지수함수와 로그함수

Section 04 상용로그

Subsection 1.4.1 상용로그의 정의

상용(常用)로그는 이름 그대로 자주 사용되는 로그라는 뜻이다. 일반적으로 사람의 손가락이 10개인 까닭에 우리는 십진법을 활용하고 이로 인해 밑이 10인 로그를 활용하는 일이 자주 있어 특별히 밑이 10인 로그를 자주 사용해 상용로그라 한다. 상용로그 $\log_{10} N$은 보통 밑 10을 생략하여 $\log N$과 같이 나타낸다.

n이 실수일 때, $\log 10^n = \log_{10} 10^n = n$이므로 10^n의 꼴의 수에 대한 상용로그의 값은 로그의 성질을 이용하여 쉽게 구할 수 있다. 예를 들어
$\log 1000 = \log 10^3 = 3\log 10 = 3$, $\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2\log 10 = -2$와 같이 계산할 수 있다.

Concept 상용로그의 정의

$x > 0$인 x에 대하여 밑을 10으로 하는 x의 로그, 즉 $\log_{10} x$이고
보통 밑인 10은 생략하여 $\log x$와 같이 나타낸다.

[문제 1] 다음 표는 양수 N과 $\log N$의 값을 나타낸 것이다. 표를 완성하시오.

N	10000		$\sqrt[3]{100}$	$\frac{1}{\sqrt{1000}}$	
$\log N$	4	2			-2

Subsection 1.4.2 상용로그표

상용로그의 값은 상용로그표를 이용하여 구할 수 있다.
상용로그표는 0.01의 간격으로 1.00에서 9.99까지의 수의 상용로그의 값을 반올림하여 소수 넷째 자리까지 나타낸 것이다. 참고로 상용로그표에 있는 값은 반올림하여 구한 것이지만 편의상 등호를 사용하여 나타낸다. 상용로그표는 지면 관계상 이곳에 싣지 못했고 교과서 p.200 을 참고하기를 바란다.

상용로그표에서 log5.16의 값을 구하려면 5.1의 가로줄과 6의 세로줄이 만나는 곳에 있는 수 0.7126을 찾으면 된다. 즉, $\log 5.16 = 0.7126$이다.

수	0	1	⋯	6	7
1.0	.0000	.0043	⋯	.0253	.0294
1.1	.0414	.0453	⋯	.0645	.0682
⋮	⋮	⋮	⋯	⋮	⋮
5.1	.7076	.7084	⋯	.7126	.7135
5.2	.7160	.7168	⋯	.7210	.7218

[문제 2] 상용로그표를 이용하여 다음 값을 구하시오.
(1) $\log 3.15$ (2) $\log 7.77$

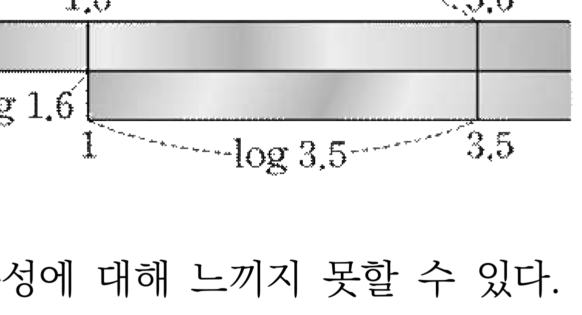
로그의 성질과 상용로그표를 이용하면 1.00에서 9.99까지의 범위를 벗어난 수의 상용로그의 값을 구할 수 있다. 예를 들어 상용로그표에서 $\log 3.19 = 0.5038$이므로
$\log 319 = \log(10^2 \times 3.19) = 2 + \log 3.19 = 2.5038$
$\log 0.319 = \log(10^{-1} \times 3.19) = -1 + \log 3.19 = -1 + 0.5038 = -0.4962$
와 같이 구할 수 있다.

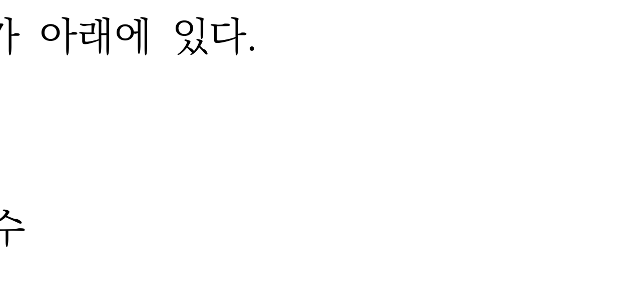
[문제 3] 상용로그표를 이용하여 양수 N의 상용로그의 값을 구하려고 한다. 다음 밑줄 친 곳에 알맞은 것을 써넣으시오. (단, n은 정수, $1.00 \le a \le 9.99$)

