1. 隐函数求导

例.

$x^2 + y^2 = 4$

推导过程:

设 $u = y^2$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$

原函数两边对 x 求导:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

2. 隐函数求二阶导数

例.

$2y + \sin(y) = \frac{x^2}{\pi} + 1$

推导过程:

设 $u = \sin(y)$, 则 $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = \cos(y)\frac{dy}{dx}$

原函数两边对 x 求导:

$$2\frac{dy}{dx} + \cos(y)\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$$

两边再次对 x 求导:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d}{dx}(\cos(y)\frac{dy}{dx}) = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad 2\frac{d^2y}{dx^2} - \sin(y)(\frac{dy}{dx})^2 + \cos(y)\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad (2+\cos(y))\frac{d^2y}{dx^2} - \sin(y)(\frac{dy}{dx})^2 = \frac{2}{\pi}$$

将 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\pi(2+\cos(y))}$ 带入结果:

$$(2+\cos(y))\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi} + \sin(y)(\frac{2x}{\pi(2+\cos(y))})^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{\pi(2+\cos(y))} + \sin(y) \cdot \frac{4x^2}{\pi^2(2+\cos(y))^3}$$

3. 相关变化率

$$\boxed{\text{如果 } Q \text{ 是某个量, 那么 } Q \text{ 的变化率是 } \frac{dQ}{dt}}$$

设 $x = f(t)$ 和 $y = g(t)$ 为两个变量的变化率, 由于 x 和 y 都是关于时间 t 的函数, 所以 x 与 y 必定存在某种关系, 这种关系称为**相对变化率**

求解相关变化率的方法:
(1) 识别出哪一个量需要求相关变化率;
(2) 写出一个关联所有量的方程;
(3) 对方程关于时间 t 做隐函数求导;
(4) 将已知值带入方程中做替换.

例 1.
用打气筒给一个完美球体的气球充气. 空气以常数速率 12π 立方英寸每秒进入气球.
(1) 当气球的半径达到 2 英寸时, 气球的半径的变化率是多少?
(2) 从外, 当气球的体积达到 36π 立方英寸时, 气球的半径的变化率又是多少?

解:
球体体积公式:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

方程对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dx} \tag{i}$$

(1) 将 $r = 2$ 和 $\frac{dV}{dt} = 12\pi$ 代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 2^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \frac{3}{4}$$

(2) 根据球体体积公式, 得:

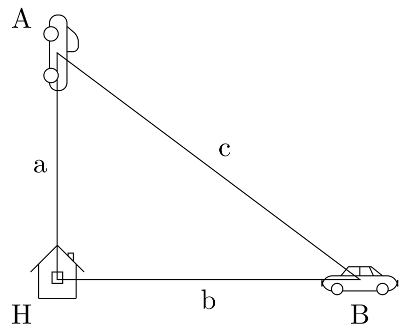
$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 36\pi \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

将 $r = 3$ 和 $\frac{dv}{dt} = 12\pi$ 代入公式(i), 得:

$$4\pi \times 3^2 \frac{dr}{dx} = 12\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{dr}{dx} = \frac{1}{3}$$

例 2.
假设有两辆汽车 A 和 B. 汽车 A 在一条路上径直向北行驶远离你家, 而汽车 B 在另一条路上径直向西行驶接近你家. 汽车 A 以 55 英里/小时的速度行驶, 而汽车 B 以 45 英里/小时的速度行驶. 当 A 到达你家北面 21 英里, 而 B 到达你家东面 28 英里时, 两辆汽车间的距离的变化率是多少?

解:
如图.



