数法则:

$$(1) \quad \log_b(1) = 0$$

$$(2) \quad \log_b(b) = 1$$

$$(3) \quad \log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

$$(4) \quad \log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

$$(5) \quad \log_b(x^y) = y \log_b(x)$$

(6) 换底法则:

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

3. 自然数  $e$  相关

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

\*\*  $\log_e(x)/\ln(x)/\log(x)$  具有相同意义

## 4. 对数函数求导

$$(1) \quad \frac{d}{dx} \ln(x) = \frac{1}{x}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \log_b(x) = \frac{1}{x \ln(b)}$$

## 5. 指数函数求导

$$(1) \quad \frac{d}{dx} (b^x) = b^x \ln(b)$$

$$(2) \quad \frac{d}{dx} (e^x) = e^x$$

## 6. 指数函数在 0 附近的行为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = \{(e^x)'|x=0\} = 1$$

## 7. 对数函数在 1 附近的行为

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \{\ln'(x)|x=1\} = 1$$

8. 指数函数在  $\infty$  或  $-\infty$  附近的行为

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$



$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$(3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

$$(4) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x!} = 0$$

9. 对数函数在  $\infty$  附近的行为

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x) = \infty$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0, \text{ 其中 } a > 0$$

10. 对数函数在 0 附近的行为

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^a \ln(x) = 0$$

11. 取对数求导法

当函数的底数和指数均为关于  $x$  的函数时, 通过对函数进行取对数, 让指数转化为乘数, 从而使用复合求导中的乘数求导法则解决问题  
例.

$$y = x^{\sin(x)}$$

由原方程式等号两边取对数, 得:

$$\ln(y) = \sin(x) \ln(x) \tag{i}$$

公式(i)两边关于  $x$  隐式求导, 得:

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \ln(x) \cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \ln(x) \cos(x) x^{\sin(x)} + \sin(x) x^{\sin(x)-1}$$

## 12. 指数增长与指数衰变

(1) 指数增长方程:  $P(t) = P_0 e^{kt}$

(2) 指数衰变方程:  $P(t) = P_0 e^{-kt}$

## 13. 双曲函数

(1) 双曲余弦:  $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(2) 双曲正弦:  $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(3) 双曲线方程:  $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(4) 导数:

$$\frac{d}{dx} \sinh(x) = \cosh(x) \quad \frac{d}{dx} \cosh(x) = \sinh(x)$$

## 第十章 反函数和反三角函数

### 1. 导数与反函数

如果  $f$  在其定义域  $(a, b)$  上可导且满足以下条件中的任意一条:

- (1) 对于所有的在  $(a, b)$  中的  $x$ ,  $f'(x) > 0$ ;
- (2) 对于所有的在  $(a, b)$  中的  $x$ ,  $f'(x) < 0$ ;
- (3) 对于所有的在  $(a, b)$  中的  $x$ ,  $f'(x) \geq 0$  且对于有限个数的  $x$ ,  $f'(x) = 0$ ;
- (4) 对于所有的在  $(a, b)$  中的  $x$ ,  $f'(x) \leq 0$  且对于有限个数的  $x$ ,  $f'(x) = 0$ .

则  $f$  有反函数.

### 2. 反函数的导数

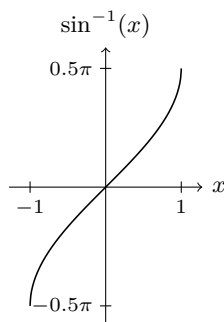
如果 $y = f^{-1}(x)$ , 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$
--

\*\*  $f(y)$  是将  $f(x)$  中的  $x$  替换为  $y$  的版本,  $f'(y)$  类似.

### 3. 反三角函数

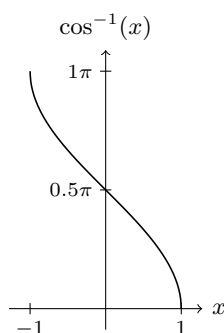
- (1)  $\sin^{-1}$  是奇函数; 其定义域为  $[-1, 1]$ , 值域为  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$(2) \frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ 其中 } -1 < x < 1.$$



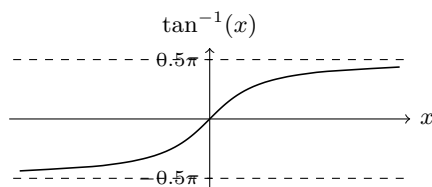
(3)  $\cos^{-1}$  既不是偶函数也不是奇函数; 其定义域为  $[-1, 1]$ , 值域为  $[0, \pi]$ .

$$(4) \frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ 其中 } -1 < x < 1.$$



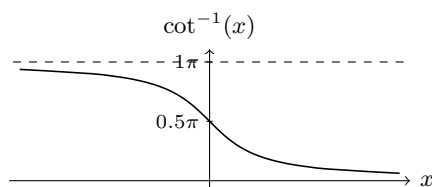
(5)  $\tan^{-1}$  是奇函数; 其定义域是  $\mathbb{R}$  且值域是  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ .

$$(6) \text{ 对于所有的实数 } x, \frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$



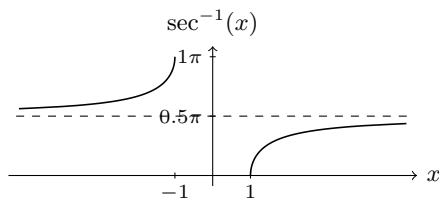
(7)  $\cot^{-1}$  既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域为  $\mathbb{R}$  且值域是  $(0, \pi)$

(8) 对于所有的实数  $x$ ,  $\frac{d}{dx} \cot^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ .



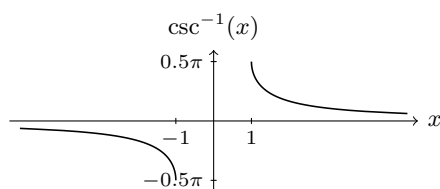
(9)  $\sec^{-1}$  既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  且值域是  $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$ .

(10) 对于  $x > 1$  或  $x < -1$ ,  $\frac{d}{dx} \sec^{-1}(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ .



(11)  $\csc^{-1}$  是奇函数; 其定义域为  $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$  且值域是  $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$ .

(12) 对于  $x > 1$  或  $x < -1$ ,  $\frac{d}{dx} \csc^{-1}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ .



## 4. 计算反三角函数

化简形如  $\sin^{-1}(\sin(\alpha))$  的三角函数:

获取指定角  $\alpha$  的参照角

找到反三角函数定义域中拥有该参照角的角

确定该角的正弦值与  $\alpha$  参照角的正弦值符号一致

## 5. 反双曲函数

(1)  $\sinh^{-1}$  是奇函数; 其定义域和值域都是  $\mathbb{R}$ .

(2) 对于所有的实数  $x$ ,  $\frac{d}{dx} \sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$ .

(3)  $\cosh^{-1}$  既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是  $[1, \infty)$  且值域是  $[0, \infty)$ .

(4) 对于  $x > 1$ ,  $\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

# 第十一章 导数和图像

## 1. 函数的极值

**极值定理** 假设函数  $f$  定义在开区间  $(a, b)$  内, 并且点  $c$  在  $(a, b)$  区间内. 如果点  $c$  为函数的局部最大值或最小值, 那么点  $c$  一定为该函数的临界点. 也就是说,  $f'(c) = 0$  或  $f'(c)$  不存在.

求解闭区间  $[a, b]$  内的全局最大值和最小值步骤:

- (1) 求出  $f'(x)$ , 并列出在  $(a, b)$  中  $f'(x)$  不存在或  $f'(x) = 0$  的点. 也就是说, 列出在开区间  $(a, b)$  内所有的临界点.
- (2) 把端点  $x = a$  和  $x = b$  放入列表.
- (3) 对于上述列表中的每个点, 将它们带入  $y = f(x)$  求出对应函数值.
- (4) 找出最大的函数值以及它所对应的  $x$  值, 得到全局最大值.
- (5) 类似于 (4), 得到全局最小值.

## 2. 罗尔定理

**罗尔定理** 假设函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  内连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导. 如果  $f(a) = f(b)$ , 那么在开区间  $(a, b)$  内至少存在一点  $c$ , 使得  $f'(c) = 0$ .

### 3. 中值定理

**中值定理** 假设函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  内连续, 在开区间  $(a, b)$  内可导, 那么在开区间  $(a, b)$  内至少有一点  $c$  使得

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

如果对于在定义域  $(a, b)$  内的所有  $x$ , 都有  $f'(x) = 0$ , 那么函数  $f$  在开区间  $(a, b)$  内为常数函数.

如果对于任意实数  $x$  都有  $f'(x) = g'(x)$ , 那么有  $f(x) = g(x) + C$  ( $C$  为常数).

### 4. 二阶导数与图像

如果  $x = c$  点是函数  $f$  的拐点, 则有  $f''(c) = 0$ .

如果  $f''(c) = 0$ , 则  $c$  点不一定是函数  $f$  的拐点.

### 5. 导数为零的汇总

纯 1 阶导数分析 - 假设  $f'(c) = 0$ , 此时情况如下:



- (1) 如果从左往右通过  $c$  点,  $f'(x)$  的符号由正变负, 那么  $c$  点为局部最大值;
- (2) 如果从左往右通过  $c$  点,  $f'(x)$  的符号由负变正, 那么  $c$  点为局部最小值;
- (3) 如果从左往右通过  $c$  点,  $f'(x)$  的符号不发生变化, 那么  $c$  点为水平拐点.

1/2 阶导数综合分析 - 假设  $f'(x) = 0$ , 则有:

- (1) 如果  $f''(c) < 0$ , 那么  $x = c$  为局部最大值;
- (1) 如果  $f''(c) > 0$ , 那么  $x = c$  为局部最小值;
- (1) 如果  $f''(c) = 0$ , 那么无法判断, 需借助纯 1 阶分析

## 第十二章 绘制函数图像

### 1. 建立原函数的符号表格

- (1) 建立一个两行的表格, 第一行为  $x$  取值, 第二行为  $f(x)$  对应值;
- (2) 在第一行以递增顺序列出  $x$  所有的关于  $f(x)$  的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;
- (3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以 '\*' 填充;
- (4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;
- (5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应  $f(x)$  的值, 大于 0 则填上 '+', 小于 0 则填上 '-'.

