一、矩阵运算

$m\times n$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的**对角线元素**是 a_{11},a_{22},a_{33},$\cdots$, 它们组成 A 的**主对角线**.

对角矩阵是一个方阵, 它的非对角线元素全是 0. 例如 $n\times n$ 单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$.

元素全是 0 的 $m\times n$ 矩阵称为**零矩阵**, 用 $\mathbf{0}$ 表示.

若两个矩阵有相同的维数 (即有相同的行数和列数), 而且对应元素相同, 则称该两个矩阵**相等**

若 r 是标量而 A 是矩阵, 则**标量乘法** rA 是一个矩阵, 它的每一列是 A 的对应列的 r 倍.

定理 1 设 A,B,C 是相同维数的矩阵, r 与 s 为数, 则有

a. $A+B=B+A$

b. $(A+B)+C=A+(B+C)$

c. $A+0=A$

d. $r(A+B)=rA+rB$

e. $(r+s)A=rA+sA$

f. $r(sA)=(rs)A$

定义 若 A 是 $m\times n$ 矩阵, B 是 $n\times p$ 矩阵, B 的列是 $\boldsymbol{b}_1$,$\cdots$,$\boldsymbol{b}_p$, 则乘积 AB 是 $m\times p$ 矩阵, 它的各列是 $A\boldsymbol{b}_1$,$\cdots$,$A\boldsymbol{b}_p$, 即

$$AB=A[\boldsymbol{b}_1\ \boldsymbol{b}_2\ \cdots\ \boldsymbol{b}_p]=[A\boldsymbol{b}_1\ A\boldsymbol{b}_2\ \cdots\ A\boldsymbol{b}_p]$$

AB 的每一列都是 A 的各列的线性组合, 以 B 的对应列的元素为权.

计算 $\boldsymbol{AB}$ 的行列法则

若乘积 AB 有定义, 则 AB 的第 i 行第 j 列的元素是 A 的第 i 行与 B 的第 j 列对应元素乘积之和. 若 $(AB)_{ij}$ 表示 AB 的 (i,j) 元素, A 为 $m\times n$ 矩阵, 则

$$(AB)_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$$

定理 2 设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 和 C 的维数使下列各式的乘积有意义.

a. $A(BC) = (AB)C$ (乘法结合律)

b. $A(B+C) = AB + AC$ (乘法左分配律)

c. $(B+C)A = BA + CA$ (乘法右分配律)

d. $r(AB) = (rA)B = A(rB)$, r 为任意数

e. $I_m A = A = AI_m$ (矩阵乘法的恒等式)

乘积 AB 的因子关系为: A 被 B **右乘**, 或 B 被 A **左乘**
若 AB=BA, 我们称 A 和 B 彼此**可交换**

警告

1. 一般情况下, $AB \neq BA$.
2. 消去律对矩阵乘法不成立, 即若 $AB = AC$, 一般情况下, $B = C$ 并不成立.
3. 若乘积 AB 是零矩阵, 一般情况下, 不能断定 A=0 或 B=0.

给定 $m \times n$ 矩阵, 则 A 的**转置**是一个 $n \times m$ 矩阵, 用 A^T 表示, 它的列是由 A 的对应行构成的.

定理 3 设 A 与 B 表示矩阵, 其维数使下列和与积有定义, 则

a. $(A^T)^T = A$.

b. $(A+B)^T = A^T + B^T$.

c. 对任意数 r, $(rA)^T = rA^T$.

d. $(AB)^T = B^T A^T$.

若干个矩阵的乘积的转置等于它们的转置的乘积, 但相乘的顺序相反.

二、矩阵的逆

A 为 $n \times n$ 矩阵, 若存在一个 $n \times n$ 矩阵 C, 使得

$$CA = \boldsymbol{I}_n \qquad \text{且} AC = \boldsymbol{I}_n$$

则称 A **可逆**, 并且 C 是 A 的**逆**.

若 A 可逆, 它的逆是唯一的, 我们将它记为 A^{-1}, 则

$$A^{-1}A = I \qquad \text{且} AA^{-1} = I$$

不可逆矩阵也称为**奇异矩阵**.
可逆矩阵也称为**非奇异矩阵**.

