$$r = 0.\overline{a_1 a_2 \dots a_k} \qquad (-)$$

$$10^k \, r = a_1 a_2 \dots a_k . \overline{a_1 a_2 \dots a_k} \qquad (+)$$

$$\underbrace{(10^k - 1)}_{\underbrace{9 \dots 9}_{k \text{ Ziffern}}} \, r = a_1 a_2 \dots a_k$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{a_1 a_2 \dots a_k}{\underbrace{9 9 \dots 9}_{k \text{ Ziffern}}}$$

<u>Beispiel:</u>

$$0.2\overline{54} = 0.2 + 0.0\overline{54} = 0.2 + 0.1 \cdot 0.\overline{54}$$

$$= \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{54}{99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{27}{99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{11}$$

$$= \frac{11}{55} + \frac{3}{55} = \frac{14}{55}$$

<u>Abzählbarkeit:</u>

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist <u>abzählbar</u>, d.h. man kann die Elemente von $\mathbb{Q}$ durchnummerieren

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{1} & \frac{3}{1} & \frac{4}{1} & \frac{5}{1} & \dots \\
\frac{1}{2} & \frac{2}{2} & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} & \frac{5}{2} & \dots \\
\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{3}{3} & \frac{4}{3} & \frac{5}{3} & \dots \\
\frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{3}{4} & \frac{4}{4} & \frac{5}{4} & \dots \\
\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{5}{5} & \dots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

→ Schreibe $\mathbb{Q}$ als „rechteckiges Schema" auf

→ Ordne die Elemente von $\mathbb{Q}$ entsprechend der Pfeile nacheinander an, wobei jede bereits vorgekommene Zahl keine Nummer erhält

$\to$ Durchnummerierung von $\mathbb{Q}$

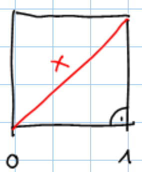
$\to$ 1:1 - Abb. von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{N}$.

1.5 Reelle Zahlen

- Irrationale Zahlen

Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$ reichen zur Lösung einfacher Probleme nicht aus:

Beispiel: Länge der Diagonale eines Quadrats



Pythagoras: $x^2 = 1^2 + 1^2$

$x^2 = 2$

Setze $x =: \sqrt{2}$ pos. Lösg. der obigen Gleichung

Satz: $\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl

Beweis: Annahme $\sqrt{2}$ ist rational, d.h. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$, teilerfremd. Dann gilt $2 = \frac{p^2}{q^2}$ und weiter $p^2 = 2q^2$

$\Rightarrow$ p^2 ist teilbar durch 2.

Da p eine eindeutige Primfaktorzerlegung besitzt folgt

$p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ $(p_k$: Primzahl$)$

$\Rightarrow$ $p^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \ldots \cdot p_n^2$, d.h. jede Primzahl tritt in der Zerlegung von p^2 mindestens quadratisch auf. Da p^2 durch 2 teilbar ist, ist auch p durch 2 teilbar, d.h.

$p = 2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$

Also: $p^2 = 2q^2$

$$2^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 = 2q^2 \quad \Big| :2$$

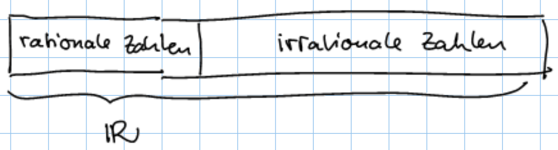
$$q^2 = 2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 \quad \Rightarrow \quad q^2 \text{ ist durch } 2 \text{ teilbar}$$

$\Rightarrow$ analog wie bei p: q durch 2 teilbar.

Widerspruch: p, q sind beide durch 2 teilbar, waren aber teilerfremd vorausgesetzt. D.h. $\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$.

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. $\square$

Erweitere (vervollständige) die rationalen Zahl um die Lösungen dieses Typ und weiteres Grenzprozesse und erhalte die reellen Zahlen $\mathbb{R}$



irrationale Zahlen: nicht abbrechende, nicht periodische Dezimalzahlen

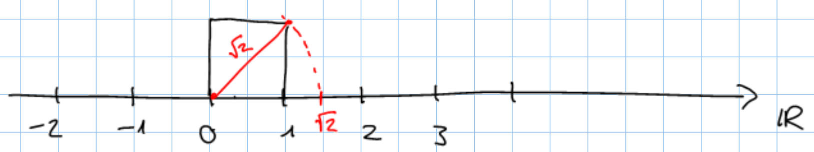
$\sqrt{2} = 1,41421..$ My Pi Day

$\pi = 3,14152..$

$e = 2,71825..$

- Charakterisierung von $\mathbb{R}$

Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengerade



- $\mathbb{R}$ ist vollständig. Grenzwerte konvergenter Folgen aus $\mathbb{R}$ liegen wieder in $\mathbb{R}$.

- $\mathbb{Q}$ liegt dicht in $\mathbb{R}$, d.h. jede reelle Zahl kann beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden.

- $\mathbb{R}$ ist nicht abzählbar.

Beispiel: Vereinfache folgenden Term

$$\left(\frac{1}{2x+1}\cdot\left(x+\frac{1}{x}\right)\right)^{-1} = \left(\frac{x}{2x+1}+\frac{1}{x(2x+1)}\right)^{-1} = \left(\frac{x^2+1}{x(2x+1)}\right)^{-1}$$

$$= \frac{x(2x+1)}{x^2+1}$$