线性方程:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中, b 与系数 a_1,a_2,$\cdots$,a_n 是实数或复数, 通常为已知数. n 为任意正整数

线性方程组 – 由一个或几个包含相同变量的线性方程组成, 如:

$$\begin{cases} 2x_1 & - & x_2 & + & 1.5x_3 & = 8 \\ x_1 & & & - & 4x_3 & = -7 \end{cases}$$

若线性方程组的方程个数少于未知数个数, 称之为**欠定方程组**
若线性方程组的方程个数多余未知数个数, 称之为**超定方程组**
方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的**解集**
若两个方程组有相同的解集, 则这两个方程组称为**等价**的

线性方程组解集情况:
1. 无解;
2. 有唯一解;
3. 有无穷多解.
当方程组无解时, 称线性方程组**不相容**
当方程组有解时, 称线性方程组**相容**

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

线性方程组的**系数矩阵**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

线性方程组的**增广矩阵**

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

解线性方程组
思路: 将方程组用一个更容易求解的等价方程式替代

初等行变换:

1.(倍加变换) 将某方程替换为它与另一方程倍数的和;

2.(对换变换) 交换两个方程的位置;

3.(倍乘变换) 方程的所有系数乘以一个非 0 实数.

例. 简化如下方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

步骤 1 – ③+4①

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

步骤 2 – $\frac{1}{2}$②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

步骤 3 – ③+3②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 4 – ②+4③

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 5 – ①+(-③)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 6 – ①+2②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

非零行 (列): 矩阵中至少包含一个非零元素的行 (列)
先导元素: 该行最左边的非零元素

定义 一个矩阵称为阶梯形, 若它由以下三个性质:
1. 所有非零行在零行之上;
2. 某一行先导元素的列位于上一行先导元素的右边;
3. 某一先导元素所在列下方元素都是零;
若还满足以下性质, 则称为简化阶梯形:
4. 每一非零行的先导元素是 1;
5. 每一先导元素是该元素所在列的唯一非零元素.

定理 1 (简化阶梯形矩阵的唯一性)
每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵.

定义 矩阵 A 中的**主元位置**是 A 中对应于它的阶梯形中先导元素的位置. **主元列**是 A 中含有主元位置的列.

基本变量: 位于主元列的变量
自由变量: 位于非主元列的变量

定理 2 (存在与唯一性定理)
线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列. 也就是说, 增广矩阵的阶梯形没有形如

$$[0\ \cdots\ 0\ b], b \neq 0$$

的行. 若线性方程组相容, 则它的解集可能有两种情形:
(i) 当没有自由变量时, 有唯一解;
(ii) 若至少有一个自由变量, 则有无穷多解.

应用行化简算法解线性方程组:

1. 写出方程组的增广矩阵
2. 应用行化简算法把增广矩阵化为阶梯形, 确定方程组是否相容, 如果没有解则停止; 否则进行下一步
3. 继续行化简算法得到它的简化阶梯形
4. 写出简化阶梯形矩阵对应的方程组
5. 将每个非零方程改写为使用自由变量表示基本变量的形式

列向量: 仅含一列的矩阵, 简称为向量. 如:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad u = (3, -1)$$

行向量: 仅含一行的矩阵. 如:

$$v = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

所有两个元素的向量表示为 $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}$ 表示元素为实数, 2 表示向量包含两个元素

向量加法:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

标量乘法:

若 $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $c = 5$, 则:

$$cu = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的几何含义: 由原点 (0,0) 指向点 (x,y) 的有向线段

所有元素都是零的向量称为**零向量**, 用 $\mathbf{0}$ 表示 ($\mathbf{0}$ 中元素的个数可由上下文确定)

$\mathbb{R}^n$ 中向量的代数性质

对 $\mathbb{R}^n$ 中一切向量 $\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ 以及标量 c 和 d:

(i)	$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$	(v)	$c(\mathbf{u}+\mathbf{v})=c\mathbf{u}+c\mathbf{v}$
(ii)	$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$	(vi)	$(c+d)\mathbf{u}=c\mathbf{u}+d\mathbf{u}$
(iii)	$\mathbf{u}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{u}=\mathbf{u}$	(vii)	$c(d\mathbf{u})=(cd)\mathbf{u}$
(iv)	$\mathbf{u}+(-\mathbf{u})=-\mathbf{u}+\mathbf{u}=\mathbf{0}$	$(viii)$	$1\mathbf{u}=\mathbf{u}$

给定 $\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\cdots$,$\mathbf{v}_p$ 和标量 c_1,c_2,$\cdots$,c_p, 向量

$$\mathbf{y}=c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_p\mathbf{v}_p$$

称为向量 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\cdots$,$\mathbf{v}_p$ 以 c_1,c_2,$\cdots$,c_p 为**权**的**线性组合**.

定义 若 $\mathbf{v}_1$,$\mathbf{v}_2$,$\cdots$,$\mathbf{v}_p$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量, 则 v_1,v_2,$\cdots$,v_p 的所有线性组合所成的组合用记号 $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_p\}$ 表示, 称为 **由$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_p$所生成的$\mathbb{R}^n$的子集**. 也就是说, $\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\cdots,\mathbf{v}_p\}$ 是所有形如

$$c_1\mathbf{v}_1+c_2\mathbf{v}_2+\cdots+c_p\mathbf{v}_p$$

的向量的集合, 其中 v_1,v_2,$\cdots$,v_p 为标量.

定义 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, 它的各列为 $\boldsymbol{a}_1$,$\cdots$,$\boldsymbol{a}_n$. 若 $\boldsymbol{x}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量, 则 **A 与 $\boldsymbol{x}$ 的积** (记为 $A\boldsymbol{x}$) 就是 **A 的各列以 $\boldsymbol{x}$ 中对应元素为权的线性组合**, 即

$$A\boldsymbol{x}=[\boldsymbol{a}_1\ \boldsymbol{a}_2\ \cdots\ \boldsymbol{a}_n]\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=x_1\boldsymbol{a}_1+x_2\boldsymbol{a}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{a}_n$$

注意 $A\boldsymbol{x}$ 仅当 A 的列数等于 $\boldsymbol{x}$ 中的元素个数时才有意义.

定理 3

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的各列为 $\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n$, 而 $\boldsymbol{b}$ 属于 $\mathbb{R}^n$, 则矩阵方程

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

与向量方程

$$x_1\boldsymbol{a}_1 + x_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + x_n\boldsymbol{a}_n = \boldsymbol{b}$$

有相同的解集. 它又与增广矩阵为

$$[\boldsymbol{a}_1 \ \boldsymbol{a}_2 \ \cdots \ \boldsymbol{a}_n \ \boldsymbol{b}]$$

的线性方程组有相同的解集.

定理 4

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列命题是逻辑上等价的. 也就是说, 对某个 A, 它们都成立或者都不成立.

a. 对 $\mathbb{R}^m$ 中每个 $\boldsymbol{b}$, 方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解.

b. $\mathbb{R}^m$ 中的每个 $\boldsymbol{b}$ 都是 A 的列的一个线性组合.

c. A 的各列生成 $\mathbb{R}^m$.

d. A 在每一行都有一个主元位置.

计算 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的行–向量规则

若乘积 $A\boldsymbol{x}$ 有定义, 则 $A\boldsymbol{x}$ 中的第 i 个元素是 A 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{x}$ 的相应元素乘积之和.

矩阵的主对角线上元素为 1, 其他位置上元素为 0, 这个矩阵称为**单位矩阵**, 并记为 I.

如果矩阵为 $n \times n$ 单位矩阵, 记为 I_n.

定理 5

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中向量, c 是标量, 则

a. $A(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = A\boldsymbol{u} + A\boldsymbol{v}$

b. $A(c\boldsymbol{u}) = c(A\boldsymbol{u})$

若线性方程组可写成

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

的形式, 则称为**齐次线性方程组**. 其中, A 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{0}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的零向量.
齐次线性方程组至少有一个解, 即 $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$($\mathbb{R}^n$ 中的零向量), 这个解称为它的**平凡解**.
如果有一个非零向量 $\boldsymbol{x}$, 满足 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, 这个解称为它的**非平凡解**.

