Ⅱ 평면벡터

대단원 포트폴리오

이 단원을 학습하면서 다음 중 하나를 선택하여 포트폴리오를 만들어 보자.

- [ ] 수학 독후감
- [ ] 수학 마인드맵
- [ ] 수학 일기
- [ ] 수학 신문
- [ ] 수학 포스터
- [ ] 수학사 보고서

예시와 길잡이
▶ 148쪽

‘평면벡터’는 왜 배울까?

하늘을 날아가는 비행기의 속도, 일기도에서 바람의 속도,
썰매를 밀거나 끄는 힘 등은 크기와 방향을 모두 가지는 양이다.
이러한 물리량을 탐구하고 이해하는 도구가 벡터이다.
벡터는 자연 과학과 공학 등 다양한 분야에 필요한 기본 소양을 기르는 데 도움이 된다.

이 단원에서 학습할 내용을 알아보고 나의 학습 계획을 적어 보자.

학습 내용

- 벡터의 뜻
- 벡터의 연산
- 평면벡터의 성분
- 평면벡터의 내적
- 직선과 원의 방정식

학습 계획

나의 학습 계획 예시

- 오답 노트를 작성하겠다.
- 수업에 적극적으로 참여하겠다.
- 문제를 많이 풀어 보겠다.
- 끈기 있게 노력하겠다.

1 벡터의 연산

수학 + 실생활

바람 자루는 바람의 방향과 세기를 한눈에 확인할 수 있는 장치이다. 바람 자루가 얼마나 팽팽하게 펼쳐졌는지를 보면 바람의 세기를 알 수 있고, 펼쳐진 방향을 보면 바람의 방향을 알 수 있다.

비행장의 활주로 부근은 예기치 않게 돌풍이나 회오리바람이 불 수 있기 때문에 항공기 조종사들은 이륙하거나 착륙할 때, 활주로 부근에 있는 바람 자루를 육안으로 확인한다.

[참고 자료: Federal Aviation Administration, “Pilot's Handbook of Aeronautical Knowledge”]

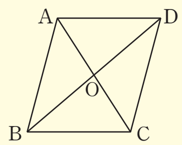
“크기와 방향을 동시에 어떻게 나타낼 수 있을까?”

준 | 비 | 학 | 습

1 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라고 할 때, 다음을 구하시오.

(1) 선분 AB와 평행한 선분

(2) $\overline{\mathrm{AC}}=2$일 때, 선분 AO의 길이



2 다음 등식을 만족시키는 x를 a, b로 나타내시오.

(1) $x+3a=-2(x-3b)$

(2) $2a-b+3x=2(3a-2b+x)$

01 벡터의 뜻

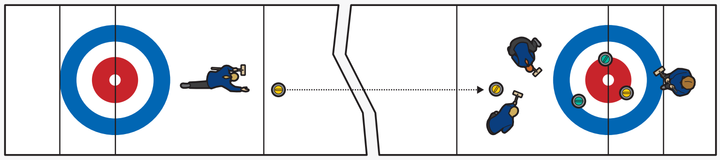
• 벡터의 뜻을 안다.

벡터는 무엇일까?

개 념 열 기

컬링은 스코틀랜드에서 유래되었으며 1998년 일본 나가노 동계 올림픽에서 정식 종목으로 채택되었다.

동계 올림픽 종목 중 하나인 컬링은 두 팀이 빙판에서 스톤이라 부르는 둥글고 납작한 돌을 미끄러뜨려 표적 안에 넣어 승패를 겨루는 경기이다.



다음 중 스톤을 표적 안에 정확하게 넣기 위하여 고려해야 할 것을 모두 고르시오.

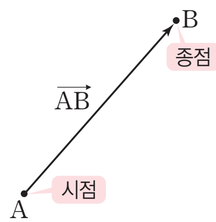
스톤을 미끄러뜨리는 힘의 크기, 스톤을 미끄러뜨리는 방향, 운동복의 색

길이, 넓이, 부피, 속력 등은 크기만을 가지므로 그 양을 실수로 나타낼 수 있다. 그러나 속도, 가속도, 힘 등은 크기는 물론 방향도 함께 표시해야 그 양을 나타낼 수 있다.

이와 같이 크기와 방향을 함께 가지는 양을 **벡터**라 하고, 평면에서의 벡터를 **평면벡터**라고 한다.

크기만을 가지는 양을 스칼라라고 한다.

벡터는 오른쪽 그림과 같이 화살표를 사용하여 그 크기와 방향을 나타낸다. 이때 화살표의 길이는 **벡터의 크기**, 화살표의 방향은 벡터의 방향을 나타낸다.



방향이 점 A에서 점 B로 향하고 크기가 선분 AB의 길이와 같은 벡터를 기호로

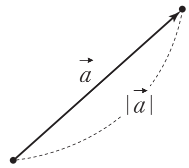
$$\overrightarrow{AB}$$

와 같이 나타내고, 점 A를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **시점**, 점 B를 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 **종점**이라고 한다.

또 벡터를 한 문자로 나타낼 때는 기호로 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, …와 같이 나타낸다.

벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 $|\overrightarrow{AB}|$와 같이 나타낸다.

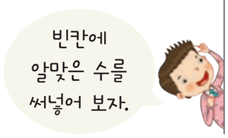
벡터 $\vec{a}$의 크기는 기호로 $|\vec{a}|$와 같이 나타낸다. 특히 크기가 1인 벡터를 **단위벡터**라고 한다.



$\overrightarrow{AA}=\vec{0}$, $\overrightarrow{BB}=\vec{0}$

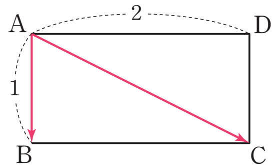
한편 시점과 종점이 일치하는 벡터를 **영벡터**라 하고, 기호로 $\vec{0}$와 같이 나타낸다. 영벡터의 크기는 0이고, 그 방향은 생각하지 않는다.

스스로 확인하기



오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=1$, $\overline{AD}=2$인 직사각형 ABCD에서

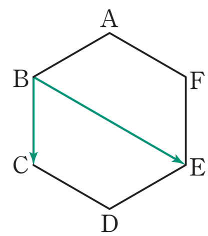
$|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\square$



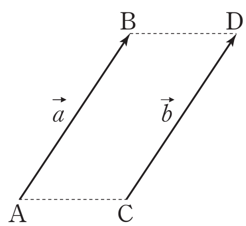
문제 01

오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 다음을 구하시오.

(1) $|\overrightarrow{BC}|$ (2) $|\overrightarrow{BE}|$



오른쪽 그림에서 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 평행이동하여 벡터 $\overrightarrow{CD}$와 겹쳐진다고 할 때, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$는 시점은 다르지만 그 크기와 방향이 각각 같다.



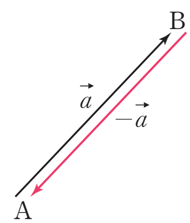
이와 같이 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 크기와 방향이 각각 같을 때, 두 벡터는 서로 같다고 하고, 기호로

$$\vec{a}=\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.

한 벡터를 평행이동하여 겹쳐지는 벡터는 모두 같은 벡터이다.

한편 오른쪽 그림의 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BA}$는 크기는 같지만 방향이 반대이다.



이와 같이 벡터 $\vec{a}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터를 기호로

$$-\vec{a}$$

와 같이 나타낸다.

$\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$

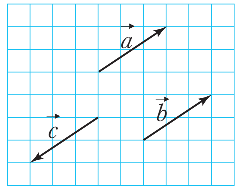
스스로 확인하기

오른쪽 그림에서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 크기와 방향이 각각 같으므로

$\vec{a}=\vec{b}$

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$는 크기는 같지만 방향이 반대이므로

$\vec{a}=-\vec{c}$

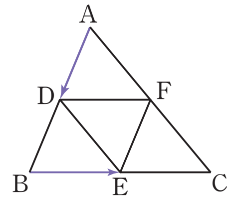


문제 02

오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 할 때, 다음 벡터를 모두 구하시오.

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$와 같은 벡터

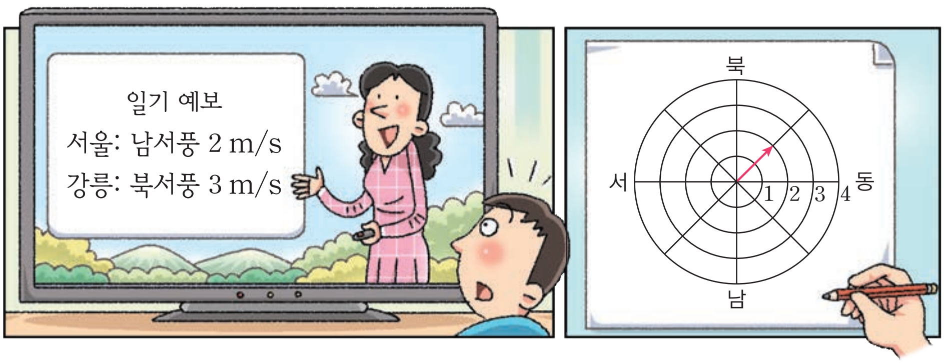
(2) $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터



문제 03 수학 + 과학

다음은 일기 예보를 보고 서울의 바람의 속도를 벡터로 나타낸 것이다. 강릉의 바람의 속도를 벡터로 나타내시오.

'남서풍 2 m/s'는 남서쪽에서 2 m/s의 속력으로 불어오는 바람을 말한다.



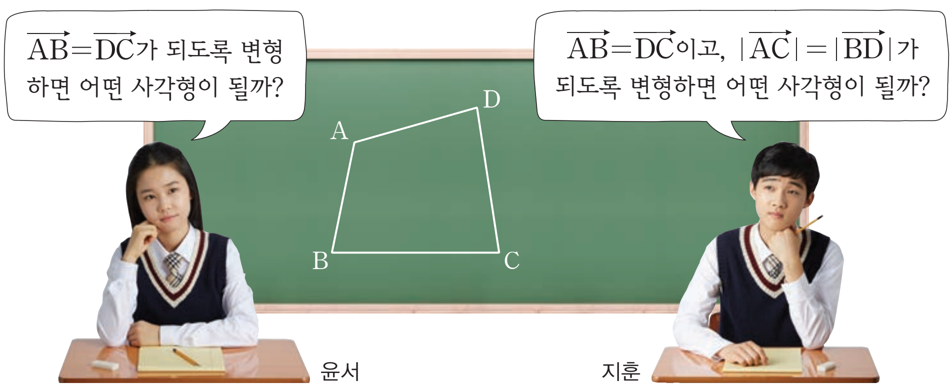
의사소통

수학 역량 기르기

설명할 때는

✔ 자신의 의견을 논리적으로 설명한다.

다음 사각형 ABCD에 대하여 두 학생의 질문에 답하고, 그 이유를 설명해 보자.



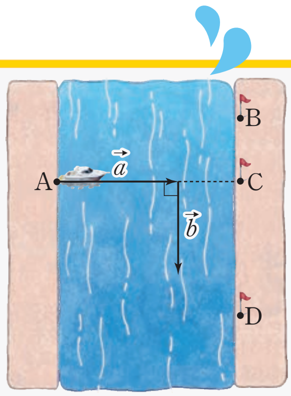
02 벡터의 덧셈과 뺄셈

• 벡터의 덧셈, 뺄셈을 할 수 있다.

벡터의 덧셈은 어떻게 할까?

개념 열기

오른쪽 그림에서 벡터 $\vec{a}$는 배가 출발할 때의 속도, 벡터 $\vec{b}$는 강물의 속도를 나타낸 것이다. 지점 A에서 출발한 배가 일정한 속도로 움직일 때, 건너편의 세 지점 B, C, D 중 어느 지점에 도착할지 예측하시오.



