第一章　反常积分: 基本概念

1. 当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 出现以下情况, 称为反常积分:

(1) 函数 f 在 $[a,b]$ 内是无界的 (垂直渐近线)

(2)$b=\infty$

(3)$a=-\infty$

(1) 函数在 $[a,b]$ 内无界

破裂点: 当函数 f 在 $x=a$ 处有垂直渐近线时, $x=a$ 为其**破裂点**.

如果仅仅在 x 接近于 a 点该函数 $f(x)$ 是无界的, 则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果上述极限存在, 则积分收敛, 否则积分发散

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0^+} (\ln(1)-\ln(\varepsilon)) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

所以, 反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程: