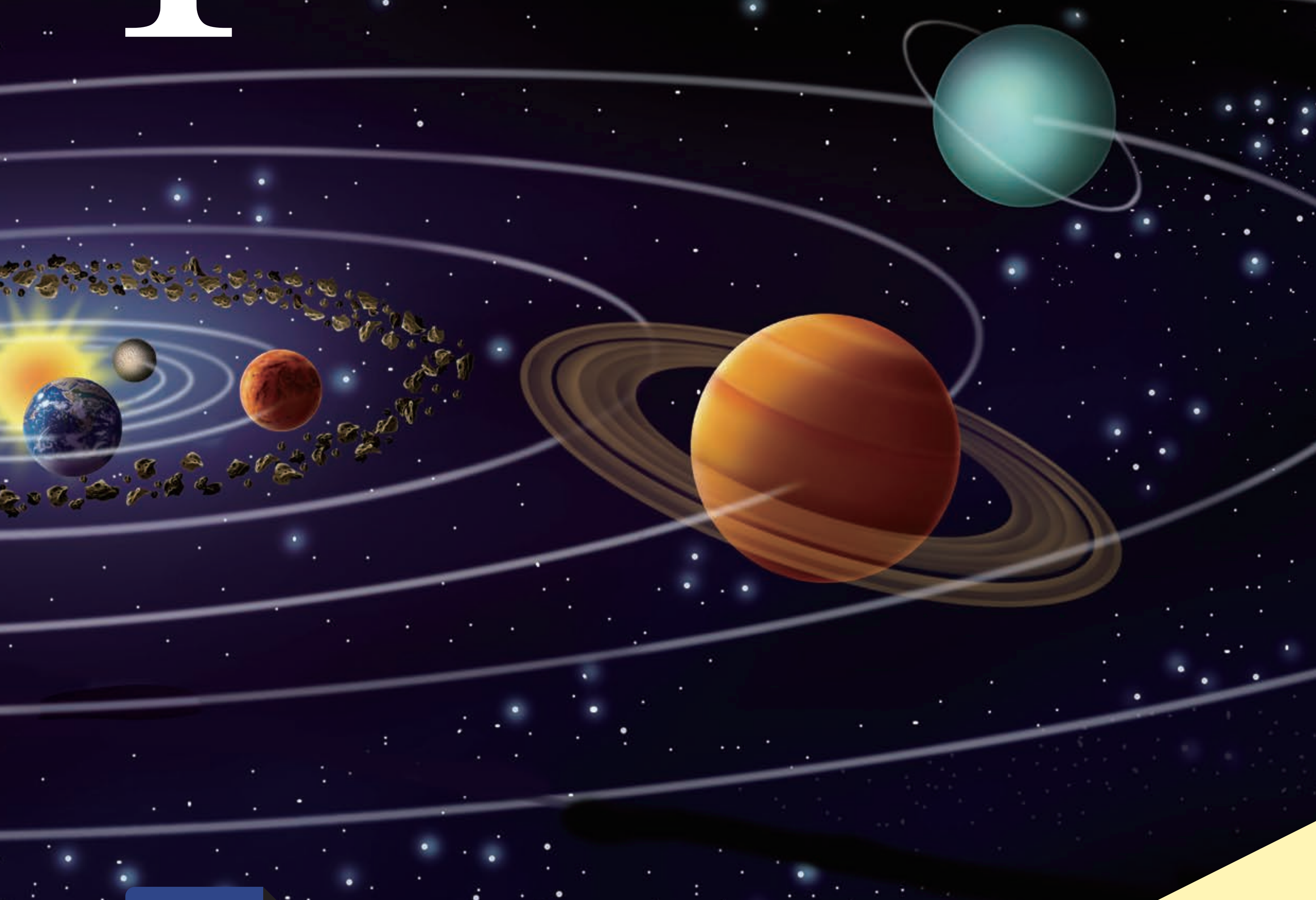
I 이차곡선



대단원 포트폴리오

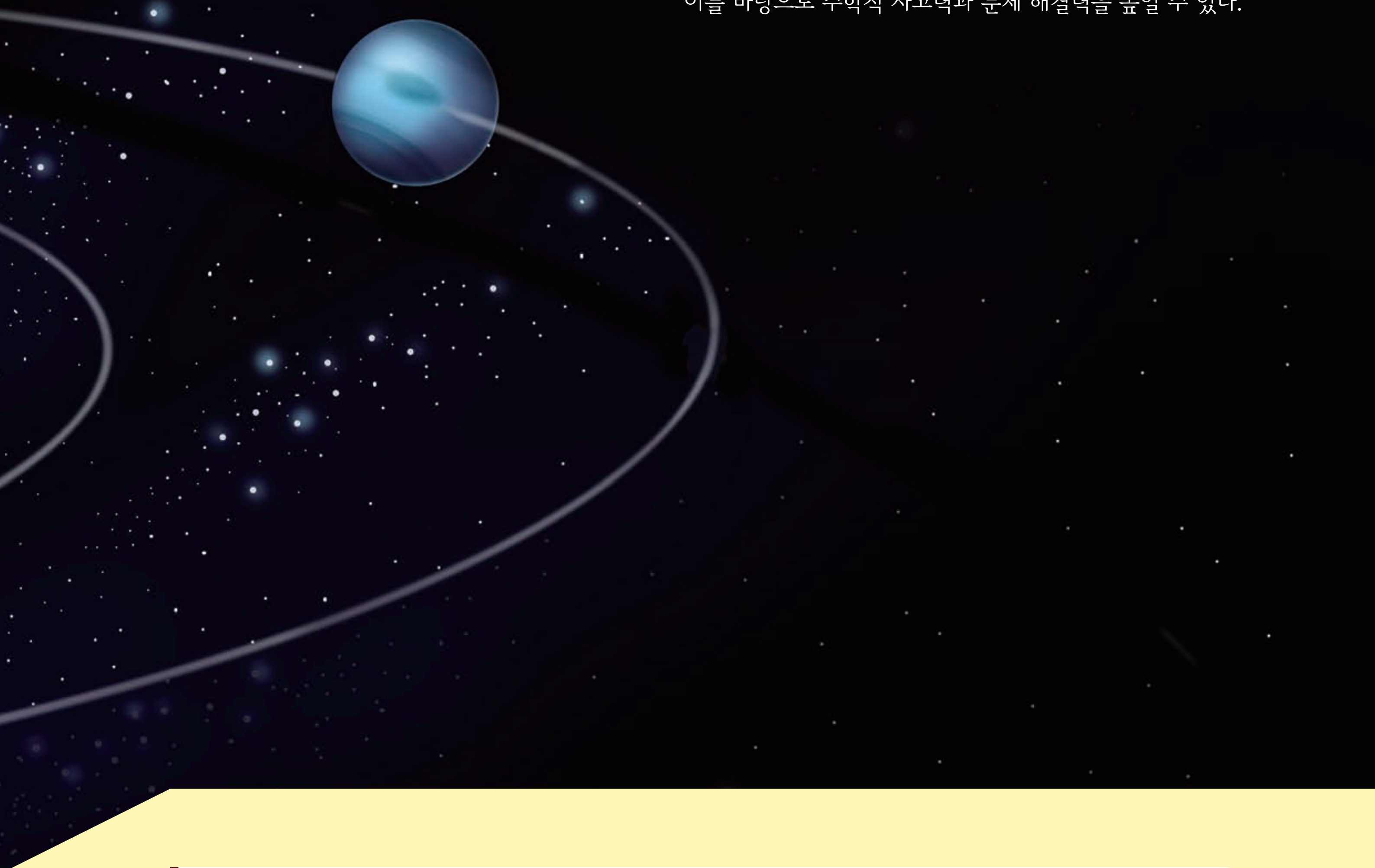
이 단원을 학습하면서 다음 중 하나를 선택하여 포트폴리오를 만들어 보자.

- [ ] 수학 독후감
- [ ] 수학 마인드맵
- [ ] 수학 일기
- [ ] 수학 신문
- [ ] 수학 포스터
- [ ] 수학사 보고서

예시와 길잡이 ▶ 148쪽

‘이차곡선’은 왜 배울까?

공이 날아가는 궤도나 태양계 행성들의 공전 궤도, 물결파의 간섭 현상 등에서 포물선, 타원, 쌍곡선과 같은 이차곡선을 찾아볼 수 있다. 이차곡선을 공부하면 기하학적 직관과 대수적 표현을 연결할 수 있으며 이를 바탕으로 수학적 사고력과 문제 해결력을 높일 수 있다.



이 단원에서 학습할 내용을 알아보고 나의 학습 계획을 적어 보자.

학습 내용

- 포물선
- 타원
- 쌍곡선
- 이차곡선과 직선의 위치 관계
- 이차곡선의 접선의 방정식

학습 계획

나의 학습 계획 예시

- 예습과 복습을 하겠다.
- 문제를 많이 풀어 보겠다.
- 수업에 적극적으로 참여하겠다.
- 끈기 있게 노력하겠다.

1 이차곡선

수학 + 역사

이차곡선은 원뿔을 평면으로 자를 때 생기는 단면에서 찾아볼 수 있는 곡선으로 원뿔곡선이라고도 한다. 기원전 4세기경 아폴로니오스(Apollonios, B.C. 262?~B.C. 190?)는 원뿔곡선을 연구하였는데, 단면과 밑면이 이루는 각의 크기가 모선과 밑면이 이루는 각의 크기보다 작은지, 같은지, 큰지에 따라 각각 타원, 포물선, 쌍곡선이라고 명명하였다. 이후 좌표평면의 도입으로 이차곡선을 방정식으로 나타내게 되면서 이차곡선의 연구가 더욱 활발해졌다. [참고 자료: 박세희, "수학의 세계"]

"포물선, 타원, 쌍곡선을 방정식으로 어떻게 표현할 수 있을까?"

준 | 비 | 학 | 습

1 다음을 구하시오.

(1) 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 2)$, $\mathrm{B}(5,\ 10)$ 사이의 거리

(2) 점 $\mathrm{A}(2,\ 3)$과 직선 $3x-4x+1=0$ 사이의 거리

2 다음 이차함수의 그래프에서 축과 꼭짓점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=-x^2$ (2) $y=x^2-2x-2$

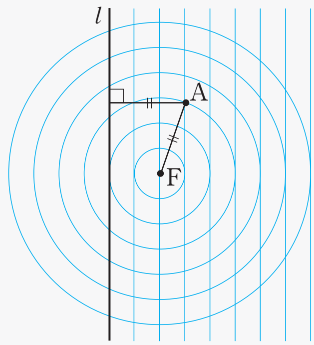
01 포물선

• 포물선의 뜻을 알고, 포물선의 방정식을 구할 수 있다.

포물선의 방정식은 어떻게 구할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림과 같이 중심이 F이고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5, 6인 원들과 직선 l, 직선 l과 평행하고 간격이 1인 직선들이 있다.

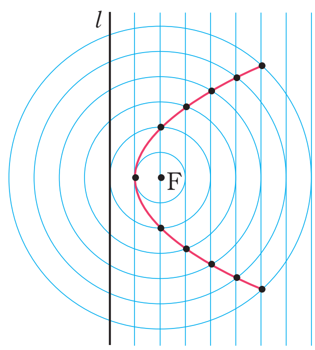


1 점 A에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리는 3으로 서로 같다. 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 3인 또 다른 점 B를 찾아 표시하시오.

2 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 서로 같은 점들을 찾아 표시하시오.

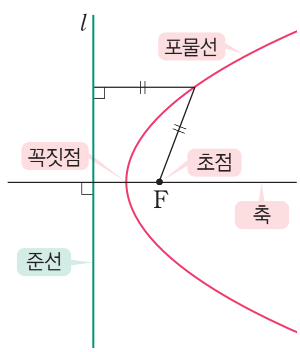
3 1, 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하시오.

위의 개념 열기에서 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 서로 같은 점들을 찾아 표시하고 이 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같은 모양의 도형이 나타난다.



이와 같이 평면 위의 한 점 F와 그 점을 지나지 않는 한 직선 l이 있을 때, 점 F와 직선 l에 이르는 거리가 서로 같은 점들의 집합을 **포물선**이라고 한다.

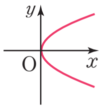
이때 점 F를 포물선의 **초점**, 직선 l을 포물선의 **준선**이라고 한다.



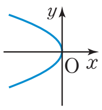
또 포물선의 초점을 지나고 준선에 수직인 직선을 포물선의 **축**, 축과 포물선의 교점을 포물선의 **꼭짓점**이라고 한다.

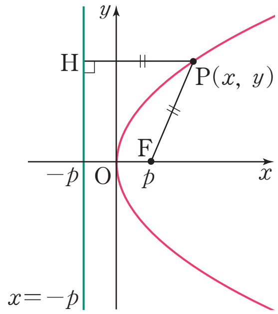
좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(p,\ 0)(p\neq0)$을 초점으로 하고 직선 $x=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 구해 보자.

$p>0$



$p<0$





포물선 위의 임의의 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$에서 준선 $x=-p$에 내린 수선의 발을 H라고 하면 점 H의 좌표는 $(-p,\ y)$이다.

포물선의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$이므로

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2}=|x+p|$$

이고, 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면 다음과 같다.

$$y^2=4px \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

역으로 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{PH}}$를 만족시키므로 주어진 포물선 위의 점이다.

따라서 ①은 구하는 포물선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

포물선의 방정식 (1)

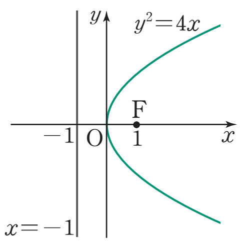
초점이 $\mathrm{F}(p,\ 0)$, 준선이 $x=-p$인 포물선의 방정식은

$y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

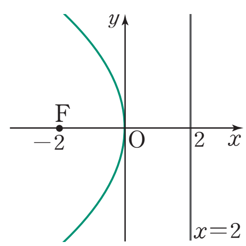
포물선 $y^2=4px$의 꼭짓점은 원점이고, 축은 x축이다.

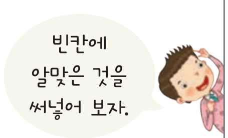
스스로 확인하기

(1) 초점이 $\mathrm{F}(1,\ 0)$이고, 준선이 $x=-1$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$에서 $p=1$이므로 $y^2=4x$



(2) 초점이 $\mathrm{F}(-2,\ 0)$이고, 준선이 $x=2$인 포물선의 방정식은 $y^2=4px$에서 $p=$ $\boxed{}$ 이므로 $y^2=$ $\boxed{}$





문제 01 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, 준선이 $x=-4$인 포물선

(2) 초점이 $\mathrm{F}(-3,\ 0)$, 준선이 $x=3$인 포물선

예제 1

다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 포물선을 그리시오.

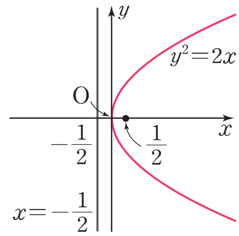
(1) $y^2=2x$ (2) $y^2=-x$

풀이 (1) $y^2=2x=4\times\frac{1}{2}x$이므로 $p=\frac{1}{2}$

따라서 초점의 좌표는 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$

준선의 방정식은 $x=-\frac{1}{2}$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.

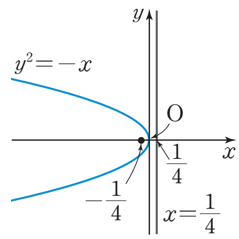


(2) $y^2=-x=4\times\left(-\frac{1}{4}\right)x$이므로 $p=-\frac{1}{4}$

따라서 초점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{4},\ 0\right)$

준선의 방정식은 $x=\frac{1}{4}$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.

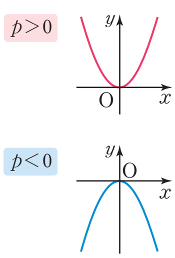


답 풀이 참고

문제 02

다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 포물선을 그리시오.

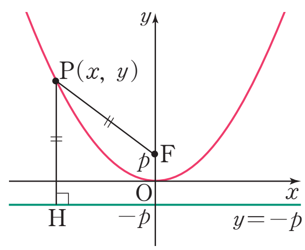
(1) $y^2=x$ (2) $y^2=-2x$



좌표평면에서 점 $\mathrm{F}(0,\ p)(p\neq 0)$를 초점으로 하고 직선 $y=-p$를 준선으로 하는 포물선의 방정식을 포물선의 정의를 이용하여 구하면

$$x^2=4py$$

이다.

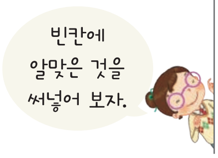


이상을 정리하면 다음과 같다.

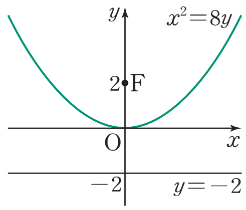
> **포물선의 방정식** (2)
>
> 초점이 $\mathrm{F}(0,\ p)$, 준선이 $y=-p$인 포물선의 방정식은
>
> $x^2=4py$ (단, $p\neq 0$)

포물선 $x^2=4py$의 꼭짓점은 원점이고, 축은 y축이다.

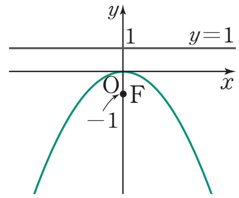
스스로 확인하기



(1) 초점이 F$(0,\ 2)$이고, 준선이 $y=-2$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$에서 $p=2$ 이므로 $x^2=8y$



(2) 초점이 F$(0,\ -1)$이고, 준선이 $y=1$인 포물선의 방정식은 $x^2=4py$에서 $p=\boxed{\quad}$이므로 $x^2=\boxed{\quad}$



문제 03 다음 포물선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 F$\left(0,\ \frac{1}{4}\right)$, 준선이 $y=-\frac{1}{4}$인 포물선

(2) 초점이 F$(0,\ -3)$, 준선이 $y=3$인 포물선

예제 2 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 포물선을 그리시오.

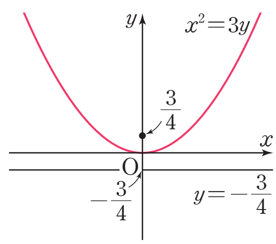
(1) $x^2=3y$　　　　(2) $x^2=-8y$

풀이 (1) $x^2=3y=4\times\frac{3}{4}y$이므로 $p=\frac{3}{4}$

따라서 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{3}{4}\right)$

준선의 방정식은 $y=-\frac{3}{4}$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.

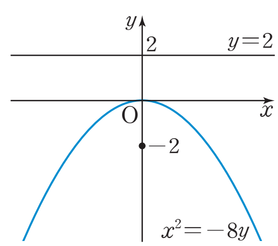


(2) $x^2=-8y=4\times(-2)y$이므로 $p=-2$

따라서 초점의 좌표는 $(0,\ -2)$

준선의 방정식은 $y=2$

또 포물선은 오른쪽 그림과 같다.



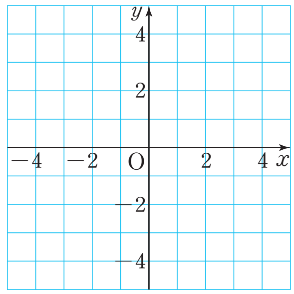
답 풀이 참고

문제 04 다음 포물선의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하고, 포물선을 그리시오.

(1) $x^2=\frac{1}{2}y$ (2) $x^2=-16y$

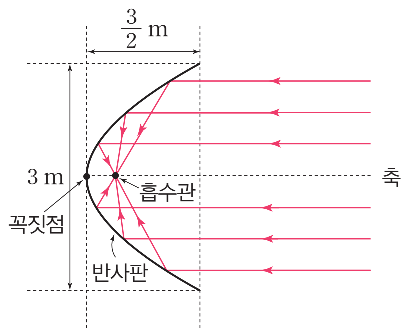
문제 05 의사소통

두 포물선 $y^2=4x$와 $x^2=4y$를 오른쪽 좌표평면 위에 그리고, 두 포물선의 관계를 설명하시오.



문제 06 수학 + 과학

오른쪽 그림과 같이 태양열 에너지를 생산하는 기계의 반사판의 단면은 포물선 모양이다. 이때 포물선의 축에 평행하게 들어오는 빛은 반사판에 반사되어 포물선의 초점의 위치에 있는 흡수관에 모인다. 흡수관은 포물선의 꼭짓점으로부터 몇 m 떨어져 있는지 구하시오.



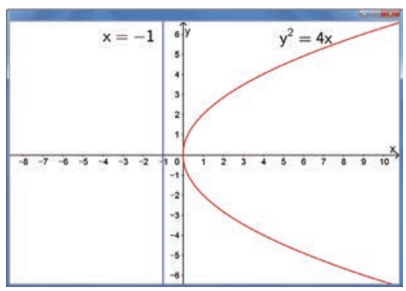
의사소통 | 정보 처리

수학 역량 기르기

설명할 때는

✔ 수학적 언어를 사용하여 자신의 생각을 정확하게 표현한다.

공학적 도구를 이용하여 포물선 $y^2=4px$에서 초점의 x좌표가 각각 $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 3, 4일 때의 그래프를 그리고, 초점의 위치에 따라 포물선의 모양이 어떻게 변하는지 설명해 보자.



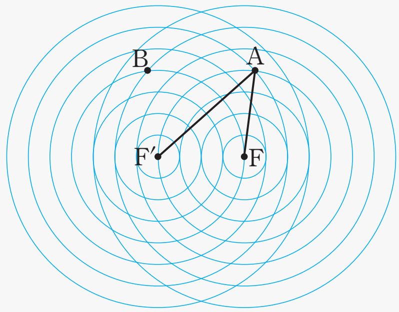
02 타원

• 타원의 뜻을 알고, 타원의 방정식을 구할 수 있다.

타원의 방정식은 어떻게 구할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림과 같이 중심이 각각 F, F′이고, 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, …, 7인 원들이 있다.

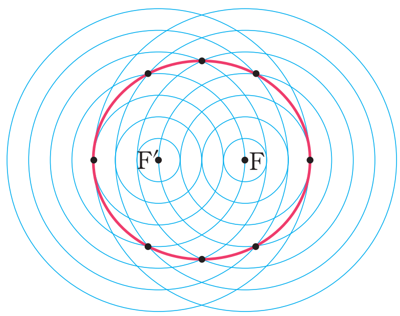


1 점 A는 두 점 F, F′으로부터 거리의 합이 10인 점이다. 점 B에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 합을 구하시오.

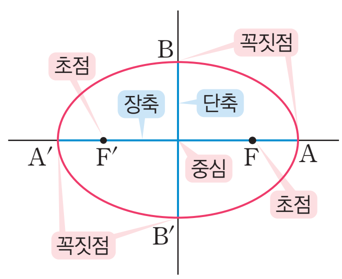
2 두 점 F, F′으로부터 거리의 합이 10인 점들을 찾아 표시하시오.

3 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하시오.

위의 개념 열기에서 두 점 F, F′으로부터 거리의 합이 10인 점들을 찾아 표시하고 이 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같은 모양의 도형이 나타난다.



이와 같이 평면 위의 두 점 F, F′으로부터 거리의 합이 일정한 점들의 집합을 **타원**이라고 한다.



이때 두 점 F, F′을 타원의 **초점**이라고 한다.

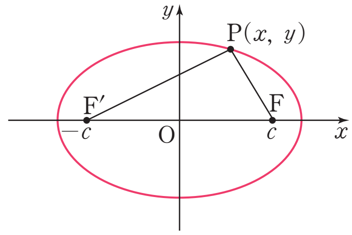
또 타원의 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 타원과 만나는 점을 각각 A, A′이라 하고, 선분 FF′의 수직이등분선이 타원과 만나는 점을 각각 B, B′이라고 하자. 이때 네 점 A, A′, B, B′을 타원의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′을 타원의 **장축**, 선분 BB′을 타원의 **단축**이라고 하며 장축과 단축의 교점을 타원의 **중심**이라고 한다.

타원의 두 초점은 장축 위에 있다.

곡물이나 기름을 운반하는 트럭에서 타원 모양의 탱크를 볼 수 있다.

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 두 점 F, F′으로부터 거리의 합이 $2a(a>c>0)$인 타원의 방정식을 구해 보자.

타원 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 타원의 정의에 의하여



$$\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=2a$$

이므로

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$
$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이다.

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$$

이다. 이때 $a^2-c^2=b^2$으로 놓고 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

역으로 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF}'}=2a$를 만족시키므로 주어진 타원 위의 점이다.

따라서 ①은 구하는 타원의 방정식이다.

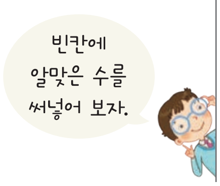
이상을 정리하면 다음과 같다.

타원의 방정식 (1)

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } a>c>0,\ b^2=a^2-c^2)$$

스스로 확인하기

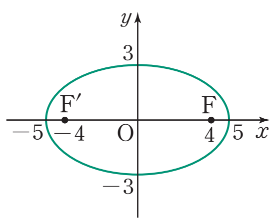


두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$으로부터 거리의 합이 10인 타원의 방정식은

$2a=10$에서 $\quad a=\square$

$c=4$에서 $\quad b^2=a^2-c^2=25-16=9$

이므로 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{\square}=1$이다.



문제 01

다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $F(2,\ 0)$, $F'(-2,\ 0)$으로부터 거리의 합이 6인 타원

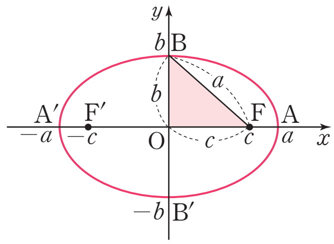
(2) 두 초점 $F(3,\ 0)$, $F'(-3,\ 0)$으로부터 거리의 합이 8인 타원

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축 및 원점에 대하여 각각 대칭이다.

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$의 두 초점을 $F(c,\ 0)$, $F'(-c,\ 0)(a>c>0)$이라고 하면 $b^2=a^2-c^2$에서 $c^2=a^2-b^2$이므로 두 초점은 각각

$$F(\sqrt{a^2-b^2},\ 0),\ F'(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$$

이다.



또 네 꼭짓점은 각각

$$A(a,\ 0),\ A'(-a,\ 0),\ B(0,\ b),\ B'(0,\ -b)$$

이고, 장축의 길이는 $\overline{AA'}=2a$, 단축의 길이는 $\overline{BB'}=2b$이다.

예제 1

타원 $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 장축, 단축의 길이와 초점의 좌표를 구하고, 타원을 그리시오.

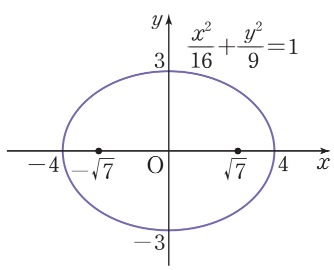
풀이 $a=4$, $b=3$이므로 $c=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

따라서 초점의 좌표는 $(\sqrt{7},\ 0)$, $(-\sqrt{7},\ 0)$

장축의 길이는 $2a=8$

단축의 길이는 $2b=6$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$, $(0,\ 3)$, $(0,\ -3)$이고, 타원은 오른쪽 그림과 같다.



답 풀이 참고

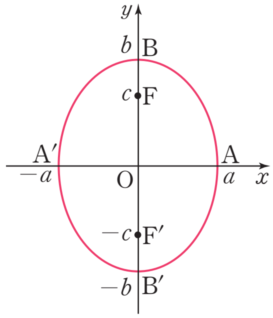
문제 02

다음 타원의 장축, 단축의 길이와 초점의 좌표를 구하고, 타원을 그리시오.

(1) $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$

(2) $4x^2+9y^2=36$

좌표평면에서 두 점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$를 초점으로 하고, 두 점 F, F'으로부터 거리의 합이 $2b(b>c>0)$인 타원의 방정식을 타원의 정의를 이용하여 구하면



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(a^2=b^2-c^2)$$

이다.

이때 두 초점은 각각

$$F(0,\ \sqrt{b^2-a^2}),\ F'(0,\ -\sqrt{b^2-a^2})$$

이다.

또 장축의 길이는 $\overline{BB'}=2b$, 단축의 길이는 $\overline{AA'}=2a$이다.

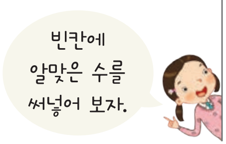
이상을 정리하면 다음과 같다.

타원의 방정식 (2)

두 초점 $F(0,\ c)$, $F'(0,\ -c)$로부터 거리의 합이 $2b$인 타원의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } b>c>0,\ a^2=b^2-c^2)$$

스스로 확인하기

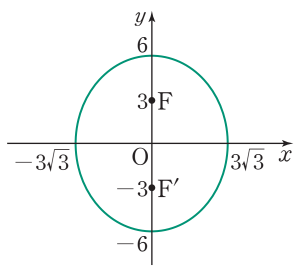


두 초점 $F(0,\ 3)$, $F'(0,\ -3)$으로부터 거리의 합이 12인 타원의 방정식은

$2b=12$에서 $b=\boxed{}$

$c=3$에서 $a^2=b^2-c^2=36-9=27$

이므로 $\dfrac{x^2}{\boxed{}}+\dfrac{y^2}{36}=1$이다.



문제 03 다음 타원의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $F(0,\ 2)$, $F'(0,\ -2)$로부터 거리의 합이 8인 타원

(2) 두 초점이 $F(0,\ 4)$, $F'(0,\ -4)$이고 장축의 길이가 10인 타원

예제 2

타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$의 장축, 단축의 길이와 초점의 좌표를 구하고, 타원을 그리시오.

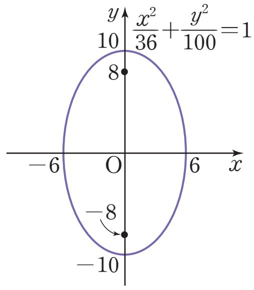
풀이 $a=6$, $b=10$이므로 $c=\sqrt{10^2-6^2}=8$

따라서 초점의 좌표는 $(0,\ 8)$, $(0,\ -8)$

장축의 길이는 $2b=20$

단축의 길이는 $2a=12$

이때 꼭짓점의 좌표는 $(6,\ 0)$, $(-6,\ 0)$, $(0,\ 10)$, $(0,\ -10)$이고, 타원은 오른쪽 그림과 같다.



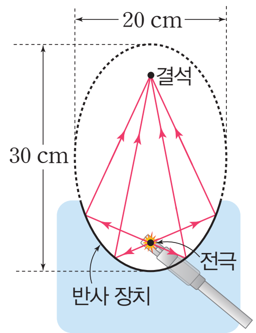
답 풀이 참고

문제 04 다음 타원의 장축, 단축의 길이와 초점의 좌표를 구하고, 타원을 그리시오.

(1) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ (2) $9x^2+y^2=9$

문제 05 수학+의학

오른쪽 그림과 같이 체외 충격파 쇄석기의 반사 장치의 단면은 타원 모양이고, 타원의 한 초점의 위치에 있는 전극에서 발생한 충격파는 반사 장치에 반사되어 다른 초점의 위치에 있는 결석으로 향한다. 타원의 장축의 길이가 30 cm, 단축의 길이가 20 cm일 때, 전극에서 결석까지의 거리를 구하시오.



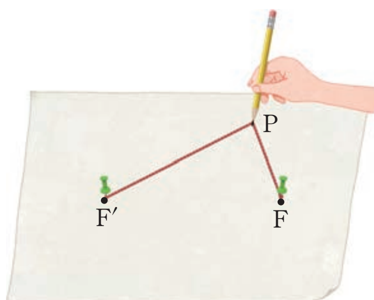
추론

수학 역량 기르기

추론할 때는

✔ 자신의 지식과 경험으로부터 논리적으로 수학적 추측을 이끌어 낸다.

오른쪽 그림과 같이 길이가 10 cm인 실의 양 끝을 두 점 F, F′에 각각 고정한 다음, 연필 끝으로 실을 팽팽하게 당기면서 연필의 끝 점 P를 움직여 보자. 이때 점 P가 그리는 도형이 무엇일지 추측해 보고, 그 이유를 설명해 보자.



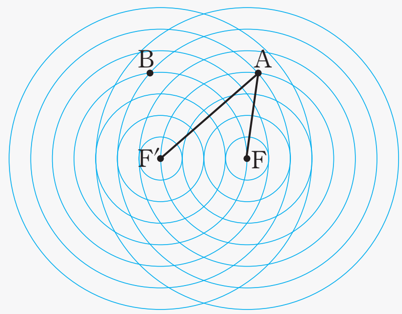
03 쌍곡선

• 쌍곡선의 뜻을 알고, 쌍곡선의 방정식을 구할 수 있다.

쌍곡선의 방정식은 어떻게 구할까?

개 념 열 기

오른쪽 그림과 같이 중심이 각각 F, F′이고, 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, ⋯, 7인 원들이 있다.

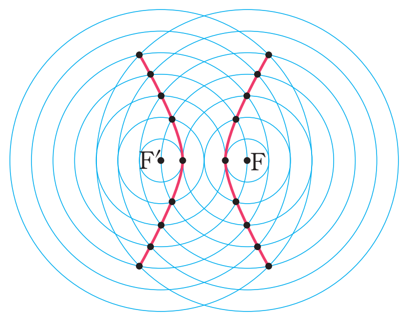


1 점 A는 두 점 F, F′으로부터 거리의 차가 2인 점이다. 점 B에서 두 점 F, F′에 이르는 거리의 차를 구하시오.

2 두 점 F, F′으로부터 거리의 차가 2인 점들을 찾아 표시하시오.

3 2에서 표시한 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하시오.

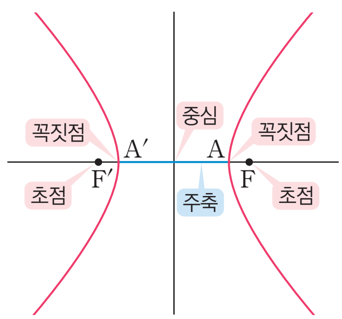
위의 개념 열기에서 두 점 F, F′으로부터 거리의 차가 2인 점들을 찾아 표시하고 이 점들을 매끄러운 곡선으로 연결하면 오른쪽 그림과 같은 모양의 도형이 나타난다.



이와 같이 평면 위의 두 점 F, F′으로부터 거리의 차가 일정한 점들의 집합을 **쌍곡선**이라고 한다.

이때 두 점 F, F′을 쌍곡선의 **초점**이라고 한다.

또 쌍곡선의 두 초점 F, F′을 잇는 직선이 쌍곡선과 만나는 점을 각각 A, A′이라고 할 때, 두 점 A, A′을 쌍곡선의 **꼭짓점**이라 하고, 선분 AA′을 쌍곡선의 **주축**, 선분 AA′의 중점을 쌍곡선의 **중심**이라고 한다.

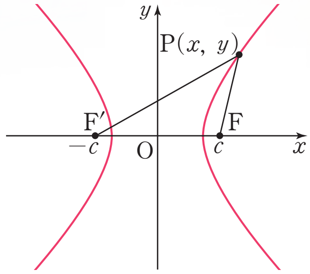


쌍곡선의 두 초점은 주축을 포함하는 직선 위에 있다.

화력 발전소의 냉각탑에서 쌍곡선 모양을 볼 수 있다.

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$을 초점으로 하고, 두 점 F, F'으로부터 거리의 차가 $2a(c>a>0)$인 쌍곡선의 방정식을 구해 보자.

쌍곡선 위의 임의의 점을 $\mathrm{P}(x,\ y)$라고 하면 쌍곡선의 정의에 의하여



$$|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}|=2a$$

이므로

$$\left|\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right|=2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a$$

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\pm 2a$$

이다. 이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

이고, 다시 양변을 제곱하여 정리하면

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$

이다. 이때 $c^2-a^2=b^2$으로 놓고 양변을 a^2b^2으로 나누면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.

역으로 ①을 만족시키는 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$는 $|\overline{\mathrm{PF}}-\overline{\mathrm{PF}'}|=2a$를 만족시키므로 주어진 쌍곡선 위의 점이다.

따라서 ①은 구하는 쌍곡선의 방정식이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 방정식 (1)

두 초점 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ (단, } c>a>0,\ b^2=c^2-a^2\text{)}$$

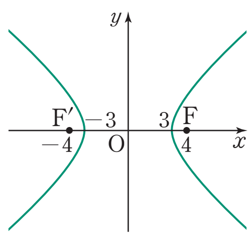
스스로 확인하기

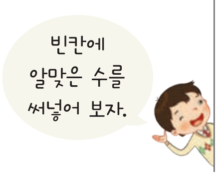
두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$으로부터 거리의 차가 6인 쌍곡선의 방정식은

$2a=6$에서 $\quad a=\boxed{}$

$c=4$에서 $\quad b^2=c^2-a^2=16-9=7$

이므로 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{\boxed{}}=1$이다.





문제 01 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(3,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-3,\ 0)$으로부터 거리의 차가 4인 쌍곡선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(6,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-6,\ 0)$으로부터 거리의 차가 10인 쌍곡선

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점을 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\ (c>a>0)$이라고 하면 $b^2=c^2-a^2$에서 $c^2=a^2+b^2$이므로 두 초점은 각각

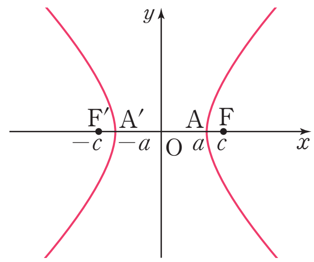
$$\mathrm{F}(\sqrt{a^2+b^2},\ 0),\ \mathrm{F}'(-\sqrt{a^2+b^2},\ 0)$$

이다.

또 두 꼭짓점은 각각

$$\mathrm{A}(a,\ 0),\ \mathrm{A}'(-a,\ 0)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{AA}'}=2a$이다.



쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$은 x축, y축 및 원점에 대하여 각각 대칭이다.

예제 1

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하시오.

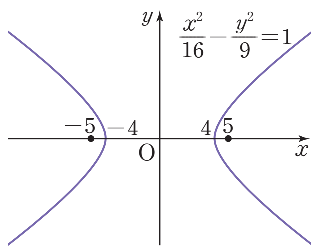
풀이

$a=4$, $b=3$이므로 $c=\sqrt{4^2+3^2}=5$

따라서 초점의 좌표는 $(5,\ 0)$, $(-5,\ 0)$

꼭짓점의 좌표는 $(4,\ 0)$, $(-4,\ 0)$

주축의 길이는 $2a=8$



답 풀이 참고

문제 02 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하시오.

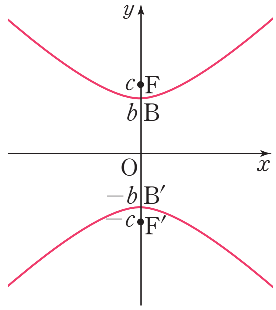
(1) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

(2) $9x^2-y^2=9$

좌표평면에서 두 점 $\mathrm{F}(0,\ c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$를 초점으로 하고, 두 점 F, F′으로부터 거리의 차가 $2b(c>b>0)$인 쌍곡선의 방정식을 쌍곡선의 정의를 이용하여 구하면

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1(a^2=c^2-b^2)$$

이다.



이때 두 초점은 각각

$$\mathrm{F}(0,\ \sqrt{a^2+b^2}),\ \mathrm{F}'(0,\ -\sqrt{a^2+b^2})$$

이다.

또 두 꼭짓점은 각각

$$\mathrm{B}(0,\ b),\ \mathrm{B}'(0, -b)$$

이고, 주축의 길이는 $\overline{\mathrm{BB}'}=2b$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 방정식 (2)

두 초점 $\mathrm{F}(0, c)$, $\mathrm{F}'(0,\ -c)$로부터 거리의 차가 $2b$인 쌍곡선의 방정식은

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1\ (\text{단, } c>b>0,\ a^2=c^2-b^2)$$

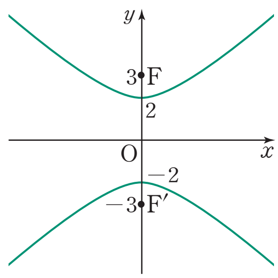
스스로 확인하기

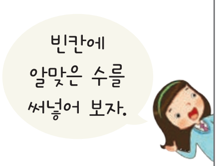
두 초점 $\mathrm{F}(0, 3)$, $\mathrm{F}'(0,\ -3)$으로부터 거리의 차가 4인 쌍곡선의 방정식은

$2b=4$에서 $b=\square$

$c=3$에서 $a^2=c^2-b^2=9-4=5$

이므로 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{\square}=-1$이다.





문제 03 다음 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 5)$, $\mathrm{F}'(0,\ -5)$로부터 거리의 차가 6인 쌍곡선

(2) 두 초점이 $\mathrm{F}(0,\ 6)$, $\mathrm{F}'(0,\ -6)$이고 주축의 길이가 8인 쌍곡선

예제 2

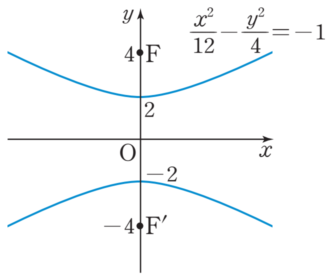
쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=-1$의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하시오.

풀이 $a=2\sqrt{3}$, $b=2$이므로 $c=\sqrt{(2\sqrt{3})^2+2^2}=4$

따라서 초점의 좌표는 $(0,\ 4)$, $(0,\ -4)$

꼭짓점의 좌표는 $(0,\ 2)$, $(0,\ -2)$

주축의 길이는 $2b=4$



답 풀이 참고

문제 04 다음 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하시오.

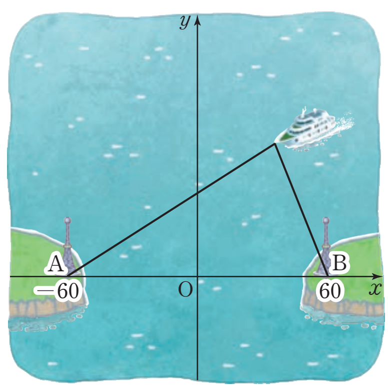
(1) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=-1$ (2) $x^2-8y^2+8=0$

열린 **문제 05** **문제 04**와 같이 쌍곡선의 방정식을 스스로 정하고, 쌍곡선의 초점과 꼭짓점의 좌표, 주축의 길이를 구하시오.

문제 06 수학+과학

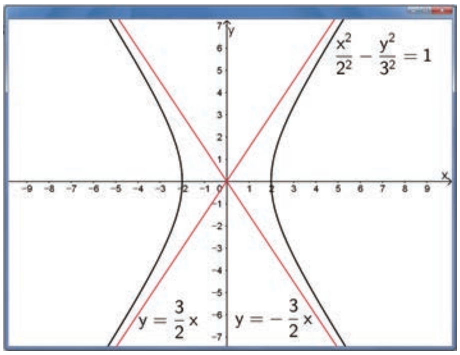
두 기지국에서 배로 동시에 전파를 보낸 후, 두 전파가 배에 도달하는 데 걸린 시간 차를 이용하여 배의 위치를 알아내는 방법을 쌍곡선 항법이라고 한다.

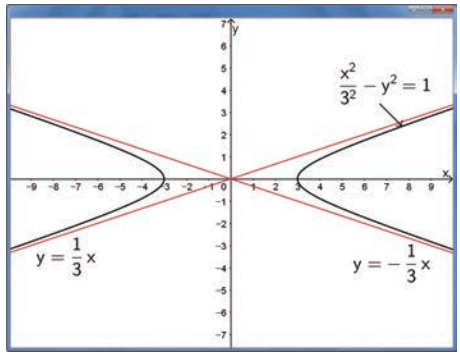
오른쪽 그림은 120 km 떨어진 두 기지국 A, B와 배를 좌표평면 위에 나타낸 것이다. 두 기지국 A, B에서 배로 동시에 전파를 보낸 결과 배는 두 기지국 A, B로부터 거리의 차가 60 km인 지점에 있었다고 한다. 배가 위치할 수 있는 점들로 이루어진 곡선의 방정식을 구하시오.



쌍곡선의 점근선은 어떻게 나타낼까?

다음 그림은 공학적 도구를 이용하여 쌍곡선 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$과 두 직선 $y=\frac{3}{2}x$, $y=-\frac{3}{2}x$, 쌍곡선 $\frac{x^2}{3^2}-y^2=1$과 두 직선 $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$를 그린 것이다.





위의 그림에서 알 수 있듯이 x의 절댓값이 커질수록 쌍곡선 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$은 두 직선 $y=\frac{3}{2}x$, $y=-\frac{3}{2}x$에, 쌍곡선 $\frac{x^2}{3^2}-y^2=1$은 두 직선 $y=\frac{1}{3}x$, $y=-\frac{1}{3}x$에 한없이 가까워진다.

고등학교 수학

곡선이 어떤 직선에 한없이 가까워질 때, 이 직선을 그 곡선의 점근선이라고 한다.

일반적으로 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$은 x의 절댓값이 커질수록 두 직선 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$에 한없이 가까워진다. 이 두 직선을 쌍곡선의 **점근선**이라고 한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

쌍곡선의 점근선

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$의 점근선의 방정식은

$$y=\frac{b}{a}x,\ y=-\frac{b}{a}x$$

| 참고 | 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$의 점근선의 방정식도 $y=\frac{b}{a}x$, $y=-\frac{b}{a}x$이다.

스스로 확인하기

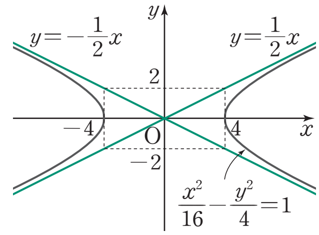
쌍곡선을 그릴 때는 점근선을 이용하면 편리하다.

쌍곡선 $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1$에서 $a=4$, $b=2$이므로

점근선의 방정식은

$$y=\pm\frac{2}{4}x,\ \text{즉}\quad y=\pm\frac{1}{2}x$$

이고, 쌍곡선은 오른쪽 그림과 같다.



문제 07 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하고, 쌍곡선과 점근선을 그리시오.

(1) $x^2-\frac{y^2}{9}=1$　　　　(2) $x^2-y^2=-16$

포물선, 타원, 쌍곡선을 평행이동하면 어떻게 될까?

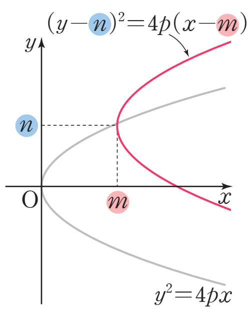
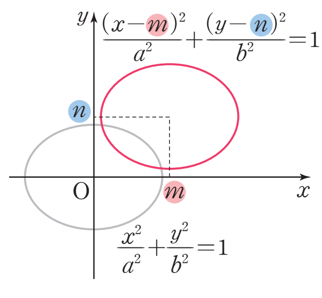
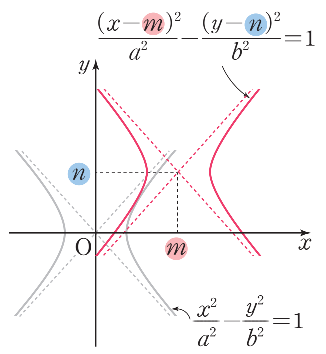
포물선, 타원, 쌍곡선을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 다음과 같다.

고등학교 수학

방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 도형의 방정식은

$f(x-m,\ y-n)=0$

이다.

포물선	타원	쌍곡선
$y^2=4px$ (단, $p\neq0$) ⬇ $(y-n)^2=4p(x-m)$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ⬇ $\frac{(x-m)^2}{a^2}+\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ ⬇ $\frac{(x-m)^2}{a^2}-\frac{(y-n)^2}{b^2}=1$
		

이때

포물선의 초점, 꼭짓점, 준선,

타원의 초점, 중심, 꼭짓점,

쌍곡선의 초점, 중심, 꼭짓점, 점근선

도 모두 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동된다.

예제 3

포물선 $x^2-2x-2y+3=0$의 초점의 좌표와 준선의 방정식을 구하시오.

풀이 주어진 포물선의 방정식을 변형하면 $(x-1)^2=2(y-1)$

이 포물선은 포물선 $x^2=2y$를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이다.

포물선 $x^2=2y$의 초점의 좌표는 $\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$, 준선의 방정식은 $y=-\frac{1}{2}$이므로 구하는 포물선의 초점의 좌표는 $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$, 준선의 방정식은 $y=\frac{1}{2}$이다.

답 초점: $\left(1,\ \frac{3}{2}\right)$, 준선: $y=\frac{1}{2}$

문제 08

다음 타원, 쌍곡선의 초점의 좌표를 구하시오.

(1) 타원 $3x^2+y^2+6x-8y+10=0$

(2) 쌍곡선 $2x^2-3y^2-8x+18y-25=0$

이차곡선은 무엇일까?

프랑스의 수학자 데카르트(Descartes, R., 1596~1650)가 좌표평면을 도입함으로써 이후 원뿔곡선을 이차곡선의 형태로 정의할 수 있게 되었다.

원, 포물선, 타원, 쌍곡선은 모두 x, y에 대한 이차방정식으로 나타낼 수 있다.

일반적으로 두 일차식의 곱으로 인수분해되지 않는 x, y에 대한 이차방정식

$$Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

으로 나타낼 수 있는 곡선을 **이차곡선**이라고 한다.

| 참고 | 다음과 같이 ①이 이차곡선을 나타내지 못하는 경우도 있다.

- $x^2+y^2=0$ ➡ 한 점
- $x^2+y^2+1=0$(해가 없음) ➡ 도형으로 나타낼 수 없음
- $x^2-y^2=0$(두 일차식의 곱으로 인수분해) ➡ 두 직선

문제 09

다음 방정식은 어떤 도형을 나타내는지 말하시오.

