第一章　方法、图像和直线

函数是将一个对象转化为另一个对象的规则. 起始对象称为**输入**, 来自称为**定义域**的集合. 返回对象称为**输出**, 来自称为**上域**的集合.

值域是所有可能的输出所组成的集合.

例 1.

$f(x) = x^2(x \in \mathbb{R}, f(x) \in \mathbb{R})$

在该示例中, 定义域为 $\mathbb{R}$, 值域为 $\mathbb{R}^+$, 上域为 $\mathbb{R}$

区间定义:

$[a, b]$ 的含义为 $a \leqslant x \leqslant b$, 称为**闭区间**.

(a, b) 的含义为 $a < x < b$, 称为**开区间**.

$[a, b)$ 的含义为 $a \leqslant x < b$, 称为**半开半闭区间**.

注意事项:

(1) 分数的分母不能是零.

(2) 不能取负数的偶次方根.

(3) 不能取负数或零的对数.

垂线检验: 当任何一条垂直线与图像相交多于一次时, 该图像不是函数; 反

之则图像为函数

从输出 y 出发, 这个新的函数发现一个且仅有一个输入 x 满足 $f(x) = y$, 这个新的函数称为**反函数**. 写作 f^{-1}.

水平线检验: 如果每一条水平线和一个函数的图像相交至多一次, 那么这个函数有反函数; 如果即使只有一条水平线和函数的图像相交多余一次, 那么这个函数没有反函数.

令 $g(x) = x^2, h(x) = \cos(x)$, 而 $f(x) = \cos(x^2)$, 则 $f(x) = h(g(x))$, 也可表示为 $f = h \circ g$, f 为 g 与 h 的**复合**, $f(x)$ 为**复合函数**.

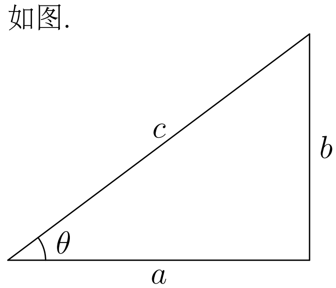
如果 f 对定义域内的所有 x 有 $f(-x) = f(x)$, 则 f 为**偶函数**.
如果 f 对定义域内的所有 x 有 $f(-x) = -f(x)$, 则 f 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴具有镜面对称性.
奇函数的图像关于原点有 180^o 的点对称性.

形如 $f(x) = mx + b$ 的函数叫做**线性函数**.

第二章　三角学回顾

如图.



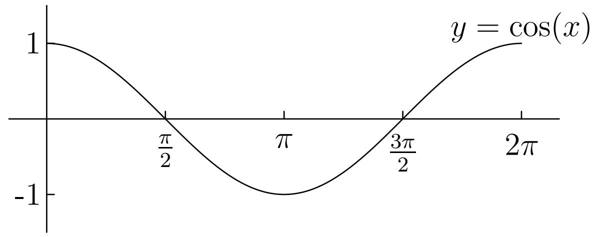
基本公式列表:

$$
\begin{array}{lll}
\sin(\theta) = \dfrac{b}{c} & \cos(\theta) = \dfrac{a}{c} & \tan(\theta) = \dfrac{b}{a} \\
\csc(\theta) = \dfrac{1}{\sin(\theta)} = \dfrac{c}{b} & \sec(\theta) = \dfrac{1}{\cos(\theta)} = \dfrac{c}{a} & \cot(\theta) = \dfrac{1}{\tan(\theta)} = \dfrac{a}{b}
\end{array}
$$

常见三角函数值:

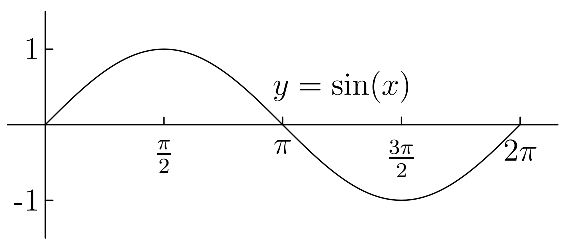
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\star$

求三角函数值步骤:



1. 找出角所在象限;
2. 当角在 x/y 轴上, 参考三角函数图像;
3. 如果角不在 x/y 轴上, 找出该角与 x 轴形成的最小角度, 即**参考角**;
4. 当参考角为特殊角时, 参考常见三角函数值表;
5. 利用 ASTC(all/sin/tan/cos) 决定是否需要添加负号.

三角函数图像:

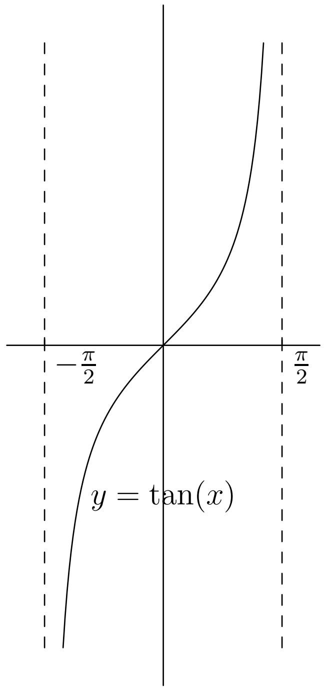


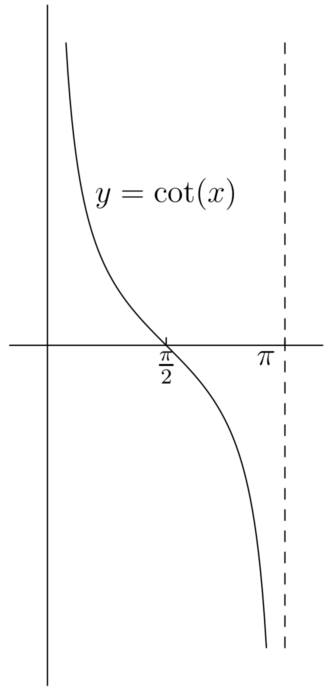
毕达哥拉斯定理:

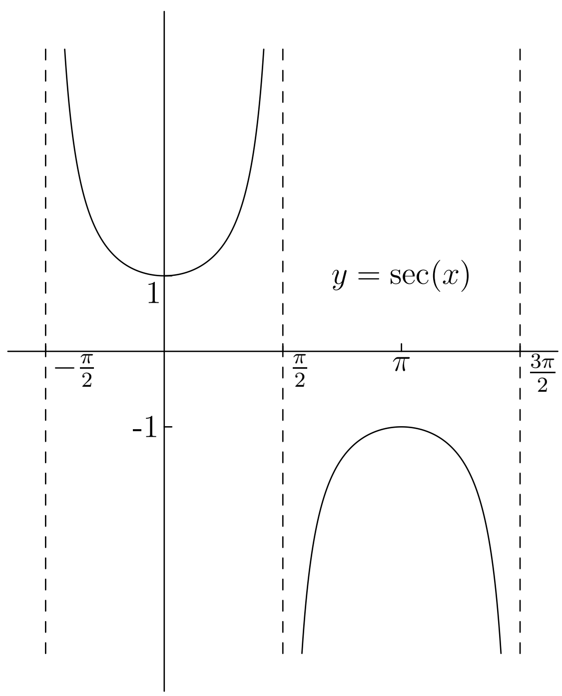
$$\boxed{\cos^2(x)+\sin^2(x)=1}$$

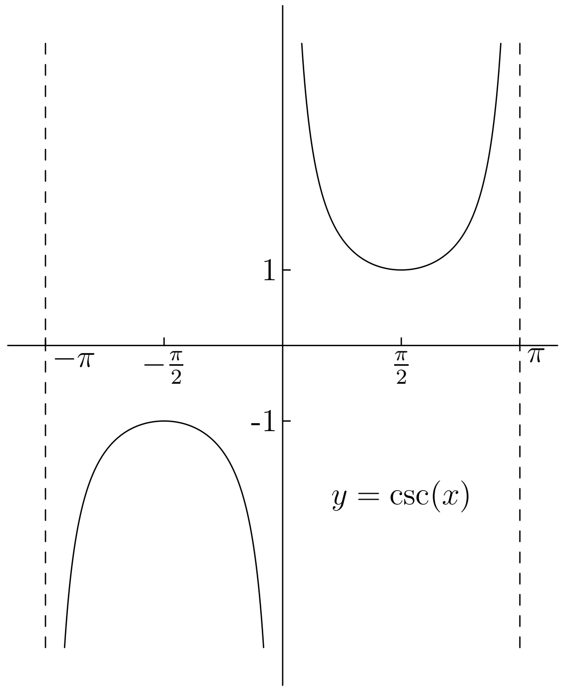
等式两边除以 $\cos^2(x)$:

$$\boxed{1+\tan^2(x)=\sec^2(x)}$$


$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan(x)$


$y = \cot(x)$
$\frac{\pi}{2}$
π


$y = \sec(x)$
1
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
π
$\frac{3\pi}{2}$
-1



等式两边除以 $\sin^2(x)$:

$$\boxed{\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)}$$

余角公式:

$$\boxed{\cos(x) = \sin(\tfrac{\pi}{2} - x),\cot(x) = \tan(\tfrac{\pi}{2} - x),\csc(x) = \sec(\tfrac{\pi}{2} - x)}$$

$$\boxed{\sin(x) = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x),\tan(x) = \cot(\tfrac{\pi}{2} - x),\sec(x) = \csc(\tfrac{\pi}{2} - x)}$$

和/差角公式:

$$\boxed{\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)}$$

倍角公式:

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)}$$

$$\boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)}$$

第三章　极限导论

极限: 描述函数的自变量接近于某一个值时, 相对应的函数值变化的趋势. 表示为:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

左极限: 描述函数的自变量从左边接近于某一个值时, 相对应的函数变化的趋势. 表示为

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

右极限: 描述函数的自变量从右边接近于某一个值时, 相对应的函数变化的趋势. 表示为

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

当左极限与右极限不相等时, 不存在双侧极限.

“f 在 $x = a$ 处有一条垂直渐近线” 说的是, $\lim_{x \to a^+} f(x)$ 和 $\lim_{x \to a^-} f(x)$, 其中至少有一个极限是 ∞ 或-∞

“f 在 $y = L$ 处有一条右侧水平渐近线” 意味着 $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

“f 在 $y = M$ 处有一条左侧水平渐近线” 意味着 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = M$.

三明治定理 (夹逼定理):

如果对于所有在 a 附近的 x 都有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, 且 $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L$, 则 $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

第四章　求解多项式的极限问题

$1.x \to a$ 时的有理函数的极限

有理函数: 形如 $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ 的函数, 其中 $p(x), q(x)$ 都是多项式.

1) 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{m}{n}$ 时:

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = \dfrac{m}{n}$

例.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 9}{x - 2} = \lim_{x \to -1} \frac{x - 9}{x - 2} = \frac{1 - 9}{1 - 2} = 8$$

2) 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{0}{0}$ 时:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 进行分子分母约分

例.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 2} = \lim x \to 2x - 1 = 2 - 1 = 1$$

3) 当 $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)} = \frac{m}{0}$ 时:

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ 判断极限点两边的极限是否同为 ∞ 或 $-\infty$

例.

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2x^2 - x - 6}{x(x-1)^3} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}$

$$\because \lim_{x\to 1^-}\frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}=\frac{(+)(-)}{(+)(-)}=+$$
$$\lim_{x\to 1^+}\frac{(2x+3)(x-2)}{x(x-1)^3}=\frac{(+)(-)}{(+)(+)}=-$$
$\therefore f(x)$无极限值

2.$x\to a$ 时的平方根的极限

共轭因式: 若 S 是含有根式的已知表达式, 若存在一个不恒等于零的表达式 M, 使乘积 S×M 不含根式, 则 M 为 S 的共轭因式. 反之, S 也为 M 的共轭因式.

设 $f(x)=\frac{g(x)\pm h(x)}{p(x)\pm q(x)}$, 其中, g(x)/h(x)/p(x)/q(x) 其中一个为根式

当 $f(a)=\frac{g(a)-h(a)}{p(a)-q(a)}=\frac{0}{0}$ 时, 将分子分母同时乘以含根号部分的共轭因式.

例.

