

线性代数中的线性方程组

线性方程组

包含变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$$

其中, b 与系数 a_1, a_2, \dots, a_n 是实数或复数, 通常为已知数. n 为任意正整数

线性方程组 – 由一个或几个包含相同变量 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程组成, 如:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 &= 8 \\ x_1 - 4x_3 &= -7 \end{aligned}$$

若线性方程组的方程个数少于未知数个数, 称之为**欠定方程组**

若线性方程组的方程个数多余未知数个数, 称之为**超定方程组**

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的**解集**

若两个方程组有相同的解集, 则这两个方程组称为**等价的**

线性方程组的解有下列三种情况:

1. 无解;
2. 有唯一解;
3. 有无穷多解.

当方程组有唯一解或无穷多解时, 称线性方程组**相容**; 当方程组无解时, 称线性方程组**不相容**

线性方程组

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 - 8x_3 &= 8 \\-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned}$$

线性方程组的**系数矩阵**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

线性方程组的**增广矩阵**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

矩阵的**维数**说明它包含的行数和列数. 如: 当矩阵包含 3 行 4 列, 则维数为 3×4

初等行变换:

1. 倍加变换 - 将某方程替换为它与另一方程倍数的和;
2. 对换变换 - 交换两个方程的位置;
3. 倍乘变换 - 方程的所有系数乘以一个非 0 实数.

当其中一个矩阵可以经过一系列初等行变换称为另一个矩阵, 则称两个矩阵为行等价的

例 1. 解下列方程组

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\2x_2 - 8x_3 &= 8 \\-4x_1 + 5x_2 + 9x_3 &= -9\end{aligned}$$

推导过程:

增广矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 5 & 0 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

1) ③-5①, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

2) $\frac{1}{2}$ ②, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 10 & -10 & 10 \end{bmatrix}$$

3) ③-10②, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 30 & -30 \end{bmatrix}$$

4) $\frac{1}{30}$ ③, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

5)②+4③, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

6)①-③, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

7)①+2②, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

方程组的解:(1,0,-1)

例 2. 确定方程组是否相容

$$\begin{aligned} x_2 - 4x_3 &= 8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 8x_2 + 12x_3 &= 1 \end{aligned}$$

推导过程:

增广矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -4 & 8 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

1) ① \rightleftharpoons ②, 得:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 4 & -8 & 12 & 1 \end{bmatrix}$$

2) ③-2①, 得:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & -2 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

3) ③+2②, 得:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 15 \end{bmatrix}$$

方程组不相容

若两个线性方程组的增广矩阵是行等价的, 则它们具有相同的解集

行化简与阶梯形矩阵

非零行 (列): 矩阵中至少包含一个非零元素的行 (列)

先导元素: 该行最左边的非零元素

定义 一个矩阵称为阶梯形, 若它有以下三个性质:

1. 所有非零行在零行之上;
2. 某一行先导元素的列位于上一行先导元素的右边;
3. 某一先导元素所在列下方元素都是零;

若还满足以下性质, 则称为简化阶梯形:

4. 每一非零行的先导元素是 1;
5. 每一先导元素是该元素所在列的唯一非零元素.

定理 1 (简化阶梯形矩阵的唯一性)

每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵.

若矩阵 A 行等价于阶梯形矩阵 U , 则称 U 为 A 的**阶梯形**; 若 U 是简化阶梯形, 则称 U 为 A 的**简化阶梯形**.

RREF(Reduced Row-Echelon Form): 简化阶梯形

REF(Row-Echelon Form): 阶梯形

定义 矩阵 A 中的**主元位置**是 A 中对应于它的阶梯形中先导元素的位置. **主元列**是 A 中含有主元位置的列.

例 1. 将下列矩阵利用行变换转化为阶梯型

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \end{bmatrix}$$

推导过程:

1) ① \rightleftharpoons ④, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ -1 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

2)②+①, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ -2 & -3 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

3)③+2①, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 5 & 10 & -15 & -15 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

4)③- $\frac{5}{2}$ ②, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \end{bmatrix}$$

5)③ \rightleftharpoons ④, 得:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & -9 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & -6 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

基本变量: 位于主元列的变量

自由变量: 位于非主元列的变量

定理 2 (存在与唯一性定理)

线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列. 也就是说, 增广矩阵的阶梯形没有形如

$$[0 \cdots 0 \ b], b \neq 0$$

的行. 若线性方程组相容, 则它的解集可能有两种情形:

- 1) 当没有自由变量时, 有唯一解;
- 2) 若至少有一个自由变量, 则有无穷多解.

应用行化简算法解线性方程组:

1. 写出方程组的增广矩阵
2. 应用行化简算法把增广矩阵化为阶梯形, 确定方程组是否相容, 如果没有解则停止; 否则进行下一步
3. 继续行化简算法得到它的简化阶梯形
4. 写出简化阶梯形矩阵对应的方程组
5. 将每个非零方程改写为使用自由变量表示基本变量的形式

向量方程

仅含一列的矩阵称为列向量, 简称为向量. 包含两个元素的向量如下:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad u = (3, -1)$$

所有两个元素的向量表示为 \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} 表示向量中的元素为实数, 2 表示向量包含两个元素

向量相等:

两个向量相等当且仅当其对应元素相等

向量加法:

将向量的对应元素相加

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

标量乘法:

将向量的元素乘以系数

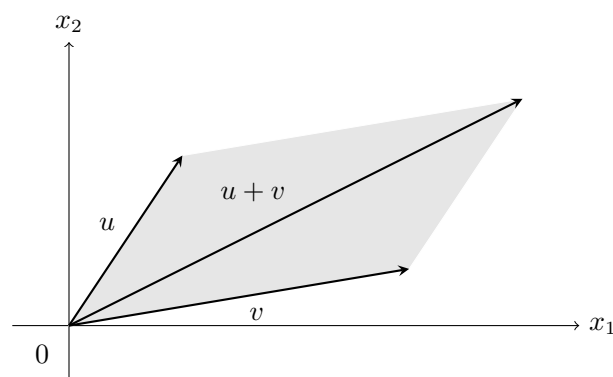
若 $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $c = 5$, 则:

$$cu = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的几何含义: 由原点 (0,0) 指向点 (x,y) 的有向线段

向量加法的平行四边形法则

若 \mathbb{R}^2 中向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 用平面上的点表示, 则 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 对应于以 $\mathbf{u}, \mathbf{0}$ 和 \mathbf{v} 为三个顶点的平行四边形的第 4 个顶点, 如图.



所有元素都是零的向量称为**零向量**, 用 $\mathbf{0}$ 表示 ($\mathbf{0}$ 中元素的个数可由上下文确定)

 \mathbb{R}^n 中向量的代数性质

对 \mathbb{R}^n 中一切向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 以及标量 c 和 d :

- | | |
|--|--|
| (i) $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ | (v) $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$ |
| (ii) $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ | (vi) $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$ |
| (iii) $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$ | (vii) $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$ |
| (iv) $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0}$ | (viii) $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ |

给定 \mathbb{R}^n 中向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 和标量 c_1, c_2, \dots, c_p , 向量

$$\mathbf{y} = c_1 \mathbf{v}_1 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

称为向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 以 c_1, c_2, \dots, c_p 为权的线性组合.

向量方程

$$x_1 \mathbf{a}_1 + x_2 \mathbf{a}_2 + \dots + x_n \mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

和增广矩阵为

$$[\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_n \quad \mathbf{b}] \quad (1.1)$$

的线性方程组有相同的解集. 特别地, \mathbf{b} 可表示为 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 的线性组合当且仅当对应于(1.1)式的线性方程组有解.

定义 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 则 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 的所有线性组合所成的组合用记号 $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 表示, 称为由 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 所生成 (或张成) 的 \mathbb{R}^n 的子集. 也就是说, $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 是所有形如

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p$$

的向量的集合, 其中 c_1, c_2, \dots, c_p 为标量.

矩阵方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

定义 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的各列为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. 若 \mathbf{x} 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 则 A 与 \mathbf{x} 的积 (记为 $A\mathbf{x}$) 就是 A 的各列以 \mathbf{x} 中对应元素为权的线

性组合, 即

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n$$

注意 $A\mathbf{x}$ 仅当 A 的列数等于 \mathbf{x} 中的元素个数时才有意义.

定理 3 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的各列为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, 而 \mathbf{b} 属于 \mathbb{R}^m , 则矩阵方程

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

与向量方程

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \cdots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

有相同的解集. 它又与增广矩阵为

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \cdots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}]$$

的线性方程组有相同的解集.

定理 4 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列命题是逻辑上等价的. 也就是说, 对某个 A , 它们都成立或者都不成立.

- a. 对 \mathbb{R}^m 中每个 \mathbf{b} , 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解.
- b. \mathbb{R}^m 中的每个 \mathbf{b} 都是 A 的列的一个线性组合.
- c. A 的各列生成 \mathbb{R}^m .
- d. A 在每一行都有一个主元位置.

