

线性方程:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中,  $b$  与系数  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  是实数或复数, 通常为已知数.  $n$  为任意正整数

线性方程组 – 由一个或几个包含相同变量的线性方程组成, 如:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

若线性方程组的方程个数少于未知数个数, 称之为欠定方程组

若线性方程组的方程个数多余未知数个数, 称之为超定方程组

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集

若两个方程组有相同的解集, 则这两个方程组称为等价的

线性方程组解集情况:

1. 无解;
2. 有唯一解;
3. 有无穷多解.

当方程组无解时, 称线性方程组不相容

当方程组有唯一解或无穷多解时, 称线性方程组相容

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

线性方程组的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

线性方程组的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

解线性方程组

思路: 将方程组用一个更容易求解的等价方程组替代

化简方程组的三种基本变换:

1. 倍加变换 - 将某方程替换为它与另一方程倍数的和;
2. 对换变换 - 交换两个方程的位置;
3. 倍乘变换 - 方程的所有系数乘以一个非 0 实数.

例. 简化如下方程组

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 - 8x_3 & = & 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 & = & -9 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right]$$

步骤 1 - ③+4①

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

步骤 2 -  $\frac{1}{2}$ ②

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right]$$

步骤 3 - ③+3②

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

步骤 4 - ②+4③

$$\left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \left[ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right]$$

步骤 5 - ①+(-③)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 6 - ①+2②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

非零行 (列): 矩阵中至少包含一个非零元素的行 (列)

先导元素: 该行最左边的非零元素

**定义** 一个矩阵称为阶梯形, 若它有以下三个性质:

1. 所有非零行在零行之上;
2. 某一行先导元素的列位于上一行先导元素的右边;
3. 某一先导元素所在列下方元素都是零;

若还满足以下性质, 则称为简化阶梯形:

4. 每一非零行的先导元素是 1;
5. 每一先导元素是该元素所在列的唯一非零元素.

**定理 1 (简化阶梯形矩阵的唯一性)**

每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵.

**定义** 矩阵 A 中的**主元位置**是 A 中对应于它的阶梯形中先导元素的位置. **主元列**是 A 中含有主元位置的列.

**基本变量:** 位于主元列的变量

**自由变量:** 位于非主元列的变量

**定理 2 (存在与唯一性定理)**

线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列. 也就是说, 增

广矩阵的阶梯形没有形如

$$[0 \cdots 0 \ b], b \neq 0$$

的行. 若线性方程组相容, 则它的解集可能有两种情形:

- (i) 当没有自由变量时, 有唯一解;
- (ii) 若至少有一个自由变量, 则有无穷多解.

应用行化简算法解线性方程组:

1. 写出方程组的增广矩阵
2. 应用行化简算法把增广矩阵化为阶梯形, 确定方程组是否相容, 如果没有解则停止; 否则进行下一步
3. 继续行化简算法得到它的简化阶梯形
4. 写出简化阶梯形矩阵对应的方程组
5. 将每个非零方程改写为使用自由变量表示基本变量的形式

列向量: 仅含一列的矩阵, 简称为向量. 如:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad u = (3, -1)$$

行向量: 仅含一行的矩阵. 如:

$$v = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

所有两个元素的向量表示为  $\mathbb{R}^2$ ,  $\mathbb{R}$  表示元素为实数, 2 表示向量包含两个元素

向量加法:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

标量乘法:

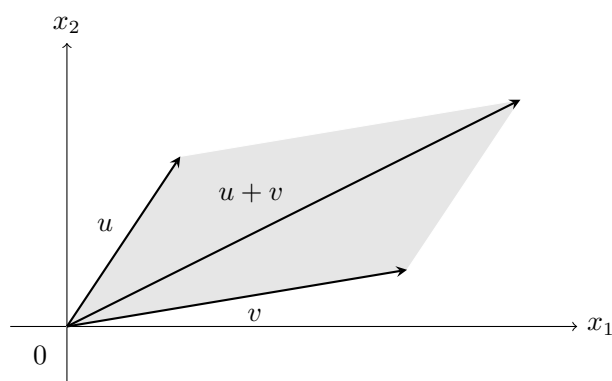
若  $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ,  $c = 5$ , 则:

$$cu = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

向量  $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  的几何含义: 由原点  $(0,0)$  指向点  $(x,y)$  的有向线段

### 向量加法的平行四边形法则

若  $\mathbb{R}^2$  中向量  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  用平面上的点表示, 则  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  对应于以  $\mathbf{u}, \mathbf{0}$  和  $\mathbf{v}$  为三个顶点的平行四边形的第 4 个顶点, 如图.



