Hochschule Karlsruhe
University of
Applied Sciences

Mathematik 1 (Analysis)

für

Studierende des Studiengangs

Bachelor Data Science (Fakultät IWI)

1. Auflage

Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

das vorliegende Skriptum bietet eine anwendungsorientierte Einführung in die Grundlagen der Mathematik bis zur Differenzial- und Integralrechnung einer reellen Variablen. Es beschreibt in etwa den Umfang der Grundvorlesung „Mathematik 1 (Analysis)“ für Studierende des neuen Studiengangs Bachelor Data Science an der Hochschule Karlsruhe.

Bei der Stoffauswahl wurde der Schwerpunkt auf motivierende Erläuterungen und Beispiele gelegt und bewußt auf viele Beweise verzichtet. Die Beispiele sind so gewählt, daß sie den wesentlichen Aspekt einer Methode vorstellen und den Rechenweg aufzeigen. Beispiele mit Anwendungsbezug zur Informatik und den Ingenieurwissenschaften werden ebenfalls ausführlich diskutiert.

Grundlage des Skriptums sind die Bücher bzw. Lehrwerke (in alphabetischer Reihenfolge)

1. Hans-Jürgen Dobner et al., Analysis 1, Analysis 2, Lineare Algebra, 5., 2. und 1. Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 2007, 2013 und 2007,
2. Klaus Dürrschnabel, Mathematik für Ingenieure, 2. Auflage, Vieweg-Teubner, Wiesbaden 2012,
3. Steffen Göbbels et al., Mathematik verstehen und anwenden, 3. Auflage, Springer-Spektrum, Heidelberg 2018,
4. Peter Hartmann, Mathematik für Informatiker, 7. Auflage, Springer-Vieweg, Wiesbaden 2019,
5. Eberhard Hohloch et al., Brücken zur Mathematik, Bände 1-3, 3. Auflage, Cornelsen-Verlag, 1996,
6. Peter Stingl, Mathematik für Fachhochschulen, 8. Auflage, Carl Hanser Verlag, München 2009,
7. Gerald Teschl, Susanne Teschl, Mathematik für Informatiker, Bände 1 und 2, 4. und 3. Auflage, Springer-Vieweg, Wiesbaden 2013 und 2014.
8. Thomas Westermann, Mathematik für Ingenieure, 8. Auflage, Springer-Vieweg, Wiesbaden 2020.

Aus diesen Quellen ist das Skript zusammengestellt und passende Beispiele teilweise 1:1 übernommen. Diese Lehrbücher werden als weiterführende Literatur empfohlen, insbesondere zum Üben, denn die meisten der Bücher enthalten Übungsaufgaben mit Lösungen.

Für Fehler im Skriptum wird keine Gewähr übernommen.

Inhaltsverzeichnis

1 Mengen und Zahlen

1.1 Elementare Mengenlehre

1.1.1 Mengenbegriff

Definition 1.1 *(Mengenbegriff von Cantor, 1895)*
Eine Menge M *ist eine Zusammenfassung von unterscheidbaren Objekten. Diese Objekte nennt man* Elemente *von* M.

Eine Menge M kann beschrieben werden durch *Auflistung* der Elemente oder durch Angabe einer *Aussageform*.

Beispiele:

1. Die Menge B aller Buchstaben lautet
$$B = \{a, b, c, \ldots, z\}.$$
Bei der Auflistung der Elemente kommt es auf die Reihenfolge der Elemente nicht an.

2. Die Menge
$$M = \{x : \ x \text{ ist eine ganze Zahl und } 1 \leq x \leq 3\}$$
ist durch eine Aussageform beschrieben. Die Auflistung der Elemente lautet $M = \{1, 2, 3\}$

Definition 1.2 *(Weitere Begriffe)*

1. *Wir schreiben $x \in M$ falls x der Menge M angehört und $x \notin M$ falls x nicht in M liegt.*
2. *Eine Menge, die kein Element besitzt, heißt* leere Menge *und wird mit $\emptyset$ notiert.*
3. *Zwei Mengen M und N heißen* gleich *($M = N$), wenn sie die gleichen Elemente besitzen.*
4. *M heißt* Teilmenge *von N, $M \subset N$, wenn jedes Element von M auch Element von N ist. Ist M nicht Teilmenge von N, so schreibt man $M \not\subset N$.*
5. *Für $M \subset N$ ist das* Komplement *von M bezüglich N definiert durch*
$$\overline{M} = \{x : \ x \in N \quad \textit{und} \quad x \notin M\}\,.$$
6. *M und N heißen* disjunkt, *wenn sie keine gemeinsamen Elemente besitzen.*
7. *Die* Potenzmenge *$P(M)$ einer Menge M ist die Menge, die alle Teilmengen von M enthält.*

Beispiele:
Wir betrachten die Menge aller Vokale V und die Menge aller Buchstaben des Alphabets B:
$$V = \{a, e, i, o, u\} \quad \text{und} \quad B := \{a, b, c, \ldots, z\}.$$

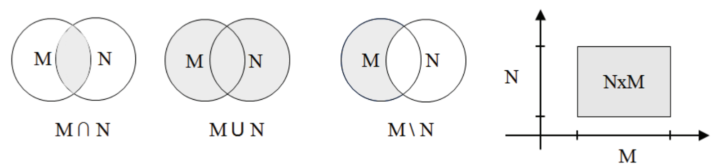
1. Es ist $a \in V$ und $b \notin V$.
2. Es ist $V \subset B$, denn für $x \in V \Rightarrow x \in B$. Jeder Vokal ist ein Buchstabe.
3. Es ist $B \not\subset V$, denn es gibt Buchstaben, die keine Vokale sind.
4. Das Komplement von V bezüglich B ist die Menge aller Buchstaben, die nicht Vokale sind. $\overline{V}$ besteht aus den Konsonanten.

1.1.2 Mengenoperationen

Definition 1.3 *(Mengenoperationen)*
Es seien M, N Mengen. Man definiert die folgenden Mengenoperationen:

$$M \cap N = \{x : \ x \in M \textit{ und } x \in N\} \qquad \textit{Durchschnitt von } M \textit{ und } N$$
$$M \cup N = \{x : \ x \in M \textit{ oder } x \in N\} \qquad \textit{Vereinigung von } M \textit{ und } N$$
$$M \setminus N = \{x : \ x \in M \textit{ und } x \notin N\} \qquad \textit{Differenz von } M \textit{ und } N$$
$$M \times N = \{(x, y) : \ x \in M \textit{ und } y \in N\} \qquad \textit{Kreuzprodukt von } M \textit{ und } N$$
$$M^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_1, x_2, \ldots, x_n \in M\} \qquad n\textit{-faches Kreuzprodukt von } M.$$

Diese Operationen kann man durch Venn-Diagramme veranschaulichen. Die Mengen werden mit Hilfe von Kreisen oder Ellipsen dargestellt:



Venn-Diagramme: $M \cap N$, $M \cup N$, M/N, $M \times N$

Beispiele: Es sei
$$M = \{1, 2, 3\} \quad \text{und} \quad N = \{2, 3, 4\}.$$

1. Es ist $M \cap N = \{2, 3\}$ und $M \cup N = \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Es ist $M \setminus N = \{1\}$ und $N \setminus M = \{4\}$.

3. Es ist $M \times N = \{(x, y) : \; x \in M \quad \text{und} \quad y \in N\}$ bzw.
$$M \times N = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4)\}.$$
4. Die Potenzmenge $P(M)$ von M ist die Menge aller Teilmengen von M:
$$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, M\}\,.$$

Satz 1.1 *(Eigenschaften von Mengen)*
Es seien M, N und K Mengen. Dann gilt:

1. *Aus $M \subset N$ und $N \subset K \quad \Rightarrow \quad M \subset K$.*
2. *Aus $M \subset N$ und $N \subset M \quad \Rightarrow \quad M = N$.*
3. *Kommutativgesetze:* $\quad M \cup N = N \cup M, \quad M \cap N = N \cap M.$
4. *Assoziativgesetze:* $\quad M \cup (N \cup K) = (M \cup N) \cup K, \quad M \cap (N \cap K) = (M \cap N) \cap K.$
5. *Distributivgesetze:*
   $M \cap (N \cup K) = (M \cap N) \cup (M \cap K), \quad M \cup (N \cap K) = (M \cup N) \cap (M \cup K).$
6. *Für $M, N \subset K$ gelten die* Regeln von de Morgan*:*
   $\overline{M \cup N} = \overline{M} \cap \overline{N}$ *und* $\overline{M \cap N} = \overline{M} \cup \overline{N}.$

Beweis: Wir zeigen exemplarisch das erste Distributivgesetz. Sei $x \in M \cap (N \cup K)$. Dann gilt $x \in M$ und $x \in N$ oder $x \in K$. D.h. $x \in M$ und $x \in N$ oder $x \in M$ und $x \in K$, also $x \in (M \cap N) \cup (M \cap K)$. Sei umgekehrt $x \in (M \cap N) \cup (M \cap K)$. Dann ist $x \in M$ und $x \in N$ oder $x \in M$ und $x \in K$. Also ist $x \in M$ und x liegt in N oder in K, d.h. $x \in M \cap (N \cup K)$. Die anderen Aussagen zeigt man entsprechend $\diamond$

Veranschaulichen Sie sich die Aussagen aus dem Satz mit Venn-Diagrammen.

1.2 Zahlenmengen

Der Begriff *Zahl* ist in der Mathematik keineswegs so eindeutig wie man dies erwarten könnte. Die Notwendigkeit der Konstruktion einzelner Zahlenmengen ergibt sich aus der Unzulänglichkeit der einzelnen Rechenoperationen in den bestimmten Zahlenmengen.

Die folgenden Zahlenmengen sind aus der Schule bekannt:

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen,
2. $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ Menge der natürlichen Zahlen mit der Null,
3. $\mathbb{Z} = \{0, +1, -1, +2, -2, \dots\}$ Menge der ganzen Zahlen,
4. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : \; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}$ Menge der rationalen Zahlen,

5. $\mathbb{R}$: Menge der reellen Zahlen.

Es gilt $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Häufig werden Teilmengen dadurch definiert, indem Elemente ausgewählt werden, die bestimmten Bedingungen genügen. Die Menge der geraden Zahlen ist die Menge aller ganzen Zahlen, die das doppelte einer anderen ganzen Zahl sind. Dies schreibt man knapp
$$\mathbb{Z}_g = \{m \in \mathbb{Z} : \; m = 2 \cdot n, \; n \in \mathbb{Z}\}\,.$$
Analog sind die ungeraden Zahlen definiert durch
$$\mathbb{Z}_u = \{m \in \mathbb{Z} : \; m = 2 \cdot n + 1, \; n \in \mathbb{Z}\}\,,$$
und die positiv reellen Zahlen durch
$$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0\}\,.$$

Wir betrachten nun arithmetische Rechenoperationen in den Zahlenmengen:

1. Addition und Multiplikation von zwei natürlichen Zahlen ergibt wieder eine natürliche Zahl. Addition und Multiplikation von Elementen aus $\mathbb{N}$ führt nicht aus $\mathbb{N}$ heraus. Man sagt die Menge $\mathbb{N}$ ist *abgeschlossen* bezüglich Addition und Multiplikation.

   Aber: Die Gleichung $x + 2 = 1$ besitzt in $\mathbb{N}$ keine Lösung.
2. Auch $\mathbb{N}_0$ ist abgeschlossen bezüglich Addition und Multiplikation.
3. Addition, Subtraktion und Multiplikation ganzer Zahlen liefert wieder eine ganze Zahl. $\mathbb{Z}$ ist ist abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion und Multiplikation.

   Aber: Die Gleichung $x \cdot 3 = 1$ besitzt in $\mathbb{Z}$ keine Lösung.
4. In $\mathbb{Q}$ dürfen wir addieren, subtrahieren, multiplizieren und durch Zahlen ungleich Null dividieren und erhalten wieder eine rationale Zahl. $\mathbb{Q}$ ist ist abgeschlossen bezüglich Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division.

   Aber: Die Gleichung $x^2 = 2$ besitzt in $\mathbb{Q}$ keine Lösung. Diese nicht unmittelbar einsichtige Tatsache wird später bewiesen.

Wir halten fest: Die Erweiterung einer Zahlenmenge ist motiviert durch den Wunsch, Gleichungen zu lösen.

1.3 Natürliche Zahlen

Die natürlichen Zahlen kennen Sie bereits aus der Grundschule. Sie sind nur dann anschaulich, wenn es sich um kleine Zahlen handelt.

1.3.1 Zahlendarstellung, Primzahlen

Wir sind es gewohnt natürliche Zahlen im Dezimalsystem mit dem Ziffernvorrat $\{0, 1, \dots, 9\}$ anzugeben. Der Wert, den eine Ziffer vertritt hängt von der Stellung innerhalb der Ziffernfolge ab. Im Dezimalsystem gilt beispielsweise

$$123 = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0.$$

Allgemeiner kann man statt der Basis 10 auch eine andere natürliche Zahl $b > 1$ als Basis des Zahlensystems wählen:

$$\begin{aligned} z &= (z_r z_{r-1} \dots z_0)_b \\ &= z_r \cdot b^r + z_{r-1} \cdot b^{r-1} + \dots + z_0 \cdot b^0, \quad z_k \in \{0, 1, \dots, b-1\}. \end{aligned}$$

Folgende Zahlendarstellungen werden häufig verwendet:

Basis b	Name	Ziffernvorrat
2	Dual- oder Binärsystem	$\{0, 1\}$
8	Oktalsystem	$\{0, 1, \dots, 7\}$
16	Hexadezimalsystem	$\{0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F\}$

Die Umwandlung einer Zahl aus der Darstellung zur Basis b ins Dezimalsystem erfolgt nach dem *Hornerschema*:

- Die Ziffern $z_r, \dots, z_0$ werden in die erste Zeile des Schemas geschrieben,
- Die Basis b (der Faktor) und die 0 werden in die zweite Zeile geschrieben:

$$\begin{array}{c|lllll} & z_r & z_{r-1} & z_{r-2} & \dots & z_0 \\ b & 0 & & & \dots & \\ \hline & & & & & \end{array}$$

- Nun wird, beginnend mit z_r von oben nach unten addiert und von links nach rechts mit b multipliziert. Man erhält:

$$\begin{array}{c|lllll} & z_r & z_{r-1} & z_{r-2} & \dots & z_0 \\ b & 0 & z_r \cdot b & (z_r \cdot b + z_{r-1}) \cdot b & \dots & (\dots) \cdot b \\ \hline & z_r & z_r \cdot b + z_{r-1} & \text{usw.} & & \text{Ergebnis} \end{array}$$

- Das Ergebnis steht in der letzten Spalte der dritten Zeile.

Beispiel:

Stellen Sie die Hexadezimalzahl $(4E20A)_{16}$ im Dezimalsystem dar:

$$\begin{array}{c|lllll} & 4 & 14 & 2 & 0 & 10 \\ 16 & 0 & 64 & 1248 & 20.000 & 320.000 \\ \hline & 4 & 78 & 1250 & 20.000 & 320.010 \end{array}$$

Also gilt: $(4E20A)_{16} = (320.010)_{10}$.

Die Umwandlung einer positiven ganzen Zahl vom Dezimalsystem in das System mit Basis $b > 0$ wird durch *fortlaufende ganzzahlige Division mit Rest* durchgeführt. Wir betrachten eine ganze Zahl $x \in \mathbb{N}$ im Dezimalsystem. Ganzzahlige Division von x durch b ergibt

$$x = x_0 \cdot b + y_0$$

mit einem Faktor $x_0 \in \mathbb{N}_0$ und einem Rest $y_0 \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Man merkt sich den Rest y_0 und führt für x_0 wieder eine ganzzahlige Division durch b durch:

$$x_0 = x_1 \cdot b + y_1$$

mit Faktor $x_1 \in \mathbb{N}_0$ und Rest $y_1 \in \{0, 1, \dots, b-1\}$. Man merkt sich y_1 und führt für den Faktor x_1 wieder eine ganzzahlige Division mit Rest duch b durch. Wir verfahren so weiter und erhalten

$$x_k = x_{k+1} \cdot b + y_{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

bis der Faktor $x_n = 0$ auftritt:

$$x_{n-1} = 0 \cdot b + y_n, \quad y_n \in \{0, 1, \dots, b-1\}.$$

Dann gilt $x = (y_n \dots y_1 y_0)_b$.

Wir stellen die Dezimalzahl 25 im Dualsystem dar:

$$\begin{aligned} 25 : 2 &= 12 \text{ R } 1 \\ 12 : 2 &= 6 \text{ R } 0 \\ 6 : 2 &= 3 \text{ R } 0 \\ 3 : 2 &= 1 \text{ R } 1 \\ 1 : 2 &= 0 \text{ R } 1 \end{aligned}$$

Es gilt $25 = (11001)_2$.

Wir betrachten nun noch weitere Eigenschaften der natürlichen Zahlen.

Definition 1.4 *(Primzahl)*
Eine natürliche Zahl größer 1, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist heißt Primzahl.

Die ersten Primzahlen lauten: 2,3,5,7,11,13,17,19,...

Satz 1.2 *(Primfaktorzerlegung)*
Jede natürliche Zahl a läßt sich eindeutig als endliches Produkt aus lauter Primfaktoren darstellen:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \qquad p_k: \textit{ Primzahl}.$$

So gelten beispielsweise die Primfaktorzerlegungen

$$4 = 2 \cdot 2, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 18 = 2 \cdot 3 \cdot 3, \quad 17 = 17 \quad \text{und} \quad 126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7.$$

1.3.2 Fakultät und Binomialkoeffizient

Definition 1.5 *(Fakultät)*
Die Fakultät *einer natürliche Zahl n ist erklärt durch das Produkt*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1.$$

Zusätzlich setzt man $0! = 1$.

Man erhält beispielsweise

$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6 \quad \text{und} \quad 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$$

Definition 1.6 *(Binomialkoeffizient)*
Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $n \geq k$. Dann heißt die natürliche Zahl

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

der Binomialkoeffizient *von n und k, gelesen: „n über k“ .*
Für $n < k$ setzt man

$$\binom{n}{k} = 0.$$

Beispiele:

1. Es gilt die Rekursion $n! = n \cdot (n-1)! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!$ etc.
2. $n!$ wächst sehr schnell mit n:
$$5! = 120, \quad 10! = 3.628.800, \quad 20! = 2.432902008 \cdot 10^{18}.$$
3. Mit der Definition der Binomialkoeffizienten berechnet man
$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)! \cdot 2!} = \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 3 \quad \text{und} \quad \binom{11}{8} = \frac{11!}{(11-8)! \cdot 8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 165.$$
4. Es gilt
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Satz 1.3 *(Binomialkoeffizienten)*
Es sei $n, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$,

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ *und* $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n.$

Beweis: Einsetzen in die Definition liefert sofort:
1. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$
2. $\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = 1$ und $\binom{n}{n} = \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = 1$ sowie
$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{1! \cdot (n-1)!} = n$ und $\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)! \cdot 1!} = n \quad \diamond$

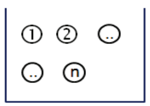
1.3.3 Grundformeln der Kombinatorik

Mit Hilfe der Kombinatorik kann man endliche Mengen systematisch abzählen. Wir betrachten n unterscheidbare Elemente (Objekte, Personen, Gegenstände), dargestellt durch n Kugeln in einer Urne.

Definition 1.7 *(Permutation)*
Eine Permutation *von n Elementen ist eine Anordnung der n Elemente in einer bestimmten Reihenfolge.*

Satz 1.4 *(Permutation von n Elementen)*
Es gibt $n!$ verschiedene Permutationen von n Elementen.

Beweis: Als Modell betrachten wir das Ziehen von n unterscheidbaren Kugeln aus einer Urne:



Für die Besetzung des ersten Platzes gibt es n Möglichkeiten, für den zweiten Platz gibt es $n-1$ Möglichkeiten usw. Für den n-ten Platz bleibt noch eine Kugel übrig
$\Rightarrow \quad n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!$ Möglichkeiten.

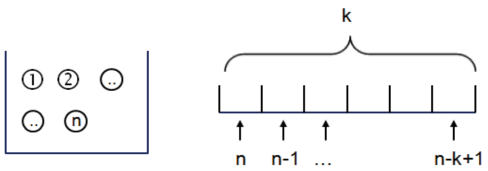
Definition 1.8 *(Kombination und Variation ohne Wiederholung)*

1. *Wählt man aus einer Menge von n Elementen k Elemente aus, ohne auf die Reihenfolge zu achten, so spricht man von einer* Kombination von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung.
2. *Achtet man dagegen auf die Reihenfolge (Anordnung), so spricht man von einer* Variation von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung.

Satz 1.5 *(Kombinationen und Variationen ohne Wiederholung)*

1. *Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung ist* $\binom{n}{k}$.
2. *Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur Klasse k ohne Wiederholung ist*
$$n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \binom{n}{k} \cdot k!.$$

Beweis: Wir ziehen k Kugeln aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln. Für die Anzahl der Variationen ohne Wiederholung folgt:



$\Rightarrow \quad n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!} = \binom{n}{k} \cdot k!$ Möglichkeiten, wobei die Reihenfolge berücksichtigt ist.

Wieviele Möglichkeiten gibt es k unterscheidbare Kugeln anzuordnen? Mit dem vorherigen Satz gibt es $k!$ Permutationen einer k-elementigen Menge. Also fallen $k!$ Variationen auf eine Kombination zusammen.
Insgesamt erhält man $\dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Somit hat man die Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung erhalten $\diamond$

Definition 1.9 *(Kombination und Variation mit Wiederholung)*

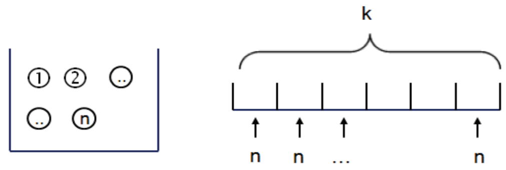
1. *Läßt man bei der Auswahl der k Elemente aus einer Menge von n Elementen Wiederholungen zu, ohne auf die Reihenfolge zu achten, so spricht man von einer* Kombination von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung.

2. *Achtet man dagegen auf die Reihenfolge (Anordnung), so spricht man von einer* Variation von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung.

Satz 1.6 *(Kombinationen und Variationen mit Wiederholung)*

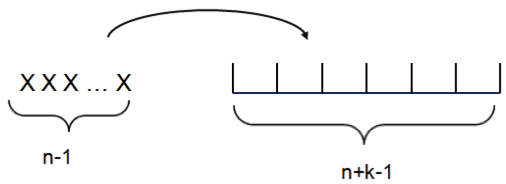
1. *Die Anzahl der Kombinationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist* $\binom{n+k-1}{k}$.
2. *Die Anzahl der Variationen von n Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist* n^k.

Beweis: Wir beginnen mit den Variationen. Ziehen von k Kugeln mit Zurücklegen aus einer Urne mit n unterscheidbaren Kugeln ergibt:



$\Rightarrow \quad n \cdot n \cdots n = n^k$ Möglichkeiten.

Da bei der Berechnung der Kombinationen jedes der n Elemente mehrfach vorkommen kann und die Reihenfolge nicht beachtet wird, modifizieren wir das Urnenmodell wie folgt:
Wir verteilen $n-1$ „Tennzeichen X" auf $n+k-1$ Plätze entsprechend dem Schema



Es bleiben immer k Plätze frei.

Die Verteilung der Trennzeichen „X" wird wie folgt interpretiert:

- Die Anzahl der freien Plätze vor dem ersten X entspricht der Anzahl der 1-er Kugeln.
- Die Anzahl der freien Plätze zwischen dem $(j-1)$-ten und j-ten X entspricht der Anzahl der j-er Kugeln.
- Die Anzahl der freien Plätze hinter dem letzten ($(n-1)$-ten) X entspricht der Anzahl der n-er Kugeln.

Beispielsweise sind für $n = 4$ und $k = 5$ in der Stichprobe

$$| \; 1 \; | \; \text{X} \; | \; \text{X} \; | \; 3 \; | \; 3 \; | \; 3 \; | \; \text{X} \; | \; 4 \; |$$

eine 1-er Kugel, keine 2-er Kugel, drei 3-er Kugeln und eine 4-er Kugel enthalten. Insgesamt wurden 5 Kugeln gezogen.

Für die Verteilung der $n-1$ (nicht unterscheidbaren) Trennzeichen X auf die $n+k-1$ Plätze gibt es

$$\frac{(n+k-1)\cdots(k+1)}{(n-1)!} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!\,k!} = \binom{n+k-1}{k} \quad \text{Möglichkeiten} \quad \diamond$$

Die folgende Tabelle stellt die Ergebnisse übersichtlich zusammen:

	Permutation (mit Reihenfolge)	Variation (mit Reihenfolge)	Kombination (ohne Reihenfolge)
ohne Wiederholung	$n!$	$\frac{n!}{(n-k)!}$	$\binom{n}{k}$
mit Wiederholung	n^n	n^k	$\binom{n+k-1}{k}$

Beispiele:

1. Wieviele Wörter kann man aus den Buchstaben des Worts INA bilden?

   Die Anzahl der Permutationen aus 3 Elementen ist $3! = 6$. Die sechs Wörter lauten: INA, IAN, NIA, NAI, AIN, ANI.

2. Wie viele 8-stellige Dualzahlen gibt es?

   Aus der Menge $\{0, 1\}$ werden 8 Elemente mit Wiederholung und mit Reihenfolge ausgewählt. Die Anzahl der Variationen von 2 Elementen zur Klasse 8 mit Wiederholung ist 2^8.

3. Beim Zahlenlotto „6 aus 49“ sind 6 Zahlen aus der Menge $\{1, 2, \ldots, 49\}$ auszuwählen, so daß die Spielmöglichkeiten durch die Kombination aus 49 Elementen zur Klasse 6 ohne Wiederholung gegeben sind.

   Aus der Tabelle entnehmen wir für die Anzahl den Wert
   $$\binom{49}{6} = \frac{49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} = 13983816.$$

4. Aus einer Gruppe von 8 Studenten soll ein Team bestehend aus Projektleiter, Sekretär und Berichterstatter gebildet werden. Wie viele Teamkonstellationen sind möglich?

   Aus der Menge der Studenten $(n = 8)$ werden $k = 3$ Leute auf Platz 1, 2 und 3 gezogen. Die Anzahl der Variationen von 8 Elementen zur Klasse 3 ohne Wiederholung beträgt $\binom{8}{3}3! = 8\cdot 7\cdot 6 = 336$.

5. Wieviele unterschiedliche Würfe sind mit k gleichen Würfeln (mit Augenzahlen 1-6) möglich ?

   Aus der Menge der Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $(n = 6)$ werden k Augenzahlen mit Wiederholung und ohne Reihenfolge ausgewählt. Die Anzahl der Kombinationen von 6 Elementen zur Klasse k mit Wiederholung ist $\binom{6+k-1}{k}$.

1.4 Rationale Zahlen

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind gegeben als Brüche aus ganzen Zahlen. Ein und dieselbe rationale Zahl $x = \frac{p}{q}$ kann in verschiedener Weise als Bruch dargestellt werden. Die Darstellung wird eindeutig, wenn verlangt wird, daß p und q teilerfremd sind, d.h. eine weitere Kürzung des Bruchs nicht mehr möglich ist.

1.4.1 Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Eine rationale Zahl x läßt sich entweder als *Dezimalzahl* mit endlich vielen Stellen oder als *nicht abbrechende periodische Dezimalzahl* darstellen, d.h. $x = a + r$ mit $a \in \mathbb{Z}$ und

$$r = 0.a_1a_2\ldots a_k\overline{b_1b_2\ldots b_l}, \quad a_i, b_i \in \{0, 1, \ldots, 9\},$$

wobei die Periode durch einen übergesetzten Querstrich gekennzeichnet wird.
Beispiele:

1.
30 : 8 = 3.75	7 : 12 = 0.58$\overline{3}$
<u>24</u>	70
60	<u>60</u>
<u>56</u>	100
40	<u>96</u>
<u>40</u>	40
–	<u>36</u>
	40
	<u>36</u>

2. Es sei $x = \frac{p}{q} \geq 0$ eine periodische Dezimalzahl. Wie groß ist die maximale Länge der Periode?

   Division von p durch q ergibt
   $$\frac{p}{q} = m_0 + \frac{r_0}{q} \quad \text{mit} \quad m_0, r_0 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad 0 \leq r_0 < q.$$
   Um die Nachkommastellen zu erhalten, dividiert man $10\cdot r_0$ durch q und erhält
   $$\frac{10\cdot r_0}{q} = m_1 + \frac{r_1}{q} \quad \text{mit} \quad m_1, r_1 \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad 0 \leq r_1 < q.$$
   Danach dividiert man $10\cdot r_1$ durch q und setzt den Prozess immer weiter fort. Allgemein gilt im k-ten Schritt:
   $$\frac{10\cdot r_{k-1}}{q} = m_k + \frac{r_k}{q} \quad \text{mit} \quad m_k, r_k \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad 0 \leq r_k < q, \quad \text{für} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

d.h. es gibt höchstens q verschiedene Reste r_k, sodaß das Verfahren entweder abbricht (Rest $r_k = 0$) oder aber nach spätestens q Schritten erhält man einen Rest r_k welcher schon einmal aufgetreten ist, sodaß ab dieser Stelle die Folge der Reste periodisch wiederkehrt. Die maximale Periodenlänge ist also $q - 1$.

3. Wir formen nun eine periodische Dezimalzahl in einen Bruch um.

   Für die periodische Dezimalzahl $r = 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k}$ gilt zunächst

$$\begin{aligned} 10^k \cdot r &= a_1 a_2 \ldots a_k.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} \\ r &= 0.\overline{a_1 a_2 \ldots a_k} \end{aligned}$$

   und Subtraktion liefert $(10^k - 1) \cdot r = a_1 a_2 \ldots a_k$. Weiter folgt

$$r = \frac{a_1 a_2 \ldots a_k}{\underbrace{99 \ldots 9}_{k \text{ Stellen}}}.$$

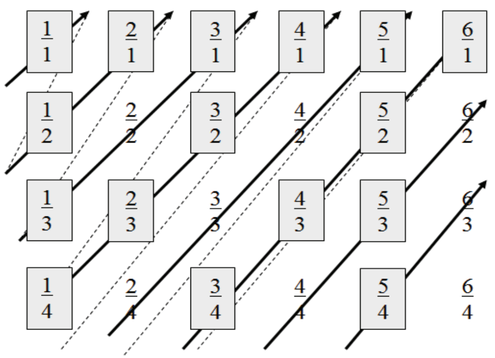
   Mit dieser Eigenschaft kann man aus der Dezimaldarstellung einer periodischen Dezimalzahl die Darstellung als Quotient ganzer Zahlen erhalten.

   Beispielsweise gilt:

$$0.2\overline{54} = 0.2 + 0.1 \cdot 0.\overline{54} = \frac{2}{10} + \frac{1}{10} \cdot \frac{54}{99} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{11} = \frac{14}{55}.$$

1.4.2 Abzählbarkeit

Schreibt man die rationalen Zahlen als rechteckiges Schema (Cantorsches Schema) in der folgenden Form auf:



Abzählung der rationalen Zahlen

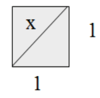
und ordnet sie entsprechend der Pfeile nacheinander an, wobei jede bereits vorgekommene Zahl übergangen wird, hat man eine „Durchnummerierung“ von $\mathbb{Q}$ vorgenommen. Durch die Nummerierung wird jeder rationalen Zahl eine eindeutige natürliche Zahl zugeordnet. Man sagt, die Menge $\mathbb{Q}$ ist *abzählbar*.

Die Zahlen in $\mathbb{Q}$ liegen zwar beliebig nahe beieinander, es gibt aber dennoch „Lücken“ in $\mathbb{Q}$, wie wir im nächsten Abschnitt sehen.

1.5 Reelle Zahlen

1.5.1 Irrationale Zahlen

Nach dem Satz von Pythagoras ist die Länge x der Diagonale in einem Quadrat gegeben durch die Beziehung im rechtwinkligen Dreieck $x^2 = 1^2 + 1^2$, d.h. als Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.



Hier reichen die rationalen Zahlen nicht mehr aus, denn die Gleichung $x^2 = 2$ besitzt in $\mathbb{Q}$ keine Lösung. Setze $x = \sqrt{2}$ als Lösung der Gleichung $x^2 = 2$, $x > 0$. Dann gilt:

Satz 1.7 *$\sqrt{2}$ ist keine rationale Zahl.*

Beweis: Angenommen es gilt $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, d.h. man kann nicht weiter kürzen. Dann ist $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2 \cdot q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ ist durch 2 teilbar. Mit der eindeutigen Primfaktorzerlegung von p folgt $p = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$ mit Primzahlen p_k und weiter $p^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2$, d.h. jede Primzahl in der Zerlegung von p^2 tritt mindestens quadratisch auf. Da p^2 durch 2 teilbar ist gilt z.B. $p_1 = 2$ und somit ist auch p durch 2 teilbar.
Also:

$$2 \cdot q^2 = p_1^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 = 2^2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2 \Rightarrow q^2 = 2 \cdot p_2^2 \cdots p_n^2,$$

d.h. q^2 ist durch 2 teilbar. Wie oben folgt: q ist durch 2 teilbar. Damit haben wir einen Widerspruch, denn p und q waren teilerfremd vorausgesetzt.

Also: $\sqrt{2}$ läßt sich nicht als (gekürzter) Bruch darstellen, d.h. $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ $\diamond$

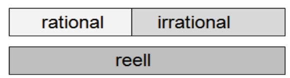
Man erweitert (vervollständigt) die rationalen Zahlen so, daß die Lösungen von Gleichungen dieses Typs sowie weitere Grenzwerte in der erweiterten Menge liegen und gelangt so zu den *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$.

Die reellen Zahlen enthalten also die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ (abbrechende und nicht abbrechende periodische Dezimalzahlen) und die *irrationalen Zahlen* (nicht abbrechende nicht periodische Dezimalzahlen) wie z.B.

$\sqrt{2} = 1,414213562..$

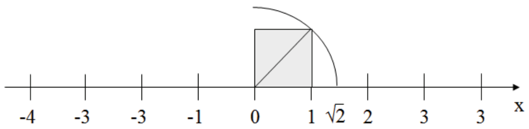
$\pi = 3,141592654..$

$e = 2,718281828..$



1.5.2 Charakterisierung der reellen Zahlen

Die reellen Zahlen lassen sich auf der *Zahlengeraden* anordnen. Auch die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ findet dort ihren Platz, der sich sogar geometrisch konstruieren läßt:



Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlengeraden.

Durch diese „Vervollständigung“ werden die Lücken in $\mathbb{Q}$ geschlossen. In der Praxis bedeutet dies, daß der Grenzwert einer konvergenten Folge reeller Zahlen in $\mathbb{R}$ liegt bzw. die Intervallschachtelung mit reellen Intervallgrenzen auf ein Element aus $\mathbb{R}$ führt.

Die rationalen Zahlen liegen „dicht“ in $\mathbb{R}$, d.h. eine reelle Zahl kann beliebig genau durch rationale Zahlen angenähert werden. Wir zeigen dies später bei der Intervallschachtelung von $\sqrt{2}$ mit rationalen Intervallgrenzen. Dennoch ist $\mathbb{R}$ nicht abzählbar, d.h. man kann keine Nummerierung der reellen Zahlen durchführen.

Die folgende Aussage charakterisiert die neue Qualität der reellen Zahlen:

Satz 1.8 *(Existenz des Infimums und Supremums)*
Jede beschränkte nichtleere Menge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt in $\mathbb{R}$ ein Infimum $\underline{a} = inf\,A$ *(größte untere Schranke) und ein* Supremum $\overline{a} = sup\,A$ *(kleinste obere Schranke).*

1.5.3 Arithmetik in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{R}$

In $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind die arithmetischen Operationen *Addition* „$+$“, *Subtraktion* „$-$“, *Multiplikation* „$\cdot$“ und *Division* „/“ erklärt. Es gelten folgende Regeln:

Satz 1.9 *(Arithmetik)*
Seien $a, b, c \in \mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$.

1. *$\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ sind* abgeschlossen *bezüglich $+, -, \cdot, /$:*

   $a \pm b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}$ *(mit $b \neq 0$) liegen in den entsprechenden Bereichen. Durch 0 darf nicht dividiert werden.*

2. *Es gelten die Kommutativgesetze:*

   $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$

3. *Es gelten die Assoziativgesetze:*

   $a + (b + c) = (a + b) + c, \quad a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c.$

4. *Es gilt das Distributivgesetz:*

   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

5. *Für das Rechnen mit Brüchen gelten folgende Gesetze:*

   $$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \pm b \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

   sofern die auftretenden Terme sinnvoll sind.

Beispiele:

1. Üben Sie sich im elementaren Bruchrechnen! Es gilt:

   $$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} \quad \text{(Hauptnenner bilden)}$$
   $$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21} \quad \text{(dto)}$$
   $$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 13} = \frac{2}{26} = \frac{1}{13} \quad \text{(Multiplikation von Brüchen, Kürzen)}$$
   $$\frac{1}{2} : \frac{2}{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{1 \cdot 13}{2 \cdot 2} = \frac{13}{4} \quad \text{(Division durch Multiplikation mit Kehrbruch)}$$

2. Rechenbeispiel in $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}, 0 \right\}$:

   $$\left(\frac{1}{2x+1} \cdot \left(x + \frac{1}{x} \right) \right)^{-1} = \left(\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{x \cdot (2x+1)} \right)^{-1} =$$
   $$\left(\frac{x^2}{x \cdot (2x+1)} + \frac{1}{x \cdot (2x+1)} \right)^{-1} = \left(\frac{x^2+1}{x \cdot (2x+1)} \right)^{-1} = \frac{x \cdot (2x+1)}{x^2+1}.$$

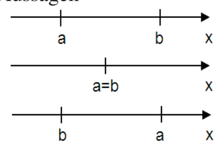
1.5.4 Ordnungsrelationen, Ungleichungen und Betrag

Für zwei reelle Zahlen a, b gilt genau eine der Aussagen

(a) $a < b$ $\Leftrightarrow$ „a ist kleiner als b“

(b) $a = b$ $\Leftrightarrow$ „a ist gleich b“

(c) $a > b$ $\Leftrightarrow$ „a ist größer als b“



Häufig verwendet man die Schreibweise $a \leq b$ für „$a < b$ oder $a = b$“ und $a \geq b$ für „$a > b$ oder $a = b$“ .

Beispielsweise gilt: $1 < 2, \;\; 1 \leq 2, \;\; 1 \leq 1, \;\; 5 > 3, \;\; 3 \not> 5.$

Satz 1.10 *(Rechenregeln für Ungleichungen)*
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\quad a < b \quad$ *und* $\quad b < c \quad \Rightarrow \quad a < c,$

2. $\quad a < b \quad \Rightarrow \quad a + c < b + c,$

3. $\quad a < b \quad$ *und* $\quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c < b \cdot c,$

$\quad a < b \quad$ *und* $\quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot c,$

4. $\quad a \cdot b > 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *(*$a > 0$ *und* $b > 0$*) oder (*$a < 0$ *und* $b < 0$*), d.h.* a *und* b *haben gleiches Vorzeichen,*

$\quad a \cdot b < 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *a und b haben unterschiedliches Vorzeichen,*

$\quad a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad$ *$a = 0$ oder $b = 0$,*

5. $\quad 0 < a < b \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}.$

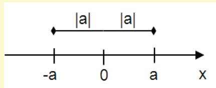
Beispiele:

1. $1 < 2 \mid \cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 3 < 6$ und $1 < 2 \mid \cdot (-3) \quad \Rightarrow \quad -3 > -6.$
2. $2 > 0,\ 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 8 = 16 > 0.$
   $-2 < 0,\ -8 < 0 \quad \Rightarrow \quad (-2) \cdot (-8) = 16 > 0.$
   $-2 < 0,\ 8 > 0 \quad \Rightarrow \quad (-2) \cdot 8 = -16 < 0.$
3. $0 < 2 < 5 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{1}{2} > \dfrac{1}{5}.$

Definition 1.10 *(Betrag und Abstand)*
Es seien a und b reelle Zahlen.

1. Der Betrag *von a ist erklärt durch*

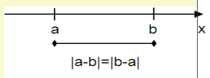
$$|a| := \begin{cases} a, & \textit{für} \quad a \geq 0, \\ -a, & \textit{für} \quad a < 0. \end{cases}$$



$|a|$ entspricht dem Abstand von a zum Nullpunkt auf der Zahlengerade.

Es gilt $|a| \geq 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

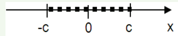
2. Der Abstand *von a und b ist gegeben durch $|a - b| = |b - a|$.*



Beispiele:

1. $|1| = 1,\ \ |-1| = -(-1) = 1,\ \ |0| = 0.$
2. Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $|-x| = |x|$. Ist $x \geq 0$ so folgt $|x| = x$ und $|-x| = -(-x) = x$, für $x < 0$ gilt $|x| = -x$ und $|-x| = -x$.

Satz 1.11 *(Rechenregeln für den Betrag)*
Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt



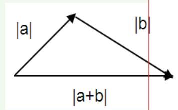
1. $\quad |x| \leq c \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq x \leq c,$

2. $\quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|,$

$\quad \left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|} \quad$ *falls $b \neq 0$.*

Satz 1.12 *(Wichtige Ungleichungen)*

1. Dreiecksungleichungen. Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten



$|a + b| \leq |a| + |b| \qquad$ *1. Dreiecksungleichung,*

$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \qquad$ *2. Dreiecksungleichung.*

2. Ungleichung vom arithmetisch-geometrischen Mittel. Für reelle Zahlen $a_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$ gilt:

$$0 \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}.$$

3. Bernoullische Ungleichung. Für reelle Zahlen $x \geq -1$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x.$$

Beweis: Wir zeigen hier nur die Dreiecksungleichung.
Fall 1: $a + b \geq 0$: Hier ist $|a + b| = a + b$. Mit $a \leq |a|$, $b \leq |b|$ folgt $|a + b| \leq |a| + |b|$.
Fall 2: $a + b < 0$: Hier gilt $|a + b| = -(a + b)$. Mit $-a \leq |a|$, $-b \leq |b|$ folgt $|a + b| \leq |a| + |b| \diamond$

Beispiele:

1. $|x - 1| \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 \leq x - 1 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -3 + 1 \leq x \leq 3 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2 \leq x \leq 4.$
2. Es gilt $|5 + 6| \leq |5| + |6|, \qquad |5 - 6| \leq |5| + |6|.$

1.5.5 Intervalle und Intervallschachtelung

Intervalle sind spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$:

Definition 1.11 *(Intervalle)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$. Dann unterscheiden wir folgende endliche Intervalle:

1. $\quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$ *abgeschlossenes Intervall,*

2. $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \le x < b\}$

   $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \le b\}$ *halboffene Intervalle*

3. $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ *offenes Intervall.*

Unendliche Intervalle sind Intervalle der Bauart

4. $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \ge a\}$ *und* $(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} : x \le a\}$

5. $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ *und* $(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$.

∞ und $-\infty$ sind keine reellen Zahlen, sondern stets im Zusammenhang mit den entsprechenden Intervallen zu verstehen. D.h. Mengen der Bauart $[-\infty,a),\ [-\infty,a],\ (a,\infty],\ [a,\infty]$ sind nicht definiert.

Eine Folge von Intervallen nennt man eine *Intervallschachtelung*, wenn jedes Intervall ganz im vorhergehenden Intervall enthalten ist und wenn die Intervalllängen gegen 0 gehen. Jede Intervallschachtelung bestimmt demnach eine reelle Zahl, die in allen Teilintervallen enthalten ist.

Beispiel:

Eine mögliche Intervallschachtelung für $\sqrt{2}$ lautet:

$1.4 < \sqrt{2} < 1.5$ weil $1.4^2 < 2 < 1.5^2$ bzw. $1.96 < 2 < 2.25$.

Eine neue Intervallgrenze erhält man durch Halbierung des aktuellen Intervalls: 1.45 (arithmetisches Mittel). Die neue Grenze muß wegen $1.45^2 = 2.1025$ die rechte Grenze des neuen Intervalls sein:

$1.4 < \sqrt{2} < 1.45$ weil $1.4^2 < 2 < 1.45^2$ bzw. $1.96 < 2 < 2.1025$

und weiter folgt

$1.4 < \sqrt{2} < 1.425$

$1.4125 < \sqrt{2} < 1.425$

$1.4125 < \sqrt{2} < 1.41875$

$1.4125 < \sqrt{2} < 1.4156$

$1.4141 < \sqrt{2} < 1.4156$ etc.

Mit dem Intervallhalbierungsverfahren kann $\sqrt{2}$ durch rationale Zahlen beliebig genau angenähert werden.

