ΕΜΒΟΛΙΜΗ ΕΞΕΤΑΣΗ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥΡΙΟΥ 2015 ΣΤΟΝ ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟ ΛΟΓΙΣΜΟ ΙΙ

ΘΕΜΑ 1ο. (1,5) (α) Να αποδειχθεί οτι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2}, & \text{όταν } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{όταν } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

είναι συνεχής στο σημείο $(0,0)$.
(β) Να υπολογιστούν όλες οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της f στο σημείο $(0,0)$, αν υπάρχουν.
(γ) Είναι η f διαφορίσιμη στο σημείο $(0,0)$;

ΘΕΜΑ 2ο. (1,5) Να ευρεθούν τα σημεία τοπικών ακροτάτων και τα σαμάρια της συνάρτησης $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2x - y.$$

ΘΕΜΑ 3ο. (2) Να αποδειχθεί οτι το σύνολο $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy - 1 = 0\}$ είναι λεία επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ και να ευρεθούν τα σημεία της που βρίσκονται πλησιέστερα στο $(0,0,0)$.

ΘΕΜΑ 4ο. (1,5) Αν $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2x\}$, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_B (x^2+y^2)\,dxdy.$$

ΘΕΜΑ 5ο. (2) Αν $K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2}\}$ να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_K (x+y+z)\,dxdydz.$$

ΘΕΜΑ 6ο. (1,5) Αν $R > 0$, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού

$$K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2 \quad \text{και} \quad 0 \leq y \leq x, \quad z \geq 0\}.$$

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

Απειροστικός 2 Εμβόλιμη Ιανουαρίου 2015

Θέμα 1^{o}

Για καθε $(x, y) \neq (0, 0)$

a) $|f(x,y) - f(0,0)| \leq \|(x,y) - (0,0)\|$

$$\left|\frac{x^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \frac{|x^3|}{x^2+y^2} \leq \frac{|x^3|}{x^2} = \frac{|x^3|}{|x^2|} =$$

$$= \left|\frac{x^3}{x^2}\right| = |x| \leq \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y) - (0,0)\|$$

Δηλαδη, $|f(x,y) - (0,0)| \leq \|(x,y) - (0,0)\|$

β) $$f'(x_0, u) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + tu) - f(x_0)}{t} =$$

Αν $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ και είναι $\neq 0$ τότε:

$$f'\left((0,0), \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t^3 v_1^3}{t^2 v_1^2 + t^2 v_2^2}}{t} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\cancel{t^3} v_1^3}{\cancel{t^3} \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^3}{v_1^2 + v_2^2}$$

γ) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$,

$$\frac{f(h,0)}{h} = \frac{\frac{h^3}{h^2}}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = 1$$

$$\frac{\partial f}{dy}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = 0$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h) - f(x_0) - T\cdot h|}{\|h\|}$$

$$T = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right), \quad h = (h_1, h_2)$$

$$\frac{\left|f(h_1, h_2) - \cancelto{0}{f(0,0)} - (1,0)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \frac{\left| \frac{h_1^3}{h_1^2+h_2^2} - h_1 \right|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = \frac{|h_1 \cdot h_2^2|}{(h_1^2+h_2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{|h_1| \cdot h_2^2}{(h_1^2+h_2^2)^{3/2}}$$

$$g(h_1, h_2) = \frac{|h_1| \cdot h_2^2}{(h_1^2 \cdot h_2^2)^{3/2}}$$

$$g(0, y) = 0$$

$$g(x, 0) = 0$$

$x = y$, $g(x, x) = \frac{|x| \cdot x^2}{(2x^2)^{3/2}} = \frac{|x| \cdot x^2}{2^{3/2} \cdot x^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Άρα δεν είναι διαφορίσιμη

Θεμα 2ο

$$f(x,y) = x^3 + xy^2 - 2 - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy - 1$$

$$3x^2 + y^2 - 2 = 0$$
$$2xy - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^2 + y^2 = 2 \\ 2xy = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1}{2y}$$

$$3\frac{1}{4y^2} + y^2 - 2 = 0 \overset{y \neq 0}{\Rightarrow} 4y^2 - 8y^2 + 3 = 0$$

Θέτω : $w = y^2 \Rightarrow 4w^2 - 8w + 3 = 0$

$$\Delta = 16 > 0$$

$$w = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{Άρα } y^2 = \begin{cases} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$y = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}, \quad y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{6}{\sqrt{2}} > 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\det(Hf(x,y)) = 12x^2 - 4y^2$$

$$\det\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 3\cdot 2 - 2 = 4 > 0$$

