Chapter I

지수함수와 로그함수

Section

01 거듭제곱과 거듭제곱근

Subsection 1.1.1 거듭제곱

우리는 3이 다섯 개가 더해진 식을 곱셈을 이용하여 $3+3+3+3+3=3\times5$와 같이 간단하게 나타내는 방법을 배웠다. 또한, 3이 다섯 개가 곱해진 식을 거듭제곱을 활용해 $3\times3\times3\times3\times3=3^5$과 같이 간단하게 나타내는 방법을 배웠다.

실수 a와 자연수 n에 대하여 a를 n번 곱한 것을 a의 n제곱이라 하고 기호 a^n으로 나타낸다. 이때, a, a^2, a^3, $\dots, a^n, \dots$을 통틀어 a의 거듭제곱이라 하고, a^n에서 a를 거듭제곱의 밑, n을 거듭제곱의 지수라고 한다는 것을 이미 중학교에서 배웠다. 거듭제곱을 나타내는 기호 a^n은 1637 년 르네 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)가 처음 사용했다고 알려져 있다.

Concept **지수가 양의 정수일 때의 지수법칙 (중학교에서 학습)**

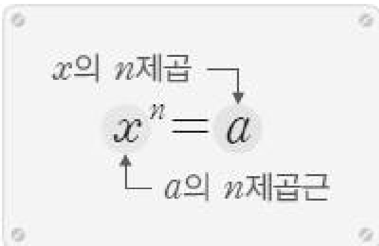
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $(ab)^n = a^n b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)$
- $a^m \div a^n = \begin{cases} a^{m-n} & (m>n) \\ 1 & (m=n) \quad (a\neq 0) \\ \dfrac{1}{a^{n-m}} & (m<n) \end{cases}$

[문제 1] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a\neq0$, $b\neq0$)

(1) $ab^2\times a^3b^4$ (2) $(a^3b^2)^3$ (3) $a^3b^4\div a^2b^5$

Subsection 1.1.2 거듭제곱근

제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^2=a$를 만족시키는 수 x를 a의 제곱근이라고 하고, 세제곱하여 실수 a가 되는 수, 즉 $x^3=a$를 만족시키는 수 x를 a의 세제곱근이라고 한다.
일반적으로 실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x를 a의 n제곱근이라고 한다. 또, a의 제곱근, 세제곱근, 네제곱근, …을 통틀어 a의 거듭제곱근이라고 한다.
거듭제곱근은 영어로 'radical root'라고 한다. radical 은 뿌리를 뜻하는 라틴어 radix 에서 유래했다. 그런데 root 가 뿌리라는 뜻이므로 radical root 를 해석하자면 '뿌리 뿌리'다. 참고로 radix 의 첫 글자 r을 따와 루트 기호 $\sqrt{\ }$를 만들었다.
'x의 n제곱은 a이다.'와 'a의 n제곱근은 x이다'라는 표현을 혼동하지 않도록 주의해야 한다. 예를 들어, -2의 네제곱은 16이지만, 16의 네제곱근은 ± 2, $\pm 2i$로 총 4개가 있다. 'n제곱근 a'와 'a의 n제곱근' 또한 그 의미를 되새기며 혼동하지 않도록 주의해야 한다.



Concept 거듭제곱근

실수 a와 2 이상의 자연수 n에 대하여 a의 n제곱근은 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 방정식 $x^n=a$를 만족시키는 x이다.

[예제 1] 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 구하시오.
(1) -1의 세제곱근 (2) 1의 네제곱근

(1) -1의 세제곱근 x라고 하면 $x^3=-1$이므로

$$x^3+1=0,\ (x+1)(x^2-x+1)=0$$

$$x=-1 \text{ 또는 } x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

따라서 -1의 세제곱근 중에서 실수인 것은 -1이다.

(2) 1의 네제곱근을 x라고 하면 $x^4=1$이므로

$$x^4-1=0,\ (x-1)(x+1)(x^2+1)=0$$

$$x=\pm1 \text{ 또는 } x=\pm i$$

따라서 1의 네제곱근 중에서 실수인 것은 $-1, 1$이다.

답 (1) -1 (2) $-1, 1$

[문제 2] 다음 거듭제곱근 중에서 실수인 것을 구하시오.

(1) -8의 세제곱근　　(2) 256의 네제곱근

Subsection 1.1.3 거듭제곱근 중 실수인 것

실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 방정식 $x^n=a$의 실근이므로 함수 $y=x^n$의 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 x좌표와 같다. 이제 함수 $y=x^n$의 그래프의 특성을 이용하여 n의 값이 홀수 및 짝수일 때 실수 a의 n제곱근 중 실수인 것을 구해 보자.

Case 1. n이 홀수일 때

임의의 실수 x에 대하여 $(-x)^n=-x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 원점에 대하여 대칭이다. 이때, 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점은 실수 a의 값에 관계없이 항상 1개이다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 하나뿐이고, 이것을 $\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

Case 2. n이 짝수일 때

임의의 실수 x에 대하여 $x^n \geq 0$이고 $(-x)^n = x^n$이므로 함수 $y=x^n$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다. 이때, 이 그래프와 직선 $y=a$의 교점의 개수는 실수 a의 값에 따라 다음과 같다.