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{x^2-9}-4}{x-5}\times\frac{\sqrt{x^2-9}+4}{\sqrt{x^2-9}+4}=\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{(x-5)(\sqrt{x^2-9}+4)}$$
$$=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{\sqrt{x^-9}+4}=\frac{5+5}{\sqrt{25-9}+4}=\frac{5}{4}$$

3.$x\to\infty/-\infty$ 时的有理函数的极限

$$\because \lim_{x\to\infty}\frac{C}{x^n}=0$$
$$\therefore \lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}{a_0x^m}\times a_0x^m}{\frac{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}{b_0x^n}\times b_0x^n}$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m}{b_0x^n}$$
$$=\frac{a_0}{b_0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^n}$$

情况分布:

(1)m=n, 极限为有限的且非零;

(2)m>n, 极限为 ∞ 或 $-\infty$;

(3)m<n, 极限为 0.

4.$x \to \infty$ 时的多项式型函数的极限

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \cdots + a_m}}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m}}{\sqrt{a_0}x^{\frac{m}{2}}} \times \sqrt{a_0}x^{\frac{m}{2}}}{\frac{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}{b_0x^n} \times b_0x^n}$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{a_0}x^{\frac{m}{2}}}{b_0x^n}$$
$$= \frac{\sqrt{a_0}}{b_0} \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\frac{m}{2}}}{x^n}$$

5.$x \to -\infty$ 时的多项式型函数的极限

与类型 4 类似. 但有一种特殊情况:

如果 $x < 0$, 并且 $\sqrt[n]{x^p} = x^m$, 那么需要在 x^m 之前加一个负号的唯一情形是: n 是偶的而 m 是奇的.

6. 包含绝对值的函数的极限

$\because p(x) > 0, |p(x)| = p(x)$

$p(x) < 0, |p(x)| = -p(x)$

$$\therefore \lim_{x\to-2^-} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{-(x+2)}{x+2} = -1$$
$$\lim_{x\to-2^+} \frac{|x+2|}{x+2} = \frac{x+2}{x+2} = 1$$
$$\therefore \lim_{x\to-2} \frac{|x+2|}{x+2} \text{无双侧极限}$$

第五章　连续性和可导性

1. 在一点处连续

$\boxed{\text{如果 } \lim_{x\to a} f(x) = f(a)\text{, 函数 } f \text{ 在点 } x = a \text{ 处连续}}$

2. 在区间上连续

在区间 (a, b) 上连续 - 函数在区间范围内的所有点都连续 (不包括 a, b)

在区间 $[a, b]$ 上连续 - (1) 函数在 (a,b) 上连续; (2) 函数在 $x = a$ 处右连续 (即 $\lim_{x\to a^+} = f(a)$); (3) 函数在 $x = b$ 处左连续 (即 $\lim_{x\to a^-} = f(b)$)

介值定理: 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 并且 $f(a) < 0$ 且 $f(b) > 0$, 那么在区间 (a, b) 上至少有一点 c, 使得 $f(c) = 0$. 代之以 $f(a) > 0$ 且 $f(b) < 0$, 同样成立.

最大值与最小值定理: 如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 那么 f 在 $[a, b]$ 上至少有一个最大值和一个最小值.

求导公式:

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

二阶及多阶导数:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{\mathrm{d}^3 y}{\mathrm{d}x^3}$$

$$\cdots$$

$\boxed{\text{如果一个函数 } f \text{ 在 } x \text{ 上可导, 那么它在 } x \text{ 上连续}}$

第六章　求解微分问题

1. 使用定义求导

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x) = 1}$$

证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\times\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2}}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{h}{x(x+h)}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}-\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) = ax^{a-1}}$$

2. 运算法则

(1) 常数倍

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(Cx^a) = (Ca)x^{a-1}$$

(2) 加/减法法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a + \sqrt{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^a) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{x})$$

(3) 乘积法则

乘积法则 (版本 1)　如果 $h(x) = f(x)g(x)$, 那么 $h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

乘积法则 (版本 2)　如果 $y = uv$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

乘积法则 (三个变量)　如果 $y = uvw$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}vw + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}w + uv\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$$

(4) 商法则

商法则 (版本 1)　如果 $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$, 那么

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

商法则 (版本 2)　如果 $y=\frac{u}{v}$, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}}{v^2}$$

(5) 链式求导法则

链式求导法则 (版本 1)　如果 $h(x)=f(g(x))$, 那么 $h'(x)=f'(g(x))g'(x)$.

链式求导法则 (版本 2)　如果 y 是 u 的函数, 并且 u 是 x 的函数, 那么

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

3. 导数伪装的极限

例.

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}$$

证明:

设 $f(x)=\sqrt[5]{x}$

$\because f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{x+h}-x}{h}=\dfrac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}$

$\therefore f'(32)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+h}-\sqrt[5]{32}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{32+h}-2}{h}=\dfrac{1}{5}\times 32^{-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{1}{80}$

4. 分段函数的导数

检验方式: 分段函数再连接点上极限相等, 并且导数再连接点上的极限也相等

例.

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{如果}x\leqslant 0,\\ x^2+1 & \text{如果}x>0.\end{cases}$$

$\because f(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的左极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} 1=1$$

$f(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$

由于, $f'(x)=\begin{cases}0 & \text{如果}x\leqslant 0,\\ 2x & \text{如果}x>0.\end{cases}$

$\because f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的左极限:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 0=0$$

$f'(x)$ 在连接点 $x=0$ 上的右极限:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+} 2x=0$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f'(x)=0$

5. 直接画出导函数的图像

第七章　三角函数的极限和导数

1. 三角函数的极限:

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}=1}$$

实例.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3(2x)\cos(5x^{19})}{x\tan(5x^2)} &= \lim_{x\to 0}\frac{[\frac{(\sin(2x))^3}{(2x)^3}\times(2x)^3]\cos(5x^{19})}{x[\frac{\tan(5x^2)}{5x^2}\times(5x^2)]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(\sin(2x))^3}{(2x)^3}\cdot\cos(5x^{19})}{\frac{\tan(5x^2)}{5x^2}}\times\frac{(2x)^3}{x(5x^2)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\frac{\sin(2x)}{2x})^3\cos(5x^{19})}{\frac{\tan(5x^2)}{5x^2}}\times\frac{8x^3}{5x^3}=\frac{8}{5}\end{aligned}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}=0}$$

证明:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x}\times\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2(x)}{x}\times\frac{1}{1+\cos(x)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)}{x}\times\frac{1}{1+\cos(x)}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{x\to 0} \sin(x) \times \frac{\sin(x)}{x} \times \frac{1}{1+\cos(x)} \\
&= 0 \times 1 \times \frac{1}{1+1} = 0
\end{aligned}
$$

对于任意的 x, $\boxed{-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1}$ 和 $\boxed{-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1}$

面对 $x \to a$ 的极限, 而 $a \neq 0$ 时, 有一个很好的一般原则, 那就是用 $t = x - a$ 作替换, 将问题转化为 $t \to 0$

2. 三角函数的导数

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \cos(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cos(x) = -\sin(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tan(x) = \sec^2(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \cot(x) = -\csc^2(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sec(x) = \sec(x)\tan(x)}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \csc(x) = -\csc(x)\cot(x)}$$

第八章　隐函数求导和相关变化率

1. 隐函数求导

例.

$x^2 + y^2 = 4$

推导过程:

设 $u = y^2$, 则:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

原函数两边对 x 求导:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

2. 隐函数求二阶导数

例.

$2y + \sin(y) = \dfrac{x^2}{\pi} + 1$

推导过程:

设 $u = \sin(y)$, 则:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \cos(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

原函数两边对 x 求导:

$$2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\cos(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{\pi} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$$

两边再次对 x 求导:

$$2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\cos(y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{2}{\pi} \quad\Rightarrow\quad 2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\sin(y)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2+\cos(y)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{\pi}$$

$$\Rightarrow (2+\cos(y))\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-\sin(y)(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2=\frac{2}{\pi}$$

将 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$ 带入结果:

$$(2+\cos(y))\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{\pi}+\sin(y)\left(\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{2}{\pi(2+\cos(y))}+\sin(y)\cdot\frac{4x^2}{\pi^2(2+\cos(y))^3}$$

3. 相关变化率

如果 Q 是某个量, 那么 Q 的变化率是 $\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$

设 $x=f(t)$ 和 $y=g(t)$ 为两个变量的变化率, 由于 x 和 y 都是关于时间 t 的函数, 所以 x 与 y 必定存在某种关系, 这种关系称为**相对变化率**

求解相关变化率的方法:

(1) 识别出哪一个量需要求相关变化率;

(2) 写出一个关联所有量的方程;

(3) 对方程关于时间 t 做隐函数求导;

(4) 将已知值带入方程中做替换.

例 1.

用打气筒给一个完美球体的气球充气. 空气以常数速率 12π 立方英寸每秒进入气球.

(1) 当气球的半径达到 2 英寸时, 气球的半径的变化率是多少?

(2) 从外, 当气球的体积达到 36π 立方英寸时, 气球的半径的变化率又是多少?

解:

球体体积公式:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

方程对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 4\pi r^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} \tag{i}$$

(1) 将 $r = 2$ 和 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 12\pi$ 代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 2^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{4}$$

(2) 根据球体体积公式, 得:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

将 $r = 3$ 和 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 12\pi$ 代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 3^2 \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{3}$$

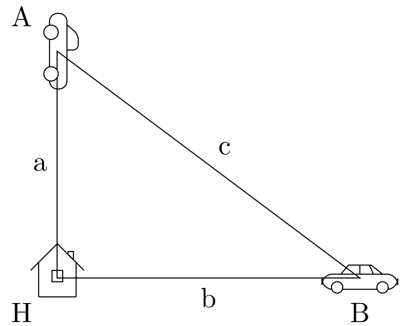
例 2.

假设有两辆汽车 A 和 B. 汽车 A 在一条路上径直向北行驶远离你家, 而汽车 B 在另一条路上径直向西行驶接近你家. 汽车 A 以 55 英里/小时的速度

行驶, 而汽车 B 以 45 英里/小时的速度行驶. 当 A 到达你家北面 21 英里, 而 B 到达你家东面 28 英里时, 两辆汽车间的距离的变化率是多少?

解:

如图.



由图可知:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

对时间 t 作隐函数求导:

$$2a\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} + 2b\frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = 2c\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} \tag{ii}$$

由于 A 在远离 H, 所以距离随着时间增加:

$\dfrac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t} = 55$

而 B 在靠近 H, 所以距离随着时间减少:

$\dfrac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}t} = -45$

将结果带入公式(ii), 得:

$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}t} = -3$

例 3.

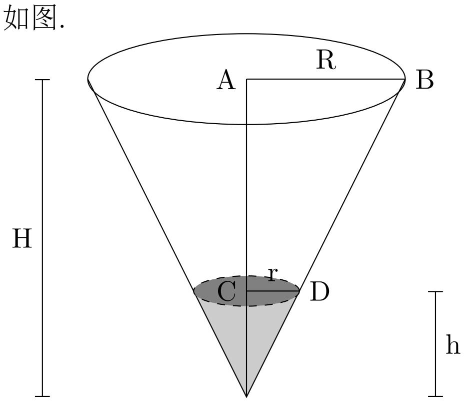
有一个奇怪的巨大的圆锥形水罐 (锥尖在下方), 圆锥的高是圆锥半径的两倍. 如果水是以 8π 立方英尺/秒的速率注入水罐, 求:

(1) 当水罐中水的体积为 18π 立方英尺时, 水位的变化率是多少?

(2) 设想水罐底部有一个小洞, 致使水罐中每一立方英尺的水以一立方英尺每秒的速率流出. 当水罐中水的体积为 18π 立方英尺时, 水位的变化率是多少?

解:

如图.



圆锥体体积公式, 如下:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(1) 将 $V = 18\pi$, $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 得:

$\frac{1}{12}\pi h^3 = 18\pi \quad \Rightarrow \quad h = 6$

将 $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 并对结果两边关于时间 t 隐式求导, 得:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi h^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad 8\pi=9\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{8}{9}$$

(2) 根据 (1) 得:

$h=6$

在当前秒, 水罐以 8π 立方英尺/秒注入水, 并以 18π 立方英尺/秒流出水, 所以:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=8\pi-18\pi=-10\pi$$

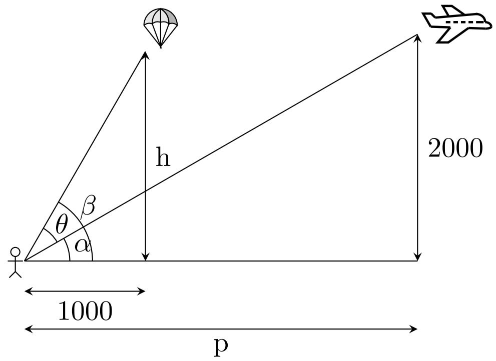
将 $r=\frac{h}{2}$ 代入体积公式, 并对结果两边关于时间 t 隐式求导, 得:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{\pi h^2}{4}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad -10\pi=9\pi\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=-\frac{10}{9}$$

例 4.