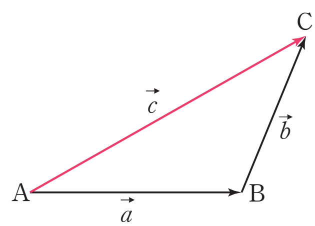
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 덧셈에 대하여 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡을 때, 벡터 $\vec{c}=\overrightarrow{AC}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 합이라 하고, 기호로

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \text{ 또는 } \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

와 같이 나타낸다.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

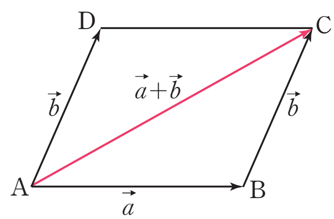


또 평행사변형을 이용하여 두 벡터의 덧셈을 나타낼 수도 있다.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

이다.

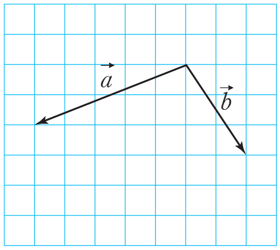


특히 $\vec{a}+\vec{0}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\vec{a}$이다.

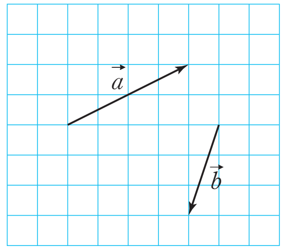
또 $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$이므로 $\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}$이다.

문제 01 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음과 같을 때, $\vec{a}+\vec{b}$를 그림으로 나타내시오.

(1)



(2)

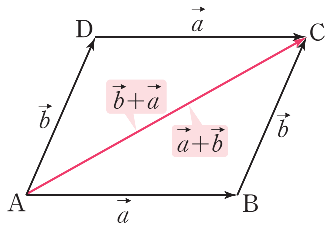


벡터의 덧셈에 대한 성질을 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$가 되도록 세 점 A, B, C를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 D를 잡으면 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$이므로

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$$

이다.



따라서

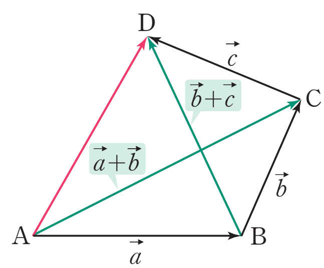
$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 교환법칙이 성립한다.

또 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{c}=\overrightarrow{CD}$가 되도록 네 점 A, B, C, D를 잡으면

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}$$
$$=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$$
$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$$
$$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$$

이다.



따라서

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

이므로 벡터의 덧셈에 대한 결합법칙이 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

벡터의 덧셈에 대한 성질

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

❶ $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (교환법칙)

❷ $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (결합법칙)

$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$를 간단히 $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$와 같이 나타낸다.

문제 02

다음을 간단히 하시오.

(1) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}$ (2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}$

벡터의 뺄셈은 어떻게 할까?

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 뺄셈에 대하여 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}$와 $-\vec{b}$의 합 $\vec{a}+(-\vec{b})$를 $\vec{a}$에서 $\vec{b}$를 뺀 차라 하고, 기호로

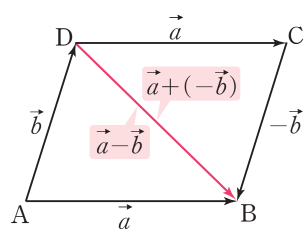
$$\vec{a}-\vec{b}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$$

이다.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 오른쪽 그림과 같이 $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{AD}$가 되도록 세 점 A, B, D를 잡고, 사각형 ABCD가 평행사변형이 되도록 점 C를 잡으면 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$이므로



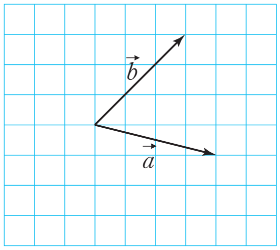
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}&=\overrightarrow{AB}+(-\overrightarrow{AD})\\&=\overrightarrow{DC}+(-\overrightarrow{BC})\\&=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\\&=\overrightarrow{DB}\end{aligned}$$

이다.

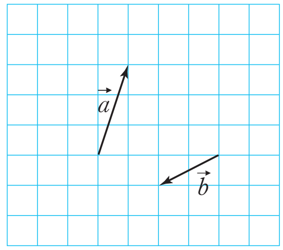
$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}$

문제 03 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 다음과 같을 때, $\vec{a}-\vec{b}$를 그림으로 나타내시오.

(1)

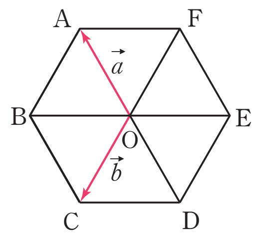


(2)



예제 1

오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF에서 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



(1) $\overrightarrow{DF}$ (2) $\overrightarrow{CD}$

풀이 (1) $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{CA}$

$=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$

$=\vec{a}-\vec{b}$

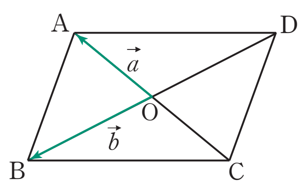
(2) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$

$=-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}$

$=-\vec{a}-\vec{b}$

답 (1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $-\vec{a}-\vec{b}$

문제 04 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 두 대각선의 교점을 O라 하고 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



(1) $\overrightarrow{DC}$ (2) $\overrightarrow{AD}$

03 벡터의 실수배

• 벡터의 실수배를 할 수 있다.

벡터의 실수배는 어떻게 할까?

개 념 열 기

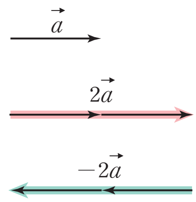
두 사람이 각각 자동차를 미는 힘의 크기는 서로 같다. 한 사람이 앞쪽 방향으로 자동차를 미는 힘을 벡터 $\vec{a}$라고 하자.

1 두 사람이 앞쪽 방향으로 자동차를 미는 힘의 합을 벡터 $\vec{a}$를 이용하여 나타내시오.

2 두 사람이 **1**과 반대 방향으로 자동차를 미는 힘의 합을 벡터 $\vec{a}$를 이용하여 나타내시오.

위의 개념 열기 **1**에서 두 사람이 미는 힘의 합 $\vec{a}+\vec{a}$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고, 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다. 이 벡터를 $2\vec{a}$로 나타낸다.

또 개념 열기 **2**에서 두 사람이 미는 힘의 합 $(-\vec{a})+(-\vec{a})$는 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고, 크기가 $|\vec{a}|$의 2배인 벡터이다. 이 벡터를 $-2\vec{a}$로 나타낸다.



일반적으로 실수 k와 벡터 $\vec{a}$의 곱 $k\vec{a}$를 다음과 같이 정의하고, 이것을 벡터 $\vec{a}$의 **실수배**라고 한다.

벡터의 실수배

실수 k와 벡터 $\vec{a}$에 대하여

❶ $\vec{a}\neq\vec{0}$일 때,

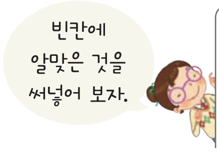
(i) $k>0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $k|\vec{a}|$인 벡터이다.

(ii) $k<0$이면, $k\vec{a}$는 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|k||\vec{a}|$인 벡터이다.

(iii) $k=0$이면, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

❷ $\vec{a}=\vec{0}$일 때, $k\vec{a}=\vec{0}$이다.

$1\vec{a}=\vec{a}$
$(-1)\vec{a}=-\vec{a}$
$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|$



스스로 확인하기

(1) 벡터 $\vec{a}$와 방향이 같고 크기가 $|\vec{a}|$의 $\frac{1}{2}$배인 벡터는 $\frac{1}{2}\vec{a}$이다.

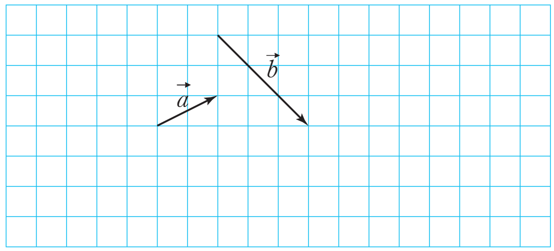
(2) 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{a}|$의 3배인 벡터는 $\boxed{\quad\quad}$이다.

문제 01 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 오른쪽과 같을 때, 다음을 그림으로 나타내시오.

(1) $-2\vec{a}$

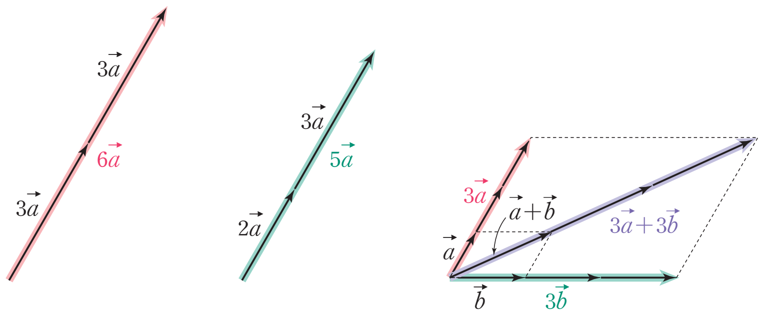
(2) $-3\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\vec{a}-2\vec{b}$



벡터의 실수배에 대한 성질을 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $2(3\vec{a})$, $2\vec{a}+3\vec{a}$, $3(\vec{a}+\vec{b})$는 다음 그림과 같이 각각 $6\vec{a}$, $5\vec{a}$, $3\vec{a}+3\vec{b}$이다.



일반적으로 벡터의 실수배에 대하여 다음이 성립한다.

벡터의 실수배에 대한 성질

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

❶ $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ (결합법칙)

❷ $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ (분배법칙)

❸ $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$ (분배법칙)

벡터의 연산은 벡터의 실수배에 대한 성질을 이용하여 다항식의 연산과 같은 방법으로 할 수 있다.

예제 1

$2(3\vec{a}+2\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{b})$를 간단히 하시오.

풀이 $2(3\vec{a}+2\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{b})=6\vec{a}+4\vec{b}-6\vec{a}+3\vec{b}$

$=(6-6)\vec{a}+(4+3)\vec{b}$

$=0\vec{a}+7\vec{b}=7\vec{b}$

답 $7\vec{b}$

문제 02 다음을 간단히 하시오.

(1) $-2\vec{b}+2(\vec{a}-4\vec{b})$

(2) $4(-\vec{a}+3\vec{b})-3(-\vec{a}+\vec{b})$

문제 03 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) $2\vec{x}+\vec{a}=3\vec{a}+4\vec{b}$

(2) $2\vec{a}+3\vec{x}=2(\vec{x}+4\vec{b})$

추론

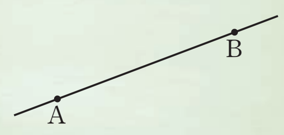
수학 역량 기르기

추측할 때는

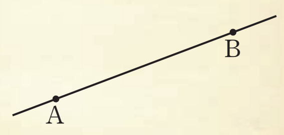
자신의 추측 과정이 옳은지 검토하고 정당화한다.

직선 AB 위의 점 P가 다음 조건을 만족시킬 때, 점 P의 위치를 추측해 보자.

(1) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}=\vec{0}$



(2) $\overrightarrow{AP}=2\overrightarrow{PB}$

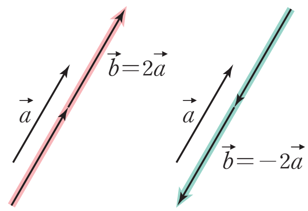


두 벡터의 평행 조건은 무엇일까?

오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$의 방향이 같거나 반대일 때, $\vec{a}$와 $\vec{b}$는 서로 평행하다고 하고, 기호로

$$\vec{a} /\!/ \vec{b}$$

와 같이 나타낸다.



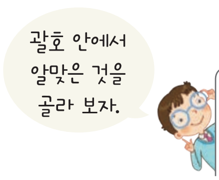
두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 모두 영벡터가 아닐 때, $\vec{a} /\!/ \vec{b}$이기 위한 필요충분조건은 한 벡터가 다른 벡터의 실수배인 것이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 벡터의 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)



스스로 확인하기

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$에 대하여 $\vec{p}=3\vec{a}-2\vec{b}$, $\vec{q}=-6\vec{a}+4\vec{b}$이면 $\vec{q}=-2\vec{p}$이므로 두 벡터 $\vec{p}$, $\vec{q}$는 서로 (평행하다, 평행하지 않다).