齐次方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 有非平凡解当且仅当方程至少有一个自由变量.

$\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{u} + t\boldsymbol{v}$ 为 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的**参数向量形式**. 其中, s,t 为自由变量
$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{v}$ 为 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的**参数向量形式**. 其中, t 为自由变量
因此, $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解集是一条通过 $\boldsymbol{p}$ 而平行于 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解集的直线. 也称为将 $\boldsymbol{v}$ 沿着 $\boldsymbol{p}$ 进行直线移动.

定理 6
设方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 对某个 $\boldsymbol{b}$ 是相容的, $\boldsymbol{p}$ 为一个特解, 则 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解集是所有形如 $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{p} + \boldsymbol{v}_h$ 的向量的集, 其中 $\boldsymbol{v}_h$ 时齐次方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的任意一个解.

把 (相容方程组的) 解集表示成参数向量形式
1. 把增广矩阵简化为简化阶梯形.
2. 把每个基本变量用自由变量表示.
3. 把一般解 $\boldsymbol{x}$ 表示成向量, 如果有自由变量, 其元素依赖于自由变量.
4. 把 $\boldsymbol{x}$ 分解为向量 (元素为常数) 的线性组合, 用自由变量作为参数.

线性方程组的应用:
1. 经济学 - 部分的收支平衡
2. 化学式 - 等号两边原子守恒
3. 网络流 - 节点的进/出流量恒等

定义 $\mathbb{R}^n$ 中一组向量 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}$ 称为**线性无关的**, 若向量方程

$$x_1\boldsymbol{v}_1 + x_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + x_p\boldsymbol{v}_p = \mathbf{0}$$

仅由平凡解. 向量组 (集)$\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}$ 称为**线性相关**的, 若存在不全为零的权 $c_1,\cdots,c_p$, 使

$$c_1\boldsymbol{v}_1+c_2\boldsymbol{v}_2+\cdots+c_p\boldsymbol{v}_p=\boldsymbol{0}$$

矩阵 A 的各列线性无关, 当且仅当方程 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 仅有平凡解.

两个向量的集合 $\{\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2\}$ 线性相关, 当且仅当其中一个向量是另一个向量的倍数. 这个集合线性无关, 当且仅当其中任一个向量都不是另一个向量的倍数.

定理 7 (线性相关集的特征)
两个或更多个向量的集合 $S=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}$ 线性相关, 当且仅当 S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合. 事实上, 若 S 线性相关, 且 $\boldsymbol{v}_1\neq\boldsymbol{0}$, 则某个 $\boldsymbol{v}_j(j>1)$ 是它前面向量 $\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_{j-1}$ 的线性组合.

定理 8
若一个向量组的向量个数超过每个向量的元素个数, 那么这个向量组线性相关. 就是说, $\mathbb{R}^n$ 中任意向量组 $\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}$ 当 $p>n$ 时线性相关.

定理 9
若 $\mathbb{R}^n$ 中向量组 $S=\{\boldsymbol{v}_1,\cdots,\boldsymbol{v}_p\}$ 包含零向量, 则它线性相关.

由 $\boldsymbol{x}$ 到 $A\boldsymbol{x}$ 的对应是由一个向量集到另一个向量集的函数

定义 变换 (或映射)T 称为**线性**的, 若
(i)对 T 的定义域中一切 $\boldsymbol{u}$,$\boldsymbol{v}$,$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=T(\boldsymbol{u})+T(\boldsymbol{v})$.
(ii)对 T 的定义域中的一切 $\boldsymbol{u}$ 和数 c, $T(c\boldsymbol{u})=cT(\boldsymbol{u})$.

若 T 是线性变换, 则

$$T(\boldsymbol{0})=\boldsymbol{0}$$

且对 T 的定义域中一切向量 $\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 以及数 c 和 d, 有:

$$T(c\boldsymbol{u}+d\boldsymbol{v})=cT(\boldsymbol{u})+dT(\boldsymbol{v})$$