所有元素都是零的向量称为**零向量**, 用  $\mathbf{0}$  表示 ( $\mathbf{0}$  中元素的个数可由上下文确定)

### $\mathbb{R}^n$ 中向量的代数性质

对  $\mathbb{R}^n$  中一切向量  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  以及标量  $c$  和  $d$ :

- |  |  |
|--|--|
| (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$                                | (v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ |
| (ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | (vi) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$         |
| (iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$                 | (vii) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$                      |
| (iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$              | (viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$                            |

给定  $\mathbb{R}^n$  中向量  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  和标量  $c_1, c_2, \dots, c_p$ , 向量

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

称为向量  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  以  $c_1, c_2, \dots, c_p$  为权的线性组合.

定义 若  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  是  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 则  $v_1, v_2, \dots, v_p$  的所有线性组合所成的组合用记号  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  表示, 称为由  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$  所生成的  $\mathbb{R}^n$  的子集. 也就是说,  $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$  是所有形如

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

的向量的集合, 其中  $v_1, v_2, \dots, v_p$  为标量.

定义 若  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 它的各列为  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ . 若  $\mathbf{x}$  是  $\mathbb{R}^n$  中的向量, 则  $A$  与  $\mathbf{x}$  的积 (记为  $A\mathbf{x}$ ) 就是  $A$  的各列以  $\mathbf{x}$  中对应元素为权的线性组合, 即

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n$$

注意  $A\mathbf{x}$  仅当  $A$  的列数等于  $\mathbf{x}$  中的元素个数时才有意义.

### 定理 3

若  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 它的各列为  $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$ , 而  $\mathbf{b}$  属于  $\mathbb{R}^m$ , 则矩阵方程

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

与向量方程

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

有相同的解集. 它又与增广矩阵为

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}]$$

的线性方程组有相同的解集.

**定理 4**

设  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 则下列命题是逻辑上等价的. 也就是说, 对某个  $A$ , 它们都成立或者都不成立.

- a. 对  $\mathbb{R}^m$  中每个  $\mathbf{b}$ , 方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  有解.
- b.  $\mathbb{R}^m$  中的每个  $\mathbf{b}$  都是  $A$  的列的一个线性组合.
- c.  $A$  的各列生成  $\mathbb{R}^m$ .
- d.  $A$  在每一行都有一个主元位置.

**计算  $A\mathbf{x}$  的行-向量规则**

若乘积  $A\mathbf{x}$  有定义, 则  $A\mathbf{x}$  中的第  $i$  个元素是  $A$  的第  $i$  行元素与  $\mathbf{x}$  的相应元素乘积之和.

矩阵的主对角线上元素为 1, 其他位置上元素为 0, 这个矩阵称为**单位矩阵**, 并记为  $I$ .

如果矩阵为  $n \times n$  单位矩阵, 记为  $I_n$ .

**定理 5**

若  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{u}$  和  $\mathbf{v}$  是  $\mathbb{R}^n$  中向量,  $c$  是标量, 则

- a.  $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- b.  $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

若线性方程组可写成

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的形式, 则称为**齐次线性方程组**. 其中,  $A$  是  $m \times n$  矩阵,  $\mathbf{0}$  是  $\mathbb{R}^m$  中的零向量.

齐次线性方程组至少有一个解, 即  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$  ( $\mathbb{R}^n$  中的零向量), 这个解称为它的**平凡解**.

如果有一个非零向量  $\mathbf{x}$ , 满足  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 这个解称为它的**非平凡解**.

齐次方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  有非平凡解当且仅当方程至少有一个自由变量.

$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$  为  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的**参数向量形式**. 其中,  $s, t$  为自由变量

$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$  为  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的参数向量形式. 其中,  $t$  为自由变量

因此,  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解集是一条通过  $\mathbf{p}$  而平行于  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的解集的直线. 也称为将  $\mathbf{v}$  沿着  $\mathbf{p}$  进行直线移动.

### 定理 6

设方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  对某个  $\mathbf{b}$  是相容的,  $\mathbf{p}$  为一个特解, 则  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  的解集是所有形如  $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$  的向量的集, 其中  $\mathbf{v}_h$  是齐次方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  的任意一个解.