(1) $x^2+(y+2)^2-4=0$

(2) $x^2+6x-4y+9=0$

(3) $2x^2-y^2-12x-4y-18=0$

(4) $3x^2+12x+y^2=0$

중단원 학습 점검

정답과 해설 ▸ 165쪽

개념 정리

● **포물선의 방정식**

(1) 초점 $(p,\ 0)$, 준선 $x=-p$ ➡ $y^2=4px$ (단, $p\neq0$)

(2) 초점 $(0,\ p)$, 준선 $y=-p$ ➡ $x^2=4py$ (단, $p\neq0$)

● **타원의 방정식**

(1) 두 초점 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$으로부터 거리의 합이 $2a$

➡ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $a>c>0$, $b^2=a^2-c^2$)

(2) 두 초점 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$로부터 거리의 합이 $2b$

➡ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $b>c>0$, $a^2=b^2-c^2$)

● **쌍곡선의 방정식**

(1) 두 초점 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$으로부터 거리의 차가 $2a$

➡ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (단, $c>a>0$, $b^2=c^2-a^2$)

(2) 두 초점 $(0,\ c)$, $(0,\ -c)$로부터 거리의 차가 $2b$

➡ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ (단, $c>b>0$, $a^2=c^2-b^2$)

O, X 문제

다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

1 포물선 $y^2=-2x$의 축은 x축이고 꼭짓점의 좌표는 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$이다.

2 타원의 초점은 항상 x축 위에 있다.

3 쌍곡선 위의 한 점에서 두 초점에 이르는 거리의 차는 주축의 길이와 같다.

4 방정식 $x^2+y^2=0$이 나타내는 도형은 이차곡선이다.

기초 문제

1 다음 이차곡선의 방정식을 구하시오.

(1) 초점이 $\mathrm{F}(-1,\ 0)$이고 준선이 $x=1$인 포물선

(2) 두 초점 $\mathrm{F}(0,\ 1)$, $\mathrm{F}'(0,\ -1)$로부터 거리의 합이 4인 타원

(3) 두 초점 $\mathrm{F}(4,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-4,\ 0)$으로부터 거리의 차가 2인 쌍곡선

2 다음을 구하시오.

(1) 포물선 $x^2=\frac{1}{8}y$의 초점의 좌표와 준선의 방정식

(2) 타원 $3x^2+4y^2=48$의 초점의 좌표와 장축, 단축의 길이

(3) 쌍곡선 $4x^2-5y^2=-20$의 초점, 꼭짓점의 좌표와 주축의 길이

3 다음 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하시오.

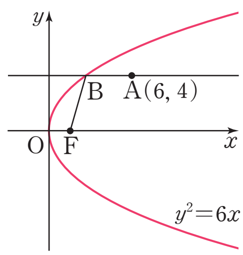
(1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

(2) $x^2-2y^2=-2$

기본 문제

4 꼭짓점이 원점이고 초점이 x축 위에 있는 포물선이 점 $(-3,\ 6)$을 지날 때, 포물선의 방정식을 구하시오.

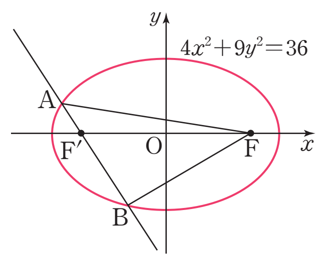
5 오른쪽 그림과 같이 점 $\mathrm{A}(6,\ 4)$를 지나고 x축에 평행한 직선이 포물선 $y^2=6x$와 만나는 점을 B라고 하자. 이 포물선의 초점을 F라고 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BF}}$의 값을 구하시오.



6 포물선 $x^2+8y-8=0$의 준선을 l, 포물선 $y^2+6y+8x-7=0$의 초점을 F라고 할 때, 점 F와 직선 l 사이의 거리를 구하시오.

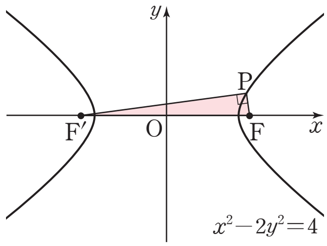
7 타원 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{16}=1$과 두 초점을 공유하고 점 $(0,\ 3)$을 지나는 타원의 방정식을 구하시오.

8 다음 그림과 같이 타원 $4x^2+9y^2=36$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고, 초점 F′을 지나며 초점 F는 지나지 않는 직선이 타원과 만나는 두 점을 각각 A, B라고 하자. 이때 삼각형 ABF의 둘레의 길이를 구하시오.



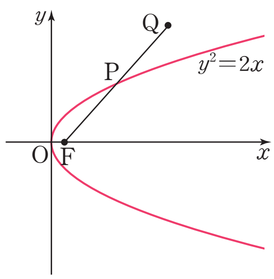
9 두 직선 $y=\dfrac{1}{2}x$, $y=-\dfrac{1}{2}x$를 점근선으로 하고, 점 $(4,\ 1)$을 지나는 쌍곡선의 방정식을 구하시오.

10 다음 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-2y^2=4$의 두 초점 F, F′과 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\angle F'PF=90°$일 때, 삼각형 PF′F의 넓이를 구하시오.



도전 문제

11 다음 그림과 같이 포물선 $y^2=2x$의 초점을 F라고 하자. 제1사분면에 있는 포물선 위의 점 P에 대하여 $\overline{FP}=3$이고, $\overline{FP}$의 연장선 위에 $\overline{FP}=\overline{PQ}$가 되도록 점 Q를 잡을 때, 점 Q의 좌표를 구하시오.

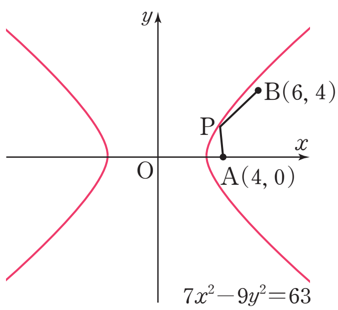


12 다음은 케플러 법칙의 일부이다.

> 태양계의 모든 행성은 태양을 한 초점으로 하는 타원 궤도를 그리며 공전한다.
> 태양으로부터 행성까지의 거리를 r, 행성의 속력을 v라고 하면 타원 궤도의 장축과 타원 궤도가 만나는 두 지점에서 rv의 값은 서로 같다.

두 초점 사이의 거리가 $2c$인 타원 궤도를 그리며 태양 주위를 공전하는 행성이 있다. 단축과 타원 궤도가 만나는 한 지점에서 태양까지의 거리가 a이고, 장축과 타원 궤도가 만나는 두 지점에서의 속력의 비가 $5:3$일 때, 케플러 법칙을 이용하여 $a:c$를 구하시오.

13 다음 그림과 같이 쌍곡선 $7x^2-9y^2=63$과 두 점 A(4, 0), B(6, 4)가 있다. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P에 대하여 $\overline{PA}+\overline{PB}$의 최솟값을 구하시오.



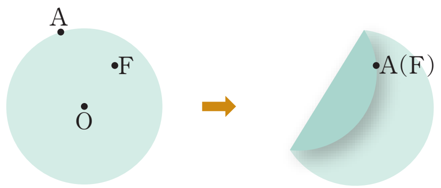
수행 과제

의사소통

활동 목표 종이접기를 통하여 이차곡선을 이해한다.

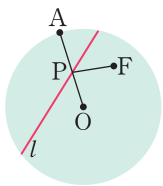
다음과 같은 방법으로 종이접기를 해 보자.

① 중심이 O인 원의 내부에 한 점 F를 정한다.
② 원 위의 한 점 A에 대하여 점 A와 점 F가 겹치도록 접었다 편 다음, 접은 선을 펜으로 그린다.
③ 점 A를 원을 따라 움직이면서 ②의 과정을 반복한다.



1 위의 활동을 한 결과로 볼 수 있는 도형이 무엇일지 추측해 보자.

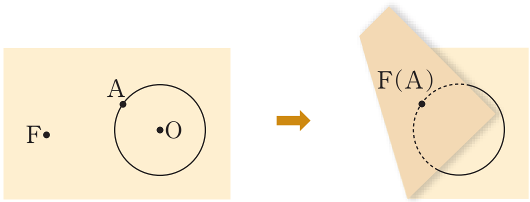
2 오른쪽 그림과 같이 원 위의 점 A가 점 F와 겹치도록 접었을 때 접은 선을 l이라 하고, 직선 l과 선분 OA의 교점을 P라고 하자. $\overline{AP}=\overline{PF}$임을 설명하고, 이를 이용하여 **1**의 도형이 나타나는 이유를 설명해 보자.



사고 확산하기

3 다음과 같은 방법으로 종이접기를 할 때, 그 결과로 볼 수 있는 도형이 무엇일지 추측해 보자. 또 그 도형이 나타나는 이유를 설명해 보자.

① 중심이 O인 원의 외부에 한 점 F를 정한다.
② 원 위의 한 점 A에 대하여 점 A와 점 F가 겹치도록 접었다 편 다음, 접은 선을 펜으로 그린다.
③ 점 A를 원을 따라 움직이면서 ②의 과정을 반복한다.



자기 평가	이차곡선의 개념을 이용하여 과제를 해결하였는가?
	수학적 언어로 해결 과정을 명확하게 표현하였는가?
	자신의 과제 해결 방법을 친구에게 논리적으로 설명하였는가?

사회! 수학과 통하다

따뜻한 발명! 태양열 조리기

태양열 에너지를 이용한 태양열 조리기는 독일의 한 발명가가 발명한 것으로 불이나 전기가 없이도 음식을 조리할 수 있는 도구이다. 이 조리기는 포물선의 축을 회전축으로 하여 포물선을 회전시킨 모양의 곡면 반사판을 만들고, 포물선의 초점의 위치에 조리할 용기를 설치한 것이다. 이렇게 하면 포물선의 성질에 의하여 반사판으로 들어오는 모든 태양열을 용기에 모을 수 있으므로 음식 조리가 가능해진다.

이 발명가는 누구나 자유롭게 이용할 수 있도록 조리기의 제조법 및 사용법을 특허를 내지 않고 공개하였다. 일명 '태양열 아궁이'로 불리는 이 태양열 조리기는 자원과 연료의 부족으로 어려움을 겪는 사람들의 생활 수준을 향상시킬 뿐만 아니라 땔감으로 나무를 베던 것을 줄여 환경 보호에도 도움을 준다고 한다.

[참고 자료: Lee Elliott, "Sun Solar Cooking"]

2

이차곡선과 직선

수학+과학

빛은 반사 법칙에 따라 직선 위의 한 점에 입사하면 입사각과 반사각의 크기가 같은 경로로 반사되고, 포물선, 타원, 쌍곡선 등 곡선 위의 한 점에 입사하면 그 점에서의 곡선의 접선에 대하여 입사각과 반사각의 크기가 같은 경로로 반사된다. 특히 이차곡선의 접선과 반사 법칙을 이용하면 빛이나 소리를 한곳으로 모을 수 있다. 이러한 원리는 집음기, 자동차 전조등, 치과용 조명기기, 망원경 등에 활용된다.

[참고 자료: Beiwei Zhang 외, "Automatic Calibration and Reconstruction for Active Vision Systems"]

"이차곡선의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?"

준비학습

1 다음 곡선과 직선 $x-y-1=0$의 교점의 좌표를 구하시오.

(1) $y=2x^2-1$ (2) $x^2+y^2=1$

2 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 $(1, \sqrt{3})$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

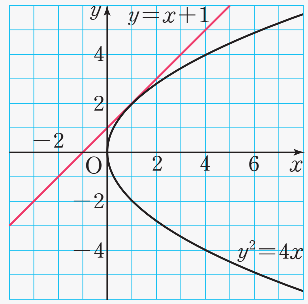
01 이차곡선과 직선

• 이차곡선과 직선의 위치 관계를 이해하고, 접선의 방정식을 구할 수 있다.

이차곡선과 직선의 위치 관계는 어떻게 알 수 있을까?

개 념 열 기

오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$와 직선 $y=x+1$은 한 점에서 만난다.
두 직선 $y=x$, $y=x+2$가 각각 포물선 $y^2=4x$와 만나는 점의 개수를 그래프를 이용하여 추측하시오.



축이 x축 또는 y축에 평행한 이차곡선과 직선의 방정식을 각각

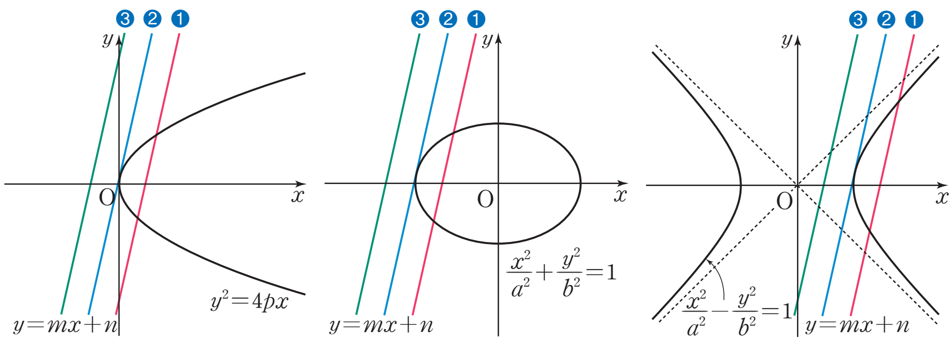
$$ax^2+by^2+cx+dy+e=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=mx+n \qquad \cdots\cdots ②$$

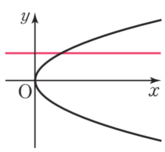
이라고 하면 이들의 교점의 x좌표는 두 방정식 ①, ②를 연립하여 얻은 x에 대한 방정식의 실근이다. 이 방정식이 이차방정식일 때, 그 판별식을 D라고 하면 D의 부호에 따라 이차곡선과 직선의 교점의 개수가 결정된다.

즉, 이차곡선과 직선의 위치 관계는 다음과 같다.

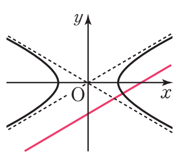
❶ $D>0$일 때, 서로 다른 두 점에서 만난다.
❷ $D=0$일 때, 한 점에서 만난다(접한다).
❸ $D<0$일 때, 만나지 않는다.



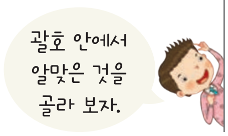
포물선의 축과 평행한 직선은 포물선과 한 점에서 만나지만 접선은 아니다.



쌍곡선의 점근선과 평행한 직선은 쌍곡선과 한 점에서 만나지만 접선은 아니다.



스스로 확인하기



포물선 $x^2=4y$와 직선 $y=2x-5$에 대하여 $y=2x-5$를 $x^2=4y$에 대입하여 정리하면

$$x^2-8x+20=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 $\frac{D}{4}=(-4)^2-20=-4<0$

따라서 포물선 $x^2=4y$와 직선 $y=2x-5$는

(서로 다른 두 점에서 만난다, 한 점에서 만난다, 만나지 않는다).

문제 01

다음 이차곡선과 직선 $x-3y+3=0$의 위치 관계를 말하시오.

(1) $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

(2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{2}=-1$

예제 1

포물선 $y^2=8x$와 직선 $y=x+k$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 값의 범위를 구하시오.

풀이 $y=x+k$를 $y^2=8x$에 대입하여 정리하면

$$x^2+2(k-4)x+k^2=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=(k-4)^2-k^2=-8k+16>0$$

따라서 $k<2$

답 $k<2$

문제 02

쌍곡선 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$과 직선 $y=x+k$의 위치 관계가 다음과 같을 때, 상수 k의 값 또는 범위를 구하시오.

(1) 서로 다른 두 점에서 만난다.

(2) 한 점에서 만난다.

(3) 만나지 않는다.

기울기가 주어진 이차곡선의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 $m(m\neq0)$인 접선의 방정식을 구해 보자.

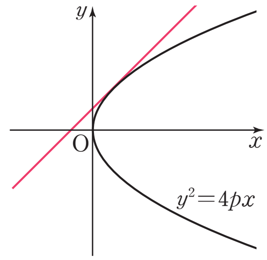
접선의 방정식을 $y=mx+n(m\neq0)$이라 하고,
포물선의 방정식 $y^2=4px$에 대입하여 정리하면

$$m^2x^2+2(mn-2p)x+n^2=0$$

이다. 이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$$\frac{D}{4}=4p(p-mn)=0$$

이므로 $n=\dfrac{p}{m}$이다.



따라서 구하는 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y=mx+\frac{p}{m}\ (\text{단, } m\neq0)$$

같은 방법으로 기울기가 주어진 타원의 접선의 방정식을 구해 보자.

예제 2

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$임을 보이시오.

풀이 접선의 방정식을 $y=mx+n$이라 하고, 타원의 방정식
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 대입하여 정리하면

$$(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mnx+a^2(n^2-b^2)=0$$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

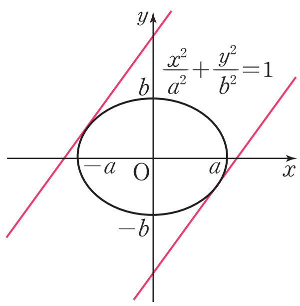
$$\frac{D}{4}=a^2b^2(a^2m^2+b^2-n^2)=0$$

이때 $ab\neq0$이므로 $n^2=a^2m^2+b^2$에서

$$n=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$



답 풀이 참고

문제 03

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은 $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$임을 보이시오. (단, $a^2m^2>b^2$)

이상을 정리하면 다음과 같다.

기울기가 주어진 이차곡선의 접선의 방정식

① 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m}\text{(단, } m\neq 0)$$

② 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$$

③ 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\text{(단, } a^2m^2>b^2)$$

문제 04 다음 직선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2=2x$에 접하고 기울기가 2인 직선

(2) 타원 $3x^2+5y^2=15$에 접하고 기울기가 3인 직선

(3) 쌍곡선 $x^2-3y^2=9$에 접하고 직선 $y=2x+5$와 평행한 직선

의사소통

수학 역량 기르기

설명할 때는

✔ 자신의 의견을 논리적으로 설명한다.

다음은 쌍곡선 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$의 접선에 대한 세 학생의 대화이다. 세민이와 재원이가 그렇게 말한 이유를 설명해 보자.

이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식은 어떻게 구할까?

포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

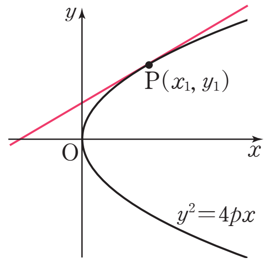
포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 0인 접선은 존재하지 않는다.

(i) $x_1\neq 0$일 때, 접선의 기울기를 $m\,(m\neq 0)$이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

$$y=m(x-x_1)+y_1 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

이다.



또 포물선 $y^2=4px$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx+\frac{p}{m} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

이므로 ①과 ②에서

$$m(x-x_1)+y_1=mx+\frac{p}{m}$$

$$x_1m^2-y_1m+p=0$$

이다.

이때 $y_1{}^2=4px_1$이므로

$$m=\frac{y_1\pm\sqrt{y_1{}^2-4px_1}}{2x_1}=\frac{y_1}{2x_1}=\frac{2p}{y_1}$$

이다.

이것을 ①에 대입하여 정리하면

$$y_1y=2p(x-x_1)+y_1{}^2$$

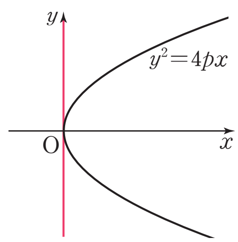
이고, $y_1{}^2=4px_1$이므로

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

이다.

(ii) $x_1=0$일 때, 접선의 방정식은 $x=0$이다.

따라서 접선의 방정식 $y_1y=2p(x+x_1)$은 이 경우에도 성립한다.



(i), (ii)에서 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 방정식은 다음과 같다.

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

같은 방법으로 쌍곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

예제 3

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

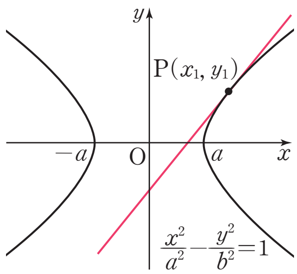
임을 보이시오.

풀이 (i) $y_1\neq0$일 때, 접선의 기울기를 m이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$y=m(x-x_1)+y_1 \qquad \cdots\cdots ①$$

쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$에 접하고 기울기가 m인 접선의 방정식은

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}\,(\text{단, } a^2m^2>b^2) \qquad \cdots\cdots ②$$



①, ②에서

$$m(x-x_1)+y_1=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

$$y_1-mx_1=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$$

양변을 제곱하여 정리하면 $(x_1{}^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(b^2+y_1{}^2)=0$

이때 $\frac{x_1{}^2}{a^2}-\frac{y_1{}^2}{b^2}=1$이므로

$$\left(\frac{ay_1}{b}m\right)^2-2x_1y_1m+\left(\frac{bx_1}{a}\right)^2=0,\ \left(\frac{ay_1}{b}m-\frac{bx_1}{a}\right)^2=0$$

따라서 $m=\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

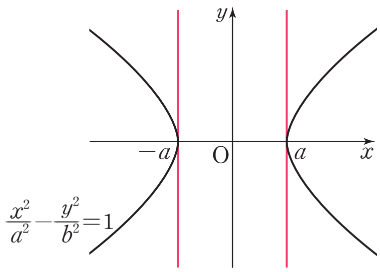
이것을 ①에 대입하고 양변에 $\frac{y_1}{b^2}$을 곱하여 정리하면

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

(ii) $y_1=0$일 때, 접선의 방정식은

$$x=a \text{ 또는 } x=-a$$

따라서 접선의 방정식 $\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$은 이 경우에도 성립한다.



(i), (ii)에서 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

답 풀이 참고

문제 05

타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

임을 보이시오.

이상을 정리하면 다음과 같다.

이차곡선 위의 한 점에서의 접선의 방정식

❶ 포물선 $y^2=4px$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$y_1y=2p(x+x_1)$$

❷ 타원 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}=1$$

❸ 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=1$$

| 참고 | (1) 포물선 $x^2=4py$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$x_1x=2p(y+y_1)$$

(2) 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 방정식은

$$\frac{x_1x}{a^2}-\frac{y_1y}{b^2}=-1$$

문제 06

다음 이차곡선 위의 점에서의 접선의 방정식을 구하시오.

(1) 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(3, 6)$

(2) 타원 $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 위의 점 $(2, \sqrt{3})$

(3) 쌍곡선 $2x^2-y^2=-4$ 위의 점 $(0, 2)$

문제 07

타원 $3x^2+y^2=12$ 위의 점 $(-1, 3)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.

이차곡선 밖의 한 점에서 그은 접선의 방정식을 구해 보자.

예제 4

점 $(-4,\ 2)$에서 타원 $3x^2+4y^2=16$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

풀이 접점을 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$이라고 하면 구하는 접선의 방정식은

$$3x_1x+4y_1y=16$$

이 직선이 점 $(-4,\ 2)$를 지나므로

$$-12x_1+8y_1=16 \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

또 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$은 타원 위의 점이므로

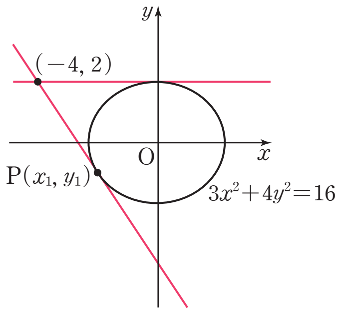
$$3x_1^2+4y_1^2=16 \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

①, ②를 연립하여 풀면

$$x_1=-2,\ y_1=-1 \text{ 또는 } x_1=0,\ y_1=2$$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$$3x+2y+8=0 \text{ 또는 } y=2$$



답 $3x+2y+8=0$ 또는 $y=2$

문제 08 점 $(0,\ 2)$에서 쌍곡선 $2x^2-3y^2=6$에 그은 접선의 방정식을 구하시오.

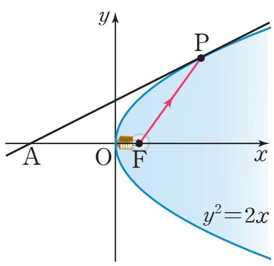
창의·융합

수학 역량 기르기

창의·융합할 때는

✔ 수학적 지식과 기능을 토대로 창의적 생각을 떠올린다.

오른쪽 그림과 같이 자동차 전조등의 단면은 포물선 모양이고, 포물선의 초점의 위치에 전구가 있다. 포물선의 방정식을 $y^2=2x$, 초점을 F라고 할 때, 전구에서 나온 빛이 포물선 위의 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$에서 반사되어 나아가는 방향을 알아보려고 한다.



1 점 $\mathrm{P}(2,\ 2)$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

2 **1**의 접선이 x축과 만나는 점을 A라고 할 때, 삼각형 FPA가 어떤 삼각형인지 설명해 보자.

3 포물선 위의 점 P에서 반사된 빛이 나아가는 방향을 설명해 보자.

