지수함수와 로그함수

Section 02 지수의 확장

Subsection 1.2.1 지수의 정수로의 확장

지수가 양의 정수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 0 또는 음의 정수일 때도 성립하도록 지수의 범위를 정수까지 확장해 보자.

$a \neq 0$이고 m, n이 양의 정수일 때, 지수법칙에 의해 $a^m a^n = a^{m+n}$이 성립한다.
여기서 $m=0$일 때도 지수법칙이 성립하도록 하려면 $a^0 a^n = a^{0+n} = a^n$이므로
$a^0 = 1$이어야 한다. 따라서 $a^0 = 1$이라고 정의한다.
$m=-n$일 때도 지수법칙이 성립하도록 하려면 $a^{-n}a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$이므로
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$이어야 한다. 따라서 $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$이라고 정의한다.

지수가 1씩 늘어날 때 a를 곱해준다는 규칙을 반대로 생각해 보면 지수가 1씩 줄어들 때 a를 나누어준다는 규칙으로 생각해 볼 수 있다.

$$a^2 = a \times a$$
$$a^1 = a$$
$$a^0 = 1$$
$$a^{-1} = \frac{1}{a}$$
$$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$$

그렇다면 $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$과 같이 정의하는 것이 역시나 자연스럽다.

Concept **0 또는 음의 정수인 지수**

> $a \neq 0$이고 n이 양의 정수일 때, $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

참고로 0^0과 0^{-n}은 정의하지 않는다.
음의 지수에 대한 표기법은 1685 년 존 월리스(John Wallis, 1616-1703)이 처음 사용했다고 알려져 있다.

[문제 1] 다음 값을 구하시오.

(1) $\left(\frac{1}{3}\right)^0$　　(2) 3^{-4}　　(3) $(-2)^{-5}$　　(4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

지수가 음의 정수일 때, 지수법칙이 성립하는지 알아보기 위해 $a \neq 0$이고 m, n이 음의 정수일 때, $m=-p$, $n=-q$ (p, q는 양의 정수)라 하자.

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^m a^n = a^{-p}a^{-q} = \frac{1}{a^p} \times \frac{1}{a^q} = \frac{1}{a^{p+q}} = a^{-(p+q)} = a^{(-p)+(-q)} = a^{m+n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(a^m)^n = (a^{-p})^{-q} = \left(\frac{1}{a^p}\right)^{-q} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a^p}\right)^q} = \frac{1}{\frac{1}{a^{pq}}} = a^{pq} = a^{(-p)(-q)} = a^{mn}$$

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

$$a^m \div a^n = a^{-p} \div a^{-q} = a^{-p} \div \frac{1}{a^q} = a^{-p} \times a^q = a^{-p+q} = a^{m-n}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$(ab)^n = (ab)^{-q} = \frac{1}{(ab)^q} = \frac{1}{a^q} \times \frac{1}{b^q} = a^{-q}b^{-q} = a^n b^n$$

m, n 중 0이 있거나 하나만 음의 정수인 경우에도 위와 비슷한 방법으로 지수법칙이 성립함을 증명할 수 있다. 지면 관계상 이는 독자의 몫으로 남긴다.

Concept **지수가 정수일 때, 지수법칙**

> $a \neq 0$, $b \neq 0$이고 m, n이 정수일 때
> - $a^m a^n = a^{m+n}$
> - $a^m \div a^n = a^{m-n}$
> - $(a^m)^n = a^{mn}$
> - $(ab)^n = a^n b^n$

앞서 $a^m \div a^n$는 m, n의 대소 관계에 따라 세 가지 경우가 복잡했지만,
이제 m, n의 대소 관계와 관련 없이 $a^m \div a^n = a^{m-n}$라 할 수 있다.

[문제 3] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a \neq 0$, $b \neq 0$)

(1) $7^{-5} \times 7^6$　　(2) $(-2)^5 \div (-2)^7$

(3) $(a^{-1})^{-2} \times a^3$　　(4) $(ab^{-2})^{-3} \div (a^2 b)^{-2}$

Subsection 1.2.2 지수의 유리수로의 확장

지수가 정수일 때 성립하는 지수법칙이 지수가 유리수일 때도 성립하도록 지수의 범위를 유리수까지 확장해 보자.

$a > 0$이고 m, n이 정수일 때, 지수법칙에 의해 $(a^m)^n = a^{mn}$이 성립한다. 지수가 유리수일 때에도 지수법칙이 성립하도록 해보자. m, $n(n \geq 2)$이 정수일 때
$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n} \times n} = a^m$이고, $a > 0$이므로 $a^{\frac{m}{n}} > 0$이다. 따라서 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$이어야 한다. 참고로 거듭제곱근의 성질에 의해 $a > 0$이면 a^m의 양의 n제곱근, 즉
$x^n = a^m$의 양의 실근은 단 하나 존재해야 한다. 여기서 $a^{\frac{m}{n}}$은 a^m의 양의 n제곱근이므로 유일하다.