Wir betrachten das Intervallhalbierungsverfahren etwas genauer. Starten wir mit dem Intervall $I_0 = [a,b]$ der Länge $L(I_0) = b - a$. Bei jedem Schritt halbiert sich die Intervalllänge, d.h. im n-ten Schritt haben wir

$$L(I_n) = \frac{1}{2} \cdot L(I_{n-1}) = \frac{1}{2^2} \cdot L(I_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^n} \cdot L(I_0).$$

Wir fragen: wie oft müssen wir I_0 halbieren, wenn $\sqrt{2}$ in ein Intervall mit Länge kleiner als ε (Fehlerschranke) einzuschliessen ist?

$$\frac{1}{2^n} L(I_0) \overset{!}{<} \varepsilon \quad \Big| \cdot \frac{2^n}{\varepsilon} \quad \Rightarrow \quad \frac{L(I_0)}{\varepsilon} < 2^n \quad \big| \ \ln(.) \quad \Rightarrow \quad \ln\left(\frac{L(I_0)}{\varepsilon}\right) < n \cdot \ln(2)$$

also

$$n > \frac{\ln\left(\frac{L(I_0)}{\varepsilon}\right)}{\ln(2)}.$$

Beginnen wir mit der Einschließung $\sqrt{2} \in I_0 = [1.4, 1.5]$ mit $L(I_0) = 0.1$, und wird $\varepsilon = 10^{-3}$ gefordert, so folgt

$$n > \frac{\ln\left(\frac{0.1}{10^{-3}}\right)}{\ln(2)} = \frac{\ln(100)}{\ln(2)} = 6.64.$$

Also sind $n = 7$ Halbierungsschritte erforderlich, um $\sqrt{2}$ hinreichend genau einzuschliessen.

1.5.6 Summen und Produkte

Definition 1.12 *(Summenzeichen)*
Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$$

Das Zeichen $\sum$ (Sigma) heißt Summenzeichen, *k ist die* Zählvariable *oder* Zähler.

Beispiele:

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}.$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}.$

3. $\displaystyle\sum_{i=3}^{5} \frac{i^2}{i+1} = \frac{9}{4} + \frac{16}{5} + \frac{25}{6}.$

4. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{(n+1)-\text{mal}} = n + 1.$

Satz 1.13 *(Rechenregeln für Summen)*
Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k,$

2. $\sum_{k=1}^{n} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k$,

3. $\sum_{k=m}^{n} a_k = 0$ *falls* $m > n$ *(leere Summe).*

Beweis: Die Herleitung von 1-3 folgt aus der Definition der Summe. Beispielsweise erhält man die Beweis zu 1 mit dem Kommutativgesetz und Assoziativgesetz der Addition:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k) &= (a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots(a_n+b_n) \\ &= a_1+\cdots+a_n+b_1+\cdots+b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \quad \diamond\end{aligned}$$

Bemerkung: Das Summenzeichen ist zu vergleichen mit einer *Zählschleife*:
Für $m \leq n$ gilt:

$$SUM = \sum_{k=m}^{n} a_k \qquad \Longleftrightarrow$$

```
sum=0;
for k=m to n do
sum=sum+a[k];
od;
```

Der Name des Zählers ist für den Wert der Summe irrelevant.

Beispiele:

1. Folgende Ausdrücke sind äquivalent:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i=0}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} = \sum_{l=5}^{n+5} a_{l-5}.$$

2. *Indextransformation*: Oft ist es nützlich, den Zähler zu transformieren.

   Gegeben sei die Summe $S = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

   Setze $j = k+3$ bzw. $k = j-3$. Dann gilt für die Grenzen: $k = 0 \Rightarrow j = 3$ und $k = n \Rightarrow j = n+3$ und somit $S = \sum_{j=3}^{n+3} a_{j-3}$.

   Oder: setze $l = n-k$ bzw. $k = n-l$. Dann folgt $k = 0 \Rightarrow l = n$ und $k = n \Rightarrow l = 0$ und somit $S = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{l=n}^{0} a_{n-l} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}$ (Umkehrung der Reihenfolge).

3. Wir zeigen für $n \in \mathbb{N}$ die Identität

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Zum Nachweis der Formel schreiben wir die Summe auf der linken Seite einmal in direkter Reihenfolge und in umgekehrter Reihenfolge auf und addieren summandenweise.

$$\begin{aligned} S &:= 1+2+3+\cdots+n \\ S &:= n+(n-1)+\cdots+1 \\ \hline 2S &= \underbrace{(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)}_{n-\text{mal}} \Leftrightarrow \\ &\Rightarrow 2S = n\cdot(n+1) \Rightarrow \quad S = \frac{n\cdot(n+1)}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2S &= \sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n}(n+1-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(k+n+1-k) = \sum_{k=1}^{n}(n+1) \\ &= (n+1)\cdot\sum_{k=1}^{n} 1 = (n+1)\cdot n \\ \Rightarrow \quad S &= \frac{n\cdot(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

4. Wir zeigen die Identität für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

   Wir formen zunächst den Summanden um

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k\cdot(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

   und erhalten die *Teleskopsumme*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k\cdot(k+1)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

Neben dem Summenzeichen sollten Sie das Produktzeichen kennen.

Definition 1.13 *(Produktzeichen)*
Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. *Dann setzen wir*

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n.$$

Das Zeichen $\prod$ *heißt Produktzeichen,* k *ist der Zähler.*

Beispiele:

1. $\prod_{k=1}^{3} 2k = 2\cdot 4\cdot 6 = 48.$

2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$

3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n.$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l}$ Indexverschiebung.

5. $\displaystyle\prod_{k=n+1}^{n} a_k = 1$ leeres Produkt.

6. $\displaystyle\prod_{k=-1}^{2} (k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$

Das Produkt ist assoziativ, d.h., die Reihenfolge der Faktoren kann beliebig geändert werden:

1.5.7 Geometrische Summenformel, unendlich viele Summanden

Die für die Anwendungen wichtigste Summe ist die *Geometrische Summe*. Sie tritt in fast allen Disziplinen bei der Diskussion von Wachstumsprozessen auf.

Wir zeigen die *geometrische Summenformel* für $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$:

$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad q \neq 1.$$

Zum Nachweis betrachten wir

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k \\ q \cdot S &= \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = \sum_{k=1}^{n} q^k + q^{n+1}. \end{aligned}$$

Subtraktion beider Gleichungen ergibt

$$(1-q)S = 1 - q^{n+1}$$

und für $q \neq 1$ folgt

$$S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \diamond$$

Den ersten Berührpunkt mit dem Begriff „Unendlich“ bietet folgende Überlegung: angenommen Sie lassen den oberen Index n in der geometrischen Summenformel beständig wachsen, so strebt für $0 \leq |q| < 1$ wegen $q^n \to 0$ für $n \to \infty$ die rechte Seite gegen den endlichen Wert $\frac{1}{1-q}$:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad \to \quad \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1.$$

Wir erhalten die *geometrische Reihe*

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad |q| < 1,$$

die Sie sich auf jeden Fall merken sollten.

So gilt etwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots = 2.$$

Das scheint zunächst kurios, addieren wir doch unendlich viele positive Zahlen, und die Summe ist endlich, nämlich gerade mal 2.

Als Anwendung der geometrischen Reihe betrachten wir das Paradoxon von Zenon. Der junge Athlet Achilles läuft mit einer Schildkröte um die Wette. Da die Schildkröte langsamer ist, bekommt sie einen Vorsprung. Der Startschuss fällt. Als Achilles den Startpunkt der Schildkröte erreicht, ist die Schildkröte schon etwas weiter. Als Achilles auch diese Distanz zurückgelegt hat, ist die Schildkröte wieder etwas weiter. Klar, die Distanzen werden kürzer, aber die Schildkröte liegt doch „immer“ vorne. Ist irgendetwas falsch an dieser Argumentation?

Wir rechnen der Einfachheit halber mit $v_{\text{Achilles}} = 10\frac{m}{s}$ und $v_{\text{Schildkröte}} = 1\frac{m}{s}$. Am Anfang bekommt die Schildkröte $10m$ Vorsprung. Bei $t = 0$ gilt $s_{\text{Achilles}} = 0m$ und $s_{\text{Schildkröte}} = 10m$. Wir betrachten die Zeitintervalle die Achilles benötigt, um die vorherige Position der Schildkröte zu erreichen:

Δt	s_{Achilles}	$s_{\text{Schildkröte}}$
$1s$	$10m$	$11m$
$0.1s$	$11m$	$11.1m$
$0.01s$	$11.1m$	$11.11m$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Die Zeitintervalle Δt bilden eine geometrische Folge q^n, $n = 0, 1, \ldots$ mit $q = 0.1$. Wenn wir alle Zeitintervalle summieren, so erhalten wir die Zeit T, für die obige Argumentation gilt. Mit der geometrischen Reihe folgt

$$T = \sum_{k=0}^{\infty} 0.1^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9}.$$

Wir haben unendlich viele Zeitintervalle, diese summieren sich zu $\frac{10}{9}s$ auf.

Natürlich kann man T auch einfacher berechnen. Aus den Weg-Zeit-Gesetzen von Achilles und der Schildkröte

$$s_{\text{Achilles}}(t) = 10 \cdot t, \quad s_{\text{Schildkröte}}(t) = 10 + t$$

folgt durch Gleichsetzen

$$s_{\text{Achilles}}(T) = s_{\text{Schildkröte}}(T) \quad \Leftrightarrow \quad 10T = 10 + T \quad \Leftrightarrow \quad 9T = 10 \quad \Leftrightarrow \quad T = \frac{10}{9}.$$

Das ist aber langweilig.

1.5.8 Binomische Formeln

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gelten die *binomische Formeln*

$$\begin{array}{rcll} (a+b)^2 &=& a^2+2ab+b^2 & \text{(erste binomische Formel)} \\ (a-b)^2 &=& a^2-2ab+b^2 & \text{(zweite binomische Formel)} \\ (a+b)\cdot(a-b) &=& a^2-b^2 & \text{(dritte binomische Formel).} \end{array}$$

Für die dritte Potenz erhalten wir

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b) = a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3 \\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \\ &= \binom{3}{0}\cdot a^3+\binom{3}{1}\cdot a^2b+\binom{3}{2}\cdot ab^2+\binom{3}{3}\cdot b^3, \end{aligned}$$

und allgemein gilt

Satz 1.14 *(Binomischer Lehrsatz)*
Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Mit Hilfe des *Pascalschen Dreiecks* kann man sich die Koeffizienten aus dem Binomischen Lehrsatz leicht merken:

$$\begin{array}{r|ccccccccc} n=0 & & & & & 1 & & & & \\ n=1 & & & & 1 & & 1 & & & \\ n=2 & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ n=3 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ n=4 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \quad\Longleftrightarrow\quad \begin{array}{ccccccccc} & & & & \binom{0}{0} & & & & \\ & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\ & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\ & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \end{array}$$

Das Bildungsgesetz für das Pascalsche Dreieck lautet:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$$

Beweis: Wir zeigen hier nur das Bildungsgesetz der Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned} \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}+\frac{n!}{(n-(k+1))!\cdot(k+1)!} &= \frac{n!\cdot(k+1)+n!\cdot(n-k)}{(n-k)!\cdot(k+1)!} \\ &= \frac{n!\cdot(n-k+k+1)}{((n+1)-(k+1))!\cdot(k+1)!} \\ &= \frac{n!\cdot(n+1)}{((n+1)-(k+1))!\cdot(k+1)!} \\ &= \binom{n+1}{k+1} \quad \diamond \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Mit der binomischen Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} (a-b)^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot a^k\cdot(-b)^{4-k} = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}\cdot(-b)^k\cdot a^{4-k} \\ &= \binom{4}{0}(-b)^0a^4+\binom{4}{1}(-b)a^3+\binom{4}{2}(-b)^2a^2+\binom{4}{3}(-b)^3a^1+\binom{4}{4}(-b)^4a^0 \\ &= a^4-4a^3b+6a^2b^2-4ab^3+b^4. \end{aligned}$$

2. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$, denn

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}.$$

Interpretation:
$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer Menge mit n Elementen.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ist die Gesamtanzahl aller Teilmengen einer Menge mit n Elementen.
Ergebnis: Eine Menge mit n Elementen besitzt 2^n Teilmengen.

Beispielsweise besitzt die Menge $M = \{A, B\}$ die 2^2 Teilmengen:

$$\emptyset, \quad \{A\}, \quad \{B\}, \quad \{A, B\}.$$

1.5.9 Potenzen und Wurzeln

Definition 1.14 *(Potenz und Wurzel)*

1. *Es sei $a \in \mathbb{R}$. Dann ist die n-te* Potenz *von a erklärt durch*

$$a^n = \underbrace{a\cdot a\cdots a}_{n \text{ Faktoren}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a^0 = 1.$$

2. *Die n-te* Wurzel *einer Zahl $a > 0$ ist erklärt als diejenige positive Zahl $b \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $b^n = a$,*

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Satz 1.15 *(Potenzregeln)*
Es seien $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gelten die Potenzregeln

1. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n, \qquad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n, \quad b \neq 0,$

2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}, \qquad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}, \quad a \neq 0,$

3. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}, \qquad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$

Speziell gilt: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}, \quad a^0 = 1.$

Beweis: Wir zeigen exemplarisch zwei Aussagen.

Behauptung 1: $a^n \cdot b^n = \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ Faktoren}} \cdot \underbrace{b \cdots b}_{n \text{ Faktoren}} = \underbrace{(a \cdot b) \cdots (a \cdot b)}_{n \text{ Faktoren}} = (a \cdot b)^n.$

Behauptung 2: $\dfrac{a^n}{a^m} = \dfrac{\overbrace{a \cdots a}^{n \text{ Faktoren}}}{\underbrace{a \cdots a}_{m \text{ Faktoren}}} = a^{n-m} \quad \diamond$

Bis jetzt sind die Potenzregeln für ganzzahlige Exponenten erklärt. Wurzeln sind Potenzen mit rationalen Exponenten, z.B. $\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^n = a^{\frac{n}{m}}$.

Beispiele:

1. Für die Darstellung einer reellen Zahl x als *normalisierte Gleitkommazahl* wählt man das Format $x = 0.d_1 d_2 d_3 \cdots \cdot 10^{\pm e_1 e_2 \cdots}$ mit Ziffern $d_k, e_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ wobei $d_1 \neq 0$ für $x \neq 0$ ist. Die *Mantisse* lautet $0 \leq 0.d_1 d_2 d_3 .. < 1$ und der *Exponent* ist $\pm e_1 e_2 \ldots$.

   Speziell erhält man: $0.003 = \dfrac{3}{1000} = \dfrac{3}{10^3} = 3 \cdot 10^{-3} = 0.3 \cdot 10^{-2}.$

2. $\dfrac{\sqrt{a}}{a^{\frac{3}{4}}} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{-\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}} = a^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}.$

1.5.10 Logarithmen

Satz 1.16 *(Logarithmus zur Basis a)*
Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Dann besitzt die Gleichung $a^x = b$ für $b > 0$ stets eine reelle Lösung:

$$a^x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_a b \quad \textit{Logarithmus von } b \textit{ zur Basis } a.$$

$\log_a b$ ist derjenige Exponent mit dem man die Basis a potenzieren muß, um b zu erhalten.

Beispiele:

1. $\log_{10} 100 = 2$, denn $10^2 = 100$,

2. $\log_5 125 = 3$, denn $5^3 = 125$,

3. $\log_a a^x = x$, denn $a^x = a^x$,

4. $\log_a a = 1$, denn $a^1 = a$; $\quad \log_a 1 = 0$, denn $a^0 = 1$.

Satz 1.17 *(Rechenregeln für Logarithmen)*
Für den Logarithmus zu einer festen Basis a gelten folgende Rechenregeln:

1. $\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v, \qquad \log_a\left(\dfrac{u}{v}\right) = \log_a u - \log_a v, \qquad u, v > 0,$

2. $\log_a u^v = v \cdot \log_a u,$ *speziell* $\log_a\left(\dfrac{1}{u}\right) = -\log_a u, \quad u > 0, \; v \in \mathbb{R}.$

Beweis: Die Regeln lassen sich aus den Potenzregeln herleiten, z.B.

$$\begin{aligned} a^{x+y} &= a^x \cdot a^y \mid \log_a \\ \log_a a^{x+y} &= \log_a(a^x \cdot a^y) \\ x + y &= \log_a(a^x \cdot a^y). \end{aligned}$$

Mit $x := \log_a u$ und $y := \log_a v$ folgt $a^x = u, \;\; a^y = v$ und $\log_a u + \log_a v = \log_a(u \cdot v) \quad \diamond$

Beispiele:

1. $\dfrac{2}{3} \cdot \log_a u + \log_a v = \log_a u^{\frac{2}{3}} + \log_a v = \log_a\left(u^{\frac{2}{3}} \cdot v\right).$

2. $\log_a \dfrac{\sqrt{a \cdot b} \cdot c}{a} = \log_a \sqrt{a \cdot b} \cdot c - \log_a a = \log_a \sqrt{a \cdot b} + \log_a c - 1 =$
   $\dfrac{1}{2} \cdot \log_a a + \dfrac{1}{2} \cdot \log_a b + \log_a c - 1 = \dfrac{1}{2} \cdot \log_a b + \log_a c - \dfrac{1}{2}.$

3. $\log_3\left(\dfrac{81}{27}\right) = \log_3 81 - \log_3 27 = \log_3 3^4 - \log_3 3^3 = 4 - 3 = 1.$

4. $\log_5 125^4 = 4 \cdot \log_5 125 = 4 \cdot \log_5 5^3 = 12 \cdot \log_5 5 = 12.$

Wichtige Logarithmen:

$\lg x$	$=$	$\log_{10} x$	Dekadischer Logarithmus,
$\ln x$	$=$	$\log_e x$	Natürlicher Logarithmus,
$\operatorname{ld} x$	$=$	$\log_2 x$	Dualer Logarithmus.

Basiswechsel

Logarithmen können bezüglich der Basis umgerechnet werden. Ein Taschenrechner stellt im allgemeinen den natürlichen Logarithmus ($\ln x$) und den dekadischen Logarithmus ($\lg x$) zur Verfügung. Die Zahl $x = \log_a b$ zu einer beliebigen Basis $a > 0$ kann damit wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} a^x &= b \quad | \ln(\ldots) && \text{Logarithmiere die Bestimmungsgleichung für } x \\ x \cdot \ln a &= \ln b \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln b}{\ln a}. \end{aligned}$$

Also folgt $\quad \log_a b = \dfrac{\ln b}{\ln a}.$

Beispiele:

1. $\lg 27 = \dfrac{\ln 27}{\ln 10} = \dfrac{3.2958..}{2.3025..} = 1.43140..$ Test: $10^{1.43140..} = 27$.

2. $\log_{27} 123 = \dfrac{\ln 123}{\ln 27} = 1.46007..$ Test: $27^{1.46007..} = 123$.

3. $\log_{17} 18 = \dfrac{\lg 18}{\lg 17} = 1.020..$ Test: $17^{1.020..} = 18$.

1.6 Gleitkommazahlen und Gleitkommarechnung

Eine reelle Zahl wird als Produkt aus einer *Mantisse* f und einer Potenz der *Basis* $b \in \{2, 3, \dots\}$ dargestellt:

$$\begin{aligned} x &= \pm\left(d_1 \cdot b^{-1} + d_2 \cdot b^{-2} + \dots\right) \times b^e, \quad d_j \in \{0, 1, \dots, b-1\} \\ &= \pm \underbrace{0, d_1 d_2 \dots}_{=f} \times b^e. \end{aligned}$$

Für die Basis b wählt man meist $b = 2$ oder $b = 10$, der *Exponent* e ist eine ganze Zahl. Für die Mantisse gilt $0 \le f \le 1$. Der Faktor b^e skaliert die Zahl. Wählt man normalisierte Gleitkommazahlen mit $d_1 \neq 0$ für $x \neq 0$, so ist Eindeutigkeit der Zahlendarstellung gewährleistet.

In diesem Fall gilt $\frac{1}{b} \le f \le 1$, denn es ist

$$f \ge (0, 10 \dots)_b = 1 \cdot b^{-1} = \frac{1}{b}.$$

Die Ungleichung $f \le 1$ zeigt man mit der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} f &\le (0, \overline{b-1})_b = \sum_{k=1}^{\infty} (b-1) \cdot b^{-k} \\ &= (b-1) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{b}\right)^k = (b-1) \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{b}} - 1\right) = (b-1) \cdot \left(\frac{b}{b-1} - 1\right) = 1, \end{aligned}$$

Also gilt $\frac{1}{b} \le f \le 1$ für $x > 0$.

Man erhält *Maschinenzahlen*

$$x = \pm 0, d_1 d_2 \dots d_m \times b^e, \quad e \in [r, R],$$

wenn man nur m Ziffern für die Mantisse verwendet und den Exponentenbereich auf $[r, R]$ einschränkt. Die Menge der Maschinenzahlen mit Basis b, m Ziffern für die Mantisse und Exponentenbereich $e \in [r, R]$ bezeichnen wir mit $\mathbb{M}(b, m, r, R)$. Bei endlicher Mantissenlänge ist $\frac{1}{b} \le f < 1$.

Wir betrachten $\mathbb{M}(10, 3, -99, 99)$, also Maschinenzahlen mit Mantissenlänge $n = 3$. Diese Menge hat nur endlich viele Elemente:

$x_{\min} = +0.100 \cdot 10^{-99}$ kleinste positive Zahl

$x_{\max} = +0.999 \cdot 10^{99}$ größte darstellbare Zahl

Die Elemente von $\mathbb{M}(10, 3, -99, 99)$ sind auf der reellen Achse nicht gleichmäßig verteilt:

- Der Abstand der zweitkleinsten positiven Zahl $x_{\min+1}$ von $x_{\min}$ beträgt

$$x_{\min+1} - x_{\min} = 0.101 \cdot 10^{-99} - 0.100 \cdot 10^{-99} = 10^{-102}$$

- Der Abstand der zweitgrößten Zahl $x_{\max-1}$ von $x_{\max}$ beträgt

$$x_{\max} - x_{\max-1} = 0.999 \cdot 10^{99} - 0.998 \cdot 10^{99} = 10^{96}$$

Die Maschinenzahlen häufen sich auf dem Zahlenstrahl in der Nähe von 0 und liegen nach außen immer weniger dicht. Aufgrund der Konstruktion von $\mathbb{M}(10, 3, -99, 99)$ liegen die Maschinenzahlen in Clustern aus 999 Zahlen gleichen Abstands.

Die aus $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{R}$ bekannten Rechenregeln für die arithmetischen Grundoperationen gelten für Maschinenzahlen nicht durchgängig, denn bei arithmetischer Rechnung in $\mathbb{M}(10, 3, \dots)$ muss das Ergebnis in $\mathbb{M}(10, 3, \dots)$ abgebildet, d.h. *gerundet*, werden.

Wir betrachten exemplarisch die Addition in $\mathbb{M}(10, 3, \dots)$. Bei der Addition vereinheitlicht man zunächst die Exponenten, und addiert dann die Mantissen.

Für $100 + 1$ erhalten wir in $\mathbb{M} : (10, 3, \dots)$:

$0.100 \cdot 10^3 + 0.100 \cdot 10^1$	
$= 0.100 \cdot 10^3 + 0.001 \cdot 10^3$	Vereinheitlichung der Exponenten
$= 0.101 \cdot 10^3$	Addition
$= 0.101 \cdot 10^3$	Runden
$= 101$	korrekt in $\mathbb{R}$

Für $100 + 0.1$ erhalten wir in $\mathbb{M} : (10, 3, \dots)$:

$0.100 \cdot 10^3 + 0.100 \cdot 10^0$	
$= 0.100 \cdot 10^3 + 0.0001 \cdot 10^3$	Vereinheitlichung der Exponenten
$= 0.1001 \cdot 10^3$	Addition, Summe $\notin \mathbb{M}(10, 3, \dots)$
$= 0.100 \cdot 10^3$	Runden
= 100	falsch in $\mathbb{R}$!

Wir haben gezeigt: für $x \in \mathbb{M}(10, 3, \dots)$ mit $x > 0 \not\Rightarrow a + x > a$ für alle $a \in \mathbb{M}(10, 3, \dots)$.

Fehler dieser Art sind bei der Gleitkommarechnung unvermeidlich und treten in jedem Maschinenzahlensystem auf. Deshalb sollten Sie die Ergebnisse ihres Taschenrechners kritisch hinterfragen!

Seit 1985 ist die Darstellung und das Rechnen mit Gleitkommazahlen im Standard IEEE754 (Institute of Electrical and Electronics Engineers) standardisiert. Festgelegt werden: das Zahlenformat, das Runden, arithmetische Operationen und die Wurzelberechnung. Bei „single precision"-Zahlen arbeitet man mit Dualzahlen ($b = 2$) mit einer 23-Bit Mantisse, einem 8-Bit Exponent, und einem Vorzeichenbit, insgesamt 32 Bit. Dies entspricht einer Genauigkeit von etwa 6 bis 7 Dezimalstellen. Bei „double precision"-Zahlen vewendet man eine 52-Bit Mantisse, einen 11-Bit Exponent, und ein Vorzeichenbit, insgesamt 64 Bit. Dies entspricht einer Genauigkeit von ca. 14 Dezimalstellen. Die „double precision"-Zahlen entsprechen der Menge $\mathbb{M}(2, 52, -1021, 1024)$.

1.7 Gleichungen und Ungleichungen

Gleichungen und Ungleichung kennen Sie ebenfalls bereits aus der Schule. Wir wiederholen die wichtigsten Typen und üben nochmals Lösungsmethoden ein, die Sie auf jeden Fall beherrschen sollten.

1.7.1 Algebraische Gleichungen

Mit Hilfe von *Äquivalenzumformungen* versucht man, die Gleichung zu vereinfachen und nach der Unbekannten aufzulösen. Man unterscheidet: lineare Gleichungen, quadratische Gleichungen und Gleichungen höherer Ordnung.

Lineare Gleichung: $a \cdot x = b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gesucht.

1. Falls $a \neq 0$ existiert die eindeutige Lösung $x = \dfrac{b}{a}$. Man schreibt $\mathbb{L} = \{\frac{b}{a}\}$.
2. Falls $a = 0$ so sind zwei weitere Fälle zu unterscheiden: für $b = 0$ erhält man die Bedingung $0 \cdot x = 0$, die durch jedes $x \in \mathbb{R}$ erfüllt wird. Also ist $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.

   Für $b \neq 0$ folgt die Bedingung $0 \cdot x = b \neq 0$ die durch kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt werden kann und somit ist $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiel:

Die Gleichung $3x - 18 = -x + 6$ geht durch Addition von $x + 18$ auf beiden Seiten über in $4x = 24$ und Division beider Seiten durch 4 liefert $x = 6$, also $\mathbb{L} = \{6\}$.

Quadratische Gleichung: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ mit $a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gesucht.

Die *Normalform* der quadratischen Gleichung lautet $x^2 + p \cdot x + q = 0$ mit $p = \dfrac{b}{a}$, $q = \dfrac{c}{a}$.

Wir betrachten zunächst den Fall $p = 0$, d.h. die Gleichung $x^2 + q = 0$ bzw. $x^2 = -q$.

1. Falls $q < 0$ ist, so existieren zwei Lösungen $x_{1,2} = \pm\sqrt{-q}$. Beachte $-q > 0$. Also $\mathbb{L} = \{\sqrt{-q}, -\sqrt{-q}\}$.
2. Falls $q = 0$ ist, so haben wir die Lösung $x = 0$, d.h. $\mathbb{L} = \{0\}$.
3. Im Fall $q > 0$ existiert keine reelle Lösung. Quadrate reeller Zahlen sind stets nicht negativ. Also kann es kein $x \in \mathbb{R}$ geben, dessen Quadrat negativ ist. Wir kommen auf die Lösung dieser Gleichung bei der Einführung komplexer Zahlen zurück.

Nun kommen wir zur allgemeinen quadratischen Gleichung $x^2 + p \cdot x + q = 0$.

Quadratische Ergänzung liefert

$$\begin{aligned} x^2 + p \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q - \left(\frac{p}{2}\right)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \frac{p^2}{4} - q. \end{aligned}$$

1. Falls die Diskriminante $D := \dfrac{p^2}{4} - q > 0$ ist, so existieren zwei Lösungen

   $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

   Also ist $\mathbb{L} = \left\{-\dfrac{p}{2} + \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}, -\dfrac{p}{2} - \sqrt{\dfrac{p^2}{4} - q}\right\}$.
2. Falls $D = 0$ ist, so haben wir die Lösung $x = -\dfrac{p}{2}$, d.h. $\mathbb{L} = \left\{-\dfrac{p}{2}\right\}$.
3. Im Fall $D < 0$ existiert keine reelle Lösung, also $\mathbb{L} = \emptyset$.

Beispiele:

1. Die Gleichung $-2x^2 - 4x + 6 = 0$ wird durch -2 dividiert und geht über in die quadratische Gleichung in Normalform $x^2 + 2x - 3 = 0$. Wegen $D = \dfrac{4}{4} + 3 > 0$ gibt es zwei Lösungen und zwar $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{\dfrac{4}{4} + 3}$ bzw. $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Also ist $\mathbb{L} = \{1, -3\}$.
2. Die Gleichung $x^2 - 4x + 13 = 0$ besitzt die Diskrimante $D = \dfrac{16}{4} - 13 < 0$ und ist deshalb reell nicht lösbar, $\mathbb{L} = \emptyset$.

Gleichungen höherer Ordnung: z.B. $a \cdot x^5 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d = 0$.

Die Lösung von algebraischen Gleichungen höherer Ordnung gelingt nur in Spezialfällen. Häufig kann man eine Lösung raten und den Grad der Gleichung durch Polynomdivision reduzieren.

Beispiel:

Die Gleichung $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$ hat die Lösung $x = 2$: $2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 - 2 = 0$. Der Faktor $x - 2$ kann von $x^3 - 2x^2 + x - 2$ abdividiert werden:

$$\begin{array}{l} x^3 - 2x^2 + x - 2 : (x - 2) = x^2 + 1 \\ \underline{x^3 - 2x^2 \qquad} \\ \qquad\qquad x - 2 \\ \qquad\qquad \underline{x - 2} \\ \qquad\qquad -- \end{array}$$

also $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^2 + 1) \cdot (x - 2)$. Da das Polynom $x^2 + 1$ keine reelle Nullstelle besitzt, ist $x = 2$ einzige Lösung der Gleichung, also $\mathbb{L} = \{2\}$.

Ein weiterer Spezialfall ist die *biquadratische Gleichung:* $a \cdot x^4 + b \cdot x^2 + c = 0$.

Die Substitution $z = x^2$ liefert eine quadratische Gleichung in z: $a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0$.

Beispiel:

Die Gleichung $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ wird durch Substitution $z = x^2$ überführt in $z^2 - 10z + 9 = 0$, also eine quadratische Gleichung in z.

Die Lösungsformel liefert $z_{1,2} = 5 \pm \sqrt{\frac{100}{4} - 9} = 5 \pm 4$, also $z_1 = 9$ und $z_2 = 1$.

Für die ursprüngliche Gleichung ergibt sich $x^2 = 9 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 3$ und $x^2 = 1 \Rightarrow x_{3,4} = \pm 1$. Wir erhalten $\mathbb{L} = \{3, -3, 1, -1\}$.

Gebrochen rationale Gleichungen: z.B. $\dfrac{a \cdot x^2 + b \cdot x + c}{d \cdot x^3 + e \cdot x^2 + f} = 0.$

Hier ist zunächst zu beachten, daß nicht durch Null dividiert wird. Anschließend formt man in eine algebraische Gleichung um.

Beispiel:

Man bestimme die Lösungsmenge der Gleichung

$$\frac{5x+1}{x+2} - \frac{2x^2+3x-8}{x^2+4x+4} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5x+1}{x+2} - \frac{2x^2+3x-8}{(x+2)^2} = 3.$$

Die Gleichung ist definiert für $x \neq -2$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner $(x+2)^2$ liefert eine algebraische Gleichung:

$$\begin{array}{rrcl} & (5x+1)\cdot(x+2) - 2x^2 - 3x + 8 & = & 3(x+2)^2 \\ \Leftrightarrow & 5x^2 + 10x + x + 2 - 2x^2 - 3x + 8 & = & 3x^2 + 12x + 12 \\ & \Leftrightarrow \qquad -4x & = & 2 \\ & \Leftrightarrow \qquad x & = & -\dfrac{1}{2}, \qquad \text{d.h. } \mathbb{L} = \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}. \end{array}$$

1.7.2 Wurzelgleichungen

Man versucht hier, die Ausdrücke soweit als möglich äquivalent umzuformen und die Wurzel auf eine Seite zu isolieren. Danach muß man quadrieren, d.h. nichtäquivalent umformen und nach x auflösen. Deshalb sind die erhaltenen Lösungen immer durch Einsetzen in die Ausgangsgleichung zu kontrollieren.

Beispiele:

1. Man löse $\sqrt{x+2} = x$.

   Durch Quadrieren erhält man $x + 2 = x^2$ bzw. $x^2 - x - 2 = 0$. Die quadratische Gleichung besitzt die Lösungen $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} = \frac{1}{2} \pm \frac{3}{2}$ bzw. $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$.

   Da quadriert wurde, müssen wir die Lösungen durch Einsetzen verifizieren: Für $x_1 = 2$ folgt: $\sqrt{2+2} = 2$, eine wahre Aussage; für $x_2 = -1$ ergibt sich: $\sqrt{-1+2} = -1$, eine falsche Aussage. Deshalb ist x_2 keine Lösung der Wurzelgleichung und wir erhalten $\mathbb{L} = \{2\}$.

2. Wir betrachten nochmals die Problematik beim Quadrieren: die Gleichung $x - 2 = 1$ besitzt die eindeutige Lösung $x = 3$.

   Durch Quadrieren der Gleichung folgt $(x-2)^2 = 1$, und diese Gleichung besitzt zwei Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$. Jedoch ist x_1 keine Lösung der Originalgleichung!

3. Man löse $\sqrt{2x-3} + 5 - 3x = 0$.

   Isolieren der Wurzel liefert: $\sqrt{2x-3} = 3x - 5$.

   Quadrieren ergibt $2x - 3 = 9x^2 - 30x + 25$ bzw. $x^2 - \frac{32}{9}x + \frac{28}{9} = 0$ mit Lösungen

   $$x_{1,2} = \frac{16}{9} \pm \sqrt{\frac{256}{81} - \frac{28}{9}} = \frac{16}{9} \pm \sqrt{\frac{256-252}{81}} = \frac{16}{9} \pm \frac{2}{9} \quad \text{bzw.} \quad x_1 = 2 \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{14}{9}.$$

   Die Probe liefert für $x_1 = 2$: $\sqrt{2 \cdot 2 - 3} + 5 - 3 \cdot 2 = 0$ bzw. $1 + 5 - 6 = 0$, also eine wahre Aussage. Für $x_2 = \frac{14}{9}$ ergibt sich mit $\sqrt{\frac{28}{9} - 3} + 5 - \frac{14}{3} = \frac{1}{3} + 5 - \frac{14}{3} = 0$ eine falsche Aussage.

   Insgesamt folgt: $\mathbb{L} = \{2\}$.

1.7.3 Betragsgleichungen

Betragsgleichungen löst man zumeist durch *Fallunterscheidung*.

Beispiel: Man bestimme die Lösungsmenge von $|2x - 1| = -x + 1$.

Fall 1: $2x - 1 \geq 0$ bzw. $x \geq \frac{1}{2}$: $|2x-1| = 2x - 1$:

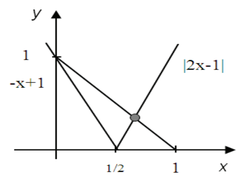
$|2x - 1| = -x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - 1 = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2}{3}.$

Fall 2: $2x - 1 < 0$ bzw. $x < \frac{1}{2}$: $|2x-1| = -2x + 1$:

$|2x - 1| = -x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad -2x + 1 = -x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0.$

Somit folgt $\mathbb{L} = \left\{\frac{2}{3}, 0\right\}$.

Mitunter kann man die Lösung *graphisch* bestimmen:



Auch durch Quadrieren kann man die Lösung berechnen:

$|2x - 1| = -x + 1 \quad |(\ )^2 \quad \Rightarrow \quad (2x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 4x + 1 = x^2 - 2x + 1 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (3x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$

1.7.4 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Einfache Exponential- und Logarithmusgleichungen lassen sich mit Hilfe der Definition der Potenz und des Logarithmus unter Verwendung der Rechenregeln umformen und lösen. Ansonsten hilft hier Kreativität!

Beispiele:

1. Man löse $\quad 2^x = 64.$

$$2^x = 64 \quad |\ln(\;) \quad \Rightarrow \quad \ln 2^x = \ln 64 \quad \Rightarrow \quad x \cdot \ln 2 = \ln 64 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln 64}{\ln 2} = 6.$$

2. Bestimmen Sie die Lösung von $\quad \log_x \frac{1}{5} = -1.$

$$\log_x \frac{1}{5} = -1 \quad \Rightarrow \quad x^{-1} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad x = 5.$$

3. Lösen Sie $\quad \ln(2x+1) = \frac{1}{2}.$

$$\ln(2x+1) = \frac{1}{2} \quad |\exp(\;) \quad \Rightarrow \quad e^{\ln(2x+1)} = e^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad 2x+1 = \sqrt{e}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\sqrt{e}-1}{2}.$$

4. Lösen Sie $\quad 1 + 2 \cdot e^{-2x} - 4e^{-x} = 0.$

Substitution $z = e^{-x}$ liefert die quadratische Gleichung $1 + 2z^2 - 4z = 0$, bzw. in Normalform $z^2 - 2z + \frac{1}{2} = 0$ mit Lösungen $z_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} - \frac{1}{2}} = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ und weiter mit $z_i = e^{-x_i} \quad |\ln() \quad \Rightarrow \quad \ln z_i = -x_i$ bzw. $x_1 = -\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx -0.5348..$ und $x_2 = -\ln\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 1.2279...$

5. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $\quad \left(\frac{3}{5}\right)^{2x} = \left(\frac{4}{5}\right)^{x+1}.$

Logarithmieren liefert:

$$2x \cdot \ln\left(\frac{3}{5}\right) = (x+1) \cdot \ln\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow \quad x \cdot \left(2\ln\left(\frac{3}{5}\right) - \ln\left(\frac{4}{5}\right)\right) = \ln\left(\frac{4}{5}\right) \quad \Rightarrow$$

$$x = \frac{\ln\frac{4}{5}}{2\ln\frac{3}{5} - \ln\frac{4}{5}} = \frac{\ln\frac{4}{5}}{\ln\left(\frac{9}{25}\cdot\frac{5}{4}\right)} = \frac{\ln\frac{4}{5}}{\ln\frac{9}{20}} = \frac{\ln 4 - \ln 5}{\ln 9 - \ln 20} = 0.2794...$$

6. Man löse $\quad \lg(x^2-1) = \lg x + 1, \quad x > 1.$

Umformung mit den Logarithmusregeln liefert:

$$\lg(x^2-1) - \lg x = 1 \quad \Rightarrow \quad \lg\left(\frac{x^2-1}{x}\right) = 1 \quad |10^{(\ldots)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-1}{x} = 10^1 \quad |\cdot x$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 1 = 10x \quad \Rightarrow \quad x^2 - 10x - 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{\frac{10^2}{4} + 1} = 5 \pm \frac{\sqrt{104}}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1 = 10.099.., \quad x_2 = -0.09 \not> 1$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \left\{5 + \frac{\sqrt{104}}{2}\right\}.$$

Ab und zu treten in Klausuren Aufgaben auf, die typübergreifend sind:

Beispiele:

1. Lösen Sie die Gleichung

$$\log_{4x}(x) + \log_{2x}(x) = \log_2(x).$$

Hier tritt x in der Basis des Logarithmus auf. Mit

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x \;\mid\; \log_b(.) \Leftrightarrow y \cdot \log_b(a) = \log_b(x) \Leftrightarrow y = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

können wir vereinfachen:

$$\log_{4x}(x) + \log_{2x}(x) = \log_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log_2(x)}{\log_2(4x)} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(2x)} = \log_2(x) \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\log_2(x)}{\log_2(x)+\log_2(4)} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(x)+\log_2(2)} = \log_2(x) \Leftrightarrow \frac{\log_2(x)}{\log_2(x)+2} + \frac{\log_2(x)}{\log_2(x)+1} = \log_2(x)$$

und Substitution $y = \log_2(x)$ liefert die algebraische Gleichung

$$\frac{y}{y+2} + \frac{y}{y+1} = y,$$

die wir durch Fallunterscheidung lösen.

Fall 1: $y = 0$ liefert die Lösung $x_1 = 1$.

Fall 2: $y \neq 0$. Division durch y und Multiplikation mit dem Hauptnenner $(y+2)\cdot(y+1)$ ergibt

$$y+1+y+2 = y^2+3y+2 \quad \Leftrightarrow \quad y^2+y-1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}+1} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

und es folgen die weiteren Lösungen $x_2 = 2^{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$ und $x_3 = 2^{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

2. Lösen Sie die Gleichung

$$\log_7(x) = \frac{\log_7(x^2)+5}{\log_7(\frac{x}{49})}.$$

Die Umformung $\log_7(x^2) = 2\log_7(x)$ und die Substitution $y = \log_7(x)$ liefern die algebraische Gleichung

$$y = \frac{2y+5}{y-2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner $y-2$ (für $y \neq 2$) ergibt die quadratische Gleichung

$$y^2 - 2y = 2y + 5 \quad \Leftrightarrow \quad y^2 - 4y - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+5} = 2 \pm 3$$

und wir erhalten die Lösungen $x_1 = 7^5$ und $x_2 = \frac{1}{7}$.

1.7.5 Ungleichungen

Mit Hilfe der folgenden Umformungen versucht man die Ungleichung äquivalent umzuformen und zu vereinfachen:

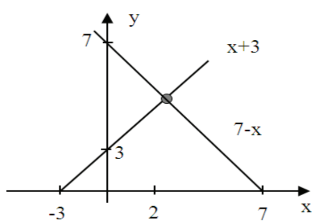
1. Addition/Subtraktion des gleichen Terms auf beiden Seiten der Gleichung
2. Multiplikation der Ungleichung mit einem Faktor $c \neq 0$:
   $c > 0$: Ungleichungsrichtung bleibt bestehen
   $c < 0$: Ungleichungsrichtung dreht sich herum
3. Umformungen unter Beachtung der Rechenregeln für Ungleichungen (Satz 1.10).

Lineare Ungleichungen

Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungmenge der Ungleichung $x + 3 \leq 7 - x$.

Elementare Umformungen ergeben:
$x + 3 \leq 7 - x \quad | +x - 7 \quad \Rightarrow \quad 2x - 4 \leq 0 \quad | +4 \quad \Rightarrow \quad 2x \leq 4 \quad | : 2 \quad \Rightarrow$
$x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 2\}$.

Mitunter kann man Ungleichungen auch graphisch lösen:



Für welche x gilt $x + 3 \leq 7 - x$ d.h. für welche x liegt der Graph von $x + 3$ unterhalb des Graphs von $7 - x$? Antwort aus der Zeichnung: für $x \leq 2$.

Quadratische Ungleichungen $\quad x^2 + a \cdot x + b < 0 \quad (> 0)$

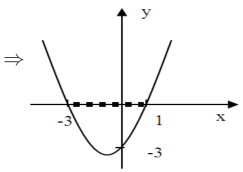
Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ kann bestehen aus:

1. einem endlichen Intervall
2. der Vereinigung zweier Halbgeraden
3. der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$
4. der leeren Menge $\emptyset$,

Beispiele:

1. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x^2 + 2x - 3 < 0$.

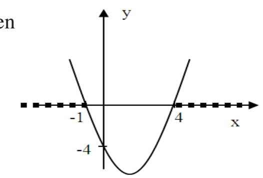
   Quadratische Ergänzung liefert:
   $x^2 + 2x + 1 - 3 < 1 \quad \Rightarrow \quad (x + 1)^2 < 4 \quad \Rightarrow$
   $|x + 1| < 2 \quad \Rightarrow \quad -2 < x + 1 < 2 \quad \Rightarrow$
   $-3 < x < 1$
   also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \ -3 < x < 1\}$.

2. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x^2 + 2x - 3 \geq 0$.
   Quadratische Ergänzung liefert:
   $x^2 + 2x + 1 - 3 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad (x + 1)^2 \geq 4 \quad \Rightarrow \quad |x + 1| \geq 2 \quad \Rightarrow \quad x \leq -3$ oder $x \geq 1$
   also $\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq -3 \text{ oder } x \geq 1\}$.

3. Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x^2 - 3x - 4 > 0$.

   Wir suchen die Nullstellen der quadratischen Gleichung: $x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow$
   $x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}$
   d.h. $x_1 = 4, \ x_2 = -1$.
   Also ist $x^2 - 3x - 4 = (x - 4) \cdot (x + 1)$.