计算 $A\mathbf{x}$ 的行—向量规则

若乘积 $A\mathbf{x}$ 有定义, 则 $A\mathbf{x}$ 中的第 i 个元素是 A 的第 i 行元素与 \mathbf{x} 的相应元素乘积之和.

矩阵的主对角线上元素为 1, 其他位置上元素为 0, 这个矩阵称为**单位矩阵**, 并记为 I .

如果矩阵为 $n \times n$ 单位矩阵, 记为 I_n .

定理 5 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 是 \mathbb{R}^n 中向量, c 是标量, 则

a. $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$

b. $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

线性方程组的解集

若线性方程组可写成

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的形式, 则称为**齐次线性方程组**. 其中, A 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{0}$ 是 \mathbb{R}^m 中的零向量.

齐次线性方程组至少有一个解, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (\mathbb{R}^n 中的零向量), 这个解称为它的**平凡解**.

如果有一个非零向量 \mathbf{x} , 满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 这个解称为它的**非平凡解**.

齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非平凡解当且仅当方程至少有一个自由变量.

$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的**参数向量形式**, 并称之为**参数向量方程**. 其中, s, t 为自由变量

$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的**参数向量形式**, 并称之为**参数向量方程**. 其中, t 为自由变量

例.

$$x_1 = 0.3x_2 + 0.2x_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.3x_2 + 0.2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3x_2 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.2x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix} \\ &= x_2 \begin{bmatrix} 0.3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是一条通过 \mathbf{p} 而平行于 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解集的直线. 也称为将 \mathbf{v} 沿着 \mathbf{p} 进行直线移动.

定理 6 设方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对某个 \mathbf{b} 是相容的, \mathbf{p} 为一个特解, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是所有形如 $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ 的向量的集, 其中 \mathbf{v}_h 是齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的任意一个解.

把 (相容方程组的) 解集表示成参数向量形式

1. 把增广矩阵简化为简化阶梯形.
2. 把每个基本变量用自由变量表示.
3. 把一般解 \mathbf{x} 表示成向量, 如果有自由变量, 其元素依赖于自由变量.
4. 把 \mathbf{x} 分解为向量 (元素为常数) 的线性组合, 用自由变量作为参数.

线性方程组的应用

1. 经济学 - 部分的收支平衡
2. 化学式 - 等号两边原子守恒
3. 网络流 - 节点的进/出流量恒等

线性无关

定义 \mathbb{R}^n 中一组向量 $\{v_1, \dots, v_p\}$ 称为**线性无关**的, 若向量方程

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_p v_p = \mathbf{0}$$

仅有平凡解. 向量组 (集) $\{v_1, \dots, v_p\}$ 称为**线性相关**的, 若存在不全为零的权 c_1, \dots, c_p , 使

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_p v_p = \mathbf{0}$$

矩阵 A 的各列线性无关, 当且仅当方程 $Ax = \mathbf{0}$ 仅有平凡解.

两个向量的集合 $\{v_1, v_2\}$ 线性相关, 当且仅当其中一个向量是另一个向量的倍数. 这个集合线性无关, 当且仅当其中任一个向量都不是另一个向量的倍数.

定理 7 (线性相关集的特征)

两个或更多个向量的集合 $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ 线性相关, 当且仅当 S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合. 事实上, 若 S 线性相关, 且 $v_1 \neq \mathbf{0}$, 则某个 $v_j (j > 1)$ 是它前面向量 v_1, \dots, v_{j-1} 的线性组合.

定理 8 若一个向量组的向量个数超过每个向量的元素个数, 那么这个向量组线性相关. 就是说, \mathbb{R}^n 中任意向量组 $\{v_1, \dots, v_p\}$ 当 $p > n$ 时线性相关.

定理 9 若 \mathbb{R}^n 中向量组 $S = \{v_1, \dots, v_p\}$ 包含零向量, 则它线性相关.

线性变换介绍

由 \boldsymbol{x} 到 $A\boldsymbol{x}$ 的对应是由一个向量集到另一个向量集的函数

定义 变换 (或映射) T 称为**线性的**, 若

(i) 对 T 的定义域中一切 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})$.

(ii) 对 T 的定义域中的一切 \boldsymbol{u} 和数 $c, T(c\boldsymbol{u}) = cT(\boldsymbol{u})$.

若 T 是线性变换, 则

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

且对 T 的定义域中一切向量 \boldsymbol{u} 和 \boldsymbol{v} 以及数 c 和 d , 有:

$$T(c\boldsymbol{u} + d\boldsymbol{v}) = cT(\boldsymbol{u}) + dT(\boldsymbol{v})$$

线性变换的矩阵

定理 10 设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为线性变换, 则存在唯一的矩阵 A , 使得对 \mathbb{R}^n 中一切 \boldsymbol{x} , 有

$$T(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$$

事实上, A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的第 j 列是向量 $T(\boldsymbol{e}_j)$, 其中 \boldsymbol{e}_j 是 \mathbb{R}^n 中单位矩阵 \boldsymbol{I}_n 的第 j 列:

$$A = [T(\boldsymbol{e}_1) \cdots T(\boldsymbol{e}_n)]$$

定义 映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 称为到 \mathbb{R}^m 上的映射, 若 \mathbb{R}^m 中每个 \boldsymbol{b} 是 \mathbb{R}^n 中至少一个 \boldsymbol{x} 的像 (也称为**满射**) .

定义 映射 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 称为**一对一映射** (或 $1:1$) , 若 \mathbb{R}^m 中每个 \mathbf{b} 是 \mathbb{R}^n 中至多一个 \mathbf{x} 的像 (也称为单射) .

定理 11 设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为线性变换, 则 T 是一一对一的当且仅当方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 仅有平凡解.

定理 12 设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性变换, 设 A 为 T 的标准矩阵, 则

- T 把 \mathbb{R}^n 映上到 \mathbb{R}^m , 当且仅当 A 的列生成 \mathbb{R}^m .
- T 是一一对一的, 当且仅当 A 的列线性无关.

商业、科学和工程中的线性模型

基尔霍夫电压定律

围绕一条回路同一方向的电压降 RI 的代数和等于围绕该回路的同一方向电动势的代数和.

如果有矩阵 A 使 $\mathbf{x}_1 = A\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_2 = A\mathbf{x}_1$, 一般地,

$$\mathbf{x}_{k+1} = A\mathbf{x}_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

则称为**线性差分方程** (或**递归关系**) .

矩阵运算

$m \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 的**对角线元素**是 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots$, 它们组成 A 的**主对角线**.

对角矩阵是一个方阵, 它的非对角线元素全是 0. 例如 $n \times n$ 单位矩阵 I_n .

元素全是 0 的 $m \times n$ 矩阵称为**零矩阵**, 用 $\mathbf{0}$ 表示.

若两个矩阵有相同的维数 (即有相同的行数和列数), 而且对应元素相同, 则称该两个矩阵**相等**

若 r 是标量而 A 是矩阵, 则**标量乘法** rA 是一个矩阵, 它的每一列是 A 的对应列的 r 倍.

定理 1 设 A, B, C 是相同维数的矩阵, r 与 s 为数, 则有

- | | |
|-------------------------|--------------------------------|
| a. $A + B = B + A$ | b. $(A + B) + C = A + (B + C)$ |
| c. $A + \mathbf{0} = A$ | d. $r(A + B) = rA + rB$ |
| e. $(r + s)A = rA + sA$ | f. $r(sA) = (rs)A$ |

定义 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, B 的列是 $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p$, 则乘积

AB 是 $m \times p$ 矩阵, 它的各列是 Ab_1, \dots, Ab_p , 即

$$AB = A[b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_p] = [Ab_1 \ Ab_2 \ \cdots \ Ab_p]$$

AB 的每一列都是 A 的各列的线性组合, 以 B 的对应列的元素为权.

计算 AB 的行列法则

若乘积 AB 有定义, 则 AB 的第 i 行第 j 列的元素是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和. 若 $(AB)_{ij}$ 表示 AB 的 (i, j) 元素, A 为 $m \times n$ 矩阵, 则

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$$

定理 2 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 和 C 的维数使下列各式的乘积有意义.

- a. $A(BC) = (AB)C$ (乘法结合律)
- b. $A(B+C) = AB + AC$ (乘法左分配律)
- c. $(B+C)A = BA + CA$ (乘法右分配律)
- d. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, r 为任意数
- e. $I_m A = A = A I_n$ (矩阵乘法的恒等式)

乘积 AB 的因子关系为: A 被 B 右乘, 或 B 被 A 左乘

若 $AB=BA$, 我们称 A 和 B 彼此可交换

警告

1. 一般情况下, $AB \neq BA$.

