1.$x \to a$ 时的有理函数的极限

有理函数: 形如 $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ 的函数, 其中 $p(x), q(x)$ 都是多项式.

i. 当 $f(a)=\frac{p(a)}{q(a)}=\frac{m}{n}$ 时:

$\lim_{x \to a} f(x)=\frac{m}{n}$

例.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2-9}{x-2}=\lim_{x \to -1} \frac{x-9}{x-2}=\frac{1-9}{1-2}=8$$

ii. 当 $f(a)=\frac{p(a)}{q(a)}=\frac{0}{0}$ 时:

$\lim_{x \to a} f(x)$ 进行分子分母约分

例.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x-2}=\lim x \to 2x-1=2-1=1$$

iii. 当 $f(a)=\frac{p(a)}{q(a)}=\frac{m}{0}$ 时:

$\lim_{x \to a} f(x)$ 判断极限点两边的极限是否同为 ∞ 或 $-\infty$

例.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 1} \frac{2x^2-x-6}{x(x-1)^3}=\lim_{x \to 1} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3} \\
&\because \lim_{x \to 1^-} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}=\frac{(+)(-)}{(+)(-)}=+ \\
&\quad \lim_{x \to 1^+} \frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}=\frac{(+)(-)}{(+)(+)}=- \\
&\therefore f(x)\text{无极限值}
\end{aligned}$$

2.$x \to a$ 时的平方根的极限

共轭因式: 若 S 是含有根式的已知表达式, 若存在一个不恒等于零的表达式 M, 使乘积 S×M 不含根式, 则 M 为 S 的共轭因式. 反之, S 也为 M 的共轭因式.

设 $f(x)=\frac{g(x) \pm h(x)}{p(x) \pm q(x)}$, 其中, g(x)/h(x)/p(x)/q(x) 其中一个为根式

当 $f(a)=\frac{g(a)-h(a)}{p(a)-q(a)}=\frac{0}{0}$ 时, 将分子分母同时乘以含根号部分的共轭因式.

例.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5} &= \lim_{x \to 5} \frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5} \times \frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}+4}=\lim_{x \to 5} \frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)} \\
&= \lim_{x \to 5} \frac{x+5}{\sqrt{x^-9}+4}=\frac{5+5}{\sqrt{25-9}+4}=\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

3.$x \to \infty / -\infty$ 时的有理函数的极限

$\because \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{C}{x^n} = 0$

$$\begin{aligned}
\therefore \lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}{a_0x^m} \times a_0x^m}{\frac{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}{b_0x^n} \times b_0x^n} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{a_0x^m}{b_0x^n} \\
&= \frac{a_0}{b_0} \lim_{x \to \infty} \frac{x^m}{x^n}
\end{aligned}$$

情况分布:

(1)m=n, 极限为有限的且非零;

(2)m>n, 极限为 ∞ 或 $-\infty$;

(3)m<n, 极限为 0.

4.$x \to \infty$ 时的多项式型函数的极限

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to \infty} f(x) &= \lim_{x \to \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{\sqrt{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}}{\sqrt{a_0}x^{\frac{m}{2}}} \times \sqrt{a_0}x^{\frac{m}{2}}}{\frac{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}{b_0x^n} \times b_0x^n} \\
&= \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{a_0}x^{\frac{m}{2}}}{b_0x^n} \\
&= \frac{\sqrt{a_0}}{b_0} \lim_{x \to \infty} \frac{x^{\frac{m}{2}}}{x^n}
\end{aligned}$$

5.$x \to -\infty$ 时的多项式型函数的极限

与类型 4 类似. 但有一种特殊情况:

> 如果 $x < 0$, 并且 $\sqrt[n]{x^p} = x^m$, 那么需要在 x^m 之前加一个负号的唯一情形是: n 是偶的而 m 是奇的.

6. 包含绝对值的函数的极限

$\because p(x) > 0, |p(x)| = p(x)$

$p(x) < 0, |p(x)| = -p(x)$

$\therefore \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{|x+2|}{x+2} = \dfrac{-(x+2)}{x+2} = -1$

$\lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{|x+2|}{x+2} = \dfrac{x+2}{x+2} = 1$

$\therefore \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{|x+2|}{x+2}$无双侧极限