   Es gilt $x^2 - 3x - 4 = (x - 4) \cdot (x + 1) > 0$ wenn beide Faktoren größer oder beide Faktoren kleiner als Null sind.
   Im ersten Fall folgt $x > 4$ und $x > -1$, also $\mathbb{L}_1 = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 4\}$.
   Im zweiten Fall folgt $x < 4$ und $x < -1$, also $\mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x < -1\}$.
   Insgesamt erhält man $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 4 \text{ oder } x < -1\}$.

4. Die Ungleichung $x^2 + 1 > 0$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also $\mathbb{L} = \mathbb{R}$.
5. Die Ungleichung $x^2 + 1 < 0$ ist für kein $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, also $\mathbb{L} = \emptyset$.

Rationale Ungleichungen

Bei rationalen Ungleichungen ist häufig die Vorzeichensituation zu beachten. Man arbeitet mit Fallunterscheidungen.

Beispiel: Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $\frac{x + 1}{x - 1} \leq 2, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Fall 1: $\quad x - 1 > 0$, d.h. $x > 1$: $\quad x + 1 \leq 2 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x - 3$
$\Rightarrow \quad x \geq 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_1 = \{x : \ x \geq 3\}$.
Fall 2: $\quad x - 1 < 0$, d.h. $x < 1$: $\quad x + 1 \geq 2 \cdot (x - 1) \quad \Rightarrow \quad 0 \geq x - 3$
$\Rightarrow \quad x \leq 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{L}_2 = \{x : \ x < 1\}$.
Insgesamt $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 1 \text{ oder } x \geq 3\}$.

Betragsungleichungen

Zur Auflösung des Betrags sind Fallunterscheidungen durchzuführen.

Beispiele:

1. Man bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $|x-1|>3$.

   Fall 1: $x-1>0$, d.h. $x>1$: $x-1>3 \quad\Rightarrow\quad x>4$.

   Fall 2: $x-1<0$, d.h. $x<1$: $-x+1>3 \quad\Rightarrow\quad -2>x$.

   Insgesamt $\mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}:\ x<-2 \text{ oder } x>4\}$.

2. Man bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $(x-1)^2\leq|x|$.

   Fall 1: $x\geq 0$:

   $(x-1)^2\leq x \quad\Rightarrow\quad x^2-2x+1\leq x \quad\Rightarrow\quad x^2-3x+1\leq 0.$

   Nullstellen des Polynoms: $x_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ bzw. $x_1=2.62..$ und $x_2=0.38...$

   Damit folgt $\left(x-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(x-\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)\leq 0.$

   Dies ist der Fall wenn ein Faktor größer und der andere Faktor kleiner Null ist.

   Fall 1a: $x\geq\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x\leq\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Es folgt $\mathbb{L}=\emptyset$.

   Fall 1b: $x\leq\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ und $x\geq\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Es folgt $\mathbb{L}=\left\{x:\ \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

   Fall 2: $x<0$:

   $(x-1)^2\leq -x \quad\Rightarrow\quad x^2-2x+1\leq -x \quad\Rightarrow\quad x^2-x+1\leq 0 \quad\Rightarrow$

   $\underbrace{\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2}_{\geq 0}+\dfrac{3}{4}\leq 0$. Diese Ungleichung besitzt keine reelle Lösung. Es folgt $\mathbb{L}=\emptyset$.

   Insgesamt: $\mathbb{L}=\left\{x:\ \dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\leq x\leq\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. Man bestimme die Lösungsmenge der Ungleichung $\dfrac{1-|x-2|}{|x-3|}<\dfrac{1}{2}$ für $x\neq 3$.

   Die Auflösung des Betrags ergibt:

   $$|x-2|=\begin{cases} x-2, & x\geq 2\\ -(x-2), & x<2\end{cases}\ ,\qquad |x-3|=\begin{cases} x-3, & x\geq 3\\ -(x-3), & x<3\end{cases}\ .$$

   Wir erhalten drei Fälle:

   Fall 1: $x>3$: Hier ist $\dfrac{1-|x-2|}{|x-3|}=\dfrac{1-(x-2)}{x-3}=\dfrac{-x+3}{x-3}=-1$, d.h. die Ungleichung ist erfüllt.

   Fall 2: $2\leq x<3$: Hier ist $\dfrac{1-|x-2|}{|x-3|}=\dfrac{1-(x-2)}{-(x-3)}=\dfrac{-x+3}{-x+3}=1$, d.h. die Ungleichung ist nicht erfüllt.

   Fall 3: $x<2$: Hier ist $\dfrac{1-|x-2|}{|x-3|}=\dfrac{1-(-(x-2))}{-(x-3)}=\dfrac{x-1}{-x+3}$. Die Ungleichung lautet

   $$\frac{x-1}{-x+3}<\frac{1}{2}\ \mid\cdot 2,\cdot(3-x)>0 \Leftrightarrow 2(x-1)<3-x \Leftrightarrow 3x<5 \Leftrightarrow x<\frac{5}{3}.$$

   Also ist für $x<2$ ist die Ungleichung $x<\frac{5}{3}$ erfüllt.

   Insgesamt: $\mathbb{L}=\left\{x:\ \ x>3 \text{ oder } x<\dfrac{5}{3}\right\}$.

Allgemeine Ungleichungen

Ungleichungen treten in vielfältiger Form auf. Nicht für jeden Typ läßt sich ein Standardverfahren angeben. Hier ist -mal wieder- Kreativität gefragt.

Beispiel: Man zeige für alle $n\in\mathbb{N}$ die Ungleichung $\dbinom{n}{k}\dfrac{1}{n^k}\leq\dfrac{1}{2^{k-1}},\quad 0\leq k\leq n.$

Es ist

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k\text{ Faktoren}}}{k!}\cdot\frac{1}{n^k}\\ &= \frac{1}{k!}\cdot\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-k+1}{n}\\ &\leq \frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Weiter folgt

$$\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(k-1)\cdot k}\leq\frac{1}{1\cdot\underbrace{2\cdot 2\cdots 2}_{k-1\text{ Faktoren}}}=\frac{1}{2^{k-1}}\quad\diamond$$

2 Mathematische Beweismethoden

2.1 Elementare Logik

2.1.1 Aussagen

Überall im täglichen Leben, insbesondere in der Mathematik, wird man mit Aussagen konfrontiert, die entweder wahr oder falsch sein können. Eine Aussage kann nicht zugleich wahr und falsch sein.

Beispiele:

1. „7 ist eine Primzahl“ ist eine wahre Aussage.
2. „7 ist die Summe von 2 und 3“ ist eine falsche Aussage.
3. „Der hier geschriebene Satz ist falsch“ ist keine Aussage, weil nicht sinnvoll festgestellt werden kann, ob dieses sprachliche Gebilde wahr oder falsch ist.

Definition 2.1 *(Aussage)*
Unter einer Aussage A *versteht man ein sprachliches Gebilde, welches einen der beiden* Wahrheitswerte *„wahr“ (w) oder „falsch“ (f) hat.*

Zu jeder Aussage A existiert ihre *Negation* $\neg A$, gesprochen „nicht A“ . Es gilt: wenn $A = w$ dann $\neg A = f$, wenn $A = f$ dann $\neg A = w$.

2.1.2 Verknüpfungen von Aussagen

Aussagen können durch logische Operationen miteinander verknüpft werden:

Definition 2.2 *(Verknüpfungen)*

1. *$A \vee B$ bedeutet „A oder B“ (Disjunktion)*
2. *$A \wedge B$ bedeutet „A und B“ (Konjunktion)*
3. *$A \Rightarrow B$ bedeutet „B folgt aus A“ (Implikation)*
4. *$A \Leftrightarrow B$ bedeutet „A und B sind äquivalent“ (Äquivalenz).*

So kann man die Aussagen „7 ist eine Primzahl“ sowie „7 ist ungerade“ verknüpfen zu „7 ist eine Primzahl *und* 7 ist ungerade“ . Die Verknüpfung mit „und“ entspricht dem umgangssprachlichen Gebrauch.

Beispiel: Die Aussagen A, B, C und D seien folgendermaßen erklärt:

A: Es ist Montag, B: Wir besuchen unsere Freunde, C: Es regnet, D: Wir gehen spazieren.

Schreiben Sie als aussagenlogischen Ausdruck:

1. Wenn es regnet besuchen wir unsere Freunde und wenn es nicht regnet gehen wir spazieren.
2. Es ist Montag, und wir gehen spazieren oder besuchen unsere Freunde.
3. Wenn es Montag ist und es nicht regnet, dann gehen wir spazieren.
4. Wir gehen spazieren, es regnet und es ist Montag.

In Kurzform lauten die Aussagen:

1. $(C \Rightarrow B) \wedge (\neg C \Rightarrow D)$.
2. $A \wedge (D \vee B)$.
3. $(A \wedge \neg C) \Rightarrow D$.
4. $D \wedge C \wedge A$.

Die Wahrheitswerte logischer Verknüpfungen werden mit Wahrheitstafeln verdeutlicht:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	f	w	w	w	w
w	f	f	f	w	f	f
f	w	w	f	w	w	f
f	f	w	f	f	w	w

Bemerkungen:

1. Die Disjunktion („oder“) zweier Aussagen ist bereits dann wahr, wenn eine der beiden Aussagen wahr ist. Die Disjunktion ist nur dann falsch, wenn beide Aussagen falsch sind.

   Die Verknüpfung mit „oder“ wird in der Mathematik abweichend zur Umgangssprache definiert. So ist die Aussage „7 ist eine Primzahl *oder* 7 ist ungerade“ wahr. Das umgangssprachliche „oder“ entspricht dem mathematischen „entweder oder“ (XOR).

2. Die Konjunktion („und“) zweier Aussagen ist nur dann wahr, wenn beide Aussagen wahr ist. Sie ist bereits dann falsch, wenn auch nur eine der beiden Aussagen falsch ist.

3. Betrachten wir die Wahrheitstafel für die Implikation („$\Rightarrow$“) etwas genauer:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Die Implikation ist genau dann falsch, wenn aus einer wahren Aussage A eine falsche Aussage B gefolgert wird. Die Implikation ist entscheidend für *mathematische Beweise*.

Wir lesen ab:

- *Aus einer wahren Aussage kann nur eine wahre Aussage (richtig) gefolgert werden.*
- Unnatürlich scheint zunächst, daß folgender Sachverhalt **nicht gilt**:

  Aus einer falschen Aussage kann nur eine falsche Aussage (richtig) gefolgert werden.
- Ebenso **gilt nicht**:

  Eine wahre Aussage kann nur aus einer wahren Aussage (richtig) gefolgert werden.

  In der Tat zeigt das folgende Beispiel, daß eine wahre Aussage auch aus einer falschen Aussage (richtig) gefolgert werden kann:

  Beispiel:

  Aus $A: \quad -1 = 1$ folgt durch Quadrieren $B: \ (-1)^2 = (+1)^2$. B ist wahr, aber A ist falsch.
- Aus einer falschen Aussage kann sowohl eine wahre als auch eine falsche Aussage (richtig) gefolgert werden.
- Grundlegend für den *indirekten Beweis* ist die folgende Tatsache:

  Eine falsche Aussage kann nur aus einer falschen Aussage (richtig) gefolgert worden sein.

4. Die Äquivalenz ist als Gleichwertigkeit von Aussagen definiert:

$$A \Leftrightarrow B = ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

d.h. aus A folgt B und aus B folgt A.

Man sagt auch: „A ist notwendig und hinreichend für B“ bzw. „B gilt genau dann (dann und nur dann), wenn A gilt.“

Zwei durch Verknüpfung entstandene Formeln werden als „gleichwertig“ *(äquivalent)* angesehen, wenn sie bei jeder Kombination von Belegungen der vorkommenden Aussagevariablen denselben Wert annehmen. Wir schreiben dann zwischen ihnen das Zeichen „=“ .
Für die Verknüpfung mehrerer Aussagen gilt

Satz 2.1 *(Distributivgesetze)*
Es seien A, B und C Aussagen. Dann gelten die Distributivgesetze

1. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$,
2. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$.

Beweisen Sie dies als Übungsaufgabe.

Für die Bildung des logischen Gegenteils zusammengesetzter Aussagen gelten die *de Morganschen Regeln*:

Satz 2.2 *(de Morgansche Regeln)*
Es seien A und B Aussagen. Dann gelten

1. $\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$,
2. $\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$.

Beweis: der ersten Regel mit der Wahrheitstafel:

A	B	$A \wedge B$	$\neg(A \wedge B)$
w	w	w	f
w	f	f	w
f	w	f	w
f	f	f	w

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$
w	w	f	f	f
w	f	f	w	w
f	w	w	f	w
f	f	w	w	w

Ebenso beweist man die zweite Regel $\diamond$

Bei der Verneinung wird also aus „und“ die Verknüpfung „oder“ und aus „oder“ die Verknüpfung „und“ .

Beispiel: Wir betrachten zwei Aussagen:

A: „Heute ist Sonntag“, B: „Wir gehen spazieren“.
Dann gilt $A \wedge B$: „Heute ist Sonntag und wir gehen spazieren“,
sowie $A \vee B$: „Heute ist Sonntag oder wir gehen spazieren“.
Wir bilden mit Hilfe der de Morganschen Regeln die Negation:
$\neg(A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$: „Heute ist nicht Sonntag oder wir gehen nicht spazieren“,
$\neg(A \vee B) = \neg A \wedge \neg B$: „Heute ist nicht Sonntag und wir gehen nicht spazieren“.

2.1.3 Aussageformen

Ersetzt man in einer Aussage A eine Konstante durch eine Variable, zum Beispiel durch x, so entsteht die Aussageform $A(x)$.

Eine Aussageform hat im allgemeinen keinen bestimmten Wahrheitswert. Erst wenn die Variable durch eine Konstante ersetzt wird, entsteht eine Aussage, von der fest steht, ob sie wahr oder falsch ist.

Beispiel:

$A(x)$ = „$x^2 > 30$“ ist eine Aussageform. $\neg A(x)$ lautet „$x^2 \leq 30$“. $A(x)$ wird zur wahren Aussage, wenn man $x = 6$ einsetzt. Für $x = 5$ ist $A(x)$ falsch.

Quantoren

Setzt man vor eine Aussageform $A(x)$ einen *Quantor* der Form

- „Für alle x gilt …“ (kurz $\forall$) oder
- „Es existiert (mindestens) ein x mit der Eigenschaft …“ (kurz $\exists$),

so entsteht eine *All-Aussage* bzw. eine *Existenz-Aussage*.

Bei einer Aussage der Form „Es existiert ein ...“ ist stets gemeint „Es existiert mindestens ein ...“ . So ist die Aussage „Es existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$“ wahr, obwohl insgesamt zwei reelle Zahlen mit $x^2 = 2$ existieren. Will man aussagen, daß es *genau* ein Element mit einer Eigenschaft gibt, so sagt man z.B. „Es existiert genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $x^2 = 2$ und $x \geq 0$.“

Aussageformen mit Quantoren lassen sich folgendermaßen negieren:

- $\neg$(Für alle x gilt: $A(x)$ ist wahr) = Es existiert ein x so daß $\neg A(x)$ wahr ist
- $\neg$(Es existiert ein x mit: $A(x)$ ist wahr) = Für alle x gilt: $\neg A(x)$ ist wahr.

Bei der Verneinung wird aus „es gibt“ „für alle“ und umgekehrt.

Beispiele:

1. Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Wege führen nach Rom“?

   Antwort: „Es gibt einen Weg, der nicht nach Rom führt“.

2. Wie lautet die Negation der Aussage „Wir haben ein blaues Auto im Fuhrpark“?

   Antwort: „Es gibt kein blaues Auto im Fuhrpark“.

2.2 Direkte und indirekte Beweise

In der Mathematik werden Aussagen als *Sätze* formuliert und sind zu beweisen. Ein *Beweis* ist eine logische Folgerung (Implikation) aus bereits bewiesenen Aussagen bzw. bekannten Begriffsbildungen.

Da man Begriffsbildungen nicht unendlich zurück verfolgen kann, ergibt sich die Notwendigkeit gewisse grundlegende Aussagen als *Axiome* einer Theorie zu akzeptieren, ohne sie zu beweisen.

Wir gehen im Folgenden aus von einem zu beweisenden Satz B (Behauptung) und bezeichnen die Bedingungen unter denen er gilt mit A (Annahme). Zu A gehören natürlich alle bisherigen Folgerungen aus den Axiomen.

Zu zeigen ist also die Implikation:

$$A \Rightarrow B.$$

Kann man aus A die Aussage B folgern, dann sagt man

- A ist *hinreichend* für B und
- B ist *notwendig* für A.

Aus der Wahrheitstafel für die Implikation liest man ab:

Ist $A \Rightarrow B$ eine wahre Aussage, so gilt:

- Ist A wahr, so ist B wahr (1. Zeile, Ansatz für den direkten Beweis)
- Ist B wahr, so kann A wahr oder falsch sein (1. und 3. Zeile)
- Ist B falsch, so ist A falsch (4. Zeile, Ansatz für den indirekten Beweis)

Beispiel:
Für zwei Zahlen a, b betrachten wir die Aussagen: $A: \quad a = b$ und $B: \quad a^2 = b^2$.

1. Es ist $A \Rightarrow B$ wahr. Also ist A hinreichend für B.
2. B ist notwendig für A. Ist B falsch, d.h. $a^2 \neq b^2$ dann ist A falsch. Ist B wahr, so braucht A nicht wahr zu sein. Beispielsweise gilt für $b = -a$ auch $a^2 = b^2$ obwohl $a \neq b$.

2.2.1 Direkter Beweis

Ein *direkter Beweis* der Behauptung $A \Rightarrow B$ hat die Form

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow A_n \Rightarrow B.$$

Dabei sind $A_1, A_2, \ldots, A_n$ Zwischenaussagen. Beachten Sie, daß die zu beweisende Behauptung am Schluss dieser Kette steht und nicht am Anfang.

Beispiel:
Direkter Beweis der Aussage: „Für alle $a, b \geq 0$ gilt: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$“ .
Wir setzen: A: $a, b \geq 0$ und B: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Beweis: Es ist

$$\begin{array}{rrcll} & (a-b)^2 & \geq & 0 & \\ \Rightarrow & a^2 - 2ab + b^2 & \geq & 0 & \mid +4ab \\ \Rightarrow & a^2 + 2ab + b^2 & \geq & 4ab & \\ \Rightarrow & (a+b)^2 & \geq & 4ab & \mid \sqrt{..} \\ \Rightarrow & a+b & \geq & 2\sqrt{ab} & \mid :2 \\ \Rightarrow & \dfrac{a+b}{2} & \geq & \sqrt{ab} & \end{array}$$

wobei im vorletzten Schritt die Voraussetzung $A: \quad a, b \geq 0$ verwendet wurde: Wegen $a, b \geq 0$ ist $4ab \geq 0$ und die Wurzel darf unter Beibehaltung des Ungleichungszeichens gezogen werden (Monotonie der Wurzel). Somit ist B gezeigt $\diamond$

2.2.2 Indirekter Beweis

Beim *indirekten Beweis* der Behauptung $A \Rightarrow B$ verwendet man folgende Tatsache: Ist $A \Rightarrow B$ wahr und ist B falsch, so ist A falsch (Zeile 4 der Wahrheitstafel für die Implikation).
Man geht von $\neg B$ aus und zeigt durch logische Folgerung $\neg A$. Somit hat man gezeigt, daß $A \Rightarrow B$ wahr ist:

$$\neg B \Rightarrow C_1 \Rightarrow C_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow C_n \Rightarrow \neg A$$

mit Zwischenaussagen $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

Beispiel:
Indirekter Beweis der Aussage: „Für alle $a, b \geq 0$ gilt: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$“ .
Wir setzen: A: $a, b \geq 0$ und B: $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.
Beweis: Angenommen $\neg B$ ist wahr. Dann gibt es $a, b \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} &< \sqrt{ab} \quad | \cdot 2 \\ \Rightarrow \quad a+b &< 2\sqrt{ab} \quad | (..)^2 \\ \Rightarrow \quad a^2+2ab+b^2 &< 4ab \quad | -4ab \\ \Rightarrow \quad a^2-2ab+b^2 &< 0 \\ \Rightarrow \quad (a-b)^2 &< 0 \end{aligned}$$

wobei im zweiten Schritt wegen $a, b \geq 0$ gilt $2\sqrt{ab} \geq 0$ und somit unter Beibehaltung des Ungleichungszeichens quadriert werden darf (Monotonie der Quadratfunktion). Die letzte Gleichung zeigt, daß $a, b \geq 0$ nicht gelten kann. Also ist $\neg A$ wahr.
Somit ist $A \Rightarrow B$ gezeigt $\diamond$

2.3 Vollständige Induktion

Oft treten Gleichungen oder Ungleichungen auf, die eine natürliche Zahl als Parameter enthalten. Ein Beispiel hierfür ist die Ungleichung

$$2^n \geq n$$

für $n \in \mathbb{N}$. Ein Überprüfen durch Einsetzen einer Vielzahl von Werten für n ist mühsam und unsicher. Ein Lösungsansatz bietet die folgende Charakteristik der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$:
Jede Menge M von natürlichen Zahlen, die 1 enthält und für die gilt: aus $n \in M \;\Rightarrow\; n+1 \in M$ ist gleich der Menge der natürlichen Zahlen, d.h. $M = \mathbb{N}$.

Prinzip des Induktionsbeweises

Der Beweis durch vollständige Induktion verläuft in folgenden drei Schritten:

(I) Induktionsanfang: Zeige $A(1)$ ist richtig.

(II) Induktionsannahme: $A(n)$ sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluss: Unter Verwendung der Induktionsannahme zeigt man, daß hieraus die Richtigkeit von $A(n+1)$ folgt.

Daß $A(1)$ richtig ist, wurde in (I) gezeigt. Aus (III) folgt, daß auch die Behauptung $A(1+1) = A(2)$ richtig ist. Durch Fortführung dieser Argumentation folgt, daß die Behauptung $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq 1$ gültig ist.
Dabei kann der Induktionsanfang kann auch für $A(n_0)$ mit $n_0 > 1$ durchgeführt werden. Der Induktionsbeweis gilt dann ab n_0, d.h. für $A(n_0), A(n_0+1), \ldots$.

Für unser Beispiel $A(n):\ 2^n \geq n$ heißt dies:

(I) Induktionsanfang: $A(1):\ 2^1 \geq 1$ ist wahr.

(II) Induktionsannahme: Es gelte $A(n):\ 2^n \geq n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluss: Zeige: aus der Richtigkeit von $A(n)$ folgt $A(n+1):\ 2^{n+1} \geq n+1$:

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n \cdot 2 \quad | \text{ Anwendung von } A(n) \\ &\geq n \cdot 2 \\ &\geq n+1 \end{aligned}$$

denn es gilt $2n \geq n+1$ für $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ und nach dem Induktionsprinzip ist $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

Beispiele für vollständige Induktion bei Gleichungen:

Beispiele:

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt
$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

   (I) Induktionsanfang: $\sum_{k=1}^{1} k = 1 \overset{!}{=} \frac{1 \cdot 2}{2}$ ist wahr.

   (II) Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n):\ \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

   (III) Induktionsschluss: Zu zeigen ist $A(n+1):\ \sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

   Nachweis: Ausgehend von $A(n)$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k &= \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \quad | \text{ Anwendung von } A(n) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \cdot \left(\frac{n}{2} + 1\right) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

   d.h. $A(n+1)$ ist wahr. Damit ist die Identität für alle $n \in \mathbb{N}$ gezeigt.

2. Zeigen Sie die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad q \neq 1$$

durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

(I) Induktionsanfang: $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k = q^0 = 1 \stackrel{!}{=} \frac{q-1}{q-1}.$$

(II) Induktionsannahme: es gelte $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluss: Zeige $\sum\limits_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$. Wir gehen aus von der Annahme und addieren auf beiden Seiten q^{n+1}:

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad | \; + q^{n+1}$$
$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \cdot \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}.$$

3. Zeigen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$:

$$n^3 + 2n \quad \text{ist teilbar durch } 3.$$

(I) Induktionsanfang: $n = 1$: $\quad 1^3 + 2 \cdot 1 = 3 = 3 \cdot 1$.

(II) Induktionsannahme: es gelte für ein $n \in \mathbb{N}$: $n^3 + 2n$ ist teilbar durch 3, d.h. es gibt ein $k \in \mathbb{N}$ mit $n^3 + 2n = 3 \cdot k$.

(III) Induktionsschluss: Zeige $(n+1)^3 + 2(n+1)$ ist teilbar durch 3.

Wir rechnen die Klammern aus und bringen die Induktionsannahme ein:

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3 \\ &\stackrel{IA}{=} 3 \cdot k + 3n^2 + 3n + 3 = 3 \cdot \underbrace{(k + n^2 + n + 1)}_{=k' \in \mathbb{N}}.\end{aligned}$$

Also ist $(n+1)^3 + 2(n+1)$ durch 3 teilbar.

4. Zeigen Sie durch vollständige Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(I) Induktionsanfang: $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} \stackrel{!}{=} \frac{1}{1+1}.$$

(II) Induktionsannahme: es gelte $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ für ein n.

(III) Induktionsschluss: Zeige $\sum\limits_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\cdot(k+1)} = \frac{n+1}{n+2}$.

Wir gehen aus von der Annahme und addieren auf beiden Seiten $\frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad | \; + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)}$$
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k \cdot (k+1)} &= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n\cdot(n+2)+1}{(n+1)\cdot(n+2)} \\ &= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)\cdot(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

Beispiele für vollständige Induktion bei Ungleichungen:

Beispiele:

1. Für jede Zahl $x > -1$ gilt die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$

für $n \geq 2$.

(I) Induktionsanfang für $n = 2$: $\quad A(2):\; (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x$, d.h. $A(2)$ ist wahr.

(II) Induktionsannahme: $\quad$ Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n):\; (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$.

(III) Induktionsschluss: Zu zeigen ist $A(n+1):\; (1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x$.

Nachweis: Ausgehend von $A(n)$ folgt

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \quad | \text{ Anwendung von } A(n) \text{ und von } 1+x>0 \\ &\geq (1+n\cdot x)\cdot(1+x) \\ &= 1 + n\cdot x + x + n \cdot x^2 \\ &\geq 1 + (n+1)\cdot x\end{aligned}$$

d.h. $A(n+1)$ ist wahr.

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

(I) Induktionsanfang. Für $n = 1$ ist $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 \geq \sqrt{1}$.

(II) Induktionsannahme. Für $n \in \mathbb{N}$, n beliebig aber fest, gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$.

(III) Induktionsschluss. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad | \text{ Anwendung von } A(n) \\ &\geq \sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}}. \end{aligned}$$

Bleibt noch zu zeigen:

$$\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dies sieht man, wenn man die Ungleichung $\sqrt{n} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$ mit der positiven Zahl $\sqrt{n+1}$ multipliziert: $\sqrt{n} \cdot \sqrt{n+1} + 1 \geq n+1$. Es folgt $\sqrt{n^2+n} \geq n \geq 0$. Da beide Seiten der Ungleichung nicht negativ sind, ist Quadrieren erlaubt: $n^2 + n \geq n^2$, das führt zur Aussage $n \geq 0$, welche für $n \in \mathbb{N}$ richtig ist. Damit ist die Gültigkeit der Behauptung für $n+1$ gezeigt, d.h. die Behauptung ist für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig.

3 Komplexe Zahlen

3.1 Einführung

Die hierarchische Einführung der Zahlenbereiche $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist motiviert durch den Wunsch Gleichungen zu lösen. So hat die Gleichung $n + x = 0$ für $n \in \mathbb{N}$ keine Lösung in $\mathbb{N}$, in $\mathbb{Z}$ lautet die Lösung $x = -n$. Für $a, b \in \mathbb{Z}$ besitzt die Gleichung $a \cdot x = b$ in $\mathbb{Z}$ i.a. keine Lösung, in $\mathbb{Q}$ lautet die Lösung $x = \frac{b}{a}$, falls $a \neq 0$. In der Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist die Gleichung $x^2 = 2$ nicht lösbar, durch Hinzunahme der irrationalen Zahlen erhält man in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ die Lösung $x = \sqrt{2}$.

Zur Lösung der quadratischen Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

mit $p, q \in \mathbb{R}$ benutzt man die p/q-Formel

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Die Wurzel kann in $\mathbb{R}$ aber nur für $p^2 > 4q$ gezogen werden. Beispielsweise hat die Gleichung $x^2 + 4x - 5 = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{4+5} = -2 \pm 3$, d.h. $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

Beim Versuch die Gleichung $x^2 + 4x + 5 = 0$ zu lösen erhält man mit der p/q-Formel

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-1}$$

was in $\mathbb{R}$ keine Bedeutung hat.

3.1.1 Komplexe Zahlen

Wir erweitern nun $\mathbb{R}$ mit dem Ziel, daß die Lösung quadratischer Gleichungen ohne Einschränkung möglich ist. Die Zahl $\sqrt{-1}$ muß dem erweiterten Bereich zugehören.

Wir führen die *imaginäre Einheit* j ein, für die gilt $j^2 = -1$. Die Elemente des erweiterten Zahlenbereichs sind die *komplexen Zahlen* $\mathbb{C}$.

Definition 3.1 *(Komplexe Zahlen)*

1. *Unter einer* komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ *versteht man einen Ausdruck der Form* $z := a + j \cdot b$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$.

   a*:* Realteil *von* z, $a = \Re(z)$

   $b \in \mathbb{R}$*:* Imaginärteil *von* z, $b = \Im(z)$.

2. *Zwei komplexe Zahlen* $z_1 = a_1 + j \cdot b_1$ *und* $z_2 = a_2 + j \cdot b_2$ *sind* gleich, *wenn Real- und Imaginärteile übereinstimmen, d.h.* $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$ *und* $b_1 = b_2$.

   Insbesondere gilt $a + j \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0, b = 0$.

3. *Ist* $z = a + j \cdot b$, *so heißt* $\overline{z} := a - j \cdot b$ *die zu* z konjugiert komplexe Zahl.

4. *Unter dem Betrag* $|z|$ *von* $z = a + j \cdot b$ *versteht man die nichtnegativ reelle Zahl* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Es gilt $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, d.h. die reellen Zahlen sind die komplexen Zahlen mit Imaginärteil 0.

3.1.2 Komplexe Arithmetik

Die Rechengesetze aus $\mathbb{R}$ übertragen sich sinngemäß auf $\mathbb{C}$: man rechnet mit j wie mit einer reellen Zahl, wobei stets $j^2 = -1$ zu beachten ist.

- *Addition/Subtraktion*:

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 + j \cdot b_1) \pm (a_2 + j \cdot b_2) = a_1 \pm a_2 + j \cdot (b_1 \pm b_2)$$

- *Multiplikation*:

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + j \cdot b_1) \cdot (a_2 + j \cdot b_2) = (a_1a_2 - b_1b_2) + j \cdot (a_1b_2 + a_2b_1)$$

- *Division*:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{a_1 + j \cdot b_1}{a_2 + j \cdot b_2} = \frac{a_1 + j \cdot b_1}{a_2 + j \cdot b_2} \cdot \frac{a_2 - j \cdot b_2}{a_2 - j \cdot b_2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j \cdot (a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} \\ &= \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{|z_2|^2}. \end{aligned}$$

  Der Trick bei der Division besteht darin, daß man mit dem konjugiert komplexen Nenner $\overline{z}_2$ erweitert.

Beispiele:

1. $(5 + 3j) \pm (7 - 4j) = 5 \pm 7 + j(3 \pm (-4))$.
2. $(5 + 3j) \cdot (7 - 4j) = 35 - 20j + 21j - 12 \underbrace{j^2}_{=-1} = 47 + j$.
3. $\dfrac{5 + 3j}{7 - 4j} = \dfrac{5 + 3j}{7 - 4j} \cdot \dfrac{7 + 4j}{7 + 4j} = \dfrac{35 + 20j + 21j + 12j^2}{49 + 16} = \dfrac{23}{65} + j \cdot \dfrac{41}{65}$.

- *Rechenregeln für* z *und* $\overline{z}$*:*

  $z = a + j \cdot b$, $\overline{z} = a - j \cdot b \Rightarrow z + \overline{z} = 2a$, $\quad z - \overline{z} = 2j \cdot b$, $\; z \cdot \overline{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$.

  Weiter gelten die Beziehungen

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad \overline{z_1 + z_2} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2,$$

  wie man aus der Definition und den Rechenregeln leicht ableitet.

  Es gelten die aus $\mathbb{R}$ bekannten Klammerregeln (Assoziativ- und Distributivgesetze). Das neutrale Element der Addition ist $0 = 0 + j \cdot 0$: $z + 0 = z$ bzw. $a + j \cdot b + 0 = a + j \cdot b$. Das neutrale Element der Multiplikation ist $1 = 1 + j \cdot 0$: $z \cdot 1 = z$ bzw. $(a + j \cdot b) \cdot 1 = a + j \cdot b$.

In $\mathbb{C}$ können wir nun die quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{R}$ vollständig lösen. Es gilt

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \in \mathbb{R} \quad \text{im Fall} \quad p^2 \geq 4q$$

und

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \\ &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(q - \frac{p^2}{4}\right) \cdot j^2} \\ &= -\frac{p}{2} \pm j \cdot \underbrace{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}}_{\in \mathbb{R}} \quad \text{im Fall} \quad p^2 \leq 4q. \end{aligned}$$

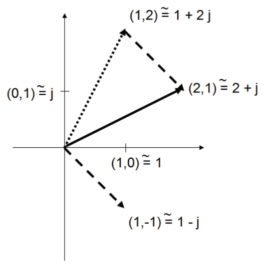
Ferner gilt $\overline{x}_1 = x_2$, d.h. die beiden Wurzeln sind konjugiert komplex.

Für das Beispiel $x^2 + 4x + 5 = 0$ erhält man die beiden komplexen Lösungen $x_{1,2} = -2 \pm j$.

3.2 Gaußsche Zahlenebene

Im kartesischen Koordinatensystem tragen wir auf der x-Achse den Realteil und auf der y-Achse den Imaginärteil von $z = a + j \cdot b$ auf:
Jede komplexe Zahl entspricht einem Punkt in der komplexen Zahlenebene (*Gaußsche Ebene*).

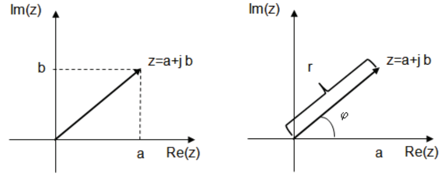
Addition und Subtraktion komplexer Zahlen können durch geometrische Addition und Subtraktion der entsprechenden Vektoren veranschaulicht werden.



Geometrische Addition und Subtraktion in $\mathbb{C}$

3.2.1 Kartesische Form und Polarform

In der Gaußschen Ebene ist die Zahl $z = a + j \cdot b \in \mathbb{C}$ durch ihre *Polarkoordinaten* (r, φ) charakterisiert:



Kartesische und polare Darstellung in der Gaußschen Zahlenebene

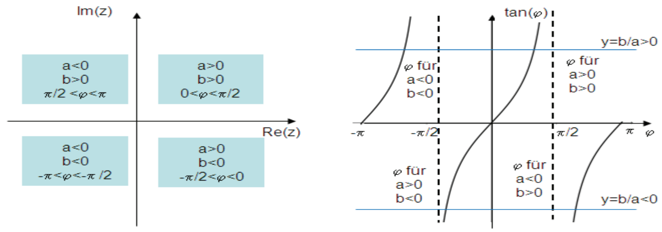
$$z = a + j \cdot b = r \cdot (\cos\varphi + j \cdot \sin\varphi).$$

Es gelten die Umrechnungen

$$z = a + j \cdot b \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} r &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} a &= r \cdot \cos\varphi \\ b &= r \cdot \sin\varphi \end{aligned}$$

Das *Argument* $\varphi = \arg z$, d.h. der Winkel zwischen der reellen Achse und z ist nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt: durch (r, φ) und $(r, \varphi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$ wird dieselbe komplexe Zahl dargestellt. Als *Hauptwert* wird das Argument φ von z mit $\varphi \in (-\pi, \pi]$ bezeichnet. Für $a = 0$ (imaginäre Zahlen) gilt für $b > 0$: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ und für $b < 0$: $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$.

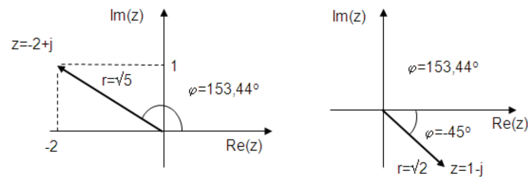
Da die Gleichung $\tan\varphi = \frac{b}{a}$ in $(-\pi, \pi]$ zwei Lösungen hat, ist durch das Vorzeichen von a und b zu entscheiden, welche Lösung zu nehmen ist.



Vorzeichensituation und Argumentwinkel komplexer Zahlen

Beispiele:

1. $z = -2 + j \Rightarrow a = -2, b = 1$, also $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, $\tan\varphi = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \varphi = -26.56° + 180° = 153.44°$. $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$. Also: $(r, \varphi) = (\sqrt{5}, 153.44°)$. Somit folgt: $z = -2 + j = \sqrt{5} \cdot (\cos 153.44° + j \cdot \sin 153.44°)$.



2. $z = 1 - j \Rightarrow a = 1, b = -1$, also $-\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$, $\tan\varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.
   $r = |z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Also: $(r, \varphi) = \left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$.
   Somit folgt: $z = 1 - j = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + j \cdot \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$.

3.2.2 Eulersche Gleichung

Eine wichtige Rolle beim Rechnen mit komplexen Zahlen spielt die Eulersche Gleichung:

Satz 3.1 *(Eulersche Gleichung)*
Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi. \tag{3.1}$$

Der Beweis wird später im Rahmen von Potenzreihen nachgeliefert.

Aus der Eulerschen Gleichung folgt für $z \in \mathbb{C}$ die Exponentialdarstellung

$$z = a + j \cdot b = r \cdot e^{j\,\varphi} \tag{3.2}$$

mit $r = |z| \geq 0$ und $\varphi = \arg(z)$. Man schreibt auch

$$z = |z| \cdot e^{j \cdot \arg(z)}.$$

Satz 3.2 *(Eigenschaften der e-Funktion)*
Für $\varphi \in \mathbb{R}$ gilt

$$e^{j\cdot(\varphi + 2\pi k)} = e^{j\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \tag{3.3}$$

$$|e^{j\varphi}| = 1. \tag{3.4}$$

Beweis: Mit (3.1) folgt mit der 2π-Periodizät von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ für $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^{j\cdot(\varphi+2\pi k)} &= \cos(\varphi + 2\pi k) + j \cdot \sin(\varphi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}, \\ &= \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi = e^{j\varphi}. \end{aligned}$$

Es ist $|e^{j\varphi}| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$ für $\varphi \in \mathbb{R}$ $\diamond$

Beispiel: Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen.

Mit der Eulerschen Formel lassen sich leicht die Additionstheoreme von Sinus und Kosinus nachweisen:

Aus

$$e^{j\cdot(\alpha+\beta)} = e^{j\,\alpha} \cdot e^{j\,\beta}$$

folgt mit (3.1):

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) + j \cdot \sin(\alpha+\beta) &= (\cos\alpha + j \cdot \sin\alpha) \cdot (\cos\beta + j \cdot \sin\beta) \\ &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta + j \cdot (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha) \end{aligned}$$

und Vergleich von Real- und Imaginärteil beider Seiten ergibt

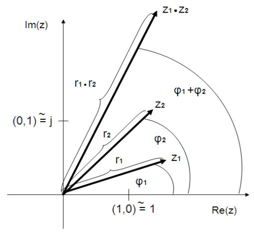
$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha. \end{aligned}$$

3.2.3 Multiplikation und Division

Mit der Darstellung (3.2) und den Rechenregeln für die Exponentialfunktion sind Multiplikation und Division nun einfach durchführbar. Für $z_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$, $z_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1\,r_2 \cdot e^{j\varphi_1} \cdot e^{j\varphi_2} = r_1\,r_2 \cdot e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}. \end{aligned}$$

Geometrisch entspricht die Multiplikation (und Division) zweier komplexer Zahlen einer *Drehstreckung*: die Radien der Faktoren werden multipliziert (bzw. dividiert), das entspricht einer Streckung; die Winkel der Faktoren werden addiert (bzw. subtrahiert), dies entspricht einer Drehung um 0.



Beispiele:

1. $z_1 = 3 + j = \sqrt{10} \cdot e^{j\cdot\arctan\frac{1}{3}}$, $z_2 = j = e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$:
   $z_1 \cdot z_2 = -1 + 3j = \sqrt{10} \cdot e^{j\cdot\arctan\frac{1}{3}} \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = \sqrt{10} \cdot e^{j\cdot(\arctan\frac{1}{3}+\frac{\pi}{2})}$,
   $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{3+j}{j} = 1 - 3j = \sqrt{10} \cdot e^{j\cdot(\arctan\frac{1}{3}-\frac{\pi}{2})}$.
2. $z_1 = 2 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = 3 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}$:
   $z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}} \cdot 3 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}} = 6 \cdot e^{j\cdot(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4})} = 6 \cdot e^{j\cdot\frac{3\pi}{4}}$,
   $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{3 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{2}}}{2 \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}} = \dfrac{3}{2} \cdot e^{j\cdot(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4})} = \dfrac{3}{2} \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}$.

Die Addition und Subtraktion ist mit der *kartesischen Darstellung* $z = a + j \cdot b$ einfach durchführbar. Für die Multiplikation und Division komplexer Zahlen eignet sich besonders die *Polardarstellung* $z = |z| \cdot e^{j\cdot\arg(z)}$.

3.2.4 Potenzieren und Radizieren

Die Polarform $z = |z| \cdot e^{j\varphi}$ eignet sich zur Berechnung ganzzahliger Potenzen von z:

$$z^n = \left(|z| \cdot e^{j\varphi}\right)^n = |z|^n \cdot e^{j\cdot n\varphi}.$$

Beispiel: $z = 2 + 2j = \sqrt{8} \cdot e^{j\cdot\frac{\pi}{4}}$: $\quad z^{12} = (\sqrt{8})^{12} \cdot e^{j\cdot 12\cdot\frac{\pi}{4}} = 8^6 \cdot \underbrace{e^{j\cdot 3\pi}}_{=e^{j\pi}=-1} = -8^6$.

Definition 3.2 *(n-te Wurzel)*
Eine Zahl $a \in \mathbb{C}$ heißt n-te Wurzel *von $b \in \mathbb{C}$, wenn $a^n = b$ gilt. Man schreibt $a = \sqrt[n]{b}$.*

Ist beispielsweise die Gleichung $z^3 = w$ mit $w = -3 + j\sqrt{3}$ zu lösen, so sind alle komplexen Zahlen z zu ermitteln die diese Gleichung lösen. Es ergeben sich 3 Lösungen in $\mathbb{C}$.

Man rechnet zweckmäßig in Polarkoordinaten: $w = -3 + j\sqrt{3} = \sqrt{12} \cdot e^{j \cdot \frac{5}{6}\pi}$. Unter Berücksichtigung der 2π-Periodizität von $e^{j\varphi}$ gilt:

$$w = \sqrt{12} \cdot e^{j \cdot (\frac{5}{6}\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Die Zahlen

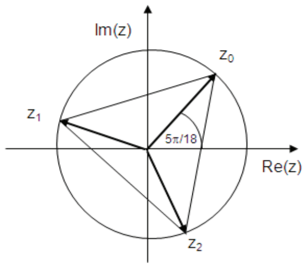
$$z_k = \left(\sqrt{12}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{j \cdot \frac{1}{3}(\frac{5}{6}\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

sind Lösungen von $z^3 = w$.

Aus

$$z_k = \left(\sqrt{12}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot e^{j \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{6}\pi} \cdot e^{j \cdot 2\pi \cdot \frac{k}{3}}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

folgt $z_0 = z_3 = z_6 = z_9 = \ldots$, $z_1 = z_4 = z_7 = \ldots$ und $z_2 = z_5 = z_8 = \ldots$, d.h. wir haben tatsächlich nur 3 verschiedene Lösungen z_0, z_1, z_2 der Gleichung erhalten. Die Lösungen liegen auf einem Kreis vom Radius $\left(\sqrt{12}\right)^{\frac{1}{3}}$ um den Ursprung. Die Punkte z_0, z_1, z_2 markieren ein regelmäßiges Dreieck.



Für allgemeines $n \in \mathbb{N}$ gilt:

Satz 3.3 *(Potenzieren und Radizieren in $\mathbb{C}$)*

(a) Die n-te Potenz von $z = a + j \cdot b = |z| \cdot e^{j\varphi}$ ergibt sich zu

$$z^n = |z|^n \cdot e^{j \cdot n\varphi}.$$

(b) Für jede komplexe Zahl $w = r \cdot e^{j\varphi}$, $r \neq 0$ hat die Gleichung

$$z^n = w$$

genau n verschiedene Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi \cdot \frac{k}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Die n-ten Wurzeln von w liegen auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$ um den Nullpunkt der Gaußschen Ebene und bilden ein regelmäßiges n-Eck.

