

线性方程:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

其中, b 与系数 a_1, a_2, \cdots, a_n 是实数或复数, 通常为已知数. n 为任意正整数

线性方程组 – 由一个或几个包含相同变量的线性方程组成, 如:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 1.5x_3 = 8 \\ x_1 - 4x_3 = -7 \end{cases}$$

若线性方程组的方程个数少于未知数个数, 称之为欠定方程组

若线性方程组的方程个数多余未知数个数, 称之为超定方程组

方程组所有可能的解的集合称为线性方程组的解集

若两个方程组有相同的解集, 则这两个方程组称为等价的

线性方程组解集情况:

1. 无解;
2. 有唯一解;
3. 有无穷多解.

当方程组无解时, 称线性方程组不相容

当方程组有解时, 称线性方程组相容

线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 - 8x_3 = 8 \\ -4x_1 + 5x_2 + 9x_3 = -9 \end{cases}$$

线性方程组的系数矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -8 \\ -4 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

线性方程组的增广矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

解线性方程组

思路: 将方程组用一个更容易求解的等价方程式替代

初等行变换:

- 1.(倍加变换) 将某方程替换为它与另一方程倍数的和;
- 2.(对换变换) 交换两个方程的位置;
- 3.(倍乘变换) 方程的所有系数乘以一个非 0 实数.

例. 简化如下方程组

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

步骤 1 - ③+4①

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ -4 & 5 & 9 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

步骤 2 - $\frac{1}{2}$ ②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & 8 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix}$$

步骤 3 - ③+3②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & -3 & 13 & -9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 4 - ②+4③

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 5 - ①+(-③)

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

步骤 6 - ①+2②

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 1 & 0 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

非零行 (列): 矩阵中至少包含一个非零元素的行 (列)

先导元素: 该行最左边的非零元素

定义 一个矩阵称为阶梯形, 若它由以下三个性质:

1. 所有非零行在零行之上;
 2. 某一行先导元素的列位于上一行先导元素的右边;
 3. 某一先导元素所在列下方元素都是零;
- 若还满足以下性质, 则称为简化阶梯形:
4. 每一非零行的先导元素是 1;
 5. 每一先导元素是该元素所在列的唯一非零元素.

定理 1 (简化阶梯形矩阵的唯一性)

每个矩阵行等价于唯一的简化阶梯形矩阵.

定义 矩阵 A 中的主元位置是 A 中对应于它的阶梯形中先导元素的位置. 主元列是 A 中含有主元位置的列.

基本变量: 位于主元列的变量

自由变量: 位于非主元列的变量

定理 2 (存在与唯一性定理)

线性方程组相容的充要条件是增广矩阵的最右列不是主元列. 也就是说, 增广矩阵的阶梯形没有形如

$$[0 \cdots 0 \ b], b \neq 0$$

的行. 若线性方程组相容, 则它的解集可能有两种情形:

- (i) 当没有自由变量时, 有唯一解;
- (ii) 若至少有一个自由变量, 则有无穷多解.

应用行化简算法解线性方程组:

1. 写出方程组的增广矩阵
2. 应用行化简算法把增广矩阵化为阶梯形, 确定方程组是否相容, 如果没有解则停止; 否则进行下一步
3. 继续行化简算法得到它的简化阶梯形
4. 写出简化阶梯形矩阵对应的方程组
5. 将每个非零方程改写为使用自由变量表示基本变量的形式

列向量: 仅含一列的矩阵, 简称为向量. 如:

$$u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad u = (3, -1)$$

行向量: 仅含一行的矩阵. 如:

$$v = \begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

所有两个元素的向量表示为 \mathbb{R}^2 , \mathbb{R} 表示元素为实数, 2 表示向量包含两个元素

向量加法:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

标量乘法:

若 $u = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $c = 5$, 则:

$$cu = 5 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ -5 \end{bmatrix}$$

向量 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ 的几何含义: 由原点 (0,0) 指向点 (x,y) 的有向线段

所有元素都是零的向量称为**零向量**, 用 **0** 表示 (**0** 中元素的个数可由上下文确定)

\mathbb{R}^n 中向量的代数性质

对 \mathbb{R}^n 中一切向量 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 以及标量 c 和 d :

$$\begin{array}{ll}
 (i) & \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \\
 (ii) & (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\
 (iii) & \mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{u} = \mathbf{u} \\
 (iv) & \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = -\mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{0} \\
 (v) & c(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = c\mathbf{u} + c\mathbf{v} \\
 (vi) & (c + d)\mathbf{u} = c\mathbf{u} + d\mathbf{u} \\
 (vii) & c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u} \\
 (viii) & 1\mathbf{u} = \mathbf{u}
 \end{array}$$

给定 \mathbb{R}^n 中向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 和标量 c_1, c_2, \dots, c_p , 向量

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{v}_1 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

称为向量 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 以 c_1, c_2, \dots, c_p 为权的线性组合.

定义 若 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 则 v_1, v_2, \dots, v_p 的所有线性组合所成的组合用记号 $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 表示, 称为由 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p$ 所生成的 \mathbb{R}^n 的子集. 也就是说, $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 是所有形如

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_p\mathbf{v}_p$$

的向量的集合, 其中 v_1, v_2, \dots, v_p 为标量.

定义 若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的各列为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$. 若 \mathbf{x} 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 则 A 与 \mathbf{x} 的积 (记为 $A\mathbf{x}$) 就是 A 的各列以 \mathbf{x} 中对应元素为权的线性组合, 即

$$A\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n$$

注意 $A\mathbf{x}$ 仅当 A 的列数等于 \mathbf{x} 中的元素个数时才有意义.

