04.10.2022

Tutorium: Mo. 08.00 – 09.30h, M301, Florian Klein, Paul Hohenstein

1. Mengen und Zahlen

1.1 Elementare Mengenlehre

- Mengenbegriff

Def: Eine Menge ist eine Zusammenfassung von unterschiedlichen Objekten (Elemente) zu einer Einheit

(G. Cantor 1895)

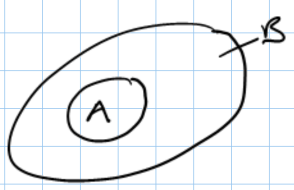
$$A = \{a_1, a_2, a_3\}, \quad a_1 \in A, \quad b \notin A$$

→ Beschreibung von A durch

- Auflisten der Elemente $A = \{1, 2, 3\}$
- Aussageform $A = \{x : x \text{ ist natürliche Zahl und } x < 4\}$

Weitere Begriffe

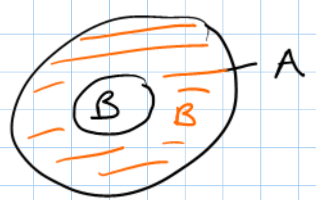
- leere Menge $\{\}, \emptyset$ enthält keine Elemente
- Teilmenge $A \subset B : x \in A \Rightarrow x \in B$



Venn-Diagramm

- Komplement Sei $B \subset A$

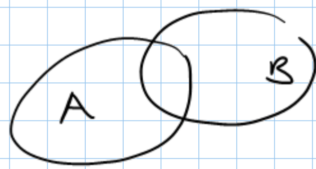
$$\overline{B} := \{x \in A : x \notin B\}$$



- **Potenzmenge**: $P(A)$: Menge aller Teilmengen von A
- **Gleichheit**: $A = B \iff x \in A \Rightarrow x \in B \quad (A \subset B)$
  und $x \in B \Rightarrow x \in A \quad (B \subset A)$

  kurz: $x \in A \iff x \in B$

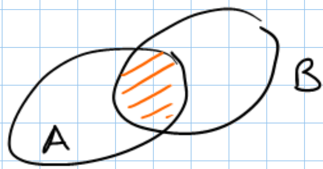
Mengenoperationen



Def: Seien A und B Mengen

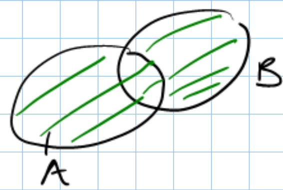
- $A \cap B := \{x : x \in A \text{ und } x \in B\}$

  Schnittmenge



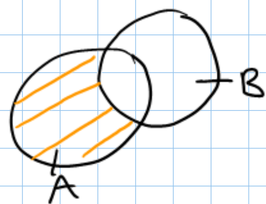
- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ oder } x \in B\}$

  Vereinigungsmenge



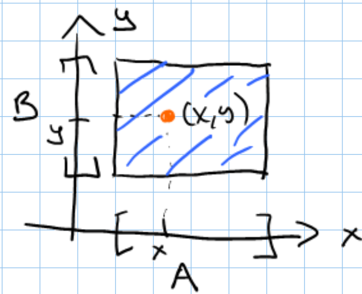
- $A / B := \{x : x \in A \text{ und } x \notin B\}$

  Differenzmenge



- $A \times B := \{(a,b) : a \in A, \ b \in B\}$

  kartesisches Produkt



Beispiele: $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$

$A \cap B = \{2,3\} = \{3,2\}$

$A \cup B = \{1,2,3,4\}$

$A / B = \{1\}$

$B \setminus A = \{4\}$

$A \times B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), \ldots, (3,4)\}$

$P(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Satz (Eigenschaften von Mengen)

A, B, C seien Mengen

1. $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$ Kommutativgesetz
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ Assoziativgesetze
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Distributivgesetze
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $A, B \subset C$. Dann gelten die de Morganschen Regeln
   $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
   $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
5. Aus $A \subset B$ und $B \subset C \Rightarrow A \subset C$ Inklusion

Beweis: z.B. erstes Distributivgesetz

Sei $x \in A \cap (B \cup C) \Rightarrow x \in A$ und $(x \in B$ oder $x \in C)$;

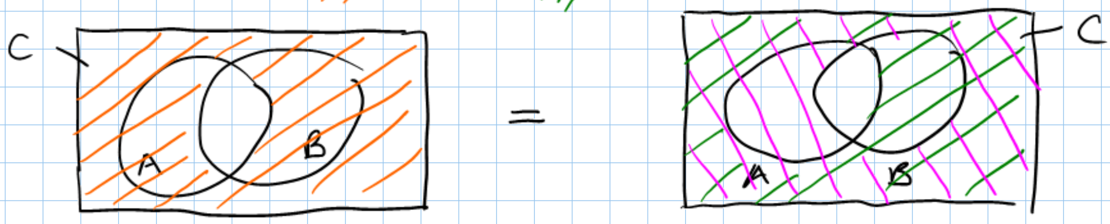
d.h. $x \in A$ und in mindestens einer der beiden Mengen B, C; d.h. ($x \in A$ und in B) oder ($x \in A$ und in C)

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

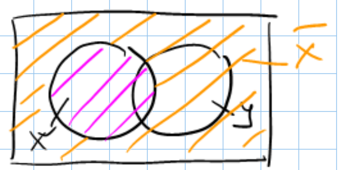
Umgekehrt: Sei $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. D.h. $x \in A$ und in B oder $x \in A$ und in C. D.h. $x \in A$ und in mindestens eines der beiden Mengen B, C. Also: $x \in A \cap (B \cup C)$.

2te de Morgan-Regel mit Venn-Diagrammen

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$



<u>Beispiel</u>: Mit den Mengengesetzen können Mengenausdrücke vereinfacht werden



$$\big((x \cap y) \cup (\bar{x} \cap y)\big) \cup (x \cap \bar{y})$$

$$= \underbrace{\big((x \cup \bar{x}) \cap y\big)}_{= y} \cup (x \cap \bar{y})$$

$$= (y \cup x) \cap (y \cup \bar{y})$$

$$= y \cup x$$