第一章　组合分析

1.1　计数基本法则

计数基本法则

假设有两个试验，其中试验 1 有 m 种可能的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 n 种可能的结果，则这两个试验一共有 mn 种可能的结果

推广的计数基本法则

假设一共有 r 个试验. 试验 1 有 n_1 种可能的结果; 对应于试验 1 的每一种可能的结果, 试验 2 有 n_2 种可能的结果; 对应于前两个试验的每一种可能的结果, 试验 3 有 n_3 种可能的结果 $\cdots$ 那么这 r 个试验一共有 $n_1 n_2 \cdots n_r$ 种可能的结果

例. 一个大学计划委员会由 3 名新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生、2 名毕业班学生组成，现在要从中选 4 个人组成一个分委员会，要求来自不同的年级，一共有多少种选择方式?

解: 每个年级选取一个学生为一个试验单位，所以，共有 $3 \times 4 \times 5 \times 2$ 种选择方式

1.2 排列

排列: 将不同的物件或符号根据不同顺序进行安置, 每个顺序都称为一个排列

假设有 n 个不同元素, 将其进行排列, 一共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

种不同排列方式

例 1. 某班级共有 6 名男生、4 名女生, 有次测验是根据他们的表现来排名次, 假设没有两个学生成绩一样.
(a) 一共有多少种排名方式?
(b) 如限定男生、女生分开排名, 一共有多少种排名的方式?
解:
(a) 将所有不同成绩进行排名, 一共有 $10! = 3628800$ 种排列方式
(b) 将男生和女生进行分开排名, 男生有 $6! = 720$ 种排列方式, 女生有 $4! = 24$ 种排列方式, 所以一共有 $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$ 种排列方式

例 2. 把 10 本书放到书架上, 其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在要求相同类别的书必须紧挨着放, 问一共有多少种方法?
解: 四种书籍其内部的排列为 $4! \times 3! \times 2! \times 1! = 288$ 种排列方式, 不同书籍之间的排列为 $4! = 24$ 中排列方式, 所以, 一共有 $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 24 \times 288 = 6912$ 种排列方式

假设有 n 个元素，如果其中 n_1 个元素彼此相同，另 n_2 个彼此相同，$\cdots$，n_r 个也彼此相同，那么一共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种不同的排列方式

例. 有 9 面小旗排列在一条直线上吗，其中 4 面白色、3 面红色和 2 面蓝色，颜色相同的旗是一样的. 如果不同的排列方式代表不同的信号，那么一共有多少可能的信号?
解: 一共有 $\frac{9!}{4!3!2!} = 1260$ 种不同的信号

1.3 组合

组合: 从 n 个元素中抽取 m 个元素，并且不考虑抽取顺序

记号与术语

对 $r \leqslant n$，我们定义 $\binom{n}{r}$ 如下:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

并且说 $\binom{n}{r}$ 表示了从 n 个元素中一次取 r 个的可能组合数

例 1. 从 20 人当中选择 3 人组成委员会，一共有多少中选法?
解: 一共有 $\binom{20}{3} = d\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$ 种选法

例 2. 有个 12 人组成的团体，其中 5 位女士，7 位男士，现从中选取 2 位女士，3 位男士组成一个委员会. (1) 问有多少种取法? (2) 另外，如果其中有 2 位男士之间有矛盾，并且坚决拒绝一起工作，那又有多少中取法?
解:

(1) 有 $\binom{5}{2}\binom{7}{3} = \dfrac{5\times 4}{2\times 1} \times \dfrac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1} = 350$ 种取法
(2) 男士一共有 $\binom{7}{3} = 35$ 种取法，选中两个有矛盾男士有 $\binom{2}{2}\binom{5}{1} = 5$ 种取法，所以排除同时选中两位有矛盾男士的取法: $35 - 5 = 30$; 另外，选取女士的方法为 $\binom{5}{2} = 10$ 种，所以，一共有 $30 \times 10 = 300$ 种取法

例 3. 假设在一排 n 个天线中，有 m 个是失效的，另 $n-m$ 个是有效的，并且假设所有有效的天线之间不可区分，同样，所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种线性排列方式，使得任何两个失效的天线都不相邻?
解: 先将 $n-m$ 个有效天线放置好，在两个有效天线之间 (或最左/右侧有效天线的左/右边) 的 $n-m+1$ 个位置上, 每个位置只能放置一个失效天线, 即从 $n-m+1$ 位置上, 选择 m 个放置失效天线, 所以, 有 $\binom{n-m+1}{m}$ 种排列方式

组合恒等式
$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r} \qquad 1 \leqslant r \leqslant n$$
原理:
括号左边:
从 n 个元素中抽取 r 个元素的组合
$$\binom{n}{r}$$
括号右边:
将其中一个元素视为特殊元素，包含以下两种情况:
(1) 包含该特殊元素，从余下的 $n-1$ 个元素中再抽取 $r-1$ 个元素
$$\binom{n-1}{r-1}$$
(2) 不包含特殊元素，从余下的 $n-1$ 个元素中抽取 r 个元素
$$\binom{n-1}{r}$$

