



공간도형과 공간좌표

1. 공간도형
2. 공간좌표



대단원 포트폴리오

이 단원을 학습하면서 다음 중 하나를 선택하여 포트폴리오를 만들어 보자.

- 수학 독후감
- 수학 신문

- 수학 마인드맵
- 수학 포스터

- 수학 일기
- 수학사 보고서

예시와 길잡이
▶ 148쪽



‘공간도형과 공간좌표’는 왜 배울까?

오래전부터 사람들은 공간과 도형에 대한 이해를 바탕으로 피라미드, 콜로세움, 피사의 사탑 등 다양한 건축물들을 만들었으며, 현대에 들어서는 최신 공학 기술과 결합하여 컴퓨터 그래픽, 의학 등의 분야에 꼭넓게 활용하고 있다. 공간과 도형에 대한 탐구는 공간 감각을 기르게 하고, 도형을 좌표공간에 표현함으로써 기하와 대수의 관계를 경험할 수 있게 해 준다.



이 단원에서 학습할 내용을 알아보고 나의 학습 계획을 적어 보자.

■ 학습 내용

- 직선과 평면의 위치 관계
- 삼수선의 정리
- 정사영
- 공간에서 점의 좌표
- 구의 방정식

■ 학습 계획

나의 학습 계획 예시

- 과제를 열심히 하겠다.
- 오답 노트를 작성하겠다.
- 예습과 복습을 하겠다.
- 수업 시간에 집중하겠다.

공간도형

수학 + 건축

우리가 사는 세상은 평면이 아닌 공간이다. 공간인 세상에서 주택은 단순한 주거뿐만 아니라 신체의 휴식, 정서 생활의 안정을 위한 공간이며 개성을 표현할 수 있는 수단이 되기도 한다. 주택의 실내 구조 및 장식 속에서는 선과 선, 선과 면, 면과 면의 기하학적 조화를 찾을 수 있다. 공간도형의 기본 구성 요소인 점, 직선, 평면에 대한 이해는 아름답고 안정감 있는 실내 디자인을 위한 기본이 된다.

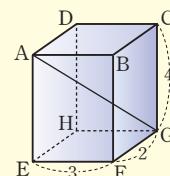
“직선과 평면 사이에는 어떤 위치 관계가 있을까?”



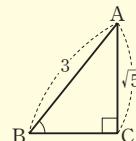
준비학습

1 오른쪽 그림의 직육면체에서 다음을 구하시오.

- (1) 모서리 EF와 평행한 모서리
- (2) 면 EFGH와 수직인 면
- (3) 대각선 AG의 길이



2 오른쪽 그림과 같이 $\angle C=90^\circ$ 인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{AC}=\sqrt{5}$ 일 때, $\cos B$ 의 값을 구하시오.



01

직선과 평면의 위치 관계

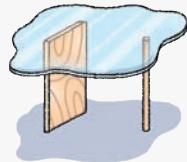
• 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면의 위치 관계에 대한 간단한 증명을 할 수 있다.

◆ 평면의 결정조건은 무엇일까?

개념 열기

오른쪽 그림과 같이 유리판의 반침대로 막대 또는 판자를 사용하여 탁자를 만들려고 한다. 다음 대화를 읽고 두 학생이 각각 필요한 막대 또는 판자의 최소 개수를 말하시오.

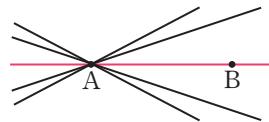
(단, 막대와 판자의 두께는 무시한다.)



나는 막대만을
사용할 거야.

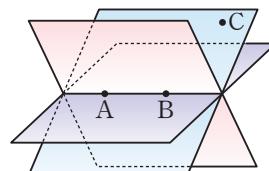
그럼 나는 판자만을
사용해서 만들어 볼까?

공간에서 한 점 A를 지나는 직선은 무수히 많지만 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 직선은 하나뿐이다. 따라서 서로 다른 두 점은 단 하나의 직선을 결정한다.



● 점은 A, B, C, …,
직선은 l, m, n, \dots ,
평면은 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$
로 나타낸다.

또 공간에서 서로 다른 두 점 A, B를 지나는 평면은 무수히 많지만, 한 직선 위에 있지 않은 세 점 A, B, C를 지나는 평면은 하나뿐이다. 따라서 한 직선 위에 있지 않은 서로 다른 세 점은 단 하나의 평면을 결정한다.



이때 두 점 A, B는 한 직선을 결정하므로 직선 AB와 직선 BA 위에 있지 않은 한 점 C는 한 평면을 결정한다. 또 공간에서 두 직선이 한 점에서 만나거나 평행한 경우에도 이 두 직선은 한 평면을 결정한다.

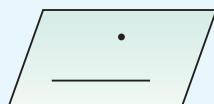
이상을 정리하면 다음과 같다.

평면의 결정조건

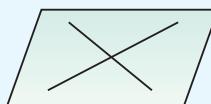
- ① 한 직선 위에 있지 않은 세 점



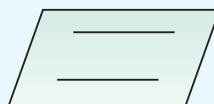
- ② 한 직선과 그 위에 있지 않은 한 점



- ③ 한 점에서 만나는 두 직선



- ④ 평행한 두 직선



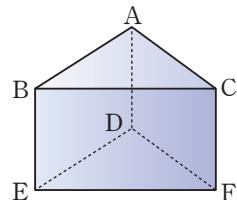
• 스스로 확인하기 •



오른쪽 그림과 같은 삼각기둥에서

- (1) 직선 AB와 직선 DE는 평면 ABED를 결정한다.

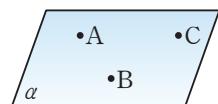
- (2) 세 점 D, E, F는 평면 를 결정한다.



문제 01

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위의 세 점 A, B, C와 평면 α 위에
있지 않은 점 D가 있을 때, 네 점 A, B, C, D 중 세 점으로 만들
수 있는 평면의 개수를 구하시오.

(단, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있지 않다.)

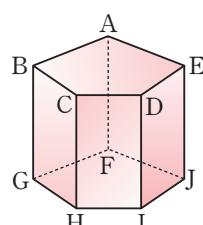


문제 02

오른쪽 그림의 오각기둥의 꼭짓점 또는 모서리를 이용하여
다음과 같이 평면이 결정되는 경우를 두 가지 이상 찾으시오.



꼭짓점 A, 모서리 CH로 평면이 결정되네!



◆ 공간에서 두 직선 사이에는 어떤 위치 관계가 있을까?

개념 열기

오른쪽 그림의 세 직선 l, m, n 에 대하여 다음 세 학생 중 한 평면 위에 있지 않은 두 직선을 고른 학생을 있는 대로 말하시오.



중학교 수학1

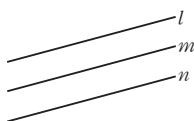
한 평면 위에 있는 두 직선이 서로 만나지 않을 때, 두 직선은 평행하다고 한다.

위의 개념 열기에서 두 직선 m, n 은 평행하므로 한 평면 위에 있다. 그러나 두 직선 l, m 또는 두 직선 l, n 은 각각 한 점에서 만나지도 않고 평행하지도 않으므로 한 평면 위에 있지 않다.

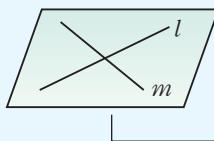
일반적으로 공간에서 서로 다른 두 직선 l, m 의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.

서로 다른 두 직선의 위치 관계

- ① 서로 다른 세 직선
 l, m, n 에 대하여 $l \parallel m$,
 $m \parallel n$ 이면 $l \parallel n$ 이다.

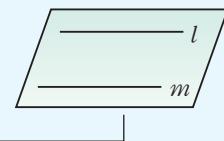


- ② 평행하다.



한 평면 위에 있다.

- ③ 꼬인 위치에 있다.



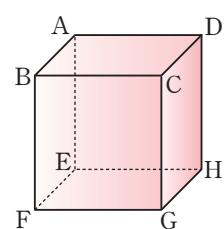
한 평면 위에 있지 않다.

문제 03

오른쪽 그림의 직육면체에서 다음을 구하시오.

(단, 직육면체의 각 모서리를 포함하는 직선만을 생각한다.)

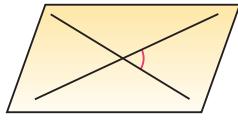
- (1) 직선 AE와 만나는 직선
- (2) 직선 CD와 평행한 직선
- (3) 직선 BF와 꼬인 위치에 있는 직선



공간에서 두 직선이 이루는 각에 대하여 알아보자.

- 두 직선이 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 이다.

한 점에서 만나는 서로 다른 두 직선은 한 평면을 결정하므로 그 평면 위에서 두 직선이 이루는 각을 구할 수 있다.



한편 꼬인 위치에 있는 두 직선은 한 평면 위에 있지 않으므로 두 직선이 이루는 각은 다음과 같이 정한다.

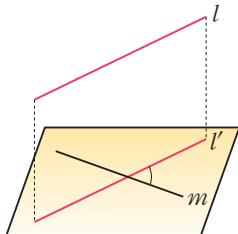
오른쪽 그림과 같이 두 직선 l, m 이 꼬인 위치에 있을 때, 직선 l 에 평행하면서 직선 m 과 한 점에서 만나는 직선을 l' 이라고 하면 두 직선 l', m 은 한 평면을 결정한다.

이때 두 직선 l', m 이 이루는 각을 두 직선 l, m 이 이루는 각이라고 한다.

특히 두 직선 l, m 이 이루는 각이 직각일 때, 두 직선 l, m 은 서로 수직이라 하고, 기호로

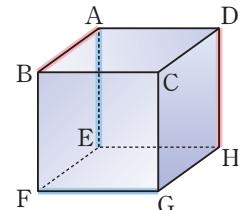
$$l \perp m$$

과 같이 나타낸다.



● 스스로 확인하기 ●

오른쪽 그림의 정육면체에서



- (1) 직선 AB 와 직선 DH 가 이루는 각의 크기는 $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ 이므로 직선 DC 와 직선 DH 가 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 90° 이다.

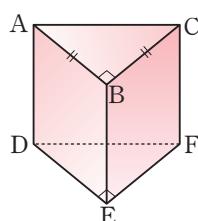


- (2) 직선 FG 와 직선 AE 가 이루는 각의 크기는 $\overline{FG} \parallel \overline{EH}$ 이므로 직선 EH 와 직선 AE 가 이루는 각의 크기와 같다.
따라서 $\boxed{\quad}$ 이다.

문제 04

오른쪽 그림과 같이 밑면이 직각이등변삼각형인 삼각기둥에서 다음 두 직선이 이루는 각의 크기를 구하시오.

- (1) 직선 AC , 직선 BE
- (2) 직선 AB , 직선 DF



◆ 직선과 평면 사이에는 어떤 위치 관계가 있을까?

개념 열기

오른쪽 그림의 평면 α 와 세 직선 l, m, n 에 대하여 다음 물음에 답하시오.

- 1 평면 α 와 만나는 점이 무수히 많은 직선을 말하시오.
- 2 평면 α 와 한 점에서 만나는 직선을 말하시오.
- 3 평면 α 와 만나지 않는 직선을 말하시오.

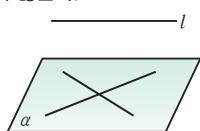


위의 개념 열기에서 직선 l 은 평면 α 위에 있으므로 직선 l 과 평면 α 가 만나는 점은 무수히 많고, 직선 m 과 평면 α 는 한 점에서 만난다. 또 직선 n 과 평면 α 는 만나지 않는다.

일반적으로 공간에서 직선 l 과 평면 α 의 위치 관계는 다음 세 가지 경우가 있다.

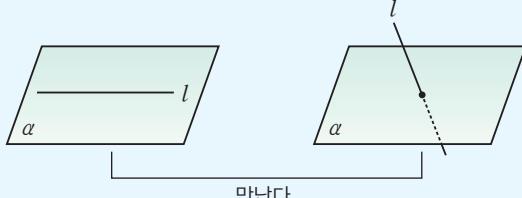
직선과 평면의 위치 관계

① 직선 l 과 평면 α 가 평행하면 직선 l 은 평면 α 위의 어떤 직선과도 만나지 않는다.

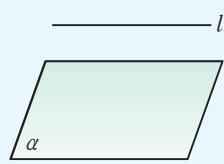


② 한 점에서 만난다.

③ 평행하다.



③ 평행하다.



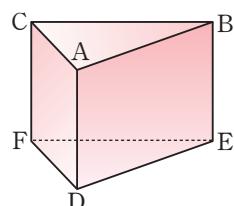
만나지 않는다.

