目录

第一章　方法、图像和直线

1. 函数

函数是将一个对象转化为另一个对象的规则. 起始对象称为**输入**, 来自称为**定义域**的集合. 返回对象称为**输出**, 来自称为**上域**的集合.

一个函数必须给每一个有效的输入指定唯一的输出.

值域是所有可能的输出所组成的集合.

例 1.

$f(x) = x^2 (x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R})$

在该示例中, 定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\mathbb{R}^+$, 上域为 $\mathbb{R}$

区间定义:

$[a, b]$ 表示所有介于 a 和 b 之间 (包括 a 和 b) 的实数的集合, 称为**闭区间**.

(a, b) 表示所有介于 a 和 b 之间 (不包括 a 和 b) 的实数的集合, 称为**开区间**.

$[a, b)$ 表示所有介于 a 和 b 之间 (包括 a, 不包括 b) 的实数的集合, 称为**半开区间**.

注意事项:

(1) 分数的分母不能是零.

(2) 不能取负数的偶次方根.

(3) 不能取负数或零的对数.

垂线检验: 当任何一条垂直线与图像相交多于一次时, 该图像不是函数; 反之则图像为函数

2. 反函数

反函数的条件:

1) 从一个函数 f 出发, 使得对于在 f 值域中的任意 y, 都只有唯一的 x 值满足 $f(x) = y$;

2)f^{-1} 的定义域和 f 的值域相同;

3)f^{-1} 的值域和 f 的定义域相同;

4)$f^{-1}(y)$ 的值就是满足 $f(x) = y$ 的 x. 即

$$\text{如果 } f(x) = y, \text{则 } f^{-1}(y) = x$$

水平线检验: 如果每一条水平线和一个函数的图像相交至多一次, 那么这个函数有反函数; 如果即使只有一条水平线和函数的图像相交多余一次, 那么这个函数没有反函数.

原始函数与反函数关于 $y = x$ 对称

对于反函数, 有如下规则:

1) 对于 f 值域中的所有 y, 都有 $f(f^{-1}(y)) = y$;

2) 对于 f 定义域中的 x, 只有当 f 满足水平线检验时, 才有 $f^{-1}(f(x)) = x$.

例.

$f(x) = \sin(x)$, 求$f^{-1}(f(x))$

推导过程:

当 $f(x)$ 满足水平线检验时, $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

此时 $f^{-1}(f(x)) = x$

3. 复合函数

令 $g(x) = x^2, h(x) = \cos(x)$, 而 $f(x) = \cos(x^2)$, 则 $f(x) = h(g(x))$, 也可表示为 $f = h \circ g$, f 为 g 与 h 的**复合函数**.

4. 奇函数与偶函数

如果 f 对定义域内的所有 x 有 $f(-x) = f(x)$, 则 f 为**偶函数**.

如果 f 对定义域内的所有 x 有 $f(-x) = -f(x)$, 则 f 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴具有镜面对称性.

奇函数的图像关于原点有 180^o 的点对称性.

5. 线性函数

形如 $f(x) = mx + b$ 的函数叫做**线性函数**.

点斜式方程:

$\boxed{\text{如果已知直线通过点 } (x_0, y_0)\text{, 斜率为 } m\text{, 则它的方程为 } y - y_0 = m(x - x_0)}$

$$\boxed{\text{如果一条直线通过点 } (x_1, y_1) \text{ 和 } (x_2, y_2)\text{, 则它的斜率等于 } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

6. 常见函数

1) 多项式

形如 $f(x) = 5x^4 - 4x^3 + 10$ 的函数

基本项 x^n 的倍数叫做 x^n 的**系数**

最大的幂指数 n(该项系数不能为零) 叫做多项式的**次数**

最高次数项的系数称为**首项系数**

2) 有理函数

形如 $\dfrac{p(x)}{q(x)}$, 其中 p 和 q 为多项式

3) 指数函数和对数函数

形如 $y = a^x$ 的函数, 称为指数函数

形如 $\log_a(x)$ 的函数, 称为对数函数

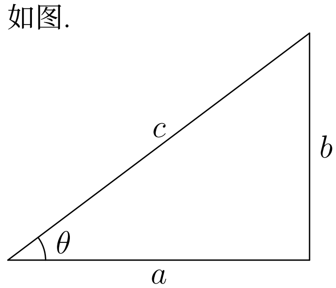
4) 带有绝对值的函数

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geqslant 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}}$$

第二章　三角学回顾

1. 基本知识

如图.



基本公式列表:

$$
\begin{aligned}
&\sin(\theta)=\frac{b}{c} && \cos(\theta)=\frac{a}{c} && \tan(\theta)=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}=\frac{b}{a}\\
&\csc(\theta)=\frac{1}{\sin(\theta)}=\frac{c}{b} && \sec(\theta)=\frac{1}{\cos(\theta)}=\frac{c}{a} && \cot(\theta)=\frac{1}{\tan(\theta)}=\frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

常见三角函数值:

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\star$

2. 三角函数值

求三角函数值步骤:

1. 找出角所在象限;

2. 当角在 x/y 轴上, 参考三角函数图像;

3. 如果角不在 x/y 轴上, 找出该角与 x 轴形成的最小角度, 即**参考角**;

4. 当参考角为特殊角时, 参考常见三角函数值表;

5. 利用 ASTC(all/sin/tan/cos) 决定是否需要添加负号.

例 1.

$$\sin(\frac{\pi}{4})$$

1)$\frac{\pi}{4}$ 在第一象限, sin 值为正

2) 与 x 轴形成的角为 $\frac{\pi}{4}$

结果为:

$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

例 2.

$$\cos(\frac{5\pi}{6})$$

1)$\frac{5\pi}{6}$ 在第二象限, cos 值为负

2) 与 x 轴形成的角为 $\frac{\pi}{6}$

结果为:

$\cos\frac{5\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

例 3.

$$\tan(\frac{4\pi}{3})$$

1)$\frac{4\pi}{3}$ 在第三象限, tan 值为正

2) 与 x 轴形成的角为 $\frac{\pi}{3}$

结果为:

$\tan\frac{4\pi}{3} = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

例 4.

$$\cot(\frac{5\pi}{3})$$

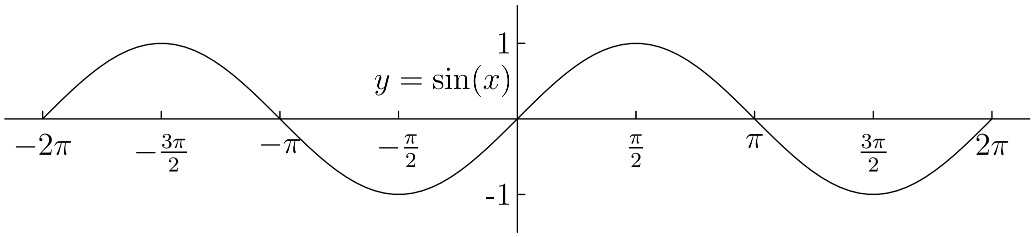
1)$\frac{5\pi}{3}$ 在第四象限, cot 值为负

2) 与 x 轴形成的角为 $\frac{\pi}{3}$

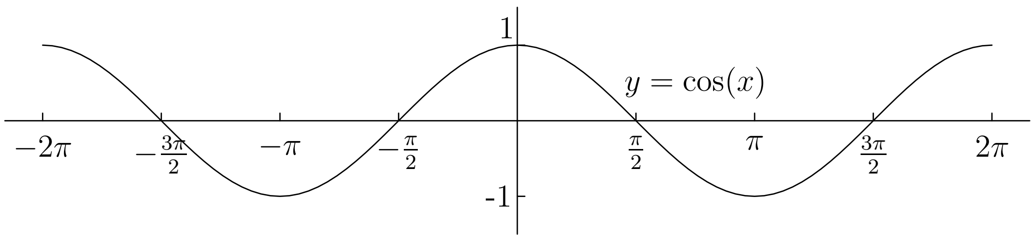
结果为:

$\cot\frac{5\pi}{3} = -\cot\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

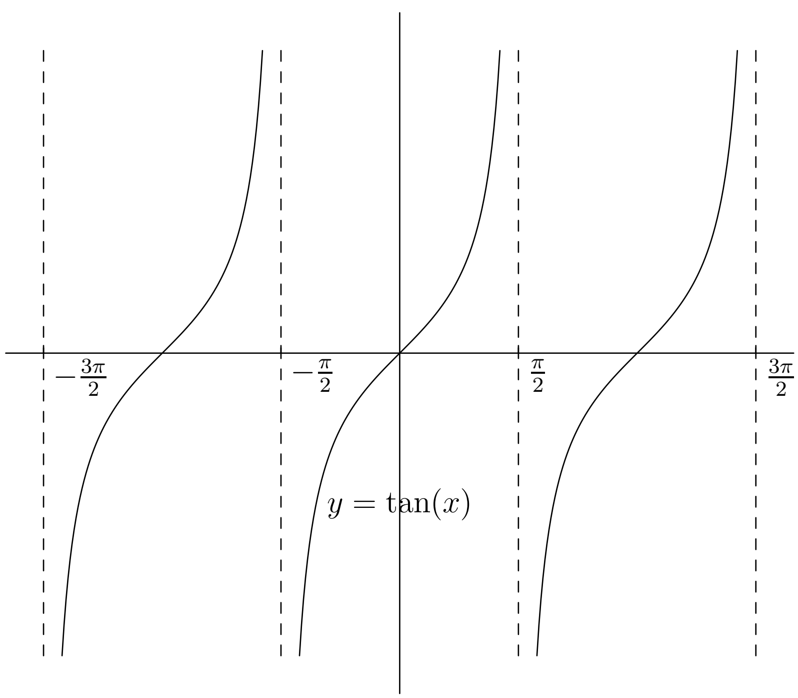
3. 三角函数图像 $\sin(x)$:


1
$y = \sin(x)$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1

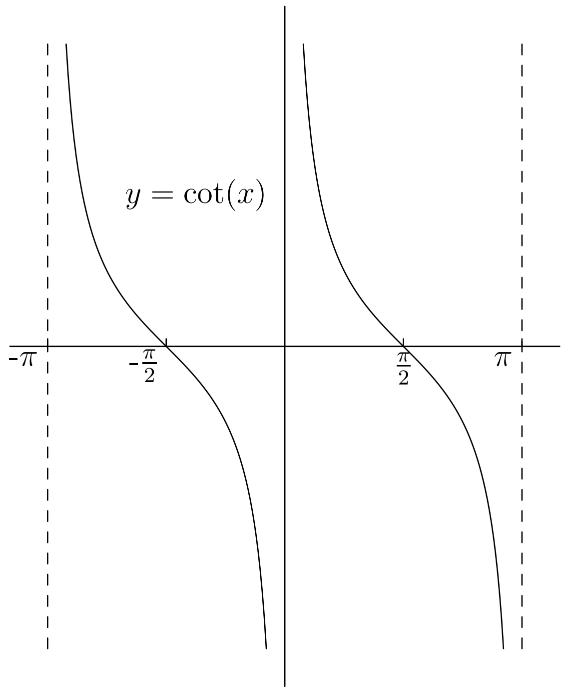
$\cos(x)$:


1
$y = \cos(x)$
-2π
$-\frac{3\pi}{2}$
$-\pi$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
2π
-1

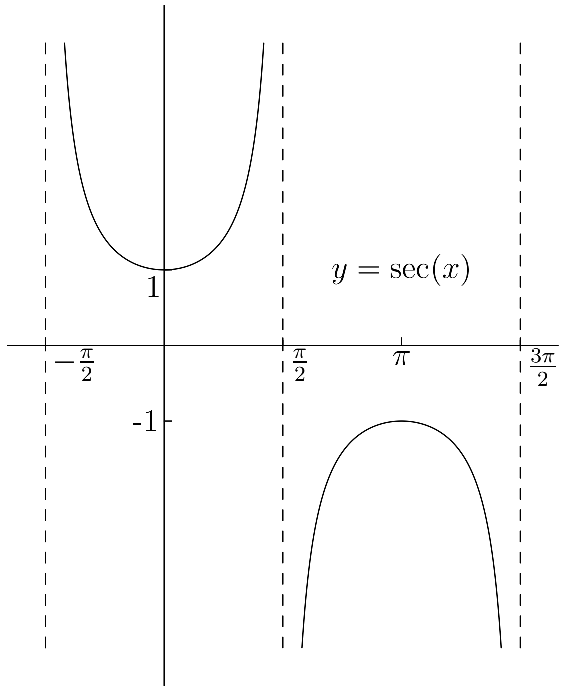
$\tan(x)$:


$-\frac{3\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{3\pi}{2}$
$y = \tan(x)$

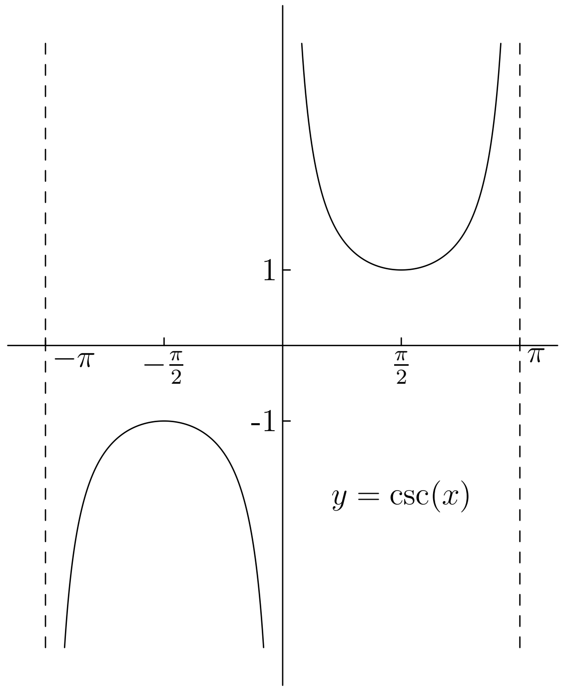
$\cot(x)$:



$\sec(x)$:



$\csc(x)$:



汇总

$$\boxed{\begin{array}{l}\sin(x)\text{、}\tan(x)\text{、}\cot(x)\text{、}\csc(x) \text{ 都是 } x \text{ 的奇函数.}\\ \cos(x) \text{ 和 } \sec(x) \text{ 都是 } x \text{ 的偶函数}\end{array}}$$

4. 三角恒等式

毕达哥拉斯定理:

$$\boxed{\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1}$$

等式两边除以 $\cos^2(x)$:

$$\boxed{1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)}$$

等式两边除以 $\sin^2(x)$:

$$\boxed{\cot^2(x)+1=\csc^2(x)}$$

余角公式:

$$\boxed{\cos(x)=\sin(\tfrac{\pi}{2}-x),\cot(x)=\tan(\tfrac{\pi}{2}-x),\csc(x)=\sec(\tfrac{\pi}{2}-x)}$$

$$\boxed{\sin(x)=\cos(\tfrac{\pi}{2}-x),\tan(x)=\cot(\tfrac{\pi}{2}-x),\sec(x)=\csc(\tfrac{\pi}{2}-x)}$$

和/差角公式:

$$\boxed{\sin(A+B)=\sin(A)\cos(B)+\cos(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\cos(A+B)=\cos(A)\cos(B)-\sin(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\sin(A-B)=\sin(A)\cos(B)-\cos(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B)=\cos(A)\cos(B)+\sin(A)\sin(B)}$$

倍角公式:

$$\boxed{\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)}$$

$$\boxed{\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)-1=1-2\sin^2(x)}$$

第三章　极限导论

函数 g 的定义域是所有实数, 并且 $g(x)$ 可以被定义为如下的分段函数:

$$g(x) = \begin{cases} x-1 & if\ x \neq 2 \\ 3 & if\ x = 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x \to 2} g(x)$ 与 $g(2)$ 的值是不相关的, 关键在于 x 接近于 2 时, $g(x)$ 的值, 结果为: $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = 1$.