有一架飞机保持在 2000 英尺的高度远离你朝正东方向飞行. 飞机以 500 英尺每秒的常数速率飞行. 同时, 不久之前有一个跳伞员从直升飞机 (它已经飞走了) 上跳下来. 跳伞员在你东边 1000 英尺处上空垂直地以 10 英尺每秒的常数速率向下飘落, 跳伞员相对于你的方位角与飞机相对于你的方位角之差被标记为 θ. 求当飞机和跳伞员在同一高度, 但飞机在你东边 8000 英尺时, 角 θ 的变化率是多少?

如图.



由图可知:

$$\tan(\alpha) = \frac{2000}{p} \tag{iii}$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{1000} \tag{iv}$$

$$\theta = \beta - \alpha \tag{v}$$

公式(iii)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\sec^2(\alpha)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{2000}{p^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad (\tan^2(\alpha)+1)\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{2000}{8000^2}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{32000} \times 500 \times \frac{16}{17} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{68}$$

公式(iv)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\sec^2(\beta)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{1000}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad (\tan^2(\beta)+1)\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{100} \quad \Rightarrow$$
$$\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{100} \times \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{500}$$

公式(v)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{500} + \frac{1}{68} = \frac{-17+125}{8500} = \frac{27}{2125}$$

第九章　指数函数和对数函数

1. 指数法则:

(1)　$b^0 = 1$

(2)　$b^1 = b$

(3)　$b^x b^y = b^{x+y}$

(4)　$\dfrac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$

(5)　$(b^x)^y = b^{xy}$

2. 对数法则:

(1)　$\log_b(1) = 0$

(2)　$\log_b(b) = 1$

(3)　$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$

(4)　$\log_b(\dfrac{x}{y}) = \log_b(x) - \log_b(y)$

(5)　$\log_b(x^y) = y\log_b(x)$

(6)　换底法则:

$$\log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$$

3. 自然数 e 相关

(1) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n = e^x$

(2) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$

** $\log_e(x)/\ln(x)/\log(x)$ 具有相同意义

4. 对数函数求导

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x}$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log_b(x) = \frac{1}{x\ln(b)}$

5. 指数函数求导

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(b^x) = b^x\ln(b)$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$

6. 指数函数在 0 附近的行为

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{0+h}-e^0}{h} = \{(e^x)'|x=0\} = 1$$

7. 对数函数在 1 附近的行为

$$\lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)-\ln(1)}{h} = \{\ln'(x)|x=1\} = 1$$

8. 指数函数在 ∞ 或 $-\infty$ 附近的行为

(1) $\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x!} = 0$

9. 对数函数在 ∞ 附近的行为

(1) $\lim\limits_{x\to\infty} \ln(x) = \infty$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^a} = 0$, 其中 $a > 0$

10. 对数函数在 0 附近的行为

(1) $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$

(2) $\lim\limits_{x\to0^+} x^a \ln(x) = 0$

11. 取对数求导法

当函数的底数和指数均为关于 x 的函数时, 通过对函数进行取对数, 让指数转化为乘数, 从而使用复合求导中的乘数求导法则解决问题

例.

$y = x^{\sin(x)}$

由原方程式等号两边取对数, 得:

$$\ln(y) = \sin(x)\ln(x) \tag{i}$$

公式(i)两边关于 x 隐式求导, 得:

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln(x)\cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \ln(x)\cos(x)x^{\sin(x)} + \sin(x)x^{\sin(x)-1}$$

12. 指数增长与指数衰变

(1) 指数增长方程: $P(t) = P_0 e^{kt}$

(2) 指数衰变方程: $P(t) = P_0 e^{-kt}$

13. 双曲函数

(1) 双曲余弦: $\cosh(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

(2) 双曲正弦: $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

(3) 双曲线方程: $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$

(4) 导数:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x)$$

第十章　反函数和反三角函数

1. 导数与反函数

如果 f 在其定义域 (a,b) 上可导且满足以下条件中的任意一条:

(1) 对于所有的在 (a,b) 中的 x, $f'(x)>0$;

(2) 对于所有的在 (a,b) 中的 x, $f'(x)<0$;

(3) 对于所有的在 (a,b) 中的 x, $f'(x)\geqslant 0$ 且对于有限个数的 x, $f'(x)=0$;

(4) 对于所有的在 (a,b) 中的 x, $f'(x)\leqslant 0$ 且对于有限个数的 x, $f'(x)=0$.

则 f 有反函数.

2. 反函数的导数

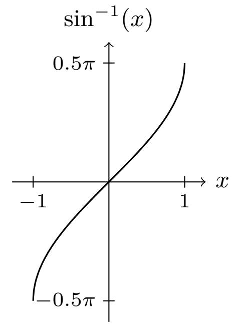
$$\boxed{\text{如果 } y=f^{-1}(x),\text{ 则 } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{f'(y)}=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

** $f(y)$ 是将 $f(x)$ 中的 x 替换为 y 的版本, $f'(y)$ 类似.

3. 反三角函数

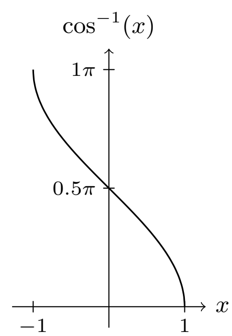
(1)$\sin^{-1}$ 是奇函数; 其定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

(2)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $-1 < x < 1$.



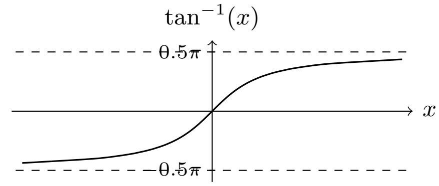
(3)$\cos^{-1}$ 既不是偶函数也不是奇函数; 其定义域为 $[-1,1]$, 值域为 $[0,\pi]$.

(4)$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos^{-1}(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $-1 < x < 1$.



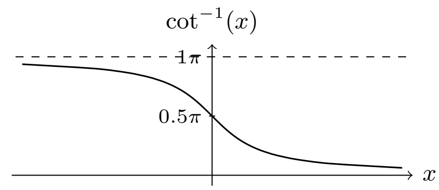
(5)$\tan^{-1}$ 是奇函数; 其定义域是 $\mathbb{R}$ 且值域是 $(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$.

(6) 对于所有的实数 x, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.



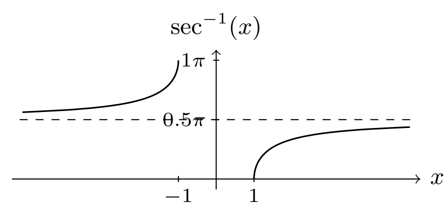
(7)$\cot^{-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域为 $\mathbb{R}$ 且值域是 $(0, \pi)$

(8) 对于所有的实数 x, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot^{-1}(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.



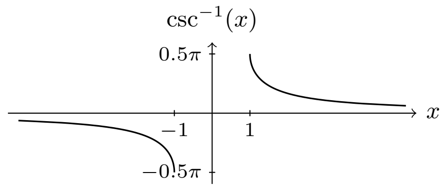
(9)$\sec^{-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 且值域是 $[0, \dfrac{\pi}{2}) \cup (\dfrac{\pi}{2}, \pi]$.

(10) 对于 $x > 1$ 或 $x < -1$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.



(11)$\csc^{-1}$ 是奇函数; 其定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 且值域是 $[-\dfrac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \dfrac{\pi}{2}]$.

(12) 对于 $x > 1$ 或 $x < -1$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc^{-1}(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.



4. 计算反三角函数

化简形如 $\sin^{-1}(\sin(\alpha))$ 的三角函数:

获取指定角 α 的参照角

找到反三角函数定义域中拥有该参照角的角

确定该角的正弦值与 α 参照角的正弦值符号一致

5. 反双曲函数

(1)$\sinh^{-1}$ 是奇函数; 其定义域和值域都是 $\mathbb{R}$.

(2) 对于所有的实数 x, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(3)$\cosh^{-1}$ 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是 $[1,\infty)$ 且值域是 $[0,\infty)$.

(4) 对于 $x > 1$, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

第十一章　导数和图像

1. 函数的极值

> **极值定理** 假设函数 f 定义在开区间 (a,b) 内, 并且点 c 在 (a,b) 区间内. 如果点 c 为函数的局部最大值或最小值, 那么点 c 一定为该函数的临界点. 也就是说, $f'(c)=0$ 或 $f'(c)$ 不存在.

求解闭区间 $[a,b]$ 内的全局最大值和最小值步骤:

(1) 求出 $f'(x)$, 并列出在 (a,b) 中 $f'(x)$ 不存在或 $f'(x)=0$ 的点. 也就是说, 列出在开区间 (a,b) 内所有的临界点.

(2) 把端点 $x=a$ 和 $x=b$ 放入列表.

(3) 对于上述列表中的每个点, 将它们带入 $y=f(x)$ 求出对应函数值.

(4) 找出最大的函数值以及它所对应的 x 值, 得到全局最大值.

(5) 类似于 (4), 得到全局最小值.

2. 罗尔定理

罗尔定理 假设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导．如果 $f(a)=f(b)$，那么在开区间 (a,b) 内至少存在一点 c，使得 $f'(c)=0$.

3. 中值定理

中值定理 假设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 内连续，在开区间 (a,b) 内可导，那么在开区间 (a,b) 内至少有一点 c 使得

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

如果对于在定义域 (a,b) 内的所有 x, 都有 $f'(x)=0$, 那么函数 f 在开区间 (a,b) 内为常数函数.

如果对于任意实数 x 都有 $f'(x)=g'(x)$, 那么有 $f(x)=g(x)+C$(C 为常数).

4. 二阶导数与图像

如果 $x=c$ 点是函数 f 的拐点, 则有 $f''(c)=0$.

如果 $f''(c)=0$, 则 c 点不一定都是函数 f 的拐点.

5. 导数为零的汇总

纯 1 阶导数分析 - 假设 $f'(c) = 0$, 此时情况如下:

(1) 如果从左往右通过 c 点, $f'(x)$ 的符号由正变负, 那么 c 点为局部最大值;

(2) 如果从左往右通过 c 点, $f'(x)$ 的符号由负变正, 那么 c 点为局部最小值;

(3) 如果从左往右通过 c 点, $f'(x)$ 的符号不发生变化, 那么 c 点为水平拐点.

1/2 阶导数综合分析 - 假设 $f'(x) = 0$, 则有:

(1) 如果 $f''(c) < 0$, 那么 $x = c$ 为局部最大值;

(1) 如果 $f''(c) > 0$, 那么 $x = c$ 为局部最小值;

(1) 如果 $f''(c) = 0$, 那么无法判断, 需借助纯 1 阶分析

第十二章　绘制函数图像

1. 建立原函数的符号表格

(1) 建立一个两行的表格, 第一行为 x 取值, 第二行为 $f(x)$ 对应值;

(2) 在第一行以递增顺序列出 x 所有的关于 $f(x)$ 的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;

(3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以'*' 填充;

(4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;

(5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应 $f(x)$ 的值, 大于 0 则填上'+', 小于 0 则填上'-'.

2. 建立一阶导数的符号表格

(1) 建立一个三行行的表格, 第一行为 x 取值, 第二行为 $f'(x)$ 对应值, 第三行为趋势图;

(2) 在第一行以递增顺序列出 x 所有的关于 $f'(x)$ 的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;

(3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以'*' 填充;

(4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;

(5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应 $f'(x)$ 的值, 大于 0 则填上'+', 小于 0 则填上'-';

(6) 在第三行根据第二行的内容, 在该列填上对应内容, '+' 对应'/', '0' 对应'—', '-' 对应'.

