1. 使用定义求导

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x) = 1}$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^a) = ax^{a-1}}$$

2. 运算法则

(1) 常数倍

$$\frac{d}{dx}(Cx^a) = (Ca)x^{a-1}$$

(2) 加/减法法则

$$\frac{d}{dx}(x^a+\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x^a) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

(3) 乘积法则

乘积法则 (版本 1) 如果 $h(x)=f(x)g(x)$, 那么 $h'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$.

乘积法则 (版本 2) 如果 $y=uv$, 则

$$\frac{dy}{dx}=v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}$$

乘积法则 (三个变量) 如果 $y=uvw$, 则

$$\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}vw+u\frac{dv}{dx}w+uv\frac{dw}{dx}$$

(4) 商法则

商法则 (版本 1) 如果 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 那么

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

商法则 (版本 2) 如果 $y=\frac{u}{v}$, 那么

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

(5) 链式求导法则

链式求导法则 (版本 1) 如果 $h(x)=f(g(x))$, 那么 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$.

链式求导法则 (版本 2) 如果 y 是 u 的函数, 并且 u 是 x 的函数, 那么

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

3. 导数伪装的极限

例.

$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}$

证明:

设 $f(x)=\sqrt[5]{x}$

$\because f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{x+h}-x}{h}=\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$\therefore f'(32)=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-\sqrt[5]{32}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}=\frac{1}{5}\times 32^{-\frac{4}{5}}=\frac{1}{5}\times\frac{1}{16}=\frac{1}{80}$