左极限: 描述函数的自变量从左边接近于某一个值时, 相对应的函数变化的趋势. 表示为

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

右极限: 描述函数的自变量从右边接近于某一个值时, 相对应的函数变化的趋势. 表示为

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

仅当左极限和右极限在 $x = a$ 处都存在且相等, 双侧极限在 $x = a$ 处存在. 用数学语言描述为:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{且} \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

等价于

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

垂直渐近线的定义:

"f 在 $x = a$ 处有一条垂直渐近线" 说的是, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$, 其中至少有一个极限是 ∞ 或-∞

水平渐近线的定义:

"f 在 $y = L$ 处有一条右侧水平渐近线" 意味着 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$.
"f 在 $y = M$ 处有一条左侧水平渐近线" 意味着 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = M$.

对于大的数和小的数的非正式定义:

- 如果一个数的绝对值是非常大的数, 则这个数是大的
- 如果一个数非常接近于 0(但不是真的等于 0), 则这个数是小的

一个函数可以有不同的右侧和左侧水平渐近线, 但最多只能有两条水平渐近线 (一条在右侧, 一条在左侧), 也有可能一条都没有, 或者只有一条.

一个函数可以有很多条垂直渐近线.

三明治定理 (夹逼定理):

> 如果对于所有在 a 附近的 x 都有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, 且 $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, 则 $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

第四章　求解多项式的极限问题

1.$x \to a$ 时的有理函数的极限

有理函数: 两个多项式之比 $\frac{p(x)}{q(x)}$

解题方法:

(1) 当 $f(a) = \frac{m}{n}(m/n$ 皆不为 0)

例.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^{-}3x+2}{x-2}$$
$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \frac{(-1)^2 - 3 \times (-1) + 2}{-1-2} = \frac{6}{-3} = 2$$

2) 当 $f(a) = \frac{0}{0}$, 分子分母进行因式分解, 并删除公因子

例.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$$
$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \to 2}(x-1) = 1$$

3) 当 $f(a) = \frac{m}{0}$, 验证极限点左右两边的符号是否相同

例.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-6}{x(x-1)^3}$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}=\frac{(+)(-)}{(+)(+)}=-$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}=\frac{(+)(-)}{(+)(-)}=+$$
$\because \lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-6}{x(x-1)^3}$ 左右两侧极限符不相等, 所有极限不存在

2.$x\to a$ 时的平方根的极限

解题方法: 将分子分母同时乘以共轭表达式

例.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}$$
$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}\times\frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}+4}=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}=\frac{5+5}{\sqrt{25-9}+4}=\frac{5}{4}$$

3.$x\to\infty/-\infty$ 时的有理函数的极限

对于任意的 $n>0$, 只要 C 是常数, 满足

$$\lim_{x\to\infty}\frac{C}{x^n}=0$$

解题方法: 分组分母分别除以其最高项内容, 再乘以该内容

例 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-8x^4}{7x^4+5x^3+2000x^2-6}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-8x^4}{7x^4+5x^3+2000x^2-6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-8x^4}{-8x^4}\times(-8x^4)}{\frac{7x^4++5x^3+2000x^2-6}{7x^4}\times 7x^4}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1\times(-8x^4)}{1\times 7x^4}=-\frac{8}{7}$$

例 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^4+3x-99)(2-x^5)}{(18x^7+9x^6-3x^2-1)(x+1)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{(x^4+3x-99)(2-x^5)}{(18x^7+9x^6-3x^2-1)(x+1)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{x^4+3x-99}{x^4}\times x^4)(\frac{2-x^5}{-x^5}\times(-x^5))}{(\frac{18x^7+9x^6-3x^2-1}{18x^7}\times 18x^7)(\frac{x+1}{x}\times x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^4\times(-x^5)}{18x^7\times x}\\ &= \lim_{x\to\infty}-\frac{x}{18}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

例 3.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+3x-99)(2-x^5)}{(18x^7+9x^6-3x^2-1)(x+1)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{(x^4+3x-99)(2-x^5)}{(18x^7+9x^6-3x^2-1)(x+1)} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{(\frac{x^4+3x-99}{x^4}\times x^4)(\frac{2-x^5}{-x^5}\times(-x^5))}{(\frac{18x^7+9x^6-3x^2-1}{18x^7}\times 18x^7)(\frac{x+1}{x}\times x)}\\ &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^4\times(-x^5)}{18x^7\times x}\\ &= \lim_{x\to-\infty}-\frac{x}{18}\\ &= \infty\end{aligned}$$

情况分布:

(1) 如果 p 的次数等于 q 的次数, 极限是有限的且非零

(2) 如果 p 的次数大于 q 的次数, 极限是 ∞ 或 $-\infty$

(3) 如果 p 的次数小于 q 的次数, 极限是 0.

4.$x \to \infty / -\infty$ 时的多项式型函数的极限

多项式型函数: 类似于多项式, 但包含分数次数或 n 次根

解题方法: 分子分母分别除以其最高项内容, 再乘以该内容

例 1.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16x^4+8}+3x}{2x^2+6x+1}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{16x^4+8}+3x}{2x^2+6x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{16x^4+8}+3x}{4x^2}\times 4x^2}{\frac{2x^2+6x+1}{2x^2}\times 2x^2} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{1\times 4x^2}{1\times 2x^2} = 2\end{aligned}$$

例 2.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^6-5x^5}-2x^3}{\sqrt[3]{27x^6+8x}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^6-5x^5}-2x^3}{\sqrt[3]{27x^6+8x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^6-5x^5}-2x^3}{\sqrt[3]{27x^6+8x}} \times \frac{\sqrt{4x^6-5x^5}+2x^3}{\sqrt{4x^6-5x^5}+2x^3} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{(4x^6-5x^5)-4x^6}{\sqrt[3]{27x^6+8x}(\sqrt{4x^6-5x^5}+2x^3)} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{-5x^5}{(\frac{\sqrt[3]{27x^6+8x}}{3x^2}\times 3x^2)(\frac{\sqrt{4x^6-5x^5}+2x^3}{4x^3}\times 4x^3)} \\ &= \lim_{x\to\infty} -\frac{5x^5}{3x^2\times 4x^3} \\ &= -\frac{5}{12}\end{aligned}$$

例 3.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^6+8}}{2x^3+6x+1}$$

由于 $\sqrt{4x^6}$ 为正数, 而 $2x^3$ 为负数

所以 $\sqrt{4x^6} = -2x^3$

$$\lim_{x\to infty} \frac{\sqrt{4x^6+8}}{2x^3+6x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{4x^6+8}}{-2x^3}\times(-2x^3)}{\frac{2x^3+6x+1}{2x^3}\times 2x^3} = -1$$

5. 包含绝对值的函数的极限

例.

$$\lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x+2}$$

$\because p(x) > 0, |p(x)| = p(x)$

$p(x) < 0, |p(x)| = -p(x)$

$$\therefore \lim_{x \to -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} = 1$$

$\therefore \lim_{x \to -2} \frac{|x+2|}{x+2}$无双侧极限

第五章　连续性和可导性

1. 连续性

1) 在一点处连续

$$\boxed{\text{如果 } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)\text{, 函数 } f \text{ 在点 } x = a \text{ 处连续}}$$

2) 在区间上连续

函数 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 如果

(1) 函数 f 在 (a,b) 中的每一点都连续;

(2) 函数 f 在点 $x=a$ 处右连续; 即 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ 存在 (且有限), $f(a)$ 存在, 并且这两个量相等;

(3) 函数 f 在点 $x=b$ 处左连续; 即 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ 存在 (且有限), $f(b)$ 存在, 并且这两个量相等.

介值定理: 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续, 并且 $f(a)<0$ 且 $f(b)>0$, 那么在区间 (a,b) 上至少有一点 c, 使得 $f(c)=0$.

最大值与最小值定理: 如果 f 在 $[a,b]$ 上连续, 那么 f 在 $[a,b]$ 上至少有一个最大值和一个最小值.

2. 可导性

通过 $(x, f(x))$ 的切线的斜率是 x 的一个函数, 称为 f 的**导数**. 表示为

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

导数的导数称为二**阶导**

二阶及多阶导数:

$f''(x) = f^{(2)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \dfrac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$

$\ldots$

右导数:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

左导数:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

如果一个函数 f 在 x 上可导, 那么它在 x 上连续

第六章　求解微分问题

1. 使用定义求导

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1}$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) = ax^{a-1}}$$

2. 运算法则

(1) 常数倍

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Cx^a) = (Ca)x^{a-1}$$

(2) 加/减法法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a + \sqrt{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x})$$

(3) 乘积法则

乘积法则 (版本 1)　如果 $h(x) = f(x)g(x)$, 那么 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

乘积法则 (版本 2)　如果 $y = uv$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

乘积法则 (三个变量)　如果 $y = uvw$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}vw + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}w + uv\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

(4) 商法则

商法则 (版本 1)　如果 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 那么

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

商法则 (版本 2)　如果 $y = \frac{u}{v}$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

(5) 链式求导法则

链式求导法则 (版本 1)　如果 $h(x) = f(g(x))$, 那么 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

链式求导法则 (版本 2)　如果 y 是 u 的函数, 并且 u 是 x 的函数, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

3. 导数伪装的极限

例.

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}$

证明:

设 $f(x) = \sqrt[5]{x}$

$\because f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+h}-x}{h} = \dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$\therefore f'(32) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+h}-\sqrt[5]{32}}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h} = \dfrac{1}{5}\times 32^{-\frac{4}{5}} = \dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{16} = \dfrac{1}{80}$

4. 分段函数的导数

检验方式: 分段函数再连接点上极限相等, 并且导数再连接点上的极限也相等

例.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果}x\leqslant 0,\\ x^2+1 & \text{如果}x>0.\end{cases}$$

$\because f(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的左极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1$$

$f(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} (x^2+1)=1$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f(x)=1$

由于, $f'(x)=\begin{cases}0 & \text{如果}x\leqslant 0,\\ 2x & \text{如果}x>0.\end{cases}$

$\because f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的左极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$$

$f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0$$

$\therefore \lim_{x\to 0} f'(x)=0$

5. 直接画出导函数的图像

第七章　三角函数的极限和导数

1. 三角函数的极限:

(1)$x \to 0$ 的情况

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\cos x=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0}$$

例 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{x}\times 5x=1\times 5=5$$

例 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)\cos(5x^{19})}{x\tan(5x^2)}\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)\cos(5x^{19})}{x\tan(5x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{[\frac{(\sin(2x))^3}{(2x)^3}\times(2x)^3]\cos(5x^{19})}{x[\frac{\tan(5x^2)}{5x^2}\times(5x^2)]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\sin(2x))^3}{(2x)^3}\cdot\cos(5x^{19})}{\frac{\tan(5x^2)}{5x^2}}\times\frac{(2x)^3}{x(5x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{8x^3}{5x^3}$$
$$= \frac{8}{5}$$

例 3.

$$\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{5}{x})$$
$$\lim_{x\to 0} x\sin(\frac{5}{x}) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(frac5x)}{\frac{5}{x}} \times 5 = 1 \times 5 = 5$$

例 4.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \times \frac{1}{1+\cos x} = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(2)$x \to \infty / -\infty$ 的情况

例.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin(11x^7) - \frac{1}{2}}{2x^4}$$
$$\because -1 \leqslant \sin(11x^7) \leqslant 1$$
$$\therefore -x - \frac{1}{2} \leqslant x\sin(11x^7) - \frac{1}{2} \leqslant x - \frac{1}{2}$$
$$\frac{-x-\frac{1}{2}}{2x^4} \leqslant \frac{x\sin(11x^7) - \frac{1}{2}}{2x^4} \leqslant \frac{x-\frac{1}{2}}{2x^4}$$
而 $\lim_{x\to\infty} \frac{-x-\frac{1}{2}}{2x^4} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} = 0$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-\frac{1}{2}}{2x^4} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x^3} - \frac{1}{4x^4} = 0$$
$\therefore$ 根据夹逼定理
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x\sin(11x^7) - \frac{1}{2}}{2x^4} = 0$$

(3) 其他情况

面对 $x \to a$ 的极限, 而 $a \neq 0$ 时, 使用 $t = x - a$ 作替换, 将问题转化为 $t \to 0$

例.

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$$

设 $t = x - \frac{\pi}{2}$, 则

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{t}$$

$$\because \cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\therefore \cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin(-x) = -\sin x$$

$$\therefore \lim_{t \to 0} \frac{\cos(t + \frac{\pi}{2})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{-\sin t}{t} = -1$$

2. 三角函数的导数

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \cos(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) = -\sin(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan(x) = \sec^2(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot(x) = -\csc^2(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec(x) = \sec(x)\tan(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \csc(x) = -\csc(x)\cot(x)}$$

例 1.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^2 \sin x$$

根据乘积法则:

$u = x^2$, $v = \sin x$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \cos x$

$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = x^2 \cos x + 2x \sin x$

例 2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\sec x}{x^5})$$

根据商法则:

$u = \sec x$, $v = x^5$

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \tan x \sec x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = 5x^4$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2} = \frac{x^5 \tan x \sec x - 5x^4 \sec x}{x^{10}} = \frac{\sec x(x \tan x - 5)}{x^6}$$

例 3.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot x^3$$

根据链式求导法则:

设 $u = x^3$, 则:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u} = -\csc^2 u$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 3x^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -3x^2 \csc^2(x^3)$$

第八章　隐函数求导和相关变化率

1. 隐函数求导

例.

$x^2 + y^2 = 4$

推导过程:

设 $u = y^2$, 则:
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$
原函数两边对 x 求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

2. 隐函数求二阶导数

例.

$2y + \sin(y) = \dfrac{x^2}{\pi} + 1$

推导过程:

设 $u = \sin(y)$, 则:
$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(y)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

原函数两边对 x 求导:

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{\pi} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$$

两边再次对 x 求导:

$$2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{2}{\pi} \quad\Rightarrow\quad 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\sin(y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\cos(y)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow (2+\cos(y))\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\sin(y)(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=\frac{2}{\pi}$$

将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$ 带入结果:

$$(2+\cos(y))\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{\pi}+\sin(y)\left(\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{\pi(2+\cos(y))}+\sin(y)\cdot\frac{4x^2}{\pi^2(2+\cos(y))^3}$$

3. 相关变化率

如果 Q 是某个量, 那么 Q 的变化率是 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

设 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 为两个变量的变化率, 由于 x 和 y 都是关于时间 t 的函数, 所以 x 与 y 必定存在某种关系, 这种关系称为**相对变化率**

求解相关变化率的方法:

(1) 识别出哪一个量需要求相关变化率;

(2) 写出一个关联所有量的方程;

(3) 对方程关于时间 t 做隐函数求导;

(4) 将已知值带入方程中做替换.

例 1.

用打气筒给一个完美球体的气球充气. 空气以常数速率 12π 立方英寸每秒进入气球.

(1) 当气球的半径达到 2 英寸时, 气球的半径的变化率是多少?

(2) 从外, 当气球的体积达到 36π 立方英寸时, 气球的半径的变化率又是多少?

解:

球体体积公式:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

方程对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \tag{i}$$

(1) 将 $r = 2$ 和 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 12\pi$ 代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 2^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}$$

(2) 根据球体体积公式, 得:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

将 $r = 3$ 和 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 12\pi$ 代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 3^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}$$

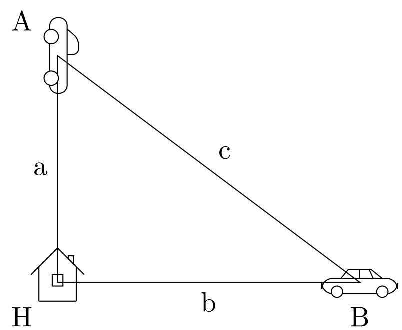
例 2.

假设有两辆汽车 A 和 B. 汽车 A 在一条路上径直向北行驶远离你家, 而汽车 B 在另一条路上径直向西行驶接近你家. 汽车 A 以 55 英里/小时的速度

行驶, 而汽车 B 以 45 英里/小时的速度行驶. 当 A 到达你家北面 21 英里, 而 B 到达你家东面 28 英里时, 两辆汽车间的距离的变化率是多少?

