지수함수와 로그함수

Section 03 로그의 뜻과 성질

Subsection 1.3.1 로그의 정의

우리 교육과정에서는 로그를 지수의 역함수로서 가르치고 있으나 역사적으로 로그는 지수보다 일찍 발명되었다. 여기서 로그의 초기 모습을 잠시 살펴보자.

네이피어는 길이가 10^7인 선분 $\overline{AB}$와 반직선 $\overrightarrow{CD}$을 생각했다. 두 점 P, Q가 각각 점 A, C에서 동시에 같은 속력을 갖고 출발해 선을 따라 움직인다. 점 Q의 속력은 출발 이후에도 변하지 않지만 점 P의 속력은 남은 선분의 길이(즉, 선분 $\overline{PB}$의 길이)에 비례한다. 이러한 상황에서 점 Q는 출발 이후 꾸준히 같은 속력으로 움직이겠지만, 점 P의 속력은 점점 느려질 것이다. 여기서 점 Q가 움직인 거리인 $\overline{CQ}$를 남은 선분의 길이인 선분 $\overline{PB}$의 길이의 로그라고 정의했다. 즉, $\overline{CQ}=x$, $\overline{PB}=y$라 두고 $x=\mathrm{Nap}\log y$ (Naplog는 네이피어 로그의 기호)와 같이 정의했다. 비례식을 정리하면 $x=7\times10^7\log_e 10-10^7\log_e y$이다. 초기의 로그가 이토록 복잡한 방식으로 정의되었기에 로그의 지수와의 관계를 찾기 어려웠다.

e는 자연상수로 $2.718281828\cdots$인 무리수다. 미적분 2 에서 학습한다.
지수함수와 로그함수의 연관성을 찾아 그 관계를 역함수로 정리한 것은 레온하르트 오일러(Leonhard Euler,1707-1783)이다.

이제 교육과정에서 소개하는 방식으로 로그를 도입해 보자. $2^m=4$, $2^n=8$을 만족시키는 실수 m, n의 값은 $m=2$, $n=3$임을 알 수 있지만 $2^k=5$를 만족시키는 실수 k의 값은 쉽게 알 수 없다.
이제 $a^x=N$을 만족시키는 실수 x를 알아보자.

$a>0$, $a\neq1$이고, N이 양수일 때 $a^x=N$을 만족시키는 실수 x는 오직 하나 존재함이 알려져 있다. 이 수 x를 밑이 a인 N의 로그라고 하며, 이것을 기호로 $x=\log_a N$과 같이 나타낸다. 이때 N을 $\log_a N$의 진수라고 한다.

로그는 존 네이피어(John Napier, 1550-1617)가 1614 년 큰 수의 계산 과정을 쉽게 하기 위해 처음 발명했다. 로그는 영어로 'logarithm'인데 비율을 뜻하는 그리스어 logos 와 수를 뜻하는 arithmos 를 합쳐서 용어를 만들었다고 한다. 해석하자면 비율에 대한 숫자이다. 중국과 일본에서는 로그라는 용어를 대수(對數)라고 쓰지만, 우리나라에서는 대수(代數)라는 용어가 이미 널리 사용되고 있어 혼동을 피하려고 '대수'가 아닌 '로그'라고 부르고 있다.

Concept 로그의 정의

$a>0$, $a\neq1$ $N>0$일 때 $a^x=N \Leftrightarrow x=\log_a N$

$x=\log_a N$을 읽는 방법은 'a를 밑으로 하는 N의 로그'이다. 하지만 편의상 보통 '로그 a의 N'과 같이 읽는다.

log는 logarithm의 약자이다. 이 기호는 아이작 토드헌터(Isaac Todhunter, 1820-1884)가 1858 년에 처음 사용한 것으로 알려져 있다.

[문제 1] 다음 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오. (단, $a>0$, $a\neq1$, $N>0$)

	$a^x=N$		$x=\log_a N$
(1)	$5^3=125$	$\Leftrightarrow$	
(2)		$\Leftrightarrow$	$4=\log_3 81$
(3)	$2^{-3}=\frac{1}{8}$	$\Leftrightarrow$	
(4)		$\Leftrightarrow$	$-1=\log_{\frac{1}{7}}7$

[예제 1] 다음 값을 구하시오.
(1) $\log_2 16$ (2) $\log_{\frac{1}{5}}25$

(1) $2^4=16$이므로 로그의 정의에 따라
$\log_2 16=4$
(2) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}=25$이므로 로그의 정의에 따라
$\log_{\frac{1}{5}}25=-2$

답 (1) 4 (2) -2

[문제 2] 다음 값을 구하시오.
(1) $\log_2 8$ (2) $\log_4 1$

(3) $\log_{\frac{1}{3}}9$ (4) $\log_{0.1}\frac{1}{100}$

Subsection 1.3.2 로그의 성질

로그의 정의와 지수법칙을 이용하여 로그의 성질을 알아보자.

$$\log_a 1=0,\ \log_a a=1$$

$a>0$, $a\neq1$일 때, $a^0=1$, $a^1=a$이므로 로그의 정의에 의해 $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$이 성립한다.

$a>0$, $a\neq1$, $M>0$, $N>0$일 때, $\log_a M=p$, $\log_a N=q$라고 하면 $a^p=M$, $a^q=N$이다. 이를 이용해 다음 로그의 성질을 알아보자.