二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

例. 展开 $(x+y)^3$

解:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \tbinom{3}{0}x^0y^3 + \tbinom{3}{1}x^1y^2 + \tbinom{3}{2}x^2y^1 + \tbinom{3}{3}x^3y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 1\end{aligned}$$

1.4 多项式系数

记号

如果 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$，则定义 $\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 为

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r} = \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

因此，$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}$ 表示把 n 个不同的元素分成大小分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_r$ 的 r 个不同组的组合数

例 1. 将 10 个小孩平均分成 A，B 两队分别去参加两场不同的比赛，一共有多少种分法?

解: 一共有 $\dbinom{10}{5,5} = \dfrac{10!}{5!5!} = 252$ 种分法

例 2. 把 10 个孩子平均分成两组进行篮球比赛，一共有多少种分法?

解: 相对于例 1，本例不注重组间次序，所以，一共有 $\frac{\frac{10!}{5!5!}}{2!} = 126$ 种分法

多项式定理

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum_{\substack{(n_1,\cdots,n_r):\\ n_1+\cdots+n_r=n}}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

上式的求和号是对满足 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$ 的所有非负整数向量 $(n_1,n_2,\cdots,n_r)$ 求和

例. 在第一轮淘汰赛中有 $n=2^m$ 名选手，这 n 名选手被分成 $n/2$ 组，每组内都要进行比赛. 每一场比赛的败者将被淘汰而胜者将晋级下一轮，这个过程持续到只有一名选手留下. 假设我们有一场淘汰赛，其中有 8 名选手.
(a) 第一轮之后有多少种可能的结果?(如一种结果是 1 赢了 2，3 赢了 4，5 赢了 6，7 赢了 8)
(b) 这场淘汰赛有多少种可能的结果，其中每个结果是否包含了所有轮次的完整信息?
解:
(a) 先将 8 名选手分为 4 组，分法为 $\binom{8}{2,2,2,2}=\frac{8!}{2^4}$;
当前我们不将分组编组序，有 $\binom{8}{2,2,2,2}/4!=8!/(2^4\times 4!)$ 种可能;
最后，进行比赛时，每组有 2 种可能，所以，总的有 $8!\times 2^4/(2^4\times 4!)=8!/4!$ 种可能
(b) 以此类推，4 进 2 半决赛有 $4!/2!$ 种可能，2 进 1 决赛有 $2!/1!$ 种可能，所以，最终结果有 $(8!/4!)\times(4!/2!)\times(2!/1!)=8!$ 种可能

1.5 方程的整数解个数

命题 1.1 共有 $\binom{n-1}{r-1}$ 个不同的正整数向量 $(x_1,x_2,\cdots,x_r)$ 满足

$$x_1+x_2+\cdots+x_r=n \qquad x_i>0, i=1,\cdots,r$$

原理: 如下

$$\boxed{\underbrace{1|1|1|\cdots|1|1}_{n\text{个}1}}$$

1. n 个 1 代表总和为 n;
2. | 代表切割数字的位置，使得 x_1 等于第一个切割位置之前的数字总和，x_2 等于第一个切割位置和第二个切割位置之间的数字总和,$\cdots$,x_r 等于最后一个切割位置之后的数字总和;
3. 从 $n-1$ 个间隔中，插入 $r-1$ 切割符，使数字总共划分为 r 份.

命题 1.2 共有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 个不同的非负整数向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_r)$ 满足

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$$

原理:
因为 $x_1 + x_2 + \cdots + x_r = n$ 的非负整数解个数与 $y_1 + y_2 + \cdots + y_r = n + r$ 的正整数解个数是相同的 (令 $y_i = x_i + 1, i = 1, \cdots, r$)

例 1. 一位投资者有 2 万美元可投资到 4 个项目上，且每种投资必须是 1000 美元的整数倍.
(1) 如果要求将 2 万美元全部投资，一共有多少种可行的投资方法?
(2) 如果不要求将钱全部投资呢?
解:
(1) 根据已知和问题，可得如下方程:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$
根据命题 1.2，得:
$\binom{20+4-1}{4-1} = 1771$
所以，一共有 1771 种可能的投资方式
(2) 可以将未投资的钱视为第五个” 项目”，可得如下方程:
$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$
根据命题 1.2，得:
$\binom{20+5-1}{5-1} = 10626$

所以，一共有 10626 种可能的投资方式

例 2. 在 $(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n$ 的展开式中，一共有多少项?
解:

$$(x_1+x_2+\cdots+x_r)^n=\sum\binom{n}{n_1,\cdots,n_r}x_1^{n_1}\cdots x_r^{n_r}$$

满足方程 $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$
根据命题 1.2，得:
$\binom{n+r-1}{r-1}$
所以，一共有 $\binom{n+r-1}{r-1}$ 项