3. 建立二阶导数的符号表格

(1) 建立一个两行的表格, 第一行为 x 取值, 第二行为 $f''(x)$ 对应值, 第三行为趋势图;

(2) 在第一行以递增顺序列出 x 所有的关于 $f''(x)$ 的零点和不连续点, 并且每个数的左右都要留出表格;

(3) 填充第二行, 零点直接填 0, 不连续点以'*' 填充;

(4) 在第一行第一个数左边填上小于该数的数字, 在中间两个数之间填上介于之间的数字, 在最后一个数字右边填上大于该数的数字;

(5) 根据第 (4) 步的值, 在第二行计算对应 $f'(x)$ 的值, 大于 0 则填上'+', 小于 0 则填上'-';

(6) 在第三行根据第二行的内容, 在该列填上对应内容, '+' 对应' ", '0' 对应:', '-' 对应' '.

4. 绘制函数图像的完整步骤

(1) 对称性 - 通过 $-x$ 替换 x, 来验证函数的奇偶性;

(2)y 轴截距 - 通过 $x=0$ 来求 y 轴截距;

(3)x 轴截距 - 通过 $y = 0$ 来求 x 轴截距;

(4) 定义域 - 除已直接给出定义域的情况, 可剔除使得分母为 0、偶数根号下的量为负数、对数符号里的量为负数或 0 的数, 并且反三角函数也需注意;

(5) 垂直渐近线 - 分母为 0 且分子不为 0 的位置, 或对数式;

(6) 函数的正负 - 建立关于 $f(x)$ 的符号表格;

(7) 水平渐近线 - 通过计算 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 和 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 来找出函数的水平渐近线; (8) 导数的正负 - 绘制关于一阶导数的符号表格;

(9) 最大值和最小值 - 根据 (8) 的符号表格, 计算所有局部最大/小值, 找出全局最大/小值;

(10) 二阶导数的正负 - 绘制关于二阶导数的符号表格;

(11) 拐点 - 拐点的二阶导数为 0, 并且在该点两侧导数的正反符号相反.

第十三章　最优化和线性化

1. 最优化方案

(1) 识别可能用到的所有变量;

(2) 在极端情况下, 变量的取值范围;

(3) 列出关联不同变量的方程组;

(4) 通过方程组消去变量, 使得因变量 (目标) 可以表示为只关于一个自变量的函数;

(5) 对因变量关于自变量求导, 找出临界点;

(6) 通过一阶或二阶导数的符号表格求出最大值或最小值;

(7) 得出最终结论.

2. 线性化方案

(1) 将估算量写成适当的函数 $f(x)$, 则当前值为 $f(a)$;

(2) 选取某个与值 a 接近的自变量值 b, 并且 $f(b)$ 便于计算;

(3) 找出通过曲线 $f(x)$ 上点 $(b, f(b))$ 的切线, 方程为: $g(x)-f(b) = f'(b)(x-b)$;

(4) 最后结果 $f(x) \approx g(x) = f'(b)(x-b) + f(b)$, 函数 $g(x)$ 称为 $f(x)$ 在

$x = b$ 处的**线性化**.

3. 近似估算 - 牛顿法

牛顿法 假设 a 是对方程 $f(x) = 0$ 的解的一个近似. 如果令

$$b = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$$

则在很多情况下, b 是个比 a 更好的近似.

牛顿法不起作用的四个情况:

(1)$f'(a)$ 的值接近于 0;

(2) 如果 $f(x) = 0$ 有不止一个解, 可能得到的不是你想要的那个解;

(3) 近似可能变得越来越糟. 如: $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$;

(4) 陷入循环.

第十四章　洛必达法则及极限问题

总结

类型 A: $\dfrac{0}{0}$

$$\boxed{\text{如果 } f(a)=g(a)=0, \text{ 那么 } \lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

类型 A: $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$

$$\boxed{\text{如果 } f(a)=g(a)=\pm\infty, \text{ 那么 } \lim_{x\to a}\frac{f(a)}{g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

类型 $B1$: $\infty-\infty$

通过通分或者分子/分母同时乘以共轭表达式来转化为类型 A

类型 $B2$: $0\times\pm\infty$

通过将部分转移到分母, 从而转化为类型 A

类型 C: $1^{\pm\infty}$,0^0,∞^0

通过取对数, 获得类型 $B2$ 或 A, 计算获得极限 L, 再以 e 为底/L 为幂获取最终结果

第十五章　积分

如下公式:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j^2}$$

代表从 $j = 1$ 到 $j = n$ 时, $\frac{1}{j^2}$ 的和.

n 为唯一**变量**.

j 为**虚拟变量**, 也称为**求和指标**.

常用求和公式:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2} \tag{i}$$

$$\sum_{j=1}^{b} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{ii}$$

第十六章　定积分

1. 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

为**定积分**, 表示 “函数 $f(x)$ 对于 x 从 a 到 b 的积分”.

$f(x)$ 为**被积函数**.

a 和 b 为**积分极限**, 也称为**积分端点**.

2. 有向面积积分:

$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是由曲线 $y = f(x)$, 两条垂线 $x = a$ 和 $x = b$, 以及 x 轴所围成的有向面积 (平方单位).

3. 定积分公式:

$$\boxed{\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

$$\boxed{\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0.}$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

$$\boxed{\int_a^b Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

$$\boxed{\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.}$$

4. 两条曲线之间的面积:

在函数 f 和 g 之间的面积 (平方单位)= $\int_a^b |f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$.

5. 曲线与 y 轴围成的面积:

如果 f 存在反函数, $\int_A^B f^{-1}(y)\,\mathrm{d}y$ 就是由函数 $y = f(x)$、直线 $y = A$ 和 $y = B$ 以及 y 轴所围成的面积 (平方单位).

6. 积分比较:

如果对于在区间 $[a,b]$ 内的所有 x 都有 $f(x) \leqslant g(x)$, 那么就有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. 简单估算:

如果对于在 $[a,b]$ 区间内的所有 x 有 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 那么

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a).$$

8. 积分的平均值:

$$\boxed{\text{函数 } f \text{ 在区间 } [a,b] \text{ 内的平均值} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.}$$

9. 积分的中值定理:

如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 那么在开区间 (a,b) 内总有一点 c, 满足 $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

第十七章　微积分的基本定理

1. 第一基本定理

> 微积分的第一基本定理: 如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的, 定义 F 为
>
> $$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b]$$
>
> 则 F 在开区间 (a,b) 内是可导函数, 而且 $F'(x)=f(x)$.

2. 第二基本定理

> 微积分的第二基本定理: 如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上是连续的, F 是 f 的任意一个反导数 (关于x), 那么有
>
> $$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

3. 不定积分法则

$$\boxed{\text{如果 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x) = f(x), \text{ 那么 } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C.}$$

4. 不定积分运算法则

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int Cf(x)\,\mathrm{d}x = C\int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

5. 微分和积分对照公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^a = ax^{a-1} \qquad \int x^a \,\mathrm{d}x = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C(a \neq -1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln(x) = \frac{1}{x} \qquad \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^x = e^x \qquad \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}b^x = b^x \ln(b) \qquad \int b^x \,\mathrm{d}x = \frac{b^x}{\ln(b)} + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \cos(x) \qquad \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = \sin(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x) = -\sin(x) \qquad \int \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \sec^2(x) \qquad \int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec(x) = \sec(x)\tan(x) \qquad \int \sec(x)\tan(x)\,\mathrm{d}x = \sec(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\csc^2(x) \qquad \int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x = -\cot(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x) \qquad \int \csc(x)\cot(x)\,\mathrm{d}x = -\csc(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \sin^{-1}(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \tan^{-1}(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sec^{-1}(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}} \qquad \int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \sec^{-1}(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh(x) = \cosh(x) \qquad \int \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x) + C$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh(x) = \sinh(x) \qquad \int \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x) + C$$

第十八章　积分的方法 I

1. 换元法

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.}$$

例.

$$\int \frac{x}{x^2+8}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+8) = 2x$

$\therefore$ 使用换元法, 设 $t = x^2+8$.

得到 $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\therefore \int \frac{x}{x^2+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+8| + C$$

2. 形如 $\sqrt[b]{ax+b}$ 的积分

在换掉 $\sqrt[n]{ax+b}$ 之前, 设 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ 并对等式 $t^n = ax+b$ 两端求导.

例.

$$\int x\sqrt[5]{3x+2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $t=\sqrt[5]{3x+2}$, 得:

$$x=\frac{1}{3}(t^5-2)$$

等式两端 5 次方并求导, 得:

$$\mathrm{d}x=\frac{5}{3}t^4\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\therefore \int x\sqrt[5]{3x+2}\,\mathrm{d}x &= \frac{5}{9}\int(t^{10}-2t^5)\,\mathrm{d}t=\frac{5}{9}\int t^{10}\,\mathrm{d}t-\frac{10}{9}\int t^5\,\mathrm{d}t\\ &=\frac{5}{99}t^{11}-\frac{5}{27}t^6+C\end{aligned}$$

将 $t=\sqrt[5]{3x+2}$ 代入上述等式, 得:

$$\int x\sqrt[5]{3x+2}\,\mathrm{d}x=\frac{5}{99}(3x+2)^{\frac{11}{5}}-\frac{5}{27}(3x+2)^{\frac{6}{5}}+C$$

3. 分部积分法

$$\boxed{\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x=uv-\int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.}$$

例.

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $u=x$, $v=e^x$, 得:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x=xe^x-\int e^x\,\mathrm{d}x$$

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x=xe^x-e^x+C$$

4. 部分分式

部分分式处理步骤:

(1) 查看分子分母最高项的次数, 如有必要 (分子次数 $\geqslant$ 分母次数) 做除法;

(2) 对分母进行因式分解;

(3) 进行" 分部", 分部类别如下:

1) 线性式:$\dfrac{A}{x+a}$

2) 线性式的平方:$\dfrac{A}{(x+a)^2}+\dfrac{B}{x+a}$

3) 二次多项式:$\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$

4) 线性式的三次方:$\dfrac{A}{(x+a)^3}+\dfrac{B}{(x+a)^2}+\dfrac{C}{x+a}$

5) 线性式的四次方:$\dfrac{A}{(x+a)^4}+\dfrac{B}{(x+a)^3}+\dfrac{C}{(x+a)^2}+\dfrac{D}{x+a}$

(4) 计算分部中分子常数的值;

(5) 求解分母为线性项次幂的积分, 即 (3) 中的 1)/2)/4)/5) 类型. 涉及到对数或负次幂;

(6) 求解分母为二次多项式的积分, 即 (3) 中的 3) 类型. 具体方法: 先配方, 再换元. 涉及到对数和正切函数.

例.

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

对分母 x^2-1 进行因式分解:

$$x^2-1=(x+1)(x-1)$$

进行分部:

$$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$$

求分子常数的值:

$$A(x-1)+B(x+1)=x+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2}, B=\frac{3}{2}$$

求解分母为线性次幂的积分:

$$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

第十九章　积分的方法 II

1. 三角恒等式

(1) 形如 $\sqrt{1 \pm \cos(x)}$

例.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x$$

推导原理:

将一个数与三角函数的运算, 转化为该三角函数半角的三角函数平方, 便于开根号

推导过程:

由 $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$, 得:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x$$

由于 $\sin(x)$ 在定义域区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 内为正, 所以:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\cos(2x)}\,\mathrm{d}x = -\sqrt{2}\cos(x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - (-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$$

(2) 形如 $\sqrt{1-\sin^2(x)}/\sqrt{1+\tan^2(x)}$

例.

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x$$

推导原理:

将根号下一个数字与三角函数平方的运算, 转化为该三角函数角的另一个三角函数的平方, 便于开根号

推导过程:

由 $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x)$, 得:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sqrt{sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} |\sin(x)|\,\mathrm{d}x$$

由于 $\sin(x)$ 在区间 $[0, \pi]$ 内为正, 所以:

$$\int_0^{\pi} \sqrt{1-\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)\Big|_0^{\pi} = 1 - (-1) = 2$$

(3) 形如 $\dfrac{1}{\sec(x)-1}$

例.

$$\int \frac{1}{\sec(x)-1}\,\mathrm{d}x$$

推导原理:

将分子分母同时乘以分母的共轭式

推导过程:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sec(x)-1}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sec(x)-1} \times \frac{\sec(x)+1}{\sec(x)+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec(x)+1}{\sec^2(x)-1}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\sec(x)}{\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

设 $t = \sin(x)$, 则 $\mathrm{d}t = \cos(x)\,\mathrm{d}x$, 得:

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{t} + C = -\csc(x) + C$$

由 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cot(x) = -\csc^2(x)$, 得:

$$\int \frac{1}{\tan^2(x)}\,\mathrm{d}x = \int \cot^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \csc^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = -\cot(x) - x + C$$

$$\therefore \int \frac{1}{\sec(x)-1}\,\mathrm{d}x = -\csc(x) - \cot(x) - x + C$$

(4) 形如 $\sin(\alpha)\cos(\beta)$

例.

