1. 指数法则:

(1) $b^0 = 1$

(2) $b^1 = b$

(3) $b^x b^y = b^{x+y}$

(4) $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

(5) $(b^x)^y = b^{xy}$

2. 对数法则:

(1) $\log_b(1) = 0$

(2) $\log_b(b) = 1$

(3) $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(4) $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(5) $\log_b(x^y) = y\log_b(x)$

(6) 换底法则:

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

3. 自然数 e 相关

(1) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n = e^x$

(2) $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$

** $\log_e(x)/\ln(x)/\log(x)$ 具有相同意义

4. 对数函数求导

(1) $\frac{d}{dx}\ln(x) = \frac{1}{x}$

(2) $\frac{d}{dx}\log_b(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$

5. 指数函数求导

(1) $\frac{d}{dx}(b^x) = b^x\ln(b)$

(2) $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

6. 指数函数在 0 附近的行为

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h}=\{(e^x)'|x=0\}=1$$

7. 对数函数在 1 附近的行为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h}=\{\ln'(x)|x=1\}=1$$

8. 指数函数在 ∞ 或 $-\infty$ 附近的行为

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^x}=0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x!}=0$

9. 对数函数在 ∞ 附近的行为

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^a}=0$, 其中 $a>0$

10. 对数函数在 0 附近的行为

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln(x)=-\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^a\ln(x)=0$

11. 取对数求导法

当函数的底数和指数均为关于 x 的函数时, 通过对函数进行取对数, 让指数转化为乘数, 从而使用复合求导中的乘数求导法则解决问题

例.

$y = x^{\sin(x)}$

由原方程式等号两边取对数, 得:

$$\ln(y) = \sin(x)\ln(x) \tag{1}$$

公式(1)两边关于 x 隐式求导, 得:

$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \ln(x)\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}$

$\frac{dy}{dx} = \ln(x)\cos(x)x^{\sin(x)} + \sin(x)x^{\sin(x)-1}$

12. 指数增长与指数衰变

(1) 指数增长方程: $P(t) = P_0e^{kt}$

(2) 指数衰变方程: $P(t) = P_0e^{-kt}$

13. 双曲函数

(1) 双曲余弦: $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(2) 双曲正弦: $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

(3) 双曲线方程: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(4) 导数:

$\frac{d}{dx}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \frac{d}{dx}\cosh(x) = \sinh(x)$