3.2.5 Rechnen mit Beträgen

Für das Rechnen mit Beträgen gelten folgende Regeln:

Satz 3.4 *(Rechenregeln für komplexe Beträge)*
Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

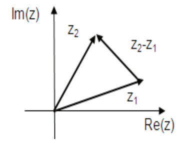
$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \tag{3.5}$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad \textit{(Dreiecksungleichung)}, \tag{3.6}$$

$$|z_1 + z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big| \quad \textit{(zweite Dreiecksungleichung)}. \tag{3.7}$$

Beweis: Die Gültigkeit von (3.5) folgt leicht aus der Polardarstellung komplexer Zahlen.

Die beiden Dreiecksungleichungen lassen sich geometrisch veranschaulichen: eine Dreiecksseite ist nie länger als die Summe der beiden anderen Dreiecksseiten; eine Dreiecksseite ist länger als die Differenz der beiden anderen Dreiecksseiten ⋄

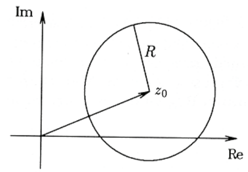


Sei z_0 eine feste komplexe Zahl. Dann beschreibt die Menge aller $z \in \mathbb{C}$ mit

$$|z - z_0| = R \quad \text{mit} \quad R > 0$$

den Kreis um z_0 mit Radius R.

$|z - z_0| < R$ beschreibt das *Innere* dieses Kreises.

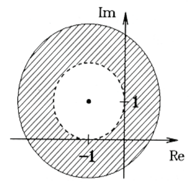


Beispiele:

1. Welches Gebiet in $\mathbb{C}$ wird beschrieben durch

$$1 < |z + 1 - j| \leq 2\,?$$

Mit $z_0 := -1 + j$ gilt $1 < |z - z_0| \leq 2$, d.h. die Menge beschreibt einen Kreisring mit Innenradius 1 und Aussenradius 2. Der Innenkreis gehört nicht zur Menge, der äussere Kreis gehört zur Menge dazu.



2. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $(1+j) \cdot z + (1-j) \cdot \bar{z} = 0$?

Mit $z = x + j \cdot y$ folgt

$(1+j) \cdot (x + j \cdot y) + (1-j) \cdot (x - j \cdot y) = 0 \Leftrightarrow (x-y) + j \cdot (x+y) + (x-y) + j \cdot (-x-y) = 2(x-y) = 0 \Rightarrow x = y$,

d.h. $z = x + j \cdot x, \quad x \in \mathbb{R}$ ist Lösung der Gleichung.

3. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1$?

Es ist $|z-1| = |z+1|$. Mit $z = x + j \cdot y$ folgt: $|(x-1) + j \cdot y| = |(x+1) + j \cdot y| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x+1)^2 + y^2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = (x+1)^2 + y^2 \Leftrightarrow -2x = 2x$
d.h. $x = 0$. Die imaginäre Achse $z = 0 + j \cdot y, \quad y \in \mathbb{R}$ ist Lösung der Gleichung.

4. Für welche $z \in \mathbb{C}$ gilt $|z - 2j| < |z|$?

   Mit $z = x + j \cdot y$ folgt: $|x + j \cdot (y-2)| < |x + j \cdot y| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 < x^2 + y^2 \Leftrightarrow 1 < y$,

   Die Halbebene $\Re(z) > 1$, d.h. die Menge $z = x + j \cdot y$ mit $x \in \mathbb{R}$ und $y > 1$, ist Lösung der Gleichung.

3.3 Polynome und algebraische Gleichungen

Wir haben gesehen, daß die quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten in $\mathbb{C}$ stets lösbar ist.

3.3.1 Fundamentalsatz der Algebra

Ganz allgemein gilt:

Satz 3.5 *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Jede algebraische Gleichung n-ten Grades $(n > 0)$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ hat mindestens eine Lösung in $\mathbb{C}$.

Der Beweis ist schwierig und wird deshalb übergangen.

Satz 3.6 *Für die Gleichung n-ten Grades $(n > 0)$*

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mit reellen *Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$, $a_n \neq 0$ gilt: Ist $z_0 = x_0 + j \cdot y_0$ Lösung der Gleichung so ist auch $\overline{z}_0 = x_0 - j \cdot y_0$ Lösung der Gleichung.*

Beweis: Aus $a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0 = 0$ folgt durch komplexe Konjugation $\overline{a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + \cdots + a_1 z_0 + a_0} = \overline{0} = 0$. Mit den Regeln der Konjugation folgt weiter

$$\begin{aligned} & \overline{a}_n \overline{z}_0^n + \overline{a}_{n-1} \overline{z}_0^{n-1} + \cdots + \overline{a}_1 \overline{z}_0 + \overline{a}_0 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & a_n \overline{z}_0^n + a_{n-1} \overline{z}_0^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z}_0 + a_0 = 0, \qquad a_k \text{ reell!} \end{aligned}$$

also die Behauptung ⋄

Beispiele:

1. Bestimmen Sie die Lösung von
   $$z^3 = -8.$$
   Mit der Polardarstellung der rechten Seite gilt
   $$z^3 = 8 \cdot e^{j \cdot (\pi + 2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = 2 \cdot e^{\frac{1}{3} j \cdot (\pi + 2k\pi)} = \underbrace{2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}}_{=: z_1} \cdot e^{j \cdot \frac{k}{3} \cdot 2\pi}.$$
   Somit hat man die drei Lösungen:
   $$z_1 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3}}, \quad z_2 = 2 \cdot e^{j \cdot \pi} = -2, \quad z_3 = 2 \cdot e^{j \cdot \frac{5}{3} \cdot \pi} = 2 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{3}}.$$
   Es gilt $z_3 = \overline{z}_1$.

2. Bestimmen Sie die Lösung von
   $$z^4 = -1 + j.$$
   Es ist $-1 + j = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \frac{3}{4}\pi}$. Weiter folgt
   $z^4 = \sqrt{2} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)}, \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow z = 2^{1/8} \cdot e^{\frac{1}{4} j \cdot \left(\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)} = \underbrace{2^{1/8} \cdot e^{j \cdot \frac{3}{16}\pi}}_{=: z_1} \cdot e^{j \cdot \frac{k}{4} \cdot 2\pi}$.
   Somit erhält man die vier Lösungen:
   $z_0 = 2^{1/8} \cdot e^{j \cdot \frac{3}{16}\pi}$, $z_1 = 2^{1/8} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{3}{16}\pi + \frac{\pi}{2}\right)}$, $z_2 = 2^{1/8} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{3}{16}\pi + \pi\right)}$ $z_3 = 2^{1/8} \cdot e^{j \cdot \left(\frac{3}{16}\pi + \frac{3\pi}{2}\right)}$.
   Die Lösungen sind nicht zueinander konjugiert komplex.

3.3.2 Quadratische Gleichungen

Um eine quadratische Gleichung zu lösen, gewinnt man durch quadratische Ergänzung eine reine Gleichung 2. Grades, deren Lösungen entgegengesetzt bezüglich 0 liegen.

Beispiel: Lösen Sie die Gleichung

$$z^2 - 2(1-j)z + 3 + 2j = 0.$$

Setze $z_0 := 1 - j$. Dann

$$\begin{aligned} & (z - z_0)^2 - (1-j)^2 + 3 + 2j = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (z - z_0)^2 - 1 + 2j + 1 + 3 + 2j = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (z - z_0)^2 = -3 - 4j = 5 \cdot e^{-j \cdot 2.214..} \\ \Leftrightarrow \quad & w^2 = 5 \cdot e^{-j \cdot 2.214..} \end{aligned}$$

mit $w := z - z_0$. Die Lösung von $w^2 = 5 \cdot e^{-j \cdot 2.214..}$ ist gegeben durch

$$w_1 = \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot 1.107..}, \quad w_1 = \sqrt{5} \cdot e^{-j \cdot (1.107.. + \pi)}.$$

Somit folgt $z_1 = w_1 + z_0 = j$ und $z_2 = w_2 + z_0 = 2 - 3j$.

Für die quadratische Gleichung

$$z^2 + p\,z + q = 0$$

mit komplexen Koeffizienten $p, q \in \mathbb{C}$ erhalten wir mit $z_0 = \frac{p}{2}$ durch quadratische Ergänzung:

$$\begin{aligned} z^2 + 2z_0\,z + z_0^2 + q - z_0^2 &= (z + z_0)^2 + q - z_0^2 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad z + z_0 &= \pm\sqrt{z_0^2 - q} \Leftrightarrow z = -z_0 \pm \sqrt{z_0^2 - q} \\ \Leftrightarrow \quad z &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \end{aligned}$$

d.h. die p/q-Formel für quadratische Gleichungen gilt auch für $p, q \in \mathbb{C}$.

3.3.3 Faktorzerlegung von Polynomen

Definition 3.3 *(Komplexes Polynom)*
Ein Ausdruck der Form

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

mit Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *und* $a_n \neq 0$ *wird als* (komplexes) Polynom n-ten Grades *bezeichnet.*

Nach Satz 3.5 besitzt die Gleichung

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$$

mindestens eine Lösung $z_1 \in \mathbb{C}$. Man sagt auch: Das Polynom $P_n(z)$ hat die *Nullstelle* $z_1 \in \mathbb{C}$.

Von $P_n(z)$ kann der Linearfaktor $(z - z_1)$ ohne Rest abdividiert werden:

$$P_n(z) = P_{n-1}(z) \cdot (z - z_1).$$

$P_{n-1}(z)$ ist ein Polynom vom Grad $n - 1$. Ist der Grad $n - 1$ von $P_{n-1}(z)$ noch größer als 0, so existiert nach Satz 3.5 wiederum eine Nullstelle $z_2 \in \mathbb{C}$ von $P_{n-1}(z)$ so daß

$$P_{n-1}(z) = P_{n-2}(z) \cdot (z - z_2)$$

mit $\mathrm{Grad}(P_{n-2}) = n - 2$ gilt. Für $P_n(z)$ folgt dann

$$P_n(z) = P_{n-2}(z) \cdot (z - z_1) \cdot (z - z_2).$$

Durch schrittweises Abdividieren aller n Nullstellen von $P_n(z)$ folgt:

Satz 3.7 *(Linearfaktorzerlegung von Polynomen)*

1. *Ein Polynom* $P_n(z)$ *vom Grad* n *hat* n *komplexe Nullstellen* $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, *die möglicherweise zusammenfallen. Es gilt die* Linearfaktorzerlegung
$$P_n(z) = a_n(z - z_n) \cdot (z - z_{n-1}) \cdot \cdots \cdot (z - z_2) \cdot (z - z_1).$$
2. *Sind die Koeffizienten von* $P_n(z)$ reell, *so sind die Nullstellen entweder reell, oder sie treten paarweise komplex konjugiert auf, d.h. mit* $z_k = x_k + j \cdot y_k$, $y_k \neq 0$, *ist auch* $\overline{z}_k = x_k - j \cdot y_k$ *Nullstelle von* $P_n(z)$.

Man kann die beiden Linearfaktoren $(z - z_k)$ und $(z - \overline{z}_k)$ zu dem reell unzerlegbaren (irreduziblen) quadratischen Faktor $\left((z - x_k)^2 + y_k^2\right)$ zusammenfassen:

$$(z - x_k - j \cdot y_k) \cdot (z - x_k + j \cdot y_k) = \left((z - x_k)^2 + y_k^2\right).$$

Damit entsteht ein quadratischer Ausdruck mit reellen Koeffizienten. Es gilt:

Satz 3.8 *(Faktorzerlegung reeller Polynome)*
Ein Polynom $P_n(z)$ *mit reellen Koeffizienten kann stets in ein Produkt irreduzibler reeller Faktoren höchstens zweiten Grades zerlegt werden.*

Beispiele:

1. Das kubische Polynom
$$P_3(z) = z^3 + z - 10$$
hat die reelle Nullstelle $z_1 = 2$. Wie lauten die restlichen Nullstellen?

   Abspalten des Linearfaktors $(z - 2)$ durch Polynomdivision liefert:
$$\begin{array}{llll} z^3 & & +z - 10 & : (z-2) \quad = z^2 + 2z + 5 \\ \underline{z^3} & \underline{-2z^2} & & \\ & 2z^2 & +z - 10 & \\ & \underline{2z^2} & \underline{-4z} & \\ & & 5z - 10 & \end{array}$$
   Weitere Nullstellen: $z^2 + 2z + 5 = 0 \Rightarrow z_{2,3} = -1 \pm \sqrt{1 - 5} = -1 \pm 2j$. Damit:
$$P_3(x) = (z - 2) \cdot (z + 1 - 2j) \cdot (z + 1 + 2j).$$
   Die Zerlegung von $P_3(x)$ in irreduzible reelle Faktoren lautet
$$P_3(x) = (z - 2) \cdot ((z + 1)^2 + 4) = (z - 2) \cdot (z^2 + 2z + 5).$$

2. Das Polynom 4. Grades
$$P_4(z) = z^4 - 2z^2 - 3$$
läßt sich mit der Substitution $u = z^2$ in das quadratische Polynom $u^2 - 2u - 3$ überführen.

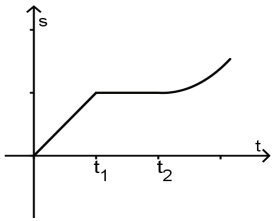
   Mit der p/q-Formel erhalten wir
$$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{\frac{2^2}{4} + 3} = 1 \pm 2, \quad \text{d.h.} \quad u_1 = 3, \;\; u_2 = -1.$$
   Weiter folgt
$$z_{1,2} = \pm\sqrt{u_1} = \pm\sqrt{3} \quad \text{und} \quad z_{3,4} = \pm\sqrt{u_2} = \pm j.$$
   Insgesamt ergibt sich
$$P_4(z) = \left(z - \sqrt{3}\right) \cdot \left(z + \sqrt{3}\right) \cdot (z - j) \cdot (z + j).$$
   Die Zerlegung von $P_4(x)$ in irreduzible reelle Faktoren lautet
$$P_4(x) = \left(z - \sqrt{3}\right) \cdot \left(z + \sqrt{3}\right) \cdot (z^2 + 1).$$

4 Funktionen

Einführungsbeispiel

Vom Zeitpunkt $t = 0$ bis $t = t_1$ fährt ein Auto mit konstanter Geschwindigkeit entlang einer Straße. Danach wird eine Pause bis zum Zeitpunkt $t = t_2$ eingelegt. Nach t_2 fährt das Fahrzeug mit konstanter Beschleunigung weiter.

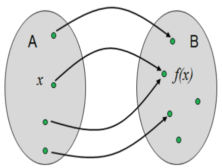
Für jede Zeit t ist die zurückgelegte Wegstrecke s auf dem Schaubild abgetragen. So kann die Position des Fahrzeugs zu jedem Zeitpunkt des betrachteten Intervalls bestimmt werden. Jeder Zeit t ist genau eine Position $s(t)$ des Autos zugeordnet.



Weg-Zeit-Diagramm

4.1 Der Funktionsbegriff

Eine Zuordnung von Elementen x einer Menge A zu den Elementen y einer Menge B wird mathematisch als *Abbildung* bezeichnet. Eine Abbildung ist durch die Mengen A und B sowie die Menge aller geordneten Paare (x, y) mit $x \in A$ und $y \in B$ charakterisiert.



Ist die Abbildung eindeutig, d.h. ist jedem $x \in A$ *genau ein* $y \in B$ zugeordnet, so spricht man von einer *Funktion*. Dabei werden A als *Definitionsbereich* und B als *Wertebereich* der Funktion bezeichnet.

In der klassischen Analysis spielen eindeutige Abbildungen von Mengen $A = D$ und $B = W$, die Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ sind eine wichtige Rolle. Man spricht hier von *reellwertigen Funktionen* einer reellen Variablen. Sie bilden zusammen mit den komplexen Funktionen den Hauptgegenstand der Analysis.

Bemerkung:

Häufig unterscheidet man zwischen den Begriffen *Variable* und *Argument*. Bei $g(x)$ und $f(x+1)$ ist die Variable in beiden Fällen x. Das Argument einer Funktion ist der Ausdruck, auf den die Funktion angewendet wird, bei $f(x+1)$ ist das Argument von f der Ausdruck $x + 1$.

Definition 4.1 *(Reelle Funktion)*
Eine reelle Funktion $y = f(x)$ *ist eine Abbildung, die jeder reellen Zahl* $x \in D \subseteq \mathbb{R}$ *eindeutig eine reelle Zahl* $y \in W \subseteq \mathbb{R}$ *zuordnet. Man spricht auch von einer* Funktion y *in Abhängigkeit von* x *und bezeichnet dies mit*

$$f: \; D \to W, \quad x \mapsto y = f(x) \quad \textit{bzw.} \quad y = f(x).$$

Die Variable x *wird als Argument oder als* unabhängige Variable *und* y *als Funktionswert oder als* abhängige Variable *bezeichnet.* D *heißt* Definitionsbereich *und* W *heißt* Wertebereich *der Funktion.*

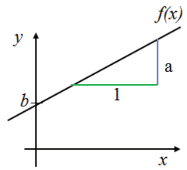
Mit der Darstellung von Funktionen in den Variablen x und y wird i.a. ein kartesisches Koordinatensystem verbunden. Definiton 4.1 setzt dies allerdings nicht voraus, so daß z.B. durch $r = f(\varphi)$ ebenfalls eine Funktion gegeben ist, die eine Zuordnung in Polarkoordinaten r und φ beschreibt. Wir beschränken uns zunächst auf Darstellungen in kartesischen Koordinaten und werden später auf Polarkoordinaten sowie Parameterdarstellungen von Kurven eingehen.

Beispiele:

1. Die *(affin)-lineare Funktion* ist gegeben durch

   $$y = f(x) = a \cdot x + b$$

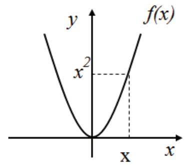
   mit Steigung a und y-Achsenabschnitt b. Der Definitionsbereich ist $D(f) = \mathbb{R}$ und der Wertebereich ist $W(f) = \mathbb{R}$.

2. Die *Normalparabel* besitzt die Funktionsgleichung

   $$y = f(x) = x^2$$

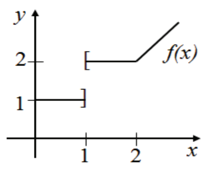
   mit Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W(f) = [0, \infty)$.

3. Die *stückweise lineare Funktion*

$$y = f(x) = \begin{cases} 1, & x \le 1, \\ 2, & 1 < x \le 2, \\ x, & x > 2 \end{cases}$$

mit Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ und Wertebereich $W(f) = \{1\} \cup [2, \infty)$ besitzt das Schaubild



Bemerkung:
Die folgenden Darstellungsformen reellwertiger Funktionen einer reellen Variablen sind typisch für die Mehrzahl der Anwendungen:

- Verbale Beschreibung der Zuordnung.
- Tabellarische Darstellung mit Zahlenpaaren (x_i, y_i). Diese Form wird häufig für die Zuordnung von Messwerten y_i zu Messstellen x_i verwendet bzw. in Tafelwerken für Funktionen.
- Graphische Darstellung, bei der die Menge der Zahlenpaare (x, y) einen Funktionsgraph in einem (kartesischen) Koordinatensystem bildet.
- Explizite Darstellung, wie z.B. $y = f(x), y = \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [-1, 1]$.
- Implizite Darstellung in der Form $F(x, y) = 0$, wie z.B.

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y \in [0, 1].$$

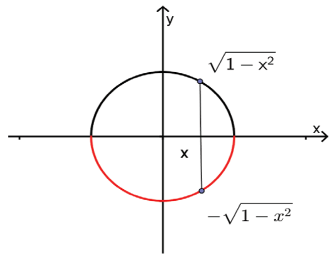
Wird der Definitionsbereich D einer Funktion nicht explizit angegeben, so ist in der Regel von Werten der unabhängigen Variablen x aus einem größtmöglichen Intervall auszugehen, für die der Funktionsausdruck erklärt ist. In verschiedenen Fällen werden wir den Definitions- bzw. Wertebereich durch $D(f)$ bzw. $W(f)$ bezeichnen, um die Zuordnung zur Funktion f zu betonen.

Beispiele:

1. Für $y = f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ ist $D(f)$ so zu wählen, daß der Radikand nichtnegativ ist, d.h. $x^2 - 2x \ge 0$ oder $x^2 \ge 2x$.

   Im Fall $x \ge 0$ heißt dies $x \ge 2$ und im Fall $x \le 0$ bedeutet dies $x \le 2$. Also ist $D(f) = (-\infty, 0] \cup [2, \infty)$.

2. Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{2x}{x(x-1)}$ ist nur dann definiert, wenn der Nenner ungleich 0 ist, d.h. $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
3. Für die Funktion $y = f(x) = \lg(25 - x^2)$ ist der Definitionsbereich so zu wählen, daß das Argument des Logarithmus nichtnegativ ist. Aus $25 - x^2 > 0$ bzw. $25 > x^2$ folgt $-5 < x < 5$ und wir erhalten $D(f) = (-5, 5)$.
4. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ beschreibt den Einheitskreis und ist für Zahlen $x \in [-1, 1]$ und $y \in [-1, 1]$ erfüllbar.



   Allerdings wird durch die Gleichung keine eindeutige Zuordnung von y-Werten zu x-Werten vorgenommen, da z.B. der Zahl $x = \frac{3}{5}$ die beiden y-Werte $\frac{4}{5}, -\frac{4}{5}$ zugeordnet werden können, die beide zusammen mit $x = \frac{3}{5}$ die Kreisgleichung erfüllen. Die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ definiert somit keine Funktion. Zerlegt man das Intervall $[-1, 1]$ der erlaubten y-Werte in die Bereiche $W_1 = [0, 1]$ und $W_2 = [-1, 0]$, so kann jedem $x \in [-1, 1] = D$ zum einen $y = \sqrt{1 - x^2} \in W_1$ und zum anderen $y = -\sqrt{1 - x^2} \in W_2$ zugeordnet werden. Damit definiert die Kreisgleichung implizit zwei Funktionen: $y = f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in D_1 = D$ und $y \in W_1$, welche den oberen Halbkreis beschreibt, sowie $y = f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ mit $x \in D_2 = D$ und $y \in W_2$ für den unteren Halbkreis.

4.2 Eigenschaften von Funktionen

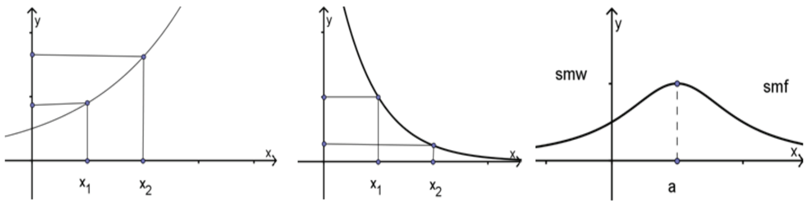
Verschiedene Eigenschaften einer Funktion sind für weitergehende Untersuchungen von entscheidender Bedeutung.

4.2.1 Monotonie

Definition 4.2 *(Monotonie)*
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- streng monoton steigend, *wenn für $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets gilt $f(x_1) < f(x_2)$ und*
- streng monoton fallend, *wenn für $x_1, x_2 \in I$ mit $x_1 < x_2$ stets gilt $f(x_1) > f(x_2)$.*

Ist in der Ungleichung für die Funktionswerte auch die Gleichheit ($\le$ bzw. $\ge$) zugelassen, so spricht man von Monotonie im weiteren Sinn.



Durch die strenge Monotonie ist die Existenz und Eindeutigkeit der Umkehrfunktion gewährleistet.

Ist $y = f(x)$ in $I \subseteq D$ streng monoton steigend oder fallend mit Werten aus $J \subseteq W$, so ist jedem $x \in I$ genau ein $y \in J$ zugeordnet und umgekehrt. Man spricht von einer *eineindeutigen* (umkehrbar eindeutigen) *Funktion* $f : I \to J$. Es gibt dann zu f eine eindeutige *Umkehrfunktion* $f^{-1} : J \to I$.

4.2.2 Symmetrie

Die Definition der Symmetrie zur y-Achse bezieht sich auf die geometrische Eigenschaft, daß der Funktionsgraph spiegelbildlich zur y-Achse ist. Die Definition der Punktsymmetrie zum Ursprung besagt, daß der Funktionsgraph bei Drehung um $180°$ um den Koordinatenursprung in sich übergeht.

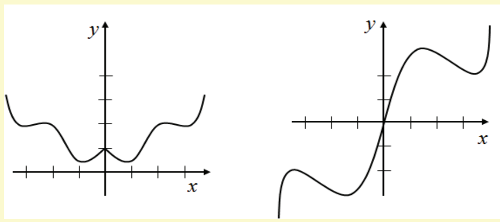
Definition 4.3 *(Symmetrie)*
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem zum Koordinatenursprung symmetrischen Intervall $I = [-a, a] \subseteq D$

- gerade *oder* symmetrisch zur y-Achse, *wenn für jedes $x \in I$ gilt*

$$f(-x) = f(x),$$

- ungerade *oder* punktsymmetrisch zum Ursprung, *wenn für jedes $x \in I$ gilt*

$$f(-x) = -f(x).$$

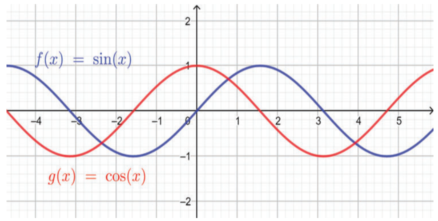


Gerade und ungerade Funktion

Bei der Untersuchung des Symmetrieverhaltens von $y = f(x)$ sind die Terme $f(x)$ und $f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ zu vergleichen. Wir zeigen dies an einigen Beispielen.

Beispiele:

1. Die Funktion $y = f(x) = \sin(x)$ ist ungerade, es gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Funktion $y = g(x) = \cos(x)$ ist gerade, es gilt $\cos(-x) = \cos(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

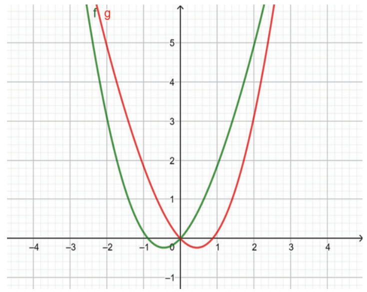


2. Die Funktion $y = f(x) = x^2 + \sin(x^2)$ ist gerade, denn es gilt

$$f(-x) = (-x)^2 + \sin((-x)^2) = x^2 + \sin(x^2) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Wegen x^2 im Argument des Sinus spielt das Schaubild der Sinusfunktion hier keine Rolle.

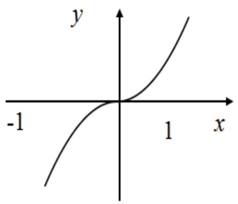
3. Die Funktion $y = f(x) = x^2 + \sin(x)$ zeigt kein Symmetrieverhalten, denn für $g(x) = f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x) = x^2 - \sin(x)$ gilt weder $g(x) \neq f(x)$ noch $g(x) \neq -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Die Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ gehen nicht durch Spiegelung auseinander hervor.



Schaubilder von $y = f(x)$ und $y = g(x) = f(-x)$

4. Die Funktion $y = f(x)$ mit $D(f) = [-2, 2]$ und $W(f) = [0, 4]$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -x^2, & -2 \le x < 0, \\ x^2, & 0 \le x \le 2. \end{cases}$$



Es ist $f(-x) = -f(x)$, denn
für $x \le 0$ gilt: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = -f(x)$ und
für $x \ge 0$ gilt: $f(-x) = -(-x)^2 = -x^2 = -f(x)$.
Also ist f punktsymmetrisch zum Ursprung.

5. Überprüfen Sie, ob die Funktionen in ihrem Definitionsbereich gerade oder ungerade sind:
   a) $f(x) = x^2 - x\,\sin(x)$, b) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$.

   a) Die Funktion ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert, d.h. $D = \mathbb{R}$. Für beliebiges $x \in D$ gilt wegen $\sin(-x) = -\sin(x)$ die Beziehung

   $$f(-x) = (-x)^2 - (-x)\,\sin(-x) = x^2 - x\,\sin(x) = f(x)$$

   d.h. die Funktion $y = f(x)$ ist in D gerade bzw. symmetrisch zur y-Achse.

   b) Der Definitionsbereich der Funktion ist durch die Werte der Variablen x bestimmt, für die keine negativen Radikanden der Wurzeln auftreten. Wir bestimmen zunächst die Nullstellen der Funktionen $1+x+x^2$ und $1-x+x^2$. Da diese sämtlich komplex sind, bleiben die Radikanden stets positiv und es ist $D = \mathbb{R}$ der Definitionsbereich. Damit gilt für beliebiges reelles x

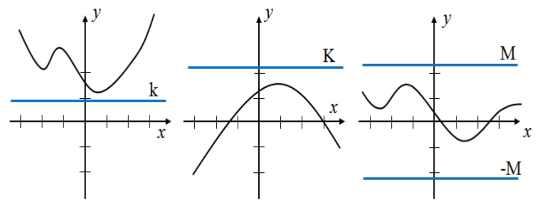
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{1+(-x)+(-x)^2} - \sqrt{1-(-x)+(-x)^2} \\ &= \sqrt{1-x+x^2} - \sqrt{1+x+x^2} = -f(x) \end{aligned}$$

   d.h. die Funktion ist ungerade bzw. symmetrisch zum Ursprung.

4.2.3 Beschränktheit

Definition 4.4 *(Beschränktheit)*
Eine Funktion $y = f(x)$ heißt in einem Intervall $I \subseteq D$

- beschränkt nach unten, *wenn es eine Konstante k gibt mit $f(x) \ge k$ für alle $x \in I$ und*
- beschränkt nach oben, *wenn es eine Konstante K gibt mit $f(x) \le K$ für alle $x \in I$ bzw.*
- beschränkt, *falls es eine Konstante M gibt mit $|f(x)| \le M$ für alle $x \in I$.*



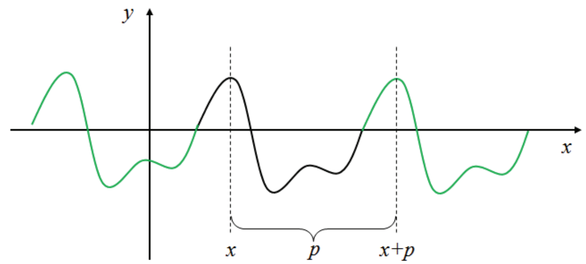
4.2.4 Periodizität

Vorgänge, die durch Wiederholung gekennzeichnet sind, werden als periodisch bezeichnet. Entsprechend werden Funktionen mit einer gesetzmäßigen Wiederholung von Funktionsstücken periodische Funktionen genannt.

Definition 4.5 *(Periodizität)*
Eine Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ heißt periodisch *mit der* Periode $p > 0$, *wenn für jedes $x \in D$ gilt*

$$f(x+p) = f(x).$$

Mit p ist auch jedes ganzzahlige Vielfache von p eine Periode. Eine kleinste Periode heißt primitive Periode.

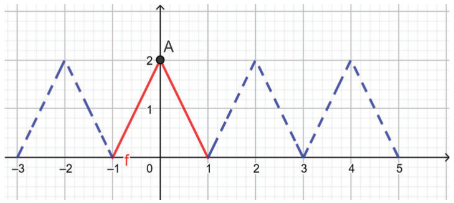


Beispiele:

1. Mit dem Parameter $A > 0$ ist die Funktion $y = f(x)$ erklärt durch

   $$f(x) = \begin{cases} A \cdot x + A, & -1 < x < 0, \\ -A \cdot x + A, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad , \quad f(x+2) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

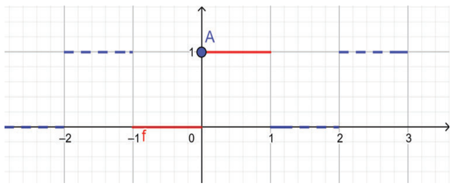
   Die Funktion ist periodisch mit Periode $p = 2$. Die Form oder der „Shape“ ist erklärt durch die geschweifte Klammer. Der zweite Teil der Definition kann als „Kopieranweisung“ interpretiert werden.



2. Mit dem Parameter $A > 0$ ist die Funktion $y = f(x)$ erklärt durch

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 0, \\ A, & 0 \le x < 1, \end{cases} \quad , \quad f(x+2) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

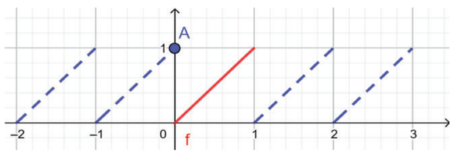
Die Funktion ist periodisch mit Periode $p = 2$. Die Form ist durch die geschweifte Klammer gegeben, der zweite Teil der Definition ist die Kopieranweisung.



3. Mit dem Parameter $A > 0$ ist die Funktion $y = f(x)$ erklärt durch

$$f(x) = A \cdot x, \quad 0 \le x < 1, \quad f(x+1) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

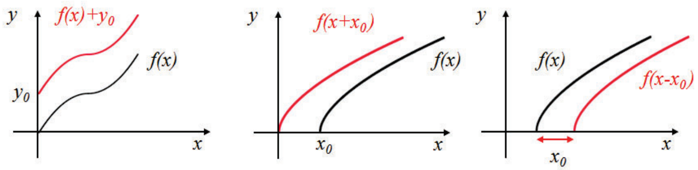
Die Funktion ist periodisch mit Periode $p = 1$.



4.2.5 Verschiebung von Funktionen und ihrer Graphen

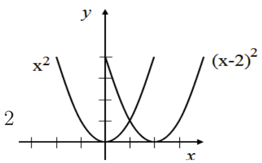
Gegeben sei eine eine Funktion $y = f(x)$.

- Der Graph der Funktion $y = \tilde{f}(x) = f(x) + y_0$ ist gegenüber dem Graph von f um y_0 in die y-Richtung verschoben.
- Der Graph der Funktion $y = \tilde{f}(x) = f(x - x_0)$ ist gegenüber dem Graph von f in x-Richtung verschoben, und zwar
  – für $x_0 > 0$ nach rechts, und
  – für $x_0 < 0$ nach links.



Beispiele:

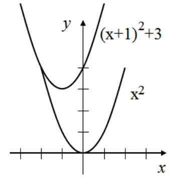
1. Die Funktion



$$y = \tilde{f}(x) = (x-2)^2$$

ist gegenüber der Normalparabel $y = f(x) = x^2$ um $x_0 = 2$ nach rechts verschoben.

2. Die Funktion



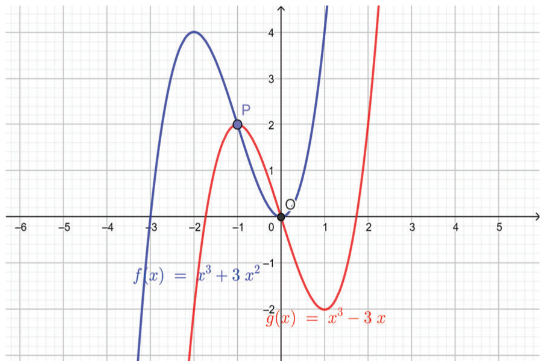
$$y = \tilde{f}(x) = x^2 + 2x + 4 = x + 2x + 1 + 3 = (x+1)^2 + 3$$

ist gegenüber der Normalparabel $y = f(x) = x^2$ um $y_0 = 3$ nach oben und um $x_0 = 1$ nach links verschoben.

3. Die Funktion $y = f(x) = x^3 + 3x^2$ ist punktsymmetrisch zu $P(-1/2)$. Eine Funktion $f(x)$ ist punktsymmetrisch zu $P(x_0/y_0)$, falls die Funktion $g(x) = f(x + x_0) - y_0$ (Verschiebung von P in den Ursprung) ungerade ist. Hier ergibt sich

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x-1) - 2 = (x-1)^3 + 3(x-1)^2 - 2 \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 3(x^2 - 2x + 1) - 2 \\ &= x^3 - 3x \end{aligned}$$

und $g(x)$ ist offensichtlich ungerade, da $g(x)$ ein Polynom mit lauter ungeraden Potenzen von x ist.



Verschiebung von $y = f(x)$ um 1 nach rechts und um 2 nach unten ergibt $y = g(x)$

4.3 Umkehrfunktion und Verkettung von Funktionen

Für die Auflösung von Gleichungsbeziehungen spielen Umkehrfunktionen eine entscheidende Rolle, da sich bei Hintereinanderausführung Funktion und Umkehrfunktion neutralisieren.

Beispiel: Das Weg-Zeit-Gesetz des freien Falls eines Steins aus 80m Höhe laute

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

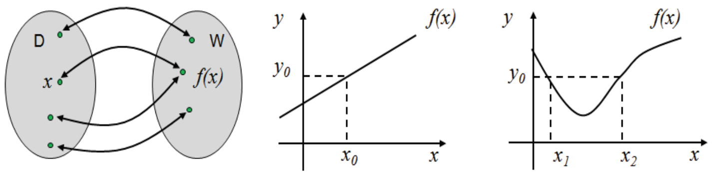
mit $g = 9.81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$. Wie lange dauert es, bis der der Stein auf dem Boden aufschlägt?

Gegeben ist also der Funktionswert $s(t) = 80\mathrm{m}$, wir fragen nach dem zugehörigen Argument t.

Wir haben die Gleichung $80\mathrm{m} = \frac{1}{2}gt^2$ nach t aufzulösen. Es ergibt sich

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\mathrm{m}}{g}} \approx 4.04\mathrm{s}.$$

Im Beispiel suchen wir zum Bild der Funktion $s(t)$ das zugehörige Urbild. Das ist nur möglich, wenn es zum Bild keine zwei unterschiedlichen Urbilder gibt. Dies motiviert folgende Definition:



4.3.1 Injektive, surjektive und bijektive Funktionen

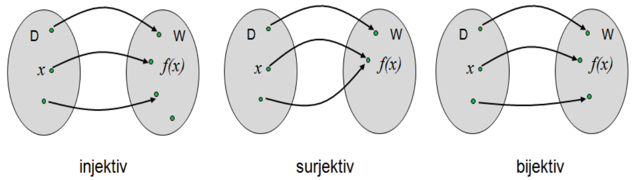
Definition 4.6 *(Injektive, surjektive und bijektive Funktion)*

a) *Die Funktion* $f: A \to B$ *heißt* injektiv, *wenn es keine zwei verschiedene Elemente in* A *gibt, die auf das gleiche* $y \in B$ *abgebildet werden:*

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \quad \textit{bzw.} \quad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

b) *Die Funktion* $f: A \to B$ *heißt* surjektiv, *wenn jedes Element* $y \in B$ *Bild eines Elements von* A *ist.*

c) *Die Funktion* $f: A \to B$ *heißt* bijektiv, *wenn* f *injektiv und surjektiv ist.*



Ist f bijektiv, so läßt sich zu jedem $y \in B$ genau ein $x \in A$ mit $y = f(x)$ bestimmen. Auch bei injektiven Funktionen ist dies möglich, sofern man sich auf Elemente des Wertebereichs von f beschränkt.

4.3.2 Umkehrung von Funktionen

Definition 4.7 *(Umkehrbarkeit von Funktionen)*
Eine Funktion $f: D(f) \to W(f)$ *heißt* umkehrbar, *wenn zu jedem* $y \in W(f)$ *genau ein* $x \in D(f)$ *gehört. Die Zuordnung* $y \in W(f)$ *zu* $x \in D(f)$ *ist wieder eine Funktion, die als* Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ *zu* $y = f(x)$ *bezeichnet wird.*

Satz 4.1 *(Umkehrfunktion)*
Es sei $f: D(f) \to W(f)$ *bijektiv. Dann existiert die Umkehrfunktion* $f^{-1}: W(f) \to D(f)$. *Definitionsbereich und Wertebereich von Funktion und Umkehrfunktion sind vertauscht, d.h. es gilt* $D(f^{-1}) = W(f)$ *und* $W(f^{-1}) = D(f)$. *Die Funktionen erfüllen die Beziehung*

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \textit{für alle} \quad x \in D(f).$$

Da die Umkehrung der Umkehrfunktion die Ausgangsfunktion ergibt, bilden Funktion und Umkehrfunktion ein Paar inverser Funktionen mit den Eigenschaften $f^{-1}(f(x)) = x$ bzw. $f(f^{-1}(y)) = y$.

Man berechnet die Umkehrfunktion in zwei Schritten:

Schritt 1: Löse $y = f(x)$ nach x auf: $x = f^{-1}(y)$.

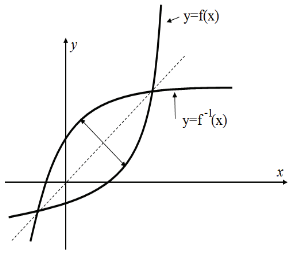
Schritt 2: Vertausche x und y.

Bemerkungen:

1. Ist f streng monoton, so ist f umkehrbar. Zur Bestimmung der Umkehrfunktion für nichtmonotone Funktionen muss gegebenenfalls der Definitionsbereich der Funktion eingeschränkt werden. Die Existenz einer Umkehrfunktion ist bezüglich jedes Intervalls $I \subseteq D(f)$ gesichert, in welchem die Ausgangsfunktion f streng monoton ist.

2. Die explizite Auflösung der Funktionsgleichung $y = f(x)$ nach x wird nicht immer mit elementaren Mitteln gelingen, selbst wenn die Existenz der Umkehrfunktion offensichtlich ist. Häufig kann dann die Umkehrfunktion nur numerisch bestimmt werden.

3. Die Funktion $y = f(x)$ und ihre Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$ besitzen in einem Koordinatensystem den gleichen Funktionsgraph. Will man für beide Funktionen die Variable x als unabhängige Größe und y als abhängige Größe haben, so werden in $x = f^{-1}(y)$ die Variablen vertauscht und man erhält die Funktion $y = f^{-1}(x)$, die ebenfalls als Umkehrfunktion zu $y = f(x)$ bezeichnet wird. Die Funktionsgraphen von $y = f(x)$ und $y = f^{-1}(x)$ liegen in einem kartesischen Koordinatensystem spiegelbildlich zur Geraden $y = x$.



Funktion und Umkehrfunktion

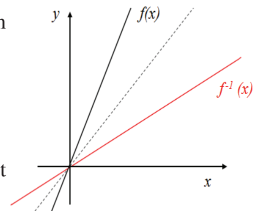
Beispiele:

1. Die affin-lineare Funktion $y = f(x) = 2x + 1$ mit $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$ ist streng monoton steigend.

   Die Berechnung der Umkehrfunktion wird in zwei Schritten durchgeführt:

   Schritt 1. Auflösung nach x: $\quad y = 2x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{2}$.

   Schritt 2. Umbenennung: $y = f^{(-1)}(x) = \dfrac{x-1}{2}$ mit $D(f^{-1}) = W(f) = \mathbb{R}$ und $W(f^{-1}) = D(f) = \mathbb{R}$.

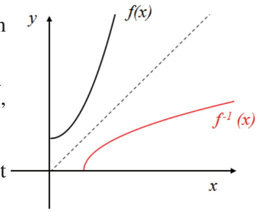


2. Die Funktion $y = f(x) = 1 + x^2$ mit $D(f) = [0, \infty)$ und $W(f) = [1, \infty)$ ist streng monoton steigend.

   Die Berechnung der Umkehrfunktion wird in zwei Schritten durchgeführt:

   Schritt 1. Auflösung nach x: $\quad y = 1 + x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y-1}$, denn es gilt $x \in D(f)$.

   Schritt 2. Umbenennung: $y = f^{(-1)}(x) = \sqrt{x-1}$ mit $D(f^{-1}) = [1, \infty)$ und $W(f^{-1}) = [0, \infty)$.



3. Die Funktion $y = f(x) = 3e^{2x-1}$ mit $D(f) = [0, \infty)$ und $W(f) = [\frac{3}{e}, \infty)$ ist streng monoton steigend.

   Die Berechnung der Umkehrfunktion wird in zwei Schritten durchgeführt:

   Schritt 1. Auflösung nach x:

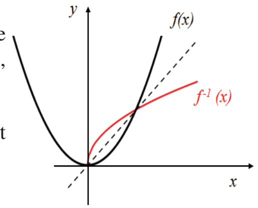
$$\frac{1}{3}y = e^{2x-1} \mid \ln(..) \Rightarrow \ln\left(\frac{1}{3}y\right) = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{3}y\right) + 1}{2}.$$

   Schritt 2. Umbenennung: $y = f^{(-1)}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1}{3}x\right) + \dfrac{1}{2}$ mit $D(f^{-1}) = [\frac{3}{e}, \infty)$ und $W(f^{-1}) = [0, \infty)$.

4. Die Funktion $y = f(x) = x^2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = [0, \infty)$ ist nicht streng monoton und somit nicht umkehrbar.