### 2. 建立一阶导数的符号表格

- (1) 建立一个三行行的表格, 第一行为  $x$  取值, 第二行为  $f'(x)$  对应值, 第三行为趋势图;
- (2) 在第一行以递增顺序列出  $x$  所有的关于  $f'(x)$  的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;
- (3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以 '\*' 填充;

- (4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;
- (5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应  $f'(x)$  的值, 大于 0 则填上 '+', 小于 0 则填上 '-';
- (6) 在第三行根据第二行的内容, 在该列填上对应内容, '+' 对应 '/', '0' 对应 '-', '-' 对应 '·'.

### 3. 建立二阶导数的符号表格

- (1) 建立一个两行的表格, 第一行为  $x$  取值, 第二行为  $f''(x)$  对应值, 第三行为趋势图;
- (2) 在第一行以递增顺序列出  $x$  所有的关于  $f''(x)$  的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;
- (3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以 '\*' 填充;
- (4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;
- (5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应  $f'(x)$  的值, 大于 0 则填上 '+', 小于 0 则填上 '-';
- (6) 在第三行根据第二行的内容, 在该列填上对应内容, '+' 对应 '∪', '0' 对应 '∩', '-' 对应 '∩'.

### 4. 绘制函数图像的完整步骤

- (1) 对称性 - 通过  $-x$  替换  $x$ , 来验证函数的奇偶性;
- (2)  $y$  轴截距 - 通过  $x = 0$  来求  $y$  轴截距;

- (3)  $x$  轴截距 - 通过  $y = 0$  来求  $x$  轴截距;
- (4) 定义域 - 除已直接给出定义域的情况, 可剔除使得分母为 0、偶数根号下的量为负数、对数符号里的量为负数或 0 的数, 并且反三角函数也需注意;
- (5) 垂直渐近线 - 分母为 0 且分子不为 0 的位置, 或对数式;
- (6) 函数的正负 - 建立关于  $f(x)$  的符号表格;
- (7) 水平渐近线 - 通过计算  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  来找出函数的水平渐近线;
- (8) 导数的正负 - 绘制关于一阶导数的符号表格;
- (9) 最大值和最小值 - 根据 (8) 的符号表格, 计算所有局部最大/小值, 找出全局最大/小值;
- (10) 二阶导数的正负 - 绘制关于二阶导数的符号表格;
- (11) 拐点 - 拐点的二阶导数为 0, 并且在该点两侧导数的正反符号相反.

## 第十三章 最优化和线性化

### 1. 最优化方案

- (1) 识别可能用到的所有变量;
- (2) 在极端情况下, 变量的取值范围;
- (3) 列出关联不同变量的方程组;
- (4) 通过方程组消去变量, 使得因变量 (目标) 可以表示为只关于一个自变量的函数;
- (5) 对因变量关于自变量求导, 找出临界点;
- (6) 通过一阶或二阶导数的符号表格求出最大值或最小值;
- (7) 得出最终结论.

### 2. 线性化方案

- (1) 将估算量写成适当的函数  $f(x)$ , 则当前值为  $f(a)$ ;
- (2) 选取某个与值  $a$  接近的自变量值  $b$ , 并且  $f(b)$  便于计算;
- (3) 找出通过曲线  $f(x)$  上点  $(b, f(b))$  的切线, 方程为:  $g(x) - f(b) = f'(b)(x - b)$ ;
- (4) 最后结果  $f(x) \approx g(x) = f'(b)(x - b) + f(b)$ , 函数  $g(x)$  称为  $f(x)$  在

$x = b$  处的线性化.

### 3. 近似估算 - 牛顿法

牛顿法 假设  $a$  是对方程  $f(x) = 0$  的解的一个近似. 如果令

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

则在很多情况下,  $b$  是个比  $a$  更好的近似.

牛顿法不起作用的四个情况:

- (1)  $f'(a)$  的值接近于 0;
- (2) 如果  $f(x) = 0$  有不只一个解, 可能得到的不是你想要的那个解;
- (3) 近似可能变得越来越糟. 如:  $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ ;
- (4) 陷入循环.

## 第十四章 洛必达法则及极限问题

### 总结

1. 类型 A:  $\frac{0}{0}$

如果  $f(a) = g(a) = 0$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

例.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}$$

2. 类型 A:  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$

如果  $f(a) = g(a) = \pm\infty$ , 那么  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

例 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 7x}{2x^2 - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x + 7}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{6}{4} + \frac{7}{4x} \right) = \frac{3}{2}$$

例 2.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\csc x}{1 - \ln x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\csc x}{1 - \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\csc x \cot x}{-\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sin x} \frac{1}{\tan x} = 1 \times \infty = \infty$$

例 3.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

### 3. 类型 B1: $\infty - \infty$

方法: 通过通分或者分子/分母同时乘以共轭表达式来转化为类型 A

例.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0$$

### 4. 类型 B2: $0 \times \pm\infty$

方法: 选择两个因式中较简单的那个取倒数把它移到分母 (尽量不要选用对数做分母, 把它留在分子)

例.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

5. 类型  $C$ :  $1^{\pm\infty}, 0^0, \infty^0$

通过取对数, 转化为类型  $B2$  或  $A$ , 计算获得极限  $L$ , 再以  $e$  为底/ $L$  为幂获取最终结果

例 1.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x^{\sin x}) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{\sin x}{x} \times \tan x = 0 \end{aligned}$$

对两边求指数, 得:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

例 2.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan x)^{\frac{1}{x}} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln((1 + 3 \tan x)^{\frac{1}{x}}) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 3 \tan x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3 \sec^2 x}{1 + 3 \tan x}}{1} \\ &= \frac{3 \times 1^2}{1 + 3 \times 0} = 3 \end{aligned}$$

对两边求指数, 得:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3 \tan x)^{\frac{1}{x}} = e^3$$

## 第十五章 积分

如下公式:

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2}$$

代表从  $j = 1$  到  $j = n$  时,  $\frac{1}{j^2}$  的和.

$n$  为唯一变量.

$j$  为虚拟变量, 也称为求和指标.

常用求和公式:

$$\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$\sum_{j=1}^b j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

## 第十六章 定积分

### 1. 公式

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

为定积分, 表示“函数  $f(x)$  对于  $x$  从  $a$  到  $b$  的积分”.

$f(x)$  为被积函数.

$a$  和  $b$  为积分极限, 也称为积分端点.

### 2. 有向面积积分:

$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x$  是由曲线  $y = f(x)$ , 两条垂线  $x = a$  和  $x = b$ , 以及  $x$  轴所围成的有向面积 (平方单位).

### 3. 定积分公式:

$$\int_b^a f(x) \mathrm{d}x = - \int_a^b f(x) \mathrm{d}x.$$

$$\int_a^a f(x) \mathrm{d}x = 0.$$

$$\int_a^b f(x) \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b C f(x) \, dx = C \int_a^b f(x) \, dx.$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

4. 两条曲线之间的面积:

$$\text{在函数 } f \text{ 和 } g \text{ 之间的面积 (平方单位)} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \, dx.$$

5. 曲线与  $y$  轴围成的面积:

如果  $f$  存在反函数,  $\int_A^B f^{-1}(y) \, dy$  就是由函数  $y = f(x)$ 、直线  $y = A$  和  $y = B$  以及  $y$  轴所围成的面积 (平方单位).

6. 积分比较:

如果对于在区间  $[a, b]$  内的所有  $x$  都有  $f(x) \leq g(x)$ , 那么就有

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

7. 简单估算:

如果对于在  $[a, b]$  区间内的所有  $x$  有  $m \leq f(x) \leq M$ , 那么

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b - a).$$

8. 积分的平均值:

$$\text{函数 } f \text{ 在区间 } [a, b] \text{ 内的平均值} = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

## 9. 积分的中值定理:

如果函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 那么在开区间  $(a, b)$  内总有一点  $c$ , 满足

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \, dx.$$

## 第十七章 微积分的基本定理

### 1. 第一基本定理

微积分的第一基本定理: 如果函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上是连续的, 定义  $F$  为

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad x \in [a, b]$$

则  $F$  在开区间  $(a, b)$  内是可导函数, 而且  $F'(x) = f(x)$ .

### 2. 第二基本定理

微积分的第二基本定理: 如果函数  $f$  在闭区间  $[a, b]$  上是连续的,  $F$  是  $f$  的任意一个反导数 (关于  $x$ ), 那么有

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$$

### 3. 不定积分法则

如果  $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$ , 那么  $\int f(x) dx = F(x) + C$ .

4. 不定积分运算法则

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int C f(x) dx = C \int f(x) dx$$

## 5. 微分和积分对照公式

$\frac{d}{dx}x^a = ax^{a-1}$	$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C (a \neq -1)$
$\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x  + C$
$\frac{d}{dx}e^x = e^x$	$\int e^x dx = e^x + C$
$\frac{d}{dx}b^x = b^x \ln(b)$	$\int b^x dx = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$
$\frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x)$	$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$
$\frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x)$	$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
$\frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x)$	$\int \sec^2(x) dx = \tan(x) + C$
$\frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x)$	$\int \sec(x)\tan(x) dx = \sec(x) + C$
$\frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x)$	$\int \csc^2(x) dx = -\cot(x) + C$
$\frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x)$	$\int \csc(x)\cot(x) dx = -\csc(x) + C$
$\frac{d}{dx}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1}(x) + C$
$\frac{d}{dx}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(x) + C$
$\frac{d}{dx}\sec^{-1}(x) = \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}}$	$\int \frac{1}{ x \sqrt{x^2-1}} dx = \sec^{-1}(x) + C$
$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x)$	$\int \cosh(x) dx = \sinh(x) + C$
$\frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$	$\int \sinh(x) dx = \cosh(x) + C$



## 第十八章 积分的方法 I

### 1. 换元法 (链式求导的逆)

$$\int f'(x)g(f(x)) \, dx = h(f(x)) + C.$$

例 1.

$$\int \frac{x}{x^2 + 8} \, dx$$

推导过程:

$$\because \frac{d}{dx}(x^2 + 8) = 2x$$

$\therefore$  使用换元法, 设  $t = x^2 + 8$ .