수 학 !
깊이를
더하다

이차곡선의 접선의 방정식 구하기

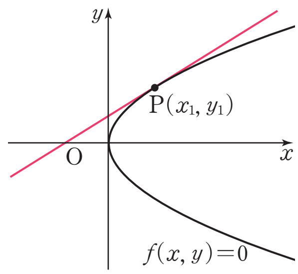
음함수의 미분법을 이용하여 이차곡선의 접선의 방정식을 어떻게 구할까?

〈미적분〉을 이수한 학생은 음함수의 미분법을 이용하여 이차곡선의 접선의 방정식을 구할 수 있다.

음함수 표현 $f(x, y)=0$이 나타내는 이차곡선 위의 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 접선의 기울기를 m이라고 하면 접선의 방정식은

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

이다.



이때 접선의 기울기 m은 점 $\mathrm{P}(x_1, y_1)$에서의 미분계수이므로 $f(x, y)=0$에서 음함수의 미분법을 이용하여 구한 $\dfrac{dy}{dx}$에 $x=x_1$, $y=y_1$을 대입하여 구할 수 있다.

예를 들어 음함수의 미분법을 이용하여 포물선 $y^2=8x$ 위의 점 $(3, -2\sqrt{6})$에서의 접선의 방정식을 구해 보자.

$y^2=8x$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$2y\frac{dy}{dx}=8, \quad \frac{dy}{dx}=\frac{4}{y} \quad (y\neq0)$$

이다.

따라서 점 $(3, -2\sqrt{6})$에서의 접선의 기울기는 $\dfrac{4}{-2\sqrt{6}}=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}$이므로 구하는 접선의 방정식은

$$y+2\sqrt{6}=-\frac{\sqrt{6}}{3}(x-3)$$

$$y=-\frac{\sqrt{6}}{3}x-\sqrt{6}$$

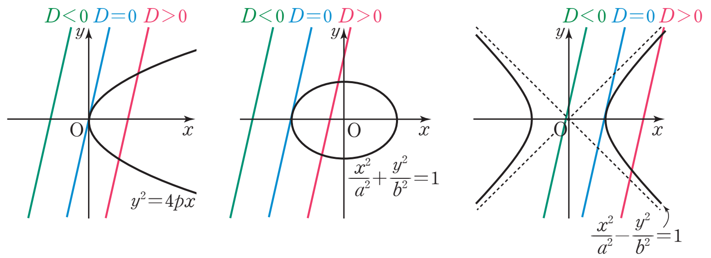
이다.

중단원 학습 점검

개념 정리

- **이차곡선과 직선의 위치 관계**

이차곡선과 직선의 방정식을 연립하여 얻은 이차방정식의 판별식 D에 대하여



- **이차곡선의 접선의 방정식**

이차곡선	기울기가 m인 접선	이차곡선 위의 한 점 (x_1, y_1)에서의 접선
$y^2=4px$	$y=mx+\dfrac{p}{m}$ (단, $m\neq0$)	$y_1y=2p(x+x_1)$
$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$	$\dfrac{x_1x}{a^2}+\dfrac{y_1y}{b^2}=1$
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (단, $a^2m^2>b^2$)	$\dfrac{x_1x}{a^2}-\dfrac{y_1y}{b^2}=1$

O, X 문제

다음 문장이 참이면 ○표, 거짓이면 ×표를 하시오.

1 포물선과 한 점에서 만나는 직선 중 접선이 아닌 것도 있다.

2 타원 밖의 한 점에서 타원에 그은 접선은 2개이다.

3 쌍곡선의 접선 중에는 점근선과 평행한 것도 있다.

기초 문제

1 다음 이차곡선과 직선의 위치 관계를 말하시오.

(1) $y^2=2x$, $x-2y-1=0$

(2) $x^2+3y^2=12$, $x+y-5=0$

2 쌍곡선 $x^2-4y^2=4$에 접하고 기울기가 $\sqrt{2}$인 직선의 방정식을 구하시오.

3 포물선 $y^2=-8x$에 접하고 직선 $y=\dfrac{1}{2}x+3$에 수직인 직선의 방정식을 구하시오.

4 타원 $9x^2+4y^2=72$ 위의 점 $(2, -3)$에서의 접선의 방정식을 구하시오.

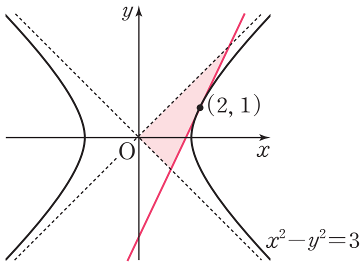
정답과 해설 ▸ 167쪽

기본 문제

5 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$과 직선 $y=m(x+2)$가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 m의 값의 범위를 구하시오.

6 직선 $y=x+8$에 평행하고 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}=1$에 접하는 두 접선 사이의 거리를 구하시오.

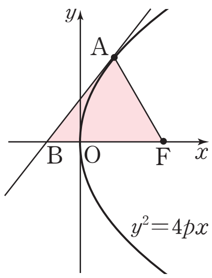
7 다음 그림과 같이 쌍곡선 $x^2-y^2=3$ 위의 점 $(2,\ 1)$에서의 접선과 두 점근선으로 둘러싸인 도형의 넓이를 구하시오.



8 점 $(-2,\ 4)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱을 구하시오.

도전 문제

9 오른쪽 그림과 같이 포물선 $y^2=4px\ (p>0)$의 초점을 F라 하고, $\overline{\mathrm{FA}}=8$을 만족시키는 포물선 위의 점 $\mathrm{A}(a,\ 6)$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 B라고 하자. 삼각형 ABF의 넓이를 구하시오.



10 제1사분면에 있는 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이의 최솟값을 구하시오.

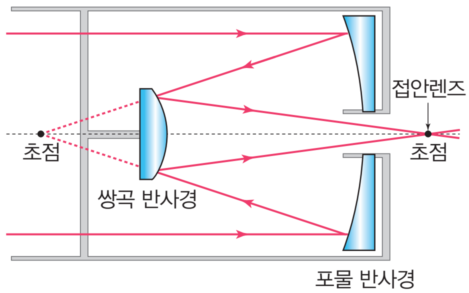
| 창의적 활동 + 융합적 사고를 위한 | **수행 과제**

문제 해결

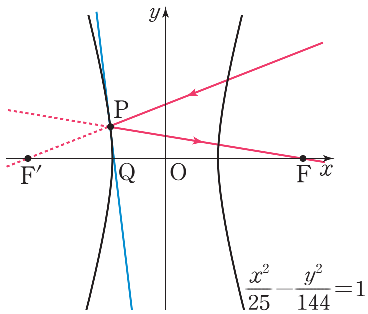
활동 목표 쌍곡선의 접선을 이용하여 쌍곡선의 광학적 성질을 알 수 있다.

다음 글을 읽고, 쌍곡선의 광학적 성질에 대하여 알아보자.

프랑스의 천문학자 카세그레인(Cassegrain, L., 1629~1693)은 포물선과 쌍곡선의 성질을 이용한 망원경을 발명하였다. 이 망원경은 오른쪽 그림과 같이 포물 반사경의 초점과 쌍곡 반사경의 한 초점을 일치시키고 쌍곡 반사경의 다른 초점에 접안렌즈를 설치한 형태이다. 이때 천체에서 오는 빛은 포물 반사경에 반사되어 포물 반사경의 초점을 향해 나아가다가 다시 쌍곡 반사경에 반사되어 쌍곡 반사경의 다른 초점을 향해 나아간다.



1 오른쪽 그림은 두 초점이 각각 F, F′인 쌍곡선 $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{144}=1$과 쌍곡선 위의 점 $P(x_1, y_1)$에서의 접선을 나타낸 것이다. 점 P에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라고 할 때, $\overline{PF'} : \overline{PF}$와 $\overline{F'Q} : \overline{FQ}$를 비교해 보자.



설명하기

2 **1**을 이용하여 쌍곡선의 한 초점을 향해 들어오는 빛은 쌍곡선에 반사되어 다른 초점을 향해 나아감을 설명해 보자.

자기 평가	이차곡선의 접선의 개념을 이용하여 과제를 해결하였는가?
	이차곡선의 접선의 유용성과 가치를 인식하였는가?
	자신의 과제 해결 방법을 친구에게 논리적으로 설명하였는가?

건축! 수학과 통하다

‘속삭이는 회랑’의 비밀

미국 국회의사당에 있는 내셔널 스태추어리 홀(National Statuary Hall)은 ‘속삭이는 회랑’으로 유명하다. 그 회랑에서는, 한 지점에서 속삭이는 소리가 약간 떨어진 지점에서는 들리지 않지만 더 멀리 떨어져 있는 특정 지점에서는 잘 들리는 신비한 현상이 일어난다.

어떤 이유로 이런 일이 가능할까?

그 이유는 회랑의 천장이 타원의 장축을 회전축으로 하여 타원을 회전시킨 모양이기 때문이다. 이 타원의 한 초점의 위치에서 소리를 내면 이 소리는 사방으로 퍼져 나가 타원을 회전시킨 모양의 천장에 부딪쳐 또 다른 초점의 장소에 모두 모이게 된다. 따라서 타원의 두 초점의 위치에서는 속삭이는 소리일지라도 서로 또렷이 들을 수 있다.

이 신비한 현상은 미국 유타주 솔트레이크시티에 있는 한 예배당에서도 찾아볼 수 있다. 타원 모양의 천장으로 되어 있는 이곳에서는, 특정 지점에서 핀을 떨어뜨린 소리를 약 53 m 떨어진 지점에서도 들을 수 있다고 한다.

[참고 자료: Donald C. Benson, “The Ballet of the Planets”]

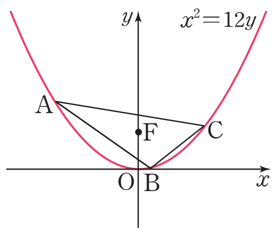
대단원 학습 평가

●○○

1 꼭짓점이 원점이고 준선이 $x=-2$인 포물선이 점 $(6,\ a)$를 지날 때, 상수 a의 값을 모두 구하시오.

●●○

2 다음 그림과 같이 포물선 $x^2=12y$ 위의 서로 다른 세 점 A, B, C에 대하여 삼각형 ABC의 무게중심이 포물선의 초점 F와 일치할 때, $\overline{\mathrm{AF}}+\overline{\mathrm{BF}}+\overline{\mathrm{CF}}$의 값을 구하시오.



●●●

3 포물선 $y^2=12x$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 두 점 A, B에서 만난다. $\overline{\mathrm{AF}}:\overline{\mathrm{BF}}=2:3$일 때, 선분 AB의 길이를 구하시오.

●●○

4 두 초점이 $\mathrm{F}(\sqrt{5},\ 0)$, $\mathrm{F}'(-\sqrt{5},\ 0)$이고 장축과 단축의 길이의 차가 2인 타원이 있다. 이 타원 위의 한 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오.

●●○

5 타원 $x^2+6y^2-6x-24y+27=0$의 두 초점을 각각 F, F′이라고 할 때, 삼각형 OFF′의 넓이를 구하시오. (단, O는 원점)

●●○

6 서로 16 km 떨어진 두 관측소가 있다. 한 관측소에서 폭발음을 들은 지 12초 후에 다른 관측소에서 폭발음을 들었다. 이때 두 관측소의 위치를 좌표평면 위에 두 점 $\mathrm{A}(-8,\ 0)$, $\mathrm{B}(8,\ 0)$으로 나타내면 폭발이 일어난 지점은 두 점 A, B를 초점으로 하는 쌍곡선 위의 점이다. 이 쌍곡선의 방정식을 구하시오.
(단, 소리의 속력은 초속 $\frac{1}{3}$ km로 계산한다.)

●●○

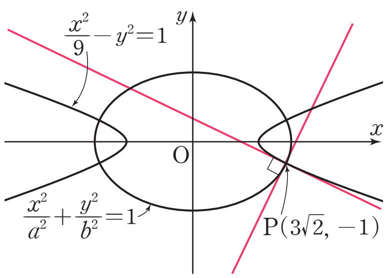
7 타원 $x^2+13y^2=13$과 두 초점을 공유하는 쌍곡선이 있다. 타원의 단축의 길이가 쌍곡선의 주축의 길이와 같을 때, 이 쌍곡선의 점근선의 방정식을 구하시오.

●●○

8 포물선 $y^2=-x$ 위의 점과 직선 $y=-\frac{1}{2}x+8$ 사이의 거리의 최솟값을 구하시오.