$\int \sin(19x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x$

推导原理:

利用和/差角公式:

$$\boxed{\sin(A+B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\cos(A+B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\sin(A-B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)}$$

$$\boxed{\cos(A-B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)}$$

可推断出:

$$\boxed{\sin(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\sin(A+B) + \sin(A-B))}$$

$$\boxed{\cos(A)\cos(B) = \frac{1}{2}(\cos(A+B) + \cos(A-B))}$$

$$\boxed{\sin(A)\sin(B) = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B))}$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\therefore \int \sin(19x)\cos(3x)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int(\sin(19x+3x)+\sin(19x-3x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\int(\sin(22x)+\sin(16x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(22x)}{22}-\frac{\cos(16x)}{16}\right)+C \\ &= -\frac{\cos(22x)}{44}-\frac{\cos(16x)}{32}+C\end{aligned}$$

2. 关于三角函数的幂的积分

(1)sin 或 cos 的幂

I、至少一个乘积项为奇次幂

例.

$$\int \sin^7(x)\cos^4(x)\,\mathrm{d}x$$

解题思路:

将奇次幂分解为 1 次方和 n-1 次方, 并且将剩下的 n-1 偶次幂利用 $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$ 进行转化

推导过程:

设 $t=\cos(x)$, 则 $\mathrm{d}t=-\sin(x)\,\mathrm{d}x$, 得:

$$\begin{aligned}\int \sin^7(x)\cos^4(x)\,\mathrm{d}x &= -\int \sin^6(x)\cos^4(x)(-\sin(x)\,\mathrm{d}x) \\ &= -\int(1-\cos^2(x))^3\cos^4(x)(-\sin(x)\,\mathrm{d}x) \\ &= -\int(1-t^2)t^4\,\mathrm{d}t \\ &= -\int(1-3t^2+3t^4-t^6)t^4\,\mathrm{d}t \\ &= -\int(t^4-3t^6+3t^8-t^{10})\,\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{5}t^5+\frac{3}{7}t^7-\frac{1}{3}t^9+\frac{1}{11}t^{11}+C \\ &= -\frac{1}{5}\cos^5(x)+\frac{3}{7}\cos^7(x)-\frac{1}{3}\cos^9(x)+\frac{1}{11}\cos^{11}(x)+C\end{aligned}$$

II、两个乘积项都为偶次幂

例.

$\int \cos^2(x)\sin^4(x)\,\mathrm{d}x$

解题思路:

利用倍角公式降低幂次

推导过程:

$$
\begin{aligned}
\int \cos^2(x)\sin^4(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(1+\cos(2x))(\frac{1}{2}(1-\cos(2x)))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int (1+\cos(2x))(1-\cos(2x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos(2x)-\cos^2(2x)+\cos^3(2x))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}\int 1\,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \cos(2x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{8}\int \cos^2(2x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int \cos^3(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin(2x) - \frac{1}{16}\int (1+\cos(4x))\,\mathrm{d}x + \frac{1}{8}\int (1-\sin^2(2x))\cos(2x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}\sin(2x) - \frac{1}{16}(x+\frac{\sin(4x)}{4}) + \frac{1}{8}(\frac{\sin(2x)}{2} - \frac{\sin^3(2x)}{6}) + C \\
&= \frac{1}{16}x - \frac{1}{48}\sin^3(2x) - \frac{1}{64}\sin(4x) + C
\end{aligned}
$$

(2)tan 的幂 (cot 类似)

I、当幂为 1

例.

$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x$

解题思路:

转化为 $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 格式

推导过程:

假设 $t = \cos(x)$, 则 $\mathrm{d}t = -\sin(x)\,\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \tan(x)\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= -\ln|t| + C \\ &= -\ln|\cos(x)| + C\end{aligned}$$

II、当幂为 2

例.

$\int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x$

解题思路:

将 $\tan^2(x)$ 转化为 $\sec^2(x) - 1$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int (\sec^2(x) - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x - \int 1\,\mathrm{d}x \\ &= \tan(x) - x + C\end{aligned}$$

III、当幂大于等于 3

例.

$\int \tan^6(x)\,\mathrm{d}x$

解题思路:

首先, 从中提取一个 $\tan^2(x)$ 变化为 $\sec^2(x) - 1$, 然后被积分部分分成两部分. 第一部分为关于 $t = \tan^2(x)$ 的积分; 第二部分为 $\tan(x)$ 的更低次幂, 继续循环当前操作推导过程:

$$\int \tan^6(x)\,\mathrm{d}x = \int \tan^4(x)(\sec^2(x) - 1)\,\mathrm{d}x = \int \tan^4(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \tan^4(x)\,\mathrm{d}x$$

设 $t = \tan(x)$, 则 $\mathrm{d}t = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$, 得:

$$\begin{aligned}\int \tan^4(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x &= \int t^4\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{5}t^5 + C\\ &= \frac{1}{5}\tan^5(x) + C\end{aligned}$$

设 $t = \tan(x)$, 则 $\mathrm{d}t = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$, 得:

$$\begin{aligned}\int \tan^4(x)\,\mathrm{d}x &= \int \tan^2(x)(\sec^2(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \tan^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \tan^2(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \tan^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x - \int (\sec^2(x)-1)\,\mathrm{d}x\\ &= \int \tan^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x - \int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x\\ &= \int t^2\,\mathrm{d}t - \int 1\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}1\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{3}t^3 - t + x + C\\ &= \frac{1}{3}\tan^3(x) - \tan(x) + x + C\end{aligned}$$

合并结果, 得:

$$\int \tan^6(x) = \frac{1}{5}\tan^5(x) - \frac{1}{3}\tan^3(x) + \tan(x) - x + C$$

(3)sec 的特征 (csc 类似)

I、当幂等于 1

例.

$$\int \sec(x)\,\mathrm{d}x$$

解题思路:

分子与分母同时乘以 $\sec(x) + \tan(x)$, 得到形如 $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x$ 的结果

推导过程:

设 $t = \sec(x) + \tan(x)$, 则 $\mathrm{d}t = \sec(x)\tan(x) + \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$, 得:

$$\begin{aligned}
\int \sec(x)\,\mathrm{d}x &= \int \sec(x) \times \frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \\
&= \ln|t| + C \\
&= \ln|\sec(x)+\tan(x)| + C
\end{aligned}$$

II、当幂等于 2

例.

$$\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$$

解题思路:

$$\int \sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \tan(x) + C$$

III、当幂大于等于 3

例.

$$\int \sec^6(x)\,\mathrm{d}x$$

解题思路:

提取出 $\sec^2(x)$, 利用分部积分公式: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$

推导过程:

$$\int \sec^6(x)\,\mathrm{d}x = \int \sec^4(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$$

利用分部积分公式, 可得到以下结论:

$$\begin{aligned}
u &= \sec^4(x) & v &= \tan(x) \\
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 4\sec^4(x)\tan(x) & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \sec^2(x)
\end{aligned}$$

$$\int \sec^4(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \sec^4(x)\tan(x) - 4\int \sec^4(x)\tan^2(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(i)}$$

$$\begin{aligned}\int \tan^2(x)\sec^4(x) &= \int (\sec^2(x)-1)\sec^4(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sec^6(x)\,\mathrm{d}x - \int \sec^4(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(ii)}\end{aligned}$$

将(ii)代入(i), 得:

$$\int \sec^6(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sec^4(x)\tan(x) + \frac{4}{5}\int \sec^4(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{(iii)}$$

$\int \sec^4(x)\,\mathrm{d}x = \int \sec^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$

利用分部积分公式, 得到如下结论:

$$\begin{aligned} u &= \sec^2(x) & v &= \tan(x) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2\sec^2(x)\tan(x) & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= \sec^2(x)\end{aligned}$$

$\int \sec^4(x)\,\mathrm{d}x = \sec^2(x)\tan(x) - 2\int \tan^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x$

设 $t = \tan(x)$, 则 $\mathrm{d}t = \sec^2(x)\,\mathrm{d}x$, 得:

$\int \tan^2(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \int t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}t^2 + C = \frac{1}{3}\tan^3(x) + C$

$$\int \sec^4(x)\,\mathrm{d}x = \sec^2(x)\tan(x) - \frac{2}{3}\tan^3(x) + C \qquad \text{(iv)}$$

将(iv)代入(iii), 得:

$\int \sec^6(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\sec^4(x)\tan(x) + \frac{4}{5}\sec^2(x)\tan(x) - \frac{8}{15}\tan^3(x) + C$

3. 关于三角换元法的积分

(1) 类型 I($\sqrt{a^2-x^2}$)

例.

$\int \frac{x^2}{\sqrt{(9-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x$

解题思路:

将 x 转化为三角函数 $\sin(\theta)$ 的积分

推导过程:

设 $x = 3\sin(\theta)$ 且 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, 则 $\mathrm{d}x = 3\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 得:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{(9-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{9\sin^2(\theta)}{(3\cos(\theta))^3} \times 3\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int \tan^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int (\sec^2(\theta) - 1)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \tan(\theta) - \theta + C\end{aligned}$$

$\because \sin(\theta) = \frac{x}{3}$

$\therefore \cos(\theta) = \sqrt{1-\sin^2(\theta)} = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$

$\tan(\theta) = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$

$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{(9-x^2)^3}}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} - \sin^{-1} + C$

(2) 类型 II($\sqrt{x^2+a^2}$)

例.

$\int (x^+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x$

解题思路:

将 x 转化为三角函数 $tan(\theta)$ 的积分

推导过程:

设 $x = \sqrt{15}\tan(\theta)$ 且 $\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, 则 $\mathrm{d}x = \sqrt{15}\sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 得:

$$\begin{aligned}\int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x &= \int (15\tan^2(\theta)+15)^{-\frac{5}{2}} \times \sqrt{15}\sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \int (15\sec^2(\theta))^{-\frac{5}{2}}\sqrt{15}\sec^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{15^2}\int \cos^3(\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

设 $t=\sin(\theta)$, 则 $\mathrm{d}t=\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 得:

$$\begin{aligned}\int (x^2++15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{15^2}\int (1-t^2)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{15^2}\int 1\,\mathrm{d}t - \frac{1}{15^2}\int t^2\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{15^2}t - \frac{1}{15^2\times 3}t^3 + C \\ &= \frac{1}{225}\sin(\theta) - \frac{1}{675}\sin^3(\theta) + C\end{aligned}$$

$\because \tan(\theta) = \dfrac{x}{\sqrt{15}}$

$\therefore \sec(\theta) = \sqrt{\tan^2(\theta)+1} = \dfrac{\sqrt{x^2+15}}{\sqrt{15}}$

$\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \sqrt{1-\dfrac{15}{x^2+15}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+15}}$

$\therefore \displaystyle\int (x^2+15)^{-\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{225}\frac{x}{\sqrt{x^2+15}} - \frac{1}{675}\frac{x^3}{\sqrt{(x^2+15)^3}} + C$

(3) 类型 III($\sqrt{x^2-a^2}$)

例.

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$$

解题思路:

将 x 转化为三角函数 $\sec(\theta)$ 的积分

推导过程:

设 $x=2\sec(\theta)$ 且 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup(\frac{\pi}{2},\pi]$, 则 $\mathrm{d}x = 2\sec(\theta)\tan(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, 得:

$$\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sec(\theta)\tan(\theta)}{8\sec^3(\theta)\sqrt{\tan^2(\theta)}}\,\mathrm{d}\theta$$

$\because$ 当 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})$ 时, $\sqrt{\tan^2(\theta)} = \tan(\theta)$

当 $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $\sqrt{\tan^2(\theta)} = -\tan(\theta)$

$\therefore$ 根据 θ 的不同取值区间, 区分为两种不同情况.