得到  $dt = 2x \, dx$

$$\therefore \int \frac{x}{x^2 + 8} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} \, dt = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 + 8| + C$$

例 2.

$$\int \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x + 9} \, dx$$

推导过程:

$$\therefore \frac{d}{dx}(x^3 + 7x - 9) = 3x^2 + 7$$

$\therefore$  使用换元法, 设  $t = x^3 + 7x - 9$ .

$$\text{得到 } dt = (3x^2 + 7) dx$$

$$\therefore \int \frac{3x^2 + 7}{x^3 + 7x - 9} dx = \frac{1}{t} = \ln |t| + C = \ln |x^3 + 7x - 9| + C$$

## 2. 分部积分法 (乘法求导法则的逆)

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx.$$

例 1.

$$\int x e^x dx$$

推导过程:

设  $u = x$ ,  $\frac{dv}{dx} = e^x$ , 则:

$$v = e^x, \frac{du}{dx} = 1$$

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx$$

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

例 2.

$$\int \ln x dx$$

推导过程:

设  $u = \ln x$ ,  $\frac{dv}{dx} = 1$ , 则:

$$v = x, \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - x + C$$

总结:

1. 内容存在  $\sin/\cos$  或  $e^x$  时, 视为已微分部分
2. 内容存在  $\ln$  时, 视为未微分部分
3. 内容不存在乘积时, 整个内容视为未微分部分

### 3. 部分分式 (有理函数积分)

有理函数: 形如  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  的函数

部分分式处理步骤:

(1) 确保分子的次数小于分母的次数, 如有必要 (分子次数  $\geq$  分母次数) 做除法;

(2) 对分母进行因式分解;

(3) 进行”分部”(将分母按隐式分解进行拆分). 分部类别如下:

1) 线性式:

$$\frac{mx+n}{(x+a)(x+b)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+a}$$

2) 线性式的平方:

$$\frac{mx+b}{(x+a)^2} = \frac{A}{(x+a)^2} + \frac{B}{x+a}$$

3) 二次多项式:

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$$

4) 线性式的三次方:

$$\frac{mx^2+nx+k}{(x+a)^3} = \frac{A}{(x+a)^3} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{x+a}$$

5) 线性式的四次方:

$$\frac{mx^3+nx^2+kx+h}{(x+a)^4} = \frac{A}{(x+a)^4} + \frac{B}{(x+a)^3} + \frac{C}{(x+a)^2} + \frac{D}{x+a}$$

(4) 对各分部进行通分, 计算分部中 A/B/C/D 等常数项的值;

(5) 对各分部进行积分

1) 分母为单项, 该项为  $x$  的幂 - 积分结果为对数或  $x$  的负次幂;

2) 分母为二次多项式 - 对分母先进行配方, 然后进行换元, 最后根据分子的项数, 拆分为多个积分

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

例.

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx$$

推导过程:

对分母  $x^2 - 1$  进行因式分解:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

进行分部:

$$\frac{x+2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$$

求分子常数的值:

$$A(x-1) + B(x+1) = x+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}, B = \frac{3}{2}$$

求解分母为线性次幂的积分:

$$\int \frac{x+2}{x^2-1} dx = \frac{3}{2} \int \frac{1}{x-1} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x+1} dx = \frac{3}{2} \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C$$

## 第十九章 积分的方法 II

### 1. 三角恒等式相关

#### 1) 倍角公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

例.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx$$

推导过程:

由  $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ , 得:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx = \sqrt{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x| \, dx$$

$\because \sin x$  在  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  值恒为非负

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \cos 2x} \, dx = -\sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

#### 2) 毕达哥拉斯定理

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

例.

$$\int \frac{1}{\sec x + 1} dx$$

推导过程:

分子分母同时乘以共轭表达式

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sec x + 1} dx &= \int \frac{1}{\sec x + 1} \times \frac{\sec x - 1}{\sec x - 1} dx = \int \frac{\sec x - 1}{\sec^2 x - 1} dx \\ &= \int \frac{\sec x - 1}{\tan^2 x} dx = \int \frac{\sec x}{\tan^2 x} dx - \int \frac{1}{\tan^2 x} dx \\ \therefore \int \frac{\sec x}{\tan^2 x} dx &= \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \cot x \csc x dx = -\csc x + C \\ \int \frac{1}{\tan^2 x} dx &= \int \cot^2 x dx = \int (\csc^2 x - 1) dx = \int \csc^2 x dx - \int dx \\ &= -\cot x - x + C \\ \therefore \int \frac{1}{\sec x + 1} dx &= -\csc x - \cot x - x + C \end{aligned}$$

### 3) 角和/差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) + \cos(A + B))$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A - B) - \cos(A + B))$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A - B) + \sin(A + B))$$

例.

$$\int \cos 3x \sin 19x dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \therefore \sin 19x \cos 3x &= \frac{1}{2}(\sin(19x - 3x) + \sin(19x + 3x)) \\ &= \frac{1}{2}(\sin 16x + \sin 22x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \cos 3x \sin 19x \, dx &= \frac{1}{2} \int \sin 16x \, dx + \frac{1}{2} \int \sin 22x \, dx \\ &= -\frac{1}{32} \cos 16x - \frac{1}{44} \cos 22x + C\end{aligned}$$

## 2. 三角函数幂的积分

1) sin 的幂 (cos 类似)

I、一次幂

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

II、二次幂

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \cos 2x) \, dx = \frac{1}{2} \int dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C\end{aligned}$$

III、三次幂及以上的奇次幂解题思路:

提取单次项与  $dx$  合并 (用于换元), 剩余部分利用  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  进行转化

例.

$$\int \sin^7 x \, dx$$

推导过程:

设  $t = \cos x$ , 则  $dt = -\sin x \, dx$

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x \, dx &= -\int (1 - \cos^2 x)^3 \sin x \, dx = -\int (1 - t^2)^3 \, dt \\ &= -\int (1 - 3t^2 + 3t^4 - t^6) \, dt \\ &= -(t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7) + C\end{aligned}$$



$$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C$$

## IV、四次幂及以上的偶次幂

例.

$$\int \sin^6 x \, dx$$

①使用倍角公式

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \, dx &= \int \frac{1}{8} (1 - \cos 2x)^3 \, dx = \frac{1}{8} \int (1 - 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x - \cos^3 2x) \, dx \\ &= \int \frac{1}{8} \, dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx \\ \therefore \int \cos^2 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} \left( \int dx + \int \cos 4x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \sin 4x + C \\ \int \cos^3 2x \, dx &= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

设  $t = \sin 2x$ , 则  $dt = 2 \cos 2x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - t^2) \, dt = \frac{1}{2} t - \frac{1}{6} t^3 + C = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C \\ \therefore \int \sin^6 x \, dx &= \frac{1}{8} \int dx - \frac{3}{8} \int \cos 2x \, dx + \frac{3}{8} \int \cos^2 2x \, dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x \, dx \\ &= \frac{1}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + \frac{3}{8} \left( \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x \right) - \frac{1}{8} \left( \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C \\ &= \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{3}{64} \sin 4x + C \end{aligned}$$

②使用分部积分

设  $u = \sin^5 x$ ,  $\frac{dv}{dx} = \sin x$ , 则:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= 5 \sin^4 x \cos x, \quad v = -\cos x \\ \int \sin^6 x \, dx &= -\sin^5 x \cos x + \int 5 \sin^4 x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^5 x \cos x + 5 \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin^5 x \cos x + 5 \int \sin^4 x \, dx - 5 \int \sin^6 x \, dx \end{aligned}$$

将  $5 \int \sin^6 x \, dx$  移动到等式左侧, 得:

$$\int \sin^6 x \, dx = -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \, dx$$

设  $h = \sin^3 x \, dx$ ,  $\frac{dk}{dx} = \sin x$ , 则:

$$\frac{dh}{dx} = 3 \sin^2 x \cos x, \quad k = -\cos x$$

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \cos^2 x \, dx \\ &= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) \, dx \\ &= -\sin^3 x \cos x + 3 \int \sin^2 x \, dx - 3 \int \sin^4 x \, dx \end{aligned}$$

将  $3 \int \sin^4 x \, dx$  移动到等式左侧, 得:

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \, dx &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \left( \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x \right) + C \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x + C \\ \therefore \int \sin^6 x \, dx &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \int \sin^4 x \, dx \\ &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x + \frac{5}{6} \left( -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{8} x - \frac{3}{16} \sin 2x \right) + C \\ &= -\frac{1}{6} \sin^5 x \cos x - \frac{5}{24} \sin^3 x \cos x + \frac{5}{16} x - \frac{5}{32} \sin 2x + C \\ &= -\frac{1}{48} (1 - \cos 2x)^2 \sin 2x - \frac{5}{96} (1 - \cos 2x) \sin 2x + \frac{5}{16} x - \\ &\quad \frac{5}{32} \sin 2x + C \\ &= -\frac{1}{48} (2 \sin 2x - \sin 4x - \sin^3 2x) - \frac{5}{96} \sin 2x + \frac{5}{192} \sin 4x + \\ &\quad \frac{5}{16} x - \frac{5}{32} \sin 2x + C \\ &= \frac{5}{16} x - \left( \frac{1}{24} + \frac{5}{96} + \frac{5}{32} \right) \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + \left( \frac{1}{48} + \frac{5}{192} \right) \sin 4x \\ &= \frac{5}{16} x - \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + \frac{3}{64} \sin 4x \end{aligned}$$

V、sin 与 cos 混合, 并且至少其中一个为奇次幂

解题思路:

提取奇数幂项的单次幂与  $dx$  放置一起 (当两个都为奇次幂时, 提取次方幂

小的项)

例.

$$\int \cos^7 x \sin^{10} x \, dx$$

推导过程:

设  $t = \sin x$ , 则  $dt = \cos x \, dx$

$$\begin{aligned} \int \cos^7 x \sin^{10} x \, dx &= \int (1 - \sin^2 x)^3 \sin^{10} x \cos x \, dx = \int (1 - t^2)^3 t^{10} \, dt \\ &= \int (t^{10} - 3t^{12} + 3t^{14} - t^{16}) \, dt \\ &= \frac{1}{11} t^{11} - \frac{3}{13} t^{13} + \frac{1}{5} t^{15} - \frac{1}{17} t^{17} + C \end{aligned}$$

将  $t = \sin x$  代入上式:

$$\int \cos^7 x \sin^{10} x \, dx = \frac{1}{11} \sin^{11} x - \frac{3}{13} \sin^{13} x + \frac{1}{5} \sin^{15} x - \frac{1}{17} \sin^{17} x + C$$

VI、 $\sin$  与  $\cos$  混合, 并且都为偶次幂

解题思路:

使用倍角公式, 降低次幂

例.

