1. 隐函数求导

例.

$x^2 + y^2 = 4$

推导过程:

设 $u = y^2$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$

原函数两边对 x 求导:

$\dfrac{d}{dx}(x^2) + \dfrac{d}{dx}(y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\dfrac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

2. 隐函数求二阶导数

例.

$2y + \sin(y) = \frac{x^2}{\pi} + 1$

推导过程:

设 $u = \sin(y)$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos(y)\frac{dy}{dx}$

原函数两边对 x 求导:

$2\dfrac{dy}{dx} + \cos(y)\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$

两边再次对 x 求导:

$2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{d}{dx}(\cos(y)\dfrac{dy}{dx}) = \dfrac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad 2\dfrac{d^2y}{dx^2} - \sin(y)(\dfrac{dy}{dx})^2 + \cos(y)\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{\pi} \quad \Rightarrow$
$(2+\cos(y))\dfrac{d^2y}{dx^2} - \sin(y)(\dfrac{dy}{dx})^2 = \dfrac{2}{\pi}$

将 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$ 带入结果:

$(2+\cos(y))\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{\pi} + \sin(y)(\dfrac{2x}{\pi(2+\cos(y))})^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{2}{\pi(2+\cos(y))} +$
$\sin(y) \cdot \dfrac{4x^2}{\pi^2(2+\cos(y))^3}$

3. 相关变化率

$$\boxed{\text{如果 } Q \text{ 是某个量, 那么 } Q \text{ 的变化率是 } \dfrac{dQ}{dt}}$$

> 设 $x = f(t)$ 和 $y = g(t)$ 为两个变量的变化率, 由于 x 和 y 都是关于时间 t 的函数, 所以 x 与 y 必定存在某种关系, 这种关系称为**相对变化率**

求解相关变化率的方法:
(1) 识别出哪一个量需要求相关变化率;
(2) 写出一个关联所有量的方程;
(3) 对方程关于时间 t 做隐函数求导;
(4) 将已知值带入方程中做替换.

例 1.
用打气筒给一个完美球体的气球充气. 空气以常数速率 12π 立方英寸每秒进入气球.
(1) 当气球的半径达到 2 英寸时, 气球的半径的变化率是多少?
(2) 从外, 当气球的体积达到 36π 立方英寸时, 气球的半径的变化率又是多少?

解:
球体体积公式:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

方程对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dx} \tag{i}$$

(1) 将 $r = 2$ 和 $\frac{dV}{dt} = 12\pi$ 代入公式 (i), 得:

$$4\pi \times 2^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \frac{3}{4}$$

(2) 根据球体体积公式, 得:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

将 $r = 3$ 和 $\frac{dv}{dt} = 12\pi$ 代入公式 (i), 得:

$$4\pi \times 3^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \frac{1}{3}$$