

# 第一章 组合分析

## 1.1 计数基本法则

### 计数基本法则

假设有两个试验，其中试验 1 有  $m$  种可能的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有  $n$  种可能的结果，则这两个试验一共有  $mn$  种可能的结果

### 推广的计数基本法则

假设一共有  $r$  个试验. 试验 1 有  $n_1$  种可能的结果; 对应于试验 1 的每一种可能的结果, 试验 2 有  $n_2$  种可能的结果; 对应于前两个试验的每一种可能的结果, 试验 3 有  $n_3$  种可能的结果  $\dots$  那么这  $r$  个试验一共有  $n_1 n_2 \cdots n_r$  种可能的结果

例. 一个大学计划委员会由 3 名新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生、2 名毕业班学生组成，现在要从中选 4 个人组成一个分委员会，要求来自不同的年级，一共有多少种选择方式？

解: 每个年级选取一个学生为一个试验单位，所以，共有  $3 \times 4 \times 5 \times 2$  种选择方式

## 1.2 排列

**排列:** 将不同的物件或符号根据不同顺序进行安置, 每个顺序都称为一个排列

假设有  $n$  个不同元素, 将其进行排列, 一共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

种不同排列方式

例 1. 某班级共有 6 名男生、4 名女生, 有次测验是根据他们的表现来排名次, 假设没有两个学生成绩一样.

(a) 一共有多少种排名方式?

(b) 如限定男生、女生分开排名, 一共有多少种排名的方式?

解:

(a) 将所有不同成绩进行排名, 一共有  $10! = 3628800$  种排列方式

(b) 将男生和女生进行分开排名, 男生有  $6! = 720$  种排列方式, 女生有  $4! = 24$  种排列方式, 所以一共有  $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$  种排列方式

例 2. 把 10 本书放到书架上, 其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在要求相同类别的书必须紧挨着放, 问一共有多少种方法?

解: 四种书籍其内部的排列为  $4! \times 3! \times 2! \times 1! = 288$  种排列方式, 不同书籍之间的排列为  $4! = 24$  中排列方式, 所以, 一共有  $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 24 \times 288 = 6912$  种排列方式

假设有  $n$  个元素，如果其中  $n_1$  个元素彼此相同，另  $n_2$  个彼此相同， $\dots$ ， $n_r$  个也彼此相同，那么一共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种不同的排列方式

例. 有 9 面小旗排列在一条直线上吗，其中 4 面白色、3 面红色和 2 面蓝色，颜色相同的旗是一样的. 如果不同的排列方式代表不同的信号，那么一共有多少可能的信号？

解: 一共有  $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$  种不同的信号

## 1.3 组合

组合: 从  $n$  个元素中抽取  $m$  个元素，并且不考虑抽取顺序

### 记号与术语

对  $r \leq n$ ，我们定义  $\binom{n}{r}$  如下:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

并且说  $\binom{n}{r}$  表示了从  $n$  个元素中一次取  $r$  个的可能组合数

例 1. 从 20 人当中选择 3 人组成委员会，一共有多少中选法？

解: 一共有  $\binom{20}{3} = \frac{20 \times 19 \times 18}{3 \times 2 \times 1} = 1140$  种选法

例 2. 有个 12 人组成的团体，其中 5 位女士，7 位男士，现从中选取 2 位女士，3 位男士组成一个委员会. (1) 问有多少种取法？(2) 另外，如果其中有 2 位男士之间有矛盾，并且坚决拒绝一起工作，那又有多少中取法？

解:

(1) 有  $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 350$  种取法

(2) 男士一共有  $\binom{7}{3} = 35$  种取法, 选中两个有矛盾男士有  $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$  种取法, 所以排除同时选中两位有矛盾男士的取法:  $35 - 5 = 30$ ; 另外, 选取女士的方法为  $\binom{5}{2} = 10$  种, 所以, 一共有  $30 \times 10 = 300$  种取法

例 3. 假设在一排  $n$  个天线中, 有  $m$  个是失效的, 另  $n - m$  个是有效的, 并且假设所有有效的天线之间不可区分, 同样, 所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种线性排列方式, 使得任何两个失效的天线都不相邻?

解: 先将  $n - m$  个有效天线放置好, 在两个有效天线之间 (或最左/右侧有效天线的左/右边) 的  $n - m + 1$  个位置上, 每个位置只能放置一个失效天线, 即从  $n - m + 1$  位置上, 选择  $m$  个放置失效天线, 所以, 有  $\binom{n - m + 1}{m}$  种排列方式

组合恒等式

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n$$

原理:

括号左边:

从  $n$  个元素中抽取  $r$  个元素的组合

$$\binom{n}{r}$$

括号右边:

将其中一个元素视为特殊元素, 包含以下两种情况:

(1) 包含该特殊元素, 从余下的  $n - 1$  个元素中再抽取  $r - 1$  个元素

$$\binom{n-1}{r-1}$$

(2) 不包含特殊元素, 从余下的  $n - 1$  个元素中抽取  $r$  个元素

$$\binom{n-1}{r}$$

## 二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

例. 展开  $(x+y)^3$

解:

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= \binom{3}{0}x^0y^3 + \binom{3}{1}x^1y^2 + \binom{3}{2}x^2y^1 + \binom{3}{3}x^3y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 \end{aligned}$$

## 1.4 多项式系数

## 记号

如果  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$ , 则定义  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$  为

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_r!}$$

因此,  $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r}$  表示把  $n$  个不同的元素分成大小分别为  $n_1, n_2, \dots, n_r$  的  $r$  个不同组的组合数

例 1. 将 10 个小孩平均分成 A, B 两队分别去参加两场不同的比赛, 一共有多少种分法?