문제 04

세 벡터 $\vec{p}=3\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{q}=-\vec{a}+3\vec{b}$, $\vec{r}=2\vec{a}-2\vec{b}$에 대하여 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{p}+\vec{q}$, $\vec{q}+\vec{r}$는 서로 평행함을 보이시오.

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$(단, $k\neq0$)

⇕

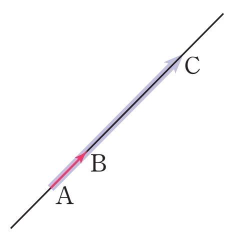
$\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$

⇕

세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

일반적으로 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재하면 $\overrightarrow{AB} /\!/ \overrightarrow{AC}$이므로 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.

역으로 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있으면 $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재한다.



예제 2

평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a},\ \overrightarrow{OB}=\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=4\vec{a}-3\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 보이시오.

생각열기

$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 k가 존재함을 보인다.

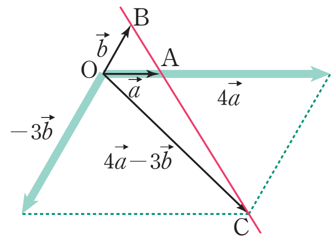
풀이 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내면

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a} \quad \cdots\cdots ①$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC}&=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}\\&=(4\vec{a}-3\vec{b})-\vec{a}\\&=3\vec{a}-3\vec{b} \quad \cdots\cdots ②\end{aligned}$$

①, ②에서 $\overrightarrow{AC}=-3\overrightarrow{AB}$

따라서 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있다.



답 풀이 참고

문제 05

평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}+2\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=2\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OC}=4\vec{a}-7\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C는 한 직선 위에 있음을 보이시오.

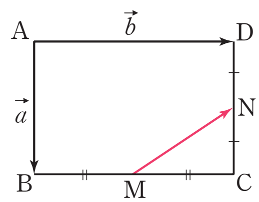
문제 해결

수학 역량 기르기

문제를 해결할 때는

✔ 문제의 조건과 정보를 파악하고 풀이 계획을 세운다.

오른쪽 그림과 같이 직사각형 ABCD의 두 변 BC, CD의 중점을 각각 M, N이라고 하자. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{MN}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내려고 한다. 다음 두 학생이 제시한 방법 중 하나를 택하여 풀어 보자.



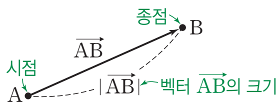
민준: 나는 두 벡터 $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$을 이용할 거야.

세민: 나는 벡터 $\overrightarrow{BD}$를 이용할 거야.

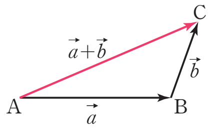
중단원 학습 점검

개념 정리

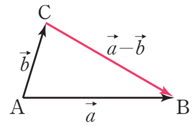
● 벡터



● 벡터의 덧셈과 뺄셈



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$

● 벡터의 실수배에 대한 성질

두 실수 k, l과 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

(1) $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$

(2) $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$, $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$

● 두 벡터의 평행 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$\vec{a} /\!/ \vec{b} \Longleftrightarrow \vec{b}=k\vec{a}$ (단, k는 0이 아닌 실수)

O, X 문제

다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

1 크기와 방향이 각각 같은 두 벡터는 서로 같은 벡터이다.

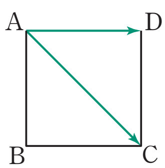
2 $|\vec{a}|=1$이면 벡터 $\vec{a}$는 단위벡터이다.

3 벡터 $\vec{a}$와 방향이 반대이고 크기가 $|\vec{a}|$의 4배인 벡터는 $4\vec{a}$이다.

4 $5\vec{a}-2\vec{a}=(5-2)\vec{a}=3\vec{a}$

기초 문제

1 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.



(1) 벡터 $\overrightarrow{AC}$의 크기

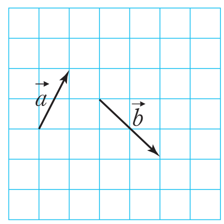
(2) 벡터 $\overrightarrow{AD}$와 같은 벡터

2 다음을 간단히 하시오.

(1) $4(2\vec{a}-\vec{b})-2(\vec{a}-3\vec{b})$

(2) $2(3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})-5(2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})$

3 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 오른쪽과 같을 때, 다음을 그림으로 나타내시오.



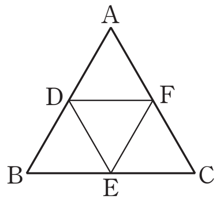
(1) $2\vec{a}$

(2) $-\vec{a}+\vec{b}$

4 서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 두 벡터 $k\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+6\vec{b}$가 서로 평행하도록 실수 k의 값을 정하시오.

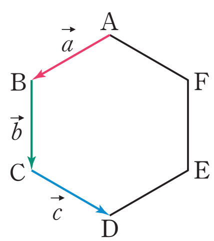
기본 문제

5 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 2인 정삼각형 ABC에서 세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 D, E, F라고 하자. 6개의 점 A, B, C, D, E, F를 시점과 종점으로 하는 벡터 중 서로 다른 단위벡터의 개수를 구하시오.

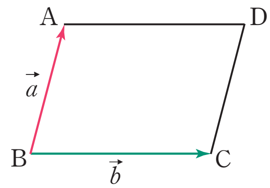


6 벡터 $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$를 간단히 하시오.

7 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$라고 할 때, 벡터 $\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$의 크기를 구하시오.



8 다음 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



9 다음 등식을 만족시키는 벡터 $\vec{x}$를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) $3(\vec{x}-2\vec{a})=4\vec{b}+\vec{x}$

(2) $3(2\vec{b}-\vec{x})+2(\vec{x}-3\vec{a})=5\vec{b}$

10 두 벡터 $\vec{x}$, $\vec{y}$에 대하여 $2\vec{x}+5\vec{y}=\vec{a}$, $\vec{x}-2\vec{y}=\vec{b}$일 때, $\vec{x}$, $\vec{y}$를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

11 서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{p}=2\vec{a}-3\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{r}=k\vec{a}+5\vec{b}$일 때, 두 벡터 $\vec{q}-\vec{r}$, $\vec{p}+\vec{q}$가 서로 평행하도록 실수 k의 값을 정하시오.

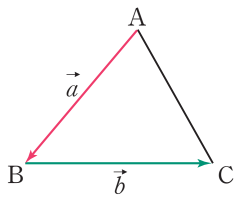
12 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 서로 평행하지 않고, 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=3\vec{a}-\vec{b},\ \overrightarrow{OB}=\vec{a}+2\vec{b},$$
$$\overrightarrow{OC}=-\vec{a}+k\vec{b}$$

일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 실수 k의 값을 정하시오.

도전 문제

13 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음을 작은 것부터 차례로 나열하시오.



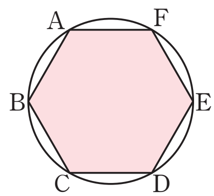
$$|\vec{a}|-|\vec{b}|,\ |\vec{a}|+|\vec{b}|,\ |\vec{a}+\vec{b}|$$

14 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$의 두 초점을 F, F′이라고 하자. 이 타원 위의 점 P가 $|\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OF}|=3$을 만족시킬 때, 벡터 $\overrightarrow{PF}$의 크기를 구하시오. (단, O는 원점)

15 다음 그림과 같이 원에 내접하는 정육각형 ABCDEF에서

$$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}|=24$$

일 때, 정육각형 ABCDEF의 넓이를 구하시오.



16 원 $(x-2)^2+y^2=3$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\overrightarrow{OQ}=\frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|}$를 만족시키는 점 Q가 그리는 도형의 길이를 구하시오. (단, O는 원점)

| **창의적 활동 + 융합적 사고**를 위한 |

수행 과제

의사소통

활동 목표 물체가 움직이는 속도를 벡터의 덧셈, 뺄셈을 이용하여 구할 수 있다.

다음 글을 읽고, 물음에 답해 보자.

운동하는 관찰자가 물체의 운동을 관찰하면 물체의 속도가 다르게 느껴지는데 이러한 속도를 상대 속도라고 한다. 관찰자의 속도를 $\overrightarrow{v_A}$, 물체의 속도를 $\overrightarrow{v_B}$, 관찰자가 바라본 물체의 상대 속도를 $\vec{v}$로 나타낼 때, $\vec{v}=\overrightarrow{v_B}-\overrightarrow{v_A}$이다.

예를 들어 오른쪽 그림과 같이 버스 A는 시속 80 km, 승용차 B는 시속 70 km로 같은 방향으로 달리고 있을 때, 버스 A에 타고 있는 사람이 승용차 B를 바라본 상대 속도는 버스 A가 달리는 방향과 반대 방향으로 시속 10 km이다. 즉, 승용차 B가 뒤로 가는 것처럼 보인다.

1 다음 두 학생의 대화에서 여학생의 마지막 말을 벡터를 이용하여 설명해 보자.
(단, 비가 내리는 방향은 지면에 수직이다.)

사고 확산하기

2 오른쪽 그림과 같이 정류장에서 내린 지호와 버스가 동시에 출발하여 버스는 시속 20 km로 서쪽을 향해 가고, 지호는 시속 5 km로 남쪽을 향해 가고 있다. 지호가 바라본 버스의 상대 속도를 벡터로 나타내고, 그 속력을 구해 보자.
(단, 속력은 속도의 크기이다.)

자기 평가	
	벡터의 원리를 이용하여 과제를 해결하였는가?
	수학적 언어로 해결 과정을 명확하게 표현하였는가?
	과제 해결 방법을 점검하는 과정이 있었는가?

과학! 수학과 통하다

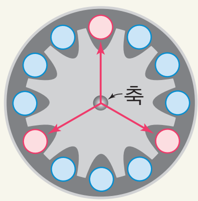
원심 분리기에도 벡터의 원리가?

세포 내에는 특정한 기능을 수행하도록 분화된 세포 소기관이 있다. 이 세포 소기관을 원심 분리기로 분리하면 각 소기관의 구성 성분과 구조 및 기능 등을 알 수 있다. 원심 분리기 내의 회전자에는 분리할 시료를 넣는 시험관이 있는데 보통 12개의 시험관이 축을 중심으로 대칭을 이루고 있다.

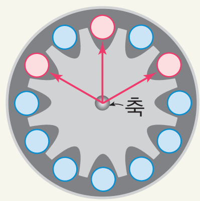
고속으로 회전하는 원심 분리기 내의 회전자는 균형이 잘 맞아야 하며 균형이 깨질 경우 회전자가 회전축에서 이탈하거나 회전축 자체가 파손될 수 있다. 따라서 종류와 무게가 같은 시료를 원심 분리하기 위해서는 회전축을 중심으로 대칭을 이루도록 시료를 넣어야 한다.

평면에서 축을 시점, 각각의 시료를 종점으로 하는 벡터를 생각해 보자. 종류와 무게가 같은 세 개의 시료를 원심 분리할 때, [그림 1]의 경우 세 벡터의 합은 $\vec{0}$가 되므로 시료를 바르게 넣은 것이고, [그림 2]의 경우 세 벡터의 합이 $\vec{0}$가 아니므로 시료를 잘못 넣은 것이다.

