Hochschule Karlsruhe
Dipl.-Ing. Christine Ruck

7. Übungsblatt

Funktionen

Aufgabe 1

Bringen Sie die folgenden Parabelgleichungen in die Produkt- und Scheitelpunktsform:

a) $y = -2x^2 - 4x + 3$ b) $y = 5x^2 + 20x + 20$
c) $y = 2x^2 + 10x$ d) $y = 4x^2 + 8x - 60$

Aufgabe 2

Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel mit den folgenden Funktionseigenschaften:

a) Nullstelle bei $x_1 = 1$ und $x_2 = -5$ b) Ordinate des Scheiltels bei $y_0 = 18$

Aufgabe 3

Wo besitzen die folgenden gebrochenrationalen Funktionen Nullstellen, Pole und Asymptoten im Unendlichen?

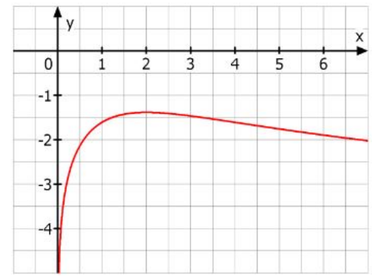
a) $y = \dfrac{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}{x^2 - 4}$ b) $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 6x^2 + 12x - 8}$
c) $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$

Aufgabe 4

Welche Kegelschnitte werden durch die folgenden algebraischen Gleichungen 2. Grades dargestellt? Wo liegt der Mittelpunkt bzw. Scheitelpunkt?

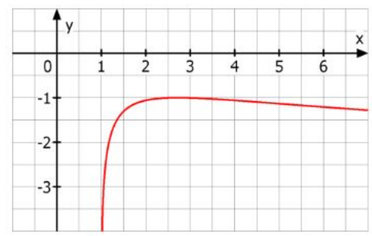
a) $x^2 - 2x + y^2 + 4y - 20 = 0$ b) $x^2 - y^2 - 4 = 0$
c) $9x^2 + 16y^2 - 18x = 135$ d) $2x^2 - 9y + 12x = 0$

Aufgabe 5 a)



Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2+4}\right)$.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich und begründen Sie, dass f keine Nullstelle besitzt.

b)



Das Bild zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$.
Bestimmen Sie den Definitionsbereich.

Aufgabe 6

Zeigen Sie, dass

a) $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$ ist.

b) $\cosh^2(x) + \sinh^2(x) = \cosh(2x)$ ist.

c) der Wertebereich des tanh ist $(-1; 1)$.

d) $\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ ist.

e) $\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ist.

f) $\sinh(x)$ und $\tanh(x)$ ungerade Funktionen sind.

g) $\cosh(x)$ eine gerade Funktion ist.

Aufgabe 1 Lösung

a) $y = -2(x+2,581)(x-0,581)$ bzw. $y-5 = -2(x+1)^2$

b) $y = 5(x+2)(x+2) = 5(x+2)^2$

c) $y = 2x(x+5)$ bzw. $y+12,5 = 2(x+2,5)^2$

d) $y = 4(x+5)(x-3)$ bzw. $y+64 = 4(x+1)^2$

Aufgabe 2 Lösung

$y = -2x^2 - 8x + 10$

Aufgabe 3 Lösung

a) NST: $x_{1,2} = 2$ Pole: $x_3 = -2$ Asymptote im Unendlichen: $y = x - 6$

b) NST: $x_1 = 1$ Pole: $x_2 = 2$ Asymptote im Unendlichen: $y = 1$

c) NST: $x_{1,2} = 1$ Pole: $x_{3,4} = -1$ Asymptote im Unendlichen: $y = 1$

Aufgabe 4 Lösung

a) Kreis: $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 25$ $M = (1;-2)$ $r = 5$

b) Hyperbel: $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$ $M = (0;0)$ $a = 2;\ b = 2$

c) Ellipse: $\frac{(x-1)^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ $M = (1;0)$ $a = 4;\ b = 3$

d) Parabel: $y = \frac{2}{9}(x+3)^2 + 2$ $S = (-3;-2)$ nach oben geöffnete Parabel

Aufgabe 5 Lösung

a) $\mathbb{D} = \mathbb{R}^+$ Bedingung für Nullstelle: $\frac{x}{x^2+4} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x + 4 = 0$, keine relle NST

b) $\mathbb{D} = (1;\infty)$

Aufgabe 6 Lösung

a) $\frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}-\frac{1}{4}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=1 \Leftrightarrow e^{2x}+2e^{0}+e^{-2x}-e^{2x}+2e^{0}-e^{-2x}=4\surd$

b) $\frac{1}{4}\left(e^{x}+e^{-x}\right)^{2}+\frac{1}{4}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=\frac{1}{2}\left(e^{2x}+e^{-2x}\right)\surd$

c) $\tanh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}<1 \Leftrightarrow -2e^{-x}<0\surd$

$\tanh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}>-1 \Leftrightarrow 2e^{x}>0\surd$

d) $y=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \Leftrightarrow \left(e^{x}\right)^{2}-2ye^{x}-1=0 \Leftrightarrow x=\ln\left(y+\sqrt{y^{2}+1}\right)\surd$

e) $y=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \Leftrightarrow ye^{2x}+y=e^{2x}-1 \Leftrightarrow e^{2x}=\frac{1+y}{1-y} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\surd$

f) $f(x)=\sinh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\right) \quad f(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}-e^{x}\right)=-f(x) \Rightarrow$ ungerade

$f(x)=\tanh(x)=\frac{(e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \quad f(-x)=\frac{e^{-x}-e^{x}}{e^{-x}+e^{x}}=-f(x) \Rightarrow$ ungerade

g) $f(x)=\cosh(x)=\frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\right) \quad f(-x)=\frac{1}{2}\left(e^{-x}+e^{x}\right)=f(x) \Rightarrow$ gerade