문제 05

오른쪽 그림의 삼각기둥에서 다음을 구하시오.

(단, 삼각기둥의 각 면을 포함하는 평면만을 생각한다.)

- (1) 직선 AB를 포함하는 평면
- (2) 직선 AB와 한 점에서 만나는 평면
- (3) 직선 AB와 평행한 평면

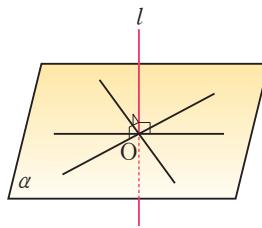


공간에서 직선 l 과 평면 α 위의 모든 직선이 수직일 때, 직선 l 은 평면 α 와 수직이라 하고, 기호로

$$l \perp \alpha$$

와 같이 나타낸다.

이때 직선 l 을 평면 α 의 수선이라 하고, 직선 l 과 평면 α 가 만나는 점 O를 수선의 발이라고 한다.



예제 1

직선 l 이 평면 α 위의 서로 다른 두 직선 m, n 의 교점 O를 지나고 m, n 과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$ 임을 보이시오.

생각열기

직선 l 이 평면 α 위의 임의의 직선과 수직임을 보면 된다.

풀이

평면 α 위의 임의의 직선 c 에 대하여 점 O를 지나면서 직선 c 에 평행한 직선을 c' 이라 하고, 평면 α 위에서 세 직선 m, n, c' 과 점 O 이외의 점에서 만나는 직선을 그어 그 교점을 차례로 A, B, C라고 하자.

직선 l 위에 $\overline{OP} = \overline{OP'}$ 인 서로 다른 두 점 P, P' 을 잡으면

두 직선 m, n 은 모두 선분 PP' 의 수직이등분선이므로

$$\overline{AP} = \overline{AP'}, \overline{BP} = \overline{BP'}$$

또 \overline{AB} 는 공통이므로 $\triangle PAB \equiv \triangle P'AB$

따라서 $\angle PAC = \angle P'AC$

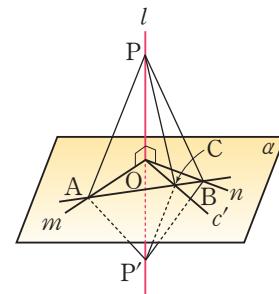
\overline{AC} 는 공통이므로 $\triangle PAC \equiv \triangle P'AC$

따라서 $\overline{CP} = \overline{CP'}$

즉, 삼각형 PCP' 은 이등변삼각형이고 점 O는 $\overline{PP'}$ 의 중점이다.

$\overline{PP'} \perp \overline{OC}$, 즉 $l \perp c'$ 이므로 $l \perp c$

따라서 $l \perp \alpha$



답 풀이 참고

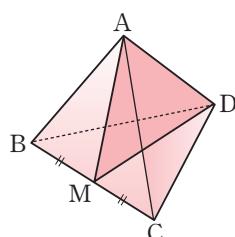
문제 06

직선 l 이 평면 α 위에서 만나는 서로 다른 두 직선 m, n 과 각각 수직이면 $l \perp \alpha$ 임을 보이시오.

문제 07

오른쪽 그림의 정사면체 ABCD에서 모서리 BC의 중점을 M이라고 할 때, 다음이 성립함을 보이시오.

- (1) $\overline{BC} \perp (\text{평면 AMD})$
- (2) $\overline{BC} \perp \overline{AD}$



◆ 두 평면 사이에는 어떤 위치 관계가 있을까?

공간에서 서로 다른 두 평면은 만나는 경우와 만나지 않는 경우가 있다.

서로 다른 두 평면 α, β 가 만나면 두 평면은 한 직선을 공유한다. 이때 공유하는 직선을 두 평면 α, β 의 **교선**이라고 한다.

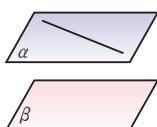
한편 두 평면 α, β 가 만나지 않을 때, 두 평면 α, β 는 평행하다고 하고, 기호로

$$\alpha \parallel \beta$$

와 같이 나타낸다.

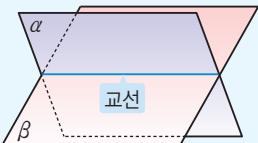
이상을 정리하면 다음과 같다.

- ⓐ 두 평면 α, β 가 평행하면 평면 α 위의 어떤 직선도 평면 β 와 만나지 않으므로 평면 α 위의 모든 직선은 평면 β 와 평행하다.



서로 다른 두 평면의 위치 관계

- ① 만난다.



- ② 평행하다.



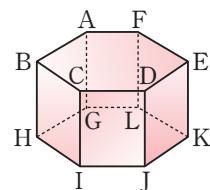
문제 08

오른쪽 그림의 정육각기둥에서 다음을 구하시오.

(단, 정육각기둥의 각 면을 포함하는 평면만을 생각한다.)

- (1) 평면 BHIC와 평행한 평면

- (2) 평면 ABHG와 평면 GHIJKL의 교선



문제 09

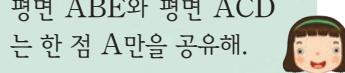
의사소통

오른쪽 그림의 정사각뿔에서 다음 두 학생 중 옳지 않은 설명을 한 학생을 고르고, 그 이유를 말하시오.



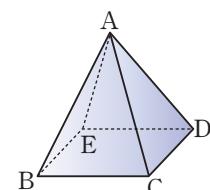
평면 ABC와 평면 BCDE
는 직선 BC를 공유해.

현우



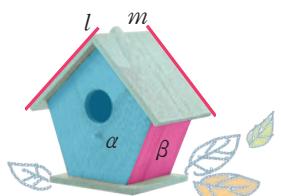
평면 ABE와 평면 ACD
는 한 점 A만을 공유해.

윤아



열린 문제 10

오른쪽 그림에서 두 직선 l, m 은 꼬인 위치에 있고, 직선 m 과 평면 β 는 한 점에서 만나며, 두 평면 α, β 는 만난다. 이와 같이 우리 주변의 사물에서 직선과 직선, 직선과 평면, 평면과 평면 사이의 위치 관계를 찾으시오.

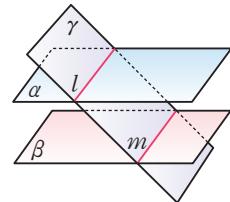


예제
2

평행한 두 평면 α, β 가 다른 평면 γ 와 만나서 생기는 교선을 각각 l, m 이라고 할 때,
 $l \parallel m$ 임을 보이시오.

풀이

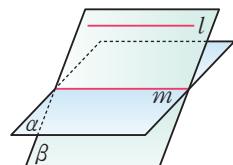
두 평면 α, β 는 평행하므로 만나지 않는다. 따라서 평면 α 에 포함된 직선 l 과 평면 β 에 포함된 직선 m 도 만나지 않는다.
그런데 두 직선 l, m 은 모두 한 평면 γ 위에 있으므로 $l \parallel m$ 이다.



답 풀이 참고

문제
11

직선 l 과 평면 α 가 평행할 때, 직선 l 을 포함하는 평면 β 와 평면 α 의 교선을 m 이라고 하면 $l \parallel m$ 임을 보이시오.



예제
3

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P를 지나고 평면 α 에 평행한 서로 다른 두 직선 l, m 을 포함하는 평면 β 는 평면 α 와 평행함을 보이시오.

풀이

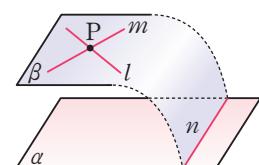
두 평면 α, β 가 평행하지 않다고 가정하고, 두 평면 α, β 의 교선을 n 이라고 하자.

$l \parallel \alpha, m \parallel \alpha$ 이므로 두 직선 l, m 은 평면 α 에 포함된 직선 n 과 만나지 않는다. 그런데 세 직선 l, m, n 은 모두 평면 β 위에 있으므로 $l \parallel n, m \parallel n$

즉, $l \parallel m$

이것은 두 직선 l, m 이 한 점 P를 지난다는 조건에 모순이다.

따라서 평면 β 는 평면 α 와 평행하다.



답 풀이 참고

문제
12

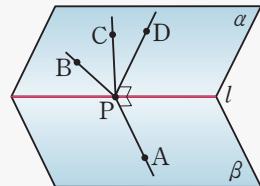
서로 다른 세 평면 α, β, γ 에 대하여 $\alpha \parallel \beta, \beta \parallel \gamma$ 이면 $\alpha \parallel \gamma$ 임을 보이시오.

◆ 이면각은 무엇일까?

개념 열기

오른쪽 그림과 같이 두 평면 α, β 의 교선이 l 이고, 점 A는 평면 β 위에, 점 B, C, D는 평면 α 위에, 점 P는 직선 l 위에 있다. 다음 괄호 안에서 알맞은 것을 고르시오.

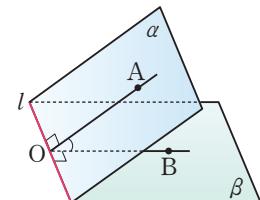
(단, 직선 AP와 직선 DP는 각각 직선 l 에 수직이다.)



$\angle APB, \angle APC, \angle APD$ 의 크기는 서로 (같다, 다르다).

평면 위의 한 직선은 그 평면을 두 부분으로 나눈다. 이때 그 각각을 반평면이라고 한다.

오른쪽 그림과 같이 두 반평면 α, β 의 교선을 l 이라고 할 때, 두 반평면 α, β 로 이루어진 도형을 **이면각**이라고 한다. 또 직선 l 을 **이면각의 변**, 두 반평면 α, β 를 각각 **이면각의 면**이라고 한다.



직선 l 위의 한 점 O를 지나고 l 에 수직인 두 반직선 OA, OB를 두 반평면 α, β 위에 각각 그을 때, $\angle AOB$ 의 크기는 점 O의 위치에 관계없이 일정하다. 이 각의 크기를 **이면각의 크기**라고 한다.

- ⓐ 두 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라고 하면 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ 이다.

서로 다른 두 평면이 만나서 생기는 이면각 중에서 그 크기가 크지 않은 쪽의 각을 두 평면이 이루는 각이라고 한다.

특히 두 평면 α, β 가 이루는 각이 직각일 때, 두 평면 α, β 는 서로 수직이라고, 기호로

$$\alpha \perp \beta$$

와 같이 나타낸다.

빈칸에
알맞은 것을
써넣어 보자.

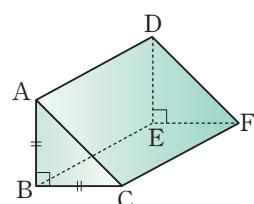


● 스스로 확인하기 ●

오른쪽 그림과 같이 밑면이 직각이등변삼각형인 삼각기둥에서 두 평면 ACFD, ABED의 교선 AD에 대하여 $\overline{AD} \perp \overline{AC}$, $\overline{AD} \perp \overline{AB}$ 이고, $\angle CAB = 45^\circ$ 이다.

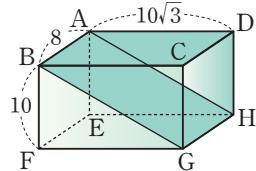
따라서 두 평면 ACFD, ABED가 이루는 각의 크기는

_____이다.



문제 13

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=8$, $\overline{BF}=10$, $\overline{AD}=10\sqrt{3}$ 일 때, 두 평면 $ABCD$, $ABGH$ 가 이루는 각의 크기를 구하시오.



예제
4

직선 l 이 평면 α 에 수직일 때, 직선 l 을 포함하는 평면 β 는 평면 α 와 수직임을 보이시오.

풀이 두 평면 α , β 의 교선을 m 이라 하고, 직선 l 과 평면 α 의 교점을 O라고 하자.

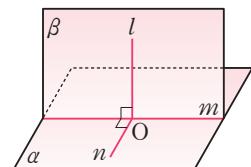
평면 α 위에서 점 O를 지나고 직선 m 과 수직인 직선 n 을 그으면

$$l \perp m, n \perp m$$

이므로 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기는 두 직선 l , n 이 이루는 각의 크기와 같다.

그런데 $l \perp \alpha$ 이므로 $l \perp n$

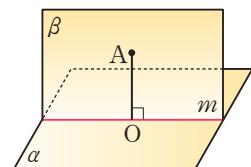
따라서 $\alpha \perp \beta$ 이다.



답 풀이 참고

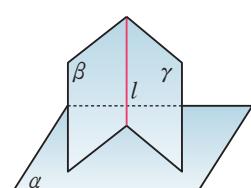
문제 14

오른쪽 그림과 같이 두 평면 α , β 가 서로 수직일 때, 평면 β 위의 한 점 A에서 두 평면 α , β 의 교선 m 에 내린 수선의 발을 O라고 하면 $\overline{AO} \perp \alpha$ 임을 보이시오.