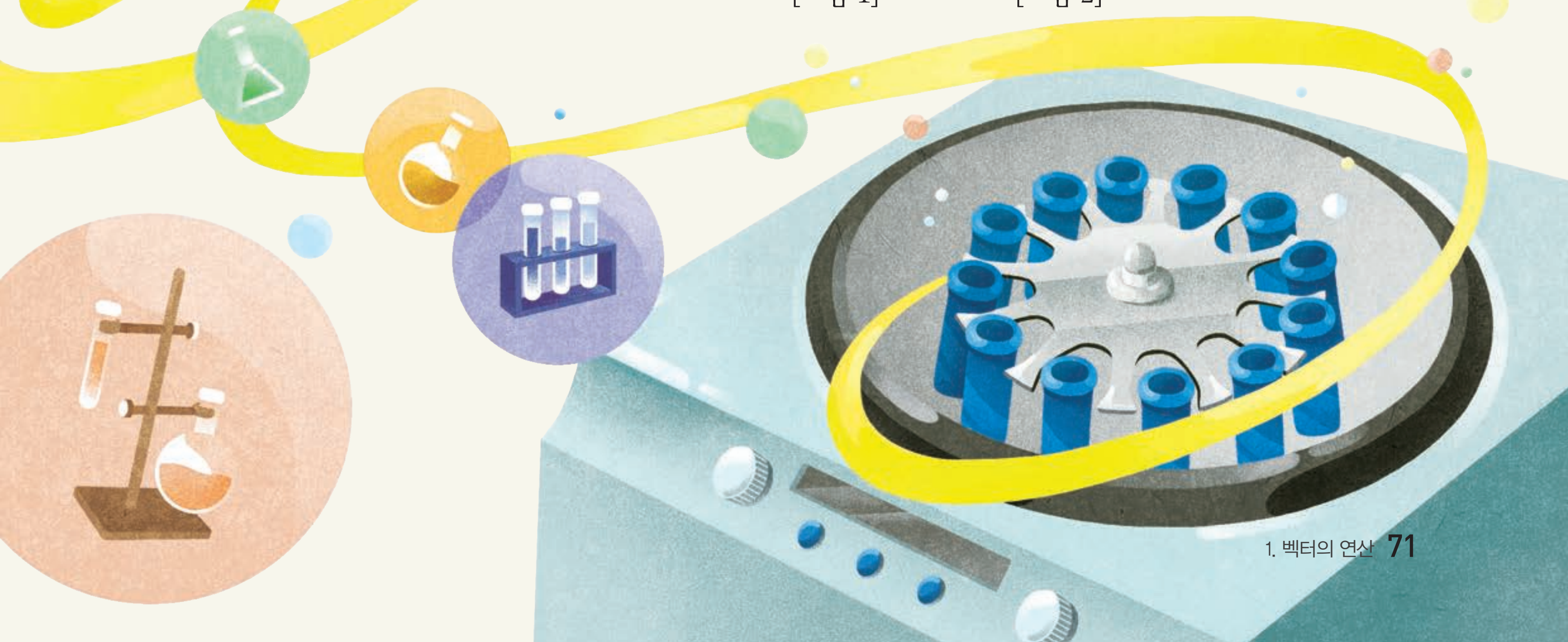
[참고 자료: 이근보 외, “쉬운 식품 분석”]



[그림 1]



[그림 2]



2 평면벡터의 성분과 내적

수학 + 역사

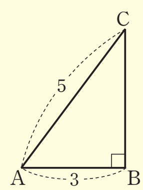
신기전은 조선 시대에 사용된 로켓 추진 화살로 세계에서 가장 오래된 로켓 병기로 알려져 있다. 신기전의 발사 장치인 신기전기는 둥근 나무통을 나무 상자 속에 쌓아 만든 것으로 동시에 10～15발씩 모두 100발을 발사할 수 있고, 발사 각도를 $0°$부터 $43°$까지 자유롭게 바꾸어 사정거리를 조절할 수 있다. 이렇게 비스듬히 쏘아 올린 화살의 속도는 지면과 평행한 방향의 벡터와 지면과 수직인 방향의 벡터의 합으로 나타낼 수 있다.

[참고 자료: 민승기, "조선의 무기와 갑옷"]

"벡터를 좌표를 이용하여 나타낼 수 있을까?"

준 | 비 | 학 | 습

1 오른쪽 그림과 같이 $\angle B=90°$인 직각삼각형 ABC에서 $\overline{AB}=3$, $\overline{CA}=5$일 때, $\cos A$의 값을 구하시오.



2 두 점 $A(-4,\ 2)$, $B(2,\ 5)$에 대하여 다음 점의 좌표를 구하시오.

(1) 선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점

(2) 선분 AB를 $2:1$로 외분하는 점

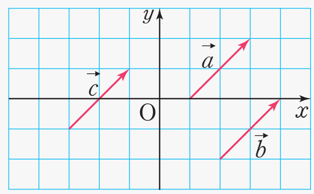
01 평면벡터의 성분

• 위치벡터의 뜻을 알고, 평면벡터와 좌표의 대응을 이해한다.

위치벡터는 무엇일까?

개 념 열 기

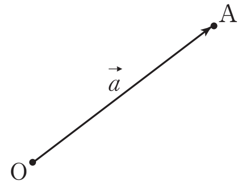
오른쪽 그림과 같이 좌표평면 위에 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$가 있다. 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 시점이 원점 O가 되도록 평행이동하여 나타내시오.



평면에서 한 점 O를 시점으로 정하면 임의의 점 A에 대하여

$$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$$

인 벡터 $\vec{a}$는 유일하게 정해진다.



역으로 임의의 벡터 $\vec{a}$에 대하여

$$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$$

인 점 A도 유일하게 정해진다.

따라서 시점을 한 점 O로 고정하면 평면의 점 A와 벡터 $\overrightarrow{OA}$는 일대일로 대응한다.

이때 정해진 점 O를 시점으로 하는 벡터 $\overrightarrow{OA}$를 점 A의 **위치벡터**라고 한다.

일반적으로 위치벡터의 시점 O는 좌표평면의 원점으로 잡는다.

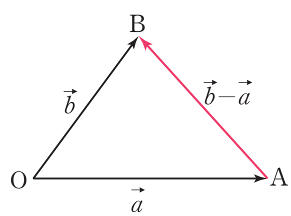
원점 O의 위치벡터는 $\vec{0}$이다.

벡터 $\overrightarrow{AB}$를 점 A와 점 B의 위치벡터로 나타내 보자.

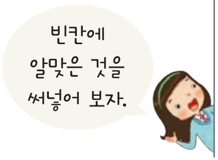
오른쪽 그림과 같이 두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 하면 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$이고,

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

이므로 다음이 성립한다.



$$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$$



스스로 확인하기

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 하면

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC} &= 2(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})-(\overrightarrow{OC}-\boxed{}) \\ &= 2(\vec{b}-\vec{a})-(\vec{c}-\vec{b}) \\ &= -2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c} \end{aligned}$$

문제 01

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, $\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{BC}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오.

예제 1

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0)$으로 내분하는 점 P의 위치벡터 $\vec{p}$는

$$\vec{p}=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$

임을 보이시오.

풀이 $|\overrightarrow{AP}|:|\overrightarrow{AB}|=m:(m+n)$이므로

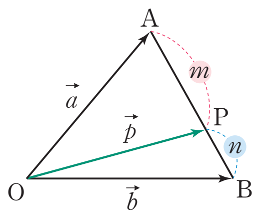
$$\overrightarrow{AP}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}$$

이때 $\overrightarrow{AP}=\vec{p}-\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$이므로

$$\vec{p}-\vec{a}=\frac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$$

따라서 $\vec{p}=\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}(\vec{b}-\vec{a})$

$$=\frac{m\vec{b}+n\vec{a}}{m+n}$$



답 풀이 참고

문제 02

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB를 $m:n(m>0,\ n>0,\ m\neq n)$으로 외분하는 점 Q의 위치벡터 $\vec{q}$는

$$\vec{q}=\frac{m\vec{b}-n\vec{a}}{m-n}$$

임을 보이시오.

문제 03

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 다음 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

(1) 선분 AB를 3 : 2로 내분하는 점 P

(2) 선분 AB를 2 : 1로 외분하는 점 Q

열린 **문제 04**

문제 03에서 비를 스스로 정하고, 선분 AB를 내분하는 점과 외분하는 점의 위치벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

예제 2

세 점 A, B, C의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$라고 할 때, 삼각형 ABC의 무게중심 G의 위치벡터 $\vec{g}$는

$$\vec{g}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$$

임을 보이시오.

생각열기

두 점 A, B의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$라고 할 때, 선분 AB의 중점 M의 위치벡터 $\vec{m}$은 $\vec{m}=\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$이다.

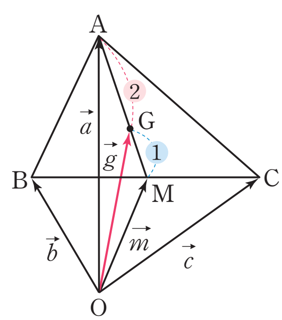
풀이 오른쪽 그림과 같이 선분 BC의 중점을 M, 점 M의 위치벡터를 $\vec{m}$이라고 하면

$$\vec{m}=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

이때 삼각형 ABC의 무게중심 G는 선분 AM을 2 : 1로 내분하는 점이므로

$$\vec{g}=\frac{2\vec{m}+\vec{a}}{3} \qquad \cdots\cdots ②$$

①을 ②에 대입하면 $\vec{g}=\dfrac{2\times\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}+\vec{a}}{3}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$



답 풀이 참고

문제 05

삼각형 ABC의 무게중심을 G라고 할 때, $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$임을 보이시오.

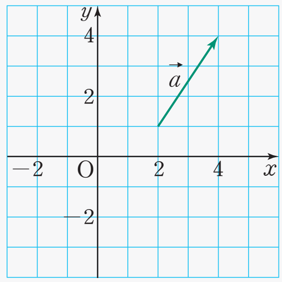
평면벡터의 성분은 무엇일까?

개 념 열 기

다음 물음에 답하시오.

1 오른쪽 그림에서 벡터 $\vec{a}$를 시점이 원점 O가 되도록 평행이동한 벡터의 종점의 좌표를 말하시오.

2 점 $(2,\ -1)$의 위치벡터를 그리시오.



좌표평면에서 위치벡터를 그 종점의 좌표를 이용하여 나타내 보자.

좌표평면에서 위치벡터 $\vec{a}$의 종점의 좌표가 $(a_1,\ a_2)$일 때, 벡터 $\vec{a}$는 점 $(a_1,\ a_2)$와 일대일로 대응한다.

이때 두 실수 a_1, a_2를 **벡터 $\vec{a}$의 성분**이라고 하며 a_1을 벡터 $\vec{a}$의 x성분, a_2를 벡터 $\vec{a}$의 y성분이라고 한다. 또 벡터 $\vec{a}$는 성분을 이용하여

$$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$$

와 같이 나타낸다.

좌표평면에서 방향이 x축, y축의 양의 방향이고 크기가 1인 위치벡터를 각각 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$라고 하자. 이때 $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$를 성분으로 나타내면

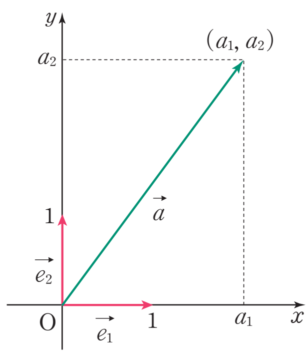
$$\vec{e_1}=(1,\ 0),\ \vec{e_2}=(0,\ 1)$$

이다.

따라서 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$는

$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2}$$

와 같이 나타낼 수 있다.



스스로 확인하기

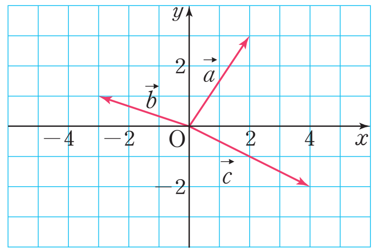
점 $\mathrm{A}(2,\ -3)$의 위치벡터를 $\vec{a}$라고 할 때, 벡터 $\vec{a}$를 성분으로 나타내면 $\vec{a}=(2,\ -3)$이고, $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$로 나타내면 $\vec{a}=2\vec{e_1}-3\vec{e_2}$이다.

문제 06

오른쪽 그림과 같은 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 다음 물음에 답하시오.

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 성분으로 나타내시오.

(2) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$를 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$로 나타내시오.

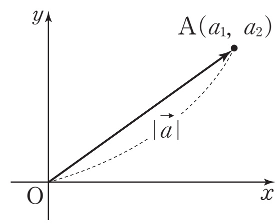


성분으로 나타낸 평면벡터의 크기와 두 평면벡터가 서로 같을 조건을 알아보자.

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$일 때, 원점 O와 점 A$(a_1,\ a_2)$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$이므로 벡터 $\vec{a}$의 크기는 선분 OA의 길이와 같다. 즉,

$$|\vec{a}|=\overline{\mathrm{OA}}=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$$

이다.