   Die Einschränkung des Definitionsbereichs führt auf die Funktion $y = \tilde{f}(x) = x^2$ mit $D(\tilde{f}) = W(\tilde{f}) = [0, \infty)$, die streng monoton steigend und somit umkehrbar ist.

   Die Umkehrfunktion lautet $y = \tilde{f}^{(-1)}(x) = \sqrt{x}$ mit $D(\tilde{f}^{-1}) = W(\tilde{f}^{-1}) = [0, \infty)$.



5. Zur Funktion $y = f(x) = \ln(2x-1)$ gebe man Definitionsbereich und Wertevorrat an und bestimme bei Existenz die Umkehrfunktion.

   Da der Logarithmus nur für positive Argumente definiert ist, muss die Bedingung $2x - 1 > 0$ bzw. $x > \dfrac{1}{2}$ erfüllt sein. Der Wertebereich des Logarithmus ist dagegen die gesamte reelle Achse. Damit sind $D(f) = \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$ der Definitionsbereich und $W(f) = (-\infty, +\infty)$ der Wertebereich der Funktion. Die Existenz der Umkehrfunktion ist durch die strenge Monotonie des natürlichen Logarithmus gesichert. Zur Auflösung der Funktionsgleichung nach x wird auf beiden Seiten die Exponentialfunktion angewendet und man erhält

$$e^y = e^{\ln(2x-1)} = 2x - 1 \quad \text{und somit} \quad x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(e^y + 1).$$

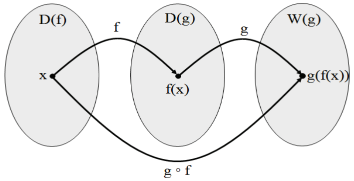
   Die so erhaltene Umkehrfunktion ist für alle $y \in \mathbb{R} = D(f^{-1}) = W(f)$ definiert und nimmt Werte größer als $\dfrac{1}{2}$ an. Durch Vertauschen von x und y erhält man die Funktion $y = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}(e^x + 1)$, die mit $y = f(x)$ spiegelbildlich zur Geraden $y = x$ im kartesischen x, y-System liegt.

4.3.3 Verkettung von Funktionen

Häufig wird man mit der Notwendigkeit konfrontiert, Funktionen zu verketten. So ergibt sich beispielsweise der Benzinverbrauch eines Autos als Funktion der gefahrenen Gesamtstrecke und das an der Tankstelle zu zahlende Geld als Funktion des verbrauchten und damit aufzufüllenden Benzins. Wir haben also eine *Verkettung* zweier Funktionen:

$$\text{gefahrene Gesamtstrecke} \xrightarrow{f} \text{Benzinverbrauch} \xrightarrow{g} \text{zu zahlendes Geld.}$$

Es ergibt sich folgendes Bild



Zunächst wird $x \in A$ durch f auf $u \in B$ abgebildet. Dieses Element wird dann durch die zweite Funktion g auf ein weiteres Element $y \in C$ abgebildet. Durch die Hintereinanderausführung beider Funktionen ergibt sich eine neue Funktion

$$g \circ f: \ A \to C, \quad y = (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Beispiele:

1. Die Funktion $y = f(x) = x^3 - 1$ mit $D(f) = W(f) = \mathbb{R}$ soll mit der Funktion $y = g(x) = \sqrt[3]{x}$ mit $D(g) = W(g) = [0, \infty)$ verkettet werden. Es ergibt sich folgende neue Abbildung:

   $$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 - 1) = \sqrt[3]{x^3 - 1}$$

   mit $D(g \circ f) = [1, \infty)$, $W(g \circ f) = [0, \infty)$.

2. Zur Temperaturmessung sind drei Skalen gebräuchlich: die (wissenschaftliche) Kelvin-Skala, die Celsius-Skala und die Fahrenheit-Skala (in angelsächsischen Ländern). Bezeichnet man die Temperaturen auf der Kelvin-Skala mit x, die der Celsius-Skala mit z und die der Fahrenheit-Skala mit y, dann gelten folgende Umrechnungen:

   $$z = x - 273.15 \quad \text{und} \quad y = 32 + 1.8 \cdot z.$$

   Die Fahrenheit-Werte lassen sich auch unmittelbar aus den Kelvin-Graden gewinnen. Das geschieht durch Einsetzen:

   $$y = 32 + 1.8 \cdot (x - 273.15) = 1.8 \cdot x - 459.67.$$

   Betrachtet man die Gleichungen als Funktionsterme, so wird

   $$g(x) = x - 273.3, \quad f(z) = 32 + 1.8 \cdot z, \quad h(x) = f(g(x)) = 1.8 \cdot x - 459.67.$$

3. Die Verkettung der Funktionen $y = g(x) = \dfrac{1+x}{1-x}$ mit $D(g) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ und $y = f(x) = x^2 + 2$ mit $D(f) = \mathbb{R}$ und $W(f) = [2, \infty)$ ist gegeben durch

   $$y = (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \frac{1 + (x^2 + 2)}{1 - (x^2 + 2)} = -\frac{3 + x^2}{1 + x^2}$$

   mit $D(g \circ f) = \mathbb{R}$ und $W(g \circ f) = [-3, -1)$.

5 Elementare Funktionen

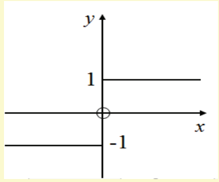
5.1 Signum- und Betragsfunktion

Wir beginnen mit zwei einfachen Funktionen, welche einer reellen Zahl ihr Vorzeichen bzw. ihren Abstand zum Nullpunkt zuordnen.

Definition 5.1 *(Signumfunktion)*
Die Funktion $y = f(x) = sgn(x)$, die jeder reellen Zahl x ihr Vorzeichen zuordnet, heißt Signumfunktion *oder* Vorzeichenfunktion.

Es gilt

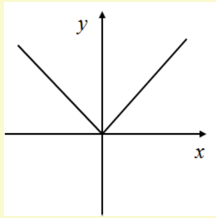
$$sgn(x) = \begin{cases} +1, & \textit{für } x > 0, \\ 0, & \textit{für } x = 0, \\ -1, & \textit{für } x < 0. \end{cases}$$



Definition 5.2 *(Betragsfunktion)*
Die Funktion $y = f(x) = |x|$, die jeder reellen Zahl x ihren Abstand zum Nullpunkt zuordnet, heißt Betragsfunktion.

Es gilt

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{für } x \geq 0, \\ -x, & \textit{für } x < 0. \end{cases}$$



Mit Hilfe der Betragsfunktion kann man z.B. alle Zahlen x, die von einer gegebenen Zahl a weniger als ε entfernt liegen kurz charakterisieren durch

$$|x - a| < \varepsilon.$$

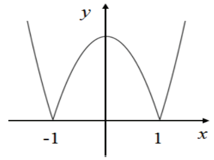
Beispiel:

Die Funktion $y = f(x) = |x^2 - 4|$ besitzt den Definitionsbereich $D(f) = \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W(f) = [0, \infty)$. Zur Darstellung der Funktion betrachten wir zwei Fälle:

Fall 1: $x^2 - 4 \geq 0$, d.h. $x^2 \geq 4$, also $x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty)$. Dort ist $f(x) = x^2 - 4$.

Fall 2: $x^2 - 4 < 0$, d.h. $x^2 < 4$, also $x \in (-2, 2)$. Dort ist $f(x) = -x^2 + 4$.

Insgesamt gilt $\quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & x \in (-\infty, -2] \cup [2, \infty), \\ 4 - x^2, & x \in (-2, 2). \end{cases}$



5.2 Polynome und Hornerschema

Polynome nehmen eine zentrale Stellung in der Analysis und den Anwendungen ein. Dies ist zum einen dadurch bedingt, daß sich differenzierbare Funktionen zumindestens lokal durch Polynome beliebig genau annähern lassen (vgl. den Satz von Taylor) und zum zweiten, daß Polynome allein mit Hilfe der Grundoperationen berechenbar sind und damit eine numerische Auswertung z.B. auf einem Rechner ohne zusätzliche Näherungen möglich ist. Funktionen, die sich allein mit Hilfe endlich vieler Grundoperationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division) berechnen lassen, werden als *rationale Funktionen* bezeichnet.

5.2.1 Polynome und ganzrationale Funktionen

Definition 5.3 *(Polynome, ganzrationale Funktionen)*
Ein Ausdruck der Form

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \tag{5.1}$$

mit reellen Koeffizienten a_k, $k = 0, 1, \ldots, n$ und $a_n \neq 0$ wird als Polynom n-ten Grades *bezeichnet. Eine Funktion $y = f(x) = P_n(x)$ heißt* ganzrational*, sie ist für alle $x \in D = \mathbb{R}$ definiert.*

Bemerkungen:

1. Mit der Angabe der Koeffizienten a_k, $\ k = 0, 1, \ldots, n$ ist ein Polynom eindeutig bestimmt. Die Gleichheit zweier Polynome für alle Werte der Variablen x ist nur bei Übereinstimmung aller Koeffizienten gewährleistet. Gilt für zwei Polynome $P_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ und $Q_n(x) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ die Beziehung $P_n(x) = Q_n(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, dann ist $a_n = b_n, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$. Diese Eigenschaft wird vielfach ausgenutzt, um Koeffizienten eines Polynoms durch Koeffizientenvergleich zu bestimmen.

2. Für Polynome sind Umkehrfunktionen nur in einfachen Fällen durch Wurzelfunktionen darstellbar.

3. Das Verhalten für große Argumente x hängt nur von a_n ab. Es gilt $P_n(x) \approx a_n x^n$ für $|x| \to \infty$.

   Für gerades n ist $P_n(x)$ entweder nach oben ($a_n < 0$) oder nach unten ($a_n > 0$) beschränkt. Für ungerades n ist $P_n(x)$ unbeschränkt.

5.2.2 Horner-Schema zur Berechnung von Funktionswerten eines Polynoms

Zur Auswertung eines Polynoms in der Definition 5.3 vorliegenden Monomentwicklung wird vorteilhaft das Horner-Schema verwendet, welches auf der Produktdarstellung

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= (\ldots((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + \ldots a_1)x + a_0 \end{aligned}$$

beruht. Berechnet man nacheinander die Klammerausdrücke, beginnend mit dem inneren und jeweils weiter nach außen gehend, so erhält man das folgende Rechenschema, in welchem

$$b_n = a_n, \quad b_k = a_k + b_{k+1}x_0, \quad k = n-1, \ldots, 1, 0,$$

gesetzt werden:

$$\begin{array}{c|llllll} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_1 & a_0 \\ x_0 & & +b_n x_0 & +b_{n-1}x_0 & \ldots & +b_2 x_0 & +b_1 x_0 \\ \hline & b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_1 & b_0 = P_n(x_0) \end{array} \tag{5.2}$$

Der Wert b_0 ist der gesuchte Funktionswert $P_n(x_0)$ des Polynoms.

Beispiele:

1. Für die Auswertung von $P_4(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 10$ bei $x_0 = 2$ liefert das Hornerschema

$$\begin{array}{c|ccccc} & 2 & -1 & 0 & 3 & -10 \\ x_0 = 2 & & 4 & 6 & 12 & 30 \\ \hline & 2 & 3 & 6 & 15 & 20 \end{array}$$

   den Wert $P_4(2) = 20$.

2. Für die Darstellung $P_4(x) = 2x^4 - x^3 + 3x - 10 = (x-2) \cdot Q_3(x) + 20$ folgt aus dem Hornerschema

$$Q_3(x) = 2x^3 + 3x^2 + 6x + 15,$$

   d.h. es ist $2x^4 - x^3 + 3x - 10 = (x-2) \cdot (2x^3 + 3x^2 + 6x + 15) + 20$.

Bemerkungen:

Die Werte $b_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$ der Schlusszeile des Schemas sind nicht nur Hilfsgrößen, sondern stellen die Koeffizienten des reduzierten Polynoms $Q_{n-1}(x)$ bezüglich der Zerlegung

$$P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x) + b_0 \tag{5.3}$$

dar. Verwendet man nämlich den Ansatz $Q_{n-1}(x) = b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1$, so erhält man durch Einsetzen in (5.3)

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_0) \cdot (b_n x^{n-1} + b_{n-1}x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1) + b_0$$

$$= b_n x^n + (b_{n-1} - x_0 b_n)x^{n-1} + \cdots + (b_1 - x_0 b_2)x + (b_0 - x_0 b_1)$$

und Koeffizientenvergleich liefert die Beziehungen

$$b_n = a_n, \;\; b_k = a_k + b_{k+1}x_0, \quad k = n-1, \ldots, 1, 0, \quad b_0 = P_n(x_0),$$

die im Horner-Schema realisiert werden. Damit ist Q_{n-1} das Ergebnis der Polynomdivision von $P_n(x)$ durch $x - x_0$ mit dem Rest $b_0 = P_n(x_0)$.

5.2.3 Nullstellen und Produktzerlegung eines Polynoms

Wir betrachten wieder ein Polynom $P_n(x)$ vom Grad n

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$. Ist $x = x_0$ eine Nullstelle von $P_n(x)$, so erhält man im Horner-Schema $b_0 = P_n(x_0) = 0$ und wegen (5.3) gilt $P_n(x) = (x - x_0)Q_{n-1}(x)$. Damit ist die Polynomdivision von $P_n(x)$ durch den Linearfaktor $x - x_0$ ohne Rest durchführbar. Weitere Nullstellen von $P_n(x)$ müssen dann auch Nullstellen des reduzierten Polynoms $Q_{n-1}(x)$ sein. $Q_{n-1}(x)$ kann u.U. auf die gleiche Art weiter zerlegt werden. Allerdings muss in der Menge der reellen Zahlen keine vollständige Zerlegung in Linearfaktoren existieren.

Beispiele:

1. Das Polynom

$$P_2(x) = x^2 - 4$$

   hat die Nullstelle $x_1 = 2$. Es folgt $P_2(x) = (x-2) \cdot P_1(x)$ mit $P_1(x) = x + 2$. Man erhält $x_2 = -2$ als weitere Nullstelle.

2. Das Polynom

$$P_3(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

   hat die Nullstelle $x_1 = 1$. Polynomdivision liefert $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : (x-1) = x^2 - 5x + 6$ und man erhält die Faktordarstellung $P_3(x) = (x-1) \cdot (x^2 - 5x + 6)$. Das Polynom $P_2(x) = x^2 - 5x + 6$ hat die Nullstellen

$$x_{2,3} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = 3, \; 2.$$

   Also lautet die Faktorzerlegung von

$$P_3(x): \quad x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3).$$

Erweitert man den Definitionsbereich eines Polynoms auf die Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen, so ist nach Satz 3.7 (Zerlegungssatz für Polynome) eine vollständige Produktzerlegung in Linearfaktoren möglich:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ &= a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n) \end{aligned} \tag{5.4}$$

wobei die n Nullstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entweder reell sind oder paarweise komplex konjugiert auftreten. Nach Satz 3.8 können die Linearfaktoren, die zu einem Paar konjugiert komplexer Nullstellen gehören, zu einem irreduziblen reellen quadratischen Faktor zusammengefaßt werden.

Mit der Angabe von $n+1$ Koeffizienten $a_k, \;\; k = 0, 1, \ldots, n$ eines Polynoms ist dieses eindeutig bestimmt und somit auch alle Nullstellen. Die Zerlegung (5.4) belegt umgekehrt, daß mit der Vorgabe von n Nullstellen $x_k, \;\; k = 1, 2, \ldots, n$ das Polynom bis auf den Normierungsfaktor a_n eindeutig bestimmt ist. Setzt man $a_n = 1$, so sind aus den Nullstellen des Polynoms die Koeffizienten eindeutig bestimmbar.

Satz 5.1 *(Wurzelsatz von Vieta)*
Zwischen den Nullstellen x_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ des normierten Polynoms $P_n(x)$ (mit $a_n = 1$) und den Koeffizienten a_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= (-1)^1 a_{n-1} \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n &= (-1)^2 a_{n-2} \\ &\vdots \\ x_1x_2\cdots x_n &= (-1)^n a_0. \end{aligned}$$

Beispiele:

1. Untersuchen Sie die Polynome auf ganzzahlige Nullstellen und bestimmen Sie eine Produktzerlegung in irreduzible reelle Faktoren, indem Sie das Horner-Schema anwenden

   a) $P_4(x) = x^4 - 3x^3 - 27x^2 - 13x + 42$

   b) $P_5(x) = 2x^5 + 2x^4 - 12x^3 - 2x^2 - 2x + 12$.

   Wegen der Beziehung $|a_0| = |x_1x_2 \ldots x_n|$ im Wurzelsatz von Vieta kommen bei $a_n = 1$ und ganzzahligen a_0 nur Teiler von a_0 als ganzzahlige Nullstellen in Frage.

   a) Wegen $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$ sind zu untersuchende ganzzahlige Werte: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 7, \pm 14, \pm 21, \pm 42$. Mit dem Horner-Schema erhält man für $x_1 = 1$ und $x_2 = -2$

	1	-3	-27	13	42
$x = 1$		1	-2	-29	-42
	1	-2	-29	-42	$0 = P_4(1)$
$x = -2$		-2	8	42	
	1	-4	-21	$0 =$	$Q_3(-2)$

   Wegen $P_4(1) = 0$ und der Produktdarstellung (5.3) können die Faktoren des reduzierten Polynoms im Horner-Schema abgelesen werden und es gilt

$$P_4(x) = (x-1)Q_3(x) = (x-1)(x+2)(x^2 - 4x - 21).$$

   Zur Bestimmung aller vier Nullstellen von $P_4(x)$ verbleibt die Untersuchung des quadratischen Restpolynoms $x^2 - 4x - 21$ mit den Nullstellen $x_3 = -3$ und $x_4 = 7$. Damit ist das Polynom vollständig in Linearfaktoren zerlegt:

$$P_4(x) = (x-1)(x+2)(x+3)(x-7).$$

   b) Durch Ausklammern des Koeffizienten $a_5 = 2$ entsteht das Polynom

$$P_5(x) = 2(x^5 + x^4 - 6x^3 - x^2 - x + 6)$$

   mit dem Absolutglied $\overline{a}_0 = 6 = 2 \cdot 3$, so daß als ganzzahlige Nullstellen die Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ in Frage kommen. Das Horner-Schema ergibt für $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -3$ jeweils den Funktionswert Null:

	1	1	-6	-1	-1	6
$x = 1$		1	2	-4	-5	-6
	1	2	-4	-5	-6	0
$x = 2$		2	8	8	6	
	1	4	4	3	0	
$x = -3$		-3	-3	-3		
	1	1	1	0		

   Das Restpolynom $x^2 + x + 1$ besitzt zwei konjugiert komplexe Nullstellen $x_{4,5} = \frac{1}{2}(-1 \pm j \cdot \sqrt{3})$, so daß sich die Produktzerlegung von $P_5(x)$ in irreduzible reelle Faktoren ergibt:

$$P_5(x) = 2(x-1)(x-2)(x+3)(x^2 + x + 1).$$

2. Bestimmen Sie die Funktionswerte des Polynoms

$$P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25$$

   an den Stellen $x = 5$ und $x = 2 + j$. Geben Sie eine vollständige Zerlegung des Polynoms $P_4(x)$ in Linearfaktoren sowie in irreduzible reelle Faktoren.

   Die Funktionswerte werden mittels Horner-Schema berechnet, dieses kann auch mit komplexen Zahlen durchgeführt werden.

	1	-8	26	-40	25
$x = 5$		5	-15	55	75
	1	-3	11	15	$100 = P_4(5)$

	1	-8	26	-40	25
$x = 2 + j$		$2 + j$	$-13 - 4j$	$30 + 5j$	-25
	1	$-6 + j$	$13 - 4j$	$-10 + 5j$	$0 = P_4(2 + j)$

   Um eine vollständige Zerlegung des Polynoms in Linearfaktoren zu erhalten, sind alle Nullstellen zu bestimmen. Da $x_1 = 2 + j$ eine Nullstelle ist und nur reelle Koeffizienten auftreten, ist auch die konjugiert komplexe Zahl $x_2 = 2 - j$ eine Nullstelle. Die Weiterführung des Horner-Schemas ergibt dann:

	1	$-6 + j$	$13 - 4j$	$-10 + 5j$
$x = 2 - j$		$2 - j$	$-8 + 4j$	$10 - 5j$
	1	-4	5	0

   Als Restpolynom erhält man $x^2 - 4x + 5$, welches die Nullstellen $x_3 = 2 + j$ und $x_4 = 2 - j$ besitzt. Somit sind sowohl $2 + j$ als auch $2 - j$ doppelte Nullstellen des Polynoms. Die Zerlegung in Linearfaktoren bzw. reelle Faktoren lautet dann

$$P_4(x) = (x - 2 + j)^2(x - 2 - j)^2 = (x^2 - 4x + 5)^2.$$

3. Man stelle das Polynom

$$P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x$$

   in der Form $P_4(x) = b_0 + b_1(x-2) + \cdots + b_4(x-2)^4$ dar und nutze dazu das Horner-Schema (Umordnen von $P_4(x)$ nach Potenzen von $x - 2$).

Offenbar gilt $b_0 = P_4(2)$ und mit Hilfe des Horner-Schemas erhält man die Koeffizienten des reduzierten Polynoms $Q_3(x)$ mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} P_4(x) &= b_0 + (x-2)Q_3(x) \\ &= b_0 + (x-2)\left(b_1 + b_2(x-2) + \cdots + b_4(x-2)^3\right). \end{aligned}$$

Damit ist aber $b_1 = Q_3(2)$ und kann durch Fortführung des Horner-Schemas bestimmt werden. Da $Q_3(x)$ in gleicher Weise entwickelt ist, ergeben sich die Koeffizienten b_2, b_3 und b_4 durch Weiterführung des Horner-Schemas:

	1	-8	24	-32	0
$x = 2$		2	-12	24	-16
	1	-6	12	-8	$-16 = b_0$
$x = 2$		2	-8	8	
	1	-4	4	$0 = b_1$	
$x = 2$		2	-4		
	1	-2	$0 = b_2$		
$x = 2$		2			
	1	$0 = b_3$			
$x = 2$					
	$1 = b_4$				

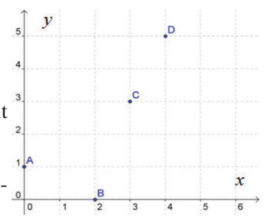
Damit erhält man $P_4(x)$ in der Form $P_4(x) = -16 + (x-2)^4$, welche die Entwicklung des Polynoms nach Potenzen von $x - 2$ darstellt.

5.2.4 Interpolation mit Polynomen

In der Ingenieurpraxis sind häufig Datenpaare (x_k, y_k) in Form Messungen gegeben. Gesucht ist ein Polynom minimalen Grads, das diese Daten als Funktionswerte annimmt.

Wir betrachten die 4 Datenpaare (x_k, y_k):

k	0	1	2	3
x_k	0	2	3	4
y_k	1	0	3	5



Gesucht ist das *Interpolationspolynom* $y = P_3(x)$ mit $P_3(x_k) = y_k$, für $k = 0, 1, 2, 3$.

Zur Lösung der Aufgabe konstruieren wir spezielle Polynome:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(0-2)\cdot(0-3)\cdot(0-4)} \text{ mit Eigenschaft } L_0(0) = 1, \quad L_0(x_k) = 0, \ \ k \neq 0, \\ L_1(x) &= \frac{x\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{(2-0)\cdot(2-3)\cdot(2-4)} \text{ mit Eigenschaft } L_1(2) = 1, \quad L_1(x_k) = 0, \ \ k \neq 1, \\ L_2(x) &= \frac{x\cdot(x-2)\cdot(x-4)}{(3-0)\cdot(3-2)\cdot(3-4)} \text{ mit Eigenschaft } L_2(3) = 1, \quad L_2(x_k) = 0, \ \ k \neq 2, \\ L_3(x) &= \frac{x\cdot(x-2)\cdot(x-3)}{(4-0)\cdot(4-2)\cdot(4-3)} \text{ mit Eigenschaft } L_3(4) = 1, \quad L_3(x_k) = 0, \ \ k \neq 3, \end{aligned}$$

oder kurz

$$L_i(x_k) = \delta_i^k \quad \text{mit} \quad \delta_i^k := \begin{cases} 1, & k = i, \\ 0, & k \neq i. \end{cases}$$

Das Polynom $L_i(x)$ heißt *i-tes Lagrangesches Knotenpolynom*, da es bei x_i gerade den Wert 1 annimmt und den Wert 0 an allen anderen Knoten.

Mit den Knotenpolynomen bilden wir das *Lagrangesche Interpolationspolynom*

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot L_i(x).$$

Es gilt

$$P_3(x_k) = \sum_{i=0}^{3} y_i \cdot \underbrace{L_i(x_k)}_{=\delta_i^k} = y_k, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

d.h. $P_3(x)$ *interpoliert* die gegebenen Daten. Speziell erhält man

$$\begin{aligned} P_3(x) &= 1 \cdot \frac{(x-2)(x-3)(x-4)}{-24} + 0 \cdot \cdots + 5 \cdot \frac{x(x-2)(x-3)}{8} \\ &= -\frac{5}{12}x^3 + \frac{13}{4}x^2 - \frac{16}{3}x + 1. \end{aligned}$$

Bemerkungen:

1. Für die Interpolation von $n + 1$ Daten benötigt man ein Polynom vom Grad n.
2. Zur Interpolation großer Datenmengen teilt man die Daten in kleine Einheiten, die man jeweils mit einem Polynom niedrigen Grades n ($n \leq 3$) interpoliert. Diese Polynome setzt man dann zu einem stückweise definierten Interpolationspolynom zusammen.

5.3 Gebrochenrationale Funktionen

Die gebrochenrationalen Funktionen sind als Quotienten zweier Polynome ebenfalls nur auf Basis der mathematischen Grundoperationen berechenbar.

Definition 5.4 *(Gebrochenrationale Funktionen)*
Der Quotient zweier Polynome (ganzrationaler Funktionen)

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

wird als gebrochenrational *bezeichnet und eine Funktion $y = f(x) = R(x)$ als gebrochenrationale Funktion.*

Im Fall $m < n$ spricht man von einem echt gebrochenrationalen *Ausdruck $R(x)$ und im Fall $m \geq n$ von einem* unecht gebrochenrationalen *Ausdruck.*

Die Nullstellen des Nennerpolynoms $P_n(x)$ müssen genauer untersucht werden. Man bezeichnet sie als *kritische Stellen* von $R(x)$. Es gilt $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{x : \ P_n(x) = 0\}$.

- Eine Nullstelle von $P_n(x)$, die nicht gleichzeitig Nullstelle des Zählerpolynoms $Q_m(x)$ ist, wird als *Polstelle* von $R(x)$ bezeichnet.
- Eine kritische Stelle, die Nullstelle von $P_n(x)$ und von $Q_m(x)$ ist, ist entweder eine Polstelle, oder es handelt sich um eine *Lückenstelle*, die durch die stetige Ergänzung der Funktion mit Hilfe des Grenzwertes geschlossen werden kann.

Jeder unecht gebrochen rationale Ausdruck $R(x)$ kann mit Hilfe der *Polynomdivision* in die Summe eines ganzrationalen und eines echt gebrochen rationalen Ausdrucks zerlegt werden.

Beispielsweise erhält man mit Polynomdivision die Zerlegung

$$\frac{x^3 - 3x + 5}{x - 2} = x^2 + 2x + 1 + \frac{7}{x - 2}.$$

Diese Vorgehensweise werden wir später im Rahmen der Integralrechnung mittels Partialbruchzerlegung genauer betrachten. Das *Grenzverhalten* einer gebrochenrationalen Funktion für $x \to \pm\infty$ wird durch das Verhalten des ganzrationalen Anteils bestimmt, da der echt gebrochenrationale Anteil gegen Null strebt.

Wir untersuchen nun das Verhalten der gebrochen rationalen Funktion $R(x)$ in der Nähe der Nullstellen des Nennerpolynoms $P_n(x)$ etwas genauer.

Im ersten Fall untersuchen wir das Verhalten von $R(x)$ bei Polstellen, d.h. bei Nullstellen von $P_n(x)$, die nicht zugleich Nullstellen von $Q_m(x)$ sind.

Beispiele:

1. Die gebrochenrationale Funktion $R(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ besitzt die Nennernullstelle $x_0 = 3$.

   Polynomdivision liefert $R(x) = 2 + \dfrac{1}{x-3}$.

   Wir untersuchen das Verhalten von $R(x)$ für $x \to 3$:

   $x \to 3+0$: Wir nähern uns der kritischen Stelle von rechts, d.h. wir betrachten $R(3+h)$ für $h \to 0$, $h > 0$:

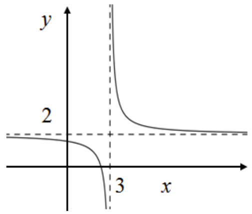
   $$R(3+h) = 2 + \frac{1}{(3+h)-3} = 2 + \frac{1}{h} \to +\infty \quad (h \to 0+).$$

   $x \to 3-0$: Wir nähern uns der kritischen Stelle von links, d.h. wir betrachten $R(3-h)$ für $h \to 0$, $h > 0$:

   $$R(3-h) = 2 + \frac{1}{(3-h)-3} = 2 - \frac{1}{h} \to -\infty \quad (h \to 0+).$$

   Somit erweist sich $x_0 = 3$ als *Pol mit Vorzeichenwechsel der Ordnung 1*. Der Graph von $R(x)$ besitzt die senkrechte Asymptote $x = 3$.

   Für $|x| \to \infty$ nähert sich $R(x) = 2 + \dfrac{1}{x-3}$ der Geraden $y = 2$. Der Graph von $R(x)$ besitzt die waagerechte Asymptote $y = 2$.

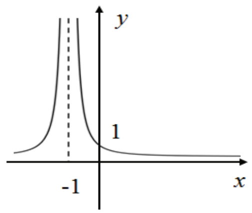


2. Die gebrochenrationale Funktion $R(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ besitzt die doppelte Nennernullstelle $x_0 = -1$.

   Für $R(-1+h)$ mit $h \to 0$ folgt:

   $$R(-1+h) = \frac{1}{(-1+h+1)^2} = \frac{1}{h^2} \to +\infty.$$

   Somit erweist sich $x_0 = -1$ als *Pol ohne Vorzeichenwechsel der Ordnung 2*. Der Graph von $R(x)$ besitzt die senkrechte Asymptote $x = -1$



   Für $|x| \to \infty$ nähert sich $R(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$ der Geraden $y = 0$. Der Graph von $R(x)$ besitzt die waagerechte Asymptote $y = 0$.

Satz 5.2 *Für die rationale Funktion*

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$$

gilt: ist x_0 eine p-fache Nullstelle von $P_n(x)$ und gilt $Q_m(x_0) \neq 0$, so besitzt $R(x)$ bei x_0 einen Pol mit senkrechter Asymptote $x = x_0$. Ist

- *p gerade, dann ist x_0 ein Pol ohne Vorzeichenwechsel,*
- *p ungerade, dann ist x_0 ein Pol mit Vorzeichenwechsel.*

p heißt Ordnung *des Pols.*

Im zweiten Fall betrachten wir kritische Stellen, die sowohl Nullstellen von $P_n(x)$ als auch Nullstellen von $Q_m(x)$ sind. Durch sukzessives wegdividieren einer gemeinsamen Nullstelle x_0 erhalten wir

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = \frac{(x-x_0)\cdot Q_{m-1}(x)}{(x-x_0)\cdot P_{n-1}(x)} = \cdots = \frac{(x-x_0)^k \cdot Q_{m-k}(x)}{(x-x_0)^k \cdot P_{n-k}(x)}$$

so lange, bis $Q_{m-k}(x_0) \neq 0$ oder $P_{n-k}(x_0) \neq 0$ gilt.

- Für $P_{n-k}(x_0) \neq 0$ und $Q_{m-k}(x_0) = 0$ oder $Q_{m-k}(x_0) \neq 0$ folgt: Die Lücke von $R(x)$ bei x_0 kann stetig ergänzt werden.
- Für $P_{n-k}(x_0) = 0$ und $Q_{m-k}(x_0) \neq 0$ folgt: $R(x)$ hat bei x_0 einen Pol.

Beispiele:

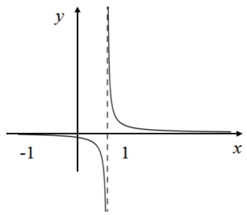
1. Für $R(x) = \dfrac{x^2 - x}{x-1}$ mit $D(R) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ erhalten wir $R(x) = \dfrac{x \cdot (x-1)}{x-1} = x$ und für $x \to 1$ gilt $R(x) \to 1$. Also ist $R(x)$ durch den Wert $R(1) = 1$ stetig fortsetzbar.

2. Für

$$R(x) = \frac{x-1}{2x^2 - 4x + 2} = \frac{x-1}{2(x-1)^2} \text{ mit } D(R) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

erhalten wir $R(x) = \dfrac{x-1}{2(x-1)^2} = \dfrac{1}{2(x-1)}$.

Für $x = 1$ besitzt $R(x)$ einen Pol mit Vorzeichenwechsel.



Satz 5.3 *Das Verhalten von $R(x)$ für $|x| \to \infty$ ist bestimmt durch die Glieder der höchsten Potenz von Zähler- und Nennerpolynom:*

$$R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)} \approx \frac{b_m}{a_n} x^{m-n} \quad \textit{für } |x| \to \infty.$$

Im Fall $m < n$ gilt $R(x) \to 0$ ($|x| \to \infty$). Ist $m = n$, so gilt $R(x) \to \dfrac{b_n}{a_n}$ ($|x| \to \infty$). Für $m > n$ gilt $|R(x)| \to \infty$ ($|x| \to \infty$).

Beispiele:

1. Für $R(x) = \dfrac{x^3 - 3x + 5}{x-2} = x^2 + 2x + 1 + \dfrac{7}{x-2}$ ist $R(x) \approx x^2$, d.h. $R(x) \to \infty$ für $|x| \to \infty$.

2. Für $R(x) = \dfrac{1}{x-1}$ ist $R(x) \approx \dfrac{1}{x}$ für $|x| \to \infty$, d.h. $R(x) \to 0$ für $|x| \to \infty$.

3. Für $R(x) = \dfrac{2x-5}{x-3}$ ist $R(x) \approx 2$ für $|x| \to \infty$, d.h. $R(x) \to 2$ für $|x| \to \infty$.

4. Für $R(x) = \dfrac{x^2+2}{2x-1}$ ist $R(x) \approx \frac{1}{2}x$ für $|x| \to \infty$. $R(x)$ besitzt die „schiefe" Asymptote $y = \dfrac{1}{2}x$.

5. Man bestimme die Parameter a und b so, daß die rationale Funktion

$$R(x) = \frac{b \cdot x^2 - 4}{x^2 - a}$$

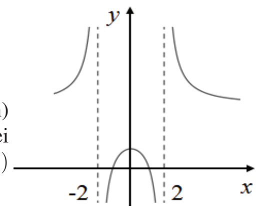
bei $x_0 = 1$ eine Nullstelle und $x_1 = 2$ einen Pol hat.

Die Bedingung für die Nullstelle liefert die Gleichung $b \cdot 1^2 - 4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow b = 4$. Mit der Zerlegung des Nenners $x^2 - a = (x - \sqrt{a}) \cdot (x + \sqrt{a})$ und der Bedingung für den Pol in $x = 2$ folgt für a die Gleichung $2 - \sqrt{a} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2$, d.h. $a = 4$.

Wir erhalten

$$R(x) = \frac{4x^2 - 4}{x^2 - 4}.$$

Durch die Faktorisierung des Zählers (Polynomdivision) $4x^2 - 4 : (x-1) = 4x + 4$ folgt eine weitere Nullstelle bei $x = -1$. Mit der Faktorisierung des Nenners $(x+2) \cdot (x-2)$ erhalten wir einen weiteren Pol bei $x = -2$.



5.4 Potenz- und Wurzelfunktionen

Wird neben den Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division (rationale Operationen) noch die Wurzeloperation bezüglich des Arguments x zugelassen, so entstehen *irrationale Funktionen*, die gemeinsam mit den rationalen Funktionen die Klasse der *algebraischen Funktionen* bilden.

Die in diesem Abschnitt betrachteten Potenzfunktionen und Wurzelfunktionen bilden ein Paar inverser Funktionen.

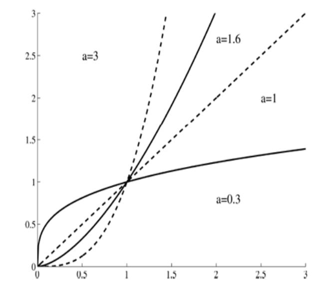
Definition 5.5 *(Potenz- und Wurzelfunktionen)*
Die Funktion

$$y = f(x) = x^a$$

mit beliebigem reellem Wert a ($a \neq 0$) wird als Potenzfunktion *bezeichnet. Sie ist für $x \in D = (0, \infty)$ definiert mit Werten $y \in W = (0, \infty)$. Wegen der strengen Monotonie im gesamten Definitionsbereich ist die Funktion umkehrbar mit*

$$y = f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{a}}$$

als Umkehrfunktion. Für eine natürliche Zahl $a = n$, $n \in \mathbb{N}$ wird die Umkehrfunktion als Wurzelfunktion *bzw. als n-*te Wurzel *aus x bezeichnet.*

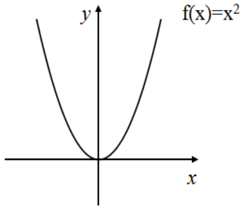


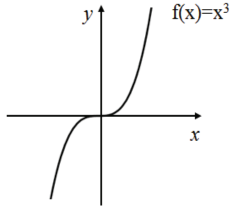
Potenzfunktionen $y = x^\alpha$ für verschiedene Exponenten

Bei positivem Exponenten a ist die Potenzfunktion auch für $x = 0$ definiert und für $x \in D = [0, \infty)$, $y \in W = [0, \infty)$ streng monoton steigend. Bei negativem Exponenten a ist die Funktion für $x \in D = (0, \infty)$ streng monoton fallend und stebt für $x \to \infty$ gegen 0.

Für Potenzfunktionen $y = f(x) = x^n$ mit ganzzahligen Exponenten gilt

- $f(x)$ ist *gerade*, d.h $f(-x) = f(x)$, falls n gerade,
- $f(x)$ ist *ungerade*, d.h $f(-x) = -f(x)$, falls n ungerade.





5.5 Exponential- und Logarithmusfunktionen

Funktionen, die nicht mit Hilfe endlich vieler Grundoperationen darstellbar sind, werden als nichtrationale Funktionen oder als *transzendente Funktionen* bezeichnet. Eine wichtige Klasse sind die Exponentialfunktionen und ihre Umkehrfunktionen. Sie beschreiben u.a. natürliche Wachstums- und Alterungsprozesse sowie das Abkling- und Sättigungsverhalten von technischen Systemen.

Definition 5.6 *(Exponentialfunktion)*
Die Funktion

$$y = f(x) = e^x = \exp(x)$$

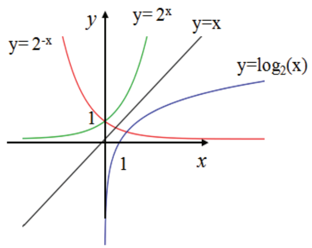
wird als Exponentialfunktion *oder* e-Funktion *und*

$$y = f(x) = a^x \quad \textit{mit} \quad a > 0, \quad a \neq 1$$

als allgemeine Exponentialfunktion *bezeichnet. Sie besitzt den Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und den Wertebereich $W = (0, \infty)$.*

- Für $a > 1$ ist die allgemeine Exponentialfunktion streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich,
- für $0 < a < 1$ ist die allgemeine Exponentialfunktion streng monoton fallend im gesamten Definitionsbereich,

so daß jeweils die Umkehrfunktion existiert.



Exponential- und Logarithmusfunktion

Definition 5.7 *(Logarithmusfunktion)*
Die Umkehrung der Exponentialfunktion wird als Logarithmusfunktion

$$y = f^{-1}(x) = \log_a x$$

zur Basis a bezeichnet. Im Fall $a = e$ wird die Funktion natürlicher Logarithmus *genannt:*

$$y = f^{-1}(x) = \ln x.$$

Die Logarithmusfunktion $\log_a(x)$ ist streng monoton steigend für $x \in (0, \infty)$. Das Wachstum der Logarithmusfunktion ist aber schwächer als das Wachstum jeder Potenz.

Bemerkungen:

1. Basis der Exponentialfunktion bzw. der natürlichen Logarithmusfunktion ist die durch den Grenzwert $e = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ erklärte Eulersche Zahl.
2. Wegen
$$a^x = e^{x \ln a} \quad \text{bzw.} \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$
können die allgemeine Exponentialfunktion bzw. die allgemeine Logarithmusfunktion auf die e-Funktion bzw. die natürliche Logarithmusfunktion zurückgeführt werden.

Beispiele:

Die Exponentialfunktion beschreibt Wachstums- und Zerfallsprozesse. Bezeichnet $N(t)$ eine Population zum Zeitpunkt t, so gilt bei exponentiellem Wachstum/Zerfall die Beziehung

$$N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$$

mit der Anfangspopulation N_0 und der Wachstums- (oder Zerfallsrate) $\lambda > 0$ ($\lambda < 0$).

1. Im Jahr 1980 betrug die Weltbevölkerung $4.1 \cdot 10^9$ bei einem jährlichem Wachstum von 1.7%:
$$\frac{N(t+1)}{N(t)} = \frac{101.7}{100} = \frac{N_0 \cdot e^{\lambda(t+1)}}{N_0 \cdot e^{\lambda t}} = e^{\lambda} \Rightarrow \lambda = \ln\left(\frac{101.7}{100}\right) = 0.017$$
und wir erhalten die Population zur Zeit t (von 1980 ab gerechnet)
$$N(t) = 4.1 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017\,t}.$$
Zu welchem Zeitpunkt T hat sich die Bevölkerung verdoppelt?
$$N(T) = 4.1 \cdot 10^9 \cdot e^{0.017\,T} \stackrel{!}{=} 2 \cdot 4.1 \cdot 10^9 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0.017} = 40.7 \text{ Jahre.}$$
Im Jahr 2021 leben doppelt soviele Menschen auf der Erde als im Jahre 1980.

2. Das Isotop Rn^{222}_{66} hat eine Halbwertszeit von 3.8 Tagen. Wie lange dauert es, bis von 50g Rn noch 0.5g übrig sind?

   Mit dem Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \cdot e^{\lambda t}$ und den Daten erhalten wir:

   $$N(3.8) = N_0 \cdot e^{\lambda \cdot 3.8} \overset{!}{=} \frac{1}{2} N_0 \Rightarrow 3.8 \cdot \lambda = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = -0.182.$$

   Für unser Beispiel lautet das Zerfallsgesetz $N(t) = 50 \cdot e^{-0.182\,t}$. Weiter folgt

   $$N(T) = 50 \cdot e^{-0.182\,T} \overset{!}{=} 0.5 \Rightarrow e^{-0.182\,T} = 0.01 \mid \ln(..) \Rightarrow T = \frac{\ln 0.01}{-0.182} = 25.3 \text{ Tage.}$$

   Nach 25.3 Tagen sind von 50g des Isotops nur noch 0.5g übrig.

3. *Barometrische Höhenformel.*

   Zwischen dem Luftdruck p in der Höhe h (über Meeresniveau $h = 0$) gilt unter der Annahme konstanter Lufttemperatur die *barometrische Höhenformel*

   $$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/7991[\text{m}]}, \qquad p_0 = 1.013[\text{bar}].$$

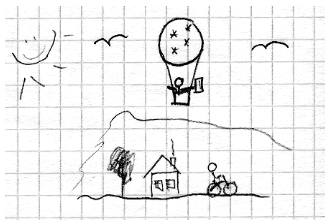
   Der Luftdruck nimmt also mit zunehmender Höhe exponentiell ab. Durch Umkehrung des funktionalen Zusammenhangs erhalten wir das Prinzip des Höhenmessers:

   $$p(h) = p_0 \cdot e^{-h/7991[\text{m}]} \Rightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-h/7991[\text{m}]} \mid \ln(..) \Rightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{h}{7991}$$

   und weiter folgt

   $$h(p) = -7991 \cdot \ln\left(\frac{p}{p_0}\right).$$

   Bei einem Flug mit dem Ballon wird ein Luftdruck von 0.8 bar gemessen. In welcher Höhe (über NN) befindet sich der Ballon?



   $$h(0.8) = -7991 \cdot \ln\left(\frac{0.8}{1.013}\right) = 1886[\text{m}].$$

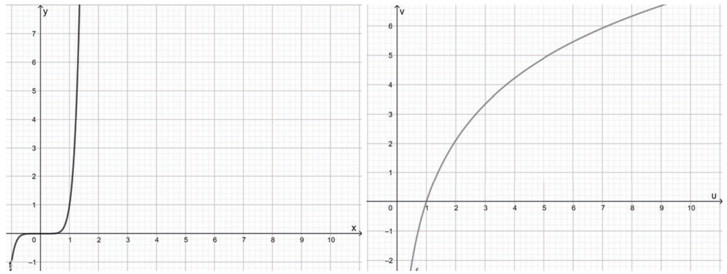
   In welcher Höhe H hat sich der Luftdruck gegenüber dem Normaldruck halbiert?

   $$H = h(p_0/2) = -7991 \cdot \ln\left(\frac{p_0}{2p_0}\right) = -7991 \cdot \ln \frac{1}{2} = 5538.9[\text{m}].$$

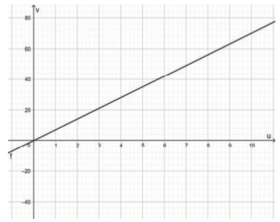
Umfasst der Wertebereich der Funktion $y = f(x)$ mehrere Größenordnungen, so verwendet man häufig die *logarithmische Darstellung*. Die Funktion $y = f(x) = x^7$ mit $x \in [1, 10]$ kann im kartesischen x/y-Koordinatensystem nicht aussagekräftig dargestellt werden. Bei der *einfach-logarithmischen Darstellung* betrachtet man die Variablen u, v mit

$$u := x, \quad v = \log_{10}(y) = \log_{10}(x^7) = 7 \cdot \log_{10}(x) = 7 \cdot \log_{10}(u).$$

Im u/v-System ändert der Graph von $y = f(x)$ sein Aussehen.