문제 15

오른쪽 그림과 같이 평면 α 에 수직인 두 평면 β , γ 의 교선을 l 이라고 할 때, $l \perp \alpha$ 임을 보이시오.



02

삼수선의 정리

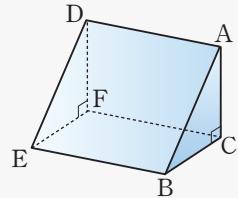
• 삼수선의 정리를 이해하고, 이를 활용할 수 있다.

◆ 삼수선의 정리는 무엇일까?

개념 열기

오른쪽 그림은 밑면이 직각삼각형인 삼각기둥이다. 다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

- 1 직선 AC는 평면 BCFE와 수직이다.
- 2 직선 BC와 직선 BE는 서로 수직이다.
- 3 직선 AB와 직선 BE는 서로 수직이다.

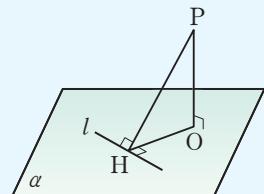


공간에서 직선과 평면의 수직 관계에 대하여 다음이 성립하는데 이를 **삼수선의 정리**라고 한다.

삼수선의 정리

평면 α 위에 있지 않은 한 점 P와 평면 α 위의 직선 l , 직선 l 위의 한 점 H, 평면 α 위에 있으면서 직선 l 위에 있지 않은 한 점 O에 대하여

- ① $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$
- ② $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$
- ③ $\overline{PH} \perp l, \overline{OH} \perp l, \overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$



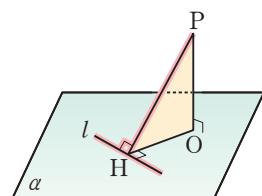
삼수선의 정리를 증명해 보자.

- ① $\overline{PO} \perp \alpha, \overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$ 임을 증명해 보자.

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 직선 l 이 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$ 이다.

또 $\overline{OH} \perp l$ 이므로 직선 l 은 \overline{PO} 와 \overline{OH} 를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.

이때 \overline{PH} 는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{PH} \perp l$ 이다.

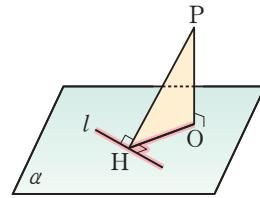


② $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$ 임을 증명해 보자.

$\overline{PO} \perp \alpha$ 이고 직선 l 은 평면 α 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$ 이다.

또 $\overline{PH} \perp l$ 이므로 직선 l 은 \overline{PO} 와 \overline{PH} 를 포함하는 평면 PHO와 수직이다.

이때 \overline{OH} 는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{OH} \perp l$ 이다.

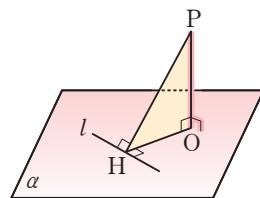


③ $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$ 임을 증명해 보자.

$\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$ 이므로 직선 l 은 평면 PHO와 수직이다.

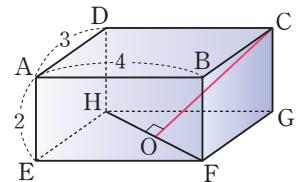
이때 \overline{PO} 는 평면 PHO 위에 있으므로 $\overline{PO} \perp l$ 이다.

또 $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이므로 \overline{PO} 는 \overline{OH} 와 직선 l 을 포함하는 평면 α 와 수직이다. 즉, $\overline{PO} \perp \alpha$ 이다.



예제 1

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=4$, $\overline{AD}=3$, $\overline{AE}=2$ 이다. 꼭짓점 C에서 \overline{FH} 에 내린 수선의 발을 O라고 할 때, 선분 CO의 길이를 구하시오.



풀이 $\overline{CG} \perp$ (평면 EFGH), $\overline{CO} \perp \overline{FH}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{GO} \perp \overline{FH}$

삼각형 FGH는 $\overline{FH}=5$ 인 직각삼각형이므로

$$\frac{1}{2} \overline{FH} \times \overline{GO} = \frac{1}{2} \overline{FG} \times \overline{GH}$$

$$\frac{1}{2} \times 5 \times \overline{GO} = \frac{1}{2} \times 3 \times 4, \quad \overline{GO} = \frac{12}{5}$$

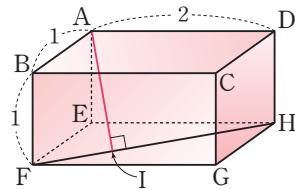
따라서 직각삼각형 COG에서

$$\overline{CO} = \sqrt{\overline{CG}^2 + \overline{GO}^2} = \sqrt{2^2 + \left(\frac{12}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{61}}{5}$$

답 $\frac{2\sqrt{61}}{5}$

문제 01

오른쪽 그림의 직육면체에서 $\overline{AB}=\overline{BF}=1$, $\overline{AD}=20$ 이다.
꼭짓점 A에서 \overline{FH} 에 내린 수선의 발을 I라고 할 때, 선분 AI의 길이를 구하시오.

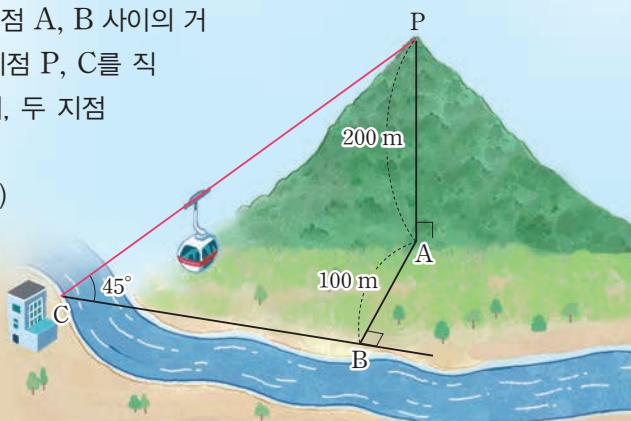


문제 02

수학 + 실생활

오른쪽 그림과 같이 세 지점 A, B, C와 산의 정상 지점 P에 대하여
두 지점 P, A 사이의 거리는 200 m, 두 지점 A, B 사이의 거
리는 100 m이고, $\angle PCB=45^\circ$ 이다. 두 지점 P, C를 직
선으로 잇는 케이블카를 설치하려고 할 때, 두 지점
P, C 사이의 거리를 구하시오.

(단, 평면 ABC와 \overline{PA} 는 수직이다.)



추론

수학 기르기

추론할 때는

- 자신의 지식과 경험으
로부터 논리적으로 수학적
추측을 이끌어 낸다.

오른쪽 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 평면 α
에 수직인 직선을 그으려고 한다. 다음 대화를 읽고, 그 방법을
추측해 보자.

•P



점 P를 지나고 평면 α 위
의 모든 직선과 수직인 직
선을 찾아야 해. 어떻게
찾을 수 있을까?



평면 α 위의 한 직선에
대해서는 점 P에서 수선
을 그을 수 있으니까...



아! 그럼 삼수선의 정리를
이용하면 되겠네!



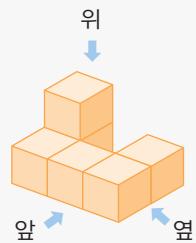
03 정사영

• 정사영의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

◆ 정사영은 무엇일까?

개념열기

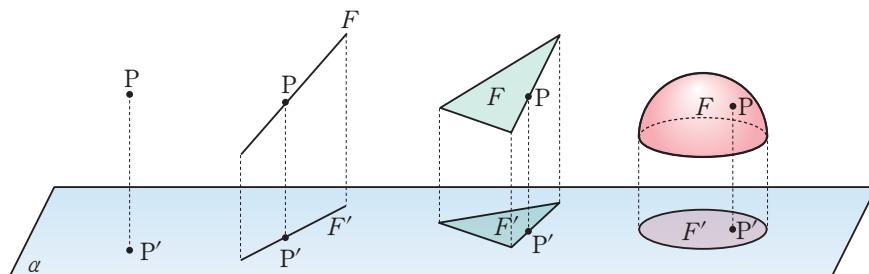
공간도형을 앞에서 보고 그린 그림을 정면도, 위에서 보고 그린 그림을 평면도, 옆에서 보고 그린 그림을 측면도라고 한다. 오른쪽 그림과 같이 쌓기 나무로 만든 도형의 정면도, 평면도, 측면도를 그리시오.



한 점 P 에서 평면 α 에 내린 수선의 발 P' 을 점 P 의 평면 α 위로의 **정사영**이라고 한다.

또 도형 F 의 각 점의 평면 α 위로의 정사영으로 이루어진 도형 F' 을 도형 F 의 평면 α 위로의 정사영이라고 한다.

프랑스의 수학자 풍슬레
(Poncelet, J. V., 1788
~1867)는 정사영의 성질
등을 연구하는 사영기하학
에 큰 공헌을 하였다.



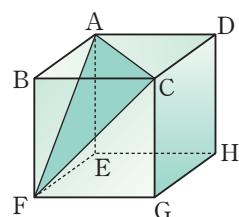
직선 l 의 평면 α 위로의 정사영은 직선 l 과 평면 α 가 수직이면 한 점이고, 수직이 아니면 직선이다.

따라서 다각형의 평면 위로의 정사영은 선분 또는 다각형이다.



오른쪽 그림의 정육면체에서 다음을 구하시오.

- (1) 선분 AF의 평면 EFGH 위로의 정사영
- (2) 선분 AC의 평면 ABFE 위로의 정사영
- (3) 삼각형 AFC의 평면 EFGH 위로의 정사영

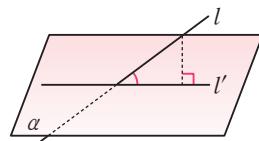


◆ 정사영의 길이와 넓이는 어떻게 구할까?

◉ $l \parallel \alpha$ 일 때, 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 0° 이고, $l \perp \alpha$ 일 때, 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각의 크기는 90° 이다.

- ◉ (i) $\theta = 0^\circ$ 일 때,
 $\overline{AB} \parallel \alpha$ 이므로
 $A'B' = AB$
 $= \overline{AB} \cos 0^\circ$
- (ii) $\theta = 90^\circ$ 일 때,
 선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영은 한 점이
 므로
 $A'B' = 0$
 $= \overline{AB} \cos 90^\circ$

직선 l 과 평면 α 가 수직이 아닐 때, 직선 l 의 평면 α 위로의 정사영 l' 과 직선 l 이 이루는 각을 직선 l 과 평면 α 가 이루는 각이라고 한다.



선분의 길이와 그 선분의 정사영의 길이 사이의 관계에 대하여 알아보자. 오른쪽 그림과 같이 선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라 하고, 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$ 라고 하자.

두 직선 AB , $A'B'$ 의 교점을 O 라고 하면

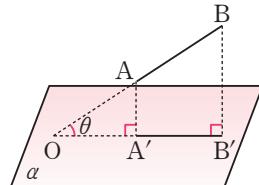
$$\overline{OA'} = \overline{OA} \cos \theta, \overline{OB'} = \overline{OB} \cos \theta$$

이므로

$$\overline{A'B'} = \overline{OB'} - \overline{OA'} = (\overline{OB} - \overline{OA}) \cos \theta = \overline{AB} \cos \theta$$

이다.

일반적으로 다음이 성립한다.



정사영의 길이

선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라 하고, 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$ 라고 하면

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos \theta$$

빈칸에
알맞은 수를
써넣어 보자.



● 스스로 확인하기 ●

길이가 10인 선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라고 할 때, 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기가 60° 이면 선분 $A'B'$ 의 길이는

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \cos 60^\circ = 10 \times \boxed{\quad} = \boxed{\quad}$$

문제 02

선분 AB 의 평면 α 위로의 정사영을 선분 $A'B'$ 이라 하고 직선 AB 와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, 다음을 구하시오.

- (1) $\overline{AB} = 8$, $\theta = 30^\circ$ 일 때, 선분 $A'B'$ 의 길이
- (2) $\overline{AB} = 6$, $\overline{A'B'} = 3\sqrt{2}$ 일 때, θ 의 크기

도형의 넓이와 그 도형의 정사영의 넓이 사이의 관계에 대하여 알아보자.

삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영을 삼각형 A'B'C'이라 하고, 평면 α 와 평면 ABC가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$)라고 하자.