$\log N$	$= \log(10^n \times a)$	$= \log 10^n + \log a$	$= n + (\log a$의 값$)$	
(1) $\log 823$	$= \log(10^2 \times 8.23)$	$= \log 10^2 + \log 8.23$	$= 2 + 0.9154$	$= 2.9154$
(2) $\log 8.23$	=	=	=	=
(3) $\log 0.823$	=	=	=	=
(4) $\log 0.0823$	=	=	=	=

Subsection 1.4.3 상용로그의 활용

‘로그자’는 계산기가 보편화되지 못했던 시기에 곱셈과 나눗셈을 편리하게 하는 데 사용되었다. 아래의 그림과 같이 눈금 1이 새겨진 점으로부터의 거리가 $\log x\,(x \ge 1)$인 곳에 눈금 x를 새긴 자를 ‘로그자’라고 한다. 계산을 하기 위해서는 두 개의 로그자가 필요하다. 예를 들어 1.6×3.5를 로그자를 사용하여 계산해 보자. 오른쪽 그림에서 아래 자의 눈금 1을 위의 자의 눈금 1.6에 맞추고, 아래 자의 눈금 3.5에 대응하는 위의 자의 눈금 5.6을 읽는다. 즉, 5.6은 1.6×3.5를 계산한 결과이다.





계산기가 보편화된 요즘은 학생들이 로그의 유용성에 대해 느끼지 못할 수 있다. 그래서 특별히 준비한 로그가 활용되는 예시가 아래에 있다.

- 소리의 세기 측정: 데시벨(dB)
- 사회적 지수: 사회적 불평등 지수, 개발 지수
- 지진의 규모 측정: 리히터 규모
- 인구통계학: 인구 성장률 분석, 인구 변화 패턴 분석
- 수소 이온 농도 측정: pH 농도
- 문화 소비: 문화 상품 소비 패턴 분석(영화 관객수, 책 판매량 분포)
- 이자율 계산: 기간에 따른 복리 계산
- 정보 전파: SNS 에서 정보가 퍼지는 속도 측정
- 정보 이론: 데이터 압축 및 전송에서의 엔트로피 측정
- 설문 조사 데이터 분석: 응답 분포의 비대칭성을 정규화
- 컴퓨터 과학: 알고리즘의 시간 복잡성 측정

이상에서 언급한 이외에도 오늘날 다양한 곳에서 로그가 활용되고 있다. 아래 교과서 문제에도 다양한 예시가 있으니 읽어보는 것이 좋겠다. 아직도 로그가 불필요하다고 생각하는 독자가 있을지 의문이다.

[예제 1] 수신기의 안테나를 통하여 들어오는 신호의 품질을 나타내는 데 신호 대 잡음비를 사용한다. 수신에 필요한 신호의 전력을 SmW, 수신에 필요하지 않은 신호인 잡음의 전력을 $N\,mW$, 신호 대 잡음비를 EdB이라고 하면

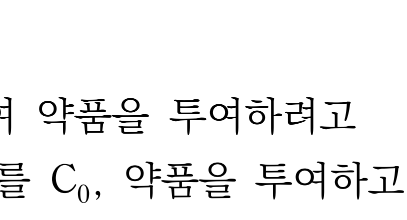
$$E = 10\log \frac{S}{N}$$

인 관계가 성립한다고 한다. 수신에 필요한 신호의 전력이 500 mW, 잡음의 전력이 23 mW일 때, 신호 대 잡음비를 구하시오. (단, $\log 4.6 = 0.66$으로 계산한다.)
[참고 자료: Alex Doboli 외, “Introduction to Mixed-Signal, Embedded Design”]

$S = 500$, $N = 23$이므로 $E = 10\log \frac{500}{23} = 10\log \frac{1000}{46} = 10\log \frac{100}{4.6} =$
$10(\log 10^2 - \log 4.6) = 10(2 - 0.66) = 13.4$ 따라서 신호 대 잡음비는 13.4 dB이다.

답 13.4 dB

[문제 4] 어느 지역의 해저에서 일어난 지진의 규모를 M, 지진으로 발생하는 해일의 최고 높이를 Hm라고 하면 $M = \log H + 6.5$인 관계가 성립한다고 한다. 해일의 최고 높이가 25 m일 때, 지진의 규모를 구하시오. (단, $\log 2.5 = 0.40$으로 계산한다.)



[참고 자료: Antony Joseph, “Tsunamis”]

[문제 5] 어느 물통에 서식하는 박테리아를 제거하기 위하여 약품을 투여하려고 한다. 이 물통에 들어 있는 물 1 mL당 처음 박테리아의 수를 C_0, 약품을 투여하고 t시간 후 박테리아의 수를 C라고 하면 $\log \frac{C}{C_0} = -0.2t$라고 한다. 물 1 mL당 처음 박테리아의 수가 2×10^5일 때, 박테리아의 수가 52600이 되는 것은 약품을 투여하고 몇 시간 몇 분 후인지 구하시오. (단, $\log 2.63 = 0.42$로 계산한다.)