解:

如图.



由图可知:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

对时间 t 作隐函数求导:

$$2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + 2b\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = 2c\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \tag{ii}$$

由于 A 在远离 H, 所以距离随着时间增加:

$\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 55$

而 B 在靠近 H, 所以距离随着时间减少:

$\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = -45$

将结果带入公式(ii), 得:

$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -3$

例 3.

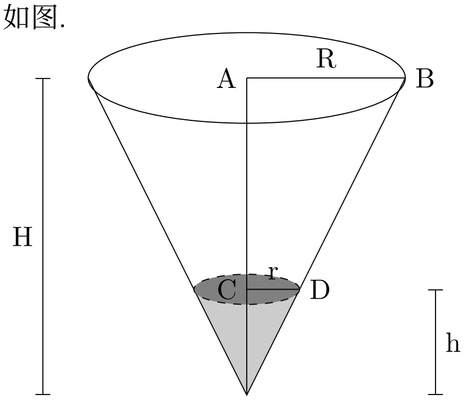
有一个奇怪的巨大的圆锥形水罐 (锥尖在下方), 圆锥的高是圆锥半径的两倍. 如果水是以 8π 立方英尺/秒的速率注入水罐, 求:

(1) 当水罐中水的体积为 18π 立方英尺时, 水位的变化率是多少?

(2) 设想水罐底部有一个小洞, 致使水罐中每一立方英尺的水以一立方英尺每秒的速率流出. 当水罐中水的体积为 18π 立方英尺时, 水位的变化率是多少?

解:

如图.



圆锥体体积公式, 如下:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(1) 将 $V = 18\pi$, $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 得:

$\frac{1}{12}\pi h^3 = 18\pi \quad \Rightarrow \quad h = 6$

将 $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 并对结果两边关于时间 t 隐式求导, 得:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi h^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow\quad 8\pi=9\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{8}{9}$$

(2) 根据 (1) 得:

$$h=6$$

在当前秒, 水罐以 8π 立方英尺/秒注入水, 并以 18π 立方英尺/秒流出水, 所以:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8\pi-18\pi=-10\pi$$

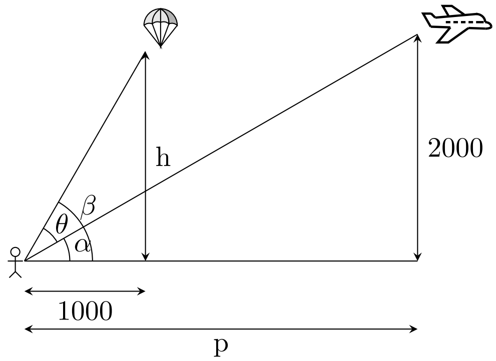
将 $r=\frac{h}{2}$ 代入体积公式, 并对结果两边关于时间 t 隐式求导, 得:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi h^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow\quad -10\pi=9\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\quad\Rightarrow\quad\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{10}{9}$$

例 4.

有一架飞机保持在 2000 英尺的高度远离你朝正东方向飞行. 飞机以 500 英尺每秒的常数速率飞行. 同时, 不久之前有一个跳伞员从直升飞机 (它已经飞走了) 上跳下来. 跳伞员在你东边 1000 英尺处上空垂直地以 10 英尺每秒的常数速率向下飘落, 跳伞员相对于你的方位角与飞机相对于你的方位角之差被标记为 θ. 求当飞机和跳伞员在同一高度, 但飞机在你东边 8000 英尺时, 角 θ 的变化率是多少?

如图.



由图可知:

$$\tan(\alpha) = \frac{2000}{p} \tag{iii}$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{1000} \tag{iv}$$

$$\theta = \beta - \alpha \tag{v}$$

公式(iii)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\sec^2(\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{2000}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad (\tan^2(\alpha)+1)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{2000}{8000^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{32000} \times 500 \times \frac{16}{17} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{68}$$

公式(iv)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\sec^2(\beta)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1000}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad (\tan^2(\beta)+1)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{100} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{100} \times \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{500}$$

公式(v)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{500} + \frac{1}{68} = \frac{-17+125}{8500} = \frac{27}{2125}$$

第九章　指数函数和对数函数

1. 指数与对数

指数法则:

(1) 任意非零数的零次幂是 1. 表示为: $b^0 = 1$

(2) 一个数的一次幂刚好是该数本身. 表示为: $b^1 = b$

(3) 将两个底数相同的幂相乘时, 将指数相加. 表示为: $b^x b^y = b^{x+y}$

(4) 将两个底数相同的幂相除时, 将分子的指数减去分母的指数. 表示为: $\frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

(5) 取幂的幂时, 将指数相乘. 表示为: $(b^x)^y = b^{xy}$

. 对数法则:

(1)1 的对数是 0. 表示为: $\log_b(1) = 0$

(2) 任意正数以该数本身为底的对数是 1. 表示为: $\log_b(b) = 1$

(3) 乘积的对数是对数的和. 表示为: $\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(4) 商的对数是对数的差. 表示为: $\log_b(\frac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(5) 一个数的幂的对数是指数倍该数的对数. 表示为: $\log_b(x^y) = y \log_b(x)$

(6) 一个数的幂为底的对数是指数的倒数倍该数为底的对数. 表示为: $\log_{b^n} x =$

$\frac{1}{n}\log_b x$

(7)　换底法则: 对于任意的底数 $b>1$ 和 $c>1$ 及任意的 $x>1$

$$\log_b(x)=\frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

注: 对数的底取值范围: $(0,1)\bigcup(1,\infty)$

2.e 的定义

e 的取值

$$e=2.718\quad 281\quad 828\quad 459\quad 045\quad \ldots$$

底数为 e 的对数称为**自然对数**

3. 指数与对数的极限

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e}$$

例 1.　$\lim\limits_{x\to 0}(1+h^2)^{\frac{1}{3h^2}}$

推导过程:

$\lim\limits_{x\to 0}(1+h^2)^{\frac{1}{3h^2}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+h^2)\frac{1}{h^2}]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$

例 2.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{e^{\frac{1}{x}}(x^2-7)}$$

推导过程:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+3x-1}{e^{\frac{1}{x}}(x^2-7)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}\frac{2x^2+3x-7}{x^-7}=1\times 2=2$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0}$$

例.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^8+100x^7-4}{e^x}$$

推导过程:

当 $x\to\infty$ 时, $\dfrac{x^8+100x^7-4}{} \backsim \dfrac{x^8}{e^x}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^8+100x^7-4}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^8}{e^x}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^a}=0,\text{ 其中 } a>0}$$

例.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_7(x^3+3x-1)}{x^{0.1}-99}$$

推导过程:

当 $x\to\infty$ 时, $x^3+3x-1\backsim x^3$, $x^{0.1}-99\backsim x^{0.1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log_7(x^3+3x-1)}{x^{0.1}-99}=\lim_{x\to\infty}\frac{\log_7 x^3}{x^{0.1}}=0$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+}x^a\ln(x)=0,\text{ 其中 } a>0}$$

4. 对数和指数求导

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_b(x)=\frac{1}{x\ln(b)}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x)=\frac{1}{x}}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(b^x)=b^x\ln(b)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x)=e^x}$$

5. 取对数求导法

假设

$$y=f(x)^{g(x)}$$

关于 y 的求导步骤, 如下:

1) 等式两边取自然对数, 得:

$$\ln(y)=g(x)\ln(f(x))$$

2) 等式两边关于 x 作隐式求导, 得:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=g'(x)\ln f(x)+\frac{f'(x)}{f(x)}g(x)$$

3) 等式两边乘以 y, 再将 y 替换为 $f(x)^{g(x)}$, 得:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[g'(x)\ln(f(x))+\frac{f'(x)}{f(x)}g(x)]f(x)^{g(x)}$$

例 1. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^{\sin(x)})$

推导过程:

$y=x^{\sin(x)}$

1) 等式两边取自然对数:

$\ln(y)=\sin(x)\ln(x)$

2) 等式两边关于 x 隐式求导:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}$$

3) 等式两边乘以 y, 并将 y 替换为 $x^{\sin(x)}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left[\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right] x^{\sin(x)}$$

例 2.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[(1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}]$$

推导过程:

$y = (1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}$

1) 等式两边取自然对数:

$$\ln(y) = \frac{1}{x^3}\ln(1+x^2)$$

2) 等式两边关于 x 隐式求导:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{3}{x^4}\ln(1+x^2) + \frac{2x}{x^3(1+x^2)} = \frac{2}{x^2(1+x^2)} - \frac{3\ln(1+x^2)}{x^4}$$

3) 等式两边乘以 y, 并将 y 替换为 $(1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}$:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \left[\frac{2}{x^2(1+x^2)} - \frac{3\ln(1+x^2)}{x^4}\right](1+x^2)^{\frac{1}{x^3}}$$

6. 指数增长与指数衰变

(1) 指数增长方程: $P(t) = P_0 e^{kt}$

例.

假如三年前兔子的总数是 1000 只, 而现在增长至 64000 只, 那么从现在开始, 一年后兔子总数是多少?

解答:

由指数增长方程:

$$64000 = 1000e^{3k}$$

$$k = \frac{\ln 64}{3} = 2\ln 2$$

一年后兔子总量:

$P(4) = 1000e^{8\ln 2} = 1000 \times 2^8 = 256000$

(2) 指数衰变方程: $P(t) = P_0 e^{-kt}$

例.

如果原料的半衰期为七年, 开始时有 50 磅原料, 十年后还剩多少磅? 多久之后, 原料会减少到 1 磅?

解答:

由指数衰减方程:

$$P(7) = \frac{1}{2}P_0 = P_0 e^{-kt}$$
$$k = \frac{\ln 2}{7}$$

十年之后剩余的磅数:

$P(10) = P_0 e^{-kt} = 50e^{-\frac{10ln2}{7}}$

原料剩余 1 磅所需要的时间:

$P(t) = 50e^{-\frac{\ln 2}{7}t} = 1$

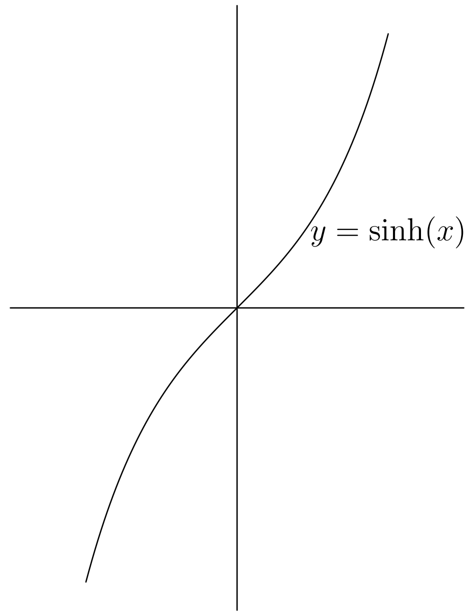
$\frac{\ln 2}{7}t = \ln 50$

$$t = \frac{7\ln 50}{\ln 2}$$

7. 双曲函数

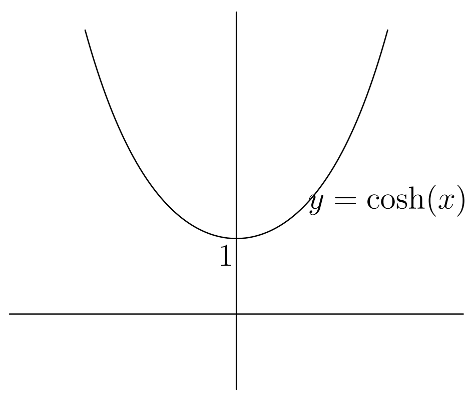
(2) 双曲正弦: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

如图:



(2) 双曲余弦: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

如图:



(3) 双曲线方程: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

第十章　反函数和反三角函数

1. 导数与反函数

如果 f 在其定义域 (a, b) 上可导且满足以下条件中的任意一条:

(1) 对于所有的在 (a, b) 中的 x, $f'(x) > 0$;

(2) 对于所有的在 (a, b) 中的 x, $f'(x) < 0$;

(3) 对于所有的在 (a, b) 中的 x, $f'(x) \geqslant 0$ 且对于有限个数的 x, $f'(x) = 0$;

(4) 对于所有的在 (a, b) 中的 x, $f'(x) \leqslant 0$ 且对于有限个数的 x, $f'(x) = 0$.

则 f 有反函数.

反函数的导数:

$$\boxed{\text{如果 } y = f^{-1}(x), \text{ 则 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

例.

$h(x) = x^3$, 如果 $y = h^{-1}(x)$, 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

推导过程:

$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{(y^3)'} = \dfrac{1}{3y^2}$

$y = h^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}$

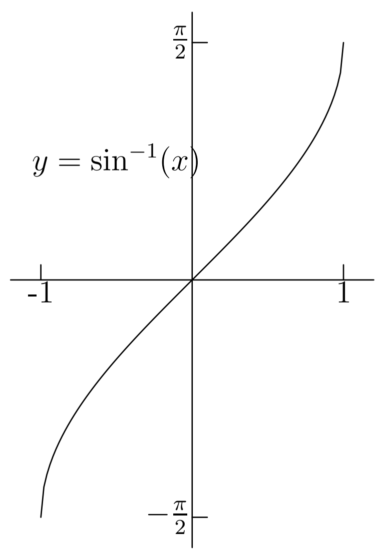
$\therefore \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3y^2} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$

2. 反三角函数

(1)$\sin^{-1}$ 是奇函数; 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(2)$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $-1 < x < 1$.

如图:



例.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x)$

推导过程:

$\because y = \sin^{-1}(x)$, 即 $x = \sin(y)$; $\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos(y)}$

$\because \cos(y) = \pm\sqrt{1-\sin^2 y}$, 并且 $\sin^{-1}(x)$ 斜率在 $(-1, 1)$ 上恒为正

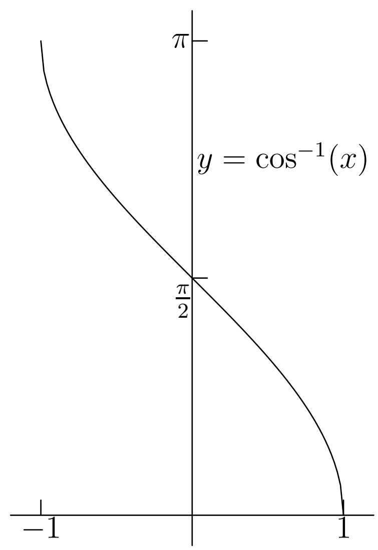
$\therefore \cos(y) = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x) = \dfrac{1}{\cos(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(3)$\cos^{-1}$ 既不是偶函数也不是奇函数; 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$.

(4)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $-1 < x < 1$.

如图:



例.