1) $a>0$이면 교점은 2개이고, 그 두 교점의 x좌표는 각각 양수와 음수이다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 양수인 것과 음수인 것이 각각 1개씩 있으며, 이것을 각각 $\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$와 같이 나타낸다.

2) $a=0$이면 교점은 1개이고, 교점은 원점이므로 x좌표는 0이다. 따라서 a의 n제곱근 중 실수인 것은 0 하나뿐이다.

3) $a<0$이면 교점이 없으므로 a의 n제곱근 중 실수인 것은 없다.

이상을 정리하면 n이 2 이상의 자연수일 때, 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것은 다음과 같다.

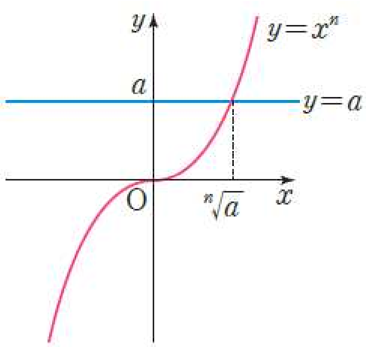
Concept 실수 a의 n제곱근 중에서 실수인 것

	$a>0$	$a=0$	$a<0$
n이 홀수	$\sqrt[n]{a}$	0	$\sqrt[n]{a}$
n이 짝수	$\sqrt[n]{a}$, $-\sqrt[n]{a}$	0	없다.

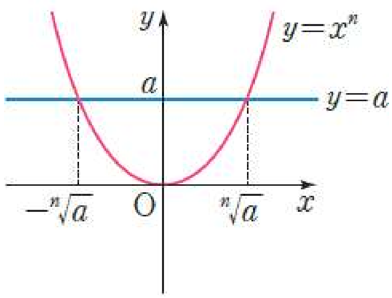
$\sqrt[n]{a}$는 'n제곱근 a'라고 읽는다. 또 $\sqrt[2]{a}$는 간단히 $\sqrt{a}$로 나타낸다.

루트 기호는 크리스토프 루돌프(Christoff Rudolff, 1499-1543)가 1525 년에 처음 사용했다고 한다. 초기에는 위쪽 줄 없이 앞에 기호 √만 사용하여 √a와 같이 나타냈으나, √$a+b$ 가 $\sqrt{a}+b$인지 $\sqrt{a+b}$인지 헷갈린다는 문제가 있었다. 이후 르네 데카르트(Rene Descartes, 1596-1650)가 위쪽 줄을 넣어 현대의 루트 기호가 완성되었다. 기호 $\sqrt[n]{a}$는 1690 년 미셸 롤(Michel Rolle, 1652-1719)이 개발했다.

n이 홀수일 때



n이 짝수일 때



[문제 3] 다음 값을 구하시오.

(1) $\sqrt[3]{8}$ (2) $-\sqrt[4]{625}$ (3) $\sqrt[5]{-243}$ (4) $\sqrt[6]{64}$

Subsection 1.1.4 거듭제곱근의 성질

$a>0$이고 n이 2 이상의 정수일 때, $\sqrt[n]{a}$는 n제곱하면 a가 되는 양수이므로 $(\sqrt[n]{a})^n=a$이다. $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때, 지수법칙을 이용하여 거듭제곱근의 성질을 알아보자.

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

지수법칙에 의해 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$이다. 이때, $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다. 따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이다.

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

지수법칙에 의해 $\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^{mn}=\{(\sqrt[n]{a})^n\}^m=a^m$이다. 이때, $a>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$이고 $(\sqrt[n]{a})^m>0$이다. 따라서 $(\sqrt[n]{a})^m$은 a^m의 양의 n제곱근이므로 $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$이다.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

지수법칙에 의해 $(\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b})^n=(\sqrt[n]{a})^n(\sqrt[n]{b})^n=ab$이다. 이때, $a>0$, $b>0$이므로 $\sqrt[n]{a}>0$, $\sqrt[n]{b}>0$이고 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}>0$이다. 따라서 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$는 ab의 양의 n제곱근이므로 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$이다.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

지수법칙에 의해 $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn}=\{(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m\}^n=(\sqrt[n]{a})^n=a$이다. 이때, $\sqrt[n]{a}>0$이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}>0$이다. 따라서 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$는 a의 양의 mn제곱근이므로 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$이다.

이상을 정리하면 $a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상의 정수일 때 거듭제곱근의 성질은 다음과 같다.

Concept 거듭제곱근의 성질

$a>0$, $b>0$이고 m, n이 2 이상인 정수일 때

- $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- $(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$
- $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$

거듭제곱근의 성질은 $a>0, b>0$일 때에만 성립한다. 예를 들어,

$\sqrt{-2}\times\sqrt{-8}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{8}\,i=\sqrt{16}\,i^2=-4$이지만 $\sqrt{(-2)\times(-8)}=\sqrt{16}=4$이다.

참고로 $a<0, b<0$일 때, $\sqrt{a}\times\sqrt{b}=-\sqrt{ab}$이고,

$a>0, b<0$일 때, $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=-\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이다.

[문제 5] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[5]{9}\times\sqrt[5]{27}$　　(2) $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{16}}$　　(3) $(\sqrt[6]{25})^3$　　(4) $\sqrt[4]{\sqrt{6^8}}$