지수가 유리수일 때 지수법칙이 성립한다면 $a > 0$일 때, $a = a^{\frac{1}{n} \times n} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n$이므로
$a^{\frac{1}{n}}$은 n제곱하여 a가 되는 수, 즉 a의 n제곱근이다. 따라서 $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$이 되는 것이 자연스럽다.

분수 지수에 대한 표기법은 아이작 뉴턴(Isaac Newton, 1643-1727)이 처음 사용했다고 알려져 있다.

Concept **유리수인 지수**

> $a > 0$이고, m, $n(n \geq 2)$이 정수일 때 $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

m은 정수 n은 2이상의 정수임에 유의해야 한다.
즉, $2^{-\frac{5}{4}} = 2^{\frac{5}{-4}} = \sqrt[-4]{2^5}$가 아니라 $2^{-\frac{5}{4}} = 2^{\frac{-5}{4}} = \sqrt[4]{2^{-5}}$이다.

[문제 4] 다음 중 서로 같은 것끼리 선으로 연결하시오. (단, $a > 0$, $a \neq 1$)

① $\sqrt[3]{a^4}$ •	• ㉠ $a^{\frac{3}{4}}$
② $a^{-\frac{2}{5}}$ •	• ㉡ $\sqrt[5]{a^{-2}}$
③ $a^{-\frac{5}{2}}$ •	• ㉢ $\sqrt{a^{-5}}$
④ $\sqrt[4]{a^3}$ •	• ㉣ $a^{\frac{4}{3}}$

[문제 5] 다음 값을 구하시오.

(1) $8^{\frac{2}{3}}$　　(2) $27^{-\frac{2}{3}}$　　(3) $16^{0.25}$　　(4) $64^{-0.5}$

지수가 음의 정수일 때, 지수법칙이 성립하는지 알아보기 위해 $a>0$이고 r, s가 유리수일 때, $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$ (m, n, p, q는 정수, $n\ge 2$, $q\ge 2$)라 하자.

$$a^r a^s = a^{r+s}$$

$$a^r a^s = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}}\,\sqrt[nq]{a^{mp}} = \sqrt[nq]{a^{mq}a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq+np}}$$
$$= a^{\frac{mq+np}{nq}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{r+s}$$

$$(a^r)^s = a^{rs}$$

$$(a^r)^s = (a^{\frac{m}{n}})^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[n]{a^m})^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \sqrt[q]{\sqrt[n]{(a^m)^p}} = \sqrt[nq]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{nq}} = a^{\frac{m}{n}\times\frac{p}{q}} = a^{rs}$$

$$a^r \div a^s = a^{r-s}$$

$$a^r \div a^s = a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}} \div a^{\frac{np}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mq}} \div \sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[nq]{a^{mq-np}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$
$$= a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{r-s}$$

$$(ab)^r = a^r b^r$$

$$(ab)^r = (ab)^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{(ab)^q} = \sqrt[p]{a^q b^q} = \sqrt[p]{a^q}\times\sqrt[p]{b^q} = a^{\frac{q}{p}} b^{\frac{q}{p}} = a^r b^r$$

Concept **지수가 유리수일 때, 지수법칙**

$a>0$, $b>0$이고, r, s가 유리수일 때
- $a^r a^s = a^{r+s}$
- $a^r \div a^s = a^{r-s}$
- $(a^r)^s = a^{rs}$
- $(ab)^r = a^r b^r$

지수가 유리수인 경우는 $a>0$인 조건이 필요하다. 예를 들어
$\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$이지만, $\{(-1)^2\}^{\frac{1}{2}} = (-1)^{2\times\frac{1}{2}} = -1$이다.

[문제 7] 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $2^{-\frac{1}{3}} \times 2^{\frac{7}{3}}$ (2) $5^{\frac{3}{2}} \div 5^{-\frac{1}{2}}$

(3) $(125^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}$ (4) $2^{\frac{8}{5}} \times 5^{-\frac{7}{5}} \times 10^{-\frac{3}{5}}$

[예제 1] $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a^2}$ (2) $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b)$

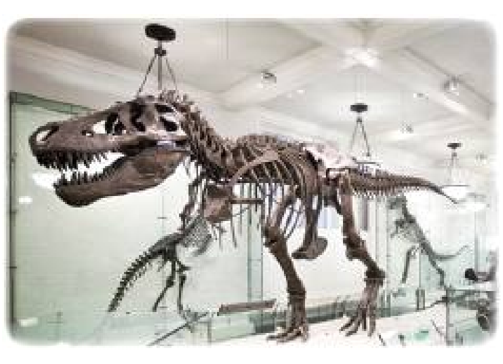
(1) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}} \times \sqrt[3]{a^4} \div \sqrt[3]{a^2} = (a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{4}{3}} \div a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3}+\frac{4}{3}-\frac{2}{3}} = a$

(2) $(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})(a+b) = \{(a^{\frac{1}{2}})^2 - (b^{\frac{1}{2}})^2\}(a+b) = (a-b)(a+b) = a^2-b^2$

답 (1) a (2) a^2-b^2

[문제 8] $a>0$, $b>0$일 때, 다음 식을 간단히 하시오.

