

## 지수함수와 로그함수

## Section

02

## 지수의 확장

## Subsection 1.2.1 지수의 정수로의 확장

지수가 양의 정수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 0 또는 음의 정수일 때도 성립하도록 지수의 범위를 정수까지 확장해 보자.

$a \neq 0$ 이고  $m, n$ 이 양의 정수일 때, 지수법칙에 의해  $a^m a^n = a^{m+n}$ 이 성립한다.

여기서  $m=0$ 일 때도 지수법칙이 성립하도록 하려면  $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$ 이므로  $a^0 = 1$ 이어야 한다. 따라서  $a^0 = 1$ 이라고 정의한다.

$m=-n$ 일 때도 지수법칙이 성립하도록 하려면  $a^{-n} a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$ 이므로

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 이어야 한다. 따라서  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 이라고 정의한다.

지수가 1씩 늘어날 때  $a$ 를 곱해준다는 규칙을 반대로 생각해 보면 지수가 1씩 줄어들 때  $a$ 를 나누어준다는 규칙으로 생각해 볼 수 있다.

$$a^2 = a \times a$$

$$a^1 = a$$

$$a^0 = 1$$

$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

그렇다면  $a^0 = 1$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ 과 같이 정의하는 것이 역시나 자연스럽다.

## Concept 0 또는 음의 정수인 지수

$a \neq 0$ 이고  $n$ 이 양의 정수일 때,  $a^0 = 1$ ,  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

참고로  $0^0$ 과  $0^{-n}$ 은 정의하지 않는다.

음의 지수에 대한 표기법은 1685년 존 월리스(John Wallis, 1616-1703)이 처음 사용했다고 알려져 있다.

[문제 1] 다음 값을 구하시오.

$$(1) \left(\frac{1}{3}\right)^0 \quad (2) 3^{-4} \quad (3) (-2)^{-5} \quad (4) \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

지수가 음의 정수일 때, 지수법칙이 성립하는지 알아보기 위해  $a \neq 0$ 이고  $m, n$ 이 음의 정수일 때,  $m=-p$ ,  $n=-q$  ( $p, q$ 는 양의 정수)라 하자.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^m a^n = a^{-p} a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{a^{pq}} = a^{pq} = a^{(-p)(-q)} = a^{mn}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \div a^n = a^{-p} \div a^{-q} = a^{-p} \div \frac{1}{a^q} = a^{-p} \times a^q = a^{-p+q} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(ab)^n = (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q} b^{-q} = a^n b^n$$

$m, n$  중 0이 있거나 하나만 음의 정수인 경우에도 위와 비슷한 방법으로 지수법칙이 성립함을 증명할 수 있다. 지면 관계상 이는 독자의 몫으로 남긴다.

## Concept 지수가 정수일 때, 지수법칙

$a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ 이고  $m, n$ 이 정수일 때

▶  $a^m a^n = a^{m+n}$

▶  $a^m \div a^n = a^{m-n}$

▶  $(a^m)^n = a^{mn}$

▶  $(ab)^n = a^n b^n$

앞서  $a^m \div a^n$ 는  $m, n$ 의 대소 관계에 따라 세 가지 경우로 나뉘어 복잡했지만, 이제  $m, n$ 의 대소 관계와 관련 없이  $a^m \div a^n = a^{m-n}$ 라 할 수 있다.

[문제 3] 다음 식을 간단히 하시오. (단,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ )

$$(1) 7^{-5} \times 7^6 \quad (2) (-2)^5 \div (-2)^7$$

$$(3) (a^{-1})^{-2} \times a^3 \quad (4) (ab^{-2})^{-3} \div (a^2b)^{-2}$$

## Subsection 1.2.2 지수의 유리수로의 확장

지수가 정수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 유리수일 때도 성립하도록 지수의 범위를 유리수까지 확장해 보자.

$a > 0$ 이고  $m, n$ 이 정수일 때, 지수법칙에 의해  $(a^m)^n = a^{mn}$ 이 성립한다. 지수가

유리수일 때에도 지수법칙이 성립하도록 해보자.  $m, n(n \geq 2)$ 이 정수일 때

$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$ 이고,  $a > 0$ 이므로  $a^{\frac{m}{n}} > 0$ 이다. 따라서  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ 이어야

한다. 참고로 거듭제곱근의 성질에 의해  $a > 0$ 이면  $a^m$ 의 양의  $n$ 제곱근, 즉

$x^n = a^m$ 의 양의 실근은 단 하나 존재해야 한다. 여기서  $a^{\frac{m}{n}}$ 은  $a^m$ 의 양의  $n$ 제곱근이므로 유일하다.