1)$\theta \in [0, \frac{\pi}{2})$ 时

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{8}\int \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{16}\int (1+\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{16}\int 1\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{16}\int \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{16}\theta + \frac{1}{32}\sin(2\theta) + C\end{aligned}$$

$\because \sec(\theta) = \frac{x}{2}$

$\therefore \sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$\because \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

$\therefore \sin(2\theta) = \frac{4\sqrt{x^2-4}}{x^2}$

$\therefore \int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}} difx = \frac{1}{16}\sec^{-1}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{8}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + C$

2)$\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{8}\int \frac{1}{\sec^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{8}\int \cos^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{16}\int (1+\cos(2\theta))\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{16}\int 1\,\mathrm{d}\theta - \frac{1}{16}\int \cos(2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{1}{16}\theta - \frac{1}{32}\sin(2\theta) + C\end{aligned}$$

$\because$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi]$ 中, $\sec(\theta) = \frac{x}{2} \leqslant -1$

$\therefore x \leqslant -2$

$\sin(\theta) = \sqrt{1-\cos^2(\theta)} = -\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}$

$\because \sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$

$\therefore \sin(2\theta) = -\dfrac{4\sqrt{x^2-4}}{x^2}$

$\therefore \displaystyle\int \frac{1}{x^3\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\sec^{-1}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{8}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2} + C$

第二十章　反常积分: 基本概念

1. 当 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 出现以下情况，称为反常积分:

(1) 函数 f 在 $[a\ b]$ 内是无界的 (垂直渐近线)

(2)$b = \infty$

(3)$a = -\infty$

(1) 函数在 $[a\ b]$ 内无界

破裂点: 当函数 f 在 $x = a$ 处有垂直渐近线时，$x = a$ 为其**破裂点**，也称为**瑕点**.

如果仅仅在 x 接近于 a 点该函数 $f(x)$ 是无界的，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果上述极限存在，则积分收敛，否则积分发散

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \ln|x|\Big|_\varepsilon^1 \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}(\ln(1)-\ln(\varepsilon)) \\ &= \infty\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0^+}(2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

如果函数仅仅在 x 接近于 b 点是无界的，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果上述极限存在，则积分收敛，否则积分发散

如果函数在区间 $[a\ b]$ 内有破裂点 c，则定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

如果上述公式两部分的积分都收敛时，总积分收敛，否则发散

(2) 关于 ∞ 区间上的积分

$$\boxed{\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)\,\mathrm{d}x}$$

如果上述极限存在，则积分收敛，否则积分发散例

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$$\begin{aligned}\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{N\to\infty} \ln|x|\Big|_1^N\\ &= \lim_{N\to\infty} (\ln(N) - \ln(1))\\ &= \infty\end{aligned}$$

所以，反常积分 $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散

(3) 关于 $-\infty$ 区间上的积分

$$\boxed{\inf_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_{-N}^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

如果上述极限存在，则积分收敛，否则积分发散

2. 比较判别法 (理论)

如果在区间 (a,b) 内，函数 $f(x) \geqslant g(x) \geqslant 0$，且积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是发散的，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也是发散的. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \infty$$

如果在区间 (a,b) 内，函数 $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$，且积分 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是收敛的，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 也一定是收敛的. 即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x < \infty$$

3. 极限比较判别法 (理论)

当 $x \to a$ 时，$f(x) \backsim g(x)$ 同 $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ 有着同样的意义

如果当 $x \to a$ 时 $f(x) \backsim g(x)$，且这两个函数在区间 $[a,b]$ 上仅有 a 一个破裂点，那么积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 是同时收敛或同时发散的，这称为**极限比较判别法**

例

$$\int_0^1 \frac{1}{\sin(\sqrt{x})}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because x \to 0$ 时，$\sin(x) \backsim x$

$\therefore x \to 0^+$ 时，$\sin(\sqrt{x}) \backsim \sqrt{x}$

两边取倒数, 得:

$$\frac{1}{\sin(\sqrt{x}) \backsim \frac{1}{\sqrt{x}}}$$

$\because [0,1]$ 区间上，仅有 0 为破裂点

$\therefore \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_\varepsilon^1 = \lim\limits_{\varepsilon\to 0^+} (2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2$

$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛

同理，$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $[0,1]$ 上收敛

4.P 判别法 (理论)

$\cdot \int^{\infty}$ 的情况：对于任意有限值 $a > 0$，积分

$$\int_a^{\infty} \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x$$

在 $p > 1$ 时是收敛的，在 $p \leqslant 1$ 时是发散的

$\cdot \int_0$ 的情况：对于任意有限值 $a > 0$，积分

$$\int_0^{a} \frac{1}{x^p} \, \mathrm{d}x$$

在 $p < 1$ 时是收敛的，在 $p \geqslant 1$ 时是发散的

5. 绝对收敛判别法 (理论)

$$\boxed{\text{如果 } \int_a^b |f(x)| \, \mathrm{d}x \text{ 是收敛的，那么 } \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \text{ 也是收敛的}}$$

例

$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x$

推导过程:

$\because |\frac{\sin(x)}{x^2}| \leqslant \frac{1}{x^2}$

$\therefore$ 根据比较判别法:

$\int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} \, \mathrm{d}x \leqslant \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$

$\because$ 根据 P 判别法

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} \, \mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x^2} \, \mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore$ 根据绝对收敛判别法

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}$$ 收敛

第二十一章　反常积分: 如何解题

1. 拆分积分步骤

(1) 确定区间 $[a, b]$ 上的所有瑕点;

(2) 将积分拆分为若干个积分之和，使每个积分只包含一个瑕点，这些瑕点作为相应积分的上限或下限;

(3) 分别讨论每个积分，如果某一积分发散，则整个积分发散，如果每个积分都收敛，则整个积分收敛.

2. 如何处理负函数值

(1) 如果被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上既有正值又有负值，考虑使用绝对收敛判别法

例.

$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because |\frac{\sin(x)}{x^2}| \leqslant \frac{1}{x^2}$

$\therefore$ 根据比较判别法:

$\int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 根据 P 判别法

$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore \int_1^\infty \frac{|\sin(x)|}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore$ 根据绝对收敛判别法

$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}$ 收敛

(2) 如果被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上恒为负，即在 $[a,b]$ 上 $f(x) \leqslant 0$，则:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b (-f(x))\,\mathrm{d}x$$

例.

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because$ 在区间 $[0,\frac{1}{2}]$ 上，$\ln(x) < 0$

$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,\mathrm{d}x = -\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2|\ln(x)|}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 当 $x \in (0,1)$ 时，$|\ln(x)| \leqslant \frac{C}{x^{\frac{1}{2}}}$(参考 4.4, 位于第 84页)

$\therefore \frac{1}{|\ln(x)|} \geqslant \frac{x^{\frac{1}{2}}}{C}$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2|\ln(x)|}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{C}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 根据 P 判别法

$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \infty$

$\therefore \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ 发散

(3) 如果被积函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上既有正值又有负值，但 $f(x)$ 为震荡

函数

例.

$\int_0^{\infty} \cos(x)\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\int_0^{\infty} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{N\to\infty} \int_0^{N} \cos(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{N\to\infty} \sin(x)\Big|_0^N = \lim\limits_{N\to\infty} (\sin(N) - 0) = \lim\limits_{N\to\infty} \sin(N)$

所以，被积函数当前极限不存在，其发散

3. 常见函数在 ∞ 和 $-\infty$ 附近的表现

(1) 多项式和多项式函数在 ∞ 和 $-\infty$ 附近的表现

若 $P(x)$ 的最高次项是 ax^n，则当 $x \to \infty$ 或 $x \to -\infty$ 时，有 $P(x) \backsim ax^n$

例 1.

$\int_1^{\infty} \frac{1}{2+20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because$ 在区间 $[1,\infty)$ 上, ∞ 为 $\frac{1}{2+20\sqrt{x}}$ 唯一瑕点

而 $x \to \infty$ 时，$\frac{1}{2+20\sqrt{x}} \backsim \frac{1}{20\sqrt{x}}$

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{2+20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int_1^{\infty} \frac{1}{20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_1^{\infty} \frac{1}{20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 发散

$\therefore \int_1^{\infty} \frac{1}{2+20\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$$\int_9^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

由于 $\sqrt{x^4}$ 与 x^2 相消，所以:

$$\begin{aligned}\int_9^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x &= \int_9^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\times\frac{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_9^{\infty}\frac{\sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2}{8x^3-9}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$\because$ 在区间 $[9,\infty)$ 上，仅有 ∞ 为瑕点

而 $\sqrt{x^4+8x^3-9}\backsim x^2$，$8x^3-9\backsim 8x^3$

$\therefore \sqrt{x^4+8x^3-9}+x^2\backsim 2x^2$

$$\int_9^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x\backsim\int_9^{\infty}\frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x$$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_9^{\infty}\frac{1}{4x}\,\mathrm{d}x$ 发散

$\therefore \int_9^{\infty}\frac{1}{\sqrt{x^4+8x^3-9}-x^2}\,\mathrm{d}x$ 发散

(2) 三角函数在 ∞ 或 $-\infty$ 附近的表现

$$\boxed{|\sin(A)|\leqslant 1}\ \boxed{|\cos(A)|\leqslant 1}$$

例.

$$\int_5^{\infty}\frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because$ 由比较判别法

$$\frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt(x)+x^2} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}$$

$$\therefore \int_5^\infty \frac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$\because$ 在 $x \to \infty$ 时，$\dfrac{1}{\sqrt{x}+x^2} \backsim \dfrac{1}{x^2}$

$$\therefore \int_5^\infty \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_5^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_5^\infty \dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

$\therefore \int_5^\infty \dfrac{|\sin(x^4)|}{\sqrt{x}+x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(3) 指数在 ∞ 和 $-\infty$ 附近表现

$$\boxed{\text{对所有的 } x>0\text{，} e^{-x} \leqslant \tfrac{C}{x^n}}$$

例 1.

$$\int_1^\infty x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\int_1^\infty x^3 e^{-x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^\infty x^3 \frac{C}{x^5}\,\mathrm{d}x = C\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$$

例 2.

$$\int_{10}^\infty (x^{1000}+x^2+\sin(x))e^{-x^2+6}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because x \to \infty$ 时，$x^{1000}+x^2+\sin(x) \backsim x^{1000}$

$$e^{-x^2+6} \leqslant \frac{C}{x^{1002}}$$

$\therefore \int_{10}^{\infty}(x^{1000}+x^{+}\sin(x))e^{-x^2+6}\,\mathrm{d}x \leqslant C\int_{10}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x < \infty$

例 3.

$\int_{-\infty}^{-4} x^{1000}e^{x}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

设 $t=-x$，则 $\mathrm{d}t=-\mathrm{d}x$，得:

$\int_{-\infty}^{-4} x^{1000}e^{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{\infty}^{4}(-t)^{1000}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_{4}^{\infty} t^{1000}e^{-t}\,\mathrm{d}t$

$\because e^{-t} \leqslant \frac{C}{t^{1002}}$

$\therefore \int_{-\infty}^{-4} x^{1000}e^{x}\,\mathrm{d}x = \int_{4}^{\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$

根据 P 判别法

$\int_{-\infty}^{-4} x^{1000}e^{x}\,\mathrm{d}x < \infty$

(4) 对数在 ∞ 附近的表现

$$\boxed{\text{对所有 } x>1\text{，}\ln(x)\leqslant Cx^{\alpha}}$$

例 1.

$\int_{2}^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\int_{2}^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{2}^{\infty}\frac{Cx^{0.0005}}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x = C\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^{1.0005}}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_{2}^{\infty}\frac{1}{x^{1.0005}}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \int_{2}^{\infty}\frac{\ln(x)}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 2.

$\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(x)}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant \int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(2)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(2)}\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\frac{1}{\ln(2)}\int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \int_2^\infty \frac{1}{x^{1.001}\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ 收敛

例 3.

$\int_2^\infty \mathrm{d}x$

推导过程:

设 $t = \ln(x)$，则 $\mathrm{d}t = \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$，得:

$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)} = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_{\ln(2)}^\infty \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \infty$

$\therefore \int_2^\infty \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$ 发散

4. 常见函数在 0 附近的表现

(1) 多项式和多项式函数在 0 附近的表现

$\boxed{\text{若 } P(x) \text{ 的最低次项是 } bx^m\text{，则当 } x \to \infty \text{ 时，} P(x) \backsim bx^m}$

例.

$$\int_0^5 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because$ 当 $x \to 0^+$ 时，$\dfrac{1}{x^2+\sqrt{x}} \backsim \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

由 P 判别法

$\displaystyle\int_0^5 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \displaystyle\int_0^5 \frac{1}{x^2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(2) 三角函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{当 } x \to 0\text{，}\sin(x) \backsim x\text{，}\tan(x) \backsim x \text{ 且 } \cos(x) \backsim 1}$$

例 1.

$$\int_0^1 \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$\because$ 当 $x \to 0$，$\tan(x) \backsim x$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(3) 指数函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{当 } x \to 0 \text{ 时，} e^x \backsim 1 \text{ 和 } e^x - 1 \backsim x}$$

例 1.

