2

对称矩阵和二次型

对称矩阵的对角化

一个对称矩阵是一个满足 $A^T = A$ 的矩阵 A，这种矩阵当然是方阵，它的主对角线元素是任意的，但其他元素在主对角线的两边成对出现

定理 1 如果 A 是对称矩阵，那么不同特征空间的任意两个特征向量是正交的

一个矩阵 A 称为可**正交对角化**，如果存在一个正交矩阵 P（满足 $P^{-1} = P^T$）和一个对角矩阵 D 使得

$$A = PDP^T = PDP^{-1}$$

定理 2 一个 $n \times n$ 矩阵 A 可正交对角化的充分必要条件是 A 是对称矩阵

矩阵 A 的特征值的集合有时称为 A 的**谱**

定理 3 (对称矩阵的谱定理)
一个对称的 $n \times n$ 矩阵 A 具有下述性质:
a. A 有 n 个实特征值, 包含重复的特征值
b. 对每一个特征值 λ, 对应的特征空间的维数等于 λ 作为特征方程的根的重数
c. 特征空间相互正交, 这种正交性是在特征向量对应于不同特征值的意义下成立的
d. A 可正交对角化

二次型

计算 $\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{x}$ 时的平方和及更一般形式的表达式称为**二次型**

$\mathbb{R}^n$ 上的一个二次型是一个定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，它在向量 $\boldsymbol{x}$ 处的值可由表达式 $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 计算，其中 A 是一个 $n \times n$ 对称矩阵. 矩阵 A 称为**关于二次型的矩阵**

如果 $\boldsymbol{x}$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的向量变量，那么**变量代换**是下面形式的等式:

$$\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{y} \text{ 或 } \boldsymbol{y} = P^{-1}\boldsymbol{x} \tag{2.1}$$

其中 P 是可逆矩阵且 $\boldsymbol{y}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个新的向量变量. 这里 P 的列可确定 $\mathbb{R}^n$ 的一个基，$\boldsymbol{y}$ 是相对于该基的向量 $\boldsymbol{x}$ 的坐标向量.
如果用变量代换(2.1)处理二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$，那么

$$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = (P\boldsymbol{y})^T A(P\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^T P^T AP\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^T(P^T AP)\boldsymbol{y} \tag{2.2}$$

且新的二次型矩阵是 $P^T AP$. 因为 A 是对称的，故由定理 2，存在正交矩阵 P，使得 $P^T AP$ 是对角矩阵 D，(2.2)中的二次型变为 $\boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y}$

定理 4 (主轴定理)
设 A 是一个 $n \times n$ 对称矩阵, 那么存在一个正交变量代换 $bmx = P\boldsymbol{y}$, 它将二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 变换为不含交叉乘积项的二次型 $\boldsymbol{y}^T D\boldsymbol{y}$

矩阵 P 的列称为二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 的主轴

定义　一个二次型 Q 是:
$a.$ 正定的，如果对所有 $x \neq 0$，有 $Q(\boldsymbol{x}) > 0$
$b.$ 半正定的，如果对所有 $\boldsymbol{x}$，有 $Q(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$
$c.$ 负定的，如果对所有 $x \neq 0$，有 $Q(\boldsymbol{x}) < 0$
$d.$ 半负定的，如果对所有 $\boldsymbol{x}$，有 $Q(\boldsymbol{x}) \leqslant 0$
$e.$ 不定的，如果 $Q(\boldsymbol{x})$ 既有正值又有负值

定理 5 (二次型与特征值)
设 A 是 $n \times n$ 对称矩阵, 那么一个二次型 $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x}$ 是:
$a.$ 正定的, 当且仅当 A 的所有特征值是正数
$b.$ 负定的, 当且仅当 A 的所有特征值是负数
$c.$ 不定的, 当且仅当 A 既有正特征值, 又有负特征值