$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}(x)$

推导过程:

$\because y = \cos^{-1}(x)$, 即 $x = \cos(y)$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = -\dfrac{1}{\sin(y)}$

$\because \sin(y) = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$, 并且 $\cos^{-1}(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上恒为负

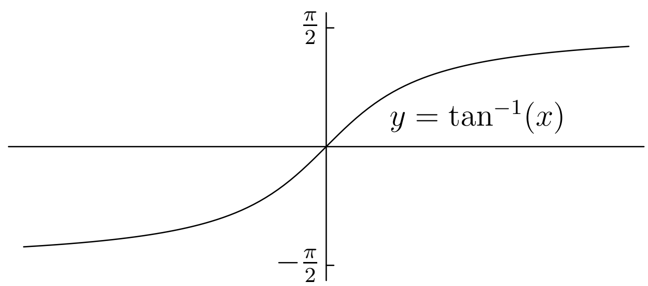
$\therefore \sin(y) = \sqrt{1-\cos^2 y} = \sqrt{1-x^2}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sin(y)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(5)$\tan^{-1}$ 是奇函数; 其定义域是 $\mathbb{R}$ 且值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(6) 对于所有的实数 x, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

如图:



例.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x)$$

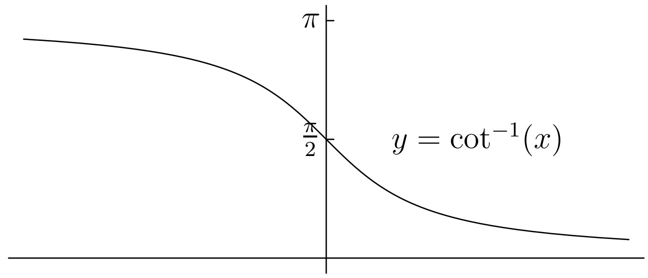
推导过程:

$\because y = \tan^{-1}(x)$, 即 $x = \tan(y)$

$$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

(7)$\cot^{-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域为 $\mathbb{R}$ 且值域是 $(0, \pi)$

(8) 对于所有的实数 x, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



例.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1}(x)$$

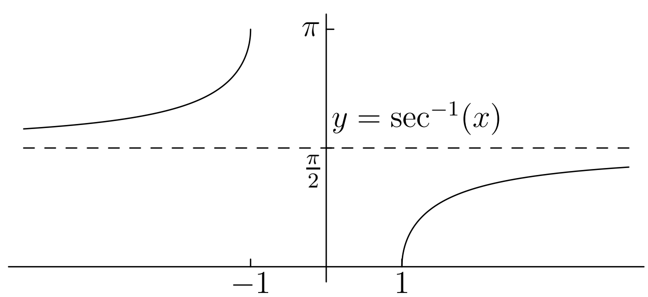
推导过程:

$\because y = \cot^{-1}(x)$, 即 $x = \cot(y)$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = -\dfrac{1}{\csc^2 y} = -\dfrac{1}{1+\cot^2 y} = -\dfrac{1}{1+x^2}$

(9)$\sec^{-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 且值域是 $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

(10) 对于 $x > 1$ 或 $x < -1$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.



例.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x)$

推导过程:

$\because y = \sec^{-1}(x)$, 即 $x = \sec(y)$

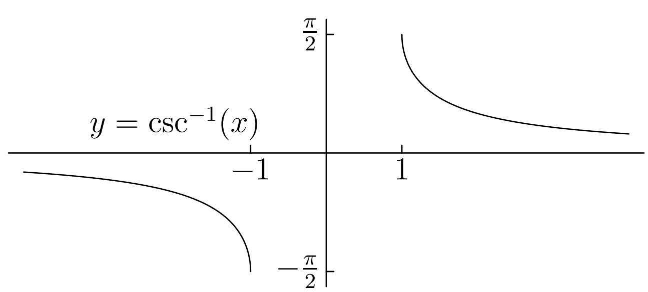
$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\tan(y)\sec(y)}$

$\because \tan(y) = \pm\sqrt{\sec^2 y - 1}$, 并且 $\sec^{-1}(x)$ 的斜率在 $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 恒为正

$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x) = \frac{1}{\tan(y)\sec(y)} = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

(11)$\csc^{-1}$ 是奇函数; 其定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 且值域是 $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

(12) 对于 $x > 1$ 或 $x < -1$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.



例.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1}(x)$

推导过程:

$\because y = \csc^{-1}(x)$, 即 $x = \csc(y)$

$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{1}{\cot(y)\csc(y)}$

$\because \cot(y) = \pm\sqrt{\csc^2 y - 1}$, 并且 $\csc^{-1}(x)$ 的斜率在 $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ 上恒

为负

$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1}(x) = -\frac{1}{\cot(y)\csc(y)} = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

计算反三角函数

例 1.

$\sin^{-1}(\sin(\frac{13\pi}{10}))$

推导过程:

$\because \frac{13\pi}{10}$ 在第三象限

$\therefore \sin(\frac{13\pi}{10}) < 0$ 且参考角为 $(\frac{13\pi}{10} - \pi) = \frac{3\pi}{10}$

$\because \sin^{-1}(x)$ 的值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$\therefore$ 当 $\sin^{-1}(x)$ 的 $x < 0$ 时, $\sin^{-1}(x) \in [-\frac{\pi}{2}, 0)$

$\therefore$ 参考角为 $\frac{3\pi}{10}$, 并且在区间 $[-\frac{\pi}{2}, 0)$ 内的角为 $-\frac{3\pi}{10}$

例 2.

$\cos^{-1}(\cos(\frac{13\pi}{10}))$

推导过程:

$\because \frac{13\pi}{10}$ 在第三象限

$\therefore \cos(\frac{13\pi}{10}) < 0$ 且参考角为 $\frac{3\pi}{10}$

$\because \cos^{-1}(x)$ 的值域为 $[0, \pi]$

$\therefore$ 当 $\cos^{-1}(x)$ 的 $x < 0$ 时, $\cos^{-1}(x) \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$

$\therefore$ 参考角为 $\frac{3\pi}{10}$, 并且在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 的角为 $(\pi - \frac{3\pi}{10}) = \frac{7\pi}{10}$

例 3.

$\sin(\sin^{-1}(-\frac{1}{5}))$

推导过程:

$\because \sin(\sin^{-1}(x)) = x$

$\therefore \sin(\sin^{-1}(-\frac{1}{5})) = -\frac{1}{5}$

例 4.

$\sin(\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{15}}{4}))$

推导过程:

$\because \cos^{-1}(x) \in [0, \pi]$, 并且 $-\frac{\sqrt{15}}{4} < 0$

$\therefore \cos^{-1}(-\frac{\sqrt{15}}{4})$ 在第二象限

$\because \cos(\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{15}}{4})) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$ 且 $\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{15}}{4})$ 在第二象限

设 $t = \cos^{-1}(x)$, 则:

$\sin(t) = \sqrt{1 - \cot^2 t} = \sqrt{1 - \frac{15}{16}} = \frac{1}{4}$

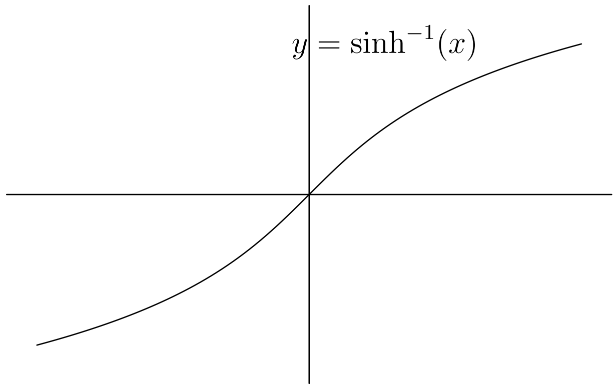
即 $\sin(\cos^{-1}(-\frac{\sqrt{15}}{4})) = \frac{1}{4}$

3. 反双曲函数

(1)$\sinh^{-1}$ 是奇函数; 其定义域和值域都是 $\mathbb{R}$.

(2) 对于所有的实数 x, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

如图.



例.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x)$$

推导过程:

$\because y = \sinh^{-1}(x)$, 即 $x = \sinh(y)$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x) = \dfrac{1}{f'(y)} = \dfrac{1}{\cosh(y)}$

$\because \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, 并且 $\cosh(y)$ 在 $(0,\infty)$ 上恒为正

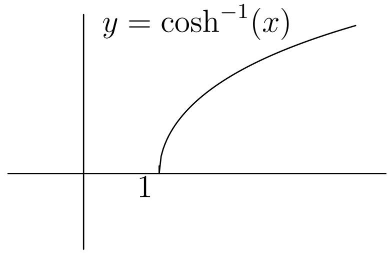
$\therefore \cosh(y) = \sqrt{1+\sinh^2 y} = \sqrt{1+x^2}$

$\therefore \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\cosh(y)} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(3)$\cosh^{-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是 $[1,\infty)$ 且值域是 $[0,\infty)$.

(4) 对于 $x>1$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

如图.



例.

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}(x)$

推导过程:

$\because y = \cosh^{-1}(x)$, 即 $x = \cosh(y)$

$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\sinh(y)}$

$\because \cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$, 并且 $\sinh(y)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上恒为正

$\therefore \sinh(y) = \sqrt{\cosh^2 y - 1} = \sqrt{x^2 - 1}$

$\therefore \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sinh(y)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$

第十一章　导数和图像

1. 函数的极值

> **极值定理** 假设函数 f 定义在开区间 (a,b) 内, 并且点 c 在 (a,b) 区间内. 如果点 c 为函数的局部最大值或最小值, 那么点 c 一定为该函数的临界点. 也就是说, $f'(c)=0$ 或 $f'(c)$ 不存在.

求解闭区间 $[a,b]$ 内的全局最大值和最小值步骤:

(1) 求出 $f'(x)$, 并列出在 (a,b) 中 $f'(x)$ 不存在或 $f'(x)=0$ 的点. 也就是说, 列出在开区间 (a,b) 内所有的临界点.

(2) 把端点 $x=a$ 和 $x=b$ 放入列表.

(3) 对于上述列表中的每个点, 将它们带入 $y=f(x)$ 求出对应函数值.

(4) 找出最大的函数值以及它所对应的 x 值, 得到全局最大值.

(5) 类似于 (4), 得到全局最小值.

2. 罗尔定理

罗尔定理 假设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续, 在开区间 (a,b) 内可导. 如果 $f(a)=f(b)$, 那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 c, 使得 $f'(c)=0$.

3. 中值定理

中值定理 假设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续, 在开区间 (a,b) 内可导, 那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 c 使得

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

如果对于在定义域 (a,b) 内的所有 x, 都有 $f'(x)=0$, 那么函数 f 在开区间 (a,b) 内为常数函数.

如果对于任意实数 x 都有 $f'(x)=g'(x)$, 那么有 $f(x)=g(x)+C$(C 为常数).

4. 二阶导数与图像

如果 $x=c$ 点是函数 f 的拐点, 则有 $f''(c)=0$.

如果 $f''(c)=0$, 则 c 点不一定都是函数 f 的拐点.

5. 导数为零的汇总

纯 1 阶导数分析 - 假设 $f'(c)=0$, 此时情况如下:

(1) 如果从左往右通过 c 点, $f'(x)$ 的符号由正变负, 那么 c 点为局部最大值;

(2) 如果从左往右通过 c 点, $f'(x)$ 的符号由负变正, 那么 c 点为局部最小值;

(3) 如果从左往右通过 c 点, $f'(x)$ 的符号不发生变化, 那么 c 点为水平拐点.

1/2 阶导数综合分析 - 假设 $f'(x) = 0$, 则有:

(1) 如果 $f''(c) < 0$, 那么 $x = c$ 为局部最大值;

(1) 如果 $f''(c) > 0$, 那么 $x = c$ 为局部最小值;

(1) 如果 $f''(c) = 0$, 那么无法判断, 需借助纯 1 阶分析

第十二章　绘制函数图像

1. 建立原函数的符号表格

(1) 建立一个两行的表格, 第一行为 x 取值, 第二行为 $f(x)$ 对应值;

(2) 在第一行以递增顺序列出 x 所有的关于 $f(x)$ 的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;

(3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以'*' 填充;

(4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;

(5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应 $f(x)$ 的值, 大于 0 则填上'+', 小于 0 则填上'-'.

2. 建立一阶导数的符号表格

(1) 建立一个三行行的表格, 第一行为 x 取值, 第二行为 $f'(x)$ 对应值, 第三行为趋势图;

(2) 在第一行以递增顺序列出 x 所有的关于 $f'(x)$ 的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;

(3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以'*' 填充;

(4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;

(5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应 $f'(x)$ 的值, 大于 0 则填上'+', 小于 0 则填上'-';

(6) 在第三行根据第二行的内容, 在该列填上对应内容, '+' 对应'/', '0' 对应'—', '-' 对应'.

3. 建立二阶导数的符号表格

(1) 建立一个两行的表格, 第一行为 x 取值, 第二行为 $f''(x)$ 对应值, 第三行为趋势图;

(2) 在第一行以递增顺序列出 x 所有的关于 $f''(x)$ 的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;

(3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以'*' 填充;

(4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;

(5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应 $f'(x)$ 的值, 大于 0 则填上'+', 小于 0 则填上'-';

(6) 在第三行根据第二行的内容, 在该列填上对应内容, '+' 对应' '', '0' 对应'.', '-' 对应' '.

4. 绘制函数图像的完整步骤

(1) 对称性 - 通过 $-x$ 替换 x, 来验证函数的奇偶性;

(2)y 轴截距 - 通过 $x=0$ 来求 y 轴截距;

(3)x 轴截距 - 通过 $y = 0$ 来求 x 轴截距;

(4) 定义域 - 除已直接给出定义域的情况, 可剔除使得分母为 0、偶数根号下的量为负数、对数符号里的量为负数或 0 的数, 并且反三角函数也需注意;

(5) 垂直渐近线 - 分母为 0 且分子不为 0 的位置, 或对数式;

(6) 函数的正负 - 建立关于 $f(x)$ 的符号表格;

(7) 水平渐近线 - 通过计算 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 来找出函数的水平渐近线; (8) 导数的正负 - 绘制关于一阶导数的符号表格;

(9) 最大值和最小值 - 根据 (8) 的符号表格, 计算所有局部最大/小值, 找出全局最大/小值;

(10) 二阶导数的正负 - 绘制关于二阶导数的符号表格;

(11) 拐点 - 拐点的二阶导数为 0, 并且在该点两侧导数的正反符号相反.

第十三章　最优化和线性化

1. 最优化方案

(1) 识别可能用到的所有变量;

(2) 在极端情况下, 变量的取值范围;

(3) 列出关联不同变量的方程组;

(4) 通过方程组消去变量, 使得因变量 (目标) 可以表示为只关于一个自变量的函数;

(5) 对因变量关于自变量求导, 找出临界点;

(6) 通过一阶或二阶导数的符号表格求出最大值或最小值;

(7) 得出最终结论.

2. 线性化方案

(1) 将估算量写成适当的函数 $f(x)$, 则当前值为 $f(a)$;

(2) 选取某个与值 a 接近的自变量值 b, 并且 $f(b)$ 便于计算;

(3) 找出通过曲线 $f(x)$ 上点 $(b, f(b))$ 的切线, 方程为: $g(x)-f(b) = f'(b)(x-b)$;

(4) 最后结果 $f(x) \approx g(x) = f'(b)(x-b) + f(b)$, 函数 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 在

$x = b$ 处的**线性化**.

3. 近似估算 - 牛顿法

牛顿法 假设 a 是对方程 $f(x) = 0$ 的解的一个近似. 如果令

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

则在很多情况下, b 是个比 a 更好的近似.

牛顿法不起作用的四个情况:

(1)$f'(a)$ 的值接近于 0;

(2) 如果 $f(x) = 0$ 有不止一个解, 可能得到的不是你想要的那个解;

(3) 近似可能变得越来越糟. 如: $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

(4) 陷入循环.

第十四章　洛必达法则及极限问题

总结

1. 类型 A: $\dfrac{0}{0}$

$$\boxed{\text{如果 } f(a)=g(a)=0, \text{ 那么 } \lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

例.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}$$

2. 类型 A: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\boxed{\text{如果 } f(a)=g(a)=\pm\infty, \text{ 那么 } \lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

例 1.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x}{2x^2-5}$$
$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+7x}{2x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x+7}{4x}=\lim_{x\to\infty}(\frac{6}{4}+\frac{7}{4x})=\frac{3}{2}$$

例 2.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\csc x}{1-\ln x}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\csc x}{1-\ln x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\csc x\cot x}{-\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\sin x}\frac{1}{\tan x}=1\times\infty=\infty$$

例 3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

3. 类型 $B1$: $\infty-\infty$

方法: 通过通分或者分子/分母同时乘以共轭表达式来转化为类型 A

例.

$$\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x})&=\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x+x\cos x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\cos x-x\sin x}=0\end{aligned}$$

4. 类型 $B2$: $0\times\pm\infty$

方法: 选择两个因式中较简单的那个取倒数把它移到分母 (尽量不要选用对数做分母, 把它留在分子)

例.

$$\lim_{x\to 0^+}x\ln x$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

5. 类型 C: $1^{\pm\infty}$,0^0,∞^0

通过取对数, 转化为类型 $B2$ 或 A, 计算获得极限 L, 再以 e 为底/L 为幂获取最终结果

例 1.