- (i) $\theta = 0^\circ$ 일 때,
삼각형 ABC는 평면 β 위에 있고 $\alpha // \beta$ 이므로
 $\triangle A'B'C'$
 $= \triangle ABC$
 $= \triangle ABC \cos 0^\circ$

- (ii) $\theta = 90^\circ$ 일 때,
삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영은 선분이므로
 $\triangle A'B'C'$
 $= 0$
 $= \triangle ABC \cos 90^\circ$

오른쪽 그림과 같이 변 BC와 평면 α 가 평행한 경우, 변 BC를 포함하고 평면 α 와 평행한 평면을 β , 점 A에서 변 BC에 내린 수선의 발을 H, 직선 AA'과 평면 β 의 교점을 A''이라고 하면

$\overline{AA''} \perp \beta$, $\overline{AH} \perp \overline{BC}$
이므로 삼수선의 정리에 의하여 $\overline{A''H} \perp \overline{BC}$ 이다.

따라서 $\angle AHA'' = \theta$ 이므로 삼각형 ABC와 삼각형 A'B'C'의 넓이를 각각 S, S'이라고 하면

$$\begin{aligned} S' &= \triangle A'B'C' \\ &= \triangle A''BC \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{A''H} \\ &= \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times \overline{AH} \cos \theta \\ &= S \cos \theta \end{aligned}$$

이다.

한편 변 BC와 평면 α 가 평행하지 않은 경우에도 이 식은 성립한다.

일반적으로 도형의 넓이와 그 정사영의 넓이 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

정사영의 넓이

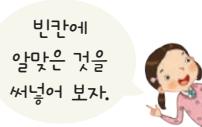
평면 β 위의 도형의 넓이를 S, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S'이라고 할 때, 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기를 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$)라고 하면

$$S' = S \cos \theta$$

● 스스로 확인하기 ●

두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 평면 β 위의 도형의 넓이가 8일 때, 이 도형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이는

$$8 \times \cos \boxed{\quad} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$



문제 03

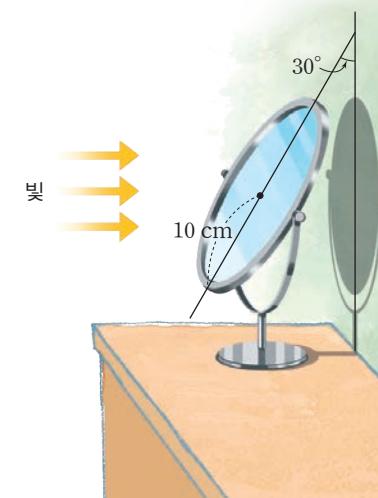
두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 45° 이고, 평면 β 위에 한 변의 길이가 2인 정삼각형이 있다. 이 정삼각형의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

문제 04

수학 + 실생활

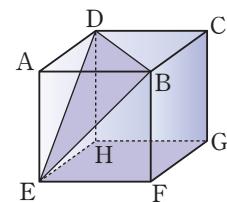
오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 10 cm인 원 모양의 거울이 벽면과 30° 의 각을 이루고 있다. 벽면에 수직으로 빛을 비출 때, 벽면에 생기는 거울의 그림자의 넓이를 구하시오.

(단, 받침대의 그림자는 고려하지 않는다.)



예제
1

오른쪽 그림의 정육면체에서 평면 BDE와 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



풀이

삼각형 BDE의 평면 EFGH 위로의 정사영은 삼각형 FHE이므로

$$\triangle FHE = \triangle BDE \cos \theta \quad \dots \dots \text{①}$$

$$\overline{EF} = a \text{라고 하면 } \triangle FHE = \frac{1}{2} a^2$$

또 삼각형 BDE는 한 변의 길이가 $\sqrt{2}a$ 인 정삼각형이므로

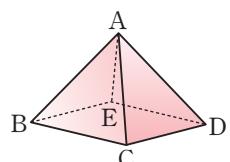
$$\triangle BDE = \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{2}a)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2$$

$$\text{①에서 } \cos \theta = \frac{\triangle FHE}{\triangle BDE} = \frac{\frac{1}{2} a^2}{\frac{\sqrt{3}}{2} a^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

답 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

문제 05

오른쪽 그림과 같이 모든 모서리의 길이가 같은 정사각뿔에서 평면 ABC와 평면 BCDE가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



중단원 학습 점검

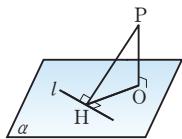
개념 정리

평면의 결정조건

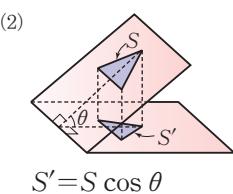
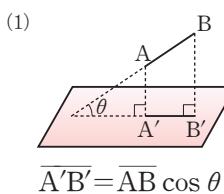


삼수선의 정리

- (1) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{OH} \perp l$ 이면 $\overline{PH} \perp l$
- (2) $\overline{PO} \perp \alpha$, $\overline{PH} \perp l$ 이면 $\overline{OH} \perp l$
- (3) $\overline{PH} \perp l$, $\overline{OH} \perp l$, $\overline{PO} \perp \overline{OH}$ 이면 $\overline{PO} \perp \alpha$



정사영의 길이와 넓이



O, X 문제

다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

1 공간에서 두 직선이 한 평면을 결정하려면 반드시 서로 만나야 한다.

2 공간에서 직선 l 이 평면 α 와 평행하지 않으면 반드시 한 점에서만 만난다.

3 서로 다른 두 평면은 만나거나 평행하다.

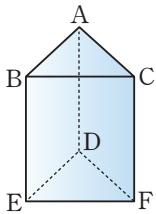
4 평면 β 위에 있는 삼각형의 평면 α 위로의 정사영은 항상 삼각형이다.

기초 문제

- 1 오른쪽 삼각기둥에 대하여 다음 보기 중 평면이 결정되지 않는 것을 있는 대로 고르시오.

• 보기 •

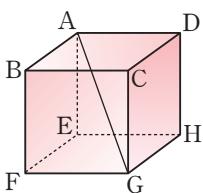
- ㄱ. 세 점 A, B, C
- ㄴ. 직선 AB와 점 E
- ㄷ. 두 직선 BC, CE
- ㄹ. 두 직선 BC, DE



3

길이가 4인 선분 AB의 평면 α 위로의 정사영을 선분 A'B'이라 하고, 직선 AB와 평면 α 가 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 선분 A'B'의 길이를 구하시오.

- 2 오른쪽 그림과 같은 정육면체에서 \overline{AG} 와 꼬인 위치에 있는 모서리의 개수를 구하시오.

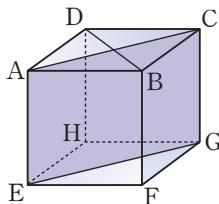


4

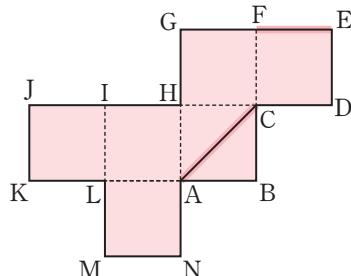
두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 60° 이고, 평면 β 위에 지름이 10인 원이 있다. 이 원의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 구하시오.

기본 문제

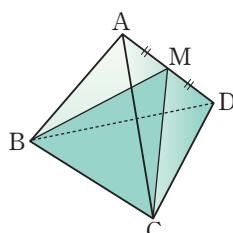
- 5** 오른쪽 그림의 정육면체에서 직선 BD와 평면 AEGC가 수직임을 보이시오.



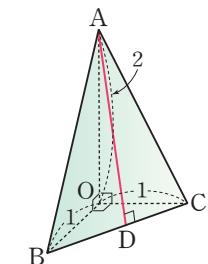
- 6** 다음 전개도로 만든 정육면체에서 두 직선 AC, FE가 이루는 각의 크기를 구하시오.



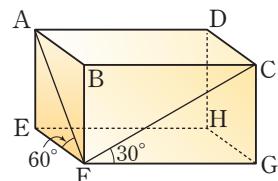
- 7** 오른쪽 그림의 정사면체에서 선분 AD의 중점을 M이라 하고 두 평면 BCM, BCD가 이루는 각의 크기를 θ 라고 하자. 이때 $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



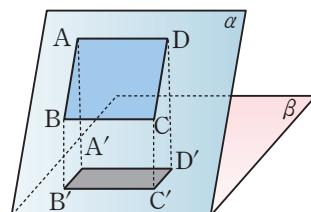
- 8** 오른쪽 그림과 같이 세 모서리 OA, OB, OC가 서로 수직이고, $\overline{OA}=2$, $\overline{OB}=1$, $\overline{OC}=1$ 인 사면체가 있다. 꼭짓점 A에서 \overline{BC} 에 내린 수선의 발을 B라고 할 때, 선분 AD의 길이를 구하시오.



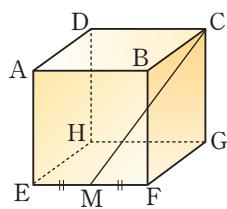
- 9** 다음 그림과 같이 $\angle CFG=30^\circ$, $\angle AFE=60^\circ$ 인 직육면체에서 $\angle AFC=\theta$ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



- 10** 다음 그림과 같이 평면 α 위의 한 변의 길이가 4인 정사각형 ABCD의 평면 β 위로의 정사영을 사각형 A'B'C'D'이라고 하자. 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기는 45° 이고 \overline{BC} 가 평면 β 와 평행할 때, 사각형 A'B'C'D'의 둘레의 길이를 구하시오.



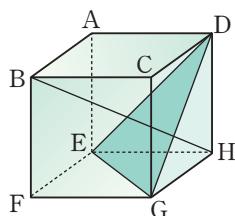
- 11** 오른쪽 그림의 정육면체에서 모서리 EF의 중점을 M이라고 하자. 직선 CM과 평면 EFGH가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.



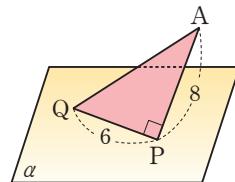
- 12** 두 평면 α , β 가 이루는 각의 크기가 60° 이고 평면 α 위에 있는 도형 F 의 평면 β 위로의 정사영을 F' 이라고 하자. 도형 F' 이 한 변의 길이가 4 cm인 정삼각형일 때, 도형 F 의 넓이를 구하시오.

도전 문제

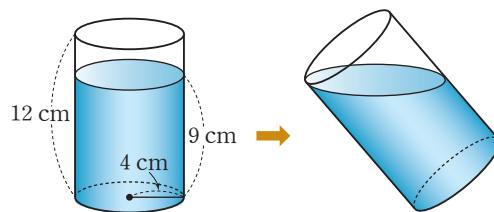
- 13** 오른쪽 그림의 정육면체에서 $\overline{BH} \perp$ (평면 DEG)임을 보이시오.



- 14** 다음 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 A에 대하여 $\overline{AP}=8$, $\overline{PQ}=6$, $\angle APQ=90^\circ$ 인 삼각형 APQ가 되도록 평면 α 위에 두 점 P, Q를 잡을 때, 선분 PQ가 그리는 도형의 넓이를 구하시오. (단, 점 A에서 평면 α 까지의 거리는 8보다 작다.)



- 15** 다음 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 4 cm, 높이가 12 cm인 원기둥 모양의 그릇에 9 cm의 높이까지 물이 채워져 있다. 이 그릇을 천천히 기울일 때, 그릇에 들어 있는 물이 쏟아지기 직전의 수면의 넓이를 구하시오. (단, 그릇의 두께는 고려하지 않는다.)



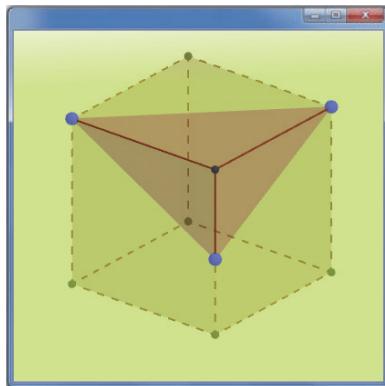
활동 목표 공학적 도구를 이용하여 공간도형의 성질을 탐구할 수 있다.

- ▶ 정육면체를 평면으로 잘랐을 때, 나타날 수 있는 도형의 종류를 공학적 도구를 이용하여 탐구해 보자.

[1단계] 도구 상자에서 [정6면체]를 선택하고 임의의 두 점을 정하여 정육면체를 만든다.

[2단계] 도구 상자에서 [세 점을 지나는 평면]을 선택하고 정육면체의 모서리 위의 임의의 세 점을 정하여 그 세 점을 지나는 평면을 만든다.

[3단계] **[2단계]**에서 만든 평면으로 정육면체를 잘랐을 때 나타나는 단면의 모양을 관찰한다.



