1. 换元法

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C.}$$

例.

$$\int \frac{x}{x^2+8}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

$$\because \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2+8) = 2x$$

$\therefore$ 使用换元法, 设 $t = x^2 + 8$.

得到 $\mathrm{d}t = 2x\,\mathrm{d}x$

$$\therefore \int \frac{x}{x^2+8}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln|t| + C = \frac{1}{2}\ln|x^2+8| + C$$

2. 形如 $\sqrt[b]{ax+b}$ 的积分

$\boxed{\text{在换掉 } \sqrt[n]{ax+b} \text{ 之前, 设 } t = \sqrt[n]{ax+b} \text{ 并对等式 } t^n = ax+b \text{ 两端求导.}}$

例.

$$\int x\sqrt[5]{3x+2}\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $t = \sqrt[5]{3x+2}$, 得:

$$x = \frac{1}{3}(t^5 - 2)$$

等式两端 5 次方并求导, 得:

$$\mathrm{d}x = \frac{5}{3}t^4\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\therefore \int x\sqrt[5]{3x+2}\,\mathrm{d}x &= \frac{5}{9}\int (t^{10} - 2t^5)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{9}\int t^{10}\,\mathrm{d}t - \frac{10}{9}\int t^5\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{5}{99}t^{11} - \frac{5}{27}t^6 + C\end{aligned}$$

将 $t = \sqrt[5]{3x+2}$ 代入上述等式, 得:

$$\int x\sqrt[5]{3x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{99}(3x+2)^{\frac{11}{5}} - \frac{5}{27}(3x+2)^{\frac{6}{5}} + C$$

3. 分部积分法

$$\boxed{\int u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = uv - \int v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.}$$

例.

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x$$

推导过程:

设 $u = x$, $v = e^x$, 得:

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x$$

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$

4. 部分分式

部分分式处理步骤:

(1) 查看分子分母最高项的次数, 如有必要 (分子次数 $\geqslant$ 分母次数) 做除法;

(2) 对分母进行因式分解;

(3) 进行" 分部", 分部类别如下:

1) 线性式:$\dfrac{A}{x+a}$

2) 线性式的平方:$\dfrac{A}{(x+a)^2}+\dfrac{B}{x+a}$

3) 二次多项式:$\dfrac{Ax+B}{x^2+ax+b}$

4) 线性式的三次方:$\dfrac{A}{(x+a)^3}+\dfrac{B}{(x+a)^2}+\dfrac{C}{x+a}$

5) 线性式的四次方:$\dfrac{A}{(x+a)^4}+\dfrac{B}{(x+a)^3}+\dfrac{C}{(x+a)^2}+\dfrac{D}{x+a}$

(4) 计算分部中分子常数的值;

(5) 求解分母为线性项次幂的积分, 即 (3) 中的 1)/2)/4)/5) 类型. 涉及到对数或负次幂;

(6) 求解分母为二次多项式的积分, 即 (3) 中的 3) 类型. 具体方法: 先配方, 再换元. 涉及到对数和正切函数.

例.

$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

推导过程:

对分母 x^2-1 进行因式分解:

$x^2-1=(x+1)(x-1)$

进行分部:

$\frac{x+2}{x^2-1}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}$

求分子常数的值:

$$A(x-1)+B(x+1)=x+2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} A+B=1 \\ B-A=2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=-\frac{1}{2}, B=\frac{3}{2}$$

求解分母为线性次幂的积分:

$\int \frac{x+2}{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$