

3. Übungsblatt

Gleichungen

Polynomgleichungen, Bruchgleichungen, Potenz- und Wurzelgleichungen

Aufgabe 1

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\text{a) } \frac{4x+3}{3} - 1 = 4 - \frac{x-3}{6} + \frac{3x+8}{4} - \frac{17}{4} \quad \text{b) } \frac{2x+1}{2} + \frac{3x+1}{4} + \frac{5x+1}{8} = 1 - \frac{7x+1}{8}$$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\text{a) } \frac{1}{x} + a = \frac{a}{x} + 1 \quad \text{b) } \frac{2-ax}{bx} - \frac{-bx-2}{ax} = \frac{a^2-b^2}{ab}; \quad a, b \neq 0$$

$$\text{c) } \frac{4ab+1}{4ab} = 1 - \frac{a-x}{3a^2x} + \frac{5a-2x}{12abx}; \quad a, b \neq 0$$

Aufgabe 3

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\text{a) } \frac{2x-7}{9x^2-49} = \frac{5}{9x+21} - \frac{1}{3x} \quad \text{b) } \frac{4}{2x+3} + \frac{12}{2x+4} = \frac{12(4x+1)}{4x^2+14x+12}$$

$$\text{c) } \frac{48x+2}{x^2-16} + 1 = \frac{5x-2}{x-4} - \frac{12x+8}{3x+12}$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{\frac{2}{3} + \frac{1}{x}} & \text{b)} \quad \frac{\frac{x}{6} + \frac{1}{15}}{\frac{x}{6} - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{x}{10} + \frac{1}{3}}{\frac{x}{10} - \frac{1}{3}} \\ \text{c)} \quad \frac{6x - \frac{7}{3}}{\frac{8x}{3} - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{3} - 3x}{\frac{7}{8} - \frac{4x}{3}} & \end{array}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \left(125x^{\frac{3}{4}} + 316\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{49} & \text{b)} \quad \left((81x)^{\frac{1}{4}} - 3\right)^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{243} \\ \text{c)} \quad \left(19 + 2\sqrt[3]{7x^2 + 1}\right)^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} & \text{d)} \quad (\sqrt{x} - 9)^{\frac{1}{4}} = \sqrt{x^{\frac{1}{4}} - 1} \\ \text{e)} \quad (\sqrt[3]{x} - 8)^3 = (\sqrt[6]{x} - 4)^6 & \text{f)} \quad \left(x^{\frac{4}{3}} + 27\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3} \left(14x^{\frac{4}{3}} - 162\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Aufgabe 6

Bestimmen Sie Definitions- und Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \sqrt{5x^2 - 8} = x & \text{b)} \quad \sqrt{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{x - 1} \\ \text{c)} \quad \sqrt{x^2 - 1} = x - 3 & \text{d)} \quad \sqrt{7x + 8} = 2x - 2 \\ \text{e)} \quad 3\sqrt{x - 2} - \sqrt{x + 5} = \sqrt{2x + 3} & \end{array}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden Gleichungen:

$$\text{a)} \quad x^4 + 9x^2 - 2x = 6x^3 \quad \text{b)} \quad -3x^3 - 12x^2 + 33x = 18$$

Aufgabe 1 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{L} = \{3\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{L} = \{0\}$

Aufgabe 2 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 1. Fall: $a = 1 \mathbb{L} = \mathbb{D}$ 2. Fall: $a \neq 1 \mathbb{L} = \{1\}$

b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 1. Fall: $a = -b \mathbb{L} = \mathbb{D}$ 2. Fall: $a = b \mathbb{L} = \{1\}$ 3. Fall: $a^2 \neq b^2 \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{a-b} \right\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\};$ 1. Fall: $a = \frac{4}{5}b \mathbb{L} = \mathbb{D}$ 2. Fall: $a \neq \frac{4}{5}b \mathbb{L} = \{a\}$

Aufgabe 3 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{7}{3}, 0, \frac{7}{3} \right\}; \mathbb{L} = \left\{ \frac{7}{2} \right\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -2, -\frac{3}{2} \right\}; \mathbb{L} = \left\{ \frac{5}{2} \right\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{-4, 4\}; \mathbb{L} = \{1\}$

Aufgabe 4 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2}, 0 \right\}; \mathbb{L} = \{12\}$ b) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{10}{3}, \frac{24}{5} \right\}; \mathbb{L} = \{10\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{16}, \frac{21}{32} \right\}; \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$

Aufgabe 5 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+; \mathbb{L} = \left\{ \frac{81}{625} \right\}$ b) $\mathbb{D} = (1, \infty); \mathbb{L} = \{256\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R}; \mathbb{L} = \{-3, 3\}$ d) $\mathbb{D} = [81, \infty); \mathbb{L} = \{625\}$

e) $\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+; \mathbb{L} = \{729\}$ f) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left(-\left(\frac{81}{7}\right)^{\frac{3}{4}}; \left(\frac{81}{7}\right)^{\frac{3}{4}} \right); \mathbb{L} = \{27\}$

Aufgabe 6 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}} \right); \mathbb{L} = \{\sqrt{2}\}$ b) $\mathbb{D} = [1, \infty); \mathbb{L} = \{4\}$

c) $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus (-1, 1); \mathbb{L} = \{1\}$ d) $\mathbb{D} = \left[-\frac{8}{7}, \infty \right); \mathbb{L} = \{4\}$

e) $\mathbb{D} = [2, \infty); \mathbb{L} = \{11\}$

Aufgabe 7 Lösung

a) $\mathbb{L} = \{0, 2 - \sqrt{3}, 2, 2 + \sqrt{3}\}$ b) $\mathbb{L} = \{-6, 1\}$