στο $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ελάχιστο

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right) = -\frac{6}{\sqrt{2}} < 0$$

$$\det\left(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}\right) = 4 > 0$$

Άρα μέγιστο

$$\left.\begin{aligned} \det Hf\left(1/\sqrt{6}, \sqrt{3/2}\right) &< 0 \\ \det Hf\left(-1/\sqrt{6}, -\sqrt{3/2}\right) &< 0 \end{aligned}\right\} \text{σαμάρια}$$

Θεμα 3ο:

$$S = f^{-1}(0)$$

$$f(x,y,z) = z^2 - xy - 1$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= -y \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= -x \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= 2z \end{aligned}\right\} (-y,-x,2z) = Df(x,y,z)$$

$$Df(x,y,z) = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$$

$S = \{ \dots \mid z^2 - xy - 1 = 0 \}$

Για $x=y=z=0$ $S = \{ \dots \mid -1 = 0 \}$ Ατοπο

Άρα $(0,0,0) \notin S$

Άρα είναι λεία επιφανια

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$$f(x,y,z) = z^2 - xy - 1 = 0$$

$$\nabla g(x,y,z) = \lambda \nabla f(x,y,z)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial y} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial y} \\[2ex] \dfrac{\partial g}{\partial z} = \lambda \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x = -\lambda y \\ 2y = -\lambda x \\ 2z = 2\lambda z \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Rightarrow \\ \Rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} x = -\frac{\lambda}{2} y \\ y = -\frac{\lambda}{2} x \\ z(1-\lambda) = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{array}$$

Αν $z \neq 0$: $\lambda = 1$ οπότε

$2x = -y = \frac{1}{2}x$ δηλαδη $\boxed{x = y = 0}$

και $z^2 - 1 = 0 \Rightarrow z^2 = 1 \Rightarrow \boxed{z = \pm 1}$

$g(0,0,1) = 1$
$g(0,0,-1) = 1$

• Αν $z = 0$ $\quad xy = -1 \Rightarrow xy \neq 0$ Οποτε
εχουμε οτι $x = -\frac{\lambda}{2}y = \frac{\lambda^2}{4}x$
Αρα $\lambda = \pm 2$
- $\lambda = 2$ $\quad x = -y$ και $xy = -1$ δηλ $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm$
- $\lambda = -2$ $\quad x = y$ $\quad x^2 = -1$ ατοπο

$g(1,-1,0) = 2$
$g(-1,1,0) = 2$

Αφου $2 > 1$ τα πλησιέστερα σημεία είναι τα $g(0,0,\pm 1) = 1$

$\underline{\Theta\acute{\varepsilon}\mu\alpha\ 4^{o}}$

$$B=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\leq 2x\}$$

$$\int_B (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$B=\{(x,y)\in R^2 : x^2+y^2\leq 2x\} =$$
$$=\{(x,y)\in R^2 : x^2-2x+1+y^2-1\leq 0\}$$
$$=\{\ldots : \underbrace{(x-1)^2}_{2^2}+y^2\leq 1\}$$

πολικές: $x=1+\cancel{2}r\cos\theta$ → $x=1+2r\cos\theta$

$y=0+r\sin\theta$

$$\det(r,\theta)=\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}=|r|$$

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\int_B (x^2+y^2)\,dxdy = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 r + 2r^2\cos\theta + r^3\, dr\right)d\theta =$$

$$= 2\pi\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right] = \frac{3\pi}{2}$$

Θέμα 5ο

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= z \end{aligned}\right\} \text{κυλινδικές}$$

$K = \{ (x, y, z) \in R^3 : 0 \leq z \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \}$

$0 \leq 1 - \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow 1 \leq x^2 + y^2$

$0 \leq z \leq 1 - r$

$0 \leq r \leq 1$

$0 \leq \phi \leq 2\pi$

$$\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1\left(\int_0^{1-r}(r\cos\phi + r\sin\phi + z)\cdot r\,dz\right)dr\right)d\phi =$$

$$= \frac{5\pi}{12}$$

<u>Θέμα 6ο</u> $R>0$

$$K=\{\ldots : x^2+y^2+z^2 \le R^2 \text{ και } \boxed{0\le y\le x},\ z\ge 0\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\sin\theta\cdot\cos\phi \\ y &= \rho\sin\phi\cdot\sin\theta \\ z &= \rho\cos\theta \end{aligned}\right\} \text{σφαιρικές}$$