지수가 유리수일 때 지수법칙이 성립한다면  $a > 0$ 일 때,  $a = a^{\frac{1}{n} \times n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$ 이므로

$a^{\frac{1}{n}}$ 은  $n$ 제곱하여  $a$ 가 되는 수, 즉  $a$ 의  $n$ 제곱근이다. 따라서  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ 이 되는 것이 자연스럽다.

분수 지수에 대한 표기법은 아이작 뉴턴(Isaac Newton, 1643-1727)이 처음 사용했다고 알려져 있다.

## Concept 유리수인 지수

$a > 0$ 이고,  $m, n(n \geq 2)$ 이 정수일 때  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$m$ 은 정수  $n$ 은 2이상의 정수임에 유의해야 한다.

즉,  $2^{-\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{-4}} = \sqrt[4]{2^5}$ 가 아니라  $2^{-\frac{5}{4}} = 2^{\frac{-5}{4}} = \sqrt[4]{2^{-5}}$ 이다.

[문제 4] 다음 중 서로 같은 것끼리 선으로 연결하시오. (단,  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ )

$$\begin{array}{llll} \textcircled{1} \sqrt[3]{a^4} & \bullet & \bullet & \textcircled{7} a^{\frac{3}{4}} \\ \textcircled{2} a^{-\frac{2}{5}} & \bullet & \bullet & \textcircled{8} \sqrt[5]{a^{-2}} \\ \textcircled{3} a^{-\frac{5}{2}} & \bullet & \bullet & \textcircled{9} \sqrt{a^{-5}} \\ \textcircled{4} \sqrt[4]{a^3} & \bullet & \bullet & \textcircled{10} a^{\frac{4}{3}} \end{array}$$

[문제 5] 다음 값을 구하시오.

$$(1) 8^{\frac{2}{3}} \quad (2) 27^{-\frac{2}{3}} \quad (3) 16^{0.25} \quad (4) 64^{-0.5}$$

지수가 유리수일 때, 지수법칙이 성립하는지 알아보기 위해  $a > 0$ 이고  $r, s$ 가 유리수일 때,  $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}$  ( $m, n, p, q$ 는 정수,  $n \geq 2, q \geq 2$ )라 하자.

$$a^r a^s = a^{r+s}$$
$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n} \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq} \frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq} a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n} + \frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$
$$(a^r)^s = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n} \times \frac{p}{q}} = a^{rs}$$

$$a^r \div a^s = a^{r-s}$$
$$a^r \div a^s = a^{\frac{m}{n} \frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq} \frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \div \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$
$$= a^{\frac{m}{n} - \frac{p}{q}} = a^{r-s}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$
$$(ab)^r = (ab)^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{(ab)^q} = \sqrt[p]{a^q b^q} = \sqrt[p]{a^q} \times \sqrt[p]{b^q} = a^{\frac{q}{p}} b^{\frac{q}{p}} = a^r b^r$$

Concept

지수가 유리수일 때, 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고,  $r, s$ 가 유리수일 때

- $a^r a^s = a^{r+s}$
- $a^r \div a^s = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $(ab)^r = a^r b^r$

지수가 유리수인 경우는  $a > 0$ 인 조건이 필요하다. 예를 들어  $\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$ 이지만,  $\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-1)^{2 \times \frac{1}{2}} = -1$ 이다.

[문제 7] 다음 식을 간단히 하시오.

(1)  $2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{7}{3}}$

(2)  $5^{\frac{3}{2}} \div 5^{-\frac{1}{2}}$

(3)  $(125^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$

(4)  $2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times 10^{-\frac{3}{5}}$

[예제 1]  $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1)  $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a^2}$

(2)  $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a + b)$

(1)  $\sqrt[3]{a^2} \times \sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a^2} = (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{4}{3}} \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} + \frac{4}{3} - \frac{2}{3}} = a$

(2)  $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a + b) = \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2\}(a + b) = (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