●●●

9 다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$과 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-y^2=1$이 점 $\mathrm{P}(3\sqrt{2},\ -1)$에서 만나고, 점 P에서의 타원의 접선과 쌍곡선의 접선이 서로 수직일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

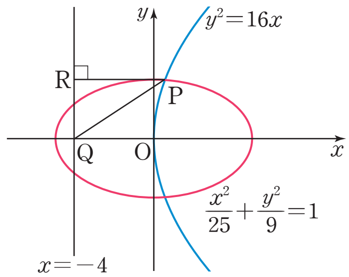


서 술 형 문 제

[10~14] 다음 문제의 풀이 과정을 자세히 쓰시오.

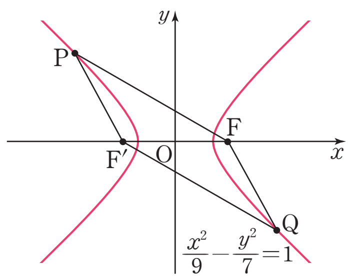
●●○

10 다음 그림과 같이 포물선 $y^2=16x$와 타원 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$이 제1사분면에서 만나는 점을 P, 직선 $x=-4$가 x축과 만나는 점을 Q라 하고, 점 P에서 직선 $x=-4$에 내린 수선의 발을 R라고 하자. 이때 $\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}$의 값을 구하시오.



●●●

11 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라 하고 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$를 원점에 대하여 대칭이동한 점을 Q라고 하자. 사각형 PF′QF의 넓이가 56일 때, ab의 값을 구하시오.



●●○

12 포물선 $y^2=8x$와 직선 $x+by=-1$이 만나지 않도록 하는 상수 b의 값의 범위를 구하시오.

●●○

13 포물선 $y^2=12x$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 점 $(3,\ -6)$에서의 접선이 서로 수직일 때, ab의 값을 구하시오.

●●○

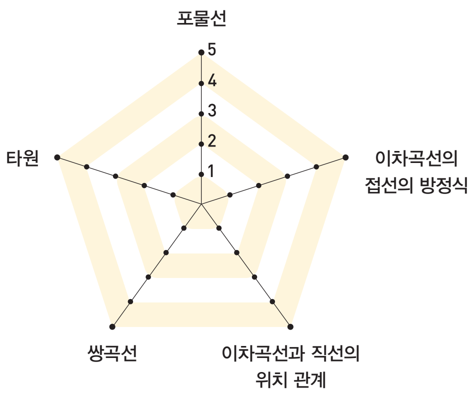
14 점 $(0,\ 2)$에서 타원 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{2}=1$에 그은 두 접선의 접점을 각각 P, Q라 하고, 타원의 한 초점을 F라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) $\overline{\mathrm{PQ}}$의 길이를 구하시오.

(2) 삼각형 PFQ의 둘레의 길이를 구하시오.

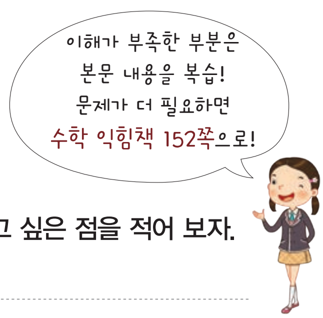
자기 평가

1 이 단원에서 학습한 내용에 대한 나의 성취 수준을 아래 그림에 점으로 표시하고, 이웃한 점을 선으로 연결해 보자.



| 성취 수준 |

1수준: 개념을 이해하기 어려웠다.
2수준: 개념을 일부 이해하였다.
3수준: 문제를 일부 해결하였다.
4수준: 문제를 대부분 해결하였다.
5수준: 문제를 모두 해결하였다.



2 이 단원에서 세운 학습 계획을 잘 실천하였는지 평가해 보고, 아쉬웠던 점이나 더 알고 싶은 점을 적어 보자.

꿈! 수학과 만나다

첨단 기술을 의학에 응용하는

의공학자

의공학자가 하는 일은?

의공학자는 공학적인 방법을 의학 분야에 적용하여 새로운 현상을 탐구하고 이를 임상에 응용하여 진료와 치료의 효과를 극대화하는 연구를 한다. 또 초음파 진단기, 자기 공명 영상 장치(MRI), 체외 충격파 쇄석기 등과 같은 의료용 기기를 제작하고 운영한다. 의공학자는 오늘날 의공학 분야에서 수술을 하지 않고도 신체 부위를 손상없이 치료하기 위한 첨단 의료 장비나 수술용 로봇을 개발하는 데 중요한 역할을 한다.

의공학자가 되려면?

의공학자가 되기 위해서는 의학과 공학의 기본이 되는 지식이 필요하다. 즉, 해부학, 생리학을 포함한 기초 의학 분야는 물론, 물리학과 생물학, 수학, 생화학 등의 자연과학 분야, 전자, 기계 등의 공학 분야에 대한 다양한 지식을 습득해야 한다. 특히 수학 분야에서는 미적분 및 이차곡선 등 기하를 공부해야 한다.

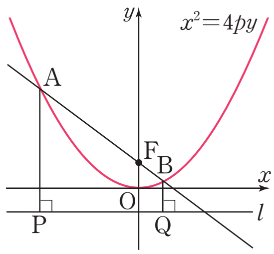
[참고 자료: 와이즈멘토, “적성과 진로를 짚어주는 직업교과서 48– 의공학자&컨벤션 기획자”]

스스로 공부하는

수학 익힘책

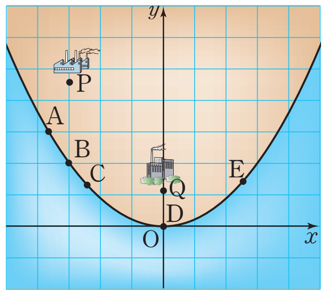
1 꼭짓점이 원점이고 초점의 좌표가 $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$인 포물선의 방정식을 구하시오. | 2점 |

2 다음 그림과 같이 포물선 $x^2=4py(p>0)$의 초점 F를 지나는 직선이 포물선과 만나는 두 점을 각각 A, B라 하고, 두 점 A, B에서 준선 l에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자. $\overline{AP}=8$, $\overline{BQ}=2$일 때, $\overline{PQ}$의 길이를 구하시오. | 3점 |



3 두 포물선 $(y-1)^2=a(x+3)$, $(x+2)^2=-8(y-b)$의 초점이 일치할 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값을 구하시오. | 3점 |

4 다음 그림과 같이 포물선 모양의 강변의 어느 한 지점에 두 공장 P, Q로부터 거리의 합이 최소가 되도록 하수 처리 시설을 설치하려고 한다. 공장 Q가 포물선의 초점의 위치에 있을 때, 하수 처리 시설을 설치할 적당한 지점은? | 4점 |

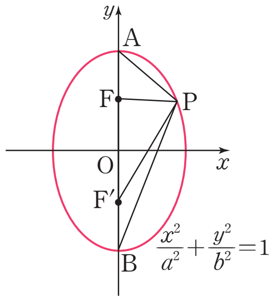


① A ② B ③ C
④ D ⑤ E

5 두 초점 F, F′으로부터 거리의 합이 12인 타원에서 $\overline{FF'}=8$일 때, 이 타원의 단축의 길이를 구하시오. | 3점 |

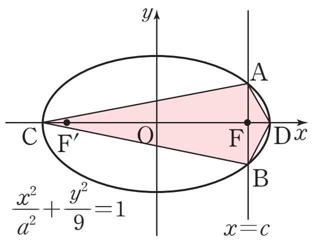
6 타원 $2x^2+y^2=32$의 두 초점 F, F′과 임의의 점 P$(x,\ y)$에 대하여 삼각형 PFF′의 둘레의 길이가 24일 때, 점 P가 나타내는 도형의 방정식을 구하시오. | 3점 |

7 다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(b>a>0)$에서 두 초점을 각각 F, F′이라고 하자. y축 위의 두 꼭짓점 A, B와 타원 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAB의 넓이는 삼각형 PFF′의 넓이의 2배이고, 삼각형 PFF′의 둘레의 길이는 6일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. | 3점 |



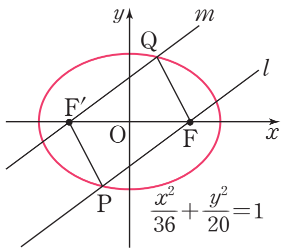
8 다음 그림과 같이 두 점 F$(c, 0)$, F′$(-c, 0)$을 초점으로 하는 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{9}=1$이 직선 $x=c$와 만나는 점을 각각 A, B라고 하자. x축 위의 두 꼭짓점을 각각 C, D라고 할 때, 사각형 ACBD의 넓이를 구하시오.

(단, $a>0$, $c>0$) | 4점 |



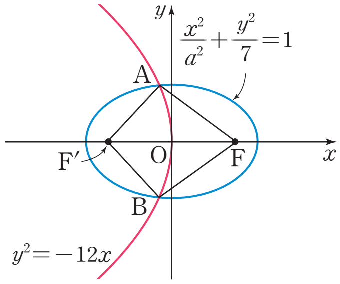
9 다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$의 두 초점이 F, F′이고, 점 F를 지나는 직선 l은 타원과 제3사분면 위의 점 P에서 만나며, 점 F′을 지나는 직선 m은 타원과 제1사분면 위의 점 Q에서 만난다. 두 직선 l, m이 서로 평행하고 두 직선 사이의 거리가 $\sqrt{15}$일 때, $\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{PF'}}$의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) | 4점 |



10 다음 그림과 같이 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{7}=1$의 한 초점이 포물선 $y^2=-12x$의 초점과 일치한다. 이 두 이차곡선의 교점을 각각 A, B라 하고, 타원의 두 초점을 각각 F, F′이라고 할 때, 사각형 AF′BF의 둘레의 길이를 구하시오.

(단, $a>0$) | 3점 |

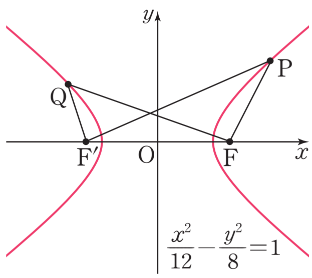


11 점 $(0, \sqrt{10})$을 한 초점으로 하고, 점근선의 방정식이 $y=\pm 2x$인 쌍곡선이 있다. 이 쌍곡선의 주축의 길이를 구하시오. | 3점 |

12 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,\ b>0)$의 주축의 길이가 2이고 두 점근선이 서로 수직일 때, $a+b$의 값을 구하시오. | 3점 |

13 다음 그림과 같이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{8}=1$의 두 초점을 각각 F, F′이라고 하자. 제1사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P와 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 Q에 대하여 $\overline{QF}-\overline{PF}=6$일 때, $\overline{PF'}-\overline{QF'}$의 값을 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 양수이다.) | 3점 |



14 타원 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$의 두 초점이 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 꼭짓점과 일치할 때, 두 상수 a, b에 대하여 a^2+b^2의 값을 구하시오.

| 3점 |

15 다음 보기 중 쌍곡선

$$4x^2-3y^2-16x-6y+25=0$$

에 대한 설명으로 옳은 것을 있는 대로 고르시오. | 3점 |

보기

ㄱ. 주축은 y축과 평행하다.

ㄴ. 두 초점 사이의 거리는 주축의 길이의 3배이다.

ㄷ. 중심은 $(2,\ -1)$이다.

ㄹ. 한 초점의 좌표는 $(2,\ -5)$이다.

16 타원 $2x^2+3y^2=6$과 직선 $y=2x+k$가 만나도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. | 3점 |

17 직선 $y=3x+2$를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 직선이 포물선 $y^2=16x$에 접할 때, 실수 k의 값을 구하시오. | 3점 |

18 타원 $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$ 위의 점 $(-2, \sqrt{2})$에서의 접선이 포물선 $y^2=kx$에 접할 때, 상수 k의 값을 구하시오. (단, $k\neq0$) | 3점 |

19 쌍곡선 $x^2-3y^2=3$ 위의 점 $\mathrm{P}(3, \sqrt{2})$에서의 접선이 x축과 만나는 점을 Q라 하고 이 쌍곡선의 한 초점을 F라고 할 때, 삼각형 FPQ의 넓이를 구하시오.

(단, 점 F의 x좌표는 음수이다.) | 3점 |

20 쌍곡선 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{8}=1$ 위의 점 (a, b)에서의 접선이 타원 $(x-2)^2+4y^2=4$의 넓이를 이등분할 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. | 4점 |

21 점 $\mathrm{P}(-2, 1)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선의 접점을 A, B라고 할 때, 삼각형 PAB의 넓이를 구하시오. | 4점 |

22 점 (a, a)에서 타원 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{20}=1$에 그은 한 접선의 기울기가 -2일 때, 양수 a의 값을 구하시오. | 3점 |