2. 消去律对矩阵乘法不成立, 即若 $AB = AC$, 一般情况下, $B = C$ 并不成立.
3. 若乘积 AB 是零矩阵, 一般情况下, 不能断定 $A=0$ 或 $B=0$.

给定 $m \times n$ 矩阵, 则 A 的**转置**是一个 $n \times m$ 矩阵, 用 A^T 表示, 它的列是由 A 的对应行构成的.

定理 3 设 A 与 B 表示矩阵, 其维数使下列和与积有定义, 则

- a. $(A^T)^T = A$.
- b. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
- c. 对任意数 r , $(rA)^T = rA^T$.
- d. $(AB)^T = B^T A^T$.

若干个矩阵的乘积的转置等于它们的转置的乘积, 但相乘的顺序相反.

矩阵的逆

A 为 $n \times n$ 矩阵, 若存在一个 $n \times n$ 矩阵 C , 使得

$$CA = I_n \quad \text{且} \quad AC = I_n$$

则称 A **可逆**, 并且 C 是 A 的**逆**.

若 A 可逆, 它的逆是唯一的, 我们将它记为 A^{-1} , 则

$$A^{-1}A = I \quad \text{且} \quad AA^{-1} = I$$

不可逆矩阵也称为**奇异矩阵**.

可逆矩阵也称为**非奇异矩阵**.

定理 4 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. 若 $ad - bc \neq 0$, 则 A 可逆且

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

若 $ad - bc = 0$, 则 A 不可逆.

数 $ad - bc$ 称为 A 的**行列式**, 记为

$$\det A = ad - bc$$

定理 5 若 A 是可逆 $n \times n$ 矩阵, 则对每一 \mathbb{R}^n 中的 \mathbf{b} , 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有唯一解 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

胡克定律

公式如下

$$\mathbf{y} = D\mathbf{f}$$

其中 D 为**弹性矩阵**, 它的逆称为**刚性矩阵**, \mathbf{f} 表示它在各个点受的力, \mathbf{y} 表示各个点的形变量.

定理 6

a. 若 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也可逆而且 $(A^{-1})^{-1} = A$.

b. 若 A 和 B 都是 $n \times n$ 可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且其逆是 A 和 B 的

逆矩阵按相反顺序的乘积, 即

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

c. 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且其逆是 A^{-1} 的转置, 即 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

若干个 $n \times n$ 可逆矩阵的积也是可逆的, 其逆等于这些矩阵的逆按相反顺序的乘积.

把单位矩阵进行一次初等行变换, 就得到**初等矩阵**.

若对 $m \times n$ 矩阵 A 进行某种初等行变换, 所得矩阵可写成 EA , 其中 E 是 $m \times m$ 矩阵, 是由 I_m 进行同一行变换所得.

每个初等矩阵 E 是可逆的, E 的逆是一个同类型的初等矩阵, 它把 E 变回 I .

定理 7 $n \times n$ 矩阵 A 是可逆的, 当且仅当 A 行等价于 I_n , 这时, 把 A 化简为 I_n 的一系列初等行变化同时把 I_n 变成 A^{-1} .

求 A^{-1} 的算法

把增广矩阵 $[A \ I]$ 进行行化简. 若 A 行等价于 I , 则 $[A \ I]$ 行等价于 $[I \ A^{-1}]$, 否则 A 没有逆.

可逆矩阵的特征**定理 8 (可逆矩阵定理)**

设 A 为 $n \times n$ 矩阵, 则下列命题是等价的, 即对某一特定的 A , 它们同时为真或同时为假.

- a. A 是可逆矩阵.
- b. A 行等价于 $n \times n$ 单位矩阵.
- c. A 有 n 个主元位置.
- d. 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 仅有平凡解.
- e. A 的各列线性无关.
- f. 线性变换 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 是一对一的.
- g. 对 \mathbb{R}^n 中任意 \mathbf{b} , 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 至少有一个解.
- h. A 的各列生成 \mathbb{R}^n .
- i. 线性变换 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 把 \mathbb{R}^n 映上到 \mathbb{R}^n .
- j. 存在 $n \times n$ 矩阵 C 使 $CA = I$.
- k. 存在 $n \times n$ 矩阵 D 使 $AD = I$.
- l. A^T 是可逆矩阵.

设 A 和 B 为方阵, 若 $AB = I$, 则 A 和 B 都是可逆的, 且 $B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$.

定理 9 设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为线性变换, A 为 T 的标准矩阵. 则 T 可逆当且仅当 A 是可逆矩阵.

若一个 $m \times n$ 矩阵的主对角线以下元素全为 0, 则称之为上三角矩阵.

若一个 $m \times n$ 矩阵的主对角线以上元素全为 0, 则称之为下三角矩阵.

分块矩阵

形如

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array} \right]$$

为矩阵 A 的 2×3 分块矩阵, 也可表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵, 当 A 的列的分法与 B 的行的分法一致时, 可计算 AB . 如下:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{cc} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

定理 10 (AB 的列行展开)

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 则

$$\begin{aligned} AB &= [\text{col}_1(A) \text{ col}_2(A) \cdots \text{col}_n(A)] \begin{bmatrix} \text{row}_1(B) \\ \text{row}_2(B) \\ \vdots \\ \text{row}_n(B) \end{bmatrix} \\ &= \text{col}_1(A)\text{row}_1(B) + \cdots + \text{col}_n(A)\text{row}_n(B) \end{aligned}$$

矩阵因式分解

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它可以行化简为阶梯形 (化简步骤不包含对换变换), 则 A 可写成 $A = LU$. 其中, L 是 $m \times m$ 下三角矩阵, 主对角线元素全是 1; U 是 A 的一个 $m \times n$ 阶梯形矩阵.

 LU 分解的算法

1. 如果可能的话, 用一系列的行倍加变换把 A 化为阶梯形 U (即 $L^{-1}A = U$).
2. 填充 L 的元素使相同的行变换把 L 变为 I .

LU 分解图解:

$$\begin{aligned}
 A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} &\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 12 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U \\
 \downarrow &\quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & & 1 & 0 \\ -3 & & & 1 \end{bmatrix} &\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = L
 \end{aligned}$$

列昂惕夫投入产出模型

列昂惕夫投入产出模型或生产方程

$$x = Cx + d$$

定理 11 设 C 为某一经济体系的消耗矩阵, d 为最终需求. 若 C 和 d 的元素非负, C 的每一列的和小于 1, 则 $(I - C)^{-1}$ 存在, 产出向量

$$x = (I - C)^{-1}d$$

有非负元素, 且是下列方程的唯一解:

$$x = Cx + d$$

计算机图形学中的应用

物体的平移并不直接对应于矩阵乘法, 因为平移并非线性变换, 所以引入**齐次坐标**

\mathbb{R}^2 中每个点 (x, y) 对应于 \mathbb{R}^3 中的点 $(x, y, 1)$, $(x, y, 1)$ 为 (x, y) 的**齐次坐标**
 $(x, y, 1) \mapsto (x + h, y + k, 1)$ 的平移变换实现:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + h \\ y + k \\ 1 \end{bmatrix}$$

\mathbb{R}^2 中任意线性变换可以通过齐次坐标乘以分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 实现, 其中 A 是 2×2 矩阵.

$(x, y, z, 1)$ 是 \mathbb{R}^3 中点 (x, y, z) 的齐次坐标. 若 $H \neq 0$, 则 (X, Y, Z, H) 为 (x, y, z) 的齐次坐标, 且

$$x = \frac{X}{H}, y = \frac{Y}{H}, z = \frac{Z}{H}$$

点 (x, y, z) 在 xy 平面上的透视投影坐标为 $(\frac{x}{1 - z/d}, \frac{y}{1 - z/d}, 0)$. 其中, d 为 z 轴观测位置 $(0, 0, d)$

绕 \mathbb{R}^2 中一点 p 的旋转是这样实现的: 首先把图形平移 $-p$, 然后绕原点旋转, 最后平移 p .

行列式介绍

有 3×3 矩阵 A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

其中

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Δ 称为 3×3 矩阵 A 的**行列式**, 也可以写成

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}) - (a_{12}a_{21}a_{33} - a_{12}a_{23}a_{31}) + (a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - a_{12} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + a_{13} \cdot \det \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \\ &= a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + a_{13} \cdot \det A_{13} \end{aligned}$$

其中, A_{ij} 表示去除矩阵第 i 行和第 j 列元素后的内容.

例. A_{11} 表示如下:

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

行列式的两种表现形式:

原矩阵:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

第一种形式:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

第二种形式:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

定义 当 $n \geq 2$, $n \times n$ 矩阵 $A = [a_{ij}]$ 的行列式是形如 $\pm a_{1j} \det A_{1j}$ 的 n 个项的和, 其中加号和减号交替出现, 这里元素 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}$ 来自 A 的第一行, 即

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \cdot \det A_{11} - a_{12} \cdot \det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \end{aligned}$$

给定 $A = [a_{ij}]$, A 的 (i, j) **余因子** C_{ij} 由下式给出

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

则

$$\det A = a_{11} \cdot C_{11} + a_{12} \cdot C_{12} + \cdots + a_{1n} \cdot C_{1n}$$

上述公式称为按 A 的**第一行的余因子展开式**

定理 1 $n \times n$ 矩阵 A 的行列式可按任意行或列的余因子展开式来计算.