또 두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$에 대하여

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$$

가 성립한다.

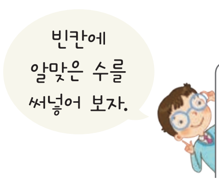
이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 크기와 두 평면벡터가 서로 같을 조건

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

① $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$

② $\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1,\ a_2=b_2$



스스로 확인하기

(1) $\vec{a}=(3,\ 4)$일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(2) $\vec{a}=(x,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ y)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$이면 $x=1$, $y=\square$

문제 07

다음 벡터의 크기를 구하시오.

(1) $\vec{a}=(-2,\ 3)$

(2) $\vec{b}=(1,\ -1)$

문제 08 두 벡터 $\vec{a}=(3,\ n-2)$, $\vec{b}=(m-3,\ 4-n)$에 대하여 $\vec{a}=\vec{b}$일 때, 두 실수 m, n의 값을 구하시오.

평면벡터의 성분에 의한 연산은 어떻게 할까?

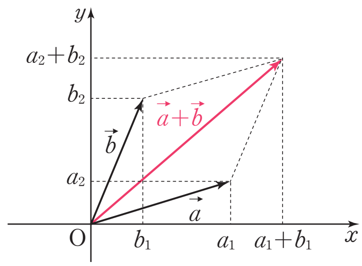
평면벡터의 덧셈, 뺄셈, 실수배의 성분에 대하여 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$를 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$로 나타내면

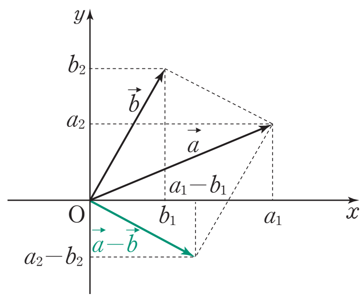
$$\vec{a}=a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2},\ \vec{b}=b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2}$$

이므로 다음이 성립한다.

❶ $$\begin{aligned}\vec{a}+\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})+(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1+b_1)\vec{e_1}+(a_2+b_2)\vec{e_2}\\&=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)\end{aligned}$$



❷ $$\begin{aligned}\vec{a}-\vec{b}&=(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})-(b_1\vec{e_1}+b_2\vec{e_2})\\&=(a_1-b_1)\vec{e_1}+(a_2-b_2)\vec{e_2}\\&=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)\end{aligned}$$



❸ k가 실수일 때

$$\begin{aligned}k\vec{a}&=k(a_1\vec{e_1}+a_2\vec{e_2})=ka_1\vec{e_1}+ka_2\vec{e_2}\\&=(ka_1,\ ka_2)\end{aligned}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

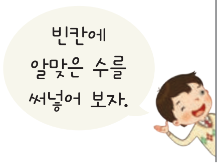
평면벡터의 성분에 의한 연산

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

❶ $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$

❷ $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,\ a_2-b_2)$

❸ $k\vec{a}=(ka_1,\ ka_2)$ (단, k는 실수)



스스로 확인하기

$\vec{a}=(1,\ 2)$, $\vec{b}=(-4,\ 3)$일 때

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(1+(-4),\ 2+3)=(-3,\ 5)$

(2) $3\vec{a}=3(1,\ 2)=(3,\ \boxed{})$

(3) $2\vec{a}-3\vec{b}=2(1,\ 2)-3(-4,\ 3)=(2,\ 4)-(-12,\ 9)=(\boxed{},\ -5)$

문제 09 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(0,\ -2)$, $\vec{c}=(1,\ 2)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내시오.

(1) $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$

(2) $2(\vec{a}-2\vec{b})-3(2\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}$

예제 3 $\vec{a}=(1,\ 0)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$, $\vec{c}=(1,\ -2)$일 때, $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 k, l의 값을 구하시오.

풀이 $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 성분으로 나타내면

$$\begin{aligned}(1,\ -2)&=k(1,\ 0)+l(1,\ 2)\\&=(k,\ 0)+(l,\ 2l)\\&=(k+l,\ 2l)\end{aligned}$$

두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

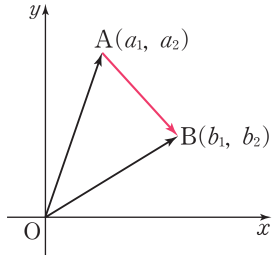
$k+l=1$, $2l=-2$

위의 두 식을 연립하여 풀면 $k=2$, $l=-1$

답 $k=2$, $l=-1$

문제 10 $\vec{a}=(2,\ 1)$, $\vec{b}=(3,\ -2)$, $\vec{c}=(-6,\ 11)$일 때, $\vec{c}=k\vec{a}+l\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 k, l의 값을 구하시오.

좌표평면 위의 두 점 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$에 대하여 평면벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고 그 크기를 구해 보자.



$\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2)$이므로

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)$$
$$=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$$

이고, 벡터 $\overrightarrow{AB}$의 크기는 다음과 같다.

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 성분과 크기

두 점 $A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$에 대하여

1. $\overrightarrow{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$
2. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$

빈칸에 알맞은 수를 써넣어 보자.

스스로 확인하기

두 점 $A(-1,\ 3)$, $B(4,\ 2)$에 대하여

$\overrightarrow{AB}=(4-(-1),\ 2-3)=(5,\ -1)$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{}^2+(-1)^2}=\sqrt{26}$

문제 11 두 점 $A(-1,\ 2)$, $B(2,\ -1)$에 대하여 벡터 $\overrightarrow{AB}$를 성분으로 나타내고, 그 크기를 구하시오.

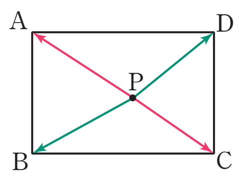
의사소통

수학 역량 기르기

설명할 때는

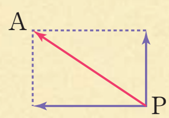
✔ 수학적 언어를 사용하여 자신의 생각을 정확하게 표현한다.

직사각형 ABCD와 그 내부의 임의의 점 P에 대하여 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PD}$가 성립함을 보이려고 한다. 다음 두 학생이 제시한 방법 중 하나를 택하여 풀고, 자신의 풀이 방법을 친구에게 설명해 보자.



윤아

각 벡터를 두 벡터의 합으로 나타내 볼까?



벡터는 성분으로 나타낼 수도 있으니까 직사각형을 좌표평면 위에 놓아 볼까?

현우

02 평면벡터의 내적

•두 평면벡터의 내적의 뜻을 알고, 이를 구할 수 있다.

평면벡터의 내적은 무엇일까?

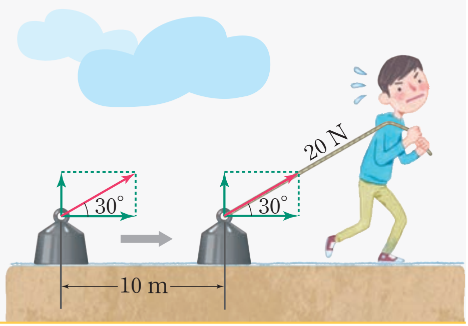
개념열기

물체에 힘을 작용하여 물체를 이동시켰을 때, 일의 양(J)은 다음과 같이 물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기(N)와 이동 거리(m)에 대한 식으로 나타내어진다.

(일의 양)=(물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기)×(이동 거리)

1 오른쪽 그림과 같이 지면과 30°의 방향으로 20 N의 힘을 작용하여 물체를 이동시켰을 때, 물체의 이동 방향으로 작용한 힘의 크기를 구하시오.

2 1에서 물체를 10 m 이동시켰을 때, 한 일의 양을 구하시오.

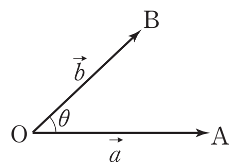


독일의 수학자 그라스만(Grassmann, H. G., 1809~1877)은 벡터의 내적을 정의하였다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$일 때,

$$\angle \mathrm{AOB}=\theta\,(0^\circ \le \theta \le 180^\circ)$$

를 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기라고 한다.



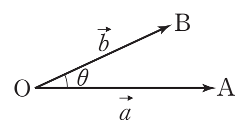
이때 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 **내적**을 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b}$$

와 같이 나타내고, 다음과 같이 정의한다.

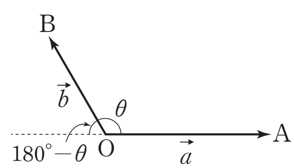
(i) $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



(ii) $90^\circ < \theta \le 180^\circ$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)$$



벡터의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 벡터가 아니라 실수이다.

또 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때는 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$으로 정한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적

두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여

(i) $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\theta$

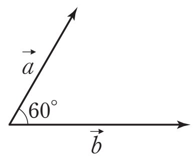
(ii) $90^\circ < \theta \le 180^\circ$일 때, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}||\vec{b}| \cos(180^\circ - \theta)$

$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}| \cos 0^\circ$
$= |\vec{a}|^2$

스스로 확인하기

오른쪽 그림과 같이 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 60°일 때, 두 벡터의 내적 $\vec{a} \cdot \vec{b}$는

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos 60^\circ = 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 3$$

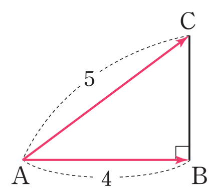


문제 01 $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 다음과 같을 때, $\vec{a} \cdot \vec{b}$를 구하시오.

(1) 30° (2) 90° (3) 120°

예제 1

오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=4$, $\overline{AC}=5$, $\angle B = 90^\circ$인 직각삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$를 구하시오.



풀이 $|\overrightarrow{AB}|=4$, $|\overrightarrow{AC}|=5$이고, 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면

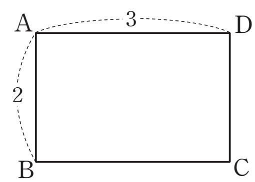
$\cos\theta = \frac{4}{5}$이므로

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}| \cos\theta = 4 \times 5 \times \frac{4}{5} = 16$$

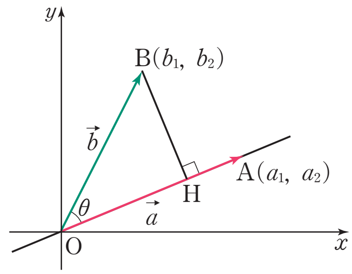
답 16

문제 02 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{AD}=3$인 직사각형 ABCD에서 다음을 구하시오.

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$



평면벡터의 내적은 성분으로 어떻게 나타낼까?



영벡터가 아닌 두 벡터 $\overrightarrow{OA}=(a_1,\ a_2)$, $\overrightarrow{OB}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 하자.

점 B에서 직선 OA에 내린 수선의 발을 H라고 하면 $\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{OA}=(ka_1,\ ka_2)\ (k>0)$이므로

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b}&=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OB}|\cos\theta\\&=|\overrightarrow{OA}|\times|\overrightarrow{OH}|=|\overrightarrow{OA}|\times k|\overrightarrow{OA}|\\&=k|\overrightarrow{OA}|^2\\&=k(a_1^2+a_2^2)\qquad\cdots\cdots\ ①\end{aligned}$$

이다.

한편 직각삼각형 OHB에서

$$|\overrightarrow{OB}|^2=|\overrightarrow{OH}|^2+|\overrightarrow{HB}|^2$$

이고, $\overrightarrow{HB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OH}=(b_1-ka_1,\ b_2-ka_2)$이므로

$$b_1^2+b_2^2=(k^2a_1^2+k^2a_2^2)+\{(b_1-ka_1)^2+(b_2-ka_2)^2\}$$
$$(a_1^2+a_2^2)k^2=(a_1b_1+a_2b_2)k$$

이다.

이 식을 정리하면

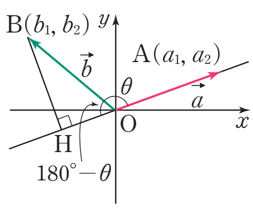
$$k=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{a_1^2+a_2^2}$$

이다.

따라서 이 식을 ①에 대입하면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2\qquad\cdots\cdots\ ②$$

이다.



같은 방법으로 ②는 $90^\circ<\theta<180^\circ$일 때도 성립한다.

