

1. $x \rightarrow a$ 时的有理函数的极限

有理函数: 形如 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ 的函数, 其中 $p(x), q(x)$ 都是多项式.

i. 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{m}{n}$ 时:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{m}{n}$$

例.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 9}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 9}{x - 2} = \frac{1 - 9}{1 - 2} = 8$$

ii. 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{0}{0}$ 时:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 进行分子分母约分

例.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x - 1 = 2 - 1 = 1$$

iii. 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{m}{0}$ 时:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 判断极限点两边的极限是否同为 ∞ 或 $-\infty$

例.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 6}{x(x - 1)^3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x(x - 1)^3} \\ \because \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x(x - 1)^3} &= \frac{(+)(-)}{(+)(-)} = + \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x + 3)(x - 2)}{x(x - 1)^3} &= \frac{(+)(-)}{(+)(+)} = - \\ \therefore f(x) &\text{无极限值} \end{aligned}$$

2. $x \rightarrow a$ 时的平方根的极限

共轭因式: 若 S 是含有根式的已知表达式, 若存在一个不恒等于零的表达式 M, 使乘积 SM 不含根式, 则 M 为 S 的共轭因式. 反之, S 也为 M 的共轭因式.

设 $f(x) = \frac{g(x) \pm h(x)}{p(x) \pm q(x)}$, 其中, $g(x)/h(x)/p(x)/q(x)$ 其中一个为根式

当 $f(a) = \frac{g(a) \pm h(a)}{p(a) \pm q(a)} = \frac{0}{0}$ 时, 将分子分母同时乘以含根号部分的共轭因式.

例.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x^2 - 9} - 4}{x - 5} \times \frac{\sqrt{x^2 - 9} + 4}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{(x - 5)(\sqrt{x^2 - 9} + 4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x + 5}{\sqrt{x^2 - 9} + 4} = \frac{5 + 5}{\sqrt{25 - 9} + 4} = \frac{5}{4} \end{aligned}$$

3. $x \rightarrow \infty / -\infty$ 时的有理函数的极限

$$\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{C}{x^n} = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}{a_0 x^m} \times a_0 x^m}{\frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}{b_0 x^n} \times b_0 x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 x^m}{b_0 x^n} \\ &= \frac{a_0}{b_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{x^n} \end{aligned}$$

情况分布:

- (1) $m=n$, 极限为有限的且非零;
- (2) $m>n$, 极限为 ∞ 或 $-\infty$;
- (3) $m<n$, 极限为 0.

4. $x \rightarrow \infty$ 时的多项式型函数的极限

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_m}}{\sqrt{a_0 x^{\frac{m}{2}}}} \times \sqrt{a_0 x^{\frac{m}{2}}}}{\frac{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}{b_0 x^n} \times b_0 x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{a_0 x^{\frac{m}{2}}}}{b_0 x^n} \\ &= \frac{\sqrt{a_0}}{b_0} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{m}{2}}}{x^n} \end{aligned}$$

5. $x \rightarrow -\infty$ 时的多项式型函数的极限

与类型 4 类似. 但有一种特殊情况:

如果 $x < 0$, 并且 $\sqrt[n]{x^p} = x^m$, 那么需要在 x^m 之前加一个负号的唯一情形是: n 是偶的而 m 是奇的.

6. 包含绝对值的函数的极限

$$\begin{aligned}
&\because p(x) > 0, |p(x)| = p(x) \\
&p(x) < 0, |p(x)| = -p(x) \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1 \\
&\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} = 1 \\
&\therefore \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|x+2|}{x+2} \text{ 无双侧极限}
\end{aligned}$$