按第 i 行的余因子展开式为:

$$\det A = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$$

按第 j 列的余因子展开式为:

$$\det A = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$$

定理 2 若 A 为三角阵, 则 $\det A$ 等于 A 的主对角线上元素的乘积

行列式的性质

定理 3 (行变换)

令 A 是一个方阵.

- a. 若 A 的某一行的倍数加到另一行得矩阵 B , 则 $\det B = \det A$
- b. 若 A 的两行互换得矩阵 B , 则 $\det B = -\det A$
- c. 若 A 的某行乘以 k 倍得到矩阵 B , 则 $\det B = k \det A$

定理 4 方阵 A 是可逆的当且仅当 $\det A \neq 0$

定理 5 若 A 为一个 $n \times n$ 矩阵, 则 $\det A^T = \det A$

定理 6 (乘法的性质)

若 A 和 B 均为 $n \times n$ 矩阵, 则 $\det AB = (\det A)(\det B)$

克拉默法则、体积和线性变换

对任意 $n \times n$ 矩阵 A 和任意的 \mathbb{R}^n 中向量 b , 令 $A_i(b)$ 表示 A 中第 i 列由向量 b 替换得到的矩阵

$$A_i(b) = [\mathbf{a}_1 \cdots \mathbf{b} \cdots \mathbf{a}_n]$$

定理 7 (克拉默法则)

设 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 对 \mathbb{R}^n 中任意向量 b , 方程 $Ax=b$ 的唯一解可由下式给出

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

其中, 余因子组成的矩阵称为 A 的**伴随矩阵**, 记为 $\text{adj } A$

定理 8 (逆矩阵公式)

设 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \text{adj } A$

定理 9 若 A 是一个 2×2 矩阵, 则由 A 的列确定的平行四边形的面积为 $|\det A|$, 若 A 是一个 3×3 矩阵, 则由 A 的列确定的平行六面体的体积为 $|\det A|$

设 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 为非零向量, 则对任意数 c , 由 \mathbf{a}_1 和 \mathbf{a}_2 确定的平行四边形的面积等于由 \mathbf{a}_1 和 $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ 确定的平行四边形的面积

定理 10 设 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 是由一个 2×2 矩阵 A 确定的线性变换, 若 S 是 \mathbb{R}^2 中一个平行四边形, 则

$$\{T(S) \text{ 的面积} \} = |\det A| \cdot \{S \text{ 的面积} \}$$

若 T 是一个由 3×3 矩阵 A 确定的线性变换, 而 S 是 \mathbb{R}^3 中的一个平行六面体, 则

$$\{T(S) \text{ 的体积} \} = |\det A| \cdot \{S \text{ 的体积} \}$$

向量空间和子空间

定义 一个向量空间是由一些被称为向量的对象构成的非空集合 V , 在这个集合上定义两个运算, 称为加法和标量乘法 (标量取实数), 服从以下公理 (或法则), 这些公理必须对 V 中所有向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 及所有标量 c 和 d 均成立.

1. \mathbf{u}, \mathbf{v} 之和表示为 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, 仍在 V 中
2. $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$
3. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$
4. V 中存在一个零向量 $\mathbf{0}$, 使得 $\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. 对 V 中每个向量 \mathbf{u} , 存在 V 中向量 $-\mathbf{u}$, 使得 $\mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \mathbf{0}$
6. \mathbf{u} 与标量 c 的标量乘法记为 $c\mathbf{u}$, 仍在 V 中
7. $c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v}$
8. $(c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u}$
10. $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

对 V 中每个向量 \mathbf{u} 和任意标量 c , 有

$$0\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

$$c\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$-\mathbf{u} = (-1)\mathbf{u}$$

定义 向量空间 V 的一个子空间是 V 的一个满足以下三个性质的子集 H :

- (i) V 中的零向量在 H 中
- (ii) H 对向量加法封闭, 即对 H 中任意向量 \mathbf{u}, \mathbf{v} , 和 $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ 仍在 H 中
- (iii) H 对标量乘法封闭, 即对 H 中任意向量 \mathbf{u} 和任意标量 c , 向量 $c\mathbf{u}$ 仍在 H 中

定理 1 若 v_1, v_2, \dots, v_p 在向量空间 V 中, 则 $\text{Span}\{v_1, \dots, v_p\}$ 是 V 的一个子空间

零空间、列空间和线性变换

考虑下列齐次方程组:

$$\begin{aligned} x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ -5x_1 + 9x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

用矩阵的形式, 此方程组可写成 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

所有满足(4.1)的 \mathbf{x} 的集合称为方程组(4.1)的解集

我们称满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的所有 \mathbf{x} 的集合为矩阵 A 的零空间

定义 矩阵 A 的零空间写成 $\text{Nul } A$, 是齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的全体解的集合. 用集合符号表示, 即

$$\text{Nul } A = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

定理 2 $m \times n$ 矩阵 A 的零空间是 \mathbb{R}^n 的一个子空间. 等价地, m 个方程, n 个未知数的齐次线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的全体解的集合是 \mathbb{R}^n 的一个子空间

定义 $m \times n$ 矩阵 A 的列空间 (记为 $\text{Col } A$) 是由 A 的列的所有线性组合组成的集合. 若 $A = [\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n]$, 则 $\text{Col } A = \text{Span}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$

定理 3 $m \times n$ 矩阵 A 的列空间是 \mathbb{R}^m 的一个子空间

$m \times n$ 矩阵 A 的列空间等于 \mathbb{R}^m 当且仅当方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对 \mathbb{R}^m 中每个 \mathbf{b} 有一个解

表 4.1: 对 $m \times n$ 矩阵 A , $\text{Nul } A$ 与 $\text{Col } A$ 之间的对比

$\text{Nul } A$	$\text{Col } A$
(i) $\text{Nul } A$ 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间	(i) $\text{Col } A$ 是 \mathbb{R}^m 的一个子空间
(ii) $\text{Nul } A$ 是隐式定义的, 即仅给出了一个 $\text{Nul } A$ 中向量必须满足的条件 ($A\mathbf{x} = \mathbf{0}$)	(ii) $\text{Col } A$ 是显式定义的, 即明确指出如何构建 $\text{Col } A$ 中的向量
(iii) 求 $\text{Nul } A$ 中的向量需要时间, 需要对 $[A \ \mathbf{0}]$ 作行变换	(iii) 容易求出 $\text{Col } A$ 中的向量. A 的列就是 $\text{Col } A$ 中的向量, 其余的可由 A 的列表示出来
(iv) $\text{Nul } A$ 与 A 的元素之间没有明显的关系	(iv) $\text{Col } A$ 与 A 的元素之间有明显的关系, 因为 A 的列就在 $\text{Col } A$ 中
(v) $\text{Nul } A$ 中的一个典型向量 \mathbf{v} 具有 $A\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 的性质	(v) $\text{Col } A$ 中一个典型向量 \mathbf{v} 具有方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{v}$ 是相容的性质
(vi) 给定一个特定的向量 \mathbf{v} , 容易判断 \mathbf{v} 是否在 $\text{Nul } A$ 中. 仅需计算 $A\mathbf{v}$	(vi) 给定一个特定的向量 \mathbf{v} , 弄清 \mathbf{v} 是否在 $\text{Col } A$ 中需要时间, 需要对 $[A \ \mathbf{v}]$ 作行变换
(vii) $\text{Nul } A = \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 仅有一个平凡解	(vii) $\text{Col } A = \mathbb{R}^m$ 当且仅当方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对每一个 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 有一个解
(viii) $\text{Nul } A = \{\mathbf{0}\}$ 当且仅当线性变换 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 是一对一的	(viii) $\text{Col } A = \mathbb{R}^m$ 当且仅当线性变换 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 将 \mathbb{R}^n 映上到 \mathbb{R}^m

定义 由向量空间 V 映射到向量空间 W 内的**线性变换** T 是一个规划, 它将 V 中每个向量 \mathbf{x} 映射成 W 中唯一向量 $T(\mathbf{x})$, 且满足:

- (i) $T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$, 对 V 中所有 \mathbf{u}, \mathbf{v} 均成立
- (ii) $T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$, 对 V 中所有 \mathbf{u} 及所有数 c 均成立

线性无关集和基

V 中向量的一个指标集 $\{v_1, \dots, v_p\}$ 称为是**线性无关**的, 如果向量方程

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (4.2)$$

只有平凡解, 即 $c_1 = 0, \dots, c_p = 0$.