$\int_0^1 \frac{e^x}{x\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because$ 当 $x \to 0$ 时, $e^x \backsim 1$，$\cos(x) \backsim 1$

$\therefore \int_0^1 \frac{e^x}{x\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty$

$\therefore \int_0^1 \frac{e^x}{x\cos(x)}\,\mathrm{d}x$ 发散

例 2.

$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}} difx$

推导过程:

$\because$ 当 $x \to 0$ 时，$e^x - 1 \backsim x$

$\therefore \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

(4) 对数函数在 0 附近的表现

$$\boxed{\text{对于所有 } 0 < x < 1\text{，} |\ln(x)| \leqslant \frac{C}{x^\alpha}}$$

例.

$\int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{x^{0.9}}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

$\because$ 当 $0 < x < 1$ 时，$|\ln(x)| \leqslant \frac{C}{x^{0.05}}$

$\therefore \int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{x^{0.9}}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{C}{x^{0.95}}\,\mathrm{d}x$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_0^1 \frac{C}{x^{0.95}}\,\mathrm{d}x < \infty$

$\therefore \int_0^1 \frac{|\ln(x)|}{x^{0.9}}\,\mathrm{d}x$ 收敛

第二十二章　数列和级数: 基本概念

1. 数列的收敛和发散

数列: 一组有序的数. 如:$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9$

数列的项: 数列中的第 n 项. 如:a_n

当满足下列条件:

$$\lim_{x\to\infty} a_n = L$$

则称数列 $\{a_n\}$ 收敛

三明治定理和洛必达法则同样适用于数列

$$\lim_{n\to\infty} r^n \begin{cases} = 0 & \text{如果} -1 < r < 1 \\ = 1 & \text{如果} r = 1 \\ = \infty & \text{如果} r > 1 \\ \text{不存在} & \text{如果} r \leqslant -1 \end{cases}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}(1+\frac{k}{n})^n = e^k}$$

2. 级数的收敛和发散

级数: 将数列 a_n 的所有项加起来. 表示为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

几何级数: 等比数列的级数. 表示为:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$

如果 $-1 < r < 1$, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ 如果 $r \geqslant 1$ 或 $r \leqslant -1$, 级数发散

3. 第 n 项判别法 (理论)

若 $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, 或极限不存在, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

以上判别法不能用于级数收敛性的判断

4. 无穷级数和反常积分的性质

(1) 比较判别法 (理论)

$$\boxed{\text{若对所有 } n\text{，有 } 0 \leqslant b_n \leqslant a_n\text{，且 } \sum_{n==1}^{\infty} b_n \text{ 发散，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也发散}}$$

$$\boxed{\text{若对所有 } n\text{，有 } b_n \geqslant a_n \geqslant 0\text{，且 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 也收敛}}$$

(2) 极限比较判别法 (理论)

$$\boxed{\text{若当 } n \to \infty \text{ 时 } a_n \backsim b_n\text{，且 } a_n \text{ 和 } b_n \text{ 均有限，则 } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 与 } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 同时收敛或发散}}$$

(3)P 判别法理论

$$\boxed{\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛} & \text{如果} p > 1 \\ \text{发散} & \text{如果} p \leqslant 1 \end{cases}}$$

(4) 绝对收敛判别法 (理论)

$$\boxed{\text{如果级数 } \sum_{n=m}^{\infty} |a_n| \text{ 收敛，则级数 } \sum_{n=m}^{\infty} a_n \text{ 收敛}}$$

5. 级数的新判别法

(1) 比式判别法 (理论)

若 $L=\lim\limits_{n\to\infty}|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}|$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $L<1$ 时绝对收敛，在 $L>1$ 时发散；但当 $L=1$ 或极限不存在时，

(2) 根式判别法 (理论)

若 $L=\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 在 $L<1$ 时绝对收敛，在 $L>1$ 时发散；但当 $L=1$ 或极限不存在时，根式判别法无效

(3) 积分判别法 (理论)

若对连续递减函数 f 有 $a_n=f(n)$，则 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}a_n$ 与 $\int_N^{\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同时收敛或发散

(4) 交错级数判别法 (理论)

若当 $n\to\infty$ 时交错级数的通项的绝对值单调递减趋于 0，则级数收敛

第二十三章　求解级数问题

1. 级数的讨论

(1) 是否为几何级数

(2) 级数中的项是否趋于 0 — 第 n 项判别法

(3) 级数中是否有阶乘 — 比式判别法

(4) 级数中的指数是否包含 n — 跟式判别法

(5) 级数中是否含 $\frac{1}{n}$ 或对数 — 积分判别法

(6) 级数中是否有负项 — 第 n 项判别法/绝对收敛判别法/交错级数判别法

(7) 上述皆不适用 — 比较判别法/P 判别法/极限比较判别法

2. 具体解决方案

(1) 几何级数

$$\boxed{\text{若 } -1 < r < 1\text{，无穷几何级数的和} = \frac{\text{首项}}{1-r}}$$

例.

$$\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n}$$

推导过程:

$\because \dfrac{4}{3^n} = 4(\dfrac{1}{3})^n$

$\quad -1 < r = \dfrac{1}{3} < 1$

$\displaystyle\sum_{n=5}^{\infty} \frac{4}{3^n} = \sum_{n=5}^{\infty} 4(\frac{1}{3})^n = \frac{4 \times (\frac{1}{3})^5}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{81}$

(2) 级数中的项是否趋于 0 — 第 n 项判别法

若 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ 或极限不存在，则级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

该判别法不能用于级数收敛性的判定

例.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1}$

推导过程:

$\because \displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1} = \frac{1}{4} \neq 0$

$\therefore$ 由第 n 项判别法

$\quad \dfrac{n^2 - 3n + 7}{4n^2 + 2n + 1}$ 发散

(3) 级数中是否有阶乘 — 比式判别法

若 $L = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert$，则 $n = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $L < 1$ 时绝对收敛，在 $L > 1$ 时发散；但当 $L = 1$ 或极限不存在时，比式判别法无效

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$$

推导过程:

$\because \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\frac{(n+1)^{1000}}{2^{n+1}}}{\frac{n^{1000}}{2^n}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{(n+1)^{1000}}{n^{1000}} \times \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} (\frac{n+1}{n})^{1000} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ 由比式判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{1000}}{2^n}$ 收敛

(4) 级数中的指数是否包含 n — 根式判别法

> 若 $L = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 在 $L < 1$ 时绝对收敛，在 $L > 1$ 时发散；但当 $L = 1$ 或极限不存在时，根式判别法无效

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{2}{n})^{n^2}$$

推导过程:

$\because \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left|(1 - \frac{2}{n})^{n^2}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{2}{n})^n = e^{-2} < 1$

$\therefore$ 由根式判别法

$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{2}{n})^{n^2}$ 收敛性

(5) 级数中是否含 $\frac{1}{n}$ 或对数 — 积分判别法

$$\boxed{\text{若对连续递减函数 } f \text{ 有 } a_n = f(n)\text{，则 } \sum_{n=N}^{\infty} a_n \text{ 与 } \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 同时收敛或发散}}$$

例.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$$

推导过程:

级数的积分形式为:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x$$

设 $t = \ln(x)$，则 $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x$，得:

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{d}x = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

$\because$ 由 P 判别法

$\int_{\ln(2)}^{\infty} \dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 发散

$\therefore \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ 发散

(6) 级数中是否有负项 — 第 n 项判别式/绝对收敛判别法/交错级数判别法

1) 若所有项都为负，则在所有项前面添加负号来修改级数

例.

$$\sum_{n=3}^{\infty} \ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}}$$

推导过程:

$\because$ 在 $n \geqslant 3$ 时，$\ln(\frac{1}{n}) < 0$，$\ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} < 0$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} -\ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}}$

$\because$ 当 $n \in [3, \infty)$ 时，$\ln(n) \geqslant \ln(3)$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \ln(n)\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sum_{n=3}^{\infty} \ln(3)\frac{1}{\sqrt{n}} = \ln(3)\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$

$\therefore \sum_{n=3}^{\infty} \ln(\frac{1}{n})\frac{1}{\sqrt{n}}$ 发散

2) 若有些项为正，有些项为负，当 $n \to \infty$ 时通项不趋于 0，用第 n 项判别法

例.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$

推导过程:

$\because \lim_{n\to\infty}(-1)^n n^2$ 极限不为 0

$\therefore$ 由第 n 项判别法

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^2$ 发散

3) 若有些项为正, 有些项为负, 当 $n \to \infty$ 时通项趋于 0, 用绝对收敛判别法

$$\boxed{\text{若} \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \text{收敛，则} \sum_{n=1}^{\infty}a_n \text{也收敛}}$$

例.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$

推导过程:

$\because \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty$

$\therefore$ 由绝对收敛判别法

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$ 收敛

4) 若有些项为正，有些项为负，并且级数不是绝对收敛，用交错级数判别法

若当 $n \to \infty$ 时交错级数的通项的绝对值单调递减趋于 0，则级数收敛

例.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

推导过程:

$\because \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$，并且 $\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$ 单调递减

$\therefore$ 由交错级数判别法

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛

(7) 上述皆不适用 — 比式判别法/P 判别法/极限比较判别法

1) 比较判别法

发散的情形: 若认为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散，则找一个同样发散的较小的级数，即找一个使得对所有 n 都有 $a_n \geqslant b_n$ 的正项数列 b_n，使得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

收敛的情形: 若认为 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，则找一个同样收敛的较大的级数，即找一个使得对所有 n 都有 $a_n \leqslant b_n$ 的数列 b_n，使得级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛. 则

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

2) 极限比较判别法

找一个简单级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$，当 $n \to \infty$ 时 $a_n \backsim b_n$，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 同时收敛或同时发散

3)P 判别法

若 $a \geqslant 1$，级数

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{收敛} & \text{如果} p > 1 \\ \text{发散} & \text{如果} p \leqslant 1 \end{cases}$$

例 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1}$$

推导过程:

$\because$ 由极限比较判别法

当 $n \to \infty$ 时，$\dfrac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1} \backsim \dfrac{2n^2}{n^4} = \dfrac{2}{n^2}$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2}{n^2}$

$\because$ 由 P 判别法

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}, \infty$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n^2+3n+7}{n^4+2n^3+1}$ 收敛

例 2.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000}$$

推导过程:

$\because$ 对于所有的 $x > 0$，$e^{-x} \leqslant \dfrac{C}{x^n}$

$\therefore 2^{-n} \leqslant \dfrac{C}{n^{1002}}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^{1002}} \times n^{1000} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C}{n^2} = C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

$\because$ 由 P 判别法

$$C \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n} n^{1000}$ 收敛

第二十四章　泰勒多项式、泰勒级数和幂级数导论

1. 近似值和泰勒多项式

e^x 曲线在 $x=0$ 处的三阶近似曲线

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$$

并且，x 越趋近于 0，曲线趋近程度越高

泰勒近似定理: 若 f 在 $x=a$ 光滑，则在所有次数为 N 或更低的多项式中，当 x 在 a 附近时，最近似于 $f(x)$ 的是

$$P_N(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N$$

使用求和符号表示:

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

多项式 $P_N(x)$ 称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 **N 阶泰勒多项式**

曲线 $f(x)$ 与近似曲线 $P_N(x)$ 的误差称为 **N 阶误差项**，也称为 **N 阶余项**，公式表示为:

$$R_N(x) = f(x) - P_N(x)$$

泰勒定理: 关于 $x = a$ 的 N 阶余项

$$R_N(x) = \frac{f^{(N+1)}(c)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$$

其中，c 是介于 x 与 a 之间的一个数

2. 幂级数和泰勒级数

幂级数: 关于 $x = a$(a 为中心) 的幂级数的表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots$$

其中 a_n 是确定的常数

幂级数: 关于 $x = 0$(0 为中心) 的幂级数的表达式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$

其中 a_n 是确定的常数

e^x 曲线关于 $x = 0$ 的幂级数

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

幂级数收敛于 e^x

$\dfrac{1}{1-x}$ 曲线关于 $x = 0$ 的幂级数

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

当 $-1 < x < 1$ 时，幂级数收敛于 $\dfrac{1}{1-x}$

使用光滑函数 f 的所有导数定义关于 $x = a$ 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 + \cdots$$

该幂级数的系数为 $a_n = \dfrac{f(n)(a)}{n!}$，该级数称为 f 关于 $x = a$ 的**泰勒级数**

使用光滑函数 f 的所有导数定义关于 $x = 0$ 的幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + f''(0)x^2 + \cdots$$

该幂级数的系数为 $a_n = \dfrac{f(n)(0)}{n!}$，该级数称为 f 关于 $x = 0$ 的**麦克劳林级数**

第二十五章　求解估算问题

1. 求泰勒级数步骤

(1) 构造一个导数表 $(n/f^{(n)}(x)/f^{(n)}(a))$

(2) 将求导结果代入泰勒级数

例.