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \, dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx - \int \cos 2x \, dx - \int \cos^2 2x \, dx + \int \cos^3 2x \, dx \\ \therefore \int \cos^2 x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C \\ \int \cos^3 2x \, dx &= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, dx = \int \cos 2x \, dx - \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \int \sin^2 2x \cos 2x \, dx \end{aligned}$$

设  $t = \sin 2x$ , 则  $dt = 2 \cos 2x \, dx$

$$\begin{aligned}
\therefore \int \cos^3 2x \, dx &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{2} \int t^2 \, dt = \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3 + C \\
&= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x + C \\
\therefore \int \cos^2 x \sin^4 x \, dx &= \frac{1}{8} \left( x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x \right) + C \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + C
\end{aligned}$$

2)tan 的幂 (cot 类似)

I、一次幂

$$\tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{1}{\cos x} - \sin x \, dx$$

设  $t = \cos x$ , 则  $dt = -\sin x \, dx$

$$\int \tan x \, dx = - \int \frac{1}{t} \, dt = -\ln |t| + C = -\ln |\cos x| + C$$

II、二次幂及以上次幂

解题思路:

依次提取  $\tan^2 x$ , 转化为  $\sec^2 x - 1$

例.

$$\int \tan^7 x \, dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned}
\int \tan^7 x \, dx &= \int \tan^5 x (\sec^2 x - 1) \, dx = \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^5 x \, dx \\
&= \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^3 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx + \int \tan^3 x \, dx \\
&= \int \tan^5 x \sec^2 x \, dx - \int \tan^3 x \sec^2 x \, dx + \int \tan x \sec^2 x \, dx - \\
&\quad \int \tan x \, dx
\end{aligned}$$

设  $t = \tan x$ , 则  $dt = \sec^2 x \, dx$

$$\begin{aligned}
\int \tan^5 x \sec^2 x \, dx &= \int t^5 \, dt = \frac{1}{6} t^6 + C \\
\int \tan^3 x \sec^2 x \, dx &= \int t^3 \, dt = \frac{1}{4} t^4 + C \\
\int \tan x \sec^2 x \, dx &= \int t \, dt = \frac{1}{2} t^2 + C \\
\therefore \int \tan^7 x \, dx &= \frac{1}{6} t^6 - \frac{1}{4} t^4 + \frac{1}{2} t^2 + \ln |\cos x| + C \\
&= \frac{1}{6} \tan^6 x - \frac{1}{4} \tan^4 x + \frac{1}{2} \tan^2 x + \ln |\cos x| + C
\end{aligned}$$

总结:

$$I_n = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

3) sec 的幂 (csc 类似)

I、一次幂

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \int \frac{\sec^2 x + \tan x \sec x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

设  $t = \sec x + \tan x$ , 则  $dt = (\tan x \sec x + \sec^2 x) \, dx$

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{1}{t} \, dt = \ln |t| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

II、二次幂

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + C$$

III、三次幂及以上次幂

解题思路:

提取  $\sec^2 x$ , 应用分部积分法, 将其视为  $\frac{dv}{dx}$  部分

例.

$$\sec^6 x \, dx$$

推导过程:

设  $u = \sec^4 x$ ,  $\frac{dv}{dx} = \sec^2 x$ , 则:

$$\frac{du}{dx} = 4 \sec^4 x \tan x, v = \tan x$$

$$\begin{aligned} \int \sec^6 x \, dx &= \sec^4 x \tan x - 4 \int \sec^4 x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec^4 x \tan x - 4 \int \sec^4 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec^4 x \tan x - 4 \int \sec^6 x \, dx + 4 \int \sec^4 x \, dx \end{aligned}$$

将  $4 \int \sec^6 x \, dx$  移动到等式左侧, 得:

$$\int \sec^6 x \, dx = \frac{1}{5} \sec^4 x \tan x + \frac{4}{5} \int \sec^4 x \, dx$$

设  $h = \sec^2 x$ ,  $\frac{dk}{dx} = \sec^2 x$ , 则:

$$\frac{dh}{dx} = 2 \sec^2 x \tan x, k = \tan x$$

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \sec^2 x \tan x - 2 \int \sec^2 x \tan^2 x \, dx \\ &= \sec^2 x \tan x - 2 \int \sec^2 x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec^2 x \tan x - 2 \int \sec^4 x \, dx + 2 \int \sec^2 x \, dx \end{aligned}$$

将  $2 \int \sec^4 x \, dx$  移动到等式左侧, 得:

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx \\ \therefore \int \sec^6 x \, dx &= \frac{1}{5} \sec^4 x \tan x + \frac{4}{5} \left( \frac{1}{3} \sec^2 x \tan x + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx \right) \\ &= \frac{1}{5} \sec^4 x \tan x + \frac{4}{15} \sec^2 x \tan x + \frac{8}{15} \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{5} \sec^4 x \tan x + \frac{4}{15} \sec^2 x \tan x + \frac{8}{15} \tan x + C \end{aligned}$$

### 3. 三角换元法的积分

#### 1) $\sqrt{a^2 - x^2}$ 的奇次幂

解题思路:

设  $x = a \sin \theta$ , 将  $x$  的积分转化为  $\theta$  的积分

例.

$$\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

推导过程:

设  $x = 3 \sin \theta$ , 则  $dx = 3 \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx &= \int \frac{9 \sin^2 \theta}{27 \cos^3 \theta} \times 3 \cos \theta d\theta = \int \tan^2 \theta d\theta \\ &= \int (\sec^2 \theta - 1) d\theta = \tan \theta - \theta + C \end{aligned}$$

$$\because \sin \theta = \frac{x}{3}$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}, \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$$

$$\therefore \int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{x}{\sqrt{9-x^2} - \sin^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)} + C$$

2)  $\sqrt{x^2+a^2}$  的奇次幂

解题思路:

设  $x = a \tan \theta$ , 将  $x$  的积分转化为  $\theta$  的积分

例.

$$\int (x^2 + 15)^{-\frac{5}{2}} dx$$

推导过程:

设  $x = \sqrt{15} \tan \theta$ , 则  $dx = \sqrt{15} \sec^2 \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int (x^2 + 15)^{-\frac{5}{2}} dx &= \int \frac{1}{(\sqrt{15} \sec \theta)^5} \times \sqrt{15} \sec^2 \theta d\theta = \frac{1}{225} \int \frac{1}{\sec^3 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{225} \int \cos^3 \theta d\theta \end{aligned}$$

$$\therefore \int \cos^3 \theta d\theta = \int (1 - \sin^2 \theta) \cos \theta d\theta$$

设  $t = \sin \theta$ , 则  $dt = \cos \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int \cos^3 \theta d\theta &= \int (1 - t^2) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta + C \\ \therefore \int (x^2 + 15)^{-\frac{5}{2}} dx &= \frac{1}{225} \left( \sin \theta - \frac{1}{3} \sin^3 \theta \right) + C \\ \therefore \tan \theta &= \frac{x}{\sqrt{15}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin \theta &= \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} \\ \therefore \int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}} dx &= \frac{1}{225} \left( \frac{x}{\sqrt{x^2+15}} - \frac{x^3}{3(x^2+15)^{\frac{3}{2}}} \right) + C\end{aligned}$$

3)  $\sqrt{x^2-a^2}$  的奇次幂

解题思路:

设  $x = a \sec \theta$ , 将  $x$  的积分转化为  $\theta$  的积分

例.

$$\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-4}} dx$$

推导过程:

设  $x = 2 \sec \theta$ , 则  $dx = 2 \tan \theta \sec \theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-4}} dx &= \int \frac{2 \tan \theta \sec \theta}{8 \sec^3 \theta \sqrt{4 \tan^2 \theta}} d\theta = \frac{1}{8} \int \frac{1}{\sec^2 \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{8} \int \cos^2 \theta d\theta\end{aligned}$$

$$\therefore \int \cos^2 \theta d\theta = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2\theta) d\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-4}} dx = \frac{1}{16} \left( \theta + \frac{\sin 2\theta}{2} \right) + C$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{\sec \theta} = \frac{2}{x}$$

$$\therefore \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}, \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{4\sqrt{x^2-4}}{x^2}, \theta = \sec^{-1} \left( \frac{x}{2} \right)$$

$$\therefore \int \frac{1}{x^3 \sqrt{x^2-4}} dx = \frac{1}{16} \left( \sec^{-1} \left( \frac{x}{2} \right) + \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2} \right) + C$$



## 第二十章 反常积分: 基本概念

### 1. 收敛和发散

当  $\int_a^b f(x) dx$  出现以下情况, 称为反常积分:

(1) 函数  $f$  在  $[a, b]$  内是无界的 (垂直渐近线)

(2)  $b = \infty$

(3)  $a = -\infty$

如果积分不是反常积分, 那么它自然收敛.

破裂点: 当函数  $f(x)$  在  $x$  接近于某点  $c$  时是无界的, 那么我们说该函数在  $x = c$  处有一个破裂点.

瑕点: 有限区间内的破裂点, 或  $x \rightarrow \infty / -\infty$ .

如果仅仅在  $x$  接近于  $a$  点该函数  $f(x)$  是无界的, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

如果极限存在, 该积分收敛; 否则该积分发散

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \ln |x| \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln(1) - \ln(\varepsilon)) \\ &= \infty \end{aligned}$$

所以, 反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$  发散

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) \\ &= 2 \end{aligned}$$

所以, 反常积分  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  收敛

如果函数仅仅在  $x$  接近于  $b$  点该函数是无界的, 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

如果极限存在, 该积分收敛; 否则该积分发散

如果函数在区间  $[a, b]$  内有破裂点  $c$ , 则定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx$$

只有当两个积分都收敛时, 总积分收敛; 否则发散

计算反常积分:

如有必要则进行分解, 每部分最多只能有一个瑕点, 而且该点要在积分的上下限

## 2. 无穷区间上的积分

函数在区间  $[a, \infty)$  没有破裂点, 定义

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_a^N f(x) dx$$

如果极限存在, 积分收敛; 否则积分发散

函数在区间  $(-\infty, b]$  没有破裂点, 定义

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^b f(x) dx$$

如果极限存在, 积分收敛; 否则积分发散

例 1.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x} dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \ln |x| \Big|_1^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} (\ln(N) - \ln(1)) \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

所以, 反常积分  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$  发散

例 2.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

推导过程:

$$\begin{aligned}
 \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int_1^N \frac{1}{x^2} dx \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{x} \Big|_1^N \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{N} + 1\right) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

所以, 反常积分  $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  收敛

### 3. 比较判别法 (理论)

如果在区间  $(a, b)$  内, 函数  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ , 且积分  $\int_a^b g(x) dx$  是发散的, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  也是发散的. 即

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx = \infty$$

如果在区间  $(a, b)$  内, 函数  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 且积分  $\int_a^b g(x) dx$  是收敛的, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  也一定是收敛的. 即

