Chapter Ⅰ

지수함수와 로그함수

Section 01 거듭제곱과 거듭제곱근

Subsection 1.1.1 거듭제곱

우리는 3이 다섯 개가 더해진 식을 곱셈을 이용하여 $3+3+3+3+3=3\times 5$와 같이 간단하게 나타내는 방법을 배웠다. 또한, 3이 다섯 개가 곱해진 식을 거듭제곱을 활용해 $3\times 3\times 3\times 3\times 3=3^5$과 같이 간단하게 나타내는 방법을 배웠다.

실수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고 기호 a^n으로 나타낸다. 이때, a, a^2, a^3, $\cdots$, a^n, $\cdots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라고 한다는 것을 이미 중학교에서 배웠다. 거듭제곱을 나타내는 기호 a^n은 1637 년 르네 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)가 처음 사용했다고 알려져 있다.

Concept **지수가 양의 정수일 때의 지수법칙 (중학교에서 학습)**

- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$
- $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \quad (a\neq 0) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$

[문제 1] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a\neq 0$, $b\neq 0$)

(1) $ab^2\times a^3b^4$　　(2) $(a^3b^2)^3$　　(3) $a^3b^4\div a^2b^5$

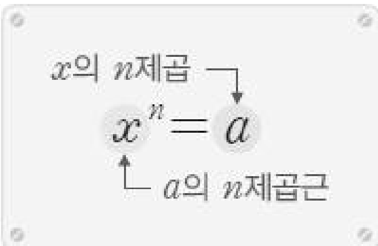
Subsection 1.1.2 거듭제곱근

제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2 = a$를 만족시키는 수 x를 a의 제곱근이라고 하고, 세제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^3 = a$를 만족시키는 수 x를 a의 세제곱근이라고 한다.

일반적으로 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n = a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 또, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.

거듭제곱근은 영어로 'radical root'라고 한다. radical은 뿌리를 뜻하는 라틴어 radix에서 유래했다. 그런데 root가 뿌리라는 뜻이므로 radical root를 해석하자면 '뿌리 뿌리'다. 참고로 radix의 첫 글자 r을 따와 루트 기호 $\sqrt{\ }$를 만들었다.

'x의 n제곱은 a이다.'와 'a의 n제곱근은 x이다'라는 표현을 혼동하지 않도록 주의해야 한다. 예를 들어, -2의 네제곱은 16이지만, 16의 네제곱근은 ± 2, $\pm 2i$로 총 4개가 있다. 'n제곱근 a'와 'a의 n제곱근' 또한 그 의미를 되새기며 혼동하지 않도록 주의해야 한다.



Concept 거듭제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근은 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n = a$를 만족시키는 x이다.

[예제 1] 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 구하시오.

(1) -1의 세제곱근 (2) 1의 네제곱근

(1) -1의 세제곱근 x라고 하면 $x^3=-1$이므로

$$x^3+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -1이다.

(2) 1의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=1$이므로

$$x^4-1=0,\ (x-1)(x+1)(x^2+1)=0$$

$$x=\pm1 \text{ 또는 } x=\pm i$$

따라서 1의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-1, 1$이다.

답 (1) -1 (2) $-1, 1$

[문제 2] 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 구하시오.

(1) -8의 세제곱근　　(2) 256의 네제곱근

Subsection 1.1.3 거듭제곱근 중 실수인 것

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이제 함수 $y=x^n$의 그래프의 특성을 이용하여 n의 값이 홀수 및 짝수일 때 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것을 구해 보자.

Case 1. n이 홀수일 때

임의의 실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 이때, 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점은 실수 a의 값에 관계없이 항상 1개이다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 하나뿐이고, 이것을 $\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

Case 2. n이 짝수일 때

임의의 실수 x에 대하여 $x^n \geq 0$이고 $(-x)^n = x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 이때, 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수는 실수 a의 값에 따라 다음과 같다.

1) $a>0$이면 교점은 2개이고, 그 두 교점의 x좌표는 각각 양수와 음수이다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 양수인 것과 음수인 것이 각각 1개씩 있으며, 이것을 각각 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

2) $a=0$이면 교점은 1개이고, 교점은 원점이므로 x좌표는 0이다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 0 하나뿐이다.

3) $a<0$이면 교점이 없으므로 a의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

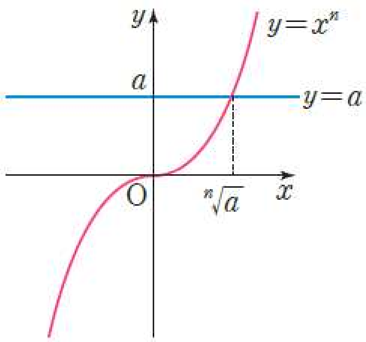
이상을 정리하면 n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

Concept 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것

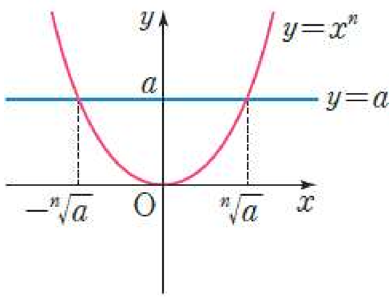
	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

$\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽는다. 또 $\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.
루트 기호는 크리스토프 루돌프(Christoff Rudolff, 1499-1543)가 1525 년에 처음 사용했다고 한다. 초기에는 위쪽 줄 없이 앞에 기호 √만 사용하여 √a와 같이 나타냈으나, √$a+b$ 가 $\sqrt{a}+b$인지 $\sqrt{a+b}$인지 헷갈린다는 문제가 있었다. 이후 르네 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)가 위쪽 줄을 넣어 현대의 루트 기호가 완성되었다. 기호 $\sqrt[n]{a}$는 1690 년 미셸 롤(Michel Rolle, 1652-1719)이 개발했다.

n이 홀수일 때



n이 짝수일 때



[문제 3] 다음 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{8}$ (2) $-\sqrt[4]{625}$ (3) $\sqrt[5]{-243}$ (4) $\sqrt[6]{64}$

Subsection 1.1.4 거듭제곱근의 성질

$a>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때, $\sqrt[n]{a}$는 n제곱하면 a가 되는 양수이므로 $(\sqrt[n]{a})^n=a$이다. $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때, 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

지수법칙에 의해 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$이다. 이때, $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다. 따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이다.

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

지수법칙에 의해 $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$이다. 이때, $a>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$이고 $(\sqrt[n]{a})^m>0$이다. 따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$은 a^m의 양의 n제곱근이므로 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$이다.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

지수법칙에 의해 $\left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n=\left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^n=\frac{a}{b}$이다. 이때, $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}>0$이다. 따라서 $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$는 $\frac{a}{b}$의 양의 n제곱근이므로 $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$이다.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

지수법칙에 의해 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$이다. 이때, $\sqrt[n]{a}>0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$이다. 따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 a의 양의 mn제곱근이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$이다.

이상을 정리하면 $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때 거듭제곱근의 성질은 다음과 같다.

Concept **거듭제곱근의 성질**

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상인 정수일 때

- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

거듭제곱근의 성질은 $a>0, b>0$일 때에만 성립한다. 예를 들어,
$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{8}\,i=\sqrt{16}\,i^2=-4$이지만 $\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{16}=4$이다.
참고로 $a<0, b<0$일 때, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고,
$a>0, b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

[문제 5] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}$ (2) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$ (3) $(\sqrt[6]{25})^3$ (4) $\sqrt[4]{\sqrt{6^8}}$