定理 4 设 $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$. 若 $ad - bc \neq 0$, 则 A 可逆且

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

若 $ad - bc = 0$, 则 A 不可逆.

数 $ad - bc$ 称为 A 的**行列式**, 记为

$$\det A = ad - bc$$

定理 5 若 A 是可逆 $n \times n$ 矩阵, 则对每一 $\mathbb{R}^n$ 中的 $\boldsymbol{b}$, 方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有唯一解 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

胡克定律
公式如下

$$\boldsymbol{y} = D\boldsymbol{f}$$

其中 D 为**弹性矩阵**, 它的逆称为**刚性矩阵**, $\boldsymbol{f}$ 表示它在各个点受的力, $\boldsymbol{y}$ 表示各个点的形变量.

定理 6
a. 若 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也可逆而且 $(A^{-1})^{-1} = A$.
b. 若 A 和 B 都是 $n \times n$ 可逆矩阵, 则 AB 也可逆, 且其逆是 A 和 B 的逆矩阵按相反顺序的乘积, 即

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

c. 若 A 可逆, 则 A^T 也可逆, 且其逆是 A^{-1} 的转置, 即 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

若干个 $n \times n$ 可逆矩阵的积也是可逆的, 其逆等于这些矩阵的逆按相反顺序的乘积.

把单位矩阵进行一次初等行变换, 就得到初等矩阵.

若对 $m \times n$ 矩阵 A 进行某种初等行变换, 所得矩阵可写成 EA, 其中 E 是 $m \times m$ 矩阵, 是由 I_m 进行同一行变换所得.

每个初等矩阵 E 是可逆的, E 的逆是一个同类型的初等矩阵, 它把 E 变回 I.

定理 7 $n \times n$ 矩阵 A 是可逆的, 当且仅当 A 行等价于 I_n, 这时, 把 A 化简为 I_m 的一系列初等行变化同时把 I_n 变成 A^{-1}.

求 A^{-1} 的算法
把增广矩阵 $[A\ I]$ 进行行化简. 若 A 行等价于 I, 则 $[A\ I]$ 行等价于 $[I\ A^{-1}]$, 否则 A 没有逆.

三、可逆矩阵的特征

定理 8 (可逆矩阵定理) 设 A 为 $n \times n$ 矩阵, 则下列命题是等价的, 即对某一特定的 A, 它们同时为真或同时为假.

a. A 是可逆矩阵.

b. A 行等价于 $n \times n$ 单位矩阵.

c. A 有 n 个主元位置.

d. 方程 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 仅有平凡解.

e. A 的各列线性无关.

f. 线性变换 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 是一对一的.

g. 对 $\mathbb{R}^n$ 中任意 $\boldsymbol{b}$, 方程 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 至少有一个解.

h. A 的各列生成 $\mathbb{R}^n$,

i. 线性变换 $\boldsymbol{x} \mapsto A\boldsymbol{x}$ 把 $\mathbb{R}^n$ 映上到 $\mathbb{R}^n$.

j. 存在 $n \times n$ 矩阵 C 使 $CA = I$.

k. 存在 $n \times n$ 矩阵 D 使 $AD = I$.

l. A^T 是可逆矩阵.

设 A 和 B 为方阵, 若 $AB = I$, 则 A 和 B 都是可逆的, 且 $B = A^{-1}$, $A = B^{-1}$.

定理 9 设 $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 为线性变换, A 为 T 的标准矩阵. 则 T 可逆当且仅当 A 是可逆矩阵.

若一个 $m \times n$ 矩阵的主对角线以下元素全为 0, 则称之为**上三角矩阵**.

若一个 $m \times n$ 矩阵的主对角线以上元素全为 0, 则称之为**下三角矩阵**.