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx < \infty$$

#### 4. 极限比较判别法 (理论)

当  $x \rightarrow a$  时,  $f(x) \sim g(x)$  同  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  有着同样的意义

如果当  $x \rightarrow a$  时  $f(x) \sim g(x)$ , 且这两个函数在区间  $[a, b]$  上没有其他瑕点, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  和  $\int_a^b g(x) dx$  是同时收敛或同时发散的, 这称为  
**极限比较判别法**

例

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})} dx$$

推导过程:

$\because x \rightarrow 0$  时,  $\sin(x) \sim x$

$\therefore x \rightarrow 0^+$  时,  $\sin(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$

两边取倒数, 得:

$$\frac{1}{\sin(\sqrt{x})} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\because [0, 1]$  区间上, 仅有 0 为破裂点

$$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  在区间  $[0, 1]$  上收敛

同理,  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$  在区间  $[0, 1]$  上收敛

## 5.p 判别法 (理论)

$\int_a^\infty$  的情况: 对于任意有限值  $a > 0$ , 积分

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

在  $p > 1$  时是收敛的, 在  $p \leq 1$  时是发散的

$\int_0^a$  的情况: 对于任意有限值  $a > 0$ , 积分

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$$

在  $p < 1$  时是收敛的, 在  $p \geq 1$  时是发散的

## 6. 绝对收敛判别法 (理论)

如果  $\int_a^b |f(x)| dx$  是收敛的, 那么  $\int_a^b f(x) dx$  也是收敛的

例

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx$$

推导过程:

$$\therefore \left| \frac{\sin(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$$

$\therefore$  根据比较判别法:

$$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx \leq \int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

$\therefore$  根据 P 判别法

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛}$$

$$\therefore \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2} dx \text{ 收敛}$$

∴ 根据绝对收敛判别法

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \text{ 收敛}$$

## 第二十一章 反常积分：如何解题

### 1. 如何解题

#### 1) 拆分积分步骤

①确定区间  $[a, b]$  上的所有瑕点;

②将积分拆分为若干个积分之和, 使拆分后的每个积分最多包含一个瑕点, 这些瑕点作为相应积分的上限或下限;

③分别讨论每个积分, 如果所有积分收敛, 则整个积分收敛; 否则整个积分发散.

#### 2) 如何处理负函数值

①如果被积函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上既有正值又有负值, 考虑使用绝对收敛判别法

②如果被积函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上恒为非正, 即在  $[a, b]$  上  $f(x) \leq 0$ , 则:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b -f(x) dx$$

③如果被积函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上正负无损/增益震荡, 积分发散. 如:  $\sin x, \cos x$



## 2. 积分判别法汇总

## 1) 比较判别法

如果在区间  $(a, b)$  内, 函数  $f(x) \geq g(x) \geq 0$ , 且积分  $\int_a^b g(x) dx$  是发散的, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  也是发散的. 即

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx = \infty$$

如果在区间  $(a, b)$  内, 函数  $0 \leq f(x) \leq g(x)$ , 且积分  $\int_a^b g(x) dx$  是收敛的, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  也一定是收敛的. 即

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx < \infty$$

## 2) 极限比较判别法

当  $x \rightarrow a$  时,  $f(x) \sim g(x)$  同  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$  有着同样的意义

如果当  $x \rightarrow a$  时  $f(x) \sim g(x)$ , 且这两个函数在区间  $[a, b]$  上没有其他瑕点, 那么积分  $\int_a^b f(x) dx$  和  $\int_a^b g(x) dx$  是同时收敛或同时发散的, 这称为 **极限比较判别法**

注解: 如果函数  $g(x)$  有原函数没有的瑕点, 需要将原函数在该瑕点处进行拆分

3) p 判别法 ·  $\int_a^\infty$  的情况: 对于任意有限值  $a > 0$ , 积分

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p} dx$$

在  $p > 1$  时是收敛的, 在  $p \leq 1$  时是发散的

·  $\int_0^a$  的情况: 对于任意有限值  $a > 0$ , 积分

$$\int_0^a \frac{1}{x^p} dx$$

在  $p < 1$  时是收敛的, 在  $p \geq 1$  时是发散的

#### 4) 绝对收敛判别法

如果  $\int_a^b |f(x)| dx$  是收敛的, 那么  $\int_a^b f(x) dx$  也是收敛的

### 3. 极限判别法的 $g(x)$

#### 1) 多项式和多项式型函数在 $\infty$ 和 $-\infty$ 附近的表现

若  $P(x)$  的最高次项是  $ax^n$ , 则当  $x \rightarrow \infty$  或  $x \rightarrow -\infty$  时, 有  $P(x) \sim ax^n$

例 1.

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{2 + 20\sqrt{x}} dx$$

推导过程:

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $2 + 20\sqrt{x} \sim 20\sqrt{x}$

$$\therefore \frac{1}{2 + 20\sqrt{x}} \sim \frac{1}{20\sqrt{x}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{20\sqrt{x}} dx \text{ 发散}$$

由极限判别法, 得:

$$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{2+20\sqrt{x}} dx \text{ 发散}$$

例 2.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx$$

推导过程:

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $x^5 + 4x^4 + 1 \sim x^5$

$$\therefore \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} \sim \frac{1}{x^5}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{x^5} dx \text{ } [0, \infty)$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx = \int_0^1 \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx \text{ 自然收敛}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx \text{ 收敛}$$

$$\therefore \int_0^{\infty} \frac{1}{x^5 + 4x^4 + 1} dx \text{ 收敛}$$

例 3.

$$\int_2^{\infty} \frac{3x^5 + 2x^2 + 9}{x^6 + 22x^4 + \sqrt{4x^{13} + 18x}} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{3x^5 + 2x^2 + 9}{x^6 + 22x^4 + \sqrt{4x^{13} + 18x}} \sim \frac{3x^5}{2x^{\frac{13}{2}}} = \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{3x^5 + 2x^2 + 9}{x^6 + 22x^4 + \sqrt{4x^{13} + 18x}} dx \text{ 收敛}$$

例 4.

$$\int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} - x^2} dx$$

推导过程:

分子分母同时乘以分母的共轭表达式:

$$\begin{aligned} \int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} - x^2} dx &= \int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} - x^2} \times \frac{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} + x^2}{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} + x^2} dx \\ &= \int_9^{\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} + x^2}{8x^3 - 9} dx \end{aligned}$$

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} + x^2}{8x^3 - 9} \sim \frac{2x^2}{8x^3} = \frac{1}{4x}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_9^{\infty} \frac{1}{4x} dx \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 8x^3 - 9} - x^2} dx \text{ 发散}$$

2) 三角函数在  $\infty$  或  $-\infty$  附近的表现

$$|\sin(A)| \leq 1$$

$$|\cos(A)| \leq 1$$

例.

$$\int_5^{\infty} \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x} + x^2} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} \sim \frac{1}{x^2}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_5^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\begin{aligned} & \int_5^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx \text{ 收敛} \\ \therefore \int_5^{\infty} \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x} + x^2} dx & \leq \int_5^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2} dx < \infty \\ \therefore \int_5^{\infty} \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x} + x^2} dx & \text{ 收敛} \end{aligned}$$

3) 指数在  $\infty$  和  $-\infty$  附近表现

对所有的  $x > 0$ ,  $e^{-x} \leq \frac{C}{x^n}$

例 1.

$$\int_{10}^{\infty} (x^{1000} + x^2 + \sin(x))e^{-x^2+6} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow \infty \text{ 时, } (x^{1000} + x^2 + \sin x)e^{-x^2+6} \sim x^{1000}e^{-x^2+6}$$

$$\therefore e^{-x^2+6} \leq \frac{C}{x^{1002}}$$

$$\therefore \int_{10}^{\infty} x^{1000}e^{-x^2+6} dx \leq C \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$$

由 p 判别法, 得:

$$C \int_{10}^{\infty} \frac{1}{x^2} \text{ 收敛}$$

$$\text{即 } \int_{10}^{\infty} x^{1000}e^{-x^2+6} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_{10}^{\infty} (x^{1000} + x^2 + \sin x)e^{-x^2+6} dx \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\int_9^{\infty} \frac{x^{10}}{e^x - 5x^{20}} dx$$

推导过程:

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $e^x - 5x^{20} \sim e^x$

$$\therefore e^{-x} \leq \frac{C}{x^{12}}$$

$$\therefore \int_9^\infty \frac{x^{10}}{e^x} dx \leq C \int_9^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

由 p 判别法, 得:

$$C \int_9^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_9^\infty \frac{x^{10}}{e^x - 5x^{20}} dx \text{ 收敛}$$

例 3.

$$\int_{18}^\infty \frac{x^2}{7^x - 4^x} dx$$

推导过程:

当  $x \rightarrow \infty$  时,  $7^x - 4^x \sim 7^x$

$$\therefore x > 0 \text{ 时, } 7^{-x} \leq \frac{C}{x^4}$$

$$\therefore \int_{18}^\infty \frac{x^2}{7^x} dx \leq C \int_{18}^\infty \frac{1}{x^2} dx$$

由 p 判别法, 得:

$$C \int_{18}^\infty \frac{1}{x^2} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_{18}^\infty \frac{x^2}{7^x - 4^x} dx \text{ 收敛}$$

(4) 对数在  $\infty$  附近的表现

对所有 $x > 1$ , $\ln(x) \leq Cx^\alpha$
---------------------------------------

例 1.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1.001}} dx$$

推导过程:

$$\because x > 1 \text{ 时, } \ln x \leq Cx^{0.0001}$$

$$\therefore \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1.001}} dx \leq C \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.0009}} dx$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.0009}} dx \text{ 收敛}$$

由比较判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln(x)}{x^{1.001}} dx \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.001} \ln(x)} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \geq 2 \text{ 时, } \ln x \geq \ln 2$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.001} \ln(x)} dx \leq \frac{1}{\ln(2)} \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.001}} dx$$

由 p 判别法, 得:

$$\frac{1}{\ln(2)} \int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.001}} dx < \infty$$

由比较判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x^{1.001} \ln(x)} dx \text{ 收敛}$$

例 3.

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx$$

推导过程:

当  $x \geq 2$  时,  $\ln x \geq \ln 2$

$$\therefore \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx \geq \ln 2 \int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x} dx \text{ 发散}$$

由比较判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx \text{ 发散}$$

例 4.

