1.$x \to a$ 时的有理函数的极限

有理函数: 形如 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ 的函数, 其中 $p(x), q(x)$ 都是多项式.

i. 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{m}{n}$ 时:

$\lim_{x \to a} f(x) = \dfrac{m}{n}$

例.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 9}{x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 9}{x - 2} = \frac{1 - 9}{1 - 2} = 8$$

ii. 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{0}{0}$ 时:

$\lim_{x \to a} f(x)$ 进行分子分母约分

例.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 2} = \lim x \to 2x - 1 = 2 - 1 = 1$$

iii. 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{m}{0}$ 时:

$\lim_{x \to a} f(x)$ 判断极限点两边的极限是否同为 ∞ 或 $-\infty$

例.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 6}{x(x-1)^3} = \lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3} \\
&\because \lim_{x \to 1^-} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3} = \frac{(+)(-)}{(+)(-)} = + \\
&\quad \lim_{x \to 1^+} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3} = \frac{(+)(-)}{(+)(+)} = - \\
&\therefore f(x)\text{无极限值}
\end{aligned}$$

2.$x \to a$ 时的平方根的极限

共轭因式: 若 S 是含有根式的已知表达式, 若存在一个不恒等于零的表达式 M, 使乘积 SM 不含根式, 则 M 为 S 的共轭因式. 反之, S 也为 M 的共轭因式.

设 $f(x) = \frac{g(x) \pm h(x)}{p(x) \pm q(x)}$, 其中, g(x)/h(x)/p(x)/q(x) 其中一个为根式

当 $f(a) = \frac{g(a) - h(a)}{p(a) - q(a)} = \frac{0}{0}$ 时, 将分子分母同时乘以含根号部分的共轭因式.

例.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} &= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x^2 - 9} + 4}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \lim_{x \to 5} \frac{x^2 - 25}{(x-5)(\sqrt{x^2 - 9} + 4)} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{x + 5}{\sqrt{x^- 9} + 4} = \frac{5 + 5}{\sqrt{25 - 9} + 4} = \frac{5}{4}
\end{aligned}$$