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} \ln(x^{\sin x}) &= \lim_{x\to 0^+} \sin x \ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\csc x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\csc x \cot x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} -\frac{\sin x}{x} \times \tan x = 0\end{aligned}$$

对两边求指数, 得:

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = e^0 = 1$$

例 2.

$$\lim_{x\to 0}(1+3\tan x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \ln((1+3\tan x)^{\frac{1}{x}}) &= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3\tan x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{3\sec^2 x}{1+3\tan x}}{1} \\ &= \frac{3\times 1^2}{1+3\times 0} = 3\end{aligned}$$

对两边求指数, 得:

$$\lim_{x\to 0}(1+3\tan x)^{\frac{1}{x}} = e^3$$

第十五章　积分

如下公式:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$$

代表从 $j = 1$ 到 $j = n$ 时, $\dfrac{1}{j^2}$ 的和.

n 为唯一**变量**.

j 为**虚拟变量**, 也称为**求和指标**.

常用求和公式:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{j=1}^{b} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

第十六章　定积分

1. 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

为**定积分**, 表示 “函数 $f(x)$ 对于 x 从 a 到 b 的积分”.

$f(x)$ 为**被积函数**.

a 和 b 为**积分极限**, 也称为**积分端点**.

2. 有向面积积分:

$\boxed{\text{$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是由曲线 $y = f(x)$, 两条垂线 $x = a$ 和 $x = b$, 以及 x 轴所围成的有向面积 (平方单位).}}$

3. 定积分公式:

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

$$\boxed{\int_a^b Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

4. 两条曲线之间的面积:

在函数 f 和 g 之间的面积 (平方单位)$=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x.$

5. 曲线与 y 轴围成的面积:

如果 f 存在反函数, $\int_A^B f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 就是由函数 $y=f(x)$、直线 $y=A$ 和 $y=B$ 以及 y 轴所围成的面积 (平方单位).

6. 积分比较:

如果对于在区间 $[a,b]$ 内的所有 x 都有 $f(x)\leqslant g(x)$, 那么就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 简单估算:

如果对于在 $[a,b]$ 区间内的所有 x 有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$, 那么

$$m(b-a)\leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

8. 积分的平均值:

函数 f 在区间 $[a,b]$ 内的平均值 $=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$

9. 积分的中值定理:

$\boxed{\text{如果函数 } f \text{ 在闭区间 } [a,b] \text{ 上连续, 那么在开区间 } (a,b) \text{ 内总有一点 } c\text{, 满足 } f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$

第十七章　微积分的基本定理

1. 第一基本定理

> **微积分的第一基本定理**: 如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的，定义 F 为
>
> $$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$
>
> 则 F 在开区间 (a,b) 内是可导函数，而且 $F'(x)=f(x)$.

2. 第二基本定理

> **微积分的第二基本定理**: 如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的，F 是 f 的任意一个反导数 (关于x)，那么有
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

3. 不定积分法则

$$\boxed{\text{如果 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x), \text{ 那么 } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.}$$

4. 不定积分运算法则

$$\boxed{\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int Cf(x)\,\mathrm{d}x = C \int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

5. 微分和积分对照公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a = ax^{a-1} \qquad \int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \qquad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b^x = b^x\ln(b) \qquad \int b^x\,\mathrm{d}x = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x) \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \sec^2(x) \qquad \int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec(x) = \sec(x)\tan(x) \qquad \int \sec(x)\tan(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\csc^2(x) \qquad \int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x) \qquad \int \csc(x)\cot(x)\,\mathrm{d}x = -\csc(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-1}(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1}(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \sec^{-1}(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x) \qquad \int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

第十八章　积分的方法 I

1. 换元法 (链式求导的逆)

$$\boxed{\int f'(x)g(f(x))\,\mathrm{d}x = h(f(x)) + C.}$$

例 1.

$\displaystyle\int \frac{x}{x^2+8}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+8) = 2x$

$\therefore$ 使用换元法, 设 $t = x^2+8$.

得到 $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$

$\therefore \displaystyle\int \frac{x}{x^2+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+8| + C$

例 2.

$\displaystyle\int \frac{3x^2+7}{x^3+7x+9}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3+7x-9)=3x^2+7$

$\therefore$ 使用换元法, 设 $t=x^3+7x-9$.

得到 $\mathrm{d}t=(3x^2+7)\,\mathrm{d}x$

$\therefore \displaystyle\int \frac{3x^2+7}{x^3+7x-9}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}=\ln|t|+C=\ln|x^3+7x-9|+C$

2. 分部积分法 (乘法求导法则的逆)

$$\boxed{\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=uv-\int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.}$$

例 1.

$\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x$

推导过程:

设 $u=x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=e^x$, 则:

$v=e^x$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1$

$\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x=xe^x-\int e^x\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int xe^x\,\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$

例 2.

$\displaystyle\int \ln x\,\mathrm{d}x$

推导过程:

设 $u=\ln x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=1$, 则:

$v = x$, $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}$

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$$

总结:

1. 内容存在 sin/cos 或 e^x 时, 视为已微分部分

2. 内容存在 ln 时, 视为未微分部分

3. 内容不存在乘积时, 整个内容视为未微分部分

3. 部分分式 (有理函数积分)

有理函数: 形如 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的函数

部分分式处理步骤:

(1) 确保分子的次数小于分母的次数, 如有必要 (分子次数 $\geqslant$ 分母次数) 做除法;

(2) 对分母进行因式分解;

(3) 进行” 分部”(将分母按隐式分解进行拆分). 分部类别如下:

1) 线性式:

$$\frac{mx+n}{(x+a)(x+b)}=\frac{A}{x+a}+\frac{B}{x+a}$$

2) 线性式的平方:

$$\frac{mx+b}{(x+a)^2}=\frac{A}{(x+a)^2}+\frac{B}{x+a}$$

3) 二次多项式:

$$\frac{Ax+B}{x^2+ax+b}$$

4) 线性式的三次方:

$$\frac{mx^2+nx+k}{(x+a)^3}=\frac{A}{(x+a)^3}+\frac{B}{(x+a)^2}+\frac{C}{x+a}$$

5) 线性式的四次方:

$$\frac{mx^3+nx^2+kx+h}{(x+a)^4}=\frac{A}{(x+a)^4}+\frac{B}{(x+a)^3}+\frac{C}{(x+a)^2}+\frac{D}{x+a}$$

(4) 对各分部进行通分, 计算分部中 A/B/C/D 等常数项的值;

(5) 对各分部进行积分

1) 分母为单项, 该项为 x 的幂 - 积分结果为对数或 x 的负次幂;

2) 分母为二次多项式 - 对分母先进行配方, 然后进行换元, 最后根据分子的项数, 拆分为多个积分

$$\int\frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{x}{a})+C$$

例.

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

对分母 x^2-1 进行因式分解:

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

进行分部:

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

求分子常数的值:

$$A(x-1)+B(x+1)=x+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2}, B=\frac{3}{2}$$

求解分母为线性次幂的积分:

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

第十九章　积分的方法 II

1. 三角恒等式相关

1) 倍角公式

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$$
$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

例.

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

由 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, 得:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin x|\,\mathrm{d}x$

$\because \sin x$ 在 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 值恒为非负

$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$

2) 毕达哥拉斯定理

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$$

$$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$$

例.

$$\int \frac{1}{\sec x + 1}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

分子分母同时乘以共轭表达式

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\sec x+1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sec x+1} \times \frac{\sec x-1}{\sec x-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec x-1}{\sec^2 x-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sec x-1}{\tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{\tan^2 x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$\because \int \frac{\sec x}{\tan^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \cot x \csc x\,\mathrm{d}x = -\csc x + C$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{\tan^2 x}\,\mathrm{d}x &= \int \cot^2 x\,\mathrm{d}x = \int (\csc^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \csc^2 x\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x \\
&= -\cot x - x + C
\end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sec x+1}\,\mathrm{d}x = -\csc x - \cot x - x + C$$

3) 角和/差公式

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) + \cos(A+B))$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}(\sin(A-B) + \sin(A+B))$$

例.

$$\int \cos 3x \sin 19x\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}
\because \sin 19x \cos 3x &= \frac{1}{2}(\sin(19x-3x) + \sin(19x+3x)) \\
&= \frac{1}{2}(\sin 16x + \sin 22x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \cos 3x \sin 19x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \sin 16x \,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \sin 22x \,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{32}\cos 16x - \frac{1}{44}\cos 22x + C\end{aligned}$$

2. 三角函数幂的积分

1)sin 的幂 (cos 类似)

I、一次幂

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C$$

II、二次幂

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C\end{aligned}$$

III、三次幂及以上的奇次幂解题思路:

提取单次项与 dx 合并 (用于换元), 剩余部分利用 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ 进行转化

例.

$$\int \sin^7 x \,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $t = \cos x$, 则 $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \sin^7 x \,\mathrm{d}x &= -\int (1-\cos^2 x)^3 \sin x \,\mathrm{d}x = -\int (1-t^2)^3 \,\mathrm{d}t \\ &= -\int (1-3t^2+3t^4-t^6)\,\mathrm{d}t \\ &= -(t - t^3 + \frac{3}{5}t^5 - \frac{1}{7}t^7) + C\end{aligned}$$

$$= -\cos x + \cos^3 x - \frac{3}{5}\cos^5 x + \frac{1}{7}\cos^7 x + C$$

IV、四次幂及以上的偶次幂

例.

$$\int \sin^6 x \,\mathrm{d}x$$

①使用倍角公式

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{8}(1-\cos 2x)^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}\int (1-3\cos 2x+3\cos^2 2x-\cos^3 2x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{1}{8}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{8}\int \cos 2x \,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\because \int \cos^2 2x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\int \mathrm{d}x + \int \cos 4x \,\mathrm{d}x) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\sin 4x + C\end{aligned}$$

$$\int \cos^3 2x \,\mathrm{d}x = \int (1-\sin^2 2x)\cos 2x \,\mathrm{d}x$$

设 $t = \sin 2x$, 则 $\mathrm{d}t = 2\cos 2x \,\mathrm{d}x$

$$\int \cos^3 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1-t^2)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3 + C = \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \sin^6 x \,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int \mathrm{d}x - \frac{3}{8}\int \cos 2x \,\mathrm{d}x + \frac{3}{8}\int \cos^2 2x \,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + \frac{3}{8}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x) - \frac{1}{8}(\frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x) + C \\ &= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{3}{64}\sin 4x + C\end{aligned}$$

②使用分部积分

设 $u = \sin^5 x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \sin x$, 则:

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 5\sin^4 x \cos x$, $v = -\cos x$

$$\begin{aligned}\int \sin^6 x \,\mathrm{d}x &= -\sin^5 x \cos x + \int 5\sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^5 x \cos x + 5\int \sin^4 x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\sin^5 x \cos x + 5\int \sin^4 x \,\mathrm{d}x - 5\int \sin^6 x \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将 $5\int \sin^6 x\,\mathrm{d}x$ 移动到等式左侧, 得:

$\int \sin^6 x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$

设 $h = \sin^3 x\,\mathrm{d}x$, $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x} = \sin x$, 则:

$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x} = 3\sin^2 x\cos x$, $k = -\cos x$

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x\\ &= -\sin^3 x\cos x + 3\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x - 3\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将 $3\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x$ 移动到等式左侧, 得:

$$\begin{aligned}\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{4}(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x) + C\\ &= -\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \int \sin^6 x\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}\int \sin^4 x\,\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x + \frac{5}{6}(-\frac{1}{4}\sin^3 x\cos x + \frac{3}{8}x - \frac{3}{16}\sin 2x) + C\\ &= -\frac{1}{6}\sin^5 x\cos x - \frac{5}{24}\sin^3 x\cos x + \frac{5}{16}x - \frac{5}{32}\sin 2x + C\\ &= -\frac{1}{48}(1-\cos 2x)^2\sin 2x - \frac{5}{96}(1-\cos 2x)\sin 2x + \frac{5}{16}x - \frac{5}{32}\sin 2x + C\\ &= -\frac{1}{48}(2\sin 2x - \sin 4x - \sin^3 2x) - \frac{5}{96}\sin 2x + \frac{5}{192}\sin 4x + \frac{5}{16}x - \frac{5}{32}\sin 2x + C\\ &= \frac{5}{16}x - (\frac{1}{24} + \frac{5}{96} + \frac{5}{32})\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + (\frac{1}{48} + \frac{5}{192})\sin 4x\\ &= \frac{5}{16}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + \frac{3}{64}\sin 4x\end{aligned}$$

V、sin 与 cos 混合, 并且至少其中一个为奇次幂

解题思路:

提取奇数幂项的单次幂与 $\mathrm{d}x$ 放置一起 (当两个都为奇次幂时, 提取次方幂

小的项)

例.

$$\int \cos^7 x \sin^{10} x \, \mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $t = \sin x$, 则 $\mathrm{d}t = \cos x \, \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \cos^7 x \sin^{10} x \, \mathrm{d}x &= \int (1 - \sin^2 x)^3 \sin^{10} x \cos x \, \mathrm{d}x = \int (1 - t^2) \, \mathrm{d}t \\ &= \int (t^{10} - 3t^{12} + 3t^{14} - t^{16}) \, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{11} t^{11} - \frac{3}{13} t^{13} + \frac{1}{5} t^{15} - \frac{1}{17} t^{17} + C\end{aligned}$$

将 $t = \sin x$ 代入上式:

$$\int \cos^7 x \sin^{10} x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{11} \sin^{11} x - \frac{3}{13} \sin^{13} x + \frac{1}{5} \sin^{15} x - \frac{1}{17} \sin^{17} x + C$$

VI、sin 与 cos 混合, 并且都为偶次幂

解题思路:

使用倍角公式, 降低次幂

例.

$$\int \cos^2 x \sin^4 x \, \mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x \sin^4 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x)(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x - \cos^2 2x + \cos^3 2x) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8} \int \mathrm{d}x - \int \cos 2x \, \mathrm{d}x - \int \cos^2 2x \, \mathrm{d}x + \int \cos^3 2x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\because \int \cos^2 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x + C$$

$$\begin{aligned}\int \cos^3 2x \, \mathrm{d}x &= \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x \, \mathrm{d}x = \int \cos 2x \, \mathrm{d}x - \int \sin^2 2x \cos 2x \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x - \int \sin^2 2x \cos 2x \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

设 $t = \sin 2x$, 则 $\mathrm{d}t = 2\cos 2x \, \mathrm{d}x$

$$\therefore \int \cos^3 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\int t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t - \frac{1}{6}t^3 + C$$
$$= \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x + C$$
$$\therefore \int \cos^2 x \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{8}(x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{6}\sin^3 2x) + C$$
$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{48}\sin^3 2x - \frac{1}{64}\sin 4x + C$$

2)tan 的幂 (cot 类似)

I、一次幂

$\tan x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{\cos x} - \sin x \,\mathrm{d}x$

设 $t = \cos x$, 则 $\mathrm{d}t = -\sin x \,\mathrm{d}x$

$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

II、二次幂及以上次幂

解题思路:

依次提取 $\tan^2 x$, 转化为 $\sec^2 x - 1$

例.

$$\int \tan^7 x \,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\int \tan^7 x \,\mathrm{d}x = \int \tan^5 x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x = \int \tan^5 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan^5 x \,\mathrm{d}x$$
$$= \int \tan^5 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int \tan^5 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan^3 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x + \int \tan^3 x \,\mathrm{d}x$$
$$= \int \tan^5 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan^3 x \sec^2 x \,\mathrm{d}x + \int \tan x \sec^2 x \,\mathrm{d}x - \int \tan x \,\mathrm{d}x$$

设 $t = \tan x$, 则 $\mathrm{d}t = \sec^2 x \,\mathrm{d}x$

$$\int \tan^5 x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int t^5 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^6 + C$$
$$\int \tan^3 x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int t^3 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C$$
$$\int \tan x \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \int t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t^2 + C$$
$$\begin{aligned}\therefore \int \tan^7 x \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{4}t^4 + \frac{1}{2}t^2 + \ln|\cos x| + C \\ &= \frac{1}{6}\tan^6 x - \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C\end{aligned}$$

总结:

$$I_n = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - I_{n-2}$$

3)sec 的幂 (csc 类似)

I、一次幂

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \sec x \times \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, \mathrm{d}x = \int \frac{\sec^2 x + \tan x \sec x}{\sec x + \tan x} \, \mathrm{d}x$$

设 $t = \sec x + \tan x$, 则 $\mathrm{d}t = (\tan x \sec x + \sec^2 x) \, \mathrm{d}x$

$$\int \sec x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{t} \, \mathrm{d}t = \ln|t| + C = \ln|\sec x + \tan x| + C$$

II、二次幂

$$\int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C$$

III、三次幂及以上次幂

解题思路:

提取 $\sec^2 x$, 应用分部积分法, 将其视为 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ 部分

例.