集合 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 称为**线性相关**, 如果(4.2)有一个非平凡的解, 即存在某些权 c_1, \dots, c_p 不全为零, 使得(4.2)式成立. 此时(4.2)式称为 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p$ 之间的一个**线性相关关系**

定理 4 两个或多个向量组成的有编号的向量集合 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ (如果 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$) 是线性相关的, 当且仅当某 $\mathbf{v}_j (j > 1)$ 是其前面向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ 的线性组合

定义 令 H 是向量空间 V 的一个子空间. V 中向量的指标集 $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$ 称为 H 的一个**基**, 如果

- (i) \mathcal{B} 是一线性无关集
- (ii) 由 \mathcal{B} 生成的子空间与 H 相同, 即 $H = \text{Span}\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_p\}$

令 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 比如 $A = \{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ 。则由可逆矩阵定理, A 的列组成 \mathbb{R}^n 的一个基, 这是因为它们是线性无关的且它们可以生成 \mathbb{R}^n

令 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 $n \times n$ 单位矩阵 I_n 的列, 即

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

集合 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 称为 \mathbb{R}^n 的**标准基**

定理 5 (生成集定理)

令 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 是 V 中的向量集, $H = \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$

- (i) 若 S 中某一个向量 (比如说 \mathbf{v}_k) 是 S 中其余向量的线性组合, 则 S 中去掉 \mathbf{v}_k 后形成的集合仍然可以生成 H
- (ii) 若 $H \neq \{\mathbf{0}\}$, 则 S 的某一子集是 H 的一个基

当 $\text{Nul } A$ 包含非零向量时, 我们的方法总可以产生一个线性无关集, 从而由该方法可以得到 $\text{Nul } A$ 的一个基

定理 6 矩阵 A 的主元列构成 $\text{Col } A$ 的一个基

基是尽可能大的线性无关集

坐标系

定理 7 (唯一表示定理)

令 $B = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ 是向量空间 V 的一个基, 则对 V 中每个向量 \mathbf{x} , 存在唯一的一组数 c_1, \dots, c_n 使得

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{b}_1 + \dots + c_n \mathbf{b}_n$$

定义 假设 $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ 是 V 的一个基, x 在 V 中, x 相对于基 \mathcal{B} 的坐标 (或 x 的 \mathcal{B} -坐标) 是使得 $x = c_1 b_1 + \dots + c_n b_n$ 的权 c_1, \dots, c_n . 若 c_1, \dots, c_n 是 x 的 \mathcal{B} -坐标, 则 \mathbb{R}^n 中的向量

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

是 x (相对于 \mathcal{B}) 的坐标向量或 x 的 \mathcal{B} -坐标向量, 映射 $x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$ 称为 (由 \mathcal{B} 确定的) 坐标映射

令

$$P_{\mathcal{B}} = [b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n]$$

则向量方程

$$x = c_1 b_1 + c_2 b_2 + \dots + c_n b_n$$

等价于

$$x = P_{\mathcal{B}}[x]_{\mathcal{B}}$$

我们称 $P_{\mathcal{B}}$ 为从 \mathcal{B} 到 \mathbb{R}^n 中标准基的坐标变换矩阵

定理 8 令 $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$ 是向量空间 V 的一个基, 则坐标映射 $x \mapsto [x]_{\mathcal{B}}$ 是一个由 V 映上到 \mathbb{R}^n 的一对一的线性变换

向量空间的维数

定理 9 若向量空间 V 具有一组基 $\mathcal{B} = \{b_1, \dots, b_n\}$, 则 V 中任意包含多余 n 个向量的集合一定线性相关

定理 10 若向量空间 V 有一组基含有 n 个向量, 则 V 的每一组基一定恰好含有 n 个向量

定义 若 V 由一个有限集生成, 则 V 称为**有限维的**, V 的维数写成 $\dim V$, 是 V 的基中向量的个数. 零向量空间 $\{\mathbf{0}\}$ 的维数定义为零. 如果 V 不是由一有限集生成, 则 V 称为**无穷维的**

定理 11 令 H 是有限维向量空间 V 的子空间, 若有必要的话, H 中任一个线性无关集均可以扩充为 H 的一个基. H 也是有限维的并且

$$\dim H \leq \dim V$$

定理 12 (基定理)

令 V 是一个 p 维向量空间, $p \geq 1$, V 中任意含有 p 个元素的线性无关集必然是 V 的一个基. 任意含有 p 个元素且生成 V 的集合自然是 V 的一个基

$\text{Nul } A$ 的维数是方程 $Ax = \mathbf{0}$ 中自由变量的个数, $\text{Col } A$ 的维数是 A 中主元列的个数

秩

矩阵 A 中线性无关列的最大个数和 A^T 中线性无关列的最大个数 (即 A 中线性无关行的最大个数) 是相同的, 这个公共值是矩阵 A 的**秩**

若 A 是一个 $m \times n$ 矩阵, A 的每一行具有 n 个元素, 即可以视为 \mathbb{R}^n 中一个向量. 其行向量的所有线性组合的集合称为 A 的**行空间**, 记为 $\text{Row } A$

定理 13 若两个矩阵 A 和 B 行等价, 则它们的行空间相同. 若 B 是阶梯形矩阵, 则 B 的非零行构成 A 的行空间的一个基同时也是 B 的行空间的一个基

定义 A 的秩即 A 的列空间的维数

定理 14 (秩定理)

$m \times n$ 矩阵 A 的列空间和行空间的维数相等, 这个公共的维数 (即 A 的秩) 还等于 A 的主元位置的个数且满足方程

$$\text{rank } A + \dim \text{Nul } A = n$$

定理 15 (可逆矩阵定理 (续))

令 A 是一个 $n \times n$ 矩阵, 则下列命题中的每一个均等价于 A 是可逆矩阵:

$m.$ A 的列构成 \mathbb{R}^n 的一个基

$n.$ $\text{Col } A = \mathbb{R}^n$

$o.$ $\dim \text{Col } A = n$

$p.$ $\text{rank } A = n$

$q.$ $\text{Nul } A = \{\mathbf{0}\}$

$r.$ $\dim \text{Nul } A = 0$

基的变换

定理 16 设 $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ 和 $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ 是向量空间 V 的基, 则存在一个 $n \times n$ 矩阵 $\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ 使得

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

$\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}}$ 的列是基 \mathcal{B} 中向量的 \mathcal{C} -坐标向量, 即

$$\mathbf{P}_{\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{B}} = [[\mathbf{b}_1]_{\mathcal{C}} \quad [\mathbf{b}_2]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad [\mathbf{b}_n]_{\mathcal{C}}]$$

差分方程中的应用

$$\begin{bmatrix} u_k & v_k & w_k \\ u_{k+1} & v_{k+1} & w_{k+1} \\ u_{k+2} & v_{k+2} & w_{k+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{对所有 } k \text{ 成立} \quad (4.3)$$

这个方程组的系数矩阵称为信号的 **Casorati 矩阵**

如果对至少一个 k 值 Casorati 矩阵可逆, 则(4.3)将蕴含 $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, 这就证明这三个信号是线性无关的

给定数 a_0, \dots, a_n, a_0 和 a_n 不为零, 给定一个信号 $\{z_k\}$, 方程

$$a_0 y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k \quad \text{对所有 } k \text{ 成立}$$

称为一个 n 阶线性差分方程 (或线性递归关系)

若 $\{z_k\}$ 是零序列, 则方程是齐次的; 否则, 方程为非齐次的

定理 17 若 $a_n \neq 0$ 且 $\{z_k\}$ 给定, 只要 y_0, \dots, y_{n-1} 给定, 方程

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = z_k$$

对所有 k 成立 有唯一解

定理 18 n 阶齐次线性差分方程

$$y_{k+n} + a_1 y_{k+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{k+1} + a_n y_k = 0 \quad \text{对所有 } k \text{ 成立}$$

的解集 H 是一个 n 维向量空间

一个具有非负元素且各元素的数值相加等于 1 的向量称为**概率向量**

各向量均为概率向量的方阵为**随机矩阵**

马尔科夫链是一个概率向量序列 x_0, x_1, x_2, \dots 和一个随机矩阵 P , 满足

$$x_1 = Px_0, x_2 = Px_1, x_3 = Px_2, \dots$$

用一阶差分方程描述:

$$x_{k+1} = Px_k, k = 0, 1, 2, \dots$$

若 P 是一个随机矩阵, 则相对于 P 的**稳态向量** (或**平衡向量**) 是一个满足

$$Pq = q$$

的概率向量 q

每一个随机矩阵有一个稳态向量

如果矩阵的某次幂 P^k 仅包含严格正的元素, 则随机矩阵是正则的

一个向量序列 $\{x_k : k = 1, 2, \dots\}$ 当 $k \rightarrow \infty$ 时**收敛**到一个向量 q , 如果当 k 充分大时, x_k 中的元素无线接近 q 中对应的元素