四、分块矩阵

形如

$$A = \left[\begin{array}{rrr|rr|r} 3 & 0 & -1 & 5 & 9 & -2 \\ -5 & 2 & 4 & 0 & -3 & 1 \\ \hline -8 & -6 & 3 & 1 & 7 & -4 \end{array}\right]$$

为矩阵 A 的 2×3 **分块矩阵**, 也可表示为

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix}$$

设 A 为 $m \times n$ 矩阵, B 为 $n \times p$ 矩阵, 当 A 的列的分法与 B 的行的分法一致时, 可计算 AB. 如下:

$$A = \left[\begin{array}{rrr|rr} 2 & -3 & 1 & 0 & -4 \\ 1 & 5 & -2 & 3 & -1 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 7 & -1 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

$$B = \left[\begin{array}{rr} 6 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 7 \\ \hline -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{rr} -5 & 4 \\ -6 & 2 \\ \hline 2 & 1 \end{array}\right]$$

定理 10 ($\boldsymbol{AB}$ 的列行展开)

若 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, 则

$$\begin{aligned} AB &= [col_1(A)\ col_2(A)\ \cdots\ col_n(A)] \begin{bmatrix} row_1(B) \\ row_2(B) \\ \vdots \\ row_n(B) \end{bmatrix} \\ &= col_1(A)row_1(B) + \cdots + col_n(A)row_n(B) \end{aligned}$$

五、矩阵因式分解

设 A 是 $m\times n$ 矩阵, 它可以行化简为阶梯形 (化简步骤不包含对换变换), 则 A 可写成 $A=LU$. 其中, L 是 $m\times m$ 下三角矩阵, 主对角线元素全是 1; U 是 A 的一个 $m\times n$ 阶梯形矩阵.

LU 分解的算法

1. 如果可能的话, 用一系列的行倍加变换把 A 化为阶梯形 U(即 $L^{-1}A=U$).

2. 填充 L 的元素使相同的行变换把 L 变为 I.

LU 分解图解:

$$A=\begin{bmatrix}2&4&5&-2\\-4&-5&-8&1\\2&-5&1&8\\-6&0&-3&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&4&5&-2\\0&3&2&-3\\0&-9&-4&10\\0&12&12&-5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&4&5&-2\\0&3&2&-3\\0&0&2&1\\0&0&4&7\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2&4&5&-2\\0&3&2&-3\\0&0&2&1\\0&0&0&5\end{bmatrix}=U$$

$$\downarrow\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow\qquad\qquad\downarrow$$

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&&1&0\\-3&&&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-3&1&0\\-3&4&&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-3&1&0\\-3&4&2&1\end{bmatrix}\quad\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&1&0&0\\1&-3&1&0\\-3&4&2&1\end{bmatrix}=L$$

六、列昂惕夫投入产出模型

列昂惕夫投入产出模型或生产方程

$$\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{x}+\boldsymbol{d}$$

定理 11 设 C 为某一经济体系的消耗矩阵, $\boldsymbol{d}$ 为最终需求. 若 C 和 $\boldsymbol{d}$ 的元素非负, C 的每一列的和小于 1, 则 $(I-C)^{-1}$ 存在, 产出向量

$$\boldsymbol{x}=(I-C)^{-1}\boldsymbol{d}$$

有非负元素, 且是下列方程的唯一解:

$$\boldsymbol{x}=C\boldsymbol{x}+d$$

七、计算机图形学中的应用

物体的平移并不直接对应于矩阵乘法, 因为平移并非线性变换, 所以引入**齐次坐标**

$\mathbb{R}^2$ 中每个点 (x,y) 对应于 $\mathbb{R}^3$ 中的点 $(x,y,1)$, $(x,y,1)$ 为 (x,y) 的**齐次坐标**

$(x,y,1)\mapsto(x+h,y+k,1)$ 的平移变换实现:

$$\begin{bmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+h\\y+k\\1\end{bmatrix}$$

$\mathbb{R}^2$ 中任意线性变换可以通过齐次坐标乘以分块矩阵 $\begin{bmatrix}A&0\\0&1\end{bmatrix}$ 实现, 其中 A 是 2×2 矩阵.

$(x,y,z,1)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中点 (x,y,z) 的齐次坐标. 若 $H\neq0$, 则 (X,Y,Z,H) 为 (x,y,z) 的齐次坐标, 且

$$x=\frac{X}{H},y=\frac{Y}{H},z=\frac{Z}{H}$$

点 (x,y,z) 在 xy 平面上的透视投影坐标为 $(\frac{x}{1-z/d},\frac{y}{1-z/d},0)$. 其中, d 为 z 轴观测位置 $(0,0,d)$

绕 $\mathbb{R}^2$ 中一点 p 的旋转是这样实现的: 首先把图形平移 $-p$, 然后绕原点旋转, 最后平移 p.