Klassische und einfach-logarithmische Darstellung von $y = f(x) = x^7$ bzw. $v = 7 \log_{10}(u)$



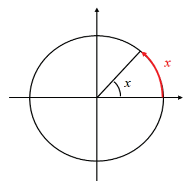
Bei der *doppelt-logarithmischen* Darstellung transformiert man $u := \log_{10}(x)$, $v = \log_{10}(y) = \log_{10}(x^7) = 7 \cdot \log_{10}(x) = 7 \cdot u$ und der Graph von $y = f(x)$ wird im u/v-System zur Gerade.

5.6 Winkel- und Arkusfunktionen

Die trigonometrischen Funktionen gehören zur Klasse der transzendenten Funktionen. Sie besitzen für einen spitzen Winkel x eine anschauliche Interpretation als Verhältniszahlen von Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck bzw. am Einheitskreis.

5.6.1 Winkel- und Bogenmaß

Aus historischen Gründen wird der Vollwinkel in 360° eingeteilt. Diese Einteilung ist für die Anwendung in der Mathematik wenig geeignet. Als „natürliches Maß“ für den Winkel x wählt man die Länge des entsprechenden Bogenstücks auf dem Einheitskreis.



Bogenmass eines Winkels

Der Umfang des Einheitskreises beträgt 2π, was dem 360°-Vollwinkel entspricht. Deshalb lauten die Umrechnungsformeln für den Winkel α in Grad und (denselben Winkel) x im Bogenmass

$$\frac{\alpha}{360} = \frac{x}{2\pi} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{360}{2\pi}x \quad \text{und} \quad x = \frac{2\pi}{360}\alpha.$$

Folgende weitere Eckdaten sollten Sie sich merken: $\frac{\pi}{2} \hat{=} 90°, \pi \hat{=} 180°, \frac{\pi}{4} \hat{=} 45°$.

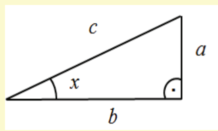
5.6.2 Trigonometrische Funktionen

Die Definition der trigonometrischen Funktionen erfolgt zunächst über die Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck.

Definition 5.8 *(Trigonometrische Funktionen)*
Es sei $0 < x < \frac{\pi}{2}$ und das Dreieck $\triangle ABC$ mit Seiten a, b, c sei rechtwinklig. Die Seite a liege dem Winkel x gegenüber. Dann setzen wir

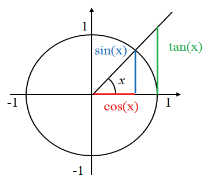
$$\sin x = \frac{a}{c} \left[\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Hypotenuse}}\right], \quad \cos x = \frac{b}{c} \left[\frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Hypotenuse}}\right],$$

$$\tan x = \frac{a}{b} \left[\frac{\textit{Gegenkathete}}{\textit{Ankathete}}\right], \quad \cot x = \frac{b}{a} \left[\frac{\textit{Ankathete}}{\textit{Gegenkathete}}\right].$$

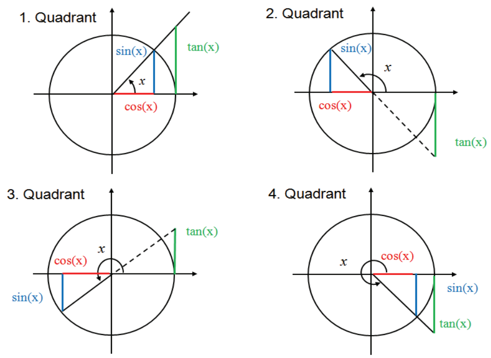


Winkelfunktionen am Dreieck

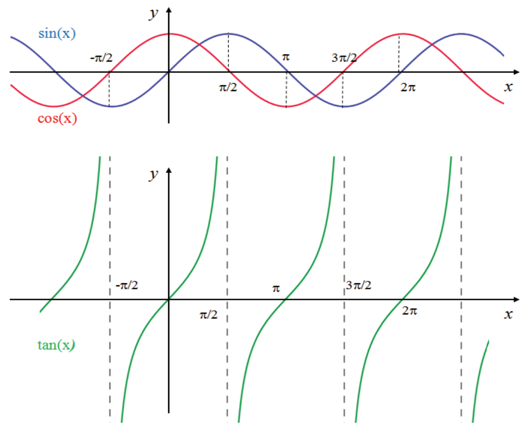
Für einen Punkt P auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten entsprechen die trigonometrischen Funktionen folgenden Strecken (Bild).
Durchläuft P nun alle Punkte des Einheitskreises, so erhält man die Erweiterung der trigonometrischen Funktionen für beliebige Winkelargumente außerhalb $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Winkelfunktionen am Einheitskreis



Die Funktionen sind in den Bildern graphisch dargestellt.



Sinus-, Kosinus- und Tangensfunktion

Funktion	Definitionsbereich	Wertebereich	primitive Periode
$\sin(x)$	$D = (-\infty, \infty)$	$W = [-1, 1]$	$p = 2\pi$
$\cos(x)$	$D = (-\infty, \infty)$	$W = [-1, 1]$	$p = 2\pi$
$\tan(x)$	$D = (-\infty, \infty) \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$	$W = (-\infty, \infty)$	$p = \pi$
$\cot(x)$	$D = (-\infty, \infty) \setminus \{k\pi\}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$	$W = (-\infty, \infty)$	$p = \pi$

Definitions-, Wertebereich und die jeweilige primitive Periode der Winkelfunktionen sind der Tabelle zu entnehmen.

Satz 5.4 *Es gilt*

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x, \quad \tan(-x) = -\tan x,$$

d.h. die Sinus- und Tangensfunktion sind ungerade, die Kosinusfunktion ist gerade.

Weiter gelten die Verschiebungssätze

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x, \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x,$$
$$\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x.$$

Zur Berechnung von Funktionswerten der trigonometrischen Funktionen für mehrfache Winkel, Summen von Winkeln und zur Umrechnung der Funktionen existieren Additionstheoreme, Reduktions- und Umrechnungsformeln, die Formelsammlungen zu entnehmen sind. Wir geben einige wichtige Beziehungen an:

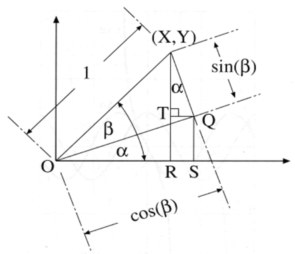
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

sowie in der Tabelle ausgewählte Additionstheoreme.

$\sin(x \pm y)$	$= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$	$\sin 2x$	$= 2 \sin x \cos x$
$\cos(x \pm y)$	$= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$	$\cos 2x$	$= \cos^2 x - \sin^2 x$
$\tan(x + y)$	$= \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$	$\tan 2x$	$= \dfrac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$
$\sin x + \sin y$	$= 2 \sin \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$	$\sin^2 x$	$= \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
$\cos x + \cos y$	$= 2 \cos \dfrac{x+y}{2} \cos \dfrac{x-y}{2}$	$\cos^2 x$	$= \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Exemplarisch zeigen wir das Additionstheorem für den Sinus

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$



Für den Punkt (X, Y) auf dem Einheitskreis gilt:

$$Y = \sin(\alpha + \beta) = \overline{RT} + \overline{TY}$$

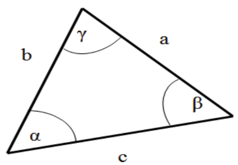
Weiter ist

$$\overline{RT} = \overline{SQ} = \sin \alpha \cdot \overline{OQ} = \sin \alpha \cdot \cos \beta.$$

Mit $\overline{TY} = \cos \alpha \cdot \sin \beta$ folgt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta.$$

Von Interesse für die Anwendungen sind ferner die Beziehungen im allgemeinen Dreieck:



Sinussatz: $\dfrac{a}{\sin \alpha} = \dfrac{b}{\sin \beta} = \dfrac{c}{\sin \gamma}$

Kosinussatz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

5.6.3 Allgemeine Sinusfunktion

Bei der Untersuchung von Schwingungen treten die trigonometrischen Funktionen häufig in verallgemeinerter Form auf. Wir diskutieren die *allgemeine Sinusfunktion*

$$y = f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$$

mit *Amplitude* $a \geq 0$, der *Kreisfrequenz* $b \geq 0$ und den Parametern c und d aus $\mathbb{R}$.

Der Definitionsbereich $D(f)$ ist ganz $\mathbb{R}$ und der Wertebereich ist $W(f) = [d - a, d + a]$.

Die Kreisfrequenz b bewirkt eine Streckung $(0 < b < 1)$ bzw. Stauchung $(b > 1)$ des Graphs der Sinusfunktion in x-Richtung. Für die Periode p von f gilt:

$$\begin{aligned} f(x+p) = f(x) \quad &\Leftrightarrow \quad a \cdot \sin(b \cdot (x+p) + c) \stackrel{!}{=} a \cdot \sin(b \cdot x + c) \\ &\Leftrightarrow \quad b \cdot (x+p) + c \stackrel{!}{=} b \cdot x + c + 2\pi, \end{aligned}$$

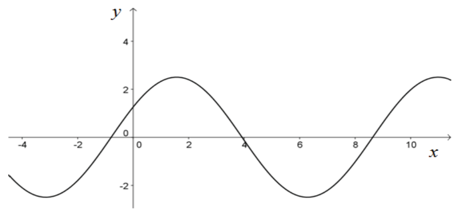
d.h. die Funktion wiederholt sich, wenn sich das Argument des Sinus um 2π verändert. Dies führt auf die Bedingung für p:

$$b \cdot p \stackrel{!}{=} 2\pi \Rightarrow p = \frac{2\pi}{b}.$$

Im Fall $b > 1$ gilt $p < 2\pi$, d.h. die Periode ist kleiner als die der Sinusfunktion, d.h. f schwingt „schneller“ als die Sinusfunktion. Im Fall $b < 1$ gilt $p > 2\pi$, d.h. die Periode ist größer als die der Sinusfunktion, d.h. f schwingt „langsamer“ als die Sinusfunktion.
Der Parameter c bewirkt eine Verschiebung des Graphs von $a \cdot \sin(b \cdot x)$ um die Phase $\varphi = -\dfrac{c}{b}$ in x-Richtung. Dies sieht man wie folgt ein:

$$a \cdot \sin(b \cdot x + c) = a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{c}{b}\right)\right) = \sin(b \cdot (x - \varphi)).$$

φ heißt *Phasenverschiebung*.



Beispiel:

Die Funktion

$$y = f(x) = \frac{5}{2} \sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right)$$

hat die Amplitude $a = \dfrac{5}{2}$ und die Periode $p = \dfrac{2\pi}{2/3} = 3\pi$. Die Phase ergibt sich aus

$$\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2}{3}\left(x + \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

zu $\varphi = -\dfrac{\pi}{4}$.

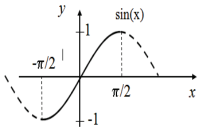
5.6.4 Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen

Die Aufgabe, zu einem gegebenen Funktionswert einer trigonometrischen Funktion den zugehörigen Winkel zu bestimmen, führt auf die Umkehrung dieser Funktion. Wegen der Periodizität der Winkelfunktionen ist die Lösung des Problems nicht eindeutig bestimmt. Zur eindeutigen Definition der Umkehrfunktion wird jede Winkelfunktion auf einen Teilbereich ihres Definitionsbereichs eingeschränkt, in dem die Funktion streng monoton ist. Die Umkehrfunktion existiert dann bezüglich dieses Monotonieintervalls und wird als *Arkusfunktion* bezeichnet. Das Monotonieintervall der Originalfunktion entspricht dem Wertebereich der Umkehrfunktion und wird auch als *Hauptwert* der Arkusfunktion bezeichnet entsprechend der nachfolgenden Tabelle:

Funktion $f(x)$	eingeschränkter Definitionsbereich	Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$	$D(f^{-1})$	$W(f^{-1})$
$\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\arcsin x$	$[-1, 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos x$	$[0, \pi]$	$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
$\tan x$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\arctan x$	$(-\infty, \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\cot x$	$[0, \pi]$	$\operatorname{arccot} x$	$(-\infty, \infty)$	$[0, \pi]$

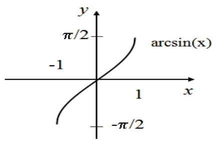
Umkehrfunktionen zu anderen Monotonieintervallen der Winkelfunktionen können mit Hilfe der so definierten Arkusfunktionen bestimmt werden.

- $\arcsin(x)$:
  Die Sinusfunktion ist im Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton steigend und somit umkehrbar:

  $$f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1], \quad x \mapsto \sin(x).$$

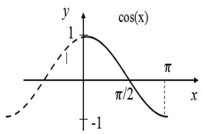
  Der *Arkussinus* ist erklärt durch

  $$f^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad x \mapsto \arcsin(x)$$

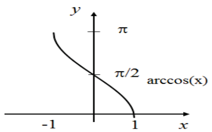
  Es gilt $\sin(\arcsin(x)) = x$.

- $\arccos(x)$:
  Die Kosinusfunktion ist in $[0, \pi]$ streng monoton fallend und somit umkehrbar:

  $$f : [0, \pi] \to [-1, 1], \quad x \mapsto \cos(x).$$

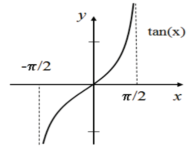
  Der *Arkuskosinus* ist erklärt durch

  $$f^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi], \quad x \mapsto \arccos(x)$$

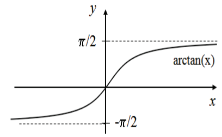
  Es gilt $\cos(\arccos(x)) = x$.

- $\arctan(x)$:
  Die Tangensfunktion ist im Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ streng monoton steigend und somit umkehrbar:

  $$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \tan(x).$$

  Der *Arkustangens* ist erklärt durch

  $$f^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x \mapsto \arctan(x)$$

  Es gilt $\tan(\arctan(x)) = x$.

5.6.5 Trigonometrische Gleichungen

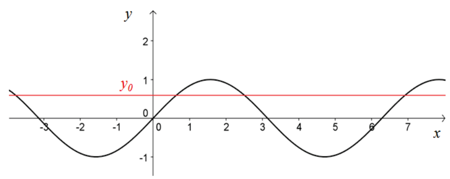
Nachdem wir die trigonometrischen Funktionen ausführlich diskutiert haben, üben wir nun das Rechnen mit ihnen. Bei der Auflösung einer trigonometrischen Gleichung nutzt man die Additionstheoreme und weitere Beziehungen zwischen den Funktionen und beachtet die Periodizität. Leider gibt es hier kein standardisiertes Lösungsverfahren.

Wir suchen die Lösungen der Gleichung $\sin x = y_0$ für ein vorgegebenes $y_0 \in \mathbb{R}$.

- Für $y_0 \notin [-1, 1]$ besitzt die Gleichung keine Lösung.
- Für $y_0 \in]-1, 1[$ erhalten wir eine Lösung $x_0 := \arcsin(y_0) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Eine weitere Lösung ergibt sich mit $x_1 = \pi - x_0$, denn es gilt

  $$\sin(x_1) = \sin(\pi - x_0) = \sin\pi \cdot \cos(-x_0) - \sin x_0 \cos\pi = \sin x_0 = y_0.$$

  Mit der Periodizität erhält man in diesem Fall alle Lösungen als $x_0 + 2k\pi$, $\pi - x_0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
- Fall $y_0 = \pm 1$: Wegen $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ sind $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, Lösungen von $\sin x = 1$. Wegen $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ sind $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, Lösungen von $\sin x = -1$.



Zur Lösung allgemeiner trigonometrischer Gleichungen kann man sich an der folgenden Vorgehensweise orientieren:

(A) Vereinheitlichung der Argumente

(B) Zurückführung auf eine Gleichung mit nur einer trigonometrischen Funktion

(C) Auflösung der Gleichung nach dieser Funktion

(D) Bestimmung des Winkels x

(E) Kontrolle durch Einsetzen.

Beispiele:

1. Wir bestimmen alle Lösungen der Gleichung

$$\cos(x) \cdot \cos(2x) - 2\sin(x) \cdot \sin(2x) = 0.$$

Im ersten Schritt liefern die Additionstheoreme $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$ und $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ die Gleichung

$$\begin{aligned} \cos^3(x) - \cos(x)\sin^2(x) - 4\sin^2(x)\cos(x) &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \cos(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x) - 4\sin^2(x)\right) &= 0. \end{aligned}$$

Weiter formen wir um mit $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$:

$$\cos(x)\left(1 - 6\sin^2(x)\right) = 0.$$

Der erste Faktor besitzt die Nullstellen $x_{1,k} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Weitere Nullstellen erhalten wir aus

$$1 - 6\sin^2(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin^2(x) = \frac{1}{6} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Die Lösung von $\sin(x) = \sqrt{\frac{1}{6}}$ im Intervall $[0, 2\pi[$ erhalten wir zu $x_2 = \arcsin(\sqrt{\frac{1}{6}}) = 0,4205..$ und aufgrund der Symmetrie $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$ noch zusätzlich $x_3 = \pi - x_2 = 2,7211...$ Entsprechend erhält man für $\sin(x) = -\sqrt{\frac{1}{6}}$ in $[0, 2\pi[$ die Lösungen $x_4 = \arcsin(-\sqrt{\frac{1}{6}}) + 2\pi = -0,4205.. + 2\pi = 5,8627..$ und den an $\frac{3}{2}\pi$ gespiegelten Wert $x_5 = 3,5621...$ Mit der Periodizität der Sinusfunktion erhält man alle Lösungen: $x_{1,k} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\quad x_{2,k} = 0,4205.. + 2k\pi$, $\quad x_{3,k} = 2,7211.. + 2k\pi$, $\quad x_{4,k} = 5,8627.. + 2k\pi$, $\quad x_{5,k} = 3,5621.. + 2k\pi$, mit $k \in \mathbb{Z}$.

2. Für $x \in [0,1]$ zeigen wir

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Wir gehen aus von der Beziehung $y = \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \in [-1,1]$, gültig für alle $x \in \mathbb{R}$. Für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ sind die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ streng monoton und somit umkehrbar mit Werten $y \in [0,1]$. Anwendung der Umkehrfunktion liefert einerseits $x = \arcsin y$ und andererseits $\frac{\pi}{2} - x = \arccos y$. Elimination von x ergibt

$$\frac{\pi}{2} = \arcsin y + \arccos y, \quad y \in [0,1].$$

Umbenennung von y in x ergibt die gesuchte Darstellung.

5.7 Hyperbel- und Areafunktionen

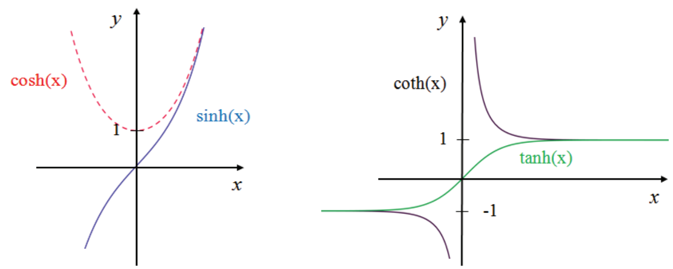
Analog der Interpretation der trigonometrischen Funktionen am Einheitskreis können *Hyperbelfunktionen* (auch als hyperbolische Funktionen bezeichnet) an der Einheitshyperbel $x^2 - y^2 = 1$ erklärt werden. Wir geben im Folgenden die Darstellung mit Hilfe der Exponentialfunktion an:

5.7.1 Hyperbelfunktionen

Definition 5.9 *(Hyperbelfunktionen)*
Die nachfolgenden Funktionen mit dem Definitionsbereich D und dem Wertebereich W

$$\begin{aligned} y &= \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right), && D = (-\infty, \infty), \quad W = (-\infty, \infty), \\ y &= \cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right), && D = (-\infty, \infty), \quad W = [1, \infty), \\ y &= \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, && D = (-\infty, \infty), \quad W = (-1, 1), \\ y &= \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}, && D = (-\infty, \infty) \setminus \{0\}, \quad W = (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{aligned}$$

werden als Hyperbelsinus (Sinushyperbolikus), Hyperbelkosinus (Kosinushyperbolikus), Hyperbeltangens (Tangenshyperbolikus) *und* Hyperbelkotangens (Kotangenshyperbolikus) *bezeichnet (Bild).*



Hyperbelfunktionen

Für die Hyperbelfunktionen gelten ähnliche Beziehungen wie für die Kreisfunktionen:

Satz 5.5 *(Eigenschaften der Hyperbelfunktionen)*
Es gilt:

1. $\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \cosh(-x) = \cosh x, \quad \tanh(-x) = -\tanh x.$
2. $\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1, \quad$ *($x^2 - y^2 = 1$ stellt eine Hyperbel dar).*

3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$ *und*

$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$.

Beweis: Wir zeigen exemplarisch das Additionstheorem für den Hyperbelsinus:

$$\begin{aligned}\sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y &= \frac{e^x - e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} + \frac{e^x + e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^y - e^{-y}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y} - e^{x-y} + e^{y-x} - e^{-x-y}}{4} \\ &= \frac{e^{x+y} - e^{-x-y}}{2} = \sinh(x+y) \quad \diamond\end{aligned}$$

5.7.2 Areafunktionen als Umkehrfunktionen der Hyperbelfunktionen

- Die Funktion $\sinh(x)$ ist in ihrem Definitionsintervall $D = (-\infty, \infty)$ streng monoton steigend und damit umkehrbar.

  Zur Berechnung der Umkehrfunktion ersetzen wir in der Darstellung

  $$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

  den Term e^x durch die Variable z und lösen die Gleichung zunächst nach z auf. Wegen $e^{-x} = \frac{1}{z}$ erhält man $y = \frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$ bzw. nach Multiplikation mit dem Faktor $2z$ die quadratische Gleichung $z^2 - 2yz - 1 = 0$, welche die beiden Lösungen $z = y \pm \sqrt{y^2+1}$ besitzt. Für negatives Vorzeichen des Wurzelausdrucks wird z negativ, was im Widerspruch zur verwendeten Substitution $z = e^x$ steht, bei der z immer positiv ist. Damit kann nur das positive Vorzeichen des Wurzelausdrucks gelten und mit $x = \ln(z)$ erhält man als Umkehrfunktion von $y = f(x) = \sinh(x)$:

  $$x = f^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \quad \text{bzw.} \quad y = f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

  Diese Funktion wird auch als *Area-Sinushyperbolikus* bezeichnet und mit $y = f^{-1}(x) = \text{arsinh}(x)$ abgekürzt.

- Die Funktionen $y = \tanh(x)$ und $y = \coth(x)$ sind ebenfalls im gesamten Definitionsbereich streng monoton, so daß die Umkehrfunktionen existieren und auf gleiche Weise bestimmt werden können.

- Die Funktion $y = \cosh(x)$ dagegen ist nicht im gesamten Defintionsbereich streng monoton, so daß zur Bildung der Umkehrfunktion der Definitionsbereich an der Stelle $x = 0$ aufzutrennen und die Funktion auf Teilbereiche einzuschränken ist. In $D_1 = [0, \infty)$ ist $\cosh(x)$ streng monoton steigend und in $D_2 = (-\infty, 0]$ streng monoton fallend, so daß für beide Bereiche jeweils eine andere Umkehrfunktion existiert. Mit $x \in D_1$ und

  $$y = f_1(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sowie der Substitution $z = e^x$ erhält man die quadratische Gleichung $z^2 - 2yz + 1 = 0$ mit den beiden Lösungen $z = e^x = y \pm \sqrt{y^2-1}$. Die Lösung mit dem positiven Vorzeichen der Wurzel ist die Umkehrfunktion bezüglich der auf D_1 eingeschränkten Originalfunktion, die als *Area-Kosinushyperbolikus* bezeichnet wird. Damit gilt

$$x = f_1^{-1}(y) = \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \quad \text{bzw.} \quad y = f_1^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \text{arcosh}(x).$$

Für die Einschränkung der Funktion $y = f_2(x) = \cosh(x)$ auf $D_2 = (-\infty, 0]$ erhält man als Umkehrfunktion $x = f_2^{-1}(y) = \ln\left(y - \sqrt{y^2-1}\right)$ bzw. nach Vertauschung von x und y:

$$y = f_2^{-1}(x) = \ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$$

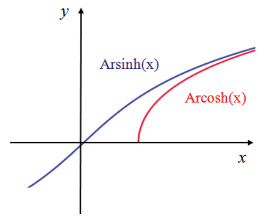
Weiterhin erhält man für die Funktion $f_2^{-1}(x)$:

$$\begin{aligned}\ln\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) &= \ln\left(\frac{\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= -\ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = -\text{arcosh}(x) = -f_1^{-1}(x).\end{aligned}$$

Damit liegen die Umkehrfunktionen zu den zwei Ästen des Hyperbelkosinus spiegelbildlich zur x-Achse.

Originalfunktion $f(x)$	Umkehrfunktion $f^{-1}(x)$	$D(f^{-1})$	$W(f^{-1})$
$\sinh(x)$	$\text{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$	$(-\infty, \infty)$	$(-\infty, \infty)$
$\cosh(x)$	$\text{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$	$[1, \infty)$	$[0, \infty)$
$\tanh(x)$	$\text{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$	$(-1, 1)$	$(-\infty, \infty)$
$\coth(x)$	$\text{arcoth}(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$	$(-\infty, \infty) \setminus [-1, 1]$	$(-\infty, \infty)$

Die Originalfunktion und die entsprechende Umkehrfunktion in der Darstellung durch Funktionen des natürlichen Logarithmus können der Tabelle entnommen werden. Die Funktionen $y = \text{arsinh}(x)$ und $y = \text{arcosh}(x)$ sind im nebenstehenden Bild dargestellt.



Funktionen $y = \text{arsinh}x$ und $y = \text{arcosh}x$

6 Folgen und Konvergenz

Folgen sind ein wichtiges Hilfsmittel der Analysis, um zentrale Begriffe wie Differenzialquotient und Integral zu erklären. Das Verständnis für Folgen bildet die Grundlage der Reihenlehre und der Konvergenzuntersuchung iterativer Näherungsverfahren.

6.1 Folgen und ihre Grenzwerte

Einführungsbeispiel

Ein Baggersee von 1200m^2 Größe wird weiter ausgebaggert und wächst dadurch jede Woche um 600m^2. Eine Algenart bedeckt zu Beginn der Baggerarbeiten 1m^2 Wasserfläche. Die mit Algen bedeckte Fläche verdreifacht sich jede Woche. Als dies ein Bauarbeiter feststellt sagt er: „Bald wird der ganze See mit Algen überwuchert sein!“ Hat er recht?

Wochenzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Seefläche in m^2	1200	1800	2400	3000	3600	4200	4800	5400	6000
Algenfläche in m^2	1	3	9	27	81	243	729	2187	6561

Lösung: Nach knapp 8 Wochen haben die Algen also den ganzen See erobert.

Die Flächen des Sees und der Algen in Abhängigkeit der betrachteten Wochen sind Beispiele für Folgen, d.h. Abbildungen der natürlichen Zahlen auf reelle Zahlen. Beide Folgen lassen sich mittels einer Funktion darstellen, die jedem n einen Funktionswert zuordnet:

Folge der Seeflächen: $s(n) = s_n = 1200 + n \cdot 600, \quad n \in \mathbb{N}_0,$

Folge der Algenflächen: $a(n) = a_n = 3^n, \quad n \in \mathbb{N}_0.$

6.1.1 Folgen

Definition 6.1 *(Folge)*
Eine Folge *ist eine Vorschrift, die jeder natürlichen Zahl n genau eine reelle Zahl a_n zuordnet. Eine Folge wird mit dem Symbol (a_n) bzw. $\{a_1, a_2, \dots\}$ abgekürzt.*

Folgen sind also Funktionen mit $D = \mathbb{N}$ und $W = \mathbb{R}$.

Eine Folge kann durch ein Bildungsgesetz für das allgemeine Element a_n angegeben werden, durch Aufzählung der Elemente bzw. rekursiv dargestellt werden.

Beispiele:

1. Die Folge $(a_n) = \left\{2+1, -2-\frac{1}{2}, 2+\frac{1}{3}, -2-\frac{1}{4}, 2+\frac{1}{5}, -2-\frac{1}{6}\right\}$ ist durch Aufzählung gegeben. Wegen des fortlaufenden Vorzeichenwechsels der Folgenglieder spricht man von einer *alternierenden Folge*. Man kann für die Folgenglieder ein Bildungsgesetz aufstellen: $a_n = (-1)^{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots.$

2. Die Folge $a_n = 2 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist durch ihr Bildungsgesetz erklärt.
3. Die Beziehung $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$ definiert die Folge (a_n) rekursiv in Abhängigkeit vom Anfangselement a_1 und einer Konstanten $c > 0$.
4. Orgelpfeifen haben folgende Eigenschaften:
   - Die Pfeife für den Ton c hat die Länge 130cm
   - Pfeifen aufeinander folgender Halbtöne haben ein festes Längenverhältnis q
   - Die Pfeife für den Ton c' hat die halbe Länge der Pfeife für c
   - Zwischen c und c' liegen 12 Halbtonstufen.

   Wir bezeichen die Länge der c-Pfeife mit a_1, und a_{k+1} sei die Länge der Pfeife des k-ten Halbtons über c. Es gilt

$$a_1 = 130, \quad a_{k+1} = q \cdot a_k = q^2 \cdot a_{k-1} = \dots = q^k \cdot a_1$$

   und aus

$$a_{13} = q^{12} \cdot a_1 \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} \cdot a_1 \quad \text{folgt} \quad q = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 0.9439..$$

   Wir erhalten das Bildungsgesetz für die Pfeifenlängen

$$a_1 = 130, \quad a_k = q^{k-1} \cdot a_1, \quad k = 1, 2, \dots, \quad q = \sqrt[12]{\frac{1}{2}} = 0.9439..$$

Definition 6.2 *(Beschränktheit und die Monotonie einer Folge)*
Eine Folge (a_n) heißt

- nach oben beschränkt *durch $K \in \mathbb{R}$, wenn $a_n \leq K$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,*
- nach unten beschränkt *durch $k \in \mathbb{R}$, wenn $a_n \geq k$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$,*
- monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt bzw.*
- monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ gilt für alle $n \in \mathbb{N}$.*

  Gelten die Ungleichungen im strengen Sinn, so spricht man von strenger Monotonie.

Beschränktheit und die Monotonie einer Folge sind Eigenschaften, welche die Existenz von Grenzwerten wesentlich bestimmen.

Beispiele:

1. Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, ist streng monoton fallend, denn es ist $\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, d.h. $a_{n+1} < a_n$. Wegen $0 \leq a_n \leq 1$ ist die Folge beschränkt.
2. Die Folge $a_n = q^n$, $n \in \mathbb{N}$, ist streng monoton fallend für $0 < q < 1$, denn es ist $q^{n+1} = q \cdot q^n < q^n$. Für $q > 1$ ist die Folge streng monoton wachsend.

3. Die Folge $a_n = \sqrt[n]{c}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $c > 0$ ist monoton. Es gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{c^{\frac{1}{n+1}}}{c^{\frac{1}{n}}} = c^{-\frac{1}{n(n+1)}}.$$

Für $0 < c < 1$ ist die Folge streng monoton wachsend, denn es gilt $a_{n+1} > a_n$. Für $c > 1$ ist die Folge streng monoton fallend.

4. Man untersuche die Folge $a_n = \dfrac{5n}{n+2}$ auf Beschränktheit und Monotonie.

Durch Ausklammern und Kürzen von n in Zähler und Nenner erhält man $a_n = \dfrac{5}{1+\frac{2}{n}}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. (a_n) ist nach oben durch $K = 5$ und wegen $a_n > 0$ nach unten durch $k = 0$ beschränkt.

Zur Untersuchung der Monotonie bilden wir die Differenz zweier aufeinander folgender Elemente

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{5(n+1)}{(n+1)+2} - \frac{5n}{n+2} \\ &= \frac{5(n+1)(n+2) - 5n(n+3)}{(n+3)(n+2)} = \frac{10}{(n+3)(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

woraus $a_{n+1} > a_n$ für alle n folgt, d.h. streng monotones Wachstum der Folgenelemente.

6.1.2 Konvergenz und Divergenz einer Folge

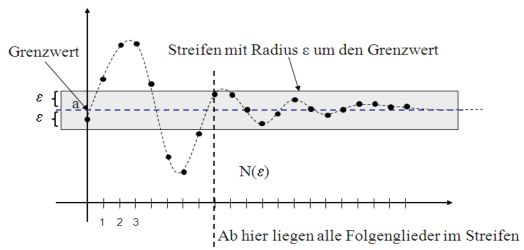
Definition 6.3 *(Grenzwert einer Folge)*
Die Zahl a heißt Grenzwert *der Folge (a_n), wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $N(\varepsilon)$ gibt mit*

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Im Fall der Existenz eines Grenzwerts a heißt (a_n) konvergent*, sonst* divergent*. Man schreibt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{bzw.} \quad a_n \to a \quad (n \to \infty).$$

Die Existenz eines Grenzwerts a bedeutet, daß bei noch so kleiner Wahl von ε ein Index $N(\varepsilon)$ existiert, so daß für alle Indizes n, die größer oder gleich $N(\varepsilon)$ sind, der Abstand des Elements a_n von a kleiner als ε ausfällt. Nur endlich viele Elemente a_n mit $n < N(\varepsilon)$ dürfen außerhalb der ε-Umgebung von a liegen.



Satz 6.1 *(Konvergente Folgen)*

1. *Eine konvergente Folge hat einen eindeutig bestimmten Grenzwert.*
2. *Eine konvergente Folge ist beschränkt.*

Beispiele:

1. Die Folge $a_n = 2 + \dfrac{1}{n}$ besitzt den Grenzwert $a = 2$.

Zu $\varepsilon > 0$ wähle $N(\varepsilon)$ so, daß gilt

$$|a_n - 2| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wähle also $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Für $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$ wähle $N(\varepsilon) > \frac{1}{\frac{1}{10}}$, also z.B $N = 11$. Dann: $|a_n - 2| < \dfrac{1}{10}$ für $n \geq 11$.

Für $\varepsilon = \dfrac{1}{100}$ wähle $N(\varepsilon) > \frac{1}{\frac{1}{100}}$, also z.B $N = 101$. Dann: $|a_n - 2| < \dfrac{1}{100}$ für $n \geq 101$.

2. Die Folge $a_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+1}$ besitzt den Grenzwert $a = 1$, denn es gilt

$$a_n = \frac{n^2+n}{n^2+1} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n})}{n^2(1+\frac{1}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n^2}} \to 1 \quad (n \to \infty).$$

Zum Nachweis dieser Vermutung bestimmen wir zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ so, daß gilt $|a_n - 1| < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$. Mit der Abschätzung

$$|a_n - 1| = \left|\frac{n^2+n-(n^2+1)}{n^2+1}\right| = \left|\frac{n-1}{n^2+1}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

wählen wir $N(\varepsilon)$ gemäß

$$|a_n - 1| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wähle also $N(\varepsilon) > \frac{1}{\varepsilon}$.

Definition 6.4 *(Divergente Folge)*
Die Folge (a_n) heißt bestimmt divergent *gegen $+\infty$ (bzw. $-\infty$), wenn für beliebige (großes) $K > 0$ stets ein Index $N(K)$ existiert mit $a_n > K$ (bzw. $a_n < -K$) für $n \geq N(K)$. Man schreibt:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \quad \textit{bzw.} \quad a_n \to \pm\infty \quad (n \to \infty).$$

Divergente Folgen, die nicht bestimmt divergieren, heißen unbestimmt divergent.

Beispiele:

1. Die Folge $a_n = 2n$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.
2. Die Folge $a_n = (-1)^n \cdot n^2$ ist unbestimmt divergent.
3. Die alternierende Folge $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \left(2 + \dfrac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ ist unbestimmt divergent, da in jeder ε-Umgebung von 2 und -2 unendlich viele Folgeglieder liegen. Man sagt die Folge besitzt die *Häufungswerte* 2 und -2 aber keinen Grenzwert.

6.1.3 Typen von Folgen

- Folgen (a_n) mit $a_n = a$ für alle n heißen *konstante Folgen*.
- Bei einer *alternierenden Folge* (a_n) ändern die Folgeglieder a_n fortlaufend das Vorzeichen.
- Eine konvergente Folge (a_n) mit dem Grenzwert $a = 0$ heißt *Nullfolge*.
- Eine Folge (a_n) mit
$$a_n = a_0 + n \cdot d$$
wird als *arithmetische Folge* bezeichnet. Die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant: $a_{n+1} - a_n = d$. Arithmetische Folgen sind bestimmt divergent gegen $+\infty$ im Fall $d > 0$ bzw. gegen $-\infty$ im Fall $d < 0$.
- Eine Folge (a_n) mit
$$a_n = a_0 \cdot q^n$$
wird als *geometrische Folge* bezeichnet. Der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder ist konstant: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q$. Geometrische Folgen sind konvergent mit Grenzwert $a = 0$ im Fall $|q| < 1$. Für $|q| > 1$ ist a_n divergent. Für $q = 1$ erhält man $a_n = a_0$ für alle n.

Beispiele:

1. Man untersuche die Folge $a_n = \dfrac{3n+4}{5n+6}$ auf Konvergenz. Bei Existenz eines Grenzwerts a bestimme man einen Index $N(\varepsilon)$ so, daß zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon \quad$ für $\quad n \geq N(\varepsilon)$.

Durch Ausklammern und Kürzen der höchsten gemeinsamen Potenz von n in Zähler und Nenner folgt für $n \to \infty$
$$a_n = \frac{n\left(3 + \frac{4}{n}\right)}{n\left(5 + \frac{6}{n}\right)} = \frac{3 + \frac{4}{n}}{5 + \frac{6}{n}} \to \frac{3+0}{5+0} = \frac{3}{5} = a,$$
d.h. der Grenzwert a existiert. Wir betrachten nun die Differenz zwischen a und einem Folgenelement:
$$|a_n - a| = \left|\frac{3n+4}{5n+6} - \frac{3}{5}\right| = \left|\frac{5(3n+4) - 3(5n+6)}{5(5n+6)}\right| = \left|\frac{2}{25n+30}\right| < \frac{1}{12n}.$$
Ist zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein Index n so gewählt, daß $\dfrac{1}{12n} < \varepsilon$ gilt, so ist die Beziehung $|a_n - a| < \varepsilon$ gültig. Dies ist erfüllt, wenn $n \geq N(\varepsilon) > \dfrac{1}{12\varepsilon}$ gilt. Je kleiner ε vorgegeben wird, umso größer ist i.a. der Grenzindex $N(\varepsilon)$, ab dem die Elemente a_n innerhalb der ε-Umgebung von a liegen müssen. Für $\varepsilon = 0.01$ ist z.B. $N(\varepsilon) = 9$, für $\varepsilon = 0.0001$ ist z.B. $N(\varepsilon) = 834$.

2. Man untersuche, ob die Folge (a_n) mit $a_n = \dfrac{n^2}{3^n}$ konvergiert und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

   Hier erweist sich ein Vergleich mit einer Folge, deren Grenzverhalten bekannt ist als nützlich. Eine wichtige Folge für Vergleiche stellt die geometrische Folge dar. Wir betrachten hierzu den Quotienten aufeinander folgender Elemente der gegebenen Folge in der Grenze für $n \to \infty$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} : \frac{n^2}{3^n} = \frac{(n+1)^2}{3n^2} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{3n^2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \to \frac{1}{3} = a.$$
   Damit unterscheiden sich die Elemente a_n der zu untersuchenden Folge für große n immer weniger von den Elementen $b_n = q^n$ einer geometrischen Folge mit $q = \dfrac{1}{3}$. Die geometrische Folge ist wegen $|q| < 1$ eine Nullfolge. Somit besitzt die gegebene Folge (a_n) den Grenzwert $a = 0$.

Folgende Grenzwerte sollten Sie sich merken:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} n^\alpha = \begin{cases} 0, & \alpha < 0, \\ 1, & \alpha = 0, \\ \infty, & \alpha > 0. \end{cases}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ 1, & q = 1, \\ \infty, & q > 1. \end{cases}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1, \quad c > 0.$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, wird noch diskutiert,
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$

6.1.4 Rechnen mit konvergenten Folgen

Nachdem in den obigen Beispielen bereits einige Grenzwerte berechnet wurden, sollen jetzt Regeln angegeben werden, die bei der praktischen Berechnung von Grenzwerten angewendet werden können.

Satz 6.2 *Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten a bzw. b. Dann gelten die Aussagen:*

1. $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$,
2. $\lim_{n\to\infty}(c\,a_n) = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n, \quad c \in \mathbb{R}$,
3. $\lim_{n\to\infty}(a_n\, b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$,
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$, *für* $b_n \neq 0$,
5. $\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$.

Beweis: Nur für Summe und Differenz: Da (a_n) und (b_n) konvergent sind, kann zu $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ bestimmt werden mit $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $n \geq N(\varepsilon)$.
Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$|(a_n \pm b_n) - (a \pm b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für} \quad n \geq N(\varepsilon) \quad \diamond$$

Folgende Tipps helfen bei der Grenzwertuntersuchung häufig weiter:

- Bei gebrochen rationalen Ausdrücken (a_n) führt offenbar folgende Methode zum Ziel: Zähler und Nenner werden durch die höchste Potenz von n dividiert. Man erhält die allgemeinen Aussagen:
  a) Zählergrad $<$ Nennergrad $\Rightarrow a_n \to 0$,
  b) Zählergrad $=$ Nennergrad $\Rightarrow a_n \to A \neq 0$,
  c) Zählergrad $>$ Nennergrad $\Rightarrow a_n \to \infty$ oder $a_n \to -\infty$.
- Bei Wurzelausdrücken der Form $\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}$ mit $a_n \to \infty$, $b_n \to \infty$ empfiehlt sich eine Erweiterung mit $\sqrt{a_n} + \sqrt{b_n}$, damit sich im Zähler der wurzelfreie Term $a_n - b_n$ ergibt.