- 1** 위와 같은 방법으로 모서리 위의 세 점을 정하여 정육면체를 잘랐을 때 나타나는 도형의 종류를 찾아보자.



- 2** 자신이 찾은 도형을 친구와 서로 비교해 보고, 가능한 모든 도형의 종류를 찾아보자.

동료 평가	과제 수행에 적극적으로 참여하였는가?
	친구의 의견을 잘 듣고 존중하였는가?
	다양하고 좋은 의견을 많이 냈는가?



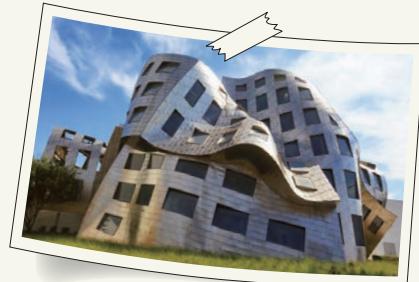
관습을 타파하라!

초현실주의 예술

레오나르도 다빈치(Leonardo da vinci, 1452~1519)는 평면에 깊이감을 더하는 원근법을 완성하기 위해 기하학을 공부한 것으로 알려져 있다. 근대에는 기하학이 주는 새로운 인식이 공간과 시간에 대한 관념에 변화를 주었고, 이는 입체주의뿐만 아니라 미래주의, 초현실주의에도 영향을 주었다.

초현실주의는 1924년부터 약 20년 동안 프랑스를 중심으로 일어난 예술 운동으로, 초현실주의자들은 기존의 인습과 질서에 얹매이지 않고 상상의 자유, 창조의 자유를 추구하였다.

초현실주의는 건축에도 많은 영향을 미쳤는데, 초현실주의 경향의 건축은 선, 면 등으로 이루어진 공간도형의 독창적인 구성을 통하여 관습적 이미지나 형태에서 벗어나고자 하였다. 비정형적인 형상의 활용, 스케일의 변형, 이질적인 재료의 모음 등 다양한 초현실주의적 기법을 활용하여 이성과 합리성을 추구하는 공간 표현 형식을 부정하고 의식과 무의식을 혼합하여 초현실을 창조하였다.



[참고 자료: 이한진, “수학은 어떻게 예술이 되었는가”, 윤경환 외, ‘현대건축의 초현실주의적 표현양상에 관한 연구’]



2

공간좌표

수학 + 과학

2D 프린터가 종이와 같은 평면에 인쇄하는 장치라면 3D 프린터는 공간에 인쇄하는 장치라고 할 수 있다. 3D 프린터는 앞뒤, 좌우뿐 아니라 상하 방향을 고려하여 입력한 3D 도면을 바탕으로 입체물을 만들어 낸다. 3D 프린터는 최근 의료, 건설, 식품, 의류 산업 등 그 활용 영역을 빠르게 넓혀 가고 있는데, 미국항공우주국(NASA)에서는 우주에서 먹을 음식을 만들기 위하여 피자나 햄버거를 만들 수 있는 3D 푸드 프린터를 개발하기도 했다.

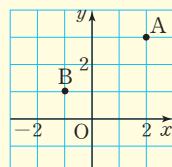
[참고 자료: 국립중앙과학관, <http://www.science.go.kr>]

“공간에서 점의 위치는 어떻게 나타낼까?”



준비학습

- 1 오른쪽 그림에서 두 점 A, B의 좌표를 구하고, 두 점 사이의 거리를 구하시오.



- 2 두 점 A(2, 6), B(4, -1)에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

- (1) 선분 AB를 2 : 1로 내분하는 점 (2) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점

01

공간에서 점의 좌표

- 좌표공간에서 점의 좌표, 두 점 사이의 거리를 구할 수 있다.
- 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표를 구할 수 있다.

◆ 공간에서 점의 좌표는 어떻게 나타낼까?

개념열기

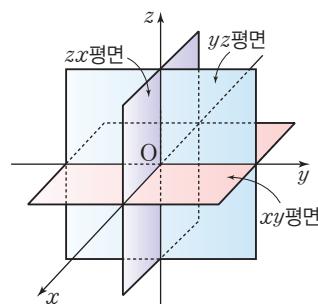
다음 대화를 읽고, 현우의 좌석은 몇 층 몇 열 몇 번인지 말하시오.



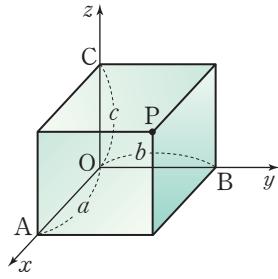
직선에서 점의 위치는 하나의 실수로 된 좌표로 나타낼 수 있고, 평면에서 점의 위치는 두 실수의 순서쌍인 좌표로 나타낼 수 있다.

이제 공간에서 점의 위치를 좌표를 이용하여 나타내 보자.

오른쪽 그림과 같이 공간의 한 점 O에서 서로 직교하는 세 수직선을 그었을 때, 점 O를 원점, 세 수직선을 각각 x 축, y 축, z 축이라 하고, 이 세 축을 직교좌표축 또는 좌표축이라고 한다. 또 x 축과 y 축에 의하여 결정되는 평면을 xy 평면, y 축과 z 축에 의하여 결정되는 평면을 yz 평면, z 축과 x 축에 의하여 결정되는 평면을 zx 평면이라 하고, 이 세 평면을 좌표평면이라고 한다.



오른쪽 그림과 같이 공간의 임의의 점 P 에 대하여 점 P 를 지나고 yz 평면, zx 평면, xy 평면과 평행한 평면이 x 축, y 축, z 축과 만나는 점을 각각 A , B , C 라고 하자. 이때 세 점 A , B , C 의 x 축, y 축, z 축 위에서의 좌표를 각각 a , b , c 라고 하면 점 P 에 대응하는 세 실수의 순서쌍 (a, b, c) 가 정해진다.



역으로 세 실수의 순서쌍 (a, b, c) 가 주어지면 공간의 한 점 P 가 정해진다. 따라서 공간의 점 P 와 세 실수의 순서쌍 (a, b, c) 는 일대일로 대응한다. 이때 순서쌍 (a, b, c) 를 점 P 의 **공간좌표** 또는 좌표라 하고 a, b, c 를 각각 점 P 의 x 좌표, y 좌표, z 좌표라고 한다.

점 P 의 좌표가 (a, b, c) 일 때, 이것을 기호로

$P(a, b, c)$

와 같이 나타낸다. 이와 같이 임의의 점의 좌표가 정해진 공간을 **좌표공간**이라고 한다.

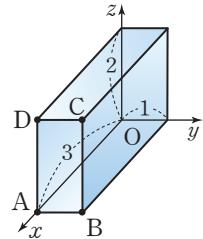
● 스스로 확인하기 ●

오른쪽 그림의 직육면체에서 네 꼭짓점 A, B, C, D 는

$A(3, 0, 0), B(3, 1, 0),$

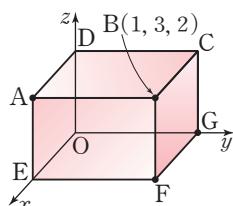
$C(\square, 1, 2), D(\square, 0, \square).$

빈칸에
알맞은 수를
써넣어 보자.



문제 01

오른쪽 그림의 직육면체에서 꼭짓점 B 의 좌표가 $(1, 3, 2)$ 일 때, 세 꼭짓점 A, F, G 의 좌표를 구하시오.



문제 02

다음 물음에 답하시오.

- (1) 두 점 $A(0, 3, 0), B(0, 0, 2)$ 는 각각 어느 좌표축 위에 있는지 말하시오.
- (2) 두 점 $C(0, -1, 2), D(2, 0, -1)$ 은 각각 어느 좌표평면 위에 있는지 말하시오.

좌표공간에서 점의 대칭에 대하여 알아보자.

좌표공간 위의 점 $P(a, b, c)$ 를 좌표축, 좌표평면, 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 다음과 같다.

- ① 점 $P(a, b, c)$ 를 x 축, y 축, z 축에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(a, -b, -c)$, $(-a, b, -c)$, $(-a, -b, c)$ 이다.
- ② 점 $P(a, b, c)$ 를 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 각각 $(a, b, -c)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$ 이다.
- ③ 점 $P(a, b, c)$ 를 원점에 대하여 대칭이동한 점의 좌표는 $(-a, -b, -c)$ 이다.

문제 03

점 $P(2, 1, 3)$ 에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

- (1) 점 P 의 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 대한 대칭점
- (2) 점 P 의 x 축, y 축, z 축에 대한 대칭점
- (3) 점 P 에서 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 내린 수선의 발
- (4) 점 P 에서 x 축, y 축, z 축에 내린 수선의 발

의사소통

수학 **여행** 기르기

토의할 때는

- 다른 사람의 말을 주의 깊게 듣고 수학적 표현의 의미를 이해한다.

다음 대화를 읽고, 좌표공간에서 $x=0, y=0, z=0$ 은 각각 무엇을 나타내는지 토의해 보자.

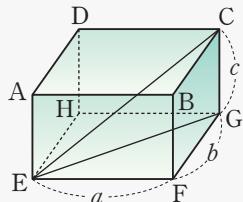


◆ 좌표공간에서 두 점 사이의 거리는 어떻게 구할까?

개념 열기

오른쪽 그림과 같이 세 모서리의 길이가 각각 a, b, c 인
직육면체가 있다.

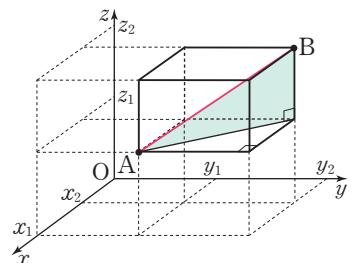
- 1 밑면의 대각선 EG의 길이를 구하시오.
- 2 직육면체의 대각선 CE의 길이를 구하시오.



위의 개념 열기에서 대각선 EG와 대각선 CE의 길이는 각각 $\sqrt{a^2+b^2}$, $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ 이다.

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리를 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 AB가 각 좌표평면과 평행하지 않을 때, 선분 AB를 대각선으로 하고 모든 면이 좌표평면에 평행한 직육면체를 그리면 세 모서리의 길이는 각각 $|x_2-x_1|$, $|y_2-y_1|$, $|z_2-z_1|$ 이므로 두 점 A, B 사이의 거리는



$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

이다.

한편 직선 AB가 세 좌표평면 중 적어도 한 평면과 평행한 경우에도 위의 식은 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

특히 원점 O와 점 $A(x_1, y_1, z_1)$ 사이의 거리는

$$\overline{OA} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

이다.

● 스스로 확인하기 ●

두 점 A(3, 2, 1), B(1, -1, 1) 사이의 거리는
 $\overline{AB} = \sqrt{(1-3)^2 + (-1-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{13}$

문제 04

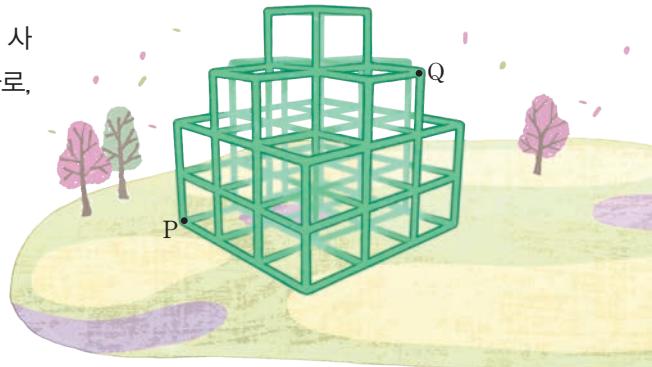
다음 두 점 사이의 거리를 구하시오.

- (1) A(2, 3, -5), B(4, 1, -4) (2) O(0, 0, 0), A(-1, -2, 3)

문제 05

수학 + 실생활

오른쪽 그림의 정글짐에서 지점 P와 지점 Q 사이의 거리를 구하시오. (단, 정글짐 한 칸의 가로, 세로의 길이와 높이는 모두 1 m이다.)



예제
1

두 점 A(1, 2, -3), B(-1, 0, 5)에서 같은 거리에 있는 x축 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

풀이

점 P의 좌표를 $(x, 0, 0)$ 이라고 하면 $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로 $\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2$
 $(x-1)^2 + (0-2)^2 + \{0 - (-3)\}^2 = \{x - (-1)\}^2 + (0-0)^2 + (0-5)^2$
 $4x = -12, x = -3$
 따라서 점 P의 좌표는 $(-3, 0, 0)$

답 $(-3, 0, 0)$

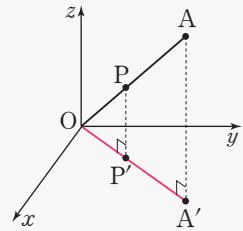
문제 06

두 점 A(3, 1, -4), B(1, -2, 3)에서 같은 거리에 있는 y축 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

◆ 좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점의 좌표는 어떻게 구할까?