$y \le x$

$$\cancel{\rho\sin\theta}\cos\phi = \cancel{\rho}\sin\phi\cdot\cancel{\sin\theta}$$

$$\cos\phi = \sin\phi$$

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$

$$0\le\rho\le R$$

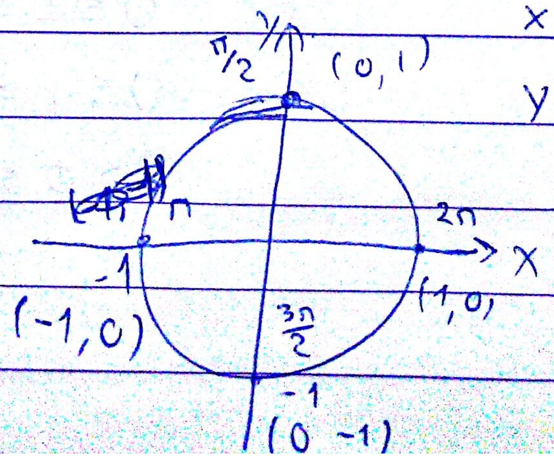
$$0\le\phi\le\frac{\pi}{4}$$

$$0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\theta = 0 \Rightarrow \cos\theta = \cos\frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$x=\cos$

$y=\sin$



$$\mathrm{Vol}(K) = \int_K 1 \, dx\,dy\,dz =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\int_0^R \rho^2 \cdot \sin\theta \, d\rho \right) d\phi \right) d\theta = \frac{\pi R^3}{12}$$

$$[\cos\theta]_0^{\pi/2} = \cos\frac{\pi}{2} - \cos 0 = -1$$

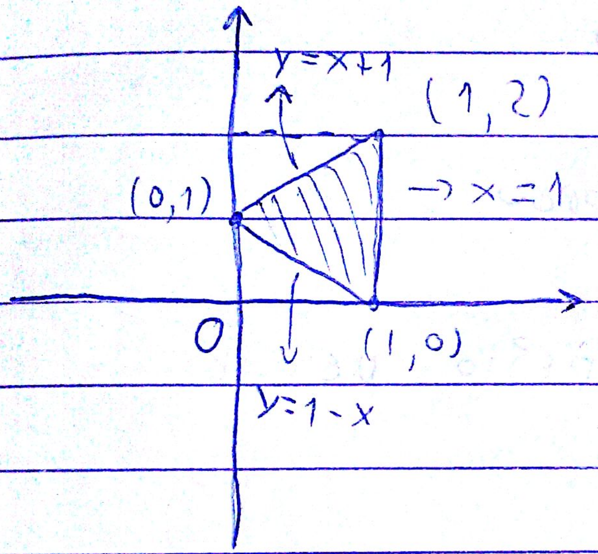
$$\det = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} \quad \frac{\partial z}{\partial \rho} \right.$$

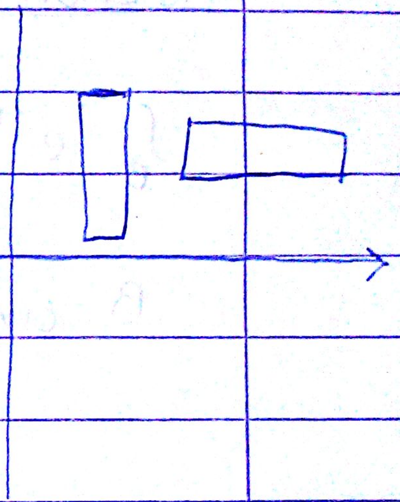
Scanned by CamScanner

Άσκηση Τρίγωνο

Να βρεθεί $\int_B xy\,dxdy$ όπου

B τρίγωνο με κορυφές τα σημεία
$(1,0)$, $(0,1)$, $(1,2)$





$(1,0) \in \varepsilon \longrightarrow y=\lambda x+\beta \Rightarrow 0=\lambda+\beta$ $\Big\}$ $\lambda=-1$
$(0,1) \in \varepsilon \longrightarrow y=\lambda x+\beta \Rightarrow 1=\beta$ $\Big\}$ $\beta=1$

Άρα $y=-x+1$

$(0,1) \rightarrow y=x+1$
$(1,2) \rightarrow$

$(1,2)$ $= x=1$
$(1,0)$

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 , -x+1 \le y \le x+1 \}$$

$$\int_0^1 \left(\int_{-x+1}^{x+1} xy \, dy \right) dx = \frac{2}{3}$$

<u>Άσκηση Τραπέζιο</u>

$\int_B e^{x+y} \, dx \, dy$, όπου

B είναι το τραπέζιο με κ