$\sec^6 x \, \mathrm{d}x$

推导过程:

设 $u=\sec^4 x$, $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\sec^2 x$, 则:

$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=4\sec^4 x\tan x$, $v=\tan x$

$$\begin{aligned}\int\sec^6 x\,\mathrm{d}x&=\sec^4 x\tan x-4\int\sec^4 x\tan^2 x\,\mathrm{d}x\\&=\sec^4 x\tan x-4\int\sec^4 x(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x\\&=\sec^4 x\tan x-4\int\sec^6 x\,\mathrm{d}x+4\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将 $4\int\sec^6 x\,\mathrm{d}x$ 移动到等式左侧, 得:

$$\int\sec^6 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{5}\sec^4 x\tan x+\frac{4}{5}\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x$$

设 $h=\sec^2 x$, $\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}x}=\sec^2 x$, 则:

$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}=2\sec^2 x\tan x$, $k=\tan x$

$$\begin{aligned}\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x&=\sec^2 x\tan x-2\int\sec^2 x\tan^2 x\,\mathrm{d}x\\&=\sec^2 x\tan x-2\int\sec^2 x(\sec^2 x-1)\,\mathrm{d}x\\&=\sec^2 x\tan x-2\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x+2\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

将 $2\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x$ 移动到等式左侧, 得:

$$\int\sec^4 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sec^2 x\tan x+\frac{2}{3}\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned}\therefore\int\sec^6 x\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{5}\sec^4 x\tan x+\frac{4}{5}(\frac{1}{3}\sec^2 x\tan x+\frac{2}{3}\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x)\\&=\frac{1}{5}\sec^4 x\tan x+\frac{4}{15}\sec^2 x\tan x+\frac{8}{15}\int\sec^2 x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{5}\sec^4 x\tan x+\frac{4}{15}\sec^2 x\tan x+\frac{8}{15}\tan x+C\end{aligned}$$

3. 三角换元法的积分

1)$\sqrt{a^2-x^2}$ 的奇次幂

解题思路:

设 $x=a\sin\theta$, 将 x 的积分转化为 θ 的积分

例.

$$\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $x = 3\sin\theta$, 则 $\mathrm{d}t = 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{9\sin^2\theta}{27\cos^3\theta} \times 3\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \int \tan^2\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\int (\sec^2\theta - 1)\,\mathrm{d}\theta = \tan\theta - \theta + C$$

$\because \sin\theta = \dfrac{x}{3}$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$, $\theta = \sin^{-1}(\frac{x}{3})$

$\therefore \displaystyle\int \frac{x^2}{(9-x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{9-x^2} - \sin^{-1}(\frac{x}{3})} + C$

2)$\sqrt{x^2+a^2}$ 的奇次幂

解题思路:

设 $x = a\tan\theta$, 将 x 的积分转化为 θ 的积分

例.

$$\int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $x = \sqrt{15}\tan\theta$, 则 $\mathrm{d}x = \sqrt{15}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(\sqrt{15}\sec\theta)^5} \times \sqrt{15}\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{225}\int \frac{1}{\sec^3\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{225}\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$\because \displaystyle\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int (1-\sin^2\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

设 $t = \sin\theta$, 则 $\mathrm{d}t = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta$

$$\int \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta = \int (1-t^2)\,\mathrm{d}t = t - \frac{1}{3}t^3 + C = \sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$$

$\therefore \displaystyle\int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{225}(\sin\theta - \frac{1}{3}\sin^3\theta) + C$

$\because \tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{15}}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}$

$\therefore \displaystyle\int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{225}(\frac{x}{\sqrt{x^2+15}} - \frac{x^3}{3(x^2+15)^{\frac{3}{2}}}) + C$

3)$\sqrt{x^2-a^2}$ 的奇次幂

解题思路:

设 $x = a\sec\theta$, 将 x 的积分转化为 θ 的积分

例.

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $x = 2\sec\theta$, 则 $\mathrm{d}x = 2\tan\theta\sec\theta$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{2\tan\theta\sec\theta}{8\sec^3\theta\sqrt{4\tan^2\theta}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$\because \displaystyle\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C$

$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}(\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}) + C$

$\because \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta} = \dfrac{2}{x}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x}, \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4\sqrt{x^2-4}}{x^2}, \theta = \sec^{-1}(\dfrac{x}{2})$

$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}(\sec^{-1}(\frac{x}{2}) + \frac{2\sqrt{x^2-4}}{x^2}) + C$

第二十章　反常积分: 基本概念

1. 收敛和发散

当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 出现以下情况，称为反常积分:

(1) 函数 f 在 $[a\ b]$ 内是无界的 (垂直渐近线)

(2)$b=\infty$

(3)$a=-\infty$

如果积分不是反常积分, 那么它自然收敛.

破裂点: 当函数 $f(x)$ 在 x 接近于某点 c 时是无界的，那么我们说该函数在 $x=c$ 处有一个破裂点.

瑕点: 有限区间内的破裂点, 或 $x\to\infty/-\infty$.

如果仅仅在 x 接近于 a 点该函数 $f(x)$ 是无界的，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果极限存在, 该积分收敛; 否则该积分发散

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln(1)-\ln(\varepsilon)) \\ &= \infty\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) \\ &= 2\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

如果函数仅仅在 x 接近于 b 点该函数是无界的，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果极限存在, 该积分收敛; 否则该积分发散

如果函数在区间 $[a\ b]$ 内有破裂点 c，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

只有当两个积分都收敛时, 总积分收敛; 否则发散

计算反常积分:

如有必要则进行分解, 每部分最多只能有一个瑕点, 而且该点要在积分的上下限

2. 无穷区间区间上的积分

函数在区间 $[a,\infty)$ 没有破裂点, 定义

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果极限存在, 积分收敛; 否则积分发散

函数在区间 $(-\infty,b]$ 没有破裂点, 定义

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果极限存在, 积分收敛; 否则积分发散

例 1.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to\infty}\ln|x|\Big|_1^N\\ &= \lim_{N\to\infty}(\ln(N)-\ln(1))\\ &= \infty\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to\infty}-\frac{1}{x}\Big|_1^N\\ &= \lim_{N\to\infty}(-\frac{1}{N}+1)\\ &= 1\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

3. 比较判别法 (理论)

如果在区间 (a,b) 内，函数 $f(x)\geqslant g(x)\geqslant 0$，且积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是发散的，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也是发散的. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$

如果在区间 (a,b) 内，函数 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是收敛的，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也一定是收敛的. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

4. 极限比较判别法 (理论)

当 $x \to a$ 时，$f(x) \sim g(x)$ 同 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ 有着同样的意义

如果当 $x \to a$ 时 $f(x) \sim g(x)$，且这两个函数在区间 $[a,b]$ 上没有其他瑕点，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是同时收敛或同时发散的，这称为**极限比较判别法**

例

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because x \to 0$ 时，$\sin(x) \sim x$

$\therefore x \to 0^+$ 时，$\sin(\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$

两边取倒数, 得:

$$\frac{1}{\sin(\sqrt{x})} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$\because [0,1]$ 区间上，仅有 0 为破裂点

$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛

同理，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛

5.p 判别法 (理论)

$\cdot \int^{\infty}$ 的情况：对于任意有限值 $a > 0$，积分

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

在 $p > 1$ 时是收敛的，在 $p \leqslant 1$ 时是发散的

$\cdot \int_0$ 的情况：对于任意有限值 $a > 0$，积分

$$\int_0^{a} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

在 $p < 1$ 时是收敛的，在 $p \geqslant 1$ 时是发散的

6. 绝对收敛判别法 (理论)

$$\boxed{\text{如果 } \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 是收敛的，那么 } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 也是收敛的}}$$

例

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because |\frac{\sin(x)}{x^2}| \leqslant \frac{1}{x^2}$

$\therefore$ 根据比较判别法:

$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 根据 P 判别法

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore$ 根据绝对收敛判别法

$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2}$ 收敛

第二十一章　反常积分: 如何解题

1. 如何解题

1) 拆分积分步骤

①确定区间 $[a,b]$ 上的所有瑕点;

②将积分拆分为若干个积分之和，使拆分后的每个积分最多包含一个瑕点，这些瑕点作为相应积分的上限或下限;

③分别讨论每个积分，如果所有积分收敛，则整个积分收敛; 否则整个积分发散.

2) 如何处理负函数值

①如果被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上既有正值又有负值，考虑使用绝对收敛判别法

②如果被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒为非正, 即在 $[a,b]$ 上 $f(x) \leq 0$, 则:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b -f(x)\,\mathrm{d}x$$

③如果被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上正负无损/增益震荡, 积分发散. 如: $\sin x$, $\cos x$

2. 积分判别法汇总

1) 比较判别法

如果在区间 (a,b) 内，函数 $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$，且积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是发散的，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也是发散的. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$

如果在区间 (a,b) 内，函数 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是收敛的，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也一定是收敛的. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

2) 极限比较判别法

当 $x \to a$ 时，$f(x) \sim g(x)$ 同 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ 有着同样的意义

如果当 $x \to a$ 时 $f(x) \sim g(x)$，且这两个函数在区间 $[a,b]$ 上没有其他瑕点，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是同时收敛或同时发散的，这称为**极限比较判别法**

注解: 如果函数 $g(x)$ 有原函数没有的瑕点, 需要将原函数在该瑕点处进行拆分

3)p 判别法 $\cdot \int^\infty$ 的情况：对于任意有限值 $a > 0$，积分

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

在 $p > 1$ 时是收敛的，在 $p \leqslant 1$ 时是发散的

$\cdot \int_0$ 的情况：对于任意有限值 $a > 0$，积分

$$\int_0^a \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$$

在 $p < 1$ 时是收敛的，在 $p \geqslant 1$ 时是发散的

4) 绝对收敛判别法

$$\boxed{\text{如果 } \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \text{ 是收敛的，那么 } \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 也是收敛的}}$$

3. 极限判别法的 $g(x)$

1) 多项式和多项式型函数在 ∞ 和 $-\infty$ 附近的表现

$$\boxed{\text{若 } P(x) \text{ 的最高次项是 } ax^n\text{，则当 } x \to \infty \text{ 或 } x \to -\infty \text{ 时，有 } P(x) \backsim ax^n}$$

例 1.

$$\int_1^\infty \frac{1}{2+20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $2+20\sqrt{x} \backsim 20\sqrt{x}$

$\therefore \dfrac{1}{2+20\sqrt{x}} \backsim \dfrac{1}{20\sqrt{x}}$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 发散

由极限判别法, 得:

$\therefore \int_1^\infty \frac{1}{2+20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $x^5+4x^4+1 \backsim x^5$

$\therefore \frac{1}{x^5+4x^4+1} \backsim \frac{1}{x^5}$

$\because \int_0^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x\ [0,\infty)$

$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^\infty \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x$

$\int_0^1 \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x$ 自然收敛

由 p 判别法, 得:

$\int_1^\infty \frac{1}{x^5}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_1^\infty \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore \int_0^\infty \frac{1}{x^5+4x^4+1}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 3.

$$\int_2^\infty \frac{3x^5+2x^2+9}{x^6+22x^4+\sqrt{4x^{13}+18x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $\frac{3x^5+2x^2+9}{x^6+22x^4+\sqrt{4x^{13}+18x}} \backsim \frac{3x^5}{2x^{\frac{13}{2}}} = \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}$

由 p 判别法, 得:

$\int_2^\infty \frac{3}{2x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$$\int_2^{\infty} \frac{3x^5+2x^2+9}{x^6+22x^4+\sqrt{4x^{13}+18x}}\,\mathrm{d}x \text{ 收敛}$$

例 4.

$$\int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

分子分母同时乘以分母的共轭表达式:

$$\begin{aligned}\int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2} \times \frac{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_9^{\infty} \frac{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}{8x^3-9}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当 $x \to \infty$ 时, $\dfrac{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}{8x^3-9} \backsim \dfrac{2x^2}{8x^3} = \dfrac{1}{4x}$

由 p 判别法, 得:

$$\int_9^{\infty} \frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

由极限比较判别法, 得:

$$\int_9^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x \text{ 发散}$$

2) 三角函数在 ∞ 或 $-\infty$ 附近的表现

$$\boxed{|\sin(A)| \leqslant 1} \qquad \boxed{|\cos(A)| \leqslant 1}$$

例.

$$\int_5^{\infty} \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $\dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2} \backsim \dfrac{1}{x^2}$

由 p 判别法, 得:

$\int_5^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\because \int_5^\infty \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \int_5^\infty \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

3) 指数在 ∞ 和 $-\infty$ 附近表现

$$\boxed{\text{对所有的 } x > 0,\ e^{-x} \leqslant \tfrac{C}{x^n}}$$

例 1.

$$\int_{10}^\infty (x^{1000} + x^2 + \sin(x))e^{-x^2+6}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $(x^{1000} + x^2 + \sin x)e^{-x^2+6} \backsim x^{1000}e^{-x^2+6}$

$\because e^{-x^2+6} \leqslant \frac{C}{x^{1002}}$

$\therefore \int_{10}^\infty x^{1000}e^{-x^2+6}\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_{10}^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

由 p 判别法, 得:

$C\int_{10}^\infty \frac{1}{x^2}$ 收敛

即 $\int_{10}^\infty x^{1000}e^{-x^2+6}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_{10}^\infty (x^{1000} + x^2 + \sin x)e^{-x^2+6}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 2.

$$\int_9^\infty \frac{x^{10}}{e^x - 5x^{20}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $e^x - 5x^{20} \backsim e^x$

$\because e^{-x} \leqslant \dfrac{C}{x^{12}}$

$\therefore \displaystyle\int_9^\infty \frac{x^{10}}{e^x}\,\mathrm{d}x \leqslant C \int_9^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

由 p 判别法, 得:

$C \displaystyle\int_9^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\int_9^\infty \frac{x^10}{e^x - 5x^{20}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 3.

$$\int_{18}^\infty \frac{x^2}{7^x - 4^x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to \infty$ 时, $7^x - 4^x \backsim 7^x$

$\because x > 0$ 时, $7^{-x} \leqslant \dfrac{C}{x^4}$

$\therefore \displaystyle\int_{18}^\infty \frac{x^2}{7^x}\,\mathrm{d}x \leqslant C \int_{18}^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

由 p 判别法, 得:

$C \displaystyle\int_{18}^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\int_{18}^\infty \frac{x^2}{7^x - 4^x}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(4) 对数在 ∞ 附近的表现

$$\boxed{\text{对所有 } x > 1\text{，} \ln(x) \leqslant Cx^\alpha}$$

例 1.

$$\int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because x > 1$ 时, $\ln x \leqslant Cx^{0.0001}$

$\therefore \int_2^\infty \frac{\ln x}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.0009}}\,\mathrm{d}x$

由 p 判别法, 得:

$\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.0009}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由比较判别法, 得:

$\int_2^\infty \frac{\ln(x)}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 2.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \geqslant 2$ 时, $\ln x \geqslant \ln 2$

$\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(x)}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\ln(2)}\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x$

由 p 判别法, 得:

$$\frac{1}{\ln(2)}\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x < \infty$$

由比较判别法, 得:

$\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 3.

$$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \geqslant 2$ 时, $\ln x \geqslant \ln 2$

$\therefore \int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \ln 2 \int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

由 p 判别法, 得:

$\int_2^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

由比较判别法, 得:

$\int_2^\infty \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 4.