Für Grenzübergänge in Gleichungen und Ungleichungen gilt:

Satz 6.3 *Es seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit Grenzwerten a bzw. b. Ferner sei (c_n) eine weitere Folge und N_0 ein endlicher Index. Dann gelten die Aussagen:*

1. *Aus $a_n \leq b_n$ für alle $n \geq N_0$ folgt für die Grenzwerte die Ungleichung $a \leq b$.*
2. *Aus $a_n < b_n$ für alle $n \geq N_0$ folgt für die Grenzwerte die Ungleichung $a \leq b$.*

Beispiele:

1. Man überprüfe die Folgen auf Existenz von Grenzwerten und bestimme gegebenfalls diese Grenzwerte:
   a) $a_n = \frac{3n^2+5n+4}{2n^2+3}$, b) $b_n = \frac{2n^3}{2n^2+3} + \frac{1-5n^2}{5n+1}$

   a) Die Anwendung von Satz 6.3 führt auf einem unbestimmten Ausdruck der Form $\frac{\infty}{\infty}$, der zunächst keine Aussage zulässt. Wir formen den Ausdruck um, wobei die höchste gemeinsame Potenz von n in Zähler und Nenner auszuklammern ist und diese gekürzt werden kann:

   $$a_n = \frac{n^2\left(3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}\right)}{n^2\left(2+\frac{3}{n^2}\right)} = \frac{3+\frac{5}{n}+\frac{4}{n^2}}{2+\frac{3}{n^2}} \to \frac{3+0+0}{2+0} = \frac{3}{2} = a.$$

   b) Die Anwendung des Satzes 6.3 führt auf einem unbestimmten Ausdruck der Form $\infty - \infty$. Wir bringen die Brüche zunächst auf den Hauptnenner und klammern die höchste gemeinsame Potenz von n in Zähler und Nenner aus:

   $$\begin{aligned} b_n &= \frac{2n^3(5n+1)+(1-5n^2)(2n^2+3)}{(2n^2+3)(5n+1)} = \frac{2n^3-13n^2+3}{10n^3+2n^2+15n+3} \\ &= \frac{2-\frac{13}{n}+\frac{3}{n^2}}{10+\frac{2}{n}+\frac{15}{n^2}+\frac{3}{n^3}} \to \frac{2-0+0}{10+0+0+0} = \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

2. Man überprüfe die Folgen auf Existenz von Grenzwerten und bestimme gegebenenfalls die Grenzwerte
   a) $c_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n-1}$, b) $d_n = \sqrt{2n+3} - \sqrt{n-1}$.

   a) Der Ausdruck ist aufgrund der unbestimmten Form $\infty - \infty$ zunächst umzuformen. Um die Wurzeln im Zähler zu beseitigen, verwenden wir die Erweiterung

   $$x - y = \frac{(x-y)(x+y)}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{x+y}$$

   und erhalten durch Ersetzen von x und y durch die beiden Wurzelausdrücke

   $$c_n = \frac{(2n+3)-(2n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}} = \frac{4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{2n-1}} \to 0.$$

   b) Auf die gleiche Weise erhält man für die Differenz der beiden Wurzelausdrücke

   $$\begin{aligned} d_n &= \frac{(2n+3)-(n-1)}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}} = \frac{n+4}{\sqrt{2n+3}+\sqrt{n-1}} \\ &= \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{n}+\frac{4}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{2+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)} \to \frac{\infty}{\sqrt{2}+\sqrt{1}} \to \infty \end{aligned}$$

   d.h. die Folge ist in diesem Fall bestimmt divergent.

6.2 Konvergenzkriterien für Folgen

Konvergenzkriterien geben Bedingungen an, unter denen die Konvergenz einer Folge gesichert ist. Diese Kriterien werden auch bei der Untersuchung von Reihen von Bedeutung sein. Wegen der Vielzahl der existierenden Kriterien kann hier nur auf die am häufigsten verwendeten eingegangen werden.

6.2.1 Einschließungskriterium und Monotoniekriterium

Satz 6.4 *(Einschließungskriterium)*
Es seien (a_n), (b_n) zwei konvergente Folgen mit dem Grenzwert a. Gilt für die Elemente der Folge (c_n) für alle Indizes n, die größer als ein fester Index N_0 sind, die Einschließung

$$a_n \leq c_n \leq b_n,$$

so ist die Folge (c_n) konvergent mit Grenzwert a.

Beweis: Nach Voraussetzung gilt:
$|a_n - a| < \varepsilon$ bzw. $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für $n \geq N_1(\varepsilon)$,
$|b_n - a| < \varepsilon$ bzw. $a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$ für $n \geq N_2(\varepsilon)$
und daher $a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon) = \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$. Mit dem so gewählten $N(\varepsilon)$ gilt $|c_n - a| < \varepsilon$ für $n \geq N(\varepsilon)$ und die Konvergenz von (c_n) gegen a ist gezeigt $\diamond$

Ein weiteres Kriterium erhält man mit Hilfe eines Ergebnisses der Mengenlehre: Nach dem Satz von *Bolzano-Weierstraß* besitzt jede beschränkte unendliche Menge mindestens einen Häufungspunkt. Fordert man von der Menge der Folgenelemente außer der Beschränktheit noch die Monotonie, so muß genau ein Häufungspunkt existieren, der dann der Grenzwert der Folge ist.

Satz 6.5 *(Monotoniekriterium)*
Eine monotone wachsende und nach oben beschränkte Folge ist konvergent. Eine monotone fallende und nach unten beschränkte Folge ist konvergent.

Beispiele:

1. Die Folge $a_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n}$ hat den Grenzwert $a = 5$, denn es gilt

$$\sqrt[n]{5^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n}$$

und weiter

$$5 \leq \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{2} \cdot 5.$$

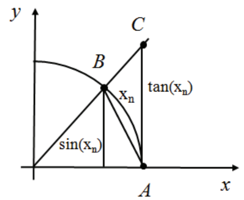
Wegen $\sqrt[n]{2} \to 1$ folgt der Grenzwert $a = 5$ mit dem Einschließungskriterium.

2. Die Folge $a_n = \dfrac{n}{2^n}$ strebt gegen $a = 0$. Man sieht dies wie folgt ein: für $n \geq 5$ gilt $n^2 < 2^n$ (Nachweis mit vollständiger Induktion) und weiter folgt

$$0 \leq \frac{n}{2^n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n^2}{2^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Der Grenzwert $a = 0$ folgt mit dem Einschließungskriterium.

3. Es sei (x_n) eine Nullfolge positiver reeller Zahlen und $c_n = \frac{\sin x_n}{x_n}$. Man überprüfe, ob die Folge (c_n) konvergent ist und berechne gegebenenfalls den Grenzwert. Das Problem kann durch eine geometrische Betrachtung am Einheitskreis gelöst werden.



Die Fläche des Dreiecks OAB ist kleiner als die Fläche des Kreissektors OAB und diese wiederum kleiner als die Fläche des Dreiecks OAC. Das bedeutet:

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x_n < 1^2 \cdot \pi \cdot \frac{x_n}{2\pi} < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin x_n}{\cos x_n}.$$

Daraus folgt

$$\sin x_n < x_n < \frac{\sin x_n}{\cos x_n}$$

und weiter $\dfrac{\sin x_n}{x_n} < 1$ (linke Ungleichung) sowie $\dfrac{\sin x_n}{x_n} > \cos x_n$ (rechte Ungleichung) also

$$\cos x_n < \frac{\sin x_n}{x_n} < 1.$$

Mit $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n = 1$ für $x_n \to 0$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin x_n}{x_n} = 1$ mit dem Einschließungskriterium.

6.2.2 Rekursive Folgen

In den folgenden Beispielen betrachten wir *rekursiv definierte Folgen* (a_n), d.h. das auf a_n folgende Element a_{n+1} ist von a_n und eventuell weiter zurückliegenden Elementen abhängig. Derartige Folgen werden unter anderem durch Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungen erzeugt.

Beispiele:

1. Die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 6)$$

soll auf Konvergenz untersucht werden.

Es ist $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 5, a_4 = \dfrac{11}{2}$ und $a_5 = \dfrac{23}{4}$.

Wir vermuten: (a_n) ist streng monoton steigend und (a_n) ist durch 6 beschränkt.

Den Nachweis beider Eigenschaften führen wir mit vollständiger Induktion:

Monotonie:

(I) Induktionsanfang: $a_2 \geq a_1$ ist wahr.

(II) Induktionsannahme: es sei $a_{n+1} \geq a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluß: zu zeigen: $a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

Aus $a_{n+1} \geq a_n$ folgt $\dfrac{1}{2}(a_{n+1} + 6) \geq \dfrac{1}{2}(a_n + 6) \Rightarrow a_{n+2} \geq a_{n+1}$.

Beschränktheit:

(I) Induktionsanfang: $a_1 < 6$ ist wahr.

(II) Induktionsannahme: es sei $a_n < 6$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluß: zu zeigen: $a_{n+1} < 6$.

Aus $a_n < 6$ folgt $\dfrac{1}{2}(a_n + 6) < \dfrac{1}{2}(6 + 6) = 6 \Rightarrow a_{n+1} < 6$.

Mit der Monotonie und der Beschränktheit von (a_n) folgt die Konvergenz. Für den Grenzwert $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt: $g = \dfrac{1}{2}(g + 6) \Rightarrow g = 6$.

2. Es sei c ein beliebiger reeller Wert mit $0 < c < 1$. Die Folge (x_n) sei definiert durch

$$x_1 = \frac{1}{2}c, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}(c + x_n^2), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Man zeige die Konvergenz der Folge (x_n) mit Hilfe des Monotoniekriteriums und berechne ihren Grenzwert.

Wir zeigen, daß für alle n gilt $0 < x_n < 1$, d.h. die (x_n) ist beschränkt. Der Beweis wird mit vollständiger Induktion geführt:

(I) Induktionsanfang: Für $n = 1$ gilt die Beziehung $0 < x_1 = \frac{c}{2} < \frac{1}{2} < 1$.

(II) Induktionsannahme: Für einen Index n gelte $0 < x_n < 1$.

(III) Induktionsbeweis: Es ist zu zeigen, daß unter der Induktionsannahme gilt $0 < x_{n+1} < 1$. Aufgrund des Bildungsgesetzes ist x_{n+1} positiv und es ist $0 < x_{n+1} = \dfrac{1}{2}(c + x_n^2) < \dfrac{1}{2}(c + 1) < \dfrac{1}{2}(1 + 1) = 1$, d.h. die nachzuweisende Relation.

Die Monotonie der Folge kann ebenfalls mit vollständiger Induktion nachgewiesen werden:

(I) Induktionsanfang: Es gilt $x_2 = \dfrac{1}{2}(c + x_1^2) = \dfrac{1}{2}\left(c + \dfrac{1}{4}c^2\right) > \dfrac{c}{2} = x_1$.

(II) Induktionsannahme: Für einen Index n gelte $x_{n+1} > x_n$.

(III) Induktionsbeweis: Es ist zu zeigen, daß unter der Induktionsannahme gilt $x_{n+2} > x_{n+1}$. Mit dem Bildungsgesetz folgt $x_{n+2} = \dfrac{1}{2}\left(c + x_{n+1}^2\right) > \dfrac{1}{2}(c + x_n^2) = x_{n+1}$ und

damit ist (x_n) streng monoton wachsend. Die Existenz des Grenzwerts folgt mit dem Monotoniekriterium. Wegen $x_n \to a$ und $x_{n+1} \to a$ für $n \to \infty$ folgt aus der Rekursionsgleichung die quadratische Gleichung $a = \frac{1}{2}(c + a^2)$ bzw. $a^2 - 2a + c = 0$ zur Berechnung von a. Von den beiden Lösungen $a_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-c}$ scheidet $1 + \sqrt{1-c} > 1$ aus, da wegen $0 < x_n < 1$ gilt $0 \leq a \leq 1$. Damit ist $a = 1 - \sqrt{1-c}$ der Grenzwert der Folge (x_n).

6.2.3 Heron-Verfahren

Viele Verfahren der numerischen Mathematik führen auf rekursive Folgen. Mit dem *Heron-Verfahren* kann man die Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$ iterativ berechnen. Man benötigt hierbei nur arithmetische Grundoperationen, die auf jedem Rechner zur Verfügung stehen.

Wir gehen aus von einer gegebenen Zahl $a > 0$ und einem beliebigen Startwert $x_0 > 0$. Wir bilden die Iterierten

$$x_{n+1} := \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Die Konvergenz der Folge (x_n) zeigen wir mit dem Monotoniekriterium:

- Es gilt $x_n^2 \geq a$, denn

$$\begin{aligned} x_n^2 - a &= \left(\frac{1}{2} \cdot \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)\right)^2 - a \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(x_{n-1}^2 + 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) - a \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(x_{n-1}^2 - 2a + \frac{a^2}{x_{n-1}^2}\right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(x_{n-1} - \frac{a}{x_{n-1}}\right)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

- Die Folge (x_n) ist streng monoton fallend, denn

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) - x_n = \frac{a}{2x_n} - \frac{x_n}{2} = \frac{a - x_n^2}{2x_n} \leq 0.$$

- Aus Beschränktheit und Monotonie folgt die Konvergenz der Folge (x_n) gegen einen Grenzwert $g = \lim_{n\to\infty} x_n > 0$.

Zur Berechnung von g beachten wir, dass sowohl $x_n \to g$ als auch $x_{n+1} \to g$ für $n \to \infty$ gilt. Mit der Rekursionsformel erhalten wir die Gleichung für g

$$g = \frac{1}{2} \cdot \left(g + \frac{a}{g}\right) \quad \Rightarrow \quad g^2 = a$$

und wegen $g \geq 0$ folgt $g = \sqrt{a}$.

Wir testen das Verfahren für $a = 2$ und $x_0 = 1$. Dann gilt $g = \sqrt{2} = 1.4142...$ Die ersten Heron-Iterierten lauten

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2}{1}\right) = \frac{3}{2} = 1.5 \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{2}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{17}{12} = 1.4166.. \\ x_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}\right) = \frac{577}{408} = 1.4142.. \end{aligned}$$

Mit drei Iterierten erhalten wir schon eine recht gute Näherung an $\sqrt{2}$. Die Iterierten (x_n) sind sämtlich rational, d.h. mit einer Folge rationaler Zahlen können wir die irrationale Zahl $\sqrt{2}$ beliebig genau annähern.

6.3 Die Eulersche Zahl e als Grenzwert

Nicht in jedem Fall ist die Grenzwertuntersuchung mit den im vorigen Abschnitt gezeigten Regeln erfolgreich. Wir wollen nun einige häufig auftretende spezielle Folgen betrachten und ihre Grenzwerte bestimmen.

Die Anwendung von Satz 6.2 auf die Folge $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ liefert einen unbestimmten Ausdruck der Form 1^∞. Dennoch kann folgender Grenzwert gezeigt werden:

Satz 6.6 *Der Grenzwert der Folge (x_n) ist die* Eulersche Zahl *e:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2.718281828459..$$

Die Eulersche Zahl spielt eine wichtige Rolle bei Wachstums- und Zerfallsprozessen sowie bei der Beschreibung von Sättigungsprozessen in der Technik, wie z.B. dem zeitlichen Verlauf der Auf- und Entladung eines Kondensators etc.

Später erhalten wir mit Hilfe der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion eine Reihendarstellung der Zahl e.

Die Eulersche Zahl e erhält man auch als Grenzwert allgemeinerer Potenzausdrücke, bei denen die Basis der Potenz gegen Eins strebt und der Exponent in entsprechender Weise unbeschränkt wächst.

Satz 6.7 *Ist (a_n) eine beliebige Nullfolge mit $a_n > -1$, $a_n \neq 0$ für alle n, so gilt die Grenzwertbeziehung $\lim\limits_{n\to\infty}(1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$.*

Ist $\alpha \neq 0$ ein beliebiger reeller Wert und setzt man $a_n = \dfrac{\alpha}{n}$, so ist ab einem genügend großen n $(n > |\alpha|)$ die Bedingung $a_n > -1$, $a_n \neq 0$ erfüllt und man erhält

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^{\frac{n}{\alpha}}\right]^\alpha = e^\alpha.$$

Wegen $(1 + 0)^n = 1$ für jedes n kann in dieser Beziehung auch $\alpha = 0$ zugelassen werden, wenn man $e^0 = 1$ definiert.

Satz 6.8 *Für beliebiges reelles α gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$.*

Beispiel:

Man bestimme den Grenzwert der Folgen:

a) $\left(1 + \frac{3}{5n}\right)^{\frac{n}{2}}$, b) $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1}$, c) $\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n$, d) $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}$.

a) $\left(1 + \frac{3}{5n}\right)^{\frac{n}{2}} = \left[\left(1 + \frac{\frac{3}{5}}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{2}} \to \left[e^{\frac{3}{5}}\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{e^3}$.

b) $\left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{-2}{n}\right)^n\left(1 - \frac{2}{n}\right) \to e^{-2} \cdot 1 = \frac{1}{e^2}$.

c) $\left(\frac{n+2}{n-3}\right)^n = \left(\frac{n(1 + \frac{2}{n})}{n(1 - \frac{3}{n})}\right)^n = \frac{(1 + \frac{2}{n})^n}{(1 - \frac{3}{n})^n} \to \frac{e^2}{e^{-3}} = e^5$.

d) Mit $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ und Satz 6.7 folgt $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} = (1 + a_n)^{\frac{1}{a_n}} \to e$.

7 Reihen

Für die Berechnung wichtiger Konstanten wie der Eulerschen Zahl e, der Kreiskonstanten π und verschiedener Standardfunktionen erweisen sich Zahlenreihen und Funktionenreihen als wesentlich. Die Konvergenz einer Reihe wird mit Hilfe der zugeordneten Folge, der Folge der Partial- oder Teilsummen erklärt und somit auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt.

7.1 Definition, Konvergenz und Divergenz von Reihen

Gegeben sei eine reelle Folge (a_k). Durch fortgesetztes Aufsummieren der Folgeglieder entsteht eine *unendliche Reihe*. Dabei erhält man eine neue Folge (s_n) von *Teilsummen* (*Partialsummen*) mit

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \ldots, \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

7.1.1 Definition einer unendlichen Reihe

Definition 7.1 *(Unendliche Reihe)*
Für eine Folge (a_k) heißt der Ausdruck

$$a_1 + a_2 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

unendliche Reihe. *Die n-te Partialsumme der Reihe ist gegeben durch*

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Beispiele:

1. Die Reihe aus den Quadraten der natürlichen Zahlen lautet
   $$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + \ldots.$$
2. Die *harmonische Reihe* ist erklärt durch
   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots.$$
3. Die *alternierende harmonische Reihe* lautet
   $$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \ldots.$$
4. Mit $q \in \mathbb{R}$ ist die *geometrische Reihe* definiert durch
   $$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots.$$

Es stellt sich die Frage, ob eine „unendliche Summe“ einen endlichen Wert s haben kann.

7.1.2 Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe

Definition 7.2 *(Konvergenz und Divergenz einer unendlichen Reihe)*

1. *Eine unendliche Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt* konvergent *gegen die Reihensumme s, wenn die Folge der Partialsummen (s_n) den endlichen Grenzwert s besitzt*
   $$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$
2. *Eine Reihe, die nicht konvergent ist heißt* divergent.
3. *Gilt $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \infty$ (oder $-\infty$), so spricht man von* bestimmter Divergenz *gegen ∞ ($-\infty$), ansonsten nennt man die Reihe* unbestimmt divergent.

Beispiele:

1. Wir betrachten die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots.$

   Für die Folge der Partialsummen
   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$$
   erhalten wir
   $$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + - \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$
   Wegen $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ konvergiert die Reihe gegen 1.

2. Konvergenz der geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + \ldots$ mit $q \in \mathbb{R}$.

   Die n-te Partialsumme s_n der geometrischen Reihe mit Parameter $q \neq 1$ ist gegeben durch
   $$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$
   Wir hatten dieses Ergebnis bereits früher erhalten.

Fall 1: $|q| > 1$. Der Term q^{n+1} wächst für $n \to \infty$ betragsmäßig über alle Grenzen, sodaß Divergenz der Folge (s_n) und somit der Reihe vorliegt.

Fall 2: $|q| < 1$. Hier strebt q^{n+1} für $n \to \infty$ gegen 0 und die Reihe ist konvergent gegen $s = \dfrac{1}{1-q}$.

Fall 3: $q = \pm 1$. Für $q = 1$ divergiert die Reihe bestimmt gegen ∞, für $q = -1$ wechselt s_n fortlaufend zwischen den Werten 1 und 0, d.h. es liegt unbestimmte Divergenz vor.

7.1.3 Rechnen mit konvergenten Reihen

Satz 7.1 *Es seien* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergente Reihen und* $c \in \mathbb{R}$. *Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \textit{und} \\ \sum_{k=1}^{\infty} c\, a_k &= c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

Die Beibehaltung der Summationsreihenfolge der Glieder der Reihe ist wesentlich. Die Vertauschbarkeit von Summanden endlicher Summen aufgrund des Kommutativgesetzes der Addition gilt i.a. nicht mehr.

7.1.4 Anwendungen der geometrischen Reihe

Satz 7.2 *(Geometrische Reihe)*
Die geometrische Reihe besitzt im Fall $|q| \neq 1$ *die* n*-te Partialsumme*

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1-q}.$$

Für $|q| < 1$ *ist die Reihe konvergent mit der Reihensumme* $s = \dfrac{1}{1-q}$, *und im Fall* $|q| \geq 1$ *liegt Divergenz der Reihe vor.*

Anwendungen geometrischer Folgen und Reihen bzw. von Partialsummen dieser Reihen findet man in vielfältiger Art und Weise z.B. im Bereich der Finanz- und Versicherungsmathematik. Wir betrachten zwei Beispiele zur Aufzinsung und zur Rentenrechnung.

Beispiele:

1. Ein Kapital K_0 werde mit einem Zinssatz von p Prozent pro Zinsperiode über n Zinsperioden angelegt. Mit $i = \dfrac{p}{100}$ werden die Zinsen pro Euro angelegtes Kapital bezeichnet. Man berechne den Endwert K_n des Kapitals am Ende der letzten Periode. Für ein Anfangskapital von 500 Euro und einen jährlichen Zinssatz von 4.5% gebe man den Endwert des Kapitals nach 12 Jahren an.

   Am Ende der ersten Zinsperiode erhält man zu K_0 einen Zinsgewinn von $K_0 \cdot i$, so daß zu Ende der ersten Periode bzw. zu Beginn der zweiten Periode ein Kapital $K_1 = K_0 + i \cdot K_0 = K_0(1+i)$ als neues Anfangskapital vorliegt. Mit dem Zinsgewinn $K_1 \cdot i$ liegt dann zu Beginn der dritten Periode das Anfangskapital K_2 vor mit $K_2 = K_1(1+i) = K_0(1+i)^2$. Folglich erhält man am Ende der n-ten Zinsperiode ein Kapital

   $$K_n = K_0(1+i)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

   Diese Beziehung wird in der Finanzmathematik als *Leibnizsche Zinseszinsformel* bezeichnet. Die Folge (K_n) ist offensichtlich eine monoton wachsende geometrische Folge mit $q = 1 + i$.

   Im konkreten Fall der Verzinsung eines Anfangskapitals $K_0 = 500$ Euro und einem jährlichen Zinsfuß p von 4.5% erhält man am Ende von 12 Jahresperioden ein Endkapital $K_{12} = 500 \cdot (1 + 0.045)^{12} = 847.94$ Euro.

2. Wird regelmäßig zu Zeitpunkten am Beginn bzw. am Ende einer Zinsperiode eine feste Einzahlung E geleistet und mit einem Zinssatz von p Prozent verzinst, so spricht man von einer vorschüssigen bzw. nachschüssigen Rentenzahlung. Der Gesamtbetrag der Zahlungen einschließlich Zinsen wird als Rentenendwert bezeichnet. Man berechne den vorschüssigen Rentenendwert R_n nach n Zahlungsperioden. Im konkreten Fall sollen zu Beginn jedes Monats 100 Euro eingezahlt werden, die am Monatsende verzinst werden. Der jährliche Zinssatz betrage 6%. Wie groß ist der vorschüssige Rentenwert nach 5 Jahren?

   Die erste Zahlung $K_0 = E$ stellt das zu verzinsende Anfangskapital für die erste Periode dar, so daß am Ende der ersten Periode dieses Kapital auf $R_1 = K_0(1+i) = E(1+i)$ einschließlich Zins angewachsen ist. Zusammen mit der Einzahlung E steht für die zweite Periode ein Kapital $K_1 = E(1+i) + E$ zur Verzinsung an. Am Ende der zweiten Periode ist somit $R_2 = K_1(1+i) = E(1+i)^2 + E(1+i)$ der Rentenwert, der für die dritte Periode zusammen mit der Einzahlung E zu Beginn der Periode verzinst wird. Die Fortführung ergibt am Ende der n-ten Periode den Wert R_n

   $$R_n = E\left[(1+i)^n + (1+i)^{n-1} + \cdots + (1+i)\right].$$

   Setzt man $q = 1 + i$, so ist $q \neq 1$ und mit der Formel für die Partialsummen der geometrischen Reihe folgt

   $$R_n = E\left[q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1\right] - E = E \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1-q} - E.$$

   Indem die beiden Ausdrücke auf den Hauptnenner gebracht werden, erhält man schließlich

   $$R_n = E \cdot \frac{(1 - q^{n+1}) - (1-q)}{1-q} = E \cdot \frac{q - q^{n+1}}{1-q} = Eq \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Im konkreten Fall der monatlichen Verzinsung gilt für den monatlichen Zinssatz $i = \frac{p}{12 \cdot 100} = \frac{6}{12 \cdot 100} = 0.005$ und somit gilt $q = 1 + i = 1.005$. Die Einzahlungen erfolgen über $n = 60$ Monate. Damit ist bei Einzahlungen E von 100 Euro der Rentenwert nach 60 Monaten

$$R_{60} = 100 \cdot 1.005 \cdot \frac{1.005^{60} - 1}{1.005 - 1} = 7011.89 \text{ Euro.}$$

7.2 Konvergenzkriterien für Reihen

In den wenigsten Fällen hat man eine geschlossene Formel für die Partialsummen s_n einer Reihe. In diesem Abschnitt sind Konvergenzkriterien zusammengestellt mit deren Hilfe man das Konvergenzverhalten einer Reihe untersuchen kann, ohne auf den Reihenwert s zurückzugreifen.

7.2.1 Das notwendige Konvergenzkriterium

Das folgende Kriterium für die Konvergenz einer Reihe wird auch als *erstes Hauptkriterium* bezeichnet.

Satz 7.3 *(Notwendiges Konvergenzkriterium)*
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *sei konvergent. Dann gilt* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Beweis: Mit $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ und $s := \lim_{n\to\infty} s_n$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = s - s = 0 \quad \diamond$$

Die Anwendung des notwendigen Kriteriums erfolgt in der Form, daß bei Verletzung der Bedingung keine Konvergenz der Reihe vorliegen kann.

Da das Kriterium nicht hinreichend ist, muß beim Erfülltsein nicht zwangsläufig Konvergenz vorliegen. Einen Beleg für diese Aussage liefert die *harmonische Reihe*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k},$$

deren Bezeichnung daraus abgeleitet ist, daß jedes Element b der Reihe das harmonische Mittel seiner Nachbarn a und c ist, d.h. es gilt $\frac{1}{b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right)$.

Betrachtet man die Teilsumme s_n der harmonischen Reihe für $n = 2^k$ und fasst die Summanden entsprechend zusammen, kann man s_n wie folgt abschätzen:

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{>2\cdot\frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right)}_{>4\cdot\frac{1}{8}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16}\right)}_{>8\cdot\frac{1}{16}} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)}_{>2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k}}$$

d.h. $s_{2^k} > 1 + k \cdot \frac{1}{2} \to \infty$ für $k \to \infty$ (bzw. $n = 2^k \to \infty$). s_n wächst über alle Grenzen; die harmonische Reihe ist divergent, obwohl die Folge der Elemente $a_k = \frac{1}{k}$ gegen 0 strebt.

Bemerkung:
Die harmonische Reihe ist ein Spezialfall der allgemeinen Reihe

$$1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$$

die für $\alpha > 1$ konvergiert und für $\alpha \leq 1$ divergent ist.

7.2.2 Das Leibnizkriterium für alternierende Reihen

In der Anwendung leichter zu handhaben als das Cauchy-Kriterium ist das nachfolgende *Leibniz-Kriterium* für *alternierende Reihen*. In Übereinstimmung mit dem Begriff bei Folgen wird eine Reihe als *alternierend* bezeichnet, wenn ihre Glieder fortlaufend das Vorzeichen wechseln.

Satz 7.4 *(Leibniz-Kriterium)*
Ist $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine alternierende Reihe und bildet die Folge* $(|a_n|)$ *der Beträge der Glieder eine monotone Nullfolge, so konvergiert die Reihe und für die Differenz zwischen dem Grenzwert* s *und der* n*-ten Partialsumme gilt die Abschätzung*

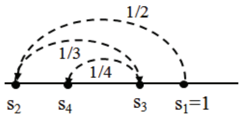
$$\left| s - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| < |a_{n+1}|.$$

Beweis: Mit $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ bilden $[s_n, s_{n+1}]$ bzw. $[s_{n+1}, s_n]$ eine Intervallschachtelung. Im ersten Fall gilt $|s - s_n| \leq s_{n+1} - s_n = a_{n+1}$ $\diamond$

Zusätzlich zur Überprüfung des notwendigen Konvergenzkriteriums ist beim Leibniz-Kriterium die Monotonie der Folge der Beträge der Glieder zu überprüfen. Berechnet man die Partialsumme s_n, so ist der Reihenrest bzw. die Differenz zwischen s_n und der Summe s der Reihe kleiner als der Betrag des ersten nicht in s_n erfassten Summanden.

Beispiel:

Ein Beispiel für eine Reihe mit wechseldem Vorzeichen ist die *alternierende harmonische Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$. Trägt man die Teilsummen s_n auf einem Zahlenstrahl ab, so erkennt man, daß s_{n+1} stets zwischen s_n und s_{n-1} liegt. Da außerdem $|s_n - s_{n-1}| = \frac{1}{n} \to 0$ gilt, ist anschaulich klar, daß die Reihe konvergiert.



Sie definiert durch eine „Intervallschachtelung“ den Summenwert s. Es gilt $|s - s_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

Merkwürdigerweise ändert sich bei Umordnung der Glieder der alternierenden harmonischen Reihe der Grenzwert:

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}\pm &= s \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\pm &= \frac{s}{2} \\ 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\ldots &= \frac{3}{2}s. \end{aligned}$$

Obwohl die letzte Reihe bis auf Umordnung die ursprüngliche Reihe ist, hat sie den Wert $\frac{3}{2}s$.

Konvergente Reihen, deren Summen von der Anordnung der Elemente abhängen, werden als *bedingt konvergent* bezeichnet.

Will man garantieren, daß sich beim Umordnen der Reihenwert nicht ändert, muß man stärker fordern, daß sogar die Reihe der Absolutbeträge konvergiert.

7.3 Absolute Konvergenz, Konvergenzkriterien für Reihen mit positiven Gliedern

Das notwendige Konvergenzkriterium ist geeignet, Reihen auszusondern, für die keine Konvergenz vorliegen kann. Um jedoch mit Sicherheit auf Konvergenz entscheiden zu können, muß ein hinreichendes Kriterium erfüllt sein.

Für Reihen mit positiven Gliedern werden wir nun einige nützliche hinreichende Kriterien für Konvergenz erarbeiten.

7.3.1 Absolute Konvergenz

Definition 7.3 *(Absolute Konvergenz)*
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *mit* $a_k \in \mathbb{R}$ *heißt* absolut konvergent, *wenn die Reihe der Beträge* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ *konvergiert.*

Absolut konvergente Reihen sind *unbedingt konvergent*, d.h. es können Glieder beliebig vertauscht werden, ohne die Summe der Reihe zu verändern.

Satz 7.5 *Eine absolut konvergente Reihe ist konvergent.*

Umgekehrt ist nicht jede konvergente Reihe absolut konvergent. Dies haben wir bereits am Beispiel der alternierenden harmonischen Reihe gesehen.
Absolut konvergente Reihen besitzen darüber hinaus Eigenschaften, die für das Rechnen und die Auswertung der Reihensumme von Bedeutung sind. Für die Konvergenz dieser Reihen gelten folgende Kriterien:

7.3.2 Majoranten- und Minorantenkriterium

Satz 7.6 *(Vergleichssatz, Majorantenkriterium, Minorantenkriterium)*
Es seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *und* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *Reihen mit positiven Gliedern.*

1. ***Majorantenkriterium für Konvergenz.***

   Gilt $a_k \leq b_k$ *für* $k \geq k_0$ *und ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergent, so ist auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent. Man sagt:* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *ist eine* konvergente Majorante *zu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. ***Minorantenkriterium für Divergenz.***

   Gilt $a_k \geq b_k$ *für* $k \geq k_0$ *und ist die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *divergent, so ist auch* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *divergent. Man sagt:* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *ist eine* divergente Minorante *zu* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Beispiele:

1. Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots$.

   Aus $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k(k-1)}$ für $k \geq 2$ folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

und mit $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ (vgl. Beispiel S. 127) weiter

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq 2.$$

Man erhält die Konvergenz der Reihe mit dem Majorantenkriterium.

Die Feststellung der Konvergenz einer Reihe beinhaltet nicht die Berechnung des Wertes s der Reihensumme. So kann man später z.B. als ein Nebenprodukt bei der Untersuchung von Fourierreihen den Wert s der Reihe zu $s = \frac{1}{6}\pi^2$ bestimmen.

Allgemeiner gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergiert für $\alpha > 1$ und divergiert für $\alpha \leq 1$. Diese Reihen werden oft für Vergleiche benötigt.

2. Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$.

   Mit $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{k}$ und der Divergenz der harmonischen Reihe hat man mit

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

   die harmonische Reihe als divergente Minorante.

7.3.3 Wurzel- und Quotientenkriterium

Während beim Vergleichssatz beliebige Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zum Vergleich zugelassen sind, können auch geometrische Reihen zum Vergleich verwendet werden. Geometrische Reihen besitzen den Vorzug, daß ihr Konvergenzverhalten allein durch die Größe q des Quotienten zweier aufeinander folgender Glieder bestimmt ist.

Satz 7.7 *(Wurzelkriterium)*
Gilt für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für alle Indizes $k \geq k_0$ die Beziehung $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q$ mit einer Konstanten $0 < q < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent. Im Fall $\sqrt[k]{|a_k|} > 1$ für alle $k \geq k_0$ ist die Reihe divergent. Mit $q := \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$ gilt:

- *für $q < 1$ ist die Reihe absolut konvergent,*
- *für $q > 1$ ist die Reihe divergent und*
- *für $q = 1$ versagt das Kriterium, d.h. es kann keine Aussage getroffen werden.*

Beweis: Im Fall $\sqrt[k]{|a_k|} \leq q < 1$ für alle $k \geq k_0$ gilt $0 < |a_k| < q^k$ und somit ist die geometrische Reihe $\sum_{k=k_0}^{\infty} q^k$ eine konvergente Majorante für den Reihenrest der Reihe vom Index k_0 an. Dagegen ist das notwendige Kriterium im Fall $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ verletzt ◇

In analoger Weise kann das Quotientenkriterium nachgewiesen werden:

Satz 7.8 *(Quotientenkriterium)*
Gilt für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ für alle Indizes $k \geq k_0$ die Beziehung $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leq q$ mit einer Konstanten $0 < q < 1$, so ist die Reihe absolut konvergent. Im Fall $\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| > 1$ für alle $k \geq k_0$ ist die Reihe divergent. Mit $q := \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$ gilt:

- *für $q < 1$ ist die Reihe absolut konvergent,*
- *für $q > 1$ ist die Reihe divergent und*
- *für $q = 1$ versagt das Kriterium, d.h. es kann keine Aussage getroffen werden.*

Beispiele:

1. Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k}\right)^k = 2 + 1 + \frac{8}{27} + \ldots$.

   Das Wurzelkriterium liefert mit $q = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{2}{k} = 0$ die absolute Konvergenz der Reihe.

2. Divergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k} = 2 + 2 + \frac{8}{3} + \ldots$.

   Mit $q = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k+1}\cdot k}{(k+1)\cdot 2^k} = 2 \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 2 > 1$ folgt die Divergenz nach dem Quotientenkriterium.

3. Für $x \in \mathbb{R}$ betrachte die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \ldots$.

   Mit $q = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|^{k+1}\cdot k!}{(k+1)!\cdot |x|^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{|x|}{k+1} = 0 < 1$ liefert das Quotientenkriterium die absolute Konvergenz der Reihe für jedes feste $x \in \mathbb{R}$.

4. Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \ldots$ mit $\alpha > 0$ konstant liefert das Quotientenkriterium mit $q = \lim_{k\to\infty} \frac{k^\alpha}{(k+1)^\alpha} = \left(\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}\right)^\alpha = 1$ keine Aussage. Mit anderen

Hilfsmitteln kann man zeigen, daß gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \begin{cases} \text{konvergent für } \alpha > 1, \\ \text{divergent für } \alpha \le 1. \end{cases}$$

7.3.4 Beispiele und Anwendungen der Kriterien

1. Man untersuche die Reihen auf absolute Konvergenz durch Anwendung von Wurzel- bzw. Quotientenkriterium:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = 1 + \frac{2!}{2^2} + \frac{3!}{3^3} + \frac{4!}{4^4} + \ldots.$

Beim Auftreten von Fakultäten im Bildungsgesetz der Reihenglieder ist i.a. die Anwendung des Quotientenkriteriums zu empfehlen, da sich durch die Quotientenbildung Faktoren in Zähler und Nenner kürzen lassen.

a) Für ein Reihenglied $a_k = \dfrac{1}{k!}$ und durch Ersetzen von k durch $k+1$ erhält man für das folgende Glied $a_{k+1} = \dfrac{1}{(k+1)!}$. Anwendung des Quotientenkriteriums liefert

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k+1} \to 0 = q.$$

Wegen $q = 0 < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe. In einem späteren Kapitel werden wir mit Hilfe der Taylorentwicklung der Exponentialfunktion sehen, daß die Reihensumme die Eulersche Zahl e liefert.

b) Wegen der Fakultäten wenden wir wieder das Quotientenkriterium an. Mit $a_k = \dfrac{k!}{k^k}$, $a_{k+1} = \dfrac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}$ erhält man durch Kürzen der Fakultäten und Beachtung des Grenzwerts aus Satz 6.6

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \, \frac{k^k}{k!} = \frac{(k+1)}{(k+1)^{k+1}} \, \frac{k^k}{1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \to \frac{1}{e} = q.$$

Wegen $q = \dfrac{1}{e} < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe.

2. Untersuchen Sie die Konvergenz der Zahlenreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \ldots$$

Wegen

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)} \le \frac{1}{k^2}$$

und der Konvergenz von $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ folgt die Konvergenz der Reihe mit dem Majorantenkriterium.

3. Mit Hilfe des Leibniz-Kriteriums zeige man die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k+5}{k^2}.$$

Die Reihenglieder besitzen alternierendes Verhalten. Zum Konvergenznachweis ist zu zeigen, daß die Folge $(|a_k|)$ eine monotone Nullfolge ist.

Es gilt $\displaystyle\lim_{k\to\infty} |a_k| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+5}{k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{k(1+\frac{5}{k})}{k \cdot k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{5}{k}}{k} = 0$ und für die Beträge aufeinander folgender Glieder der Reihe erhält man

$$|a_{k+1}| = \frac{(k+1)+5}{(k+1)^2} = \frac{(k+1)\left(1+\frac{5}{k+1}\right)}{(k+1)^2} = \frac{1+\frac{5}{k+1}}{k+1} \le \frac{1+\frac{5}{k}}{k+1} \le \frac{1+\frac{5}{k}}{k} = |a_k|,$$

d.h. $(|a_k|)$ ist eine monotone Nullfolge und die Reihe ist konvergent.

7.4 Potenzreihen

Läßt man als Glieder einer unendlichen Reihe Terme zu, die von einer Variablen x abhängen, so erhält man eine Erweiterung des bisherigen Reihenbegriffs auf *Funktionenreihen*. Eine solche Reihe definiert auf der Menge $\mathbf{K}$ aller x, für welche sie konvergiert, eine Funktion. $\mathbf{K}$ heißt *Konvergenzbereich* der Reihe. In diesem Abschnitt werden Funktionenreihen betrachtet, deren Reihenglieder Potenzen in x sind.

7.4.1 Definition und Beispiele für Potenzreihen

Definition 7.4 *(Potenzreihe)*
Die unendliche Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots$$

heißt Potenzreihe *mit* Entwicklungspunkt x_0*; die reellen Konstanten* a_k *heißen Koeffizienten der Potenzreihe. Ist* $x_0 = 0$*, so hat die Potenzreihe die einfachere Form*

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots.$$

Bemerkung:

Eine Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

kann auch für komplexe Koeffizienten $a_k \in \mathbb{C}$ und die komplexe Variable $z \in \mathbb{C}$ erklärt werden. Die Begriffsbildungen sind analog.

Beispiele:

1. Die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$ konvergiert für alle x mit $|x| < 1$.

   Sie stellt im Intervall $(-1, 1)$ die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ dar.

   An jeder festen Stelle $x \in (-1, 1)$ kann die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ beliebig genau durch Polynome angenähert werden. Diese Annäherung (Approximation) von Funktionen durch Polynome ist eine der wichtigsten Anwendungen der Potenzreihen:

   Annäherung von $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ durch Polynome:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1 \\ P_1(x) &= 1 + x \\ P_2(x) &= 1 + x + x^2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \\ &\vdots \\ P_n(x) &= 1 + x + x^2 + \dots + x^n \end{aligned}$$

   heißt *Taylorpolynom* der Ordnung n der Funktion $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

2. Für die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^k \cdot k} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4 \cdot 2} + \dots$ wenden wir das Quotientenkriterium mit $a_k = \dfrac{x^k}{2^k \cdot k}$ an:

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(\left|\frac{x^{k+1}}{x^k}\right| \frac{2^k \cdot k}{2^{k+1} \cdot (k+1)} \right) = \frac{|x|}{2} \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = \frac{|x|}{2}.$$

   Damit konvergiert die Reihe für $|x| < 2$ absolut und divergiert für $|x| > 2$.

   Für $x = 2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^k \cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$ divergent (harmonische Reihe).

   Für $x = -2$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{2^k \cdot k} = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{k}$ konvergent (alternierende harmonische Reihe).
   Der Konvergenzbereich ergibt sich zu $\mathbf{K} = [-2, 2)$.

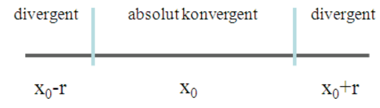
7.4.2 Konvergenzverhalten von Potenzreihen

Mit Hilfe von Quotienten- und Wurzelkriterium läßt sich über das Konvergenzverhalten von Potenzreihen folgende Aussage machen:

Satz 7.9 *(Konvergenz von Potenzreihen)*
Die Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ *konvergiert absolut in einem symmetrisch zum Entwicklungspunkt* x_0 *liegenden Intervall* $(x_0 - r, x_0 + r)$. *Für den* Konvergenzradius r *gilt:*

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \quad \textit{bzw.} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right)$$

falls die Grenzwerte existieren. Die Konvergenz an den Randpunkten $x_0 = \pm r$ *muß gesondert untersucht werden.*



Beweis: Mit dem Quotientenkriterium in der Limesform haben wir absolute Konvergenz für

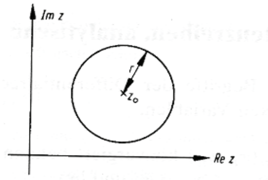
$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}}{a_k (x - x_0)^k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x - x_0| < 1 \Leftrightarrow |x - x_0| < r \quad \text{mit} \quad r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| \qquad \diamond$$

Bemerkungen:

1. Für $r = 0$ konvergiert die Potenzreihe für kein $x \neq x_0$. Für $r \to \infty$ (uneigentlicher Grenzwert) konvergiert sie für alle $x \in \mathbb{R}$ (*beständig konvergente Potenzreihe*).

2. Für festes $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ ist die Approximation des Funktionswerts der durch die Potenzreihe definierten Funktion $f(x)$ durch den Funktionswert des Polynoms $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x - x_0)^k$ umso besser, je näher x beim Entwicklungspunkt x_0 liegt. In größerer Entfernung von x_0 kann die Konvergenz sehr schlecht sein.

3. Die komplexe Potenzreihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ konvergiert absolut für alle z innerhalb des Kreises um z_0 mit Radius $r = \lim_{k\to\infty} \left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$, d.h. für z mit $|z - z_0| < r$.
   Der Kreis $|z - z_0| < r$ heißt *Konvergenzkreis* der komplexen Potenzreihe. Die Konvergenz an den Randpunkten $|z - z_0| = r$ muß gesondert untersucht werden.



Beispiele:

1. Für die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots$ gilt $a_k = 1$ für alle k und wir erhalten

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

bzw.

$$r = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}} \right) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[k]{1}} \right) = 1.$$

2. Für die Potenzreihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k \cdot k} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4 \cdot 2} + \dots$ gilt $a_k = \frac{1}{2^k \cdot k}$ für alle k und wir erhalten

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{2^{k+1} \cdot (k+1)}{2^k \cdot k} \right| = 2 \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 2.$$

Damit konvergiert die Reihe für $x \in (-2, 2)$ absolut und divergiert für $|x| > 2$. Dieses Ergebnis stimmt mit dem früheren Resultat überein.

3. Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + - \dots$ gilt $a_k = (-1)^{k-1} \cdot \frac{1}{k}$, $a_{k+1} = (-1)^k \cdot \frac{1}{k+1}$, d.h. $\frac{a_k}{a_{k+1}} = -\frac{k+1}{k}$ und weiter $r = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$. Die Reihe konvergiert für $|x| < 1$ absolut und divergiert für $|x| > 1$. In den Randpunkten gilt:

$x = 1$: $\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + - \dots$ konvergent nach dem Leibniz-Kriterium;

$x = -1$: $\quad -1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots$ divergent (harmonische Reihe).

4. Für die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$ folgt $a_k = \frac{1}{k!}$, $a_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$, d.h. $r = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} (k+1) = \infty$. Die Reihe ist beständig konvergent.

5. Für die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (kx)^k = x + (2x)^2 + (3x)^3 + \dots = x + 4x^2 + 27x^3 + \dots$ mit $a_k = k^k$ folgt $\sqrt[k]{|a_k|} = k$ und weiter $r = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$. Die Reihe ist divergent für alle $x \neq 0$.