把 (相容方程组的) 解集表示成参数向量形式

1. 把增广矩阵简化为简化阶梯形.
2. 把每个基本变量用自由变量表示.
3. 把一般解  $\mathbf{x}$  表示成向量, 如果有自由变量, 其元素依赖于自由变量.
4. 把  $\mathbf{x}$  分解为向量 (元素为常数) 的线性组合, 用自由变量作为参数.

线性方程组的应用:

1. 经济学 - 部分的收支平衡
2. 化学式 - 等号两边原子守恒
3. 网络流 - 节点的进/出流量恒等

定义  $\mathbb{R}^n$  中一组向量  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  称为线性无关的, 若向量方程

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

仅由平凡解. 向量组 (集)  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$  称为线性相关的, 若存在不全为零的权  $c_1, \dots, c_p$ , 使

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

矩阵  $A$  的各列线性无关, 当且仅当方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  仅有平凡解.

两个向量的集合  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$  线性相关, 当且仅当其中一个向量是另一个向量的倍数. 这个集合线性无关, 当且仅当其中任一个向量都不是另一个向量的倍数.



**定理 7 (线性相关集的特征)**

两个或更多个向量的集合  $S = \{v_1, \dots, v_p\}$  线性相关, 当且仅当  $S$  中至少有一个向量是其他向量的线性组合. 事实上, 若  $S$  线性相关, 且  $v_1 \neq \mathbf{0}$ , 则某个  $v_j (j > 1)$  是它前面向量  $v_1, \dots, v_{j-1}$  的线性组合.

**定理 8**

若一个向量组的向量个数超过每个向量的元素个数, 那么这个向量组线性相关. 就是说,  $\mathbb{R}^n$  中任意向量组  $\{v_1, \dots, v_p\}$  当  $p > n$  时线性相关.

**定理 9**

若  $\mathbb{R}^n$  中向量组  $S = \{v_1, \dots, v_p\}$  包含零向量, 则它线性相关.

由  $x$  到  $Ax$  的对应是由一个向量集到另一个向量集的函数

**定义** 变换 (或映射)  $T$  称为**线性的**, 若

(i) 对  $T$  的定义域中一切  $u, v, T(u + v) = T(u) + T(v)$ .

(ii) 对  $T$  的定义域中的一切  $u$  和数  $c, T(cu) = cT(u)$ .

若  $T$  是线性变换, 则

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

且对  $T$  的定义域中一切向量  $u$  和  $v$  以及数  $c$  和  $d$ , 有:

$$T(cu + dv) = cT(u) + dT(v)$$

**定理 10**

设  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  为线性变换, 则存在唯一的矩阵  $A$ , 使得对  $\mathbb{R}^n$  中一切  $x$ , 有

$$T(x) = Ax$$

事实上,  $A$  是  $m \times n$  矩阵, 它的第  $j$  列是向量  $T(e_j)$ , 其中  $e_j$  是  $\mathbb{R}^n$  中单位

矩阵  $I_n$  的第  $j$  列:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)]$$

定义 映射  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  称为到  $\mathbb{R}^m$  上的映射, 若  $\mathbb{R}^m$  中每个  $\mathbf{b}$  是  $\mathbb{R}^n$  中至少一个  $\mathbf{x}$  的像.(也称为满射.)

定义 映射  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  称为一对一映射 (或 1:1), 若  $\mathbb{R}^m$  中每个  $\mathbf{b}$  是  $\mathbb{R}^n$  中至多一个  $\mathbf{x}$  的像.(也称为单射.)

### 定理 11

设  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  为线性变换, 则  $T$  是一一对一的当且仅当方程  $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$  仅有平凡解.

### 定理 12

设  $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  是线性变换, 设  $A$  为  $T$  的标准矩阵, 则

- a.  $T$  把  $\mathbb{R}^n$  映上到  $\mathbb{R}^m$ , 当且仅当  $A$  的列生成  $\mathbb{R}^m$ .
- b.  $T$  是一一对一的, 当且仅当  $A$  的列线性无关.

### 基尔霍夫电压定律

围绕一条回路同一方向的电压降  $RI$  的代数和等于围绕该回路的同一方向电动势的代数和.

如果有矩阵  $A$  使  $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$ , 一般地,

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

则称为线性差分方程 (或递归关系).