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$MN=a^p a^q=a^{p+q}$이므로 $\log_a MN=p+q=\log_a M+\log_a N$이다.

두 수 M, N의 곱셈을 두 로그의 덧셈으로 표현할 수 있다.

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$\frac{M}{N}=\frac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$이므로 $\log_a \frac{M}{N}=p-q=\log_a M-\log_a N$이다.

두 수 M, N의 나눗셈을 두 로그의 뺄셈으로 표현할 수 있다.

$$\log_a M^k=k\log_a M$$

$M^k=a^{pk}$이므로 로그의 정의를 이용하면 $\log_a M^k=pk$이므로
$\log_a M^k=k\log_a M$이다.

로그의 이러한 성질 덕분에 큰 수의 계산을 위한 작업량이 현저히 줄어들었다. 피에르시몽 라플라스(Pierre-Simon Laplace, 1749-1827)는 '로그가 천문학자의 수명을 두 배로 늘렸다.'고 평했다.

Concept 로그의 성질

$a>0$, $a\neq 1$, $M>0$, $N>0$일 때

- $\log_a 1=0$, $\log_a a=1$
- $\log_a MN=\log_a M+\log_a N$
- $\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$
- $\log_a M^k=k\log_a M$ (단, k는 실수)

[문제 4] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_4 2+\log_4 8$ (2) $\log_5 45-\log_5 9$

(3) $\log_2 \frac{1}{32}$ (4) $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{81}$

[예제 2] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_2\frac{4}{3}+2\log_2\sqrt{12}$ (2) $\frac{1}{3}\log_3 8-\log_3\sqrt[3]{24}$

(1) $\log_2\frac{4}{3}+2\log_2\sqrt{12}=\log_2\frac{4}{3}+\log_2(\sqrt{12})^2=\log_2\frac{4}{3}+\log_2 12$

$=\log_2\left(\frac{4}{3}\times 12\right)=\log_2 16=\log_2 2^4=4$

(2) $\frac{1}{3}\log_3 8-\log_3\sqrt[3]{24}=\frac{1}{3}\log_3 8-\log_3 24^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{3}\log_3 8-\frac{1}{3}\log_3 24$

$=\frac{1}{3}(\log_3 8-\log_3 24)=\frac{1}{3}\log_3\frac{8}{24}$

$=\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\log_3 3^{-1}=-\frac{1}{3}$

답 (1) 4 (2) $-\frac{1}{3}$

[문제 5] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_3 5+2\log_3\frac{1}{\sqrt{15}}$ (2) $\log_2\sqrt[5]{6}-\frac{1}{5}\log_2\frac{3}{2}$

[예제 3] $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$일 때, $\log_{10}15$를 a, b로 나타내시오.

$\log_{10}15=\log_{10}(3\times 5)=\log_{10}3+\log_{10}5=\log_{10}3+\log_{10}\frac{10}{2}$

$=\log_{10}3+\log_{10}10-\log_{10}2$

$=b+1-a=-a+b+1$

답 $-a+b+1$

[문제 6] $\log_{10}2=a$, $\log_{10}3=b$일 때, 다음을 a, b로 나타내시오.

(1) $\log_{10}\sqrt{0.72}$ (2) $\log_{10}\frac{12}{5}$

Subsection 1.3.3 로그의 밑변환

두 로그의 연산을 할 때 밑이 같아야 편리하다. 로그의 밑을 변환하는 방법에 대해 알아보자.

$a>0$, $a\neq 1$, $b>0$, $c(c>0,\ c\neq 1)$일 때, $x=\log_a b$, $y=\log_c a$라고 하자.

$$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$$

로그의 정의에 의해 $b=a^x$, $a=c^y$이다. 여기서 지수법칙에 의해
$b=a^x=(c^y)^x=c^{xy}$이고 로그로 변환하면 $xy=\log_c b$이므로
$\log_a b\times log_c a=\log_c b$이다. $a\neq 1$이기에 $\log_c a\neq 0$이므로 양변을 $\log_c a$로 나누면
$\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$이다.

$$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$$

$\log_a b=\frac{\log_b b}{\log_b a}=\frac{1}{\log_b a}$

$$\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$$

$\log_{a^m}b^n=\frac{\log_c b^n}{\log_c a^m}=\frac{n\log_c b}{m\log_c a}=\frac{n}{m}\times\frac{\log_c b}{\log_c a}=\frac{n}{m}\log_a b$

$$a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$$

$a^{\log_c b}=x$라 두면 로그의 정의에 의해 $\log_c b=\log_a x$이다. 로그의 밑 변환 공식에 의해 $\log_c b=\frac{1}{\log_b c}$이고 $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$이므로 $\frac{1}{\log_b c}=\frac{\log_b x}{\log_b a}$이다. 여기서 $\log_b x=\frac{\log_b a}{\log_b c}=\log_c a$이고 이를 지수로 변환하면 $x=b^{\log_c a}$이다.

Concept 로그의 밑변환

- $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$
- $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$
- $\log_{a^m}b^n=\frac{n}{m}\log_a b$
- $a^{\log_c b}=b^{\log_c a}$

[문제 7] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\log_{25}125$ (2) $\log_2 9\times log_{\sqrt{3}}4$