개념 열기

오른쪽 그림과 같이 점 A에 대하여 선분 OA를 2 : 3으로 내분하는 점을 P라 하고, 두 점 A, P의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , P' 이라고 할 때, $\overline{OP'} : \overline{P'A'} = 2 : 3$ 임을 구하시오.



위의 개념 열기에서 $\triangle OP'P \sim \triangle OA'A$ 이므로 $\overline{OP'} : \overline{P'A'} = 2 : 3$ 임을 알 수 있다.

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 를 이은 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0$, $n > 0$)으로 내분하는 점 P의 좌표 (x, y, z) 를 구해 보자.

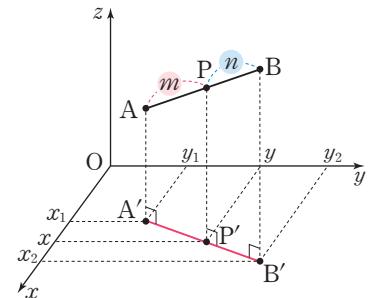
오른쪽 그림과 같이 세 점 A, P, B의 xy 평면 위로의 정사영을 각각 A' , P' , B' 라고 하면

$$A'(x_1, y_1, 0), P'(x, y, 0),$$

$$B'(x_2, y_2, 0)$$

이고

$$\overline{AP'} : \overline{P'B'} = \overline{AP} : \overline{PB} = m : n$$



이다.

따라서 xy 평면 위에서 점 P' 은 선분 $A'B'$ 을 $m : n$ 으로 내분하는 점이므로

$$x = \frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, y = \frac{my_2 + ny_1}{m+n}$$

이다.

같은 방법으로 세 점 A, P, B의 yz 평면(또는 zx 평면) 위로의 정사영을 생각하면

$$z = \frac{mz_2 + nz_1}{m+n}$$

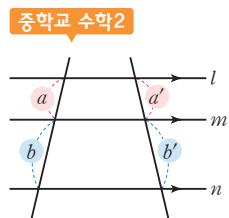
이다.

따라서 선분 AB 를 $m : n$ 으로 내분하는 점 P의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$

특히 선분 AB 의 중점 M의 좌표는 다음과 같다.

$$\left(\frac{x_2 + x_1}{2}, \frac{y_2 + y_1}{2}, \frac{z_2 + z_1}{2} \right)$$



$l // m // n$ 이면

$a : b = a' : b'$ 이다.

같은 방법으로 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 를 이은 선분 AB 를
 $m : n$ ($m > 0$, $n > 0$, $m \neq n$)으로 외분하는 점 Q 의 좌표를 구하면 다음과 같다.

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n} \right)$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

좌표공간에서 두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 를 이은 선분 AB 를

$m : n$ ($m > 0$, $n > 0$)으로 내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q 는 각각

$$P\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n}, \frac{mz_2 + nz_1}{m+n} \right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n}, \frac{mz_2 - nz_1}{m-n} \right) (\text{단, } m \neq n)$$

● 스스로 확인하기 ●

두 점 $A(1, 4, -2)$, $B(-1, 2, -3)$ 에 대하여

(1) 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 내분하는 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면

$$x = \frac{1 \times (-1) + 2 \times 1}{1+2} = \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1 \times 2 + 2 \times 4}{1+2} = \frac{10}{3}$$

$$z = \frac{1 \times (-3) + 2 \times (-2)}{1+2} = -\frac{7}{3}$$

$$\text{따라서 } P\left(\frac{1}{3}, \frac{10}{3}, -\frac{7}{3}\right)$$

(2) 선분 AB 를 $1 : 2$ 로 외분하는 점을 $Q(x, y, z)$ 라고 하면

$$x = \frac{1 \times (-1) - 2 \times \boxed{}}{1-2} = 3$$

$$y = \frac{1 \times 2 - 2 \times \boxed{}}{1-2} = 6$$

$$z = \frac{1 \times (-3) - 2 \times (\boxed{})}{1-2} = \boxed{}$$

$$\text{따라서 } Q(3, 6, \boxed{})$$



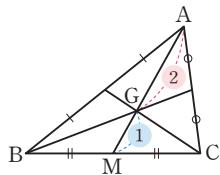
문제 07

두 점 $A(1, 1, 5)$, $B(-4, 1, 0)$ 에 대하여 선분 AB 를 $3 : 2$ 로 내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q 의 좌표를 구하시오.

예제
2

세 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

풀이



변 BC의 중점을 M이라고 하면 $M\left(\frac{x_2+x_3}{2}, \frac{y_2+y_3}{2}, \frac{z_2+z_3}{2}\right)$

무게중심 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로 점 G의 좌표를 (x, y, z) 라고 하면

$$x = \frac{2 \times \frac{x_2+x_3}{2} + 1 \times x_1}{2+1} = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$$

$$y = \frac{2 \times \frac{y_2+y_3}{2} + 1 \times y_1}{2+1} = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

$$z = \frac{2 \times \frac{z_2+z_3}{2} + 1 \times z_1}{2+1} = \frac{z_1+z_2+z_3}{3}$$

따라서 무게중심 G의 좌표는

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$$

답 $\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}, \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$

문제 08

세 점 $A(2, -1, 4)$, $B(1, -5, -3)$, $C(-1, 3, 1)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심 G의 좌표를 구하시오.

추론

수학 **역량** 기르기

추론할 때는

- ✓ 관찰과 탐구를 통해 수학적 사실을 이끌어 낸다.

다음 대화를 읽고, 좌표공간의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 선분 AB, BC, CD, DA의 중점을 연결하여 만든 도형은 어떤 도형인지 말해 보자.

(단, 네 점 A, B, C, D는 한 직선 위에 있지 않다.)

네 점 A, B, C, D가
한 평면 위에 있으면
만든 도형은 평행사
변형이야.



한 평면 위에 있지 않
은 네 점 A, B, C, D
에 대해서도 만든 도형
은 평행사변형일까?



02

구의 방정식

• 구의 방정식을 구할 수 있다.

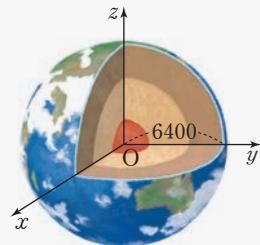
◆ 구의 방정식은 어떻게 구할까?

개념 열기

오른쪽 그림은 반지름의 길이가 6400 km인 지구를 좌표 공간에 나타낸 것이다. 지구의 중심을 원점 O로 생각하고 지표면 위의 한 점을 $P(x, y, z)$ 라고 할 때, 원점 O에서 점 P까지의 거리를 x, y, z 에 대한 식으로 나타내면 다음과 같다. 빈칸에 알맞은 것을 써넣으시오.

(단, 지구는 구 모양으로 생각한다.)

$$\boxed{\hspace{2cm}} = 6400$$



위의 개념 열기에서 선분 OP의 길이는 지구의 반지름의 길이와 같으므로 $\sqrt{x^2+y^2+z^2}=6400$, 즉 $x^2+y^2+z^2=6400^2$ 이다.

공간에서 한 점 C로부터 일정한 거리에 있는 점들의 집합을 구라고 한다. 이 때 점 C를 구의 중심, 구의 중심과 구 위의 한 점을 이은 선분을 구의 반지름이라고 한다.

좌표공간에서 점 $C(a, b, c)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식을 구해 보자.

구 위의 임의의 점을 $P(x, y, z)$ 라고 하면 $\overline{CP}=r$ 이므로

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}=r$$

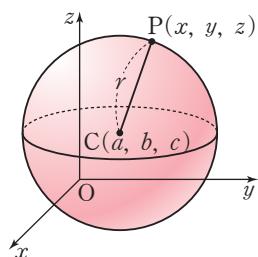
이고, 이 식의 양변을 제곱하면

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2 \quad \dots \dots \quad ①$$

이다.

역으로 ①을 만족시키는 점 $P(x, y, z)$ 는 $\overline{CP}=r$ 를 만족시키므로 중심이 $C(a, b, c)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구 위에 있다.

따라서 ①은 구하는 구의 방정식이다.



이상을 정리하면 다음과 같다.

구의 방정식

중심이 $C(a, b, c)$ 이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

특히 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r 인 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

이다.

• 스스로 확인하기 •

점 $(1, 2, 3)$ 을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 구의 방정식은

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$$

문제 01

다음 구의 방정식을 구하시오.

- (1) 점 $(-2, 1, 4)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 3인 구
- (2) 점 $(4, -1, 3)$ 을 중심으로 하고 원점을 지나는 구
- (3) 두 점 $(4, 3, 1), (0, -1, 5)$ 를 지름의 양 끝 점으로 하는 구

구의 방정식 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$ 을 전개하여 정리하면

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + a^2 + b^2 + c^2 - r^2 = 0$$

이고, 이때 $-2a=A, -2b=B, -2c=C, a^2+b^2+c^2-r^2=D$ 로 놓으면 구의 방정식은

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0 \quad \dots \dots \quad ①$$

의 꼴로 나타낼 수 있다.

역으로 ①을 변형하면

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{C}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}{4}$$

이므로 $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$ 이면 ①은 중심이 $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ 이고 반지름의 길이가 $\frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}}{2}$ 인 구를 나타낸다.



$$A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$$

면 ①은 점

$$\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$$

나타낸다.

또 $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$ 이면 ①을 만족하는 실수 x, y, z 는 존재하지 않는다.

● 스스로 확인하기 ●

빈칸에
알맞은 수를
써넣어 보자.



방정식 $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2y - 4z + 5 = 0$ 을 변형하면

$$(x+3)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 9$$

따라서 주어진 방정식은 점 $(-3, 1, 2)$ 를 중심으로 하고 반지름의 길이가 인 구를 나타낸다.

문제 02

방정식 $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y - 2z - 5 = 0$ 이 나타내는 구의 중심과 반지름의 길이를 구하시오.

예제
1

네 점 $(0, 0, 0), (1, 0, 1), (0, -1, 0), (2, 2, 1)$ 을 지나는 구의 방정식을 구하시오.

풀이

구하는 구의 방정식을 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$ 이라고 하면

두 점 $(0, 0, 0), (0, -1, 0)$ 을 지나므로 $D=0, B=1$

따라서 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + y + Cz = 0$

또 두 점 $(1, 0, 1), (2, 2, 1)$ 을 지나므로 $A+C=-2, 2A+C=-11$

이것을 연립하여 풀면 $A=-9, C=7$

따라서 구하는 구의 방정식은 $x^2 + y^2 + z^2 - 9x + y + 7z = 0$

답 $x^2 + y^2 + z^2 - 9x + y + 7z = 0$

문제 03

네 점 $(0, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, 0, -1), (1, 1, -7)$ 을 지나는 구의 방정식을 구하시오.

문제 해결 | 의사소통

수학 **역량** 기르기

문제를 해결할 때는

- ✓ 문제의 조건과 정보를 파악하고 풀이 계획을 세운다.

다음에 해당하는 구의 방정식을 ①~⑤ 중에서 찾고, 그 이유를 설명해 보자.

(단, a, b 는 0이 아닌 서로 다른 양수이다.)

$$\textcircled{1} \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = a^2$$

$$\textcircled{2} \quad (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-b)^2 = b^2$$

$$\textcircled{3} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 + z^2 = b^2$$

1 xy 평면에 접하는 구

2 yz 평면과 zx 평면에 동시에 접하는 구

3 x 축에 접하는 구

중단원 학습 점검

개념 정리

좌표공간에서 두 점 사이의 거리

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 사이의 거리는

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

좌표공간에서 선분의 내분점과 외분점

두 점 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 를 이은 선분 AB 를 $m : n$ ($m > 0, n > 0$)으로 내분하는 점 P 와 외분하는 점 Q 는

$$P\left(\frac{mx_2+nx_1}{m+n}, \frac{my_2+ny_1}{m+n}, \frac{mz_2+nz_1}{m+n}\right)$$

$$Q\left(\frac{mx_2-nx_1}{m-n}, \frac{my_2-ny_1}{m-n}, \frac{mz_2-nz_1}{m-n}\right) \text{ (단, } m \neq n\text{)}$$

구의 방정식

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$$

↑ ↑ ↑
 중심: (a, b, c) 반지름의 길이: r

O, X 문제

다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

1 점 $(0, 1, 0)$ 은 x 축 위에 있다.

