

定义 1 如果 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, 则函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处连续

定义 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上的每一点都连续, 那么函数 $f(x)$ 在该区间上连续

定义 3 如果说函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则需满足下列条件:

- (1) 函数 $f(x)$ 在 (a, b) 中的每一点都连续;
- (2) 函数 $f(x)$ 在点 $x = a$ 处右连续; 即, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 存在 (且有限), $f(a)$ 存在, 并且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- (3) 函数 $f(x)$ 在点 $x = b$ 处左连续; 即, $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ 存在 (且有限), $f(b)$ 存在, 并且 $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

定理 4 (介值定理) 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $f(a) < 0$ 且 $f(b) > 0$, 那么在区间 (a, b) 上至少有一点 c , 使得 $f(c) = 0$. 代之以 $f(a) > 0$ 且 $f(b) < 0$, 同样成立.

定理 5 (最大值与最小值定理) 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 那么 f 在 $[a, b]$ 上至少有一个最大值和一个最小值.

定义 6 通过 $(x, f(x))$ 的切线的斜率是 x 的一个函数, 该函数被称为 f 的导数.

公式:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

定义 7 如果一个函数 f 在 x 上可导, 那么它在 x 上连续.