一、行列式介绍

有 3×3 矩阵 A

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

其中

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Δ 称为 3×3 矩阵 A 的**行列式**, 也可以写成

$$\begin{aligned}\Delta &= (a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32})-(a_{12}a_{21}a_{33}-a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} - a_{12}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33}\end{bmatrix} + a_{13}\cdot\det\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32}\end{bmatrix} \\ &= a_{11}\cdot\det A_{11} - a_{12}\cdot\det A_{12} + a_{13}\cdot\det A_{13}\end{aligned}$$

其中, A_{ij} 表示去除矩阵第 i 行和第 j 列元素后的内容.

例. A_{11} 表示如下:

$$\begin{bmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

定义 当 $n\geqslant 2$, $n\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的行列式是形如 $\pm a_{1j}\det A_{1j}$ 的 n 个项的和, 其中加号和减号交替出现, 这里元素 $a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n}$ 来自 A 的第一行, 即

$$\begin{aligned}\det A &= a_{11}\cdot\det A_{11} - a_{12}\cdot\det A_{12} + \cdots + (-1)^{1+n}a_{1n}\cdot\det A_{1n} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{1+j}a_{1j}\det A_{1j}\end{aligned}$$

给定 $A=[a_{ij}]$, A 的 (i,j) 余因子 C_{ij} 由下式给出

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

则

$$\det A=a_{11}\cdot C_{11}+a_{12}\cdot C_{12}+\cdots+a_{1n}\cdot C_{1n}$$

上述公式称为按 A 的第一行的余因子展开式

定理 1 *$n\times n$ 矩阵 A 的行列式可按任意行或列的余因子展开式来计算. 按第 i 行的余因子展开式为:*

$$\det A=a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in}$$

按第 j 列的余因子展开式为:

$$\det A=a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{nj}C_{nj}$$

定理 2 *若 A 为三角阵, 则 $\det A$ 等于 A 的主对角线上元素的乘积*

二、行列式的性质

定理 3 (行变换)
令 A 是一个方阵.
a. 若 A 的某一行的倍数加到另一行得矩阵 B, 则 $\det B=\det A$
b. 若 A 的两行互换得矩阵 B，则 $\det B=-\det A$
c. 若 A 的某行乘以 k 倍得到矩阵 B, 则 $\det B=k\det A$

定理 4 *方阵 A 是可逆的当且仅当 $\det A\neq 0$*

定理 5 *若 A 为一个 $n\times n$ 矩阵, 则 $\det A^T=\det A$*

定理 6 (乘法的性质) *若 A 和 B 均为 $n\times n$ 矩阵, 则 $\det AB=(\det A)(\det V)$*

三、克拉默法则、体积和线性变换

对任意 $n \times n$ 矩阵 A 和任意的 $\mathbb{R}^n$ 中向量 b, 令 $A_i(b)$ 表示 A 中第 i 列由向量 **b** 替换得到的矩阵

$$A_i(b) = [\mathbf{a}_1 \ \cdots \ \mathbf{b} \ \cdots \ \mathbf{a}_n]$$

定理 7 (克拉默法则) 设 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意向量 b, 方程 $Ax{=}b$ 的唯一解可由下式给出

$$x_i = \frac{\det A_i(b)}{\det A}, i = 1, 2, \cdots, n$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

其中, 余因子组成的矩阵称为 A 的**伴随矩阵**, 记为 $adj\,A$

定理 8 (逆矩阵公式)
设 A 是一个可逆的 $n \times n$ 矩阵, 则 $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} adj\,A$

定理 9 若 A 是一个 2×2 矩阵, 则由 A 的列确定的平行四边形的面积为 $|\det A|$, 若 A 是一个 3×3 矩阵, 则由 A 的列确定的平行六面体的体积为 $|\det A|$

设 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 为非零向量, 则对任意数 c, 由 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2$ 确定的平行四边形的面积等于由 $\mathbf{a}_1$ 和 $\mathbf{a}_2 + c\mathbf{a}_1$ 确定的平行四边形的面积

定理 10 设 $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 是由一个 2×2 矩阵 A 确定的线性变换, 若 S 是 $\mathbb{R}^2$ 中一个平行四边形, 则

$$\{T(S)\text{的面积}\} = |\det A| \cdot \{S \text{ 的面积}\}$$

若 T 是一个由 3×3 矩阵 A 确定的线性变换, 而 S 是 R^3 中的一个平行六面体, 则

$$\{T(S)\text{的体积}\} = |\det A| \cdot \{S\text{ 的体积}\}$$