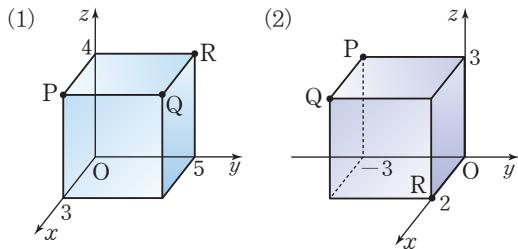
2 세 점 $A(3, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 3)$ 에 대하여 삼각형 ABC 의 무게중심의 좌표는 $(1, 1, 1)$ 이다.

3 방정식

$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ 는 중심이 $(1, 2, 3)$ 이고, 반지름의 길이가 9인 구를 나타낸다.

기초 문제

1 다음 그림의 직육면체에서 세 꼭짓점 P , Q , R 의 좌표를 구하시오.



2 점 $P(3, 2, -4)$ 에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

- 점 P 의 zx 평면에 대한 대칭점
- 점 P 에서 xy 평면에 내린 수선의 발

3 두 점 $A(2, -3, 1)$, $B(1, -5, 8)$ 에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

- 선분 AB 를 $1 : 3$ 으로 내분하는 점
- 선분 AB 를 $2 : 1$ 로 외분하는 점
- 선분 AB 의 중점

4 다음을 구하시오.

- 중심이 $(2, -8, 1)$ 이고 반지름의 길이가 3인 구의 방정식
- 방정식 $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 6z + 5 = 0$ 이 나타내는 구의 중심과 반지름의 길이

기본 문제

- 5** 점 A(3, 2, 2)에서 x 축에 내린 수선의 발을 B, yz 평면에 내린 수선의 발을 C라고 할 때, 선분 BC의 길이를 구하시오.
- 6** 두 점 A(2, -1, 0), B(1, 1, 3)과 z 축 위의 점 C에 대하여 삼각형 ABC가 변 BC를 빗변으로 하는 직각삼각형일 때, 점 C의 좌표를 구하시오.
- 7** 두 점 A(5, 2, -1), B(1, α , 2)에 대하여 직선 AB와 zx 평면이 이루는 각의 크기가 45° 일 때, 양수 α 의 값을 구하시오.

- 8** 두 점 A(1, 2, 1), B(3, 3, 4)와 xy 평면 위의 점 P에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하시오.
- 9** 점 P(3, -1, 5)를 점 A(-1, 4, 2)에 대하여 대칭이동한 점을 P'이라고 할 때, 점 P'의 좌표를 구하시오.
- 10** 세 점 A(1, -1, 1), B(0, 1, -1), C(-2, 3, 1)을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC에서 $\angle A$ 의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라고 할 때, 점 D의 좌표를 구하시오.

- 11** 구 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = n$ 이 xy 평면과 만나고 y 축과 만나지 않을 때, 자연수 n 의 값을 모두 구하시오.

- 12** 점 $A(1, -4, 2)$ 에서 구
 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 12y + 2z + 30 = 0$ 에 접선
을 그을 때, 접선의 길이를 구하시오.

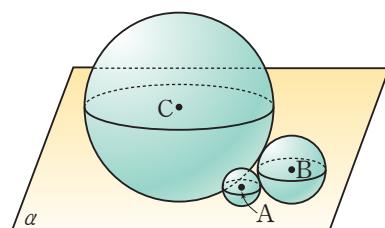
- 13** 구 $(x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+3)^2 = 25$ 가 xy 평면과 만나서 생기는 원을 밑면으로 하고,
이 구에 내접하는 원뿔의 부피의 최댓값을
구하시오.

도전 문제

- 14** 선분 AB 의 xy 평면, yz 평면 위로의 정사영
의 길이가 각각 3, 4일 때, 선분 AB 의 길이
의 최댓값과 최솟값의 합을 구하시오.

- 15** 두 점 $A(-4, -5, 3)$, $B(4, 3, -5)$ 를 이
은 선분 AB 가 xy 평면과 만나는 점을 P 라고
할 때, 점 P 의 좌표를 구하시오.

- 16** 다음 그림과 같이 반지름의 길이가 각각 5,
9, 25이고 서로 외접하는 세 구가 평면 α 위
에 놓여 있다. 세 구의 중심을 각각 A , B , C
라고 할 때, 삼각형 ABC 의 무게중심으로부
터 평면 α 까지의 거리를 구하시오.

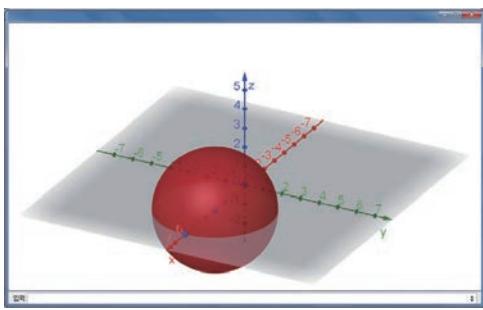


활동 목표 공학적 도구를 이용하여 구의 성질을 추측하고, 이를 일반화하여 설명할 수 있다.

- ▶ 다음과 같이 공학적 도구를 이용하여 좌표공간에 두 점 A(0, 0, 0), B(6, 0, 0)을 지름의 양 끝 점으로 하는 구를 만들고, 두 점 A, B와 직선 AB 위에 있지 않은 구 위의 점 P로 이루어진 삼각형 ABP의 성질을 탐구해 보자.

[1단계] 입력 창에 두 점 A, B의 좌표

(0, 0, 0), (6, 0, 0)과 구의 중심 C의 좌표 (3, 0, 0)을 입력한다.



[2단계] 도구 상자에서 [중심이 있고 한 점을 지나는 구]를 선택한 후, 점 C와 점 A(또는 점 B)를 선택하여 두 점 A, B를 지름의 양 끝 점으로 하는 구를 만든다.

- 1 도구 상자에서 [대상 위의 점]을 선택하여 직선 AB 위에 있지 않은 구 위의 점 P를 정하고, [다각형]을 선택한 후 세 점 A, B, P를 선택하여 삼각형 ABP를 만들자. 이때 삼각형 ABP는 어떤 삼각형인지 말해 보자.

- 2 1에서 정한 점 P를 움직여 보고, 삼각형 ABP의 종류가 변하는지 확인해 보자.



- 3 구 위의 임의의 점 P(x, y, z)에 대하여 삼각형 ABP가 어떤 삼각형인지 세 변의 길이를 이용하여 설명해 보자. (단, 점 P는 직선 AB 위에 있지 않다.)

자기 평가	공간좌표의 개념을 이용하여 과제를 해결하였는가?
	수학적 언어로 해결 과정을 명확하게 표현하였는가?
	공학적 도구를 이용하여 수학적 원리와 법칙을 이해하였는가?

4차원 공간에는 어떤 도형이 있을까?

기하학에서 공간의 차원이란 그 공간에서 한 점의 위치를 표현하기 위해 필요한 좌표의 최소 개수라고 할 수 있다. 예를 들어 직선은 1개의 좌표로 직선 위의 모든 점의 위치를 나타낼 수 있으므로 1차원 공간이고, 평면은 x 좌표와 y 좌표로 이루어진 순서쌍 (x, y) 를 이용하여 평면 위의 모든 점을 나타낼 수 있으므로 2차원 공간이다.

1차원 공간에서는 길이를 가진 선분은 인식할 수 있지만 넓이를 가진 도형은 인식할 수 없다. 이것은 직사각형과 같이 넓이를 가진 도형을 그 형태를 유지한 채로 1차원 공간 속에 집어넣을 수 없기 때문이다. 같은 이유로 2차원에서는 부피를 가진 도형을 인식할 수 없다.

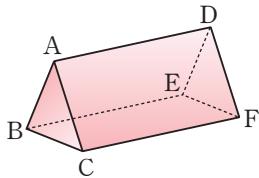
그렇다면 우리가 살고 있는 3차원 공간에서는 인식할 수 없지만 4차원 공간에서는 인식할 수 있는 도형이 있지 않을까? 독일의 수학자 클라인(Klein, F. C., 1849~1925)이 만든 클라인의 병은 그 형태를 유지한 채 3차원 공간 속에 집어넣을 수 없다. 따라서 3차원 공간에서는 클라인의 병의 전체적인 모습을 인식할 수 없고 4차원 공간에서야 비로소 그 모습을 인식할 수 있다. 클라인의 병은 안과 밖을 구분할 수 없어서 병 안에 물을 넣으면 이 병에 구멍이 없음에도 불구하고 물이 병 밖으로 빠져나오는 특이한 성질을 가지고 있다고 한다.

[참고 자료: 세야마 시로, “공상에 빠진 수학자가 들려주는 상상력의 공식”]



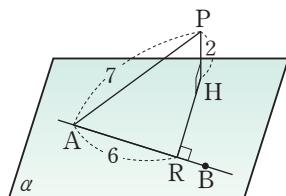
대단원 학습 평가

- **1** 오른쪽 그림의 삼각
기둥에서 모서리
AB와 꼬인 위치에
있는 모서리의 개수
를 a , 평면 ABC와 평행한 모서리의 개수를
 b 라고 할 때, ab 의 값을 구하시오.

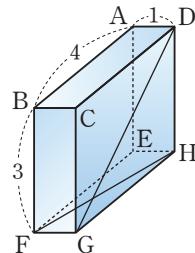


- **2** 서로 다른 세 직선 l, m, n 과 서로 다른 세 평면 α, β, γ 에 대하여 다음 중 항상 옳은 것은?
 ① $\alpha \perp \beta, \alpha \perp \gamma$ 이면 $\beta \parallel \gamma$
 ② $l \perp m, m \perp n$ 이면 $l \perp n$
 ③ $l \parallel \alpha, \alpha \perp \beta$ 이면 $l \parallel \beta$
 ④ $l \perp \alpha, \alpha \parallel \beta$ 이면 $l \perp \beta$
 ⑤ $l \perp \alpha, m \perp \alpha$ 이면 $l \perp m$

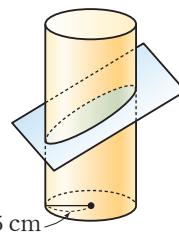
- **3** 다음 그림과 같이 평면 α 위에 있지 않은 한 점 P에서 α 에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 α 위의 직선 AB에 내린 수선의 발을 R라고 하자. $\overline{AR}=6$, $\overline{AP}=7$, $\overline{PH}=2$ 일 때, 선분 HR의 길이를 구하시오.



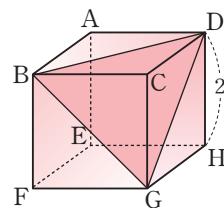
- **4** 오른쪽 그림과 같이
 $\overline{AD}=1$, $\overline{AB}=4$,
 $\overline{BF}=3$ 인 직육면체에서
두 직선 DG, FH가 이루
는 각의 크기를 θ 라고 할
때, $\cos \theta$ 의 값을 구하
시오.



- **5** 오른쪽 그림과 같이 밑
면의 반지름의 길이가
5 cm인 원기둥을 평면
으로 잘랐을 때 생기는
단면은 타원이다. 평면
과 원기둥의 밑면이 이루는 각의 크기가 30°
일 때, 타원의 장축의 길이를 구하시오.



- **6** 오른쪽 그림과 같이 한
모서리의 길이가 2인
정육면체에서 삼각형
BCD의 평면 BGD 위
로의 정사영의 넓이를
구하시오.



- 7 세 점 $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(3, -1, 0)$ 에서 같은 거리에 있는 xy 평면 위의 점 P의 좌표를 구하시오.

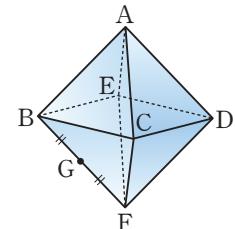
- 8 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 3인 정육면체에서 삼각형 BED 의 무게중심이 대각선 AG 를 $1:m$ 으로 내분할 때, m 의 값을 구하시오.
-

- 9 점 $A(4, 5, 3)$ 과 구 $x^2+y^2+z^2-4x-6y+2z+10=0$ 위를 움직이는 점 P 사이의 거리의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라고 할 때, Mm 의 값을 구하시오.

서술형문제

[10~15] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

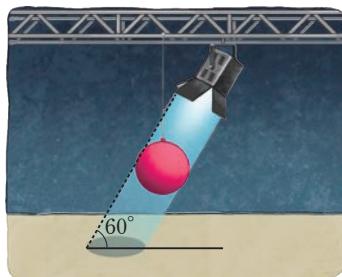
- 10 오른쪽 그림과 같은 정팔면체에서 모서리 BF 의 중점을 G 라고 할 때, 세 점 C, E, G , 세 직선 AB, AD, DF 로 만들 수 있는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오.