$f(x)=e^x$ 关于 $x=-2$ 的泰勒级数

推导过程:

导数表如下

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	e^{-2}
1	e^x	e^{-2}
2	e^x	e^{-2}
3	e^x	e^{-2}

函数关于 $x=-2$ 的泰勒级数

$f(a)+f'(a)(x-a)+f''(a)(x-a)^2+\cdots=e^{-2}+e^{-2}(x+2)+e^{-2}(x+2)^2+\cdots$

2. 用误差项估算问题

(1) 构造相关函数 $f(x)$

(2) 选一个接近 x 的值 a，使 $f(a)/f'(a)$ 易于计算

(3) 构造 f 的导数表

(4)R_N 的公式:$R_N(x) = \dfrac{f^{(N+1)}(x)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}$

(5) 确定泰勒多项式的阶 N(未知时可反复代入进行测试)

(6) 确定 x 的值，并且 c 介于 a 与 x 之间

(7) 求 $|R_N(x)|$ 的最大值

(8) 根据估算,得出泰勒多项式 $P_N(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+f^{(N)}(a)(x-a)^N$

例 1.

用二阶泰勒多项式估算 $e^{\frac{1}{3}}$，并估算误差

推导过程:

构造函数 $f(x) = e^x$

由于 $e^0 = 1$，取值 $a = 0$

$f(x)$ 关于 $x = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
3	e^x	1

$R_2(x) = \dfrac{f^{(3)}(c)}{3!}x^3 = \dfrac{e^c}{3!}x^3$

由于 c 介于 a 与 x 之间

$0 < c < \dfrac{1}{3}$

$|R_2(\frac{1}{3})| \leqslant \frac{e^{\frac{1}{3}}}{3!} \times (\frac{1}{3})^3 = \frac{e^{\frac{1}{3}}}{162} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{162} = \frac{1}{81}$
$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}$
$P_2(\frac{1}{3}) = 1 + \frac{1}{3} + frac12 \times (\frac{1}{3})^2 = \frac{25}{18}$
$e^{\frac{1}{3}} = f(\frac{1}{3}) \approx P_2(\frac{1}{3}) = \frac{25}{18}$

例 2.

估算 $e^{\frac{1}{3}}$，且误差不得大于 $\frac{1}{10000}$

推导过程:

构造函数 $f(x) = e^x$

由于 $e^0 = 1$，取值 $a = 0$

$f(x)$ 关于 $x = 0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$R_N(x) = \frac{f^{N+1}(c)}{(N+1)!}x^{N+1}$
由例 1 可知，$N = 2$ 时，$R_2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{81} > \frac{1}{10000}$
将 $N = 3$ 代入误差项，得:
$R_3(\frac{1}{3}) = \frac{f^{(4)}(c)}{4!} \times (\frac{1}{3})^4 = \frac{e^c}{1944} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{1944} = \frac{1}{972}$
而 $\frac{1}{972} > \frac{1}{10000}$，$N = 3$ 不符合
将 $N = 4$ 代入误差项，得:
$R_4(\frac{1}{3}) = \frac{f^{(5)}(c)}{5!} \times (\frac{1}{3})^5 = \frac{e^c}{29160} < \frac{8^{\frac{1}{3}}}{29160} = \frac{1}{14580}$

$\frac{1}{14580} < \frac{1}{10000}$，$N=4$ 符合误差要求

$$\begin{aligned}P_4(\frac{1}{3}) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4\\ &= 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}+\frac{1}{6}\times\frac{1}{27}+\frac{1}{24}\times\frac{1}{81}\\ &= \frac{2713}{1944}\end{aligned}$$

$e^{\frac{1}{3}} = f(\frac{1}{3}) \approx P_4(\frac{1}{3}) = \frac{2713}{1944}$

3. 满足交错级数判别法的估算

> 泰勒级数若是各项绝对值递减趋于 0 的交错级数，则误差小于下一项. 即
>
> $$|R_N(x)| \leqslant \left|\frac{f^{(N+1)}(a)}{(N+1)!}(x-a)^{N+1}\right|$$

例.

使用麦克劳林级数求定积分 $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$，并且误差为 $\frac{1}{1000}$

推导过程:

构造函数 $f(x)$，使得

$f(x) = \int_0^{x} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$

$\sin(t)$ 的关于 $t=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1

$\sin(t)$ 的麦克劳林级数如下:

$$\begin{aligned}\sin(t) &= f(0) + f'(0)t + \frac{f''(0)}{2!}t^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}t^3 + \cdots \\ &= t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\end{aligned}$$

将 $\sin(t)$ 的麦克劳林级数代入函数 $f(x)$，得:

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x (1 - \frac{t^2}{3!} + \frac{t^4}{5!} - \frac{t^6}{7!} + \cdots)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(t - \frac{t^3}{3\times 3!} + \frac{t^5}{5\times 5!} - \frac{t^7}{7\times 7!} + \cdots\right)\Big|_0^x \\ &= x - \frac{x^3}{3\times 3!} + \frac{x^5}{5\times 5!} - \frac{x^7}{7\times 7!} + \cdots\end{aligned}$$

$$f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 3!}\times(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{5\times 5!}\times(\frac{1}{2})^5 - \frac{1}{7\times 7!}\times(\frac{1}{2})^7 + \cdots$$

由于 $f(x)$ 符合交错级数判别法

首先使用第一项近似积分，得:

$$|R_1(\frac{1}{2})| \leqslant |-\frac{1}{3\times 3!}\times(\frac{1}{2})^3| = \frac{1}{18}\times\frac{1}{8} = \frac{1}{144}$$

但是 $\frac{1}{144} > \frac{1}{1000}$

继续往后取项，使用前两项近似积分，得:

$$|R_2(\frac{1}{2})| \leqslant |\frac{1}{5\times 5!}\times(\frac{1}{2})^5| = \frac{1}{600}\times\frac{1}{64} = \frac{1}{38400}$$

由于 $\frac{1}{38400} < \frac{1}{1000}$

$$f(\frac{1}{2}) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3\times 3!}\times(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{2} - \frac{1}{144} = \frac{71}{144}$$

第二十六章　泰勒级数和幂级数：如何解题

$$\boxed{\text{几何级数 } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ 在 } -1 < x < 1 \text{ 时收敛，其他情况均发散}}$$

$$\boxed{\text{级数 } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \text{ 对任意 } x \text{ 值收敛，因为 } \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x!} = 0}$$

1. 幂级数收敛情况

(1) 以 a 为中心，$R > 0$ 为收敛半径

- 区域 $|x-a| < R$ 内收敛
- 区域 $|x-a| > R$ 发散
- 在 $|x-a| = R$ 端点上有绝对收敛/条件收敛/发散的情况

(2) 对所有 x 均绝对收敛，收敛半径为 ∞

(3) 只在 $x = a$ 处收敛，收敛半径为 0

2. 求收敛半径

(1) 使用比式判别法或根式判别法

$$\lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}(x-a)^{n+1}}{a_n(x-a)^n}| = \lim_{n\to\infty}|\frac{a_{n+1}}{a_n}||x-a|$$

$$\lim_{n\to\infty}|a_n(x-a)^n|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}|x-a|$$

(2) 算出极限 $L|x-a|$

(3) 若 L 为正数，收敛半径为 $\dfrac{1}{L}$

(4) 若 L 为 0，收敛半径为 ∞

(5) 若 L 为 ∞，收敛半径为 0

例.

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n\ln(n)}$$

推导过程:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{x^n}{n\ln(n)}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{x^n}\times\frac{n}{n+1}\times\frac{\ln(n)}{\ln(n+1)}\right| = |x|$$

$\because$ 收敛半径为 1, 所以分为如下三种情况:

1) 当 $|x|<1$ 时，幂级数收敛. 此时 $x\in(-1,1)$

2) 当 $|x|>1$ 时，幂级数发散. 此时 $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

3) 当 $|x|=1$ 时，再次分为如下两种情况:

$x=1$，得到 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n)}$，由积分判别法可知，级数发散

$x=-1$，得到 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$，由交错级数判别法可知，级数收敛

3. 合成新泰勒级数

(1) 六个常用的麦克劳林级数

1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

2) $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

3) $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

4) $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3+\cdots$

5) $\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

6) $\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

(2) 常用麦克劳林级数的推导

1) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$

推导过程:

e^x 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	e^x	1
1	e^x	1
2	e^x	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

e^x 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}e^x&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots\\&=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

2)　$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$

推导过程:

$\sin(x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\sin(x)$	0
1	$\cos(x)$	1
2	$-\sin(x)$	0
3	$-\cos(x)$	-1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\sin(x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\sin(x)&=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots\\&=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

3)　$\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots$

推导过程:

$\cos(x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\cos(x)$	1
1	$-\sin(x)$	0
2	$-\cos(x)$	-1
3	$\sin(x)$	0
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\cos(x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\cos(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}}{3!}x^3 + \cdots \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\end{aligned}$$

4) $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$

推导过程:

$\dfrac{1}{1-x}$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\frac{1}{1-x}$	1
1	$\frac{1}{(1-x)^2}$	1
2	$\frac{2!}{(1-x)^3}$	$2!$
3	$\frac{3!}{(1-x)^4}$	$3!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\dfrac{1}{1-x}$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots \\ &= 1+x+x^2+x^3+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n\end{aligned}$$

5)　$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

推导过程:

$\ln(1+x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\ln(1+x)$	0
1	$\frac{1}{1+x}$	1
2	$-\frac{1}{(1+x)^2}$	-1
3	$\frac{2!}{(1+x)^3}$	2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\ln(1+x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots \\ &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}\end{aligned}$$

6)　$\ln(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots$

推导过程:

$\ln(1-x)$ 关于 $x=0$ 的导数表

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(a)$
0	$\ln(1-x)$	0
1	$-\frac{1}{1-x}$	-1
2	$-\frac{1}{(1-x)^2}$	-1
3	$-\frac{2}{(1-x)^3}$	-2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

$\ln(1-x)$ 的麦克劳林级数

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &= f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f^{(3)}}{3!}x^3+\cdots \\ &= -x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}-\frac{x^n}{n}\end{aligned}$$

(3) 常用麦克劳林级数的置换

例 1.

e^{x^2} 的麦克劳林级数和收敛区间

推导过程:

e^x 的麦克劳林级数

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$$

将 x 替换为 x^2，得:

$$\begin{aligned}e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!} &= 1+x^2+\frac{(x^2)^2}{2!}+\frac{(x^2)^3}{3!}+\cdots \\ &= 1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\cdots\end{aligned}$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}\right||x| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}|x|$$

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

$\therefore e^x$ 级数的收敛半径为 ∞，即 $x\in(-\infty,\infty)$

e^{x^2} 中对于 $x^2 \in (-\infty, \infty)$ 也成立

$\because x^2 \in (-\infty, \infty) \Rightarrow x \in (-\infty, \infty)$

$\therefore e^{x^2}$ 在 $x \in (-\infty, \infty)$ 上收敛

例 2.

$\dfrac{1}{1+x^2}$ 的麦克劳林级数和收敛区间

推导过程:

$\dfrac{1}{1-x}$ 的麦克劳林级数

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

将 x 替换为 $-x^2$，得:

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

$\because \lim_{n \to \infty} |\dfrac{x^{n+1}}{x^n}| = |x|$

$L = 1$

$\therefore \dfrac{1}{1-x}$ 的收敛半径为 1，即 $x \in (-1, 1)$

$\dfrac{1}{1+x^2}$ 对应 $-x^2 \in (-1, 1)$

$\because -x^2 \in (-1, 1) \Rightarrow x \in (-1, 1)$

$\therefore \dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x \in (-1, 1)$ 上收敛