解: 一共有  $\binom{10}{5, 5} = \frac{10!}{5!5!} = 252$  种分法

例 2. 把 10 个孩子平均分成两组进行篮球比赛, 一共有多少种分法?

解: 相对于例 1, 本例不注重组间次序, 所以, 一共有  $\frac{\frac{10!}{5!5!}}{2!} = 126$  种分法

## 多项式定理

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum_{\substack{(n_1, \dots, n_r): \\ n_1 + \cdots + n_r = n}} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_r} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_r^{n_r}$$

上式的求和号是对满足  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$  的所有非负整数向量  $(n_1, n_2, \dots, n_r)$  求和

例. 在第一轮淘汰赛中有  $n = 2^m$  名选手, 这  $n$  名选手被分成  $n/2$  组, 每组内都要进行比赛. 每一场比赛的败者将被淘汰而胜者将晋级下一轮, 这个过程持续到只有一名选手留下. 假设我们有一场淘汰赛, 其中有 8 名选手.

(a) 第一轮之后有多少种可能的结果?(如一种结果是 1 赢了 2, 3 赢了 4, 5 赢了 6, 7 赢了 8)

(b) 这场淘汰赛有多少种可能的结果, 其中每个结果是否包含了所有轮次的完整信息?

解:

(a) 先将 8 名选手分为 4 组, 分法为  $\binom{8}{2,2,2,2} = \frac{8!}{2^4}$ ;

当前我们不将分组编组序, 有  $\binom{8}{2,2,2,2}/4! = 8!/(2^4 \times 4!)$  种可能;

最后, 进行比赛时, 每组有 2 种可能, 所以, 总的有  $8! \times 2^4 / (2^4 \times 4!) = 8!/4!$  种可能

(b) 以此类推, 4 进 2 半决赛有  $4!/2!$  种可能, 2 进 1 决赛有  $2!/1!$  种可能, 所以, 最终结果有  $(8!/4!) \times (4!/2!) \times (2!/1!) = 8!$  种可能

## 1.5 方程的整数解个数

命题 1.1 共有  $\binom{n-1}{r-1}$  个不同的正整数向量  $(x_1, x_2, \dots, x_r)$  满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n \quad x_i > 0, i = 1, \dots, r$$

原理: 如下

$$\boxed{\underbrace{1|1|1|\cdots|1|1}_{n \uparrow 1}}$$

1.  $n$  个 1 代表总和为  $n$ ;
2.  $|$  代表切割数字的位置, 使得  $x_1$  等于第一个切割位置之前的数字总和,  $x_2$  等于第一个切割位置和第二个切割位置之间的数字总和,  $\cdots, x_r$  等于最后一个切割位置之后的数字总和;
3. 从  $n-1$  个间隔中, 插入  $r-1$  切割符, 使数字总共划分为  $r$  份.

**命题 1.2** 共有  $\binom{n+r-1}{r-1}$  个不同的非负整数向量  $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$  满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

原理:

因为  $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$  的非负整数解个数与  $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n+r$  的正整数解个数是相同的 (令  $y_i = x_i + 1, i = 1, \cdots, r$ )

例 1. 一位投资者有 2 万美元可投资到 4 个项目上, 且每种投资必须是 1000 美元的整数倍.

- (1) 如果要求将 2 万美元全部投资, 一共有多少种可行的投资方法?
- (2) 如果不要求将钱全部投资呢?

解:

- (1) 根据已知和问题, 可得如下方程:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$$

根据命题 1.2, 得:

$$\binom{20+4-1}{4-1} = 1771$$

所以, 一共有 1771 种可能的投资方式

- (2) 可以将未投资的钱视为第五个“项目”, 可得如下方程:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$$

根据命题 1.2, 得:

$$\binom{20+5-1}{5-1} = 10626$$

所以, 一共有 10626 种可能的投资方式

例 2. 在  $(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n$  的展开式中, 一共有多少项?

解:

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_r)^n = \sum \binom{n}{n_1, \dots, n_r} x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r}$$

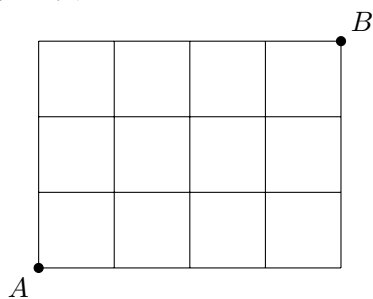
满足方程  $n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n$

根据命题 1.2, 得:

$$\binom{n+r-1}{r-1}$$

所以, 一共有  $\binom{n+r-1}{r-1}$  项

如下图.



从位置 A 到达位置 B 的方式有多少种.

假设从起始位置到目标位置需要水平方向移动  $n$  个单元, 垂直方向移动  $m$  个单元, 路径到达方式满足以下公式:

$$\binom{n+m}{n}$$

所以, 当前解为:

$$\binom{4+3}{4} = 7 \times 5 = 35$$

并且, 由于组合满足以下公式:

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \quad 1 \leq r \leq n$$



所以，该移动路径满足如下：

$$R_n C_m = R_{n-1} C_m + R_n C_{m-1}$$