由图可知:

$a^2 + b^2 = c^2$

对时间 t 作隐函数求导:

$$2a\frac{da}{dt} + 2b\frac{db}{dt} = 2c\frac{dc}{dt} \tag{ii}$$

由于 A 在远离 H, 所以距离随着时间增加:

$\dfrac{da}{dt} = 55$

而 B 在靠近 H, 所以距离随着时间减少:

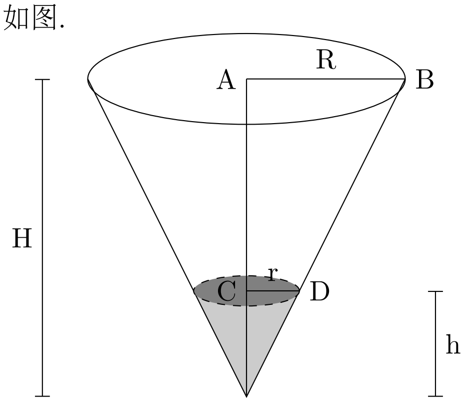
$\dfrac{db}{dt} = -45$

将结果带入公式(ii), 得:

$\dfrac{dc}{dt} = -3$

例 3.
有一个奇怪的巨大的圆锥形水罐 (锥尖在下方), 圆锥的高是圆锥半径的两倍. 如果水是以 8π 立方英尺/秒的速率注入水罐, 求:
(1) 当水罐中水的体积为 18π 立方英尺时, 水位的变化率是多少?
(2) 设想水罐底部有一个小洞, 致使水罐中每一立方英尺的水以一立方英尺每秒的速率流出. 当水罐中水的体积为 18π 立方英尺时, 水位的变化率是多少?

解:
如图.



圆锥体体积公式, 如下:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

(1) 将 $V = 18\pi$, $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 得:

$$\frac{1}{12}\pi h^3 = 18\pi \quad \Rightarrow \quad h = 6$$

将 $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 并对结果两边关于时间 t 隐式求导, 得:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad 8\pi = 9\pi\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{8}{9}$$

(2) 根据 (1) 得:

$h = 6$

在当前秒, 水罐以 8π 立方英尺/秒注入水, 并以 18π 立方英尺/秒流出水, 所以:

$$\frac{dV}{dt} = 8\pi - 18\pi = -10\pi$$

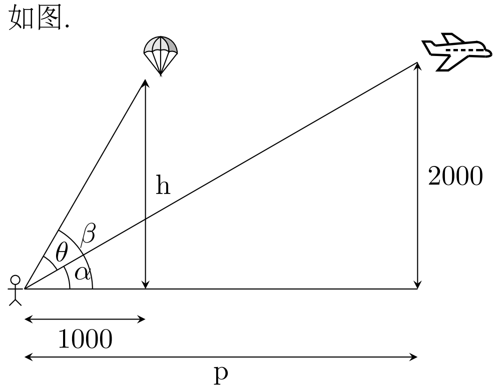
将 $r = \frac{h}{2}$ 代入体积公式, 并对结果两边关于时间 t 隐式求导, 得:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad -10\pi = 9\pi\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{10}{9}$$

例 4.

有一架飞机保持在 2000 英尺的高度远离你朝正东方向飞行. 飞机以 500 英尺每秒的常数速率飞行. 同时, 不久之前有一个跳伞员从直升飞机 (它已经飞走了) 上跳下来. 跳伞员在你东边 1000 英尺处上空垂直地以 10 英尺每秒的常数速率向下飘落, 跳伞员相对于你的方位角与飞机相对于你的方位角之差被标记为 θ. 求当飞机和跳伞员在同一高度, 但飞机在你东边 8000 英尺时, 角 θ 的变化率是多少?

如图.



由图可知:

$$\tan(\alpha) = \frac{2000}{p} \tag{iii}$$

$$\tan(\beta) = \frac{h}{1000} \tag{iv}$$

$$\theta = \beta - \alpha \tag{v}$$

公式(iii)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\sec^2(\alpha)\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2000}{p^2}\frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad (\tan^2(\alpha)+1)\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{2000}{8000^2}\frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{32000} \times 500 \times \frac{16}{17} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{68}$$

公式(iv)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\sec^2(\beta)\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{1000}\frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad (\tan^2(\beta)+1)\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{100} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{100} \times \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\beta}{dt} = -\frac{1}{500}$$

公式(v)两边对时间 t 进行隐式求导:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\beta}{dt} - \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{1}{500} + \frac{1}{68} = \frac{-17 + 125}{8500} = \frac{27}{2125}$$