

HW6-1

參考 ACM 1257 Your Ways

中大資工 何錦文

問題概要與主要參數

- ✎ 棋格狀城市每天都會有特定路段進行施工。任務是算出每天從起點到學校的所有可行路徑。
- ✎ 注意：你只能由左往右或由下往上走、施工的路段不能經過、不同天的施工路段不相干
- ✎ 城市大小 $H \times W$, 有 K 天, 每天有 Q_i 段路施工。施工路段長度為1。
- ✎ $1 \leq H, W \leq 1000$
- ✎ $1 \leq K \leq 10000$
- ✎ $1 \leq Q_i \leq 100$



組合學複習

☛ 當完全無障礙時, 令 $P[i, j]$ = 出發點, 座標(0,0), 到座標 (i, j) 的路徑數.

☛ 遞迴式: $P[i, j] = 1$ if $i = 0$ or $j = 0$
 $= P[i-1, j] + P[i, j-1]$

論證: 所有路徑不是從左就是從下邊過來.

☛ 可證得 $P[i, j] = C(i+j, i)$

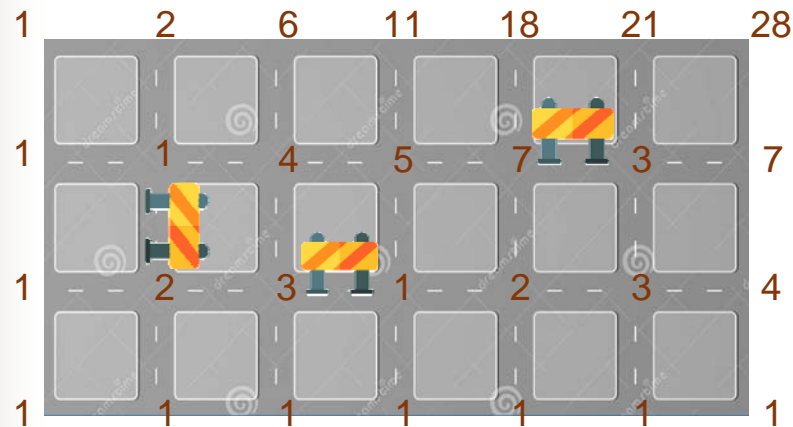
論證: 共 $i+j$ 步其中有 i 步是往上 (或右) 走.

組合學複習 (例)

1		4	10	20	35	56	84
1		3	6	10	15	21	28
1		2	3	4	5	6	7
1		1	1	1	1	1	1

解法 1 (範例)

- 用解無障礙時的同樣概念方式, 將障礙考慮進來:



解法 1 (分析)

- 城市大小 $H \times W$, 有 K 天, 每天有 Q_i 段路施工.
- $1 \leq H, W \leq 1000$
- $1 \leq K \leq 10000$
- $1 \leq Q_i \leq 100$
- 解法 1 需時 $O(KHW)$, 會超時
- 每天給定施工路段 Q_i 遠比表格面積小, 是否可找到一解法只與 Q_i 有關, 而與城市大小無關?
- 先從 $Q_i = 1$ 開始.

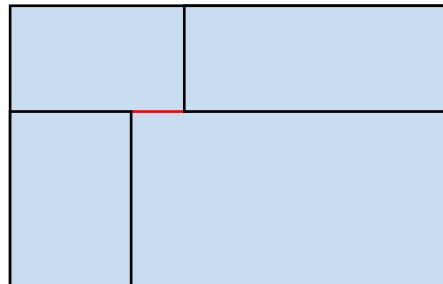
只有一個障礙的快速解法

✎ 令障礙 A 的啟始與終結座標分別為 $A.s$ 與 $A.t$,
記得依題意 $|A.t - A.s| = 1$.

✎ 若只有 A 這個障礙那麼解為：

$$P[H, W] - P[A.s] P[(H, W) - A.t]$$

✎ 時間： $O(1)$.
不算計算 $P[]$ 的
時間



多個障礙時的想法

✎ 當有超過一個的障礙時，第一念頭是用排容原理來算；

✎ 但用排容原理，最多會有 2^{Q_i} 項，仍不可行。

✎ 遞迴設計法：假設我們已知如何解比 Q_i 個障礙少的情形，如何利用這個假設？

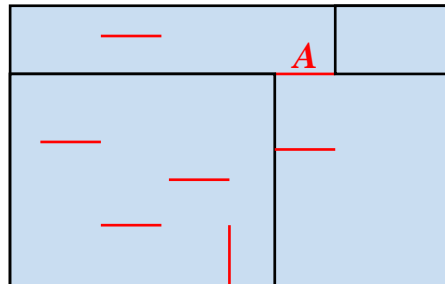
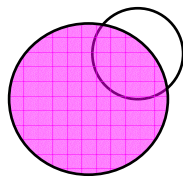
✎ 令所有障礙的集合為 Ω ，並令

$S[(i, j), \Lambda] =$ 出發點到 (i, j) 有經過 Λ 中障礙的路徑數， $\Lambda \subseteq \Omega$.

✎ 注意： $P[H, W] - S[(H, W), \Omega]$ 即為所求。

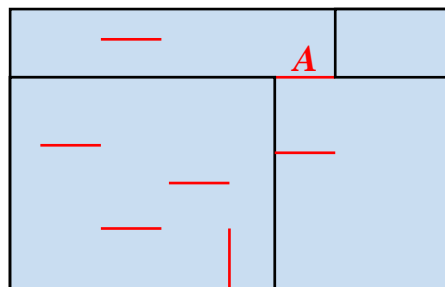
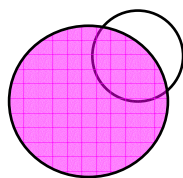
多個障礙時的遞迴想法 (1/2)

- 令所有障礙的集合為 Ω , A 為最右上角的障礙,
- $S[(i, j), \Omega] = (0, 0)$ 到 (i, j) 經過 Ω 的路徑數.
- $S[(H, W), \Omega] =$ 有經過 $\Omega \setminus A$ 的路徑數 + 只經過 A 的路徑數



多個障礙時的遞迴想法 (2/2)

- $S[(H, W), \Omega] =$ 有經過 $\Omega \setminus A$ 的路徑數 + 只經過 A 的路徑數 = $S[(H, W), \Omega \setminus A] +$
 $(P[A.s] - S[A.s, \Omega]) P[(H, W) - A.t]$



本作業要求

☛ 這遞迴想法還不能直接實做, 需轉為可行的 DP 作法.

☛ 作業要求:

- 1) 修改 ACM 原題敘述, 將原路障的獨立限制取消, 並拿去詢問 ChatGPT.
- 2) 根據前幾頁的說明設計出你的 DP 演算法.
即先定義 $dp[\dots] = \dots \dots \dots$, 導出你的遞迴式, 寫出解題的 pseudo code, 分析時間複雜度等.