定理 19 若 P 是一个 $n \times n$ 的正则随机矩阵, 则 P 具有唯一的稳态向量 q . 进一步, 若 x_0 是任一个初始状态, 且 $x_{k+1} = Px_k, k = 0, 1, 2, \dots$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, 马尔科夫链 $\{x_k\}$ 收敛到 q

特征向量与特征值

定义 A 为 $n \times n$ 矩阵, x 为非零向量, 若存在数 λ 使 $Ax = \lambda x$ 有非平凡解 x , 则称 λ 为 A 的特征值, x 称为对应于 λ 的特征向量

λ 是 A 的特征值当且仅当方程

$$(A - \lambda I)x = 0 \quad (5.1)$$

有非平凡解

方程(5.1)的所有解的集合就是矩阵 $A - \lambda I$ 的零空间

该集合是 \mathbb{R}^n 的子空间, 称为 A 的对应于 λ 的**特征空间**

特征空间由零向量和所有对应于 λ 的特征向量组成

定理 1 三角矩阵的主对角线的元素是其特征值

定理 2 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 是 $n \times n$ 矩阵 A 相异的特征值, v_1, \dots, v_r 是与 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ 对应的特征向量, 那么向量集合 $\{v_1, \dots, v_r\}$ 线性无关

特征方程

设 A 是 $n \times n$ 矩阵, U 是对 A 作行替换和行交换 (不作行倍乘) 所得到的任一阶梯形矩阵, r 是行交换的次数, 那么 A 的行列式 $\det A = (-1)^r u_{11} \cdots u_{nn}$. 如果 A 可逆, 那么 u_{11}, \cdots, u_{nn} 都是主元 (因为 $A \sim I_n$ 且 u_{ii} 没有归一化). 否则, 至少有 u_{nn} 为零, 从而乘积 $u_{11} \cdots u_{nn}$ 为零. 因此

$$\det A = \begin{cases} (-1)^r u_{11} \cdots u_{nn} & A \\ 0 & A \end{cases}$$

定理 3 (可逆矩阵定理 (续))

设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 则 A 是可逆的当且仅当

s. 0 不是 A 的特征值

t. A 的行列式不等于零

定理 4 (行列式的性质)

设 A 和 B 是 $n \times n$ 矩阵

a. A 可逆的充要条件是 $\det A \neq 0$

b. $\det AB = (\det A)(\det B)$

c. $\det A^T = \det A$

d. 若 A 是三角形矩阵, 那么 $\det A$ 是 A 主对角线元素的乘积

e. 对 A 作行替换不改变其行列式值. 作一次行交换, 行列式值符号改变一次. 数乘一行后, 行列式值等于用此数乘原来的行列式值

数值方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 称为 A 的**特征方程**

数 λ 是 $n \times n$ 矩阵 A 的特征值的充要条件是 λ 是特征方程 $\det(A - \lambda I) = 0$ 的根

如果 A 是 $n \times n$ 矩阵, 那么 $\det(A - \lambda I)$ 是 n 次多项式, 称为 A 的**特征多项式**

把特征值 λ 作为特征方程根出现的次数称为 λ 的 (代数) 重数

假如 A 和 B 是 $n \times n$ 矩阵, 如果存在可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = B$, 或等价地 $A = PBP^{-1}$, 则称 **A 相似于 B**. 或简单说 A 和 B 是**相似的**. 把 A 变成 $P^{-1}AP$ 的变换称为**相似变换**

定理 5 若 $n \times n$ 矩阵 A 和 B 是相似的, 那么它们有相同的特征多项式, 从而有相同的特征值 (和相同的重数)

对角化

若

$$D = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

则

$$\text{对 } k \geq 1, D^k = \begin{bmatrix} 5^k & 0 \\ 0 & 3^k \end{bmatrix}$$

若给定

$$A = PDP^{-1}$$

因此

$$A^2 = (PDP^{-1})(PDP^{-1}) = PD(P^{-1}P)DP^{-1} = PD^2P^{-1}$$

同理

$$A^3 = (PDP^{-1})A^2 = (PDP^{-1})(PD^2P^{-1}) = PD(P^{-1}P)D^2P^{-1} = PD^3P^{-1}$$

一般对 $k \geq 1$, 有

$$A^k = PD^k P^{-1}$$

如果方阵 A 相似于对角矩阵, 即存在可逆矩阵 P 和对角矩阵 D , 有 $A = PDP^{-1}$, 则称 A 可对角化

定理 6 (对角化定理)

$n \times n$ 矩阵 A 可对角化的充分必要条件是 A 有 n 个线性无关的特征向量
事实上, $A = PDP^{-1}$, D 为对角矩阵的充分必要条件是 P 的列向量是 A 的 n 个线性无关的特征向量. 此时, D 的主对角线上的元素分别是 A 的对应于 P 中特征向量的特征值

A 可对角化的充分必要条件是足够的特征向量形成 \mathbb{R}^n 的基, 我们称这样的基为**特征向量基**

对角化步骤:

1. 求出 A 的特征值
2. 求 A 的三个线性无关的特征向量
3. 使用特征向量构造矩阵 P
4. 用与特征向量顺序对应的特征值构造矩阵 D

定理 7 有 n 个相异特征值的 $n \times n$ 矩阵可对角化

定理 8 设 A 是 $n \times n$ 矩阵, 其相异的特征值是 $\lambda_1, \dots, \lambda_p$

- a. 对于 $a \leq k \leq p$, λ_k 的特征空间的维数小于或等于 λ_k 的代数重数
- b. 矩阵 A 可对角化的充分必要条件是不同特征空间的维数之和为 n .
即

(i) 特征多项式可完全分解为线性因子

(ii) 每个 λ_k 的特征空间的维数等于 λ_k 的代数重数

c. 若 A 可对角化, \mathcal{B}_k 是对应于 λ_k 的特征空间的基, 则集合 $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ 中所有向量的集合是 \mathbb{R}^n 的特征向量基

特征向量与线性变换

设 V 是 n 维向量空间, W 是 m 维向量空间, T 是 V 到 W 的线性变换. V 的基 \mathcal{B} 是 $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$. 若 $\mathbf{x} = r_1\mathbf{b}_1 + \dots + r_n\mathbf{b}_n$, 则

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

因为 T 是线性的, 故

$$T(\mathbf{x}) = T(r_1\mathbf{b}_1 + \dots + r_n\mathbf{b}_n) = r_1T(\mathbf{b}_1) + \dots + r_nT(\mathbf{b}_n) \quad (5.2)$$

因为从 W 到 \mathbb{R}^m 的坐标映射是线性的, 故等式(5.2)可推出

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = r_1[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} + \dots + r_n[T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \quad (5.3)$$

因为这些 \mathcal{C} -坐标向量都属于 \mathbb{R}^m , 故向量等式(5.3)可以写为矩阵等式

$$[T(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = M[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

其中

$$M = [[T(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad [T(\mathbf{b}_2)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [T(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}}] \quad (5.4)$$

矩阵 M 是 T 的矩阵表示, 称为 **T 相对于基 \mathcal{B} 和 \mathcal{C} 的矩阵**

当 $W=V$, $\mathcal{C}=\mathcal{B}$ 时, (5.4)中的 M 称为 **T 相对于 \mathcal{B} 的矩阵**, 或简称为 **T 的 \mathcal{B} -矩阵**, 记为 $[T]_{\mathcal{B}}$

定理 9 ((对角矩阵表示))

设 $A = PDP^{-1}$, 其中 D 为 $n \times n$ 对角矩阵, 若 \mathbb{R}^n 的基 \mathcal{B} 由 P 的列向量组成, 那么 D 是变换 $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ 的 \mathcal{B} -矩阵

复特征值

一个复数 λ 满足 $\det(A - \lambda I) = 0$ 当且仅当在 \mathbb{C}^n 中存在一个非零向量 \mathbf{x} , 使得 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. 我们称这样的 λ 是(复)特征值, \mathbf{x} 是对应于 λ 的(复)特征向量

\mathbb{C}^n 中复向量 \mathbf{x} 的共轭向量 $\bar{\mathbf{x}}$ 也是 \mathbb{C}^n 中的向量, 它的分量是 \mathbf{x} 中对应分量的共轭复数, 向量 $\operatorname{Re} \mathbf{x}$ 和 $\operatorname{Im} \mathbf{x}$ 称为复向量 \mathbf{x} 的**实部**和**虚部**, 分别由 \mathbf{x} 的分量的实部和虚部组成

定理 10 设 A 是 2×2 实矩阵, 有复特征值 $\lambda = a - bi (b \neq 0)$ 及对应的 \mathbb{C}^2 中的复特征向量 \mathbf{v} , 那么

$$A = PCP^{-1}, \quad \text{其中 } P = [\operatorname{Re} \mathbf{v} \quad \operatorname{Im} \mathbf{v}], C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