또 ②는 θ가 0°, 90°, 180°일 때도 성립하며 $\vec{a}=\vec{0}$ 또는 $\vec{b}=\vec{0}$일 때도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적과 성분

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

스스로 확인하기

$\vec{a}=(2,\ -1)$, $\vec{b}=(3,\ 1)$일 때,

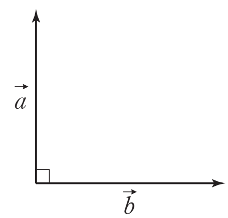
$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3+(-1)\times1=5$

문제 03 다음 두 벡터의 내적을 구하시오.

(1) $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 5)$

(2) $\vec{a}=(\sqrt{2},\ -2)$, $\vec{b}=(2\sqrt{2},\ -1)$

두 평면벡터의 수직 조건은 무엇일까?



오른쪽 그림과 같이 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각이 직각일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 수직이라 하고, 기호로

$$\vec{a}\perp\vec{b}$$

와 같이 나타낸다.

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}\perp\vec{b}$이면

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 90^\circ=0$$

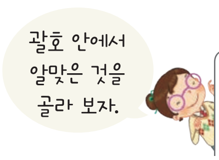
이다. 이때 그 역도 성립한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

두 평면벡터의 수직 조건

영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$



스스로 확인하기

$\vec{a}=(-3,\ 2)$, $\vec{b}=(2,\ 3)$일 때, $\vec{a}\cdot\vec{b}=(-3)\times2+2\times3=0$

따라서 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 (수직이다, 수직이 아니다).

문제 04 두 벡터 $\vec{a}=(2,\ 3)$, $\vec{b}=(k,\ 4)$가 서로 수직이 되도록 실수 k의 값을 정하시오.

평면벡터의 내적에는 어떤 성질이 있을까?

세 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$, $\vec{c}=(c_1,\ c_2)$에 대하여 다음이 성립한다.

❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2=b_1a_1+b_2a_2$

$=\vec{b}\cdot\vec{a}$

❷ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=(a_1,\ a_2)\cdot(b_1+c_1,\ b_2+c_2)$

$=a_1(b_1+c_1)+a_2(b_2+c_2)$

$=(a_1b_1+a_2b_2)+(a_1c_1+a_2c_2)$

$=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2)\cdot(c_1,\ c_2)$

$=(a_1+b_1)c_1+(a_2+b_2)c_2$

$=(a_1c_1+a_2c_2)+(b_1c_1+b_2c_2)$

$=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

❸ k가 실수일 때

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=(ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$=ka_1b_1+ka_2b_2$

$=a_1(kb_1)+a_2(kb_2)$

$=(a_1,\ a_2)\cdot(kb_1,\ kb_2)$

$=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=(ka_1,\ ka_2)\cdot(b_1,\ b_2)$

$=ka_1b_1+ka_2b_2$

$=k(a_1b_1+a_2b_2)$

$=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

따라서 $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$

이상을 정리하면 다음과 같다.

평면벡터의 내적의 성질

세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여

❶ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (교환법칙)

❷ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ (분배법칙)

$(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

❸ $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(k\vec{b})=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$ (단, k는 실수)

예제 2

다음 등식이 성립함을 보이시오.

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

생각열기

$|\vec{a}|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$

풀이 $|\vec{a}+\vec{b}|^2=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})+\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}$

$=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

답 풀이 참고

문제 05

다음 등식이 성립함을 보이시오.

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$

(2) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=|\vec{a}|^2-|\vec{b}|^2$

예제 3

$|\vec{a}|=2\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $45°$일 때, $|2\vec{a}+3\vec{b}|$를 구하시오.

풀이 $|2\vec{a}+3\vec{b}|^2=(2\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}+3\vec{b})$

$=4|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2$

$=4\times8+12\times2\sqrt{2}\times3\times\cos45°+9\times9$

$=185$

따라서 $|2\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{185}$

답 $\sqrt{185}$

문제 06

$|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$인 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기가 $60°$일 때, $|5\vec{a}-\vec{b}|$를 구하시오.

03 직선과 원의 방정식

• 좌표평면에서 벡터를 이용하여 직선과 원의 방정식을 구할 수 있다.

주어진 벡터에 평행한 직선의 방정식은 어떻게 구할까?

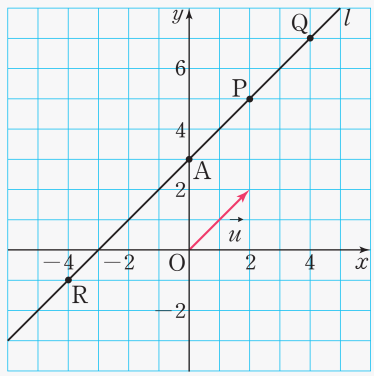
개 념 열 기

오른쪽 그림은 점 $\mathrm{A}(0,\ 3)$을 지나고 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l을 나타낸 것이다. 직선 l 위의 세 점 P, Q, R에 대하여 다음 빈칸에 알맞은 수를 써넣으시오.

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\square\,\vec{u}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\square\,\vec{u}$

$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\quad\square\quad)\vec{u}$



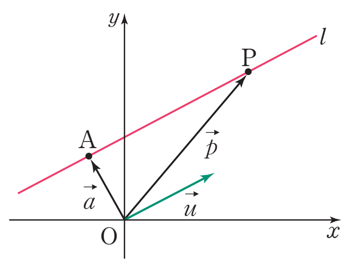
좌표평면에서 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{u}$에 평행한 직선 l의 방정식을 벡터를 이용하여 구해 보자.

오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\vec{u}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\vec{u}$$

를 만족시키는 실수 t가 존재한다.

이때 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}$이므로



$$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{u} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 t의 값에 관계없이 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 구하는 직선 l의 방정식이다. 이때 벡터 $\vec{u}$를 직선 l의 **방향벡터**라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내 보자.

벡터 $\vec{u}$를 $\vec{u}=(a,\ b)$라 하고, 두 점 A, P의 좌표를 각각 $(x_1,\ y_1)$, $(x,\ y)$라고 하면 $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$, $\vec{p}=(x,\ y)$이므로 ①은

$$\begin{aligned}(x,\ y)&=(x_1,\ y_1)+t(a,\ b)\\&=(x_1+at,\ y_1+bt)\end{aligned}$$

이다.

이때 두 벡터가 서로 같을 조건에 의하여

$$x=x_1+at,\ y=y_1+bt \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이다.

$ab\neq0$일 때, ②에서

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

방향벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a,\ b)$인 직선의 방정식은

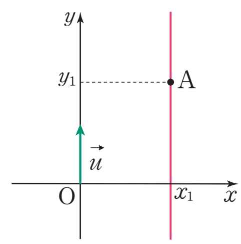
$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

점 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a,\ b)$인 직선에서 $ab=0$인 경우의 직선의 방정식은 다음과 같다.

(i) $a=0,\ b\neq0$이면 직선의 방정식은

$$x=x_1$$

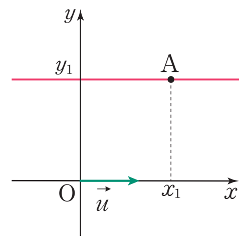
이다.

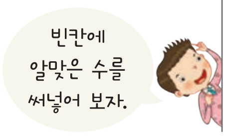


(ii) $a\neq0,\ b=0$이면 직선의 방정식은

$$y=y_1$$

이다.





스스로 확인하기

(1) 점 $(1, 2)$를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(2, 5)$인 직선의 방정식은

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{\square}$$

(2) 점 $(2, 1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(0, 1)$인 직선의 방정식은

$$x=2$$

문제 01 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-2, 3)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(1, 2)$인 직선

(2) 점 $(1, 2)$를 지나고 직선 $\frac{x-2}{3}=\frac{1-y}{2}$에 평행한 직선

(3) 점 $(1, 5)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(-1, 0)$에 평행한 직선

서로 다른 두 점을 지나는 직선의 방정식을 방향벡터를 이용하여 구해 보자.

예제 1

두 점 $A(1, 3)$, $B(2, -1)$을 지나는 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

풀이 구하는 직선의 방향벡터는

$$\overrightarrow{AB}=(2-1, -1-3)=(1, -4)$$

이 직선이 점 $A(1, 3)$을 지나므로 직선의 방정식은

$$x-1=\frac{y-3}{-4}$$

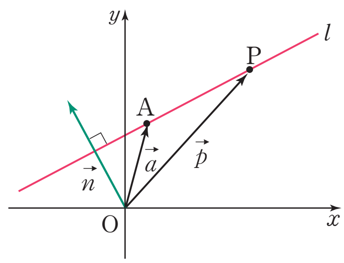
답 $x-1=\frac{y-3}{-4}$

문제 02 다음 두 점을 지나는 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

(1) $A(5, 2)$, $B(-1, 3)$ (2) $A(1, -4)$, $B(2, -1)$

주어진 벡터에 수직인 직선의 방정식은 어떻게 구할까?

좌표평면에서 점 A를 지나고 영벡터가 아닌 벡터 $\vec{n}$에 수직인 직선 l의 방정식을 벡터를 이용하여 구해 보자.



오른쪽 그림과 같이 직선 l 위의 임의의 점을 P라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}} \perp \vec{n}$이므로

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \vec{n}=0$$

이고, 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{p}-\vec{a}$이므로

$$(\vec{p}-\vec{a}) \cdot \vec{n}=0 \quad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 직선 l 위에 있다.

따라서 ①은 구하는 직선 l의 방정식이다. 이때 벡터 $\vec{n}$을 직선 l의 **법선벡터**라고 한다.

이제 직선 l의 방정식 ①을 성분으로 나타내 보자.

벡터 $\vec{n}$를 $\vec{n}=(a, b)$라 하고, 두 점 A, P의 좌표를 각각 (x_1, y_1), (x, y)라고 하면 $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{p}=(x, y)$이므로 ①은

$$(x-x_1, y-y_1) \cdot (a, b)=0$$
$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

법선벡터를 이용한 직선의 방정식

점 $\mathrm{A}(x_1, y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a, b)$인 직선의 방정식은

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

스스로 확인하기

점 $(1, 2)$를 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(-1, 3)$인 직선의 방정식은

$$-(x-1)+3(y-2)=0,\ x-3y+5=0$$

문제 03

다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(-3,\ -1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(2,\ 1)$인 직선

(2) 점 $(-1,\ 2)$를 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,\ -4)$에 수직인 직선

두 직선의 평행 조건과 수직 조건은 무엇일까?

두 직선 l, m의 방향벡터가 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$일 때,
$l /\!/ m \Longleftrightarrow \vec{u} /\!/ \vec{v}$
$l \perp m \Longleftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

두 직선이 서로 평행하면 두 직선의 방향벡터도 서로 평행하고, 그 역도 성립한다. 또 두 직선이 서로 수직이면 두 직선의 방향벡터도 서로 수직이고, 그 역도 성립한다.

예제 2

두 직선 l: $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-2}{k}$, m: $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 두 직선 l, m이 서로 평행할 때, 상수 k의 값

(2) 두 직선 l, m이 서로 수직일 때, 상수 k의 값

풀이 두 직선 l, m의 방향벡터를 각각 $\vec{u}$, $\vec{v}$라고 하면

$\vec{u}=(6,\ k)$, $\vec{v}=(2,\ 3)$

(1) $l /\!/ m$이므로 $\vec{u} /\!/ \vec{v}$

즉, $\vec{u}=t\vec{v}$를 만족시키는 0이 아닌 실수 t가 존재하므로 $(6,\ k)=t(2,\ 3)$

$6=2t$, $k=3t$에서 $t=3$, $k=9$

(2) $l \perp m$이므로 $\vec{u} \perp \vec{v}$

즉, $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$이므로 $(6,\ k)\cdot(2,\ 3)=0$

$12+3k=0$에서 $k=-4$

답 (1) 9 (2) -4

문제 04

두 직선 l: $\dfrac{x-2}{k}=\dfrac{y-1}{3}$, m: $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{1-y}{6}$에 대하여 다음을 구하시오.