6. Die komplexe geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \dots$ mit $a_k = 1$ besitzt den Konvergenzradius

$$r = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k\to\infty} 1 = 1.$$

Somit konvergiert die Reihe für alle z innerhalb des Einheitskreises $|z| < 1$. Die Konvergenz auf dem Einheitskreis $|z| = 1$ wird hier nicht untersucht.

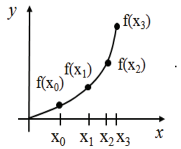
8 Grenzwerte und Stetigkeit von Funktionen

8.1 Grenzwerte von Funktionen

Zur Untersuchung des Verhaltens einer Funktion an einer Stelle $x = a$ bestimmt man i.a. zunächst den Funktionswert $f(a)$. Die Berechnung von Grenzwerten ist insbesondere dann erforderlich, wenn die Funktionsdarstellung für $x = a$ einen unbestimmten Ausdruck der Form „$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, \ldots$“ ergibt.

Beispiel:

Wir betrachten die Funktion $y = f(x) = x^2$. Für die Folge der Argumente $x_n \to a$ konvergiert nach den Limesregeln die Folge der Bilder $y_n = f(x_n) = x_n^2 \to a^2$. Wählen wir speziell $x_n = 2 - \frac{1}{n}$, so erhalten wir



$$y_n = f(x_n) = \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 = 4 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2} \to 4 = f(2).$$

8.1.1 Der Funktionenlimes

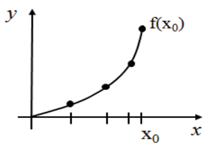
Definition 8.1 *(Funktionenlimes)*
Es sei $y = f(x)$ eine reelle Funktion und $a \in \mathbb{R}$. Gilt für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq a$ und $x_n \to a$ für $n \to \infty$, daß die Folge $f(x_n)$ der zugehörigen Funktionswerte stets gegen den gleichen Grenzwert g konvergiert, so heißt g Grenzwert der Funktion *$y = f(x)$ oder* Funktionenlimes *für $x \to a$. Man schreibt*

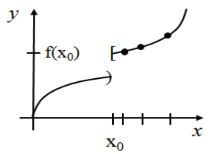
$$\lim_{x \to a} f(x) = g \quad \textit{bzw.} \quad f(x) \to g \quad (x \to a).$$

Bemerkungen:

1. Betrachten wir nur Folgenelemente x_n, die links bzw. rechts der Stelle $x = a$ liegen, so werden die entsprechenden Grenzwerte als *rechts- bzw. linksseitige Grenzwerte* bezeichnet und unter dem Begriff *einseitige Grenzwerte* zusammengefaßt:

$$\lim_{x \to a-} f(x) = \lim_{h \to 0, h>0} f(a-h) = g_l \quad \text{bzw.} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{h \to 0, h>0} f(a+h) = g_r.$$





2. Die Funktion $y = f(x)$ besitzt bei a den Grenzwert g genau dann, wenn linksseitiger und rechtsseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{h \to 0, h>0} f(a-h) = \lim_{h \to 0, h>0} f(a+h) = g.$$

3. Gilt für die Funktion $y = f(x)$

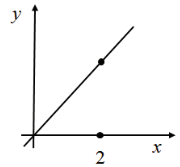
$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad (\text{bzw. } -\infty)$$

so spricht man vom *uneigentlichen Funktionenlimes* bzw. vom *uneigentlichen Grenzwert*. Entsprechend sind einseitige uneigentliche Funktionenlimites erklärt.

Beispiele:

1. Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x - 2}$ besitzt bei $a = 2$ die einseitigen Grenzwerte

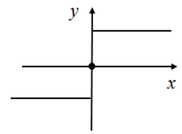
$$\begin{aligned} g_l &= \lim_{x \to 2-} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2-} x = 2, \\ g_r &= \lim_{x \to 2+} \frac{x^2 - 2x}{x - 2} = \lim_{x \to 2+} x = 2. \end{aligned}$$



$y = f(x)$ besitzt bei $a = 2$ den Grenzwert $g = g_l = g_r = 2$.

2. Die Funktion $y = f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ besitzt in $a = 0$ die einseitigen Grenzwerte

$$\begin{aligned} g_l &= \lim_{x \to 0-} \operatorname{sgn}(x) = -1, \\ g_r &= \lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn}(x) = +1. \end{aligned}$$

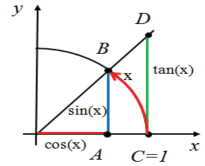


Wegen $g_l \neq g_r$ besitzt die Funktion in $a = 0$ keinen Grenzwert. $y = f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ hat einen Sprung bei $a = 0$.

3. Wir untersuchen die Funktion $y = f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ für $x \to 0$.

Für die Flächen der Dreiecke gilt

$$\begin{array}{rccccc} & A_{OAB} & < & A_{OCB} & < & A_{OCD} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{\sin x \cdot \cos x}{2} & < & 1^2 \cdot \pi \cdot \dfrac{x}{2\pi} & < & \dfrac{\tan x}{2} \\ \Leftrightarrow & \cos x & < & \dfrac{x}{\sin x} & < & \dfrac{1}{\cos x} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{\cos x} & > & \dfrac{\sin x}{x} & > & \cos x. \end{array}$$



Mit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$ und $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ folgt mit dem Einschließungskriterium

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

4. Man untersuche für die Funktion $y=f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ an der Stelle $x=0$ die Existenz einseitiger Grenzwerte.

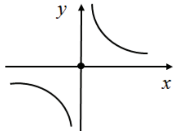
   a) linksseitiger Grenzwert $x\to 0-$: Es sei (x_n), $x_n<0$ eine beliebige Nullfolge. Dann strebt der Exponent $\frac{1}{x_n}$ der Funktion gegen $-\infty$ und die Folge der Funktionswerte $e^{\frac{1}{x_n}}$ strebt gegen den linksseitigen Grenzwert $g_l=0$.

   b) rechtsseitiger Grenzwert $x\to 0+$: Für jede Nullfolge (x_n) positiver Zahlen strebt der Exponent $\frac{1}{x_n}$ gegen $+\infty$ und die entsprechenden Funktionswerte streben gegen $+\infty$. Wegen $g_l=0$ und $g_r=+\infty$ existiert der Grenzwert der Funktion an der Stelle $x=0$ nicht.

5. Die Funktion $y=f(x)=\frac{1}{x}$

   besitzt die uneigentlichen links- und rechtsseitigen Grenzwerte

$$\lim_{x\to 0-}\frac{1}{x}=-\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0+}\frac{1}{x}=\infty.$$



Der Grenzwert einer Funktion ist vermittels Definition 8.1 auf den Grenzwert der Zahlenfolge $(f(x_n))$ von Funktionswerten zurückgeführt. Aus diesem Grund kann Satz 6.2 für Folgen auf Summen, Differenzen, Produkte, Quotienten und Potenzen von Funktionen übertragen werden.

Satz 8.1 *Es gelte $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=g_1$ und $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=g_2$. Dann kann die Grenzwertbildung mit den Operationen Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division (vorausgesetzt der Grenzwert des Nenners ist nicht 0) und Potenzieren (vorausgesetzt der Grenzwert der Basis ist >0) vertauscht werden. Damit gelten für $x\to a$ die Beziehungen:*

$$c_1\,f_1(x)+c_2\,f_2(x)\to c_1\,g_1+c_2\,g_2, \qquad f_1(x)\cdot f_2(x)\to g_1\cdot g_2$$
$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\to\frac{g_1}{g_2}\quad (\textit{Vor.: } g_2\neq 0), \qquad [f_1(x)]^{f_2(x)}\to g_1^{g_2}\quad (\textit{Vor.: } g_1>0).$$

Beispiele:

1. Man berechne den Funktionenlimes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2x+5}{\cos x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+5}{\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}(x^2-2x+5)}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}x^2-2\lim\limits_{x\to 0}x+\lim\limits_{x\to 0}5}{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=\frac{5}{1}=5.$$

2. Man berechne den Funktionenlimes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$.

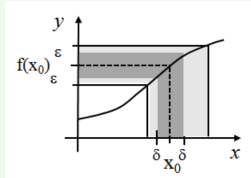
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x} &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-1}{x\cdot(\sqrt{x+1}+1)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

8.1.2 Die ε/δ-Definition des Funktionenlimes

Satz 8.2 *(ε/δ-Definition des Funktionenlimes)*

Die Funktion $y=f(x)$ mit Definitionsbereich $D(f)$ hat an der Stelle $x=a$ genau dann den Grenzwert g, wenn für jedes $\varepsilon>0$ ein positiver Wert $\delta=\delta(\varepsilon,a)$ existiert sodaß gilt:

$$|x-a|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-g|<\varepsilon.$$



Für die Existenz eines Grenzwerts muss sich die Funktion $y=f(x)$ in dem Sinne „vernünftig“ verhalten, daß es zu vorgebenem $\varepsilon>0$ eine nichtleere δ-Umgebung von $x=a$ geben muss mit der Eigenschaft, daß die Differenz $f(x)-g$ für jedes x aus dieser Umgebung zwischen $-\varepsilon$ und ε liegt.

Beispiele:

1. Die Funktion $y=f(x)=2x-1$ hat an der Stelle $a=1$ den Funktionenlimes $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=1$.

   Zu $\varepsilon>0$ bestimme ein $\delta(\varepsilon)>0$ so, daß für x mit $|x-1|<\delta$ folgt $|f(x)-1|<\varepsilon$.

   Sei nun $|x-1|<\delta$. Dann gilt

$$|x-1|<\delta \quad\Rightarrow\quad |f(x)-1|=|2x-1-1|=|2x-2|=2|x-1|<2\delta\overset{!}{<}\varepsilon.$$

   Für $\delta<\frac{\varepsilon}{2}$ gilt demnach $|x-1|<\delta\Rightarrow|f(x)-1|<\varepsilon$ und der Funktionenlimes ist nachgewiesen.

   Für $\varepsilon=0.01$ folgt $\delta<0.005$, d.h. $|x-1|<0.005\Rightarrow|f(x)-1|<0.01$.

2. Die Funktion $y = f(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ besitzt bei $a = 0$ den Funktionenlimes $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

   Zu $\varepsilon > 0$ bestimme ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, daß für x mit $|x - 0| < \delta$ folgt $|f(x) - 0| < \varepsilon$.
   Sei nun $|x| < \delta$. Dann gilt

$$|x| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 0| = \left|x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x| \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le |x| \cdot 1 < \delta \overset{!}{<} \varepsilon.$$

   Für $\delta < \varepsilon$ gilt demnach $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ und der Funktionenlimes ist nachgewiesen.

3. Die gebrochen rationale Funktion $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x}{x - 1}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ besitzt den Funktionenlimes $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$.

   Zu $\varepsilon > 0$ bestimme ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, daß für x mit $|x - 1| < \delta$ folgt $|f(x) - 2| < \varepsilon$.
   Sei nun $|x - 1| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |x-1| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - 2| &= \left|\frac{2x^2 - 2x}{x - 1} - 2\right| = \left|\frac{2x^2 - 2x - 2x + 2}{x - 1}\right| = 2\left|\frac{(x-1)^2}{x-1}\right| \\ &= 2|x - 1| < 2\delta \overset{!}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

   Für $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2}$ gilt demnach $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$ und der Funktionenlimes ist nachgewiesen.

8.1.3 Funktionenlimes für $x \to \pm\infty$

Neben dem Verhalten einer Funktion an einer endlichen Stelle $x = a$ interessiert häufig das Verhalten für unbeschränkt wachsendes Argument.

Definition 8.2 *Besitzt für alle Folgen (x_n) mit $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$ die Folge $(f(x_n))$ der Funktionswerte den gleichen Grenzwert g, so heißt g der* Grenzwert von $f(x)$ für $x \to \infty$ *und wird symbolisiert durch $\lim_{x\to\infty} f(x) = g$. Entsprechend ist $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ erklärt.*

Beispiele:

1. Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ strebt für $|x| \to \infty$ gegen 0:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

2. Man berechne den Funktionenlimes $\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^2 + 4}{x^2 - 1}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 + 4}{x^2 - 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 \cdot (2 + \frac{4}{x^2})}{x^2 \cdot (1 - \frac{1}{x^2})} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{1} = 2.$$

3. Man untersuche die rationale Funktionen

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10}$$

   an den Stellen, an denen der Funktionsausdruck nicht definiert ist sowie für $x \to \pm\infty$ auf Existenz von Grenzwerten.

   Ein rationaler Funktionsausdruck ist an Nullstellen des Nenners nicht definiert. Die quadratische Nennerfunktion $x^2 - 7x + 10$ besitzt die Nullstellen $x = 2$ und $x = 5$ und kann somit als Produkt $(x - 2)(x - 5)$ dargestellt werden. Da der Zähler ebenfalls die Nullstelle $x = 2$ besitzt, kann bei der Grenzwertberechnung für eine Folge (x_n), $x_n \to 2$ wegen $x_n \ne 2$ der Faktor $(x_n - 2)$ gekürzt werden und man erhält

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{(x_n - 2)(x_n - 5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 2}{x_n - 5} = \frac{2 + 2}{2 - 5} = -\frac{4}{3}$$

   als Grenzwert an der Stelle $x = 2$. Bei $x = 5$ existiert kein endlicher Grenzwert, da der Zähler für $x = 5$ nicht Null wird. Damit liegt eine Polstelle vor. Links- und rechtsseitiger Grenzwert sind uneigentlich $-\infty$ bzw. $+\infty$. Wir zeigen dies nur für den linksseitigen Grenzwert $x \to 5-$. Dazu wählen wir die Folge (x_n) mit $x_n < 5$, $x_n \to 5$ in der Form $x_n = 5 - \varepsilon_n$ und (ε_n) ist eine Nullfolge positiver Zahlen. Es gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{(x_n - 2)(x_n - 5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n + 2}{x_n - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{(5 - \varepsilon_n) + 2}{(5 - \varepsilon_n) - 5} = \lim_{n\to\infty} \frac{7 - \varepsilon_n}{-\varepsilon_n} = -\infty.$$

   Bei der Berechnung des Grenzwertes für $x \to \pm\infty$ wird wie bei den Grenzwerten der Folgen die höchste gemeinsame Potenz von x in Zähler und Nenner ausgeklammert und man erhält

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 7x + 10} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(1 - \frac{4}{x^2})}{x^2(1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2})} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}} = \frac{1 - 0}{1 - 0 + 0} = 1.$$

8.2 Stetigkeit von Funktionen

Die Eigenschaft der Stetigkeit einer Funktion in einem Punkt bzw. in einem Intervall ist schwächer als die Differenzierbarkeit, sie sichert aber bereits fundamentale Eigenschaften einer Funktion wie z.B. die Annahme jedes Wertes aus einem gewissen Intervall als Funktionswert (vgl. den Zwischenwertsatz 8.5). Für technische Probleme bedeutet dies, daß Zustände eines Prozesses, die einem solchen Funktionswert entsprechen, tatsächlich erreichbar sind. Für unstetige Funktionen ist dies im Allgemeinen nicht gültig.

8.2.1 Stetige Funktionen

Definition 8.3 *(Stetigkeit)*
Eine Funktion $y = f(x)$, die in einer Umgebung von $x = a$ definiert ist, heißt stetig *in $x = a$, wenn sowohl der Funktionswert $f(a)$ als auch der Funktionenlimes im Punkt $x = a$ existieren und gleich sind, d.h.*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Bemerkungen:

1. Die Gleichheit von Funktionswert und Grenzwert dokumentiert sich in der graphischen Darstellung der Funktion darin, daß der Funktionsgraph an der Stelle $x = a$ einen ununterbrochenen Verlauf besitzt. Unstetigkeiten äußern sich z.B. in Sprüngen bzw. Unendlichkeitsstellen (vgl. Bild)

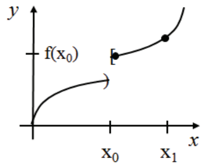
2. Entsprechend der Existenz einseitiger Grenzwerte definiert man die einseitige Stetigkeit einer Funktion. Die Funktion $y = f(x)$ heißt *linksseitig stetig* in $x = a$, wenn sowohl der Funktionswert $f(a)$ als auch der linksseitige Grenzwert der Funktion in $x = a$ existieren und gleich sind, d.h.

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a).$$

Entsprechend heißt $y = f(x)$ *rechtsseitig stetig*, wenn

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Stimmen rechts- und linksseitiger Grenzwert von $y = f(x)$ für $x \to a$ überein, so ist $y = f(x)$ stetig in a.



Sprungstelle und Stetigkeitsstelle

Neben der Stetigkeit in einem Punkt ist die Stetigkeit einer Funktion in einem offenen oder abgeschlossenen Intervall von Bedeutung.

Definition 8.4 *Eine Funktion $y = f(x)$ heißt* stetig im offenen Intervall (a, b), *wenn $f(x)$ in jedem Punkt des Intervalls stetig ist. Die Funktion heißt* stetig im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, *wenn $f(x)$ im offenen Intervall (a, b) stetig ist sowie in $x = a$ rechtsseitig und in $x = b$ linksseitig stetig ist.*

Beispiele:

1. Polynome $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ mit $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ sind stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$. Mit dem Limesregeln gilt

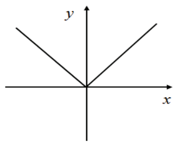
$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) &= \lim_{x \to x_0} a_0 + \lim_{x \to x_0} a_1 x + \cdots + \lim_{x \to x_0} a_n x^n \\ &= a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n = P_n(x_0). \end{aligned}$$

2. Die Betragsfunktion $y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ ist stetig in $\mathbb{R}$.

Es gilt

$$\lim_{x \to 0+} |x| = \lim_{x \to 0+} x = 0 = |0| \quad \text{und}$$

$$\lim_{x \to 0-} |x| = \lim_{x \to 0-} (-x) = 0 = |0|.$$

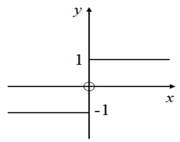


3. Die Funktion $y = H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ist stetig in $x_0 \neq 0$.

Für $x_0 = 0$ ist $H(x)$ nicht stetig:

$$\lim_{x \to 0+} H(x) = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to 0-} H(x) = -1,$$

aber es ist $H(0) = \dfrac{1}{2}$. Links- und rechtsseitiger Grenzwert stimmen nicht mit dem Funktionswert überein. $H(x)$ hat bei $x_0 = 0$ eine Sprungstelle.

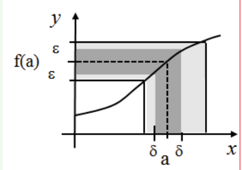


8.2.2 Die ε/δ-Definition der Stetigkeit

Satz 8.3 *(ε/δ-Definition der Stetigkeit)*

Die Funktion $y = f(x)$ mit Definitionsbereich $D(f)$ ist stetig in $a \in D(f)$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \delta(\varepsilon, a) > 0$ existiert sodaß gilt:

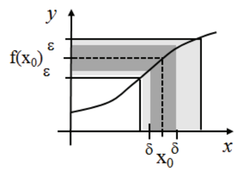
$$|x - a| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$



Beispiele:

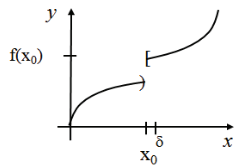
1. Die Funktion $y = f(x)$ aus dem Bild ist stetig in jedem Punkt $x_0 \in D(f)$:

Zu jeder ε-Umgebung von $f(x_0)$ existiert eine δ-Umgebung von x_0, die durch f ganz in die ε-Umgebung von $f(x_0)$ abgebildet wird.



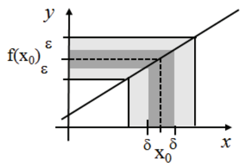
2. Die Funktion $y = f(x)$ aus dem Bild ist nicht stetig in $x_0 \in D(f)$:

Es gibt eine ε-Umgebung von $f(x_0)$ zu der keine δ-Umgebung von x_0 existiert, die durch f ganz in die ε-Umgebung von $f(x_0)$ abgebildet wird.



3. Die affin-lineare Funktion $y = f(x) = a \cdot x + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ ist stetig für alle $x_0 \in \mathbb{R}$.

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Zu $\varepsilon > 0$ bestimme ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, daß für x mit $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



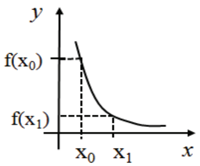
Sei nun $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |a \cdot x + b - (a \cdot x_0 + b)| = |a|\,|x - x_0| \\ &< |a|\,\delta \overset{!}{<} \varepsilon. \end{aligned}$$

Für $\delta < \dfrac{\varepsilon}{|a|}$ gilt demnach $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ und die Stetigkeit von f in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist nachgewiesen.

4. Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ ist stetig für alle $x_0 \neq 0$.

   Sei $x_0 > 0$. Zu $\varepsilon > 0$ bestimme ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, daß für x mit $|x - x_0| < \delta$ folgt $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.



   Sei nun $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x \cdot x_0}\right| < \frac{1}{|x \cdot x_0|} \cdot \delta.$$

   An dieser Stelle benötigen wir einen Trick:

   wir wählen $\delta < \frac{1}{2}x_0$, d.h. es gilt $x_0 - \frac{1}{2}x_0 < x < x_0 + \frac{1}{2}x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_0 < x < \frac{3}{2}x_0$. Damit können wir weiter abschätzen:

$$|f(x) - f(x_0)| < \frac{1}{|x \cdot x_0|} \cdot \delta < \frac{1}{\frac{x_0}{2} \cdot x_0} \cdot \delta = \frac{2}{x_0^2} \cdot \delta \overset{!}{<} \varepsilon.$$

   Für $\delta < \min\left\{\frac{1}{2}x_0, \frac{\varepsilon}{2}\,x_0^2\right\}$ gilt demnach $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ und die Stetigkeit von $y = f(x)$ in $x_0 \in (0, \infty)$ ist nachgewiesen. Die Stetigkeit in $(-\infty, 0)$ folgt aus Symmetriegründen.

8.2.3 Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 8.1 über die Berechnung von Grenzwerten überträgt sich auf die Stetigkeit.

Satz 8.4 *Die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ seien bei $x = a$ stetig und $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen*

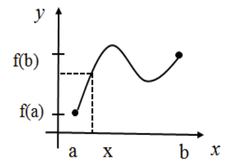
$$c_1\, f_1(x) + c_2\, f_2(x), \quad f_1(x) \cdot f_2(x), \quad \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \quad (f_2(a) \neq 0), \quad f_1(x)^{f_2(x)} \quad (f_1(a) > 0)$$

bei $x = a$ stetig.

Bemerkungen:

1. Aus der Stetigkeit der Polynome folgt mit Satz 8.4 die Stetigkeit der gebrochen rationalen Funktionen mit Ausnahme der Nennernullstellen.
2. Die Funktionen $y = a^x$ und $y = \log x$ sind auf ihren Definitionsbereichen stetig. Die Funktionen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ sind stetig auf $\mathbb{R}$. Aus Satz 8.4 folgt die Stetigkeit von $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ für $x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Satz 8.5 *(Zwischenwertsatz)*
Ist die Funktion $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so wird jeder Wert zwischen den Funktionswerten $f(a)$ und $f(b)$ für ein $x \in [a, b]$ als Funktionswert angenommen.



Beweis: Es gelte $f(a) < f(b)$ und v sei eine Zahl zwischen $f(a)$ und $f(b)$. Wir konstruieren eine Intervallschachtelung für u mit $f(u) = v$.

Zunächst setzen wir $a_1 = a$ und $b_1 = b$ und bilden $x = \dfrac{a_1 + b_1}{2}$ sowie $y = f(x)$. Gilt nun $y = v$, so haben wir ein u gefunden. Im Fall $y < v$ setzen wir $a_2 = x$ und $b_2 = b_1$, im Fall $y > v$ setzen wir $a_2 = a_1$ und $b_2 = x$. So gewinnt man eine Intervallschachtelung

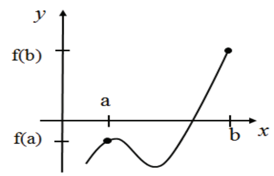
$$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \ldots b_n \leq \cdots \leq b_2 \leq b_1$$

mit

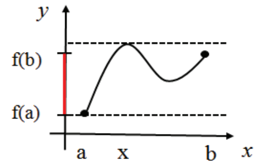
$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad \text{d.h.} \quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0.$$

Der Grenzwert $u = \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ leistet das Gewünschte. Wegen $f(a_n) < v < f(b_n)$ ist $\lim f(a_n) \leq v \leq \lim f(b_n)$. Da f stetig ist, gilt $\lim f(a_n) = f(\lim a_n) = f(u)$ und $\lim f(b_n) = f(\lim b_n) = f(u)$. Aus $f(u) \leq v \leq f(u)$ folgt $f(u) = v$ $\diamond$

Satz 8.6 *(Nullstellensatz)*
Ist $y = f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ stetig und gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$, d.h. für die Funktionswerte in den Randpunkten liegt ein Vorzeichenwechsel vor, so gibt es im Innern von $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle der Funktion (Bild).



Satz 8.7 *(Maximum und Minimum stetiger Funktionen)*
Ist $y = f(x)$ im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetig, so nimmt die Funktion in $[a, b]$ ihr Maximum und Minimum als Funktionswert an.



Die Aussage muß für das offene Intervall (a, b) nicht mehr gelten. So besitzt eine streng monoton wachsende Funktion in $x = a$ den kleinsten und in $x = b$ den größten Funktionswert, die Stellen a und b sind aber bei einem offenen Intervall keine Punkte des Intervalls.

Satz 8.8 *(Stetigkeit der Verkettung und der Umkehrfunktion)*
Eine mittelbare Funktion

$$f \circ g : x \mapsto y = f(g(x))$$

ist im Punkt $x = a$ stetig, wenn die Funktionen $u = g(x)$ bei $x = a$ und $y = f(u)$ bei $u = g(a)$ stetig sind. Ist die Funktion $y = f(x)$ für $x \in D$ stetig mit Funktionswerten aus dem Bereich W und existiert die Umkehrfunktion $x = f^{-1}(y)$, so ist diese für $y \in W$ stetig.

Beispiele:

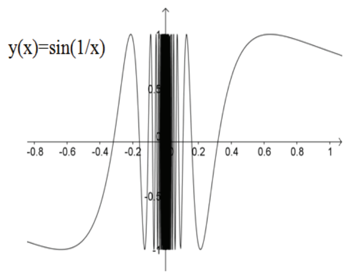
1. Man untersuche, ob die Funktionen in $x = 0$ stetig ergänzbar sind:

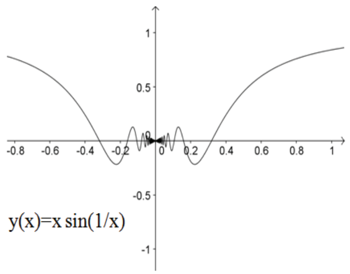
   a) $f_1(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ b) $f_2(x) = x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

   Die Funktionsgleichungen der Funktionen sind in $x = 0$ unbestimmte Ausdrücke, so daß die Funktionswerte auf diese Weise nicht definiert sind. Bei Existenz des Grenzwerts kann eine Funktion aber stetig ergänzt werden, indem der Grenzwert als Funktionswert eingesetzt wird. Wir untersuchen aus diesem Grund die Existenz der jeweiligen Grenzwerte:

   a) Die Werte $k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ sind Nullstellen der Sinusfunktion. Damit gilt $\frac{1}{x} = k\pi$ für die Nullstellen von $f_1(x)$ so daß diese durch $x = \frac{1}{k\pi}$ gegeben sind. Zwischen zwei aufeinanderfolgenden Nullstellen liegt jeweils eine volle Sinusschwingung. Da sich die Nullstellen für $k \to \infty$ bei $x = 0$ häufen, kann bei $x = 0$ kein Grenzwert existieren, denn es würde jeder Wert aus dem Wertebereich $W = [-1, 1]$ der Sinusfunktion als Grenzwert in Frage kommen. Die Funktion $f_1(x)$ ist damit in $x = 0$ nicht stetig ergänzbar, sie besitzt in $x = 0$ eine Unstetigkeit.

   b) Wegen $\sin\left(\frac{1}{x}\right) \in W = [-1, 1]$ gilt für $f_2(x)$ die Einschließung $-x = x \cdot (-1) \leq x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x \cdot 1$ und für $x \to 0$ folgt $0 \leq \lim\limits_{x \to 0} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0$ mit dem Einschließungskriterium, d.h. der Grenzwert existiert und ist durch 0 gegeben. Die Funktion $f_2(x)$ kann durch $f_2(0) = 0$ stetig ergänzt werden (Bild).





2. Man bestimme die Grenzwerte der Funktionen für $x \to 0$ und gebe die größtmöglichen Bereiche an, in denen die Funktionen stetig sind:

   a) $\dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ b) $\dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$.

   a) Wir verwenden für die Potenz im Zähler des Funktionsausdrucks die Entwicklung nach dem binomischen Satz

$$\begin{aligned}\frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \frac{1}{x}\left[1 + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n - 1\right] \\ &= \binom{n}{1} + \binom{n}{2}x + \cdots + \binom{n}{n}x^{n-1} \to \binom{n}{1} = n \quad (x \to 0).\end{aligned}$$

   Da die Funktion für alle $x \neq 0$ durch die Funktionsgleichung erklärt wird, ist sie für alle x stetig, wenn im Punkt $x = 0$ der Funktionswert $f(0) = n$ gesetzt wird.

   b) Die Logarithmen im Zähler sind nur für $1 + x > 0$ und $1 - x > 0$ definiert, d.h. für $x \in (-1, 1)$. Im Punkt $x = 0$ ergibt die Funktionsgleichung einen unbestimmten Ausdruck. Zur Bestimmung des Grenzwerts verwenden wir die Logarithmengesetze

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) &= \frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}} \\ &= \ln\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{(1-x)^{\frac{1}{x}}} \to \ln\frac{e}{e^{-1}} = \ln e^2 = 2 \quad (x \to 0).\end{aligned}$$

   Definiert man also $f(0) = 2$, so ist die Funktion für alle $x \in (-1, 1)$ definiert und stetig.

3. Man bestimme den Parameter a in dem Funktionsausdruck

$$y = f(x) = \begin{cases} a - x^2 & \text{für} \quad x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x & \text{für} \quad x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

   sodaß $f(x)$ überall stetig ist.

   $y = f(x)$ ist zusammengesetzt aus stetigen Funktionen. Daher ist nur die „Nahtstelle“ $x_0 = \frac{\pi}{2}$ zu untersuchen.
   Es gilt

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}-} (a - x^2) = a - \frac{\pi^2}{4}, \qquad \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}+} \cos x = 0.$$

   Wir wählen nun a so, daß $a - \frac{\pi^2}{4} \stackrel{!}{=} 0$, d.h. $a = \frac{\pi^2}{4}$. Dann stimmen links- und rechtsseitiger Funktionenlimes an der Nahtstelle überein und die Funktion ist stetig.

9 Differenzierbarkeit von Funktionen

Bei einer Funktion $y = f(x)$ interessiert man sich für die Frage wie rasch sich die y-Werte ändern, wenn sich die x-Werte ändern, z.B.:

- Wie stark steigt/fällt der Luftdruck pro Stunde?
- Wie ändert sich die Geschwindigkeit eines Satelliten pro Minute?

Zur Beantwortung dieser und ähnlicher Fragen sind genauere Aussagen über das Wachstumsverhalten von Funktionen erforderlich. Dazu wird die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion $y = f(x)$ bestimmt.

9.1 Differenzierbarkeit und Ableitung einer Funktion

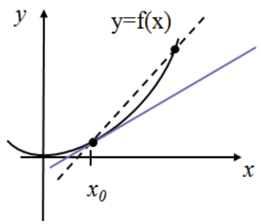
Wir führen zunächst den Begriff des Differenzenquotienten und danach den Differenzialquotient als Grenzwert des Differenzenquotienten ein.

9.1.1 Differenzenquotient und Ableitung

Der *Differenzenquotient* einer Funktion f

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =: m_s$$

beschreibt die Steigung der Sekante $S(x)$ in der Zweipunkteform durch die Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_0 = (x_0, y_0)$, wobei $y_0 = f(x_0)$ und $y_1 = f(x_1)$ gesetzt wurde.



Sekante und Tangente einer Funktion

Die Gleichung der Sekante ist gegeben durch

$$S(x) = m_s \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Durch Grenzübergang $P_1 = (x_1, y_1) \to P_0 = (x_0, y_0)$ erhält man die Steigung der Tangente im Punkt $P_0 = (x_0, y_0)$:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} =: m_t.$$

Definition 9.1 *(Differenzierbarkeit)*
Die Funktion $y = f(x) : D(f) \to W(f)$ heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, *wenn der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

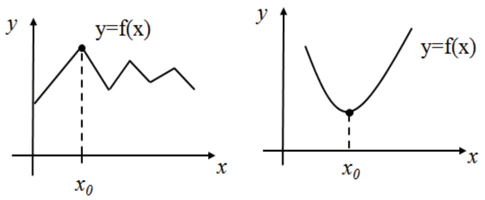
existiert. Man bezeichnet $f'(x_0)$ als erste Ableitung von f an der Stelle x_0. *Die Funktion f heißt* differenzierbar, *wenn f an jeder Stelle des Definitionsbereichs $D(f)$ differenzierbar ist. Die Funktion f' heißt* Ableitung *von f.*

Weitere Schreibweisen:

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0}.$$

Bemerkungen:

1. Ist f differenzierbar in $x_0 \in D(f)$, so hat der Graph von f bei x_0 einen glatten Verlauf, d.h. f hat bei x_0 keinen „Knick“.



Stetige aber nicht differenzierbare Funktion und differenzierbare Funktion

2. Durch den Grenzübergang $x_1 \to x_0$ bzw. $x_0 + \Delta x \to x_0$ wird aus der Sekante $S(x)$ die Tangente $T(x)$ an $P_0 = (x_0, y_0)$ mit der Gleichung

$$T(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

Beispiel: Physikalischer Zugang zur ersten Ableitung

Das Weg-Zeit Gesetz der gleichförmig beschleunigten Bewegung lautet

$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0.$$

Hier bedeuten s_0 den Anfangsweg, v_0 die Anfangsgeschwindigkeit und a =const. die Beschleunigung des Fahrzeugs.

Die *mittlere Geschwindigkeit* $v_m(t, \Delta t)$ ist gerade der Differenzenquotient aus Weg und Zeit

$$\begin{aligned} v_m(t, \Delta t) &= \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2}a(t + \Delta t)^2 + v_0(t + \Delta t) + s_0 - (\frac{1}{2}at^2 + v_0 t + s_0)}{\Delta t} \\ &= \frac{at\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_0 \Delta t}{\Delta t} = at + \frac{1}{2}a\Delta t + v_0. \end{aligned}$$

Die *Momentangeschwindigkeit* $v(t)$ ist gegeben als Differenzialquotient

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} v_m(t, \Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(at + \frac{1}{2} a \Delta t + v_0 \right) = at + v_0.$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Geschwindigkeit eine lineare Funktion der Zeit.

9.1.2 Differenziation elementarer Funktionen

Mit der Definition 9.1 lassen sich bereits Ableitungen elementarer Funktionen berechnen:

1. Für die Funktion $y = f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0,$$

und die Ableitung der konstanten Funktion $f(x) = c$ lautet $f'(x) = 0$.

2. Für $y = f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot h^k - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + h^2(\ldots) - x^n}{h} = nx^{n-1}, \end{aligned}$$

und die Ableitung der Funktion $f(x) = x^n$ lautet $f'(x) = nx^{n-1}$.

3. Für $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, folgt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x - (x+h)}{h(x+h)x} = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(x+h)x} = -\frac{1}{x^2},$$

und die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ lautet $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

4. Für $y = f(x) = \ln x$ mit $x \neq 0$ gilt

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \lim_{h \to 0} \ln \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = \ln e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

und es folgt $f'(x) = \frac{1}{x}$. Hier wurde der Limes $\lim\limits_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$ verwendet.

5. Für $y = f(x) = \sin x$ folgt mit dem Additionstheorem für den Sinus zunächst

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} \\ &= \cos x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Mit den Grenzwerten $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ und der Umformung

$$\frac{\cos h - 1}{h} = \frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} = \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = \frac{-\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = -\frac{\sin h}{h} \cdot \sin h \cdot \frac{1}{\cos h + 1}$$

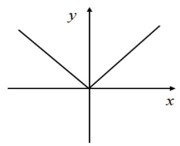
bzw. dem Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \to 0} \sin h \cdot \lim_{h \to 0} \frac{1}{\cos h + 1} = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

folgt die Ableitung $f'(x) = \cos x$.

6. Die Betragsfunktion

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x & x < 0, \end{cases}$$



ist differenzierbar für $x \neq 0$, jedoch nicht in $x = 0$.
Es gilt

$$y = f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Für $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0+} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= \lim_{h \to 0+} \frac{h - 0}{h} = 1, \\ \lim_{h \to 0-} \frac{|0+h| - |0|}{h} &= \lim_{h \to 0-} \frac{-h}{h} = -1, \end{aligned}$$

d.h. der Differenzialquotient existiert nicht. $y = f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x = 0$.

9.1.3 Weitere Beispiele zur Differenziation

1. Berechnen Sie mit Hilfe der Definition die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2 + 2$.

Nach Definition ist

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{((x+h)^2 + 2) - (x^2 + 2)}{h} = \lim_{h \to 0} (2x + h) = 2x.$$

Damit ist $f'(x) = 2x$.

2. Berechnen Sie für $x_0 = \sqrt{2}$ die Gleichung der Tangente an die Kurve

$$y = f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Mit den Abkürzungen $y = f(x)$ bzw. $y_0 = f(x_0)$ lautet die Tangente im Punkt (x_0, y_0): $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Anwendung der Ketten- und Quotientenregel liefert:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{x + \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{\sqrt{x^2 - 1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2} = \frac{\sqrt{x^2 - 1} + x}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} - \frac{-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} + \frac{1}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^3} = \frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^3}. \end{aligned}$$

Mit $x_0 = \sqrt{2}$ ist

$$y_0 = f(\sqrt{2}) = \ln\left(\sqrt{2} + \sqrt{2-1}\right) - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2-1}} = \ln\left(\sqrt{2}+1\right) - \sqrt{2}$$

und weiter $f'(\sqrt{2}) = \dfrac{2}{\left(\sqrt{2-1}\right)^3} = 2$, somit hat die Gleichung der Tangente im Punkt $x_0 = \sqrt{2}$ die Form

$$y = \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \sqrt{2} + 2\left(x - \sqrt{2}\right) = 2x + \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - 3\sqrt{2}.$$

9.1.4 Ableitungen von Standardfunktionen

Die Ableitungen einiger Standardfunktionen sind in nachfolgender Tabelle zusammengestellt:

Funktion f	Ableitung f'
$f(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
$f(x) = x^a, \quad x > 0,\ a \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a \cdot x^{a-1}$
$f(x) = a^x, \quad a > 0,\ x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
$f(x) = \sin x,\ x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x,\ x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \tan x,\ x \in \mathbb{R},\ x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x) = \cot x,\ x \in \mathbb{R},\ x \neq k\pi$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x) = e^x, \quad x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = \ln x, \quad x \in (0,\infty)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$
$f(x) = \arcsin x, \quad x \in (-1,1)$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arccos x, \quad x \in (-1,1)$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan x, \quad x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \mathrm{arccot} x, \quad x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x) = \sinh x, \quad x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \cosh x$
$f(x) = \cosh x, \quad x \in \mathbb{R}$	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$	$f'(x) = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$
$f(x) = \coth x, \quad x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$	$f'(x) = -\dfrac{1}{\sinh^2 x}$

9.2 Differenziationsregeln

Ableitungen komplizierter Funktionen berechnet man mit Hilfe der nachfolgend zusammengestellten Differenziationsregeln:

9.2.1 Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel

Satz 9.1 *(Differenziationsregeln)*
Sind f und g differenzierbare Funktionen und ist $c \in \mathbb{R}$, dann sind auch $c \cdot f$, $f \pm g$, $f \cdot g$ und $\dfrac{f}{g}$ für $g \neq 0$ differenzierbar. Die Ableitungen sind gegeben durch

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ *Summenregel*
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$ *Produktregel*
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)}$ *Quotientenregel.*

Beweis: Für Summe und Differenz ist der Beweis eine direkte Konsequenz aus den Limesregeln. Die Produktregel folgt aus

$$\begin{aligned}\frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x_0).\end{aligned}$$

Grenzübergang $x \to x_0$ auf beiden Seiten liefert

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0).$$

Zum Nachweis der Quotientenregel zeigen wir zunächst

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Aus

$$\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{1}{g(x)g(x_0)} \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

folgt diese Regel durch Grenzübergang $x \to x_0$. Die Quotientenregel ergibt sich nun aus der Produktregel und der Regel für $\left(\dfrac{1}{g}\right)'$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{f}{g}\right)'(x) &= \left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)} - f(x) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)} \\ &= \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{g^2(x)} \quad \diamond\end{aligned}$$

Beispiele:

1. Mit der Summenregel gilt $\left(2x^2 + bx\right)' = 4x + b$.

2. $\left(3x^2-\sqrt{x}\right)'=6x-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}.$

3. Mit der Produktregel folgt $\quad (\sin x\cdot e^x)'=\cos x\cdot e^x+e^x\cdot\sin x.$

4. $\left((x^3+7x)\cdot\sin x\right)'=(3x^2+7)\cdot\sin x+(x^3+7x)\cdot\cos x.$

5. Die Quotientenregel liefert

$$(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2(x).$$

6. $\left(\frac{x+1}{x^2}\right)'=\frac{x^2-2x(x+1)}{x^4}=\frac{-x^2-2x}{x^4}=-\frac{x+2}{x^3}.$

7. $\left(\frac{x^3+7x}{x^2+1}\right)'=\frac{(3x^2+7)\cdot(x^2+1)-(x^3+7x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}.$

8. Differenzieren Sie die Funktionen

   a) $f(x)=\frac{x^2-2x}{(x+1)(x-3)},\quad x\neq -1,3,$ $\qquad$ b) $g(x)=\sin x\cdot\sinh x\cdot\cos x\cdot\cosh x.$

   a) Wir verwenden die Quotientenregel

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-2)(x+1)(x-3)-(x^2-2x)(x-3+x+1)}{(x+1)^2(x-3)^2}\\ &= \frac{(2x-2)(x^2-2x-3)-(x^2-2x)(2x-2)}{(x+1)^2(x-3)^2}=\frac{(2x-2)(-3)}{(x+1)^2(x-3)^2}\\ &= \frac{6-6x}{(x+1)^2(x-3)^2}.\end{aligned}$$

   b) Es liegt ein Produkt von vier Funktionen vor, daher wenden wir die Produktregel an. Unter Beachtung von $\sin' x=\cos x,\quad \cos' x=-\sin x$, sowie $\sinh' x=\cosh x$, $\cosh' x=\sinh x$, ist

$$\begin{aligned} g'(x) &= \sin' x\cdot\sinh x\cdot\cos x\cdot\cosh x+\sin x\cdot\sinh' x\cdot\cos x\cdot\cosh x\\ &\quad +\sin x\cdot\sinh x\cdot\cos' x\cdot\cosh x+\sin x\cdot\sinh x\cdot\cos x\cdot\cosh' x\\ &= \cos x\cdot\sinh x\cdot\cos x\cdot\cosh x+\sin x\cdot\cosh x\cdot\cos x\cdot\cosh x\\ &\quad +\sin x\cdot\sinh x\cdot(-\sin x)\cdot\cosh x+\sin x\cdot\sinh x\cdot\cos x\cdot\sinh x.\end{aligned}$$

   Ausklammern und Benutzung der Identitäten für die trigonometrischen bzw. hyperbolischen Funktionen ergibt

$$g'(x)=(\cos^2 x-\sin^2 x)\cdot\sinh x\cdot\cosh x+(\cosh^2 x+\sinh^2 x)\cdot\sin x\cdot\cos x$$

   und damit gilt

$$g'(x)=\frac{1}{2}\cos 2x\cdot\sinh 2x+\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cosh 2x.$$

Die Verkettung von stetigen Funktionen ergibt eine stetige Funktion. Das ist auch für differenzierbare Funktion richtig. Die Regel für die Ableitung einer Verkettung heißt *Kettenregel*.

Satz 9.2 *(Kettenregel)*
Ist $f: D(f)\to D(g)$ in $x_0\in D(f)$ differenzierbar und $g: D(g)\to W(g)$ in $y_0=f(x_0)$ differenzierbar, dann ist auch die zusammengesetzte Funktion $g\circ f: D(f)\to W(g)$ mit $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ im Punkt x_0 differenzierbar und es gilt die Kettenregel

$$(g\circ f)'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0).$$

Man merkt sich die Kettenregel in der Form: „Äußere Ableitung mal innere Ableitung