1. 使用定义求导

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}}$$

2. 运算法则

(1) 常数倍

$$\frac{d}{dx}(Cx^a) = (Ca)x^{a-1}$$

(2) 加/减法法则

$$\frac{d}{dx}(x^a+\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^a) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

(3) 乘积法则

乘积法则 (版本 1) 如果 $h(x) = f(x)g(x)$, 那么 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

乘积法则 (版本 2) 如果 $y = uv$, 则

$$\frac{dy}{dx} = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

乘积法则 (三个变量) 如果 $y = uvw$, 则

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}vw + u\frac{dv}{dx}w + uv\frac{dw}{dx}$$

(4) 商法则

商法则 (版本 1) 如果 $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, 那么

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

商法则 (版本 2) 如果 $y = \frac{u}{v}$, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(5) 链式求导法则

链式求导法则 (版本 1) 如果 $h(x) = f(g(x))$, 那么 $h'(x) = f'(g(x))g'(x)$.

链式求导法则 (版本 2) 如果 y 是 u 的函数, 并且 u 是 x 的函数, 那么

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

3. 导数伪装的极限

例.

$\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}$
证明:

设 $f(x)=\sqrt[5]{x}$

$\because f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{x+h}-x}{h}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$\therefore f'(32)=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-\sqrt[5]{32}}{h}=\lim\limits_{h\to0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}=\frac{1}{5}\times32^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{80}$

4. 分段函数的导数
检验方式: 分段函数再连接点上极限相等, 并且导数再连接点上的极限也相等
例.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果}x\leqslant0,\\ x^2+1 & \text{如果}x>0.\end{cases}$$

$\because f(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的左极限:

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}1=1$

$f(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+1)=1$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f(x)=1$

由于, $f'(x)=\begin{cases}0 & \text{如果}x\leqslant0,\\ 2x & \text{如果}x>0.\end{cases}$

$\because f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的左极限:

$\lim\limits_{x\to0^-}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^-}0=0$

$f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=\lim\limits_{x\to0^+}2x=0$

$\therefore \lim\limits_{x\to0}f'(x)=0$

5. 直接画出导函数的图像