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

令 $t = \ln x$, 则 $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

由 p 判别法, 得:

$\int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 发散

$\therefore \int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$ 发散

5) 多项式和多项式型函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{若 } p(x) \text{ 的最低次项是 } bx^m\text{, 则当 } x \to 0,\ p(x) \backsim bx^m}$$

例 1.

$$\int_0^5 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{x^2+\sqrt{x}} \backsim \frac{1}{\sqrt{x}}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^5 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 2.

$$\int_0^1 \frac{x+3}{x+x^5}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $\frac{x+3}{x+x^5} \backsim \frac{3}{x}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{3}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{x+3}{x+x^5}\,\mathrm{d}x$ 发散

6) 三角函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{当 } x \to 0,\ \sin x \backsim x,\ \tan x \backsim x \text{ 且 } \cos x \backsim 1}$$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{\tan x} \backsim \frac{1}{x}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{\tan x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0^+$ 时, $\frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x \backsim \frac{1}{\sqrt{x}}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\tan x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 3.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $\frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} \backsim \frac{x}{x^{\frac{3}{2}}} \backsim \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

7) 指数函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{当 } x \to 0 \text{ 时}, e^x \backsim 1 \text{ 并且 } e^x - 1 \backsim x}$$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{e^x}{x\cos x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $\dfrac{e^x}{x\cos x} \backsim \dfrac{1}{x}$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{x\cos x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $e^{-\frac{1}{x}} \leqslant \dfrac{C}{(\frac{1}{x})^5} = Cx^5$

$\therefore \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5} \leqslant C$

$\because C\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x$ 没有瑕点

$\therefore C\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x$ 自然收敛

$\therefore \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^5}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 3.

$$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $e^x - 1 \backsim x$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}} \, \mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \, \mathrm{d}x$ 收敛

8) 对数函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{对于所有 } 0 < x < 1, \ |\ln x| \leqslant \tfrac{C}{x^\alpha}}$$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} \, \mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $0 < x < 1$ 时, $|\ln x| \leqslant \frac{C}{x^{0.05}}$

$\therefore \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} \leqslant \frac{C}{0.95}$

由 p 判别法, 得:

$C \int_0^1 \frac{1}{x^{0.95}} \, \mathrm{d}x$ 收敛

由比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{|\ln x|}{x^{0.9}} \, \mathrm{d}x$ 收敛

例 2.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2 |\ln x|} \, \mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $0 < x < 1$ 时, $|\ln x| \leqslant \frac{C}{x}$

$\therefore \dfrac{1}{x^2|\ln x|} \geqslant \dfrac{1}{Cx}$
由 p 判别法, 得:
$\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散
由比较判别法, 得:
$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^2|\ln x|}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 3.

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{0.9}|\ln x|}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $0 < x \leqslant \frac{1}{2}$ 时, $|\ln x| \geqslant |\ln(\frac{1}{2})| = \ln 2$
$\therefore \dfrac{1}{x^{0.9}|\ln x|} \leqslant \dfrac{1}{\ln 2 x^{0.9}}$
由 p 判别法, 得:
$\dfrac{1}{\ln 2}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^{0.9}}\,\mathrm{d}x$ 收敛
由比较判别法, 得:
$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x^{0.9}|\ln x|}\,\mathrm{d}x$ 收敛

9) 更一般的函数在 0 附近的表现

> 若一个函数在 0 附近收敛于该函数的麦克劳林级数, 则函数在 $x \to 0$ 时渐进等价于级数的最低次项. 即
>
> $$f(x) = a_n x^n + a_{n+1}x^{n+1} + ..., \text{当} x \to 0, \text{则} f(x) \backsim a_n x^n$$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\cos x$ 的麦克劳林级数:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$1 - \cos x = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots$

$\therefore$ 当 $x \to 0$ 时, $\frac{1}{1-\cos x} \backsim \frac{2}{x^2}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_0^1 \frac{1}{(1-\cos x)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

当 $x \to 0$ 时, $1 - \cos x \backsim \frac{x^2}{2}$

$\therefore \frac{1}{(1-\cos x)^{\frac{1}{3}}} \backsim \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{\frac{2}{3}}}$

由 p 判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{\frac{2}{3}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\int_0^1 \frac{1}{(1-\cos x)^{\frac{1}{3}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

10) 不在 0 或 ∞ 或 $-\infty$ 处的瑕点

- 若积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的唯一瑕点出现在 $x=a$ 处, 进行 $t=x-a$ 换元
- 若积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的唯一瑕点出现在 $x=b$ 处, 进行 $t=b-x$ 换元

例.

$$\int_0^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$$

$\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 在积分范围内包含三个瑕点, 分别为 $x=0,1,2$

将原积分拆分为以下部分:

①$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

当 $x\to 0$ 时, $\displaystyle\frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)} \backsim \frac{1}{2x}$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}x$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 发散

②$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

设 $t=1-x,\ \mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x &= -\int_{\frac{1}{2}}^0 \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $t\to 0$ 时, $\displaystyle\frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)} \backsim \frac{1}{2t}$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1+t)(1-t)(2-t)}\,\mathrm{d}t$ 发散

即 $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 发散

③$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

设 $t = x-1,\ \mathrm{d}t = \mathrm{d}x$

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t+1)(t+2)(1-t)}\,\mathrm{d}t$$

当 $t \to 0$ 时, $\frac{1}{t(t+1)(t+2)(1-t)} \backsim \frac{1}{2t}$

由 p 判别法, 得:

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(t+1)(t+2)(1-t)}\,\mathrm{d}t$ 发散

即 $\int_{1}^{\frac{3}{2}} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 发散

④$\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

设 $t = 2-x,\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x &= \int_{\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)}\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

当 $t \to 0$ 时, $\frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)} \backsim \frac{1}{6t}$

由 p 判别法, 得:

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6t}\,\mathrm{d}t$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t(1-t)(2-t)(3-t)}\,\mathrm{d}t$ 发散

即 $\int_{\frac{3}{2}}^{2} \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 发散

⑤$\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$

设 $t=x-2,\ \mathrm{d}t=\mathrm{d}x$

$$\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t$$

当 $t\to 0$ 时, $\dfrac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)}\backsim\dfrac{1}{6t}$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{6t}\,\mathrm{d}t$ 发散

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t$ 发散

即 $\displaystyle\int_2^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 发散

综上, $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x(x+1)(x-1)(x-2)}\,\mathrm{d}x$ 发散

第二十二章　数列和级数: 基本概念

1. 数列的收敛和发散

数列: 一组有序的数, 可能为有限项, 也可能为无穷项. 如:$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9$

无穷序列: 有无穷项的数列. 如:$\{b_n\} = 1, 3, 5, \cdots$

数列的项: 数列中的第 n 项. 如:a_n

当满足下列条件: $$\lim_{x\to\infty} a_n = L$$ 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛

数列的三明治定理 (夹逼定理)

$$\boxed{\text{若 } c_n \leqslant a_n \leqslant b_n, \text{ 且当 } n \to \infty \text{ 时}, b_n \to L,\ c_n \to L, \text{ 则 } a_n \to L}$$

洛必达法则的应用

$$\boxed{\text{利用洛必达法则求解 } \lim_{x\to\infty} f(x), \text{ 从而得到 } \lim_{n\to\infty} a_n}$$

例.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$

推导过程:

令 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{n}}$

$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

由于 a_n 的极限为 0

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 收敛

数列的收敛与发散规则

$$\lim_{n\to\infty} r^n \begin{cases} = 0 & \text{如果} -1 < r < 1 \\ = 1 & \text{如果} r = 1 \\ = \infty & \text{如果} r > 1 \\ \text{不存在} & \text{如果} r \leqslant -1 \end{cases}$$

2. 级数的收敛和发散

级数: 将数列 a_n 的所有项加起来. 表示为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

3. 几何级数

由等比数列构成的无穷的级数, 称为几何级数. 表示为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

规律总结:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{如果 } -1<r<1,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r} \\ \text{如果 } r\geqslant 1 \text{ 或 } r\leqslant -1,\ \text{级数发散}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{如果 } -1<r<1,\ \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} ar^n=\frac{a}{1-r} \\ \text{如果 } r\geqslant 1 \text{ 或 } r\leqslant -1,\ \text{级数发散}\end{array}}$$

4. 第 n 项判别法 (理论)

$$\boxed{\text{若 } \lim_{n\to\infty} a_n\neq 0,\ \text{或极限不存在，则级数 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}}$$

注解: 以上判别法不能用于级数收敛性的判断

5. 无穷级数和反常积分的性质

1) 比较判别法 (理论)

$$\boxed{\text{若对所有 } n,\ \text{有 } 0\leqslant b_n\leqslant a_n,\ \text{且 } \sum_{n==1}^{\infty} b_n \text{ 发散，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也发散}}$$

$$\boxed{\text{若对所有 } n,\ \text{有 } b_n\geqslant a_n\geqslant 0,\ \text{且 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛}}$$

2) 极限比较判别法 (理论)

$$\boxed{\text{若当 } n\to\infty \text{ 时 } a_n\backsim b_n,\ \text{且 } a_n \text{ 和 } b_n \text{ 均有限，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 同时收敛或发散}}$$

3)p 判别法理论

$$\boxed{\sum_{n=a}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{收敛} & \text{如果}p>1\\ \text{发散} & \text{如果}p\leqslant 1\end{cases}}$$

4) 绝对收敛判别法 (理论)

$$\boxed{\text{如果级数 }\sum_{n=m}^{\infty}|a_n|\text{ 收敛，则级数 }\sum_{n=m}^{\infty}a_n\text{ 收敛}}$$

6. 级数的新判别法

1) 比式判别法 (理论)

若 $L=\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}|$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $L<1$ 时绝对收敛，在 $L>1$ 时发散；但当 $L=1$ 或极限不存在时，比式判别法无效

2) 根式判别法 (理论)

若 $L=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $L<1$ 时绝对收敛，在 $L>1$ 时发散；但当 $L=1$ 或极限不存在时，根式判别法无效

3) 积分判别法 (理论)

若对连续递减函数 f 有 $a_n=f(n)$，则 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ 与 $\int_N^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散

4) 交错级数判别法 (理论)

当一个级数收敛而其绝对值形式发散，该级数**条件收敛**

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是交错的，且各项的绝对值递减趋于 0，则级数收敛

收敛条件列表:

(1) a_n 正负交错. 如:$(-1)^n$

(2) $|a_n|$ 递减

(3) $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

第二十三章　求解级数问题

1. 级数的讨论

1) 是否为几何级数

当级数为几何级数时, 应用几何级数规则

2) 级数中的项是否趋于 0

当级数中的项不趋于 0, 包含如下情况:

①数列的分子分母都为多项式, 且分子的次数大于等于分母

②对数的内容包含多项式, 并且多项式的值不趋于 1

应用第 n 项判别法

3) 级数中是否有负项

当级数中包含负的项时, 应用第 n 项判别法/绝对收敛判别法/交错级数判别法

4) 级数中是否有阶乘

级数中的项包含阶乘, 应用比式判别法

5) 级数中是否底和指数都包含 n

当级数的项, 底和指数都包含 n 时, 应用根式判别法

6) 级数中是否含 1/n 和对数

当级数中包含 1/n 和对数时, 应用积分判别法

7) 上述皆不适用

当以上方法都不适用时, 使用反常积分的判别法, 比较判别法/P 判别法/极限比较判别法

2. 具体解决方案

1) 几何级数

若 $-1 < r < 1$，无穷几何级数的和 $= \dfrac{\text{首项}}{1-r}$

如果 $r \geqslant 1$ 或 $r \leqslant 1$, 级数发散

例 1.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

推导过程:

$$\because \frac{4}{3^n} = 4(\frac{1}{3})^n$$

$$-1 < r = \frac{1}{3} < 1$$

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \frac{4 \times (\frac{1}{3})^5}{1-\frac{1}{3}} = \frac{2}{81}$$

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}-(-7)^n}{11^n}$$

推导过程:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}-(-7)^n}{11^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{11^n} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-7)^n}{11^n}$$

$$\because -1 < 1 = \frac{4}{11} < 1$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4^n}{11^n} = \frac{4^2}{11^2} \times \frac{1}{1-\frac{4}{11}} = \frac{16}{77}$$

$\because -1 < 2 = \dfrac{-7}{11} < 1$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-7)^n}{11^n} = \frac{(-7)^2}{11^2} \times \frac{1}{1-(-\frac{7}{11})} = \frac{49}{198}$

$\displaystyle\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}-(-7)^n}{11^n} = \frac{16}{77} - \frac{49}{198} = -\frac{5}{126}$

$\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n}-(-7)^n}{11^n}$ 收敛

2) 第 n 项判别法

$$\boxed{\text{若} \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ 或极限不存在，则级数} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}}$$

注解: 该判别法不能用于级数收敛性的判定

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+7}{4n^2+2n+1}$$

推导过程:

$\displaystyle\because \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+7}{4n^2+2n+1} = \frac{1}{4} \neq 0$

$\therefore$ 由第 n 项判别法

$\displaystyle\quad\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3n+7}{4n^2+2n+1}$ 发散

例 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{3n^2+5}\right)$$

推导过程:

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \ln\left(\frac{n^2+2}{3n^2+5}\right) = -\ln 3 \neq 0$

由第 n 项判别式, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n^2+2}{3n^2+5})$ 发散

3) 含负项的级数

①若所有项都为负，则在所有项前面添加负号来修改级数

例.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}}$$

推导过程:

$\because$ 在 $n \geqslant 3$ 时，$\ln(\frac{1}{n}) < 0$，$\ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} < 0$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} -\ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\because$ 当 $n \in [3, \infty)$ 时，$\ln(n) \geqslant \ln(3)$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=3}^{\infty} \ln(3)\frac{1}{\sqrt{n}} = \ln(3)\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

由 p 判别法, 得:

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

由比较判别法, 得:

$\sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

②若有些项为正, 有些项为负, 当 $n \to \infty$ 时通项不趋于 0, 用第 n 项判别法

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2$$

推导过程:

$\because \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2$ 图像进行增益震荡

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n n^2$ 极限不存在

由第 n 项判别法, 得:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ 发散

③若有些项为正，有些项为负，当 $n \to \infty$ 时通项趋于 0, 用绝对收敛判别法

$$\boxed{\text{若} \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{ 也收敛}}$$

例.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n)}{n^2}$

推导过程:

$\because \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin(n)|}{n^2} \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$

由 p 判别法, 得:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛

由比较判别法, 得:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin(n)|}{n^2}$ 收敛

由绝对收敛判别法, 得:

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(n)}{n^2}$ 收敛

④若有些项为正，有些项为负，并且级数不是绝对收敛，用交错级数判别法

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 是交错的，且各项的绝对值递减趋于 0，则级数收敛

收敛条件列表:

1.a_n 正负交错. 如:$(-1)^n$

2.$|a_n|$ 递减

3.$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

推导过程:

在区间 $[1, \infty$ 上:

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 正负交错

2) $\because (\frac{1}{n})' = -\frac{1}{n^2}$

$\therefore \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ 单调递减

3) $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

$\therefore$ 由交错级数判别法, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$$

推导过程:

在区间 $[2, \infty)$ 上:

1) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ 正负交错

2) $\because (\frac{1}{\ln(n)})' = -\frac{\frac{1}{n}}{\ln^2 n} = -\frac{1}{n \ln^2}$

$\therefore \frac{1}{\ln(n)}$

3) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n)} = 0$

$\therefore$ 由交错级数判别法, 得:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ 收敛

4) 比式判别法

若 $L = \lim_{n\to\infty} \left\|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\|$，则 $n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $L < 1$ 时绝对收敛，在 $L > 1$ 时发散；但当 $L = 1$ 或极限不存在时，比式判别法无效

例 1.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$

推导过程:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{2^n}}\right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^{1000} = \frac{1}{2}$$

由比式判别法, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$ 收敛

例 2.

