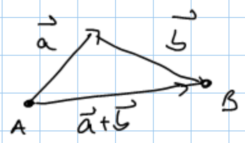
Satz: (Wichtige Ungleichungen)

1. Dreiecksungleichung: Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$



2. Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel

Für $a_k \geq 0$, $k = 1, .., n$ gilt

$$0 \leq \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{\text{geometrisches Mittel}} \leq \underbrace{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}_{\text{arithmetisches Mittel}}$$

3. Bernoulli-Ungleichung: Für reelle Zahlen $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

Beweis: (nur Δ-Ungl.) $|a+b| \leq |a| + |b|$

Fall 1: $a+b \geq 0$: $|a+b| = a+b$ und mit $a \leq |a|$, $b \leq |b|$

folgt: $|a+b| = a+b \leq |a| + b \leq |a| + |b|$

Fall 2: $a+b < 0$: $|a+b| = -(a+b) = -a-b$ und mit

$-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$ folgt

$|a+b| = -a-b \leq |a| - b \leq |a| + |b|$

Arith. / geom. Mittel für zwei Zahlen $a, b > 0$.

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \iff a - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b \geq 0 \quad | + 2\sqrt{a}\sqrt{b}$

$\iff a+b \geq 2\sqrt{a}\sqrt{b} \quad | : 2$

$\iff \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$

$\square$

Beispiel: Kapital 1000 € wird 3 Jahre angelegt. Im ersten und zweiten Jahr zum Zinssatz von 2% und im 3. Jahr zu 7% p.a. Wie ist durchschnittliche jährliche Verzinsung?

$1000 €$

Jahr 1: $1{,}02 \cdot 1000 € = 1020 €$

Jahr 2: $1.02 \cdot 1020 € = 1.02^2 \cdot 1000 € = 1040{,}40 €$

Jahr 3: $1{,}07 \cdot 1040{,}40 € = 1{,}07 \cdot 1.02^2 \cdot 1000 € = 1113{,}236$

Äquivalent bei konstanter Verzinsung

$$q^3 \, 1000 € = 1113{,}23 €$$

$$\Leftrightarrow \quad q^3 = 1.07 \cdot 1.02 \cdot 1.02 \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt[3]{1{,}07 \cdot 1{,}02 \cdot 1{,}02}$$

$q = 1{,}0364$ Zinssatz: $3{,}64\ \%$

$$A = \frac{1}{3}(1.02 + 1.02 + 1.07) = 1{,}0367$$

vermeintl. Zinssatz: $3{,}67\ \%$

→ Intervalle

Def: Es sei $a, b \in \mathbb{R}$. Dann:

1. $[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ abgeschlossenes Intervall
2. $[a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
   $(a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ halboffenes Intervall
3. $(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ offenes Intervall
4. $[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$

5. $(-\infty, a] := \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$[a, \infty]$ Unsinn! „∞" ist keine Zahl.

→ Summen

Def.: Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Σ : „Sigma", Summenzeichen ; k = Zähler

Beispiele:

1. $$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

2. $$\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k} = \frac{(-1)^1}{1} + \frac{(-1)^2}{2} + \ldots + \frac{(-1)^5}{5}$$
$$= -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

3. $$\sum_{i=3}^{5} \frac{i^2}{i+1} = \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6}$$

$$\sum_{\text{hugo}=3}^{5} \frac{\text{hugo}^2}{\text{hugo}+1} = \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6}$$

3 …
4 ..
5 …

$5-3+1$ Einträge

4. $$\sum_{j=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + 1}_{n+1 \text{ Summanden}} = n+1$$

5. $$\sum_{k=1}^{n} 2k = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2 \cdot n = 2(1 + 2 + \ldots + n)$$
$$= 2 \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

Summe der ersten n geraden Zahlen

6. $$\sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = 1 + 3 + \ldots + (2n-1)$$

Summe der ersten n ungeraden Zahlen

$k = n-1$: $2(n-1) + 1 = 2n - 2 + 1 = 2n - 1$

Satz (Rechenregeln für Summen)

1. $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$ Additivität

2. $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad c \in \mathbb{R}$ Homogenität

Beweis: Herleitung folgt aus der Definition von $\sum$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n)$$

$$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$$

Kommutativ, Assoziativges.

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c a_1 + c a_2 + \ldots + c a_n$$

$$= c (a_1 + \ldots + a_n)$$

Distr.

$$= c \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Beispiele:

1. Folgende Ausdrücke sind äquivalent

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} = \sum_{l=5}^{n+5} a_{l-5}$$

$a_{j-1} \neq a_j - 1$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

$$\sum_{l=5}^{n+5} a_{l-5} = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$$

2. Indextransformation: oft ist es nützlich den Zähler zu transformieren

$$S = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Setze: $j = k+3 \iff k = j-3$

$k=0: j=3; \quad k=n: j=n+3$

$$S = \sum_{j=3}^{n+3} a_{j-3}$$