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$$

推导过程:

令  $t = \ln x$ , 则  $dt = \frac{1}{x} dx$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt \text{ 发散}$$

$$\therefore \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \text{ 发散}$$

5) 多项式和多项式型函数在 0 附近的表现

若  $p(x)$  的最低次项是  $bx^m$ , 则当  $x \rightarrow 0$ ,  $p(x) \sim bx^m$

例 1.

$$\int_0^5 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$



由 p 判别法, 得:

$$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^5 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x+x^5} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{x+3}{x+x^5} \sim \frac{3}{x}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{3}{x} dx \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x+x^5} dx \text{ 发散}$$

6) 三角函数在 0 附近的表现

当 $x \rightarrow 0$ , $\sin x \sim x$ , $\tan x \sim x$ 且 $\cos x \sim 1$
---

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{\tan x} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{\tan x} \sim \frac{1}{x}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{\tan x} dx \text{ 发散}$$

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}} dx \text{ 收敛}$$

例 3.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} \sim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx \text{ 收敛}$$

7) 指数函数在 0 附近的表現

当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x \sim 1$  并且  $e^x - 1 \sim x$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x \cos x} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{e^x}{x \cos x} \sim \frac{1}{x}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x \cos x} dx \text{ 发散}$$

例 2.

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } e^{-\frac{1}{x}} \leq \frac{C}{(\frac{1}{x})^5} = Cx^5$$

$$\therefore \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} \leq C$$

$$\therefore C \int_0^1 dx \text{ 没有瑕点}$$

$$\therefore C \int_0^1 dx \text{ 自然收敛}$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} dx \text{ 收敛}$$

例 3.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx$$

推导过程:

当  $x \rightarrow 0$  时,  $e^x - 1 \sim x$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} dx \text{ 收敛}$$

8) 对数函数在 0 附近的表现

对于所有  $0 < x < 1$ ,  $|\ln x| \leq \frac{C}{x^\alpha}$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} dx$$

推导过程:

当  $0 < x < 1$  时,  $|\ln x| \leq \frac{C}{x^{0.05}}$

$$\therefore \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} \leq \frac{C}{0.95}$$

由 p 判别法, 得:

$$C \int_0^1 \frac{1}{x^{0.95}} dx \text{ 收敛}$$

由比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} dx \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 |\ln x|} dx$$

推导过程:

当  $0 < x < 1$  时,  $|\ln x| \leq \frac{C}{x}$

$$\therefore \frac{1}{x^2 |\ln x|} \geq \frac{1}{Cx}$$

由 p 判别法, 得:

$$\frac{1}{C} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx \text{ 发散}$$

由比较判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 |\ln x|} dx \text{ 发散}$$

例 3.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{0.9} |\ln x|} dx$$

推导过程:

当  $0 < x \leq \frac{1}{2}$  时,  $|\ln x| \geq |\ln(\frac{1}{2})| = \ln 2$

$$\therefore \frac{1}{x^{0.9} |\ln x|} \leq \frac{1}{\ln 2 x^{0.9}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\frac{1}{\ln 2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{0.9}} dx \text{ 收敛}$$

由比较判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{0.9} |\ln x|} dx \text{ 收敛}$$

9) 更一般的函数在 0 附近的表现

若一个函数在 0 附近收敛于该函数的麦克劳林级数, 则函数在  $x \rightarrow 0$  时渐进等价于级数的最低次项. 即

$$f(x) = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots, \text{ 当 } x \rightarrow 0, \text{ 则 } f(x) \sim a_n x^n$$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - \cos x} dx$$

推导过程:

$\cos x$  的麦克劳林级数:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

$$\therefore \text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{1 - \cos x} \sim \frac{2}{x^2}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{2}{x^2} dx \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{1 - \cos x} dx \text{ 发散}$$

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 - \cos x)^{\frac{1}{3}}} dx$$

推导过程:

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$$

$$\therefore \frac{1}{(1 - \cos x)^{\frac{1}{3}}} \sim \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{\frac{2}{3}}} dx \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{(1 - \cos x)^{\frac{1}{3}}} dx \text{ 收敛}$$

10) 不在 0 或  $\infty$  或  $-\infty$  处的瑕点

- 若积分  $\int_a^b f(x) dx$  的唯一瑕点出现在  $x = a$  处, 进行  $t = x - a$  换元
- 若积分  $\int_a^b f(x) dx$  的唯一瑕点出现在  $x = b$  处, 进行  $t = b - x$  换元

例.

$$\int_0^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$$

$\int_0^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$  在积分范围内包含三个瑕点, 分别为  $x = 0, 1, 2$

将原积分拆分为以下部分:

$$\textcircled{1} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$$

$$\text{当 } x \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} \sim \frac{1}{2x}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2x} dx \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx \text{ 发散}$$

$$\textcircled{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$$

设  $t = 1 - x$ ,  $dt = -dx$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx &= - \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)} dt \end{aligned}$$

$$\text{当 } t \rightarrow 0 \text{ 时, } \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)} \sim \frac{1}{2t}$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t} dt \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)} dt \text{ 发散}$$

即  $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$  发散

$$\textcircled{3} \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$$

设  $t = x - 1$ ,  $dt = dx$

$$\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx = - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t+1)(t+2)(1-t)} dt$$

当  $t \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{t(t+1)(t+2)(1-t)} \sim \frac{1}{2t}$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t} dt \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t+1)(t+2)(1-t)} dt \text{ 发散}$$

即  $\int_1^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$  发散

$$\textcircled{4} \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$$

设  $t = 2 - x$ ,  $dt = -dx$

$$\begin{aligned} \int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)} dt \\ &= - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)} dt \end{aligned}$$

当  $t \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)} \sim \frac{1}{6t}$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6t} dt \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)} dt \text{ 发散}$$

即  $\int_{\frac{3}{2}}^2 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$  发散



$$\textcircled{5} \int_2^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$$

设  $t = x - 2$ ,  $dt = dx$

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx = \int_0^1 \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} dt$$

当  $t \rightarrow 0$  时,  $\frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} \sim \frac{1}{6t}$

由 p 判别法, 得:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6t} dt \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_0^1 \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} dt \text{ 发散}$$

$$\text{即 } \int_2^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx \text{ 发散}$$

综上,  $\int_0^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} dx$  发散

## 第二十二章 数列和级数：基本概 念

### 1. 数列的收敛和发散

数列：一组有序的数，可能为有限项，也可能为无穷项。如： $\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9$

无穷序列：有无穷项的数列。如： $\{b_n\} = 1, 3, 5, \dots$

数列的项：数列中的第  $n$  项。如： $a_n$

当满足下列条件：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

则称数列  $\{a_n\}$  收敛

数列的三明治定理 (夹逼定理)

若  $c_n \leq a_n \leq b_n$ ，且当  $n \rightarrow \infty$  时， $b_n \rightarrow L$ ， $c_n \rightarrow L$ ，则  $a_n \rightarrow L$

洛必达法则的应用

利用洛必达法则求解  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ ，从而得到  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

例.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$$

推导过程:

$$\text{令 } f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$$

由于  $a_n$  的极限为 0

$\therefore$  数列  $\{a_n\}$  收敛

数列的收敛与发散规则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n \begin{cases} = 0 & \text{如果 } -1 < r < 1 \\ = 1 & \text{如果 } r = 1 \\ = \infty & \text{如果 } r > 1 \\ \text{不存在} & \text{如果 } r \leq -1 \end{cases}$$

## 2. 级数的收敛和发散

级数: 将数列  $a_n$  的所有项加起来. 表示为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

## 3. 几何级数

由等比数列构成的无穷的级数, 称为几何级数. 表示为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

规律总结:

$$\begin{array}{l} \text{如果 } -1 < r < 1, \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \\ \text{如果 } r \geq 1 \text{ 或 } r \leq -1, \text{ 级数发散} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{如果 } -1 < r < 1, \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \\ \text{如果 } r \geq 1 \text{ 或 } r \leq -1, \text{ 级数发散} \end{array}$$

#### 4. 第 $n$ 项判别法 (理论)

$$\text{若 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0, \text{ 或极限不存在, 则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}$$

注解: 以上判别法不能用于级数收敛性的判断

#### 5. 无穷级数和反常积分的性质

##### 1) 比较判别法 (理论)

$$\text{若对所有 } n, \text{ 有 } 0 \leq b_n \leq a_n, \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也发散}$$

$$\text{若对所有 } n, \text{ 有 } b_n \geq a_n \geq 0, \text{ 且 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛}$$

##### 2) 极限比较判别法 (理论)

$$\text{若当 } n \rightarrow \infty \text{ 时 } a_n \sim b_n, \text{ 且 } a_n \text{ 和 } b_n \text{ 均有限, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 同时收敛或发散}$$

## 3)p 判别法理论

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛} & \text{如果 } p > 1 \\ \text{发散} & \text{如果 } p \leq 1 \end{cases}$$

## 4) 绝对收敛判别法 (理论)

$$\text{如果级数 } \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛, 则级数 } \sum_{n=m}^{\infty} a_n \text{ 收敛}$$

## 6. 级数的新判别法

## 1) 比式判别法 (理论)

若  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  在  $L < 1$  时绝对收敛, 在  $L > 1$  时发散; 但当  $L = 1$  或极限不存在时, 比式判别法无效

## 2) 根式判别法 (理论)

若  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  在  $L < 1$  时绝对收敛, 在  $L > 1$  时发散; 但当  $L = 1$  或极限不存在时, 根式判别法无效

## 3) 积分判别法 (理论)

若对连续递减函数  $f$  有  $a_n = f(n)$ , 则  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  与  $\int_N^{\infty} f(x) dx$  同时收敛或发散

## 4) 交错级数判别法 (理论)

当一个级数收敛而其绝对值形式发散, 该级数条件收敛

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是交错的, 且各项的绝对值递减趋于 0, 则级数收敛  
收敛条件列表:

(1)  $a_n$  正负交错. 如:  $(-1)^n$

(2)  $|a_n|$  递减

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

## 第二十三章 求解级数问题

### 1. 级数的讨论

#### 1) 是否为几何级数

当级数为几何级数时, 应用几何级数规则

#### 2) 级数中的项是否趋于 0

当级数中的项不趋于 0, 包含如下情况:

①数列的分子分母都为多项式, 且分子的次数大于等于分母

②对数的内容包含多项式, 并且多项式的值不趋于 1

应用第  $n$  项判别法

#### 3) 级数中是否有负项

当级数中包含负的项时, 应用第  $n$  项判别法/绝对收敛判别法/交错级数判别法

#### 4) 级数中是否有阶乘

级数中的项包含阶乘, 应用比式判别法

#### 5) 级数中是否底和指数都包含 $n$

当级数的项, 底和指数都包含  $n$  时, 应用根式判别法

#### 6) 级数中是否含 $1/n$ 和对数

当级数中包含  $1/n$  和对数时, 应用积分判别法

7) 上述皆不适用

当以上方法都不适用时, 使用反常积分的判别法, 比较判别法/P 判别法/极限比较判别法

## 2. 具体解决方案

### 1) 几何级数

若  $-1 < r < 1$ , 无穷几何级数的和  $= \frac{\text{首项}}{1-r}$   
 如果  $r \geq 1$  或  $r \leq -1$ , 级数发散

例 1.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \because \frac{4}{3^n} &= 4\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ -1 < r = \frac{1}{3} < 1 \\ \sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n} &= \frac{4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{81} \end{aligned}$$

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n} - (-7)^n}{11^n}$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n} - (-7)^n}{11^n} &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{11^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-7)^n}{11^n} \\ \because -1 < 1 = \frac{4}{11} < 1 \\ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{11^n} &= \frac{4^2}{11^2} \times \frac{1}{1 - \frac{4}{11}} = \frac{16}{77} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\because -1 < 2 = \frac{-7}{11} < 1 \\
&\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-7)^n}{11^n} = \frac{(-7)^2}{11^2} \times \frac{1}{1 - (-\frac{7}{11})} = \frac{49}{198} \\
&\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n} - (-7)^n}{11^n} = \frac{16}{77} - \frac{49}{198} = -\frac{5}{126} \\
&\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n} - (-7)^n}{11^n} \text{ 收敛}
\end{aligned}$$

2) 第  $n$  项判别法

若  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$  或极限不存在, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  发散

注解: 该判别法不能用于级数收敛性的判定

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1}$$

推导过程:

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{4} \neq 0$$

$\therefore$  由第  $n$  项判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1} \text{ 发散}$$

例 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5}\right)$$

推导过程:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{n^2 + 2}{3n^2 + 5}\right) = -\ln 3 \neq 0$$

由第  $n$  项判别式, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{3n^2+5}\right) \text{ 发散}$$

### 3) 含负项的级数

①若所有项都为负，则在所有项前面添加负号来修改级数

例.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

推导过程:

$$\because \text{在 } n \geq 3 \text{ 时, } \ln\left(\frac{1}{n}\right) < 0, \ln\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} < 0$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} -\ln\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n) \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\because \text{当 } n \in [3, \infty) \text{ 时, } \ln(n) \geq \ln(3)$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n) \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sum_{n=3}^{\infty} \ln(3) \frac{1}{\sqrt{n}} = \ln(3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

由 p 判别法, 得:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散}$$

由比较判别法, 得:

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln(n) \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散}$$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\sqrt{n}} \text{ 发散}$$

②若有些项为正，有些项为负，当  $n \rightarrow \infty$  时通项不趋于 0，用第 n 项判别

法

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

推导过程:

$\because \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2$  图像进行增益震荡

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n^2$  极限不存在

由第  $n$  项判别法, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$  发散

③若有些项为正, 有些项为负, 当  $n \rightarrow \infty$  时通项趋于 0, 用绝对收敛判别法

$\text{若 } \sum_{n=1}^{\infty}  a_n  \text{ 收敛, 则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛}$
--

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$$

推导过程:

$$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

由  $p$  判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}$$

由比较判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \text{ 收敛}$$

由绝对收敛判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2} \text{ 收敛}$$

④若有些项为正, 有些项为负, 并且级数不是绝对收敛, 用交错级数判别法

若级数  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  是交错的, 且各项的绝对值递减趋于 0, 则级数收敛  
收敛条件列表:

1.  $a_n$  正负交错. 如:  $(-1)^n$

2.  $|a_n|$  递减

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 0$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

推导过程:

在区间  $[1, \infty)$  上:

1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  正负交错

2)  $\because \left(\frac{1}{n}\right)' = -\frac{1}{n^2}$   
 $\therefore \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$  单调递减

3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$\therefore$  由交错级数判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

推导过程:

在区间  $[2, \infty)$  上:

1)  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$  正负交错

2)  $\because \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)' = -\frac{\frac{1}{n}}{\ln^2 n} = -\frac{1}{n \ln^2}$

$$\therefore \frac{1}{\ln(n)}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$$

$\therefore$  由交错级数判别法, 得:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \text{ 收敛}$$

#### 4) 比式判别法

若  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  在  $L < 1$  时绝对收敛, 在  $L > 1$  时发散; 但当  $L = 1$  或极限不存在时, 比式判别法无效

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$$

推导过程:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{2^n}} \right| = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{1000} = \frac{1}{2}$$

由比式判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n} \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n \ln(n)}$$

推导过程:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{3^n}{n \ln(n)}} \right| = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

根据洛必达法则, 得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$$L = 3 > 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n \ln(n)} \text{ 发散}$$

例 3.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

推导过程:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4 > 1$$

由第  $n$  项判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \text{ 发散}$$

#### 5) 根式判别法

若  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ , 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  在  $L < 1$  时绝对收敛, 在  $L > 1$  时发散; 但当  $L = 1$  或极限不存在时, 根式判别法无效

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2}$$

推导过程:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = e^{-2} < 1$$

由根式判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n^2} \text{ 绝对收敛}$$

#### 6) 积分判别法

若对连续递减函数  $f$  有  $a_n = f(n)$ , 则  $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$  与  $\int_N^{\infty} f(x) dx$  同时收敛或发散

例 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

推导过程:

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{x \ln x}$$

$$\text{设 } t = \ln x, \text{ 则 } dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t} dt \text{ 发散}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)} \text{ 发散}$$

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

推导过程:

$$\text{令 } f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

$$\text{设 } t = \ln x, \text{ 则 } dt = \frac{1}{x} dx$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$$

由 p 判别法, 得:

$$\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \text{ 收敛}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2} \text{ 收敛}$$

7) 反常积分的判别法 (比较判别法/极限比较判别法/p 判别法)

## ①比较判别法

若对所有  $n$ , 有  $0 \leq b_n \leq a_n$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  发散, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也发散

若对所有  $n$ , 有  $b_n \geq a_n \geq 0$ , 且  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  收敛, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  也收敛

## ②极限比较判别法

若当  $n \rightarrow \infty$  时  $a_n \sim b_n$ , 且  $a_n$  和  $b_n$  均有限, 则  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  与  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  同时收敛或发散

## ③p 判别法

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛} & \text{如果 } p > 1 \\ \text{发散} & \text{如果 } p \leq 1 \end{cases}$$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 7}{n^4 + 2n^3 + 1}$$

推导过程:

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } \frac{2n^2 + 3n + 7}{n^4 + 2n^3 + 1} \sim \frac{2n^2}{n^4} = \frac{2}{n^2}$$

由 p 判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \text{ 收敛}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 3n + 7}{n^4 + 2n^3 + 1} \text{ 收敛}$$

例 2.



$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000}$$

推导过程:

对于所有的  $n > 0$ ,  $2^{-n} \leq \frac{C}{n^{1002}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{1002}} \times n^{1000} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

由 p 判别法, 得:

$$C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ 收敛}$$

由比较判别法, 得:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000} \text{ 收敛}$$

例 3.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}}$$

推导过程:

对于所有的  $n > 1$ ,  $\ln(n) \leq C n^{0.0005}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}} \leq C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.0005}}$$

由 p 判别法, 得:

$$C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.0005}} \text{ 收敛}$$

由比较判别法, 得:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}} \text{ 收敛}$$

8) 可折叠级数

若数列  $\{a_n\}$  满足以下关系:

$$\textcircled{1} a_n = A_n - B_n$$

$$\textcircled{2} B_n = A_{n+1}$$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A_1 - B_n$$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ S_n &= \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \text{ 收敛}$$

例 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$$

推导过程:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln(n+2)] \\ S_n &= (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln(n+2)] \end{aligned}$$

$$= \ln 2 - \ln(n+2)$$

$$= \ln\left(\frac{2}{n+2}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(\frac{2}{n+2}\right) = -\infty$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right) \text{ 发散}$$

## 第二十四章 泰勒多项式、泰勒级数

### 数和幂级数导论

#### 1. 近似值和泰勒多项式

$e^x$  曲线在  $x = 0$  处的三阶近似曲线

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

并且,  $x$  越趋近于 0, 曲线趋近程度越高

**泰勒近似定理:** 若  $f$  在  $x = a$  光滑, 则在所有次数为  $N$  或更低的多项式中, 当  $x$  在  $a$  附近时, 最近似于  $f(x)$  的是

$$P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N$$

使用求和符号表示:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

多项式  $P_N(x)$  称为  $f(x)$  在  $x = a$  处的  $N$  阶泰勒多项式

曲线  $f(x)$  与近似曲线  $P_N(x)$  的误差称为  $N$  阶误差项, 也称为  $N$  阶余项, 公式表示为:

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x)$$

**泰勒定理:** 关于  $x = a$  的  $N$  阶余项

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1}$$

其中,  $c$  是介于  $x$  与  $a$  之间的一个数

## 2. 幂级数和泰勒级数

**幂级数:** 关于  $x = a$  ( $a$  为中心) 的幂级数的表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

其中  $a_n$  是确定的常数

**幂级数:** 关于  $x = 0$  ( $0$  为中心) 的幂级数的表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

其中  $a_n$  是确定的常数

$e^x$  曲线关于  $x = 0$  的幂级数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

幂级数收敛于  $e^x$

$\frac{1}{1-x}$  曲线关于  $x=0$  的幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

当  $-1 < x < 1$  时, 幂级数收敛于  $\frac{1}{1-x}$

使用光滑函数  $f$  的所有导数定义关于  $x=a$  的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

该幂级数的系数为  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ , 该级数称为  $f$  关于  $x=a$  的泰勒级数

使用光滑函数  $f$  的所有导数定义关于  $x=0$  的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + \cdots$$

该幂级数的系数为  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ , 该级数称为  $f$  关于  $x=0$  的麦克劳林级数

## 第二十五章 求解估算问题

### 1. 求泰勒级数步骤

(1) 构造一个导数表  $(n/f^{(n)}(x)/f^{(n)}(a))$

(2) 将求导结果代入泰勒级数

例.

