第一章　组合分析

1.1　计数基本法则

计数基本法则
假设有两个试验，其中试验 1 有 m 种可能的结果，对应于试验 1 的每一个结果，试验 2 有 n 种可能的结果，则这两个试验一共有 mn 种可能的结果

推广的计数基本法则
假设一共有 r 个试验. 试验 1 有 n_1 种可能的结果; 对应于试验 1 的每一种可能的结果, 试验 2 有 n_2 种可能的结果; 对应于前两个试验的每一种可能的结果, 试验 3 有 n_3 种可能的结果 $\cdots$ 那么这 r 个试验一共有 $n_1n_2\cdots n_r$ 种可能的结果

例. 一个大学计划委员会由 3 名新生、4 名二年级学生、5 名三年级学生、2 名毕业班学生组成，现在要从中选 4 个人组成一个分委员会，要求来自不同的年级，一共有多少种选择方式?
解: 每个年级选取一个学生为一个试验单位，所以，共有 $3\times4\times5\times2$ 种选择方式

1.2 排列

排列: 将不同的物件或符号根据不同顺序进行安置, 每个顺序都称为一个排列

假设有 n 个不同元素，将其进行排列，一共有

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

种不同排列方式

例 1. 某班级共有 6 名男生、4 名女生，有次测验是根据他们的表现来排名次，假设没有两个学生成绩一样.
(a) 一共有多少种排名方式?
(b) 如限定男生、女生分开排名，一共有多少种排名的方式?
解:
(a) 将所有不同成绩进行排名，一共有 $10! = 3628800$ 种排列方式
(b) 将男生和女生进行分开排名，男生有 $6! = 720$ 种排列方式，女生有 $4! = 24$ 种排列方式，所以一共有 $6! \times 4! = 720 \times 24 = 17280$ 种排列方式

例 2. 把 10 本书放到书架上，其中有 4 本数学书、3 本化学书、2 本历史书和 1 本语文书. 现在要求相同类别的书必须紧挨着放，问一共有多少种方法?
解: 四种书籍其内部的排列为 $4! \times 3! \times 2! \times 1! = 288$ 种排列方式，不同书籍之间的排列为 $4! = 24$ 中排列方式，所以，一共有 $4! \times 4! \times 3! \times 2! \times 1! = 24 \times 288 = 6912$ 种排列方式

假设有 n 个元素，如果其中 n_1 个元素彼此相同，另 n_2 个彼此相同，$\cdots$，n_r 个也彼此相同，那么一共有

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_r!}$$

种不同的排列方式

例. 有 9 面小旗排列在一条直线上吗，其中 4 面白色、3 面红色和 2 面蓝色，颜色相同的旗是一样的. 如果不同的排列方式代表不同的信号，那么一共有多少可能的信号?
解: 一共有 $\dfrac{9!}{4!3!2!} = 1260$ 种不同的信号

1.3 组合

组合: 从 n 个元素中抽取 m 个元素，并且不考虑抽取顺序

记号与术语

对 $r \leqslant n$，我们定义 $\binom{n}{r}$ 如下:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

并且说 $\binom{n}{r}$ 表示了从 n 个元素中一次取 r 个的可能组合数

例 1. 从 20 人当中选择 3 人组成委员会，一共有多少中选法?
解: 一共有 $\binom{20}{3} = d\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1} = 1140$ 种选法

例 2. 有个 12 人组成的团体，其中 5 位女士，7 位男士，现从中选取 2 位女士，3 位男士组成一个委员会. (1) 问有多少种取法? (2) 另外，如果其中有 2 位男士之间有矛盾，并且坚决拒绝一起工作，那又有多少中取法?
解:

(1) 有 $\binom{5}{2}\binom{7}{3}=\dfrac{5\times 4}{2\times 1}\times\dfrac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=350$ 种取法
(2) 男士一共有 $\binom{7}{3}=35$ 种取法，选中两个有矛盾男士有 $\binom{2}{2}\binom{5}{1}=5$ 种取法，所以排除同时选中两位有矛盾男士的取法: $35-5=30$; 另外，选取女士的方法为 $\binom{5}{2}=10$ 种，所以，一共有 $30\times 10=300$ 种取法

例 3. 假设在一排 n 个天线中，有 m 个是失效的，另 $n-m$ 个是有效的，并且假设所有有效的天线之间不可区分，同样，所有失效的天线之间也不可区分. 问有多少种线性排列方式，使得任何两个失效的天线都不相邻?
解: 先将 $n-m$ 个有效天线放置好，在两个有效天线之间 (或最左/右侧有效天线的左/右边) 的 $n-m+1$ 个位置上, 每个位置只能放置一个失效天线, 即从 $n-m+1$ 位置上, 选择 m 个放置失效天线, 所以, 有 $\binom{n-m+1}{m}$ 种排列方式

组合恒等式
$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-1}{r} \qquad 1\leqslant r\leqslant n$$
原理:
括号左边:
从 n 个元素中抽取 r 个元素的组合
$$\binom{n}{r}$$
括号右边:
将其中一个元素视为特殊元素，包含以下两种情况:
(1) 包含该特殊元素，从余下的 $n-1$ 个元素中再抽取 $r-1$ 个元素
$$\binom{n-1}{r-1}$$
(2) 不包含特殊元素，从余下的 $n-1$ 个元素中抽取 r 个元素
$$\binom{n-1}{r}$$

二项式定理

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

例. 展开 $(x+y)^3$

解:

$$\begin{aligned}(x+y)^3 &= \tbinom{3}{0}x^0y^3 + \tbinom{3}{1}x^1y^2 + \tbinom{3}{2}x^2y^1 + \tbinom{3}{3}x^3y^0 \\ &= y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^31\end{aligned}$$