답

(1)  $a$  (2)  $a^2 - b^2$


[문제 8]  $a > 0, b > 0$ 일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1)  $\sqrt[3]{a^2 b^4} \times \sqrt[3]{a^4 b^2} \div \sqrt[6]{a^8 b^4}$

(2)  $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$

[문제 9] 공룡은 오래전에 멸종했지만 발자국과 뼈의 화석으로 달리는 속력을 추측할 수 있다. 공룡이 달릴 때 보폭을  $s$  m, 공룡의 다리 길이를  $h$  m라고 하면 공룡이 달리는 속력은

$0.25 \times 9.8^{0.5} \times s^{1.67} \times h^{-1.17}$  m/s



라고 한다. 두 공룡 A, B의 화석에서 공룡 A의 달릴 때 보폭은 8 m, 다리 길이는 4 m이고, 공룡 B의 달릴 때 보폭은 4 m, 다리 길이는 2 m일 때, 공룡 A가 달리는 속력은 공룡 B가 달리는 속력의 몇 배인지 구하시오.

[참고 자료: David E. Fastovsky 외, “Dinosaurs”]

Subsection 1.2.3 지수의 실수로의 확장

지수가 무리수인 경우를 살펴보고, 지수의 범위를 실수까지 확장해 보자.

사실 지수를 실수로 확장하는 것은 굉장히 어려운 개념이다.

$S = \{x \mid x^2 < 2, x \text{는 유리수}\}$ 라는 집합을 생각해 보자. 집합  $S$ 의 원소는 모두  $-\sqrt{2}$ 보다는 크고  $\sqrt{2}$ 보다는 작다. 또한, 집합  $S$ 에 속하지 않는 유리수는 모두  $-\sqrt{2}$ 보다 작거나  $\sqrt{2}$ 보다 크다. 이때 실수의 성질 중 조밀성(빽빽함)에 의해  $\sqrt{2}$ 를 집합  $S$ 의 상한이라고 하고,  $-\sqrt{2}$ 를 집합  $S$ 의 하한이라고 한다.  $\sqrt{2}$ 가 집합  $S$ 의 상한이므로 우리는 집합  $S$ 의 원소로만 이루어진 수의 나열을 만들어  $\sqrt{2}$ 에 점점 가까워지도록 할 수 있다.

예를 들어  $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$ 이므로 무리수  $\sqrt{2}$ 에 한없이 가까워지는 유리수의 나열 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421,  $\dots$  을 생각할 수 있다. 이 유리수를 지수로 갖는 수들의 나열  $2^1, 2^{1.4}, 2^{1.41}, 2^{1.414}, 2^{1.4142}, 2^{1.41421}, \dots$ 은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이때 그 일정한 수를  $2^{\sqrt{2}}$ 으로 정의한다. 이와 같은 방법으로  $x$ 가 임의의 무리수일 때  $2^x$ 을 정의할 수 있다.

일반적으로  $a > 0$ 일 때, 위와 같은 방법으로 임의의 실수  $x$ 에 대하여  $a^x$ 을 정의할 수 있다. 지수가 실수인 경우에도 앞서 학습한 지수법칙이 성립함이 알려져 있다.

물론 지수를 복소수까지도 확장할 수 있다. 나중에 배울 로그의 밑변환 공식에 의해  $a^x = e^{x \ln a}$ 이므로 복소수  $z = c + di$ 에 대하여  $a^z = e^{(c + di) \ln a}$ 가 성립하고 세상에서 가장 아름다운 공식인 오일러 공식 「 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 」을 활용하여 지수를 복소수까지 확장할 수 있으나 정신 건강에 이롭지 않으므로 여기서 줄인다.

Concept

지수가 실수일 때, 지수법칙

$a > 0, b > 0$ 이고  $x, y$ 가 실수일 때

- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x \div a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$

[문제 10] 다음 식을 간단히 하시오. (단,  $a > 0, b > 0$ )

(1)  $5^{\sqrt{18}} \times 5^{\sqrt{50}}$

(2)  $(3^{\sqrt{8}})^{\frac{1}{\sqrt{32}}}$

(3)  $a^{\pi+2} \div a^{\pi-2}$

(4)  $(a^{2\sqrt{2}} b^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

Concept	$a^x$ 에서 지수 $x$ 의 범위에 따른 밑 $a$ 의 조건
지수 $x$	밑 $a$
양의 정수	실수
정수	$a \neq 0$
유리수	$a > 0$
실수	$a > 0$