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n\ln(n)}$

推导过程:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{3^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{3^n}{n\ln(n)}}\right| = 3 \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}$$

根据洛必达法则, 得:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$L = 3 > 1$

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n}{n\ln(n)}$ 发散

例 3.

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

推导过程:

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}}{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{4n+2}{n+1} = 4 > 1$$

由第 n 项判别法, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ 发散

5) 根式判别法

若 $L = \lim_{n\to\infty} \lvert a_n\rvert^{\frac{1}{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $L < 1$ 时绝对收敛，在 $L > 1$ 时发散；但当 $L = 1$ 或极限不存在时，根式判别法无效

例.

$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{2}{n})^{n^2}$

推导过程:

$$L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|(1-\frac{2}{n})^{n^2}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{2}{n})^n = e^{-2} < 1$$

由根式判别法, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} (1-\frac{2}{n})^{n^2}$ 绝对收敛

6) 积分判别法

若对连续递减函数 f 有 $a_n = f(n)$，则 $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ 与 $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散

例 1.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

推导过程:

令 $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$

设 $t = \ln x$，则 $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 发散

$\displaystyle\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ 发散

例 2.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$$

推导过程:

令 $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^2}$

设 $t = \ln x$, 则 $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\int_{\ln 2}^{\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ 收敛

$\displaystyle\therefore \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^2}$ 收敛

7) 反常积分的判别法 (比较判别法/极限比较判别法/p 判别法)

①比较判别法

$$\boxed{\text{若对所有 } n\text{，有 } 0 \leqslant b_n \leqslant a_n\text{，且 } \sum_{n==1}^{\infty} b_n \text{ 发散，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也发散}}$$

$$\boxed{\text{若对所有 } n\text{，有 } b_n \geqslant a_n \geqslant 0\text{，且 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛}}$$

②极限比较判别法

$$\boxed{\text{若当 } n \to \infty \text{ 时 } a_n \backsim b_n\text{，且 } a_n \text{ 和 } b_n \text{ 均有限，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 同时收敛或发散}}$$

③p 判别法

$$\boxed{\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛} & \text{如果} p > 1 \\ \text{发散} & \text{如果} p \leqslant 1 \end{cases}}$$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1}$$

推导过程:

当 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1} \backsim \dfrac{2n^2}{n^4} = \dfrac{2}{n^2}$

由 p 判别法, 得:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$ 收敛

由极限比较判别法, 得:

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1}$ 收敛

例 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000}$$

推导过程:

对于所有的 $n > 0$， $2^{-n} \leqslant \frac{C}{n^1 002}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{1002}} \times n^{1000} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

由 p 判别法, 得:

$C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛

由比较判别法, 得:

$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000}$ 收敛

例 3.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}}$$

推导过程:

对于所有的 $n > 1$, $\ln(n) \leqslant Cn^{0.0005}$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}} \leqslant C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.0005}}$$

由 p 判别法, 得:

$C \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{1.0005}}$ 收敛

由比较判别法, 得:

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n^{1.001}}$ 收敛

8) 可折叠级数

若数列 $\{a_n\}$ 满足以下关系:

①$a_n = A_n - B_n$

②$B_n = A_{n+1}$

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = A_1 - B_n$$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

推导过程:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$S_n = (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 收敛

例 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n+2})$$

推导过程:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln(n+2)]$$

$$S_n = (\ln 2 - \ln 3) + (\ln 3 - \ln 4) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln(n+2)]$$

$$= \ln 2 - \ln(n+2)$$

$$= \ln(\frac{2}{n+2})$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(\frac{2}{n+2}) = -\infty$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \ln(\frac{n+1}{n+2})$ 发散

第二十四章　泰勒多项式、泰勒级数和幂级数导论

1. 近似值和泰勒多项式

e^x 曲线在 $x=0$ 处的三阶近似曲线

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

并且，x 越趋近于 0，曲线趋近程度越高

泰勒近似定理: 若 f 在 $x=a$ 光滑，则在所有次数为 N 或更低的多项式中，当 x 在 a 附近时，最近似于 $f(x)$ 的是

$$P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N$$

使用求和符号表示:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

多项式 $P_N(x)$ 称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 **N 阶泰勒多项式**

曲线 $f(x)$ 与近似曲线 $P_N(x)$ 的误差称为 **N 阶误差项**，也称为 **N 阶余项**，公式表示为:

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x)$$

泰勒定理: 关于 $x = a$ 的 N 阶余项

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

其中，c 是介于 x 与 a 之间的一个数

2. 幂级数和泰勒级数

幂级数: 关于 $x = a$(a 为中心) 的幂级数的表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

其中 a_n 是确定的常数

幂级数: 关于 $x = 0$(0 为中心) 的幂级数的表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

其中 a_n 是确定的常数

e^x 曲线关于 $x = 0$ 的幂级数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

幂级数收敛于 e^x

$\dfrac{1}{1-x}$ 曲线关于 $x=0$ 的幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

当 $-1 < x < 1$ 时，幂级数收敛于 $\dfrac{1}{1-x}$

使用光滑函数 f 的所有导数定义关于 $x=a$ 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

该幂级数的系数为 $a_n = \dfrac{f(n)(a)}{n!}$，该级数称为 f 关于 $x=a$ 的**泰勒级数**

使用光滑函数 f 的所有导数定义关于 $x=0$ 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + \cdots$$

该幂级数的系数为 $a_n = \dfrac{f(n)(0)}{n!}$，该级数称为 f 关于 $x=0$ 的**麦克劳林级数**

第二十五章　求解估算问题

1. 求泰勒级数步骤

(1) 构造一个导数表 $(n/f^{(n)}(x)/f^{(n)}(a))$

(2) 将求导结果代入泰勒级数

例.

$f(x) = e^x$ 关于 $x = -2$ 的泰勒级数

推导过程:

导数表如下

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	e^{-2}
1	e^x	e^{-2}
2	e^x	e^{-2}
3	e^x	e^{-2}

函数关于 $x = -2$ 的泰勒级数

$f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2+\cdots = e^{-2}+e^{-2}(x+2)+e^{-2}(x+2)^2+\cdots$

2. 用误差项估算问题

(1) 构造相关函数 $f(x)$

(2) 选一个接近 x 的值 a，使 $f(a)/f'(a)$ 易于计算

(3) 构造 f 的导数表

(4)R_N 的公式:$R_N(x)=\dfrac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$

(5) 确定泰勒多项式的阶 N(未知时可反复代入进行测试)

(6) 确定 x 的值，并且 c 介于 a 与 x 之间

(7) 求 $|R_N(x)|$ 的最大值

(8) 根据估算,得出泰勒多项式 $P_N(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+f^{(N)}(a)(x-a)^N$

例 1.

用二阶泰勒多项式估算 $e^{\frac{1}{3}}$，并估算误差

推导过程:

构造函数 $f(x)=e^x$

由于 $e^0=1$，取值 $a=0$

$f(x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
3	e^x	1

$R_2(x)=\dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3=\dfrac{e^c}{3!}x^3$

由于 c 介于 a 与 x 之间

$0<c<\dfrac{1}{3}$

$|R_2(\frac{1}{3})| \leqslant \frac{e^{\frac{1}{3}}}{3!} \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{162} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{162} = \frac{1}{81}$

$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

$P_2(\frac{1}{3}) = 1 + \frac{1}{3} + frac12 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{25}{18}$

$e^{\frac{1}{3}} = f(\frac{1}{3}) \approx P_2(\frac{1}{3}) = \frac{25}{18}$

例 2.

估算 $e^{\frac{1}{3}}$，且误差不得大于 $\frac{1}{10000}$

推导过程:

构造函数 $f(x) = e^x$

由于 $e^0 = 1$，取值 $a = 0$

$f(x)$ 关于 $x = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$R_N(x) = \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}$

由例 1 可知，$N = 2$ 时，$R_2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{81} > \frac{1}{10000}$

将 $N = 3$ 代入误差项，得:

$R_3(\frac{1}{3}) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \times (\frac{1}{3})^4 = \frac{e^c}{1944} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{1944} = \frac{1}{972}$

而 $\frac{1}{972} > \frac{1}{10000}$，$N = 3$ 不符合

将 $N = 4$ 代入误差项，得:

$R_4(\frac{1}{3}) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} \times (\frac{1}{3})^5 = \frac{e^c}{29160} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{29160} = \frac{1}{14580}$

$\frac{1}{14580} < \frac{1}{10000}$，$N = 4$ 符合误差要求

$$
\begin{aligned}
P_4(\frac{1}{3}) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 \\
&= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{9} + \frac{1}{6} \times \frac{1}{27} + \frac{1}{24} \times \frac{1}{81} \\
&= \frac{2713}{1944}
\end{aligned}
$$

$e^{\frac{1}{3}} = f(\frac{1}{3}) \approx P_4(\frac{1}{3}) = \frac{2713}{1944}$

3. 满足交错级数判别法的估算

泰勒级数若是各项绝对值递减趋于 0 的交错级数，则误差小于下一项. 即

$$|R_N(x)| \leqslant \left|\frac{f^{(N+1)}(a)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\right|$$

例.

使用麦克劳林级数求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$，并且误差为 $\frac{1}{1000}$

推导过程:

构造函数 $f(x)$，使得

$f(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

$\sin(t)$ 的关于 $t = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1

$\sin(t)$ 的麦克劳林级数如下:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \cdots \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

将 $\sin(t)$ 的麦克劳林级数代入函数 $f(x)$，得:

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x (1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \cdots)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3\times 3!} + \frac{t^5}{5\times 5!} - \frac{t^7}{7\times 7!} + \cdots\right)\Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \cdots\end{aligned}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 3!}\times(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5\times 5!}\times(\frac{1}{2})^5 - \frac{1}{7\times 7!}\times(\frac{1}{2})^7 + \cdots$$

由于 $f(x)$ 符合交错级数判别法

首先使用第一项近似积分，得:

$$|R_1(\frac{1}{2})| \leqslant |-\frac{1}{3\times 3!}\times(\frac{1}{2})^3| = \frac{1}{18}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{144}$$

但是 $\frac{1}{144} > \frac{1}{1000}$

继续往后取项，使用前两项近似积分，得:

$$|R_2(\frac{1}{2})| \leqslant |\frac{1}{5\times 5!}\times(\frac{1}{2})^5| = \frac{1}{600}\times\frac{1}{64} = \frac{1}{38400}$$

由于 $\frac{1}{38400} < \frac{1}{1000}$

$$f(\frac{1}{2}) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 3!}\times(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{144} = \frac{71}{144}$$

第二十六章　泰勒级数和幂级数：如何解题

$$\boxed{\text{几何级数} \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ 在 } -1 < x < 1 \text{ 时收敛，其他情况均发散}}$$

$$\boxed{\text{级数} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ 对任意 } x \text{ 值收敛，因为 } \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x!} = 0}$$

1. 幂级数收敛情况

(1) 以 a 为中心，$R > 0$ 为收敛半径

- 区域 $|x-a| < R$ 内收敛
- 区域 $|x-a| > R$ 发散
- 在 $|x-a| = R$ 端点上有绝对收敛/条件收敛/发散的情况

(2) 对所有 x 均绝对收敛，收敛半径为 ∞

(3) 只在 $x = a$ 处收敛，收敛半径为 0

2. 求收敛半径

(1) 使用比式判别法或根式判别法

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n}|=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}||x-a|$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n(x-a)^n|^{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|$$

(2) 算出极限 $L|x-a|$

(3) 若 L 为正数，收敛半径为 $\frac{1}{L}$

(4) 若 L 为 0，收敛半径为 ∞

(5) 若 L 为 ∞，收敛半径为 0

例.

$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln(n)}$

推导过程:

$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{x^n}{n\ln(n)}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\times\frac{n}{n+1}\times\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right|=|x|$

$\because$ 收敛半径为 1, 所以分为如下三种情况:

1) 当 $|x|<1$ 时，幂级数收敛. 此时 $x\in(-1,1)$

2) 当 $|x|>1$ 时，幂级数发散. 此时 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

3) 当 $|x|=1$ 时，再次分为如下两种情况:

　$x=1$，得到 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$，由积分判别法可知，级数发散

　$x=-1$，得到 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$，由交错级数判别法可知，级数收敛

3. 合成新泰勒级数

(1) 六个常用的麦克劳林级数

1)　$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

2) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

3) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

4) $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

5) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

6) $\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{x^n}{n} = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

(2) 常用麦克劳林级数的推导

1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$

推导过程:

e^x 关于 $x = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

e^x 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned} e^x &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

2) $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$

推导过程:

$\sin(x)$ 关于 $x = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\sin(x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\sin(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \cdots \\ &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

3) $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$

推导过程:

$\cos(x)$ 关于 $x = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\cos(x)$	1
1	$-\sin(x)$	0
2	$-\cos(x)$	-1
3	$\sin(x)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\cos(x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\cos(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

4) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

推导过程:

$\dfrac{1}{1-x}$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\frac{1}{1-x}$	1
1	$\frac{1}{(1-x)^2}$	1
2	$\frac{2!}{(1-x)^3}$	$2!$
3	$\frac{3!}{(1-x)^4}$	$3!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\dfrac{1}{1-x}$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

5) $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \cdots$

推导过程:

$\ln(1+x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$\frac{1}{1+x}$	1
2	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1
3	$\frac{2!}{(1+x)^3}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\ln(1+x) \quad &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots\\&= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\\&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\end{aligned}$$

6)　$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

推导过程:

$\ln(1-x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\ln(1-x)$	0
1	$-\frac{1}{1-x}$	-1
2	$-\frac{1}{(1-x)^2}$	-1
3	$-\frac{2}{(1-x)^3}$	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\ln(1-x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots\\ &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

(3) 常用麦克劳林级数的置换

例 1.

e^{x^2} 的麦克劳林级数和收敛区间

推导过程:

e^x 的麦克劳林级数

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

将 x 替换为 x^2，得:

$$\begin{aligned}e^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} &= 1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^3}{3!}+\cdots\\ &= 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right||x|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x|$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$\therefore e^x$ 级数的收敛半径为 ∞，即 $x\in(-\infty,\infty)$

e^{x^2} 中对于 $x^2\in(-\infty,\infty)$ 也成立

$\because x^2\in(-\infty,\infty)\Rightarrow x\in(-\infty,\infty)$

$\therefore e^{x^2}$ 在 $x\in(-\infty,\infty)$ 上收敛

例 2.

$\frac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林级数和收敛区间

推导过程:

$\frac{1}{1-x}$ 的麦克劳林级数

$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

将 x 替换为 $-x^2$，得:

$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$

$\because \lim_{n\to\infty} |\frac{x^{n+1}}{x^n}| = |x|$

$L = 1$

$\therefore \frac{1}{1-x}$ 的收敛半径为 1，即 $x \in (-1, 1)$

$\frac{1}{1+x^2}$ 对应 $-x^2 \in (-1, 1)$

$\because -x^2 \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$

$\therefore \frac{1}{1+x^2}$ 在 $x \in (-1, 1)$ 上收敛

第二十七章　体积、弧长和表面积

1. 旋转体的体积

平面区域绕某轴旋转一周得到的立体, 这类立体被称为旋转体

求旋转体的体积方法:

1) 圆盘法

$$V = \int \pi y^2 \, \mathrm{d}x$$

$$V = \int \pi x^2 \, \mathrm{d}y$$

2) 壳法

$$V = 2\pi xy \, \mathrm{d}x$$

$$V = 2\pi xy \, \mathrm{d}y$$

应用场景:

1) 若 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ 平行于旋转轴, 使用圆盘法

2) 若 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}y$ 垂直于旋转轴, 使用壳法

附录 A　极限合集

三角函数:

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$

指数:

$\lim_{x\to \infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x$

$\lim_{x\to \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$

对数:

$\lim_{x\to \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$