(1) 두 직선 l, m이 서로 평행할 때, 상수 k의 값

(2) 두 직선 l, m이 서로 수직일 때, 상수 k의 값

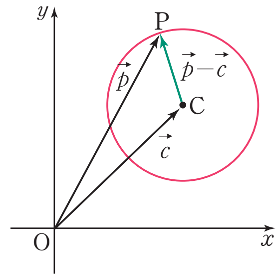
벡터를 이용하여 원의 방정식은 어떻게 구할까?

좌표평면 위의 점 C를 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구해 보자.

이 원 위의 임의의 점을 P라고 하면

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$$

이고, 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 하면 $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\vec{p}-\vec{c}$이므로



$$|\vec{p}-\vec{c}|=r \qquad \cdots\cdots ①$$

이다.

역으로 ①을 만족시키는 벡터 $\vec{p}$를 위치벡터로 하는 점 P는 $|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=r$를 만족시키므로 중심이 C이고 반지름의 길이가 r인 원 위에 있다.

따라서 ①은 구하는 원의 방정식이다.

이때 ①의 양변을 제곱하면 $|\vec{p}-\vec{c}|^2=r^2$이므로

$$(\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=r^2 \qquad \cdots\cdots ②$$

이다.

이제 원의 방정식 ②를 성분으로 나타내 보자.

좌표평면 위의 점 $\mathrm{C}(x_1, y_1)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 r인 원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x, y)$라고 하면 $\vec{p}=(x, y)$, $\vec{c}=(x_1, y_1)$이므로 ②는

$$(x-x_1, y-y_1)\cdot(x-x_1, y-y_1)=r^2$$

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$$

임을 확인할 수 있다.

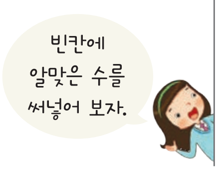
스스로 확인하기

점 $\mathrm{C}(1, 2)$를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 두 점 C, P의 위치벡터를 각각 $\vec{c}$, $\vec{p}$라고 하면

$$|\vec{p}-\vec{c}|=2,\ (\vec{p}-\vec{c})\cdot(\vec{p}-\vec{c})=2^2$$

이고, 이를 성분으로 나타내면

$$(x-1, y-2)\cdot(x-\boxed{}, y-\boxed{})=2^2,\ \text{즉}\quad (x-1)^2+(y-2)^2=4$$



문제 05

점 $\mathrm{A}(-2, 3)$을 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 위의 점 $\mathrm{P}(x, y)$에 대하여 두 점 A, P의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{p}$라고 할 때, 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

중단원 학습 점검

정답과 해설 ▸ 173쪽

개념 정리

- **평면벡터의 크기와 두 평면벡터가 서로 같을 조건**

  $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$일 때

  (1) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}}$　　(2) $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1,\ a_2=b_2$

- **평면벡터의 내적**

  두 벡터 $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$, $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$가 이루는 각의 크기 θ에 대하여

  $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2$ (단, $0^\circ\le\theta\le90^\circ$)

  $\vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|\cos(180^\circ-\theta)=a_1b_1+a_2b_2$ (단, $90^\circ<\theta\le180^\circ$)

- **두 평면벡터의 수직 조건**

  영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여　$\vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

- **직선의 방정식**

  (1) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(a,\ b)$인 직선의 방정식은

  $$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}\ (\text{단, } ab\neq0)$$

  (2) 점 $(x_1,\ y_1)$을 지나고 법선벡터가 $\vec{n}=(a,\ b)$인 직선의 방정식은

  $$a(x-x_1)+b(y-y_1)=0$$

O, X 문제

다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

1 점 A$(2,\ 3)$의 위치벡터 $\vec{a}$를 $\vec{e_1}=(1,\ 0)$, $\vec{e_2}=(0,\ 1)$로 나타내면 $\vec{a}=3\vec{e_1}+2\vec{e_2}$이다.

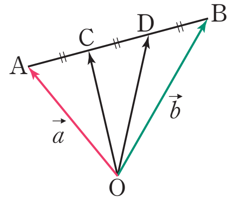
2 $\vec{a}=(1,\ 2)$일 때, $|\vec{a}|=\sqrt{5}$이다.

3 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ 1)$, $\vec{b}=(-1,\ 1)$은 서로 수직이다.

4 직선 $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+3}{5}$의 법선벡터 $\vec{n}$은 $\vec{n}=(2,\ 5)$이다.

기초 문제

1 오른쪽 그림과 같이 선분 AB를 삼등분한 점을 각각 C, D라 하고, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 벡터를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



(1) $\overrightarrow{OC}$　　(2) $\overrightarrow{OD}$

2 $\vec{a}=(-1,\ -3)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$일 때, 다음 벡터를 성분으로 나타내시오.

(1) $3\vec{a}-\vec{b}$　　(2) $-2\vec{a}+\vec{b}$

3 다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{a}\cdot\vec{b}$를 구하시오.

(1) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기 60°

(2) $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(-4,\ 3)$

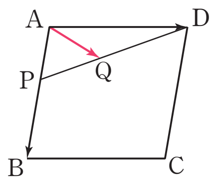
4 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 점 $(1,\ 2)$를 지나고 벡터 $\vec{u}=(2,\ 6)$에 평행한 직선

(2) 점 $(2,\ 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1,\ -3)$에 수직인 직선

기본 문제

5 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 변 AB를 2 : 3으로 내분하는 점을 P, 선분 DP를 3 : 2로 내분하는 점을 Q라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{AQ}$를 두 벡터 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$로 나타내시오.



6 삼각형 ABC에 대하여

$$2\overrightarrow{PA}+4\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{BC}$$

를 만족시키는 점 P의 위치를 말하시오.

7 세 점 A(3, 3), B(−1, −1), C(0, 3)에 대하여

$$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{AB}$$

를 만족시키는 점 P의 좌표를 구하시오.

8 다음 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오.

$$\vec{a}=(\sqrt{3},\ 1),\ \vec{b}=(1,\ \sqrt{3})$$

9 $\vec{p}=(a,\ b)$, $\vec{q}=(2,\ a)$, $\vec{r}=(b,\ -4)$일 때, $\vec{p}\,/\!/\,\vec{q}$, $\vec{p}\perp\vec{r}$를 만족시키는 두 실수 a, b의 값을 구하시오. (단, $ab\neq0$)

10 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-2$일 때, $|4\vec{a}+3\vec{b}|$를 구하시오.

11 점 (1, −2)를 지나고 방향벡터가 $\vec{u}=(3,\ 2)$인 직선과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하시오.

12 점 $(2,\ -1)$을 지나고 직선 $x+2y+1=0$에 수직인 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

13 두 직선 l: $\dfrac{x-1}{k+1}=\dfrac{y}{-k^2}$, m: $\dfrac{x}{2k}=\dfrac{y-3}{3}$이 서로 수직일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

(단, $k\neq-1$, $k\neq0$)

14 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 3)$, $\mathrm{B}(3,\ 1)$에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=8$을 만족시키는 점 P가 나타내는 도형을 말하시오.

15 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$, $\mathrm{B}(-4, -1)$을 지름의 양 끝점으로 하는 원의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

도전 문제

16 삼각형 ABC와 점 P에 대하여 $2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+3\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$일 때, 삼각형 ABC의 넓이는 삼각형 ABP의 넓이의 몇 배인지 구하시오.

17 점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$과 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 P, 초점 F에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{FP}}$의 최솟값을 구하시오.

18 점 $\mathrm{A}(2,\ 1)$에서 직선 l: $\dfrac{x-1}{2}=y-2$에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 점 H의 좌표를 구하시오.

수행 과제

문제 해결

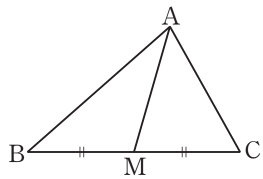
활동 목표 벡터를 이용하여 도형의 성질을 보일 수 있다.

▶ 도형의 여러 가지 성질을 벡터를 이용하여 확인해 보자.

1 삼각형 ABC에서 변 BC의 중점을 M이라고 할 때,

$$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2(\overline{AM}^2+\overline{BM}^2)$$

임을 보이려고 한다. 다음 세민이와 민준이의 풀이를 완성해 보자.



세민

삼각형 ABC를 점 M을 원점으로 하는 좌표평면 위에 놓자. 점 A의 좌표를 (a, b), 점 C의 좌표를 $(c, 0)$이라고 하면 __________

____

____

____

$\overrightarrow{MA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{MB}=\vec{b}$라 하고, $\overline{AB}^2=|\overrightarrow{AB}|^2=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$임을 이용하면 __________

____

____

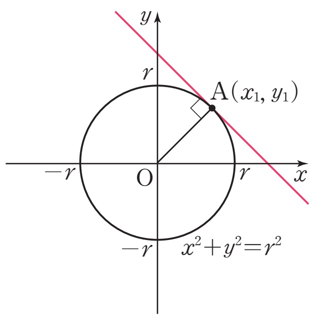
____

____

민준

더 알아보기

2 원 $x^2+y^2=r^2$ 위의 점 $A(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식을 벡터를 이용하여 구해 보자.



자기 평가	벡터의 개념, 성질을 이용하여 과제를 해결하였는가?
	벡터의 유용성과 가치를 인식하였는가?
	수학적 언어로 해결 과정을 명확하게 표현하였는가?

과학! 수학과 통하다

벡터로 대왕고래를 찾아라!

대왕고래라고 불리는 흰긴수염고래는 길이가 최대 30 m 정도, 무게가 최대 200 t 정도로 거대하다. 이 대왕고래는 붓으로 살짝 스친 것 같은 잔무늬가 몸 전체에 흩어져 있으며 바닷속에서 헤엄치고 있는 것을 위에서 내려다보면 온몸이 청회색으로 보인다.

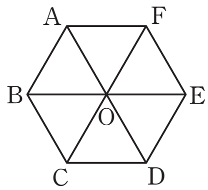
대왕고래는 헤엄치는 속도가 빠른 편이어서 포획하기가 힘들었지만 속력이 빠른 포경선이 제작되면서 그 수가 크게 줄어들게 되었다.

전 세계에서 얼마 남지 않은 대왕고래를 보호하기 위해서는 대왕고래의 정확한 이동 경로를 파악하는 것이 중요하다. 북태평양 대왕고래 연구 프로젝트에서는 대왕고래에게 위성 꼬리표와 추적용 칩을 부착하여 고래의 이동을 분석하는 데 벡터를 이용하고 있다. 이들은 고래의 현재 위치와 과거 위치를 파악하고, 벡터의 연산을 통해 다음 이동 경로를 알아내었다고 한다.

[참고 자료: 내셔널 지오그래픽, "내셔널 지오그래픽(한국판) 2009년 3월호"]

대단원 학습 평가

1 오른쪽 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정육각형 ABCDEF의 세 대각선 AD, BE, CF의 교점을 O라고 할 때, 다음 보기 중 옳은 것을 있는 대로 고르시오.

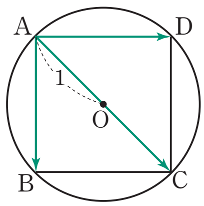


보기

ㄱ. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$　　ㄴ. $-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$

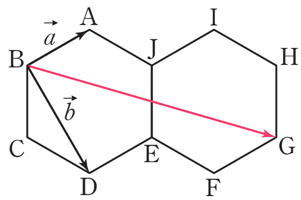
ㄷ. $|\overrightarrow{BE}|=3$　　ㄹ. $|\overrightarrow{AE}|=\sqrt{3}$

2 오른쪽 그림과 같이 반지름의 길이가 1인 원 O에 내접하는 정사각형 ABCD에서 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}|$를 구하시오.



3 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $\vec{x}+\vec{y}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\vec{x}-\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}$일 때, $2\vec{x}+4\vec{y}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.

4 다음 그림과 같이 한 변을 공유하는 서로 합동인 두 정육각형에서 $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$라고 할 때, 벡터 $\overrightarrow{BG}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.



5 영벡터가 아닌 세 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$에 대하여 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$는 서로 평행하고 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{c}$는 서로 평행하지 않다. 이때

$\vec{a}-k(2\vec{c}-\vec{a})-2\vec{b}+6\vec{c}=\vec{0}$를 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오.

