

1. 导数与反函数

如果 f 在其定义域 (a, b) 上可导且满足以下条件中的任意一条:

- (1) 对于所有的在 (a, b) 中的 x , $f'(x) > 0$;
- (2) 对于所有的在 (a, b) 中的 x , $f'(x) < 0$;
- (3) 对于所有的在 (a, b) 中的 x , $f'(x) \geq 0$ 且对于有限个数的 x , $f'(x) = 0$;
- (4) 对于所有的在 (a, b) 中的 x , $f'(x) \leq 0$ 且对于有限个数的 x , $f'(x) = 0$.

则 f 有反函数.

2. 反函数的导数

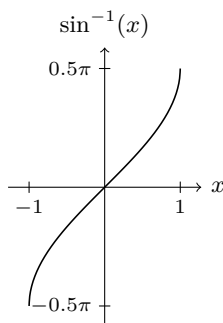
如果 $y = f^{-1}(x)$, 则 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

** $f(y)$ 是将 $f(x)$ 中的 x 替换为 y 的版本, $f'(y)$ 类似.

3. 反三角函数

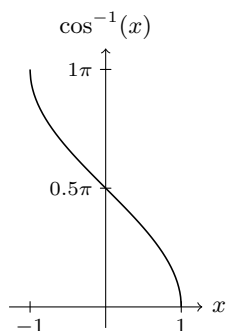
(1) \sin^{-1} 是奇函数; 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

(2) $\frac{d}{dx} \sin^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $-1 < x < 1$.



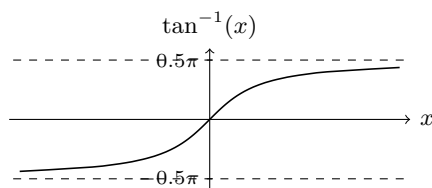
(3) \cos^{-1} 既不是偶函数也不是奇函数; 其定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$.

(4) $\frac{d}{dx} \cos^{-1}(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 其中 $-1 < x < 1$.



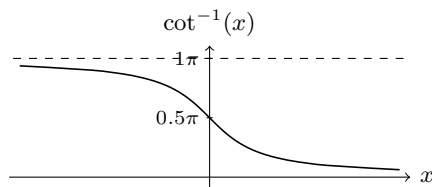
(5) \tan^{-1} 是奇函数; 其定义域是 \mathbb{R} 且值域是 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

(6) 对于所有的实数 x , $\frac{d}{dx} \tan^{-1}(x) = \frac{1}{1+x^2}$.



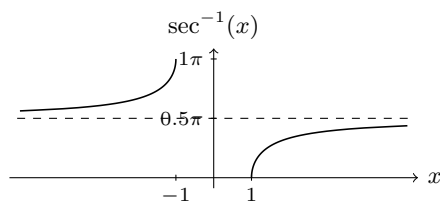
(7) \cot^{-1} 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域为 \mathbb{R} 且值域是 $(0, \pi)$

(8) 对于所有的实数 x , $\frac{d}{dx} \cot^{-1}(x) = -\frac{1}{1+x^2}$.



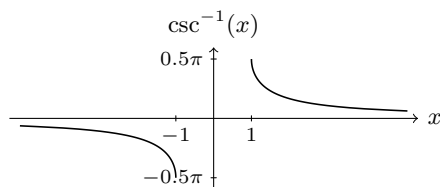
(9) \sec^{-1} 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 且值域是 $[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$.

(10) 对于 $x > 1$ 或 $x < -1$, $\frac{d}{dx} \sec^{-1}(x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$.



(11) \csc^{-1} 是奇函数; 其定义域为 $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ 且值域是 $[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$.

(12) 对于 $x > 1$ 或 $x < -1$, $\frac{d}{dx} \csc^{-1}(x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$.



4. 计算反三角函数

化简形如 $\sin^{-1}(\sin(\alpha))$ 的三角函数:

获取指定角 α 的参照角

找到反三角函数定义域中拥有该参照角的角

确定该角的正弦值与 α 参照角的正弦值符号一致

5. 反双曲函数

(1) \sinh^{-1} 是奇函数; 其定义域和值域都是 \mathbb{R} .

(2) 对于所有的实数 x , $\frac{d}{dx} \sinh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

(3) \cosh^{-1} 既不是奇函数也不是偶函数; 其定义域是 $[1, \infty)$ 且值域是 $[0, \infty)$.

(4) 对于 $x > 1$, $\frac{d}{dx} \cosh^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.