1.$x \to a$时的有理函数

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x-1)=1$$

2.$x \to a$时的平方根的极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}&=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}\times\frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}+4}\\&=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt(x^2-9)+4)}\\&=\lim_{x\to 5}\frac{(x+5)(x-5)}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}\\&=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{\sqrt{x^2-9}+4}\\&=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

**$\sqrt{x^2-9}-4$与$\sqrt{x^2-9}+4$互为共轭根式

3.$x \to \infty$时的有理函数的极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{x-8x^4}{7x^4+5x^3+2000x^2-6}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x-8x^4}{-8x^4}}{\frac{7x^4+5x^3+2000x^2-6}{7x^4}}\times\frac{-8x^4}{7x^4}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{8x^3}+1}{1+\frac{5}{7x}+\frac{2000}{7x^2}-\frac{6}{7x^4}}\times\frac{-8x^4}{7x^4}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{-8x^4}{7x^4}\\&=-\frac{8}{7}\end{aligned}$$

4.$x \to \infty$时的多项式型函数的极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{16x^4+8}+3x}{2x^2+6x+1}&=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{16x^4+8}+3x}{4x^2}}{\frac{2x^2+6x+1}{2x^2}}\times\frac{4x^2}{2x^2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{16x^4}}+\frac{3}{4x}}{1+\frac{6}{2x}+\frac{1}{2x^2}}\times\frac{4}{2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+0}+0}{1+0+0}\times 2\\&=2\end{aligned}$$

5.$x\to-\infty$时的有理函数的极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^6+8}}{2x^3+6x+1}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{\sqrt{4x^6+8}}{\sqrt{4x^6}}}{\frac{2x^3+6x+1}{2x^3}}\times\frac{\sqrt{4x^6}}{2x^3}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{8}{4x^6}}}{1+\frac{6}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}}\times\frac{-2x^3}{2x^3}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{1+0}}{1+0+0}\times(-1)\\&=-1\end{aligned}$$

如果$x<0$,并且想写$\sqrt[n]{x^{\text{某次幂}}}=x^m$,那么需要在$x^m$之前加一个负号的唯一情形是:n是偶数且m是奇数

6.包含绝对值的函数的极限

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^-}\frac{|x|}{x}&=\lim_{x\to0^-}\frac{-x}{x}=-1\\\lim_{x\to0^+}\frac{|x|}{x}&=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{x}=1\end{aligned}$$

常用因式分解:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2) \tag{1}$$