- 11 오른쪽 그림의 사면체에서 두 평면 ABC , BCD 가 이루는 각의 크기는 30° , $\overline{BC}=6$, 삼각형 ABC 의 넓이는 24일 때, 점 A에서 평면 BCD 에 내린 수선의 길이를 구하시오.
-

- 12 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 2인 정육면체에서 두 모서리 AD, FG 의 중점을 각각 I, J 라고 두 평면 $BJHI, ABCD$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.
 (1) 사각형 $BJHI$ 의 넓이를 구하시오.
 (2) $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.
-

- 13 다음 그림과 같이 구 모양의 장식물이 설치되어 있고 천장에서 바닥과 60° 의 각을 이루면서 조명을 비추고 있다. 장식물의 그림자의 넓이가 $2\sqrt{3}\pi$ 일 때, 구 모양의 장식물의 부피를 구하시오.

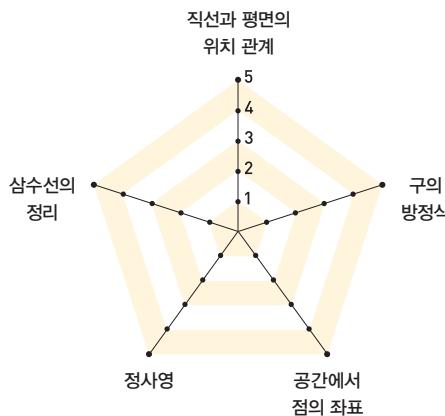


- 14 두 점 $A(1, 3, 7)$, $B(2, 1, 4)$ 에 대하여 직선 AB 와 xy 평면이 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오.

- 15 구 $(x-2)^2 + (y-3)^2 + z^2 = 4$ 가 xy 평면과 만나서 생기는 원을 C 라고 하자. 이때 점 $P(-1, -1, 4)$ 에서 원 C 에 이르는 최단 거리를 구하시오.

자기 평가

- 1 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 아래 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.



|성취수준|

- 1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
- 2수준: 개념을 일부 이해하였다.
- 3수준: 문제를 일부 해결하였다.
- 4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
- 5수준: 문제를 모두 해결하였다.

이해가 부족한 부분은
본문 내용을 복습!
문제가 더 필요하면
수학 익힘책 160쪽으로!



- 2 이 단원에서 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 아쉬웠던 점이나 더 알고 싶은 점을 적어 보자.

새로운 세상을 창조하는

가상 현실 전문가

가상 현실 프로그램을
이용하여 비행기 조종 훈련을
할 수 있다니 정말 놀라워요.
관련된 직업을 가지고 싶은데
어떻게 하면 될까요?



가상 현실 프로그램을
개발하는 사람을 가상 현실 전문가라고 해요.
가상 현실 전문가가 하는 일을 자세히
설명해 줄게요.



■ 가상 현실 전문가가 하는 일은?

- 가상 현실 전문가는 사용자가 원하는 가상 세계가 무엇인지 파악하여 실제의 느낌을 가질 수 있도록 가상 현실 시스템을 디자인한다. 이때 Visual basic, C++ 등과 같은 컴퓨터 프로그램 언어와 3차원 컴퓨터 그래픽 제어 기술을 활용하여 프로그래밍한 후 디자인 감각을 더하여 사물을 스케치하고, 색 및 질감을 입혀 시스템을 완성한다.

■ 가상 현실 전문가가 되려면?

- 가상 현실 전문가가 되기 위해서는 전자 공학, 통신 공학, 컴퓨터 과학 등 관련된 학문에 대한 폭넓은 지식이 필요하다. 또 가상 현실 전문가는 사용자가 원하는 가상 현실 상황을 종합적으로 분석할 수 있어야 하므로, 거시적인 안목과 분석력, 창의력이 요구되며 공간도형에 대한 이해 및 공간 감각 능력이 특히 중요하다.

[참고 자료: 커리어넷, <http://www.career.go.kr>]

스스로 공부하는
수학 익힘책

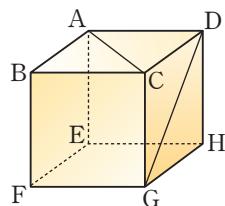
- I 이차곡선 152
- II 평면벡터 156
- III 공간도형과 공간좌표 160

- 1** 다음 보기 중 평면이 항상 결정되는 것을 있 는 대로 고르시오. | 3점 |

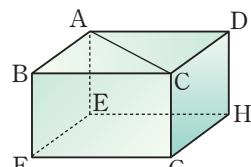
• 보기 •

- ㄱ. 서로 수직인 두 직선
- ㄴ. 서로 평행한 두 직선
- ㄷ. 서로 다른 세 점

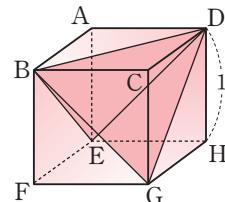
- 2** 오른쪽 그림의 정육면체에서 두 직선 AC, DG가 이루는 각의 크 기를 구하시오. | 2점 |



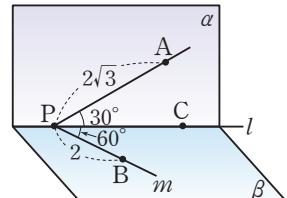
- 3** 오른쪽 그림과 같은 직육면체에서 세 꼭짓점을 택하여 만들 수 있는 평면 중 직 선 AC를 포함하는 서로 다른 평면의 개수를 구하시오. | 3점 |



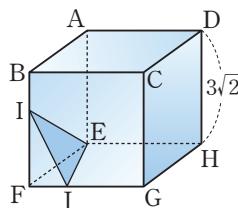
- 4** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 1인 정육면체에서 평면 BED, 평면 BGD가 이루는 각의 크기를 θ 라고 할 때, $\cos \theta$ 의 값을 구하시오. | 4점 |



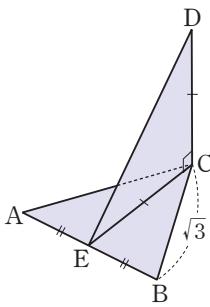
- 5** 오른쪽 그림과 같 이 두 평면 α , β 는 수직이고, 직 선 l 은 두 평면 α , β 의 교선이다. 평면 α 위의 점 A, 평면 β 위의 점 B, 직선 l 위의 두 점 P, C에 대하여 $\overline{AP}=2\sqrt{3}$, $\overline{BP}=2$, $\angle APC=30^\circ$, $\angle BPC=60^\circ$ 일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오. | 3점 |



- 6** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 $3\sqrt{2}$ 인 정육면체에서 모서리 BF, 모서리 FG를 1 : 2로 내분 하는 점을 각각 I, J라고 할 때, 삼각형 IJE의 넓이를 구하시오. | 4점 |

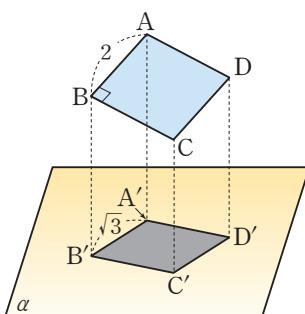


- 7** 오른쪽 그림에서 삼각형 ABC는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 정삼각형이고, 점 E는 선분 AB의 중점이다. \overline{CD} 가 평면 ABC에 수직이고 삼각형 DEC는 $\overline{CD} = \overline{CE}$ 인 이등변 삼각형일 때, 선분 AD의 길이를 구하시오.



| 3점 |

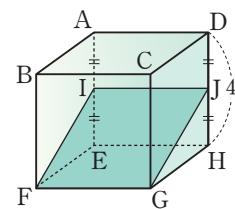
- 8** 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정사각형 ABCD에 대하여 네 꼭짓점 A, B, C, D는 평면 α 위에 있지 않고, 대각선 BD는 평면 α 와 평행하다. 정사각형 ABCD의 평면 α 위로의 정사영이 한 변의 길이가 $\sqrt{3}$ 인 마름모 A'B'C'D'일 때, 정사각형 ABCD와 평면 α 가 이루는 각의 크기를 구하시오. | 4점 |



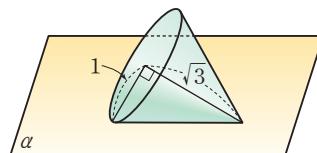
- 9** 두 평면 α, β 가 이루는 각의 크기가 45° 이고, 평면 β 위에 반지름의 길이가 2인 원이 있다. 이 원의 지름에 대하여 지름의 평면 α 위로의 정사영의 길이를 x 라고 할 때, x 의 최댓값과 최솟값을 구하시오. | 4점 |

- 10** 오른쪽 그림과 같이

한 모서리의 길이가 4인 정육면체에서 모서리 AE, DH의 중점 I, J라고 할 때, 사각형 BFGC의 평면 IFGJ 위로의 정사영의 넓이를 구하시오. | 3점 |



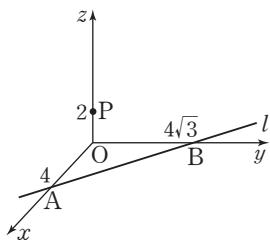
- 11** 다음 그림은 밑면의 반지름의 길이가 1이고 높이가 $\sqrt{3}$ 인 원뿔을 모선이 평면 α 위에 있도록 놓은 것이다. 이 원뿔의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S 라고 할 때, $4S$ 의 값을 구하시오. | 4점 |



- 12** 두 점 $A(1, -1, 3)$, $B(-3, 5, -2)$ 에서 같은 거리에 있는 y 축 위의 점 P 의 좌표를 구하시오. | 3점 |

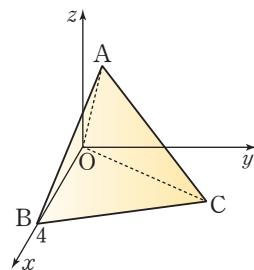
- 13** 세 점 $A(-1, 2, 0)$, $B(0, 0, -1)$, $C(k, k-1, -2)$ 에 대하여 삼각형 ABC 가 선분 BC 를 빗변으로 하는 직각삼각형일 때, 상수 k 의 값을 구하시오. | 3점 |

- 14** 다음 그림과 같이 두 점 $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4\sqrt{3}, 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $P(0, 0, 2)$ 와 직선 l 사이의 거리를 구하시오. | 3점 |



- 15** 두 점 $A(2, 2, 1)$, $B(5, 2, 3)$ 과 xy 평면 위의 점 P , zx 평면 위의 점 Q 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{PQ} + \overline{QB}$ 의 최솟값을 구하시오. | 4점 |

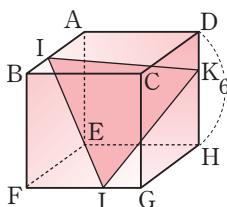
- 16** 다음 그림은 한 모서리의 길이가 4인 정사면체를 꼭짓점 O 는 원점에, 꼭짓점 B 는 x 축 위에, 꼭짓점 C 는 xy 평면 위에 놓은 것이다. 이때 점 A 의 좌표를 구하시오. | 4점 |



- 17** 세 점 $A(a, b, c)$, $B(-5, 1, -2)$, $C(-1, 4, 7)$ 을 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC의 무게중심의 좌표가 $(1, -1, 3)$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하시오. | 2점 |

- 18** 오른쪽 그림과 같이 한 모서리의 길이가 6인 정육면체에서 모서리 AB, FG, HD를 2 : 1로 내분하는 점

을 각각 I, J, K라 하고 삼각형 IJK의 무게 중심을 M이라고 할 때, 선분 EM의 길이를 구하시오. | 3점 |



- 19** 두 점 $A(2, 3, -2)$, $B(a, b, c)$ 에 대하여 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점이 zx 평면 위에 있고, 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점이 y 축 위에 있을 때, 점 B의 좌표를 구하시오. | 3점 |

- 20** 네 점 $(0, 0, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(-1, 0, 0)$, $(3, 1, 2)$ 를 지나는 구의 방정식을 구하시오.

| 3점 |

- 21** 점 $P(-2, 5, 5)$ 를 지나고 xy 평면, yz 평면, zx 평면에 동시에 접하는 두 구의 중심 사이의 거리를 구하시오. | 4점 |

- 22** 두 점 $A(0, 1, -1)$, $B(-2, 5, 1)$ 로부터 거리의 비가 1 : 2인 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오. | 3점 |

- 23** 두 구 $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 14$, $(x+k)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 9$ 가 각각 zx 평면과 만나서 생기는 두 원이 서로 외접할 때, 실수 k 가 될 수 있는 모든 값의 합을 구하시오. | 4점 |