$$\frac{\frac{d}{dx}(x) = 1}{\text{证明:}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}}$$

证明:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}$$
$$= \lim_{h \to 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}$$

2. 运算法则

(1) 常数倍
$$\frac{d}{dx}(Cx^a) = (Ca)x^{a-1}$$

(2) 加/减法法则
$$\frac{d}{dx}(x^a + \sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^a) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

(3) 乘积法则

乘积法则 (版本 1) 如果 h(x) = f(x)g(x), 那么 h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).

乘积法则 (版本 2) 如果
$$y = uv$$
, 则

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

乘积法则 (三个变量) 如果 y = uvw, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}vw + u\frac{dv}{dx}w + uv\frac{dw}{dx}$$

(4) 商法则

商法则 (版本 1) 如果 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 那么

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

商法则 (版本 2) 如果 $y = \frac{u}{v}$, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(5) 链式求导法则

链式求导法则 (版本 1) 如果 h(x) = f(g(x)), 那么 h'(x) = f'(g(x))g'(x).

链式求导法则 (版本 2) 如果 $y \in u$ 的函数, 并且 $u \in x$ 的函数, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

3. 导数伪装的极限例.

4. 分段函数的导数

检验方式: 分段函数再连接点上极限相等, 并且导数再连接点上的极限也相

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{mR} x \leq 0, \\ x^2 + 1 & \text{mR} x > 0. \end{cases}$$

f(x) 在连接点 x=0 上的左极限:

$$\lim_{x \to 0^{-}} f(x) = \lim_{x \to 0^{-}} 1 = 1$$

 $f(x)$ 在连接点 $x = 0$ 上的右极限:

$$f(x)$$
 社建接無 $x = 0$ 上的相拟
$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2 + 1) = 1$$

$$\therefore \lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

由于,
$$f'(x) = \begin{cases} 0 & \text{如果} x \leq 0, \\ 2x & \text{如果} x > 0. \end{cases}$$

 $\therefore f'(x)$ 在连接点 x=0 上的左极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$
 $f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$$\lim_{\substack{x \to 0^+ \\ \therefore \lim_{x \to 0}}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to 0^+ \\ 0}} 2x = 0$$

5. 直接画出导函数的图像