正交性和最小二乘法

内积、长度和正交性

如果 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 则可以将 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 作为 $n \times 1$ 矩阵. 转置矩阵 \mathbf{u}^T 是 $1 \times n$ 矩阵, 且矩阵乘积 $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ 是一个 1×1 矩阵, 我们将其记为一个不加括号的实数(标量). 数 $\mathbf{u}^T \mathbf{v}$ 称为 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 的**内积**, 通常记作 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, 也称为**点积**

定理 1 设 \mathbf{v}, \mathbf{u} 和 \mathbf{w} 是 \mathbb{R}^n 中的向量, c 是一个数, 那么

a. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$

b. $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$

c. $(c\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = c(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot (c\mathbf{v})$

d. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, 并且 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ 成立的充分必要条件是 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

定义 向量 \mathbf{v} 的**长度**(或**范数**)是非负数 $\|\mathbf{v}\|$, 定义为

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2} \text{ 且 } \|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$

长度为 1 的向量称为**单位向量**. 如果把一个非零向量除以其自身的长度, 即乘 $\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}$, 就可以得到一个单位向量, 即 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$

把向量 v 化成单位向量 u 的过程, 称为向量 v 的**单位化**

定义 如果 $u \cdot v = 0$, 则 \mathbb{R}^n 中的两个向量 u 和 v 是(相互) **正交的**

定理 2 (毕达哥拉斯 (勾股) 定理)

两个向量 u 和 v 正交的充分必要条件是 $\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$

如果向量 z 与 \mathbb{R}^n 的子空间 W 中的任意向量都正交, 则称 z **正交于 W**

与子空间 W 正交的向量 z 的全体组成的集合称为 W 的**正交补**, 记作 W^\perp

1. 向量 x 属于 W^\perp 的充分必要条件是向量 x 与生成空间 W 的任一向量都正交
2. W^\perp 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间

定理 3 假设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 那么 A 的行空间的正交补是 A 的零空间, 且 A 的列空间的正交补是 A^T 的零空间:

$$(\text{Row } A)^\perp = \text{Nul } A \text{ 且 } (\text{Col } A)^\perp = \text{Nul } A^T$$

正交集

\mathbb{R}^n 中的向量集合 $\{u_1, \dots, u_p\}$ 称为**正交集**, 如果集合中的任意两个不同向量都正交, 即当 $i \neq j$ 时, $u_i \cdot u_j = 0$

定理 4 如果 $S = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是由 \mathbb{R}^n 中非零向量构成的正交集, 那么 S 是线性无关集, 因此构成 S 所生成的子空间的一组基

定义 \mathbb{R}^n 中子空间 W 的一个**正交基**是 W 的一个基, 也是正交集

定理 5 假设 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是 \mathbb{R}^n 中子空间 W 的正交基, 对 W 中的每个向量 \mathbf{y} , 线性组合 $\mathbf{y} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_p\mathbf{u}_p$ 中的权可以由 $c_j = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_j}{\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{u}_j}$ ($j = 1, \dots, p$) 计算

对 \mathbb{R}^n 中给出的非零向量 \mathbf{u} , 考虑 \mathbb{R}^n 中一个向量 \mathbf{y} 分解为两个向量之和的问题, 一个向量是向量 \mathbf{u} 的倍数, 另一个向量与 \mathbf{u} 正交. 我们期望写成

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z} \quad (6.1)$$

其中 $\hat{\mathbf{y}} = \alpha\mathbf{u}$, α 是一个数, \mathbf{z} 是一个垂直于 \mathbf{u} 的向量. 对给定数 α , 记 $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \alpha\mathbf{u}$, 则方程(6.1)可以满足. 那么 $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ 和 \mathbf{u} 正交的充分必要条件是

$$(\mathbf{y} - \alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - (\alpha\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{u} - \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 0$$

也就是满足方程(6.1)且 \mathbf{z} 与 \mathbf{u} 正交的充分必要条件是 $\alpha = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}$ 和 $\hat{\mathbf{y}} = \text{proj}_L \mathbf{y} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}$. 向量 $\hat{\mathbf{y}}$ 称为 \mathbf{y} 在 \mathbf{u} 上的正交投影, 向量 \mathbf{z} 称为 \mathbf{y} 与 \mathbf{u} 正交的分量

如果集合 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是由单位向量构成的正交集, 那么它是一个**单位正交集**

如果 W 是一个由单位正交集生成的子空间, 那么 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是 W 的**单位正交基**

定理 6 一个 $m \times n$ 矩阵 U 具有单位正交列向量的充分必要条件是 $U^T U = I$

定理 7 假设 U 是一个具有单位正交列的 $m \times n$ 矩阵, 且 \mathbf{x} 和 \mathbf{y} 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 那么

a. $\|U\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$

b. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$

c. $(U\mathbf{x}) \cdot (U\mathbf{y}) = 0$ 的充分必要条件是 $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$

正交投影

对给定向量 \mathbf{y} 和 \mathbb{R}^n 中子空间 W , 存在属于 W 的向量 $\hat{\mathbf{y}}$ 满足:

- (1) W 中有唯一向量 $\hat{\mathbf{y}}$, 使得 $\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$ 与 W 正交
- (2) $\hat{\mathbf{y}}$ 是 W 中唯一最接近 \mathbf{y} 的向量

定理 8 (正交分解定理)

若 W 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间, 那么 \mathbb{R}^n 中每一个向量 \mathbf{y} 可以唯一表示为

$$\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}} + \mathbf{z}$$

其中 $\hat{\mathbf{y}}$ 属于 W 而 \mathbf{z} 属于 W^\perp . 实际上, 如果 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是 W 的任意正交基, 那么

$$\hat{\mathbf{y}} = \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1}{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_1} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p}{\mathbf{u}_p \cdot \mathbf{u}_p} \mathbf{u}_p$$

且 $\mathbf{z} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}$

定理 9 (最佳逼近定理)

假设 W 是 \mathbb{R}^n 的一个子空间, \mathbf{y} 是 \mathbb{R}^n 中的任意向量, $\hat{\mathbf{y}}$ 是 \mathbf{y} 在 W 上的正交投影, 那么 $\hat{\mathbf{y}}$ 是 W 中最接近 \mathbf{y} 的点, 也就是

$$\|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\| < \|\mathbf{y} - \mathbf{v}\|$$

对所有属于 W 又异于 $\hat{\mathbf{y}}$ 的 \mathbf{v} 成立

定理 10 如果 $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ 是 \mathbb{R}^n 中子空间 W 的单位正交基, 那么

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + \dots + (\mathbf{y} \cdot \mathbf{u}_p)\mathbf{u}_p$$

如果 $U = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \dots \quad \mathbf{u}_p]$, 则

$$\text{proj}_W \mathbf{y} = UU^T \mathbf{y}, \text{ 对所有 } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \text{ 成立}$$

格拉姆-施密特方法

定理 11 (格拉姆-施密特方法)

对 \mathbb{R}^n 的子空间 W 的一个基 $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p\}$, 定义

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{v}_2 &= \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 &= \mathbf{x}_3 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{x}_3 \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_p &= \mathbf{x}_p - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_{p-1}}{\mathbf{v}_{p-1} \cdot \mathbf{v}_{p-1}} \mathbf{v}_{p-1} - \dots - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_2}{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_2} \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{x}_p \cdot \mathbf{v}_1}{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_1} \mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

那么 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 是 W 的一个正交基. 此外,

$$\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\} = \text{Span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\}, \text{ 其中 } 1 \leq k \leq p$$

定理 12 (QR 分解)

如果 $m \times n$ 矩阵 A 的列线性无关, 那么 A 可以分解为 $A=QR$, 其中 Q 是一个 $m \times n$ 矩阵, 其列形成 $\text{Col } A$ 的一个标准正交基, R 是一个 $n \times n$ 上三角可逆矩阵且在对角线上的元素为正数

最小二乘问题

当方程组的解不存在但又需要求解时, 最好的方法是寻求 \mathbf{x} , 使得 $A\mathbf{x}$ 尽可能接近 \mathbf{b}

定义 如果 $m \times n$ 矩阵 A 和向量 \mathbf{b} 属于 \mathbb{R}^m , 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解是 \mathbb{R}^n 中的 $\hat{\mathbf{x}}$, 使得

$$\|\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|$$

对所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 成立

对给定的 A 和 \mathbf{b} , 应用最佳逼近定理于子空间 $\text{Col } A$. 取

$$\hat{\mathbf{b}} = \text{proj}_{\text{Col } A} \mathbf{b}$$

由于 $\hat{\mathbf{b}}$ 属于 A 的列空间, 故方程 $A\mathbf{x} = \hat{\mathbf{b}}$ 是相容的且存在一个属于 \mathbb{R}^n 的 $\hat{\mathbf{x}}$ 使得

$$A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}} \quad (6.2)$$

由于 $\hat{\mathbf{b}}$ 是 $\text{Col } A$ 中最接近 \mathbf{b} 的点, 因此一个向量 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的一个最小二乘解的充分必要条件是 $\hat{\mathbf{x}}$ 满足(6.2). 这个属于 \mathbb{R}^n 的 $\hat{\mathbf{x}}$ 是一系列由 A 的列构造的 $\hat{\mathbf{b}}$ 的权