6 $\vec{a}=(0,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$일 때, $3\vec{a}-2\vec{x}=2\vec{b}$를 만족시키는 벡터 $\vec{x}$와 방향이 같은 단위벡터를 구하시오.

●●●
7 두 점 A(2, 3), B(4, 1)과 직선 $x+y=1$ 위의 점 P에 대하여 $|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}|$의 최솟값을 구하시오.

●●○
8 두 벡터 $\vec{a}=(-3, -t+2)$, $\vec{b}=(t, 1)$이 서로 평행하도록 양수 t의 값을 정하시오.

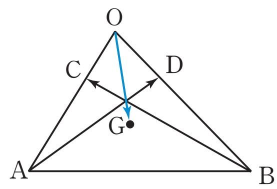
●●○
9 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$를 구하시오.

●●○
10 점 (1, −5)를 지나고, 직선 $x+2y+1=0$에 평행한 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오.

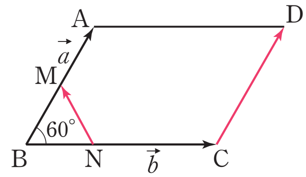
서 술 형 문 제

[11~15] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

●●○
11 삼각형 OAB에서 두 선분 OA, OB를 1 : 2로 내분하는 점을 각각 C, D라 하고, 삼각형 OAB의 무게중심을 G라고 하자. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{OG}$를 만족시키는 실수 k의 값을 구하시오.



●●○
12 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=2$, $\overline{BC}=3$, $\angle ABC=60°$인 평행사변형 ABCD에서 $\overline{AB}$의 중점을 M, $\overline{BC}$를 1 : 2로 내분하는 점을 N이라 하고, $\overrightarrow{BA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.



(1) 벡터 $\overrightarrow{NM}$을 $\vec{a}$, $\vec{b}$로 나타내시오.
(2) $\overrightarrow{NM}\cdot\overrightarrow{CD}$를 구하시오.

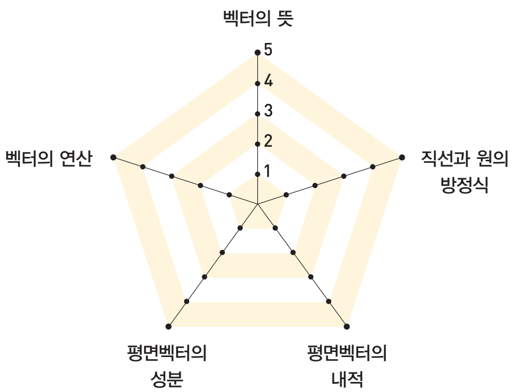
13 $\vec{a}=(3,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 2)$일 때, 두 벡터 $\vec{a}+\vec{b}$, $2\vec{a}-k\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 실수 k의 값을 정하시오.

14 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$와 원점 O에 대하여 점 A에서 직선 OB에 내린 수선의 발을 H라고 하자. $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(m,\ n)$일 때, $m+n$의 값을 구하시오. (단, m, n은 실수)

15 세 점 A, B, P의 위치벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$에 대하여 $\vec{a}=(-1,\ 5)$, $\vec{b}=(3,\ 2)$이고, $(\vec{p}-\vec{b})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=4$일 때, $|\vec{p}-\vec{a}|$의 최댓값과 최솟값을 구하시오.

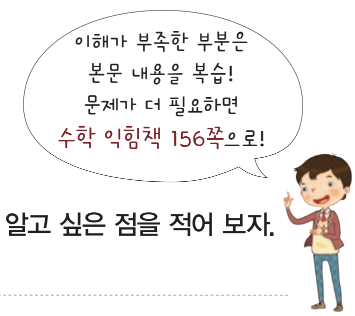
자기 평가

1 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 아래 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.



| 성취 수준 |

1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
2수준: 개념을 일부 이해하였다.
3수준: 문제를 일부 해결하였다.
4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
5수준: 문제를 모두 해결하였다.



2 이 단원에서 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 아쉬웠던 점이나 더 알고 싶은 점을 적어 보자.

꿈! 수학과 만나다

하늘의 별을 만드는

인공위성 개발원

인공위성 개발원이 하는 일은?

인공위성 개발원은 우주 탐사, 기상 예보 등 다양한 목적의 인공위성을 연구, 개발, 설계한다. 그리고 인공위성이 궤도에 도달하도록 유도하며, 위성이 보낸 탐사 자료를 분석한다. 또 개발한 인공위성의 성능을 시험하고 결함 원인을 분석하며 해결책을 제시하기도 한다.

인공위성 개발원이 되려면?

인공위성 개발원이 되기 위해서는 항공 공학, 천문학, 물리학 등 관련된 학문에 대한 폭넓은 지식이 요구된다. 특히 인공위성을 개발하고 탐사 자료를 분석하려면 수학과 물리학에서 배운 벡터, 물체의 운동 법칙 등의 이해가 필요하다. 또 새로운 기술에 대한 정보 수집 · 관리 · 활용 능력, 창의력, 그리고 문제 해결을 위한 논리적 사고력을 키워야 한다.

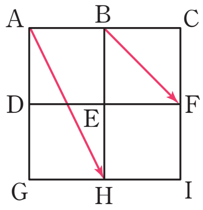
[참고 자료: 커리어넷, http://www.career.go.kr]

스스로 공부하는

수학 익힘책

II. 평면벡터

1 오른쪽 그림은 서로 합동인 정사각형 4개를 이어 붙인 것이다. 각 꼭짓점을 시점과 종점으로 하는 벡터 중 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$를 제외하고 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{BF}}$와 같은 벡터의 개수를 a, 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$와 크기는 같지만 방향이 반대인 벡터의 개수를 b라고 할 때, $a+b$의 값을 구하시오.



| 3점 |

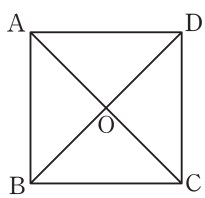
2 평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대하여 다음 보기 중 $\vec{0}$인 것을 있는 대로 고르시오. | 2점 |

보기

ㄱ. $\overrightarrow{\mathrm{AA}}$　　ㄴ. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

ㄷ. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}$　　ㄹ. $\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{DA}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

3 오른쪽 그림과 같이 정사각형 ABCD에서 두 대각선 AC, BD의 교점을 O라고 할 때, 다음 중 크기가 나머지 넷과 다른 하나는? | 3점 |



① $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　② $\overrightarrow{\mathrm{AO}}+\overrightarrow{\mathrm{BO}}$

③ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{CA}}$　④ $\overrightarrow{\mathrm{CO}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

⑤ $\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

4 서로 평행하지 않고 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여

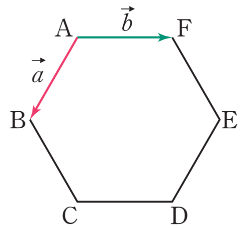
$$m(2\vec{a}+3\vec{b})+n(\vec{a}-\vec{b})=8\vec{a}+7\vec{b}$$

일 때, 두 실수 m, n의 값을 구하시오. | 3점 |

5 오른쪽 그림과 같이 정육각형 ABCDEF에서 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{b}$라고 하자.

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+k\vec{b}$

일 때, 실수 k의 값은? | 3점 |

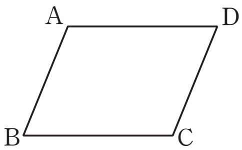


① 1　② $\frac{3}{2}$　③ 2

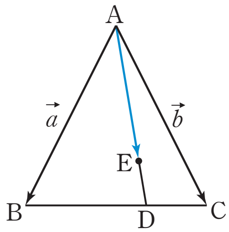
④ $\frac{5}{2}$　⑤ 3

6 평면 위의 서로 다른 네 점 O, A, B, C에 대하여 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=3\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=r(\vec{a}+\vec{b})$일 때, 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있도록 실수 r의 값을 정하시오. | 3점 |

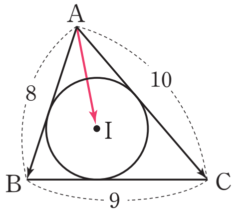
7 오른쪽 그림과 같이 평행사변형 ABCD에서 네 꼭짓점 A, B, C, D의 위치벡터를 각각 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$라고 할 때, $\vec{d}$를 $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$로 나타내시오. | 3점 |



8 오른쪽 그림과 같이 삼각형 ABC에서 $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$라 하고 선분 BC를 $2:1$로 내분하는 점을 D, 선분 AD를 $3:1$로 내분하는 점을 E라고 하자. $\overrightarrow{AE}=x\vec{a}+y\vec{b}$를 만족시키는 두 실수 x, y의 값을 구하시오. | 3점 |



9 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=10$, $\overline{BC}=9$인 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 I라고 하자. $\overrightarrow{AI}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AC}$를 만족시키는 두 실수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오. | 4점 |



10 $\vec{a}=(1,\ 3)$, $\vec{b}=(x,\ -1)$, $\vec{c}=(-4,\ y)$일 때, $2\vec{a}-\vec{b}=\vec{b}+\vec{c}$를 만족시키는 두 실수 x, y의 값을 구하시오. | 3점 |

11 $\vec{a}=(3,\ -2)$, $\vec{b}=(1,\ 0)$일 때, $|\vec{a}+2\vec{b}|$를 구하시오. | 2점 |

12 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-2,\ 2)$일 때, $\vec{a}\cdot(3\vec{a}-2\vec{b})$를 구하시오. | 2점 |

13 $\vec{a}=(5,\ 4)$, $\vec{b}=(-2,\ 3)$, $\vec{c}=(3,\ 7)$일 때, 두 벡터 $\vec{a}+k\vec{c}$, $\vec{b}-\vec{a}$가 서로 평행하도록 실수 k의 값을 정하시오. | 3점 |

14 두 벡터 $\vec{a}=(4,\ 2)$, $\vec{b}=(1,\ -2)$가 이루는 각의 크기는? | 3점 |

① 0° ② 30° ③ 45°
④ 60° ⑤ 90°

15 서로 평행하지 않은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$이고 $\vec{a}\cdot\vec{b}=2$일 때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{a}-t\vec{b}$가 서로 수직이 되도록 실수 t의 값을 정하시오. | 3점 |

16 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$, $|\vec{a}-\vec{b}| : |\vec{a}+\vec{b}|=2 : 3$이다. 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 이루는 각의 크기를 $\theta(0^\circ<\theta<90^\circ)$라고 할 때, $\cos\theta$의 값을 구하시오. | 4점 |

17 직선 $y=x+k$와 포물선 $x^2=y$가 서로 다른 두 점 P, Q에서 만날 때, $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$의 최솟값은? (단, k는 상수, O는 원점) | 4점 |

① $-\frac{1}{6}$ ② $-\frac{1}{5}$ ③ $-\frac{1}{4}$
④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ $-\frac{1}{2}$

18 점 $(-1,\ 3)$을 지나고, 직선 $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{-5}$에 수직인 직선의 방정식을 벡터를 이용하여 구하시오. | 3점 |

19 직선 $x+ay+1=0$은 직선 $2x-by+3=0$과 서로 수직이고, 직선 $x-(b-3)y-2=0$과 서로 평행하다. 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오. | 3점 |

20 두 직선

$$l\colon x-1=\frac{y-2}{2},\ m\colon \frac{x-1}{a}=\frac{y+1}{4}$$

이 서로 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하시오. | 3점 |

21 세 점 A(1, 2), B(3, −1), C(−1, −2)에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=2$일 때, 점 P가 나타내는 도형의 길이를 구하시오. | 4점 |

22 두 점 O(0, 0), A(4, 2)에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$를 만족시키는 점 P가 나타내는 도형의 넓이를 구하시오. | 3점 |

23 원 $(x-4)^2+(y-3)^2=9$ 위를 움직이는 두 점 A, B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라고 할 때, $M+m$의 값을 구하시오. (단, O는 원점) | 4점 |

24 방향벡터가 $\vec{u}=(1,\ 2)$이고, 원점을 지나는 직선이 점 C(3, 1)을 중심으로 하는 원에 접할 때, 접점의 좌표를 $(a,\ b)$라고 하자. 이때 $a+b$의 값을 구하시오. | 3점 |