定理 3

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的各列为 $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, 而 \mathbf{b} 属于 \mathbb{R}^m , 则矩阵方程

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

与向量方程

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \dots + x_n\mathbf{a}_n = \mathbf{b}$$

有相同的解集. 它又与增广矩阵为

$$[\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_n \ \mathbf{b}]$$

的线性方程组有相同的解集.

定理 4

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, 则下列命题是逻辑上等价的. 也就是说, 对某个 A , 它们都成立或者都不成立.

- 对 \mathbb{R}^m 中每个 \mathbf{b} , 方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 有解.
- \mathbb{R}^m 中的每个 \mathbf{b} 都是 A 的列的一个线性组合.
- A 的各列生成 \mathbb{R}^m .
- A 在每一行都有一个主元位置.

计算 $A\mathbf{x}$ 的行-向量规则

若乘积 $A\mathbf{x}$ 有定义, 则 $A\mathbf{x}$ 中的第 i 个元素是 A 的第 i 行元素与 \mathbf{x} 的相应元素乘积之和.

矩阵的主对角线上元素为 1, 其他位置上元素为 0, 这个矩阵称为单位矩阵, 并记为 I .

如果矩阵为 $n \times n$ 单位矩阵, 记为 I_n .

定理 5

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 是 \mathbb{R}^n 中向量, c 是标量, 则

- $A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v}$
- $A(c\mathbf{u}) = c(A\mathbf{u})$

若线性方程组可写成

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的形式, 则称为齐次线性方程组. 其中, A 是 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{0}$ 是 \mathbb{R}^m 中的零向量.

齐次线性方程组至少有一个解, 即 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (\mathbb{R}^n 中的零向量), 这个解称为它的平凡解.

如果有一个非零向量 \mathbf{x} , 满足 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 这个解称为它的非平凡解.

齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 有非平凡解当且仅当方程至少有一个自由变量.

$\mathbf{x} = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的参数向量形式. 其中, s, t 为自由变量

$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{v}$ 为 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的参数向量形式. 其中, t 为自由变量

因此, $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是一条通过 \mathbf{p} 而平行于 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解集的直线. 也称为将 \mathbf{v} 沿着 \mathbf{p} 进行直线移动.

定理 6

设方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对某个 \mathbf{b} 是相容的, \mathbf{p} 为一个特解, 则 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的解集是所有形如 $\mathbf{w} = \mathbf{p} + \mathbf{v}_h$ 的向量的集, 其中 \mathbf{v}_h 是齐次方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的任意一个解.

把 (相容方程组的) 解集表示成参数向量形式

1. 把增广矩阵简化为简化阶梯形.
2. 把每个基本变量用自由变量表示.
3. 把一般解 \mathbf{x} 表示成向量, 如果有自由变量, 其元素依赖于自由变量.
4. 把 \mathbf{x} 分解为向量 (元素为常数) 的线性组合, 用自由变量作为参数.

线性方程组的应用:

1. 经济学 - 部分的收支平衡
2. 化学式 - 等号两边原子守恒
3. 网络流 - 节点的进/出流量恒等

定义 \mathbb{R}^n 中一组向量 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 称为线性无关的, 若向量方程

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \dots + x_p\mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

仅由平凡解. 向量组 (集) $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 称为**线性相关的**, 若存在不全为零的权 c_1, \dots, c_p , 使

$$c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_p \mathbf{v}_p = \mathbf{0}$$

矩阵 A 的各列线性无关, 当且仅当方程 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 仅有平凡解.

两个向量的集合 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ 线性相关, 当且仅当其中一个向量是另一个向量的倍数. 这个集合线性无关, 当且仅当其中任一个向量都不是另一个向量的倍数.

定理 7 (线性相关集的特征)

两个或更多个向量的集合 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 线性相关, 当且仅当 S 中至少有一个向量是其他向量的线性组合. 事实上, 若 S 线性相关, 且 $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, 则某个 $\mathbf{v}_j (j > 1)$ 是它前面向量 $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$ 的线性组合.

定理 8

若一个向量组的向量个数超过每个向量的元素个数, 那么这个向量组线性相关. 就是说, \mathbb{R}^n 中任意向量组 $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 当 $p > n$ 时线性相关.

定理 9

若 \mathbb{R}^n 中向量组 $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ 包含零向量, 则它线性相关.

由 \mathbf{x} 到 $A\mathbf{x}$ 的对应是由一个向量集到另一个向量集的函数

定义 变换 (或映射) T 称为**线性的**, 若

(i) 对 T 的定义域中一切 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, T(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = T(\mathbf{u}) + T(\mathbf{v})$.

(ii) 对 T 的定义域中的一切 \mathbf{u} 和数 $c, T(c\mathbf{u}) = cT(\mathbf{u})$.

若 T 是线性变换, 则

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

且对 T 的定义域中一切向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 以及数 c 和 d , 有:

$$T(c\mathbf{u} + d\mathbf{v}) = cT(\mathbf{u}) + dT(\mathbf{v})$$

定理 10

设 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为线性变换, 则存在唯一的矩阵 A , 使得对 \mathbb{R}^n 中一切 \mathbf{x} , 有

$$T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

事实上, A 是 $m \times n$ 矩阵, 它的第 j 列是向量 $T(\mathbf{e}_j)$, 其中 \mathbf{e}_j 是 \mathbb{R}^n 中单位矩阵 \mathbf{I}_n 的第 j 列:

$$A = [T(\mathbf{e}_1) \cdots T(\mathbf{e}_n)]$$