第一章　求解级数问题

1. 级数的讨论

(1) 是否为几何级数

(2) 级数中的项是否趋于 0 — 第 n 项判别法

(3) 级数中是否有阶乘 — 比式判别法

(4) 级数中的指数是否包含 n — 跟式判别法

(5) 级数中是否含 $\frac{1}{n}$ 或对数 — 积分判别法

(6) 级数中是否有负项 — 第 n 项判别法/绝对收敛判别法/交错级数判别法

(7) 上述皆不适用 — 比较判别法/P 判别法/极限比较判别法

2. 具体解决方案

(1) 几何级数

$$\boxed{\text{若 } -1 < r < 1\text{，无穷几何级数的和} = \frac{\text{首项}}{1-r}}$$

例.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

推导过程:

$\because \dfrac{4}{3^n} = 4(\dfrac{1}{3})^n$

$\quad -1 < r = \dfrac{1}{3} < 1$

$\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \sum_{n=5}^{\infty} 4(\frac{1}{3})^n = \frac{4 \times (\frac{1}{3})^5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{81}$

(2) 级数中的项是否趋于 0 — 第 n 项判别法

$$\boxed{\text{若 } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ 或极限不存在，则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}}$$

该判别法不能用于级数收敛性的判定

例.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1}$

推导过程:

$\because \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{4} \neq 0$

$\therefore$ 由第 n 项判别法

$\quad \dfrac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1}$ 发散

(3) 级数中是否有阶乘 — 比式判别法

若 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$，则 $n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $L < 1$ 时绝对收敛，在 $L > 1$ 时发散；但当 $L = 1$ 或极限不存在时，比式判别法无效

例.
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1000}}{2^n}$$
推导过程:
$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{2^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^{1000}}{n^{1000}}\times\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})^{1000}=\frac{1}{2}$$
$\therefore$ 由比式判别法
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{1000}}{2^n}\text{ 收敛}$$

(4) 级数中的指数是否包含 n — 根式判别法

若 $L=\lim\limits_{n\to\infty}\lvert a_n\rvert^{\frac{1}{n}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $L<1$ 时绝对收敛，在 $L>1$ 时发散；但当 $L=1$ 或极限不存在时，根式判别法无效

例.
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{2}{n})^{n^2}$$
推导过程:
$$\because \lim_{n\to\infty}\lvert a_n\rvert^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left|(1-\frac{2}{n})^{n^2}\right|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{2}{n})^{n}=e^{-2}<1$$
$\therefore$ 由根式判别法
$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{2}{n})^{n^2}\text{ 收敛性}$$

(5) 级数中是否含 $\frac{1}{n}$ 或对数 — 积分判别法

$$\boxed{\text{若对连续递减函数 } f \text{ 有 } a_n = f(n)\text{，则 } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ 与 } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 同时收敛或发散}}$$

例.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

推导过程:

级数的积分形式为:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

设 $t = \ln(x)$，则 $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$，得:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$\because$ 由 P 判别法

$$\int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \text{ 发散}$$

$$\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)} \text{ 发散}$$

(6) 级数中是否有负项 — 第 n 项判别式/绝对收敛判别法/交错级数判别法

1) 若所有项都为负，则在所有项前面添加负号来修改级数

例.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}}$$

推导过程:

$\because$ 在 $n \geqslant 3$ 时，$\ln(\frac{1}{n}) < 0$，$\ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} < 0$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} -\ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}}$$

$\because$ 当 $n \in [3, \infty)$ 时，$\ln(n) \geqslant \ln(3)$

$$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=3}^{\infty} \ln(3)\frac{1}{\sqrt{n}} = \ln(3)\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln(\frac{1}{n}) \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

2) 若有些项为正，有些项为负，当 $n \to \infty$ 时通项不趋于 0，用第 n 项判别法

例.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$

推导过程:

$\because \lim_{n\to\infty} (-1)^n n^2$ 极限不为 0

$\therefore$ 由第 n 项判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$ 发散

3) 若有些项为正，有些项为负，当 $n \to \infty$ 时通项趋于 0，用绝对收敛判别法

$$\boxed{\text{若 } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛}}$$

例.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$

推导过程:

$\because \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$

$\therefore$ 由绝对收敛判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$ 收敛

4) 若有些项为正，有些项为负，并且级数不是绝对收敛，用交错级数判别法

$$\boxed{\text{若当 } n \to \infty \text{ 时交错级数的通项的绝对值单调递减趋于 } 0\text{，则级数收敛}}$$

例.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

推导过程:

$\because \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，并且 $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ 单调递减

$\therefore$ 由交错级数判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

(7) 上述皆不适用 — 比式判别法/P 判别法/极限比较判别法

1) 比较判别法