(1) $\sqrt[3]{a^2b^4} \times \sqrt{\sqrt[3]{a^4b^2}} \div \sqrt[6]{a^8b^4}$ (2) $(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}})(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{2}{3}})$



[문제 9] 공룡은 오래전에 멸종했지만 발자국과 뼈의 화석으로 달리는 속력을 추측할 수 있다. 공룡이 달릴 때 보폭을 s m, 공룡의 다리 길이를 h m라고 하면 공룡이 달리는 속력은

$$0.25\times 9.8^{0.5}\times s^{1.67}\times h^{-1.17}\ \mathrm{m/s}$$

라고 한다. 두 공룡 A, B의 화석에서 공룡 A의 달릴 때 보폭은 8 m, 다리 길이는 4 m이고, 공룡 B의 달릴 때 보폭은 4 m, 다리 길이는 2 m일 때, 공룡 A가 달리는 속력은 공룡 B가 달리는 속력의 몇 배인지 구하시오.

[참고 자료: David E. Fastovsky 외, "Dinosaurs"]

Subsection 1.2.3 지수의 실수로의 확장

지수가 무리수인 경우를 살펴보고, 지수의 범위를 실수까지 확장해 보자.

사실 지수를 실수로 확장하는 것은 굉장히 어려운 개념이다.

$S=\{x\,|\,x^2<2,\ x$는 유리수 $\}$라는 집합을 생각해 보자. 집합 S의 원소는 모두 $-\sqrt{2}$보다는 크고 $\sqrt{2}$보다는 작다. 또한, 집합 S에 속하지 않는 유리수는 모두 $-\sqrt{2}$보다 작거나 $\sqrt{2}$보다 크다. 이때 실수의 성질 중 조밀성(빽빽함)에 의해 $\sqrt{2}$를 집합 S의 상한이라고 하고, $-\sqrt{2}$를 집합 S의 하한이라고 한다. $\sqrt{2}$가 집합 S의 상한이므로 우리는 집합 S의 원소로만 이루어진 수의 나열을 만들어 $\sqrt{2}$에 점점 가까워지도록 할 수 있다.

예를 들어 $\sqrt{2}=1.41421356\cdots$이므로 무리수 $\sqrt{2}$에 한없이 가까워지는 유리수의 나열 1, 1.4, 1.41, 1.414, 1.4142, 1.41421, $\cdots$ 을 생각할 수 있다. 이 유리수를 지수로 갖는 수들의 나열 2^1, $2^{1.4}$, $2^{1.41}$, $2^{1.414}$, $2^{1.4142}$, $2^{1.41421}$, $\cdots$은 어떤 일정한 수에 가까워진다는 것이 알려져 있다. 이때 그 일정한 수를 $2^{\sqrt{2}}$으로 정의한다. 이와 같은 방법으로 x가 임의의 무리수일 때 2^x을 정의할 수 있다.

일반적으로 $a>0$일 때, 위와 같은 방법으로 임의의 실수 x에 대하여 a^x을 정의할 수 있다. 지수가 실수인 경우에도 앞서 학습한 지수법칙이 성립함이 알려져 있다.

물론 지수를 복소수까지도 확장할 수 있다. 나중에 배울 로그의 밑변환 공식에 의해 $a^x=e^{x\ln a}$이므로 복소수 $z=c+di$에 대하여 $a^z=e^{(c+di)\ln a}$가 성립하고 세상에서 가장 아름다운 공식인 오일러 공식 「$e^{ix}=\cos x+i\sin x$」을 활용하여 지수를 복소수까지 확장할 수 있으나 정신 건강에 이롭지 않으므로 여기서 줄인다.

Concept **지수가 실수일 때, 지수법칙**

$a>0$, $b>0$이고 x, y가 실수일 때
- $a^x a^y = a^{x+y}$
- $a^x \div a^y = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $(ab)^x = a^x b^x$

[문제 10] 다음 식을 간단히 하시오. (단, $a>0$, $b>0$)

(1) $5^{\sqrt{18}} \times 5^{\sqrt{50}}$ (2) $(3^{\sqrt{8}})^{\frac{1}{\sqrt{32}}}$

(3) $a^{\pi+2} \div a^{\pi-2}$ (4) $(a^{2\sqrt{2}}b^{-\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$

Concept **a^x에서 지수 x의 범위에 따른 밑 a의 조건**

지수 x	밑 a
양의 정수	실수
정수	$a\neq 0$
유리수	$a>0$
실수	$a>0$