$f(x) = e^x$  关于  $x = -2$  的泰勒级数

推导过程:

导数表如下

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$e^x$	$e^{-2}$
1	$e^x$	$e^{-2}$
2	$e^x$	$e^{-2}$
3	$e^x$	$e^{-2}$

函数关于  $x = -2$  的泰勒级数

$$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \cdots = e^{-2} + e^{-2}(x+2) + e^{-2}(x+2)^2 + \cdots$$

## 2. 用误差项估算问题

(1) 构造相关函数  $f(x)$ (2) 选一个接近  $x$  的值  $a$ , 使  $f(a)/f'(a)$  易于计算(3) 构造  $f$  的导数表(4)  $R_N$  的公式:  $R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$ (5) 确定泰勒多项式的阶  $N$  (未知时可反复代入进行测试)(6) 确定  $x$  的值, 并且  $c$  介于  $a$  与  $x$  之间(7) 求  $|R_N(x)|$  的最大值(8) 根据估算, 得出泰勒多项式  $P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(N)}(a)(x-a)^N$ 

例 1.

用二阶泰勒多项式估算  $e^{\frac{1}{3}}$ , 并估算误差

推导过程:

构造函数  $f(x) = e^x$ 由于  $e^0 = 1$ , 取值  $a = 0$  $f(x)$  关于  $x = 0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$e^x$	1
1	$e^x$	1
2	$e^x$	1
3	$e^x$	1

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \frac{e^c}{3!}x^3$$

由于  $c$  介于  $a$  与  $x$  之间

$$0 < c < \frac{1}{3}$$



$$\begin{aligned}
|R_2(\frac{1}{3})| &\leq \frac{e^{\frac{1}{3}}}{3!} \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{162} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{162} = \frac{1}{81} \\
P_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2} \\
P_2(\frac{1}{3}) &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{25}{18} \\
e^{\frac{1}{3}} = f(\frac{1}{3}) &\approx P_2(\frac{1}{3}) = \frac{25}{18}
\end{aligned}$$

例 2.

估算  $e^{\frac{1}{3}}$ , 且误差不得大于  $\frac{1}{10000}$

推导过程:

构造函数  $f(x) = e^x$

由于  $e^0 = 1$ , 取值  $a = 0$

$f(x)$  关于  $x = 0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$e^x$	1
1	$e^x$	1
2	$e^x$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$$R_N(x) = \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}$$

由例 1 可知,  $N = 2$  时,  $R_2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{81} > \frac{1}{10000}$

将  $N = 3$  代入误差项, 得:

$$R_3(\frac{1}{3}) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \times (\frac{1}{3})^4 = \frac{e^c}{1944} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{1944} = \frac{1}{972}$$

而  $\frac{1}{972} > \frac{1}{10000}$ ,  $N = 3$  不符合

将  $N = 4$  代入误差项, 得:

$$R_4(\frac{1}{3}) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} \times (\frac{1}{3})^5 = \frac{e^c}{29160} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{29160} = \frac{1}{14580}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{14580} &< \frac{1}{10000}, \quad N=4 \text{ 符合误差要求} \\
P_4\left(\frac{1}{3}\right) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{24} \times \frac{1}{81} \\
&= \frac{2713}{1944} \\
e^{\frac{1}{3}} = f\left(\frac{1}{3}\right) &\approx P_4\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2713}{1944}
\end{aligned}$$

## 3. 满足交错级数判别法的估算

泰勒级数若是各项绝对值递减趋于 0 的交错级数, 则误差小于下一项. 即

$$|R_N(x)| \leq \left| \frac{f^{(N+1)}(a)}{(N+1)!} (x-a)^{N+1} \right|$$

例.

使用麦克劳林级数求定积分  $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(t)}{t} dt$ , 并且误差为  $\frac{1}{1000}$

推导过程:

构造函数  $f(x)$ , 使得

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$$

$\sin(t)$  的关于  $t=0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1

$\sin(t)$  的麦克劳林级数如下:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \cdots \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

将  $\sin(t)$  的麦克劳林级数代入函数  $f(x)$ , 得:

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \cdots\right) dt \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3 \times 3!} + \frac{t^5}{5 \times 5!} - \frac{t^7}{7 \times 7!} + \cdots\right) \Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3 \times 3!} + \frac{x^5}{5 \times 5!} - \frac{x^7}{7 \times 7!} + \cdots\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \times 3!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5 \times 5!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7 \times 7!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \cdots$$

由于  $f(x)$  符合交错级数判别法

首先使用第一项近似积分, 得:

$$\begin{aligned}|R_1\left(\frac{1}{2}\right)| &\leq \left| -\frac{1}{3 \times 3!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \right| = \frac{1}{18} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{144} \\ \text{但是 } \frac{1}{144} &> \frac{1}{1000}\end{aligned}$$

继续往后取项, 使用前两项近似积分, 得:

$$\begin{aligned}|R_2\left(\frac{1}{2}\right)| &\leq \left| \frac{1}{5 \times 5!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^5 \right| = \frac{1}{600} \times \frac{1}{64} = \frac{1}{38400} \\ \text{由于 } \frac{1}{38400} &< \frac{1}{1000}\end{aligned}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \times 3!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{144} = \frac{71}{144}$$

## 第二十六章 泰勒级数和幂级数: 如何解题

几何级数  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  在  $-1 < x < 1$  时收敛, 其他情况均发散

级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  对任意  $x$  值收敛, 因为  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x!} = 0$

### 1. 幂级数收敛情况

(1) 以  $a$  为中心,  $R > 0$  为收敛半径

- 区域  $|x - a| < R$  内收敛
- 区域  $|x - a| > R$  发散
- 在  $|x - a| = R$  端点上有绝对收敛/条件收敛/发散的情况

(2) 对所有  $x$  均绝对收敛, 收敛半径为  $\infty$

(3) 只在  $x = a$  处收敛, 收敛半径为 0

## 2. 求收敛半径

## (1) 使用比式判别法或根式判别法

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x-a|$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n(x-a)^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |x-a|$$

(2) 算出极限  $L|x-a|$ (3) 若  $L$  为正数, 收敛半径为  $\frac{1}{L}$ (4) 若  $L$  为 0, 收敛半径为  $\infty$ (5) 若  $L$  为  $\infty$ , 收敛半径为 0

例.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n \ln(n)}$$

推导过程:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1) \ln(n+1)}}{\frac{x^n}{n \ln(n)}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \times \frac{n}{n+1} \times \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} \right| = |x|$$

$\therefore$  收敛半径为 1, 所以分为如下三种情况:

1) 当  $|x| < 1$  时, 幂级数收敛. 此时  $x \in (-1, 1)$

2) 当  $|x| > 1$  时, 幂级数发散. 此时  $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

3) 当  $|x| = 1$  时, 再次分为如下两种情况:

$x = 1$ , 得到  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$ , 由积分判别法可知, 级数发散

$x = -1$ , 得到  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln(n)}$ , 由交错级数判别法可知, 级数收敛

## 3. 合成新泰勒级数

## (1) 六个常用的麦克劳林级数

$$1) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$2) \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

$$3) \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

$$4) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

$$5) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$6) \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

(2) 常用麦克劳林级数的推导

$$1) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

推导过程:

$e^x$  关于  $x=0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$e^x$	1
1	$e^x$	1
2	$e^x$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$e^x$  的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}
 e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
 &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}
 \end{aligned}$$

$$2) \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

推导过程:

$\sin(x)$  关于  $x = 0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\sin(x)$  的麦克劳林级数

$$\begin{aligned} \sin(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

$$3) \quad \cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

推导过程:

$\cos(x)$  关于  $x = 0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\cos(x)$	1
1	$-\sin(x)$	0
2	$-\cos(x)$	-1
3	$\sin(x)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\cos(x)$  的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}
 \cos(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
 &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}
 \end{aligned}$$

$$4) \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

推导过程:

$\frac{1}{1-x}$  关于  $x=0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\frac{1}{1-x}$	1
1	$\frac{1}{(1-x)^2}$	1
2	$\frac{2!}{(1-x)^3}$	2!
3	$\frac{3!}{(1-x)^4}$	3!
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\frac{1}{1-x}$  的麦克劳林级数



$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x^n
\end{aligned}$$

$$5) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

推导过程:

$\ln(1+x)$  关于  $x=0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$\frac{1}{1+x}$	1
2	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1
3	$\frac{2!}{(1+x)^3}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\ln(1+x)$  的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}
\end{aligned}$$

$$6) \quad \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

推导过程:

$\ln(1-x)$  关于  $x=0$  的导数表

$n$	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\ln(1-x)$	0
1	$-\frac{1}{1-x}$	-1
2	$-\frac{1}{(1-x)^2}$	-1
3	$-\frac{2}{(1-x)^3}$	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\ln(1-x)$  的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}
 \ln(1-x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots \\
 &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n}
 \end{aligned}$$

(3) 常用麦克劳林级数的置换

例 1.

$e^{x^2}$  的麦克劳林级数和收敛区间

推导过程:

$e^x$  的麦克劳林级数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

将  $x$  替换为  $x^2$ , 得:

$$\begin{aligned}
 e^{x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = 1 + x^2 + \frac{(x^2)^2}{2!} + \frac{(x^2)^3}{3!} + \cdots \\
 &= 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + \cdots
 \end{aligned}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| |x| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} |x|$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$\therefore e^x$  级数的收敛半径为  $\infty$ , 即  $x \in (-\infty, \infty)$

$e^{x^2}$  中对于  $x^2 \in (-\infty, \infty)$  也成立

$$\because x^2 \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x \in (-\infty, \infty)$$

$\therefore e^{x^2}$  在  $x \in (-\infty, \infty)$  上收敛

例 2.

$\frac{1}{1+x^2}$  的麦克劳林级数和收敛区间

推导过程:

$\frac{1}{1-x}$  的麦克劳林级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

将  $x$  替换为  $-x^2$ , 得:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$$\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = |x|$$

$$L = 1$$

$\therefore \frac{1}{1-x}$  的收敛半径为 1, 即  $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x^2} \text{ 对应 } -x^2 \in (-1, 1)$$

$$\because -x^2 \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$$

$\therefore \frac{1}{1+x^2}$  在  $x \in (-1, 1)$  上收敛

## 第二十七章 体积、弧长和表面积

### 1. 旋转体的体积

平面区域绕某轴旋转一周得到的立体, 这类立体被称为旋转体

求旋转体的体积方法:

#### 1) 圆盘法

$$V = \int \pi y^2 dx$$

$$V = \int \pi x^2 dy$$

#### 2) 壳法

$$V = 2\pi xy dx$$

$$V = 2\pi xy dy$$

应用场景:

1) 若  $dx/dy$  平行于旋转轴, 使用圆盘法

2) 若  $dx/dy$  垂直于旋转轴, 使用壳法

## 附录 A 极限合集

三角函数:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

指数:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

对数:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$