

## 1. 隐函数求导

例.

$$x^2 + y^2 = 4$$

推导过程:

$$\text{设 } u = y^2, \text{ 则 } \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$$

原函数两边对  $x$  求导:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \Rightarrow 2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

## 2. 隐函数求二阶导数

例.

$$2y + \sin(y) = \frac{x^2}{\pi} + 1$$

推导过程:

$$\text{设 } u = \sin(y), \text{ 则 } \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx} = \cos(y) \frac{dy}{dx}$$

原函数两边对  $x$  求导:

$$2 \frac{dy}{dx} + \cos(y) \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2 + \cos(y))}$$

两边再次对  $x$  求导:

$$2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx}(\cos(y) \frac{dy}{dx}) = \frac{2}{\pi} \Rightarrow 2 \frac{d^2y}{dx^2} - \sin(y) (\frac{dy}{dx})^2 + \cos(y) \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi} \Rightarrow$$

$$(2 + \cos(y)) \frac{d^2y}{dx^2} - \sin(y) (\frac{dy}{dx})^2 = \frac{2}{\pi}$$

将  $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2 + \cos(y))}$  带入结果:

$$(2 + \cos(y)) \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi} + \sin(y) \left( \frac{2x}{\pi(2 + \cos(y))} \right)^2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi(2 + \cos(y))} +$$

$$\sin(y) \cdot \frac{4x^2}{\pi^2(2 + \cos(y))^3}$$

## 3. 相关变化率

如果  $Q$  是某个量, 那么  $Q$  的变化率是  $\frac{dQ}{dt}$

设  $x = f(t)$  和  $y = g(t)$  为两个变量的变化率, 由于  $x$  和  $y$  都是关于时间  $t$  的函数, 所以  $x$  与  $y$  必定存在某种关系, 这种关系称为**相对变化率**

求解相关变化率的方法:

- (1) 识别出哪一个量需要求相关变化率;
- (2) 写出一个关联所有量的方程;
- (3) 对方程关于时间  $t$  做隐函数求导;
- (4) 将已知值带入方程中做替换.

例 1.

用打气筒给一个完美球体的气球充气. 空气以常数速率  $12\pi$  立方英寸每秒进入气球.

- (1) 当气球的半径达到 2 英寸时, 气球的半径的变化率是多少?
- (2) 从外, 当气球的体积达到  $36\pi$  立方英寸时, 气球的半径的变化率又是多少?

解:

球体体积公式:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

方程对时间  $t$  进行隐式求导:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dx} \tag{i}$$

- (1) 将  $r = 2$  和  $\frac{dV}{dt} = 12\pi$  代入公式 (i), 得:

$$4\pi \times 2^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{3}{4}$$

- (2) 根据球体体积公式, 得:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \Rightarrow r = 3$$

将  $r = 3$  和  $\frac{dV}{dt} = 12\pi$  代入公式 (i), 得:

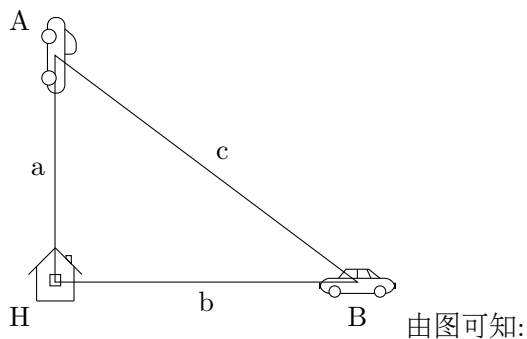
$$4\pi \times 3^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \Rightarrow \frac{dr}{dx} = \frac{1}{3}$$

例 2.

假设有两辆汽车 A 和 B. 汽车 A 在一条路上径直向北行驶远离你家, 而汽车 B 在另一条路上径直向西行驶接近你家. 汽车 A 以 55 英里/小时的速度行驶, 而汽车 B 以 45 英里/小时的速度行驶. 当 A 到达你家北面 21 英里, 而 B 到达你家东面 28 英里时, 两辆汽车间的距离的变化率是多少?

解:

如图.



$$a^2 + b^2 = c^2$$

对时间  $t$  作隐函数求导:

$$2a \frac{da}{dt} + 2b \frac{db}{dt} = 2c \frac{dc}{dt} \quad (\text{ii})$$

由于 A 在远离 H, 所以距离随着时间增加:

$$\frac{da}{dt} = 55$$

而 B 在靠近 H, 所以距离随着时间减少:

$$\frac{db}{dt} = -45$$

将结果带入公式 (ii), 得:

$$\frac{dc}{dt} = -3$$