若 $\hat{\mathbf{x}}$ 满足 $A\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{b}}$, 则由正交分解定理, 投影 $\hat{\mathbf{b}}$ 具有性质 $\mathbf{b} - \hat{\mathbf{b}}$ 与 $\text{Col } A$ 正交, 即 $\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}$ 正交于 A 的每一列. 如果 \mathbf{a}_j 是 A 的任意列, 那么 $\mathbf{a}_j \cdot (\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = 0$. 由于每一个 \mathbf{a}_j^T 是 A^T 的行, 因此

$$A^T(\mathbf{b} - A\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

故有

$$A^T\mathbf{b} - A^TA\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

此计算表明 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的每个最小二乘解满足方程

$$A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b} \quad (6.3)$$

矩阵方程(6.3)表示的线性方程组常称为 $Ax = b$ 的**法方程**, (6.3)的解通常用 \hat{x} 表示

定理 13 方程 $Ax = b$ 的最小二乘解集和法方程 $A^T Ax = A^T b$ 的非空解集一致

定理 14 设 A 是 $m \times n$ 矩阵. 下面的条件是逻辑等价的:

- a) 对于 \mathbb{R}^m 中的每个 b , 方程 $Ax = b$ 有唯一最小二乘解
- b) A 的列是线性无关的
- c) 矩阵 $A^T A$ 是可逆的

当这些条件成立时, 最小二乘解 \hat{x} 有下面的表示:

$$\hat{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$$

定理 15 给定一个 $m \times n$ 矩阵 A , 它具有线性无关的列, 取 $A = QR$ 是 A 类似定理 12 的 QR 分解, 那么对每一个属于 \mathbb{R}^m 的 b , 方程 $Ax = b$ 有唯一的最小二乘解, 其解为

$$\hat{x} = R^{-1} Q^T b$$

线性模型中的应用

为了更容易应用所讨论的实际问题, 将 $Ax = b$ 写成 $X\beta = y$, 且称 X 为设计矩阵, β 为参数向量, y 为观测向量

变量 x 和 y 之间最简单的关系是线性方程 $y = \beta_0 + \beta_1 x$. 对应每一个数据点 (x_j, y_j) , 有一个在直线上的点 $(x_j, \beta_0 + \beta_1 x_j)$ 具有同样的 x 坐标. 我们称 y_j 为 y 的**观测值**, 而 $\beta_0 + \beta_1 x_j$ 为 y 的**预测值**. 观测 y 值和预测 y 值之

间的差称为**余差**

最小二乘直线 $y = \beta_0 + \beta_1 x$ 是余差平方之和最小的, 这条直线也被称为 y 对 x 的**回归直线**. 直线的系数 β_0, β_1 被称为 (线性) **回归系数**

计算 $X\beta = y$ 的最小二乘问题等价于找出 β

在计算最小二乘直线之前, 常见的联系是计算原来 x 值的平均 \bar{x} , 并形成一个新变量 $x^* = x - \bar{x}$. 新的 x 数据被称为**平均偏差形式**

在一些应用中, 必须将数据点拟合为非直线形式. 引入**余差向量** ϵ , 定义为 $\epsilon = y - X\beta$, 并且记住

$$y = X\beta + \epsilon$$

任何具有这种形式的方程称为**线性模型**. 一旦 X 和 y 被确定, 使 ϵ 长度达到最小化相当于找出 $X\beta = y$ 的最小二乘解. 在每种情形下, 最小二乘解 $\hat{\beta}$ 是下面法方程的解:

$$X^T X \beta = X^T y$$

内积空间

定义 向量空间 V 上的内积是一个函数, 对每一对属于 V 的向量 u 和 v , 存在一个实数 $\langle u, v \rangle$ 满足下面公理, 其中 u, v, w 属于 V , c 为所有数:

1. $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
2. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
3. $\langle cu, v \rangle = c\langle u, v \rangle$

4. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ 且 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ 的充分必要条件是 $\mathbf{u} = 0$

一个赋予上面内积的向量空间称为**内积空间**

设 V 是一个内积空间, 其内积记作 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$. 像 \mathbb{R}^n 中一样, 我们定义一个向量 \mathbf{v} 的**长度或范数**是数

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

即 $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$

一个单位向量是长度为 1 的向量, 向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 之间的距离是 $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$

向量 \mathbf{u} 和向量 \mathbf{v} 正交, 如果 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ 成立

定理 16 (柯西-施瓦茨不等式)

对 V 中任意向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} , 有

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

定理 17 (三角不等式)

对属于 V 的所有向量 \mathbf{u}, \mathbf{v} , 有

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|$$

对称矩阵和二次型

对称矩阵的对角化

一个对称矩阵是一个满足 $A^T = A$ 的矩阵 A ，这种矩阵当然是方阵，它的主对角线元素是任意的，但其他元素在主对角线的两边成对出现

定理 1 如果 A 是对称矩阵，那么不同特征空间的任意两个特征向量是正交的

一个矩阵 A 称为可**正交对角化**，如果存在一个正交矩阵 P (满足 $P^{-1} = P^T$) 和一个对角矩阵 D 使得

$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$

定理 2 一个 $n \times n$ 矩阵 A 可正交对角化的充分必要条件是 A 是对称矩阵

矩阵 A 的特征值的集合有时称为 A 的谱

定理 3 (对称矩阵的谱定理)

一个对称的 $n \times n$ 矩阵 A 具有下述性质:

- a. A 有 n 个实特征值, 包含重复的特征值
- b. 对每一个特征值 λ , 对应的特征空间的维数等于 λ 作为特征方程的根的重数
- c. 特征空间相互正交, 这种正交性是在特征向量对应于不同特征值的意义下成立的
- d. A 可正交对角化

二次型

计算 $\mathbf{x}^T \mathbf{x}$ 时的平方和及更一般形式的表达式称为二次型

\mathbb{R}^n 上的一个二次型是一个定义在 \mathbb{R}^n 上的函数, 它在向量 \mathbf{x} 处的值可由表达式 $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 计算, 其中 A 是一个 $n \times n$ 对称矩阵. 矩阵 A 称为关于二次型的矩阵

如果 \mathbf{x} 表示 \mathbb{R}^n 中的向量变量, 那么变量代换是下面形式的等式:

$$\mathbf{x} = P\mathbf{y} \text{ 或 } \mathbf{y} = P^{-1}\mathbf{x} \quad (7.1)$$

其中 P 是可逆矩阵且 \mathbf{y} 是 \mathbb{R}^n 中的一个新的向量变量. 这里 P 的列可确定 \mathbb{R}^n 的一个基, \mathbf{y} 是相对于该基的向量 \mathbf{x} 的坐标向量.

如果用变量代换(7.1)处理二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$, 那么

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = (P\mathbf{y})^T A (P\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T P^T A P \mathbf{y} = \mathbf{y}^T (P^T A P) \mathbf{y} \quad (7.2)$$

且新的二次型矩阵是 $P^T A P$. 因为 A 是对称的, 故由定理 2, 存在正交矩阵 P , 使得 $P^T A P$ 是对角矩阵 D , (7.2)中的二次型变为 $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$

定理 4 (主轴定理)

设 A 是一个 $n \times n$ 对称矩阵, 那么存在一个正交变量代换 $\mathbf{bmx} = P\mathbf{y}$, 它将二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 变换为不含交叉乘积项的二次型 $\mathbf{y}^T D \mathbf{y}$

矩阵 P 的列称为二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 的**主轴**

定义 一个二次型 Q 是:

- a. **正定的**, 如果对所有 $\mathbf{x} \neq 0$, 有 $Q(\mathbf{x}) > 0$
- b. **半正定的**, 如果对所有 \mathbf{x} , 有 $Q(\mathbf{x}) \geq 0$
- c. **负定的**, 如果对所有 $\mathbf{x} \neq 0$, 有 $Q(\mathbf{x}) < 0$
- d. **半负定的**, 如果对所有 \mathbf{x} , 有 $Q(\mathbf{x}) \leq 0$
- e. **不定的**, 如果 $Q(\mathbf{x})$ 既有正值又有负值

定理 5 (二次型与特征值)

设 A 是 $n \times n$ 对称矩阵, 那么一个二次型 $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ 是:

- a. 正定的, 当且仅当 A 的所有特征值是正数
- b. 负定的, 当且仅当 A 的所有特征值是负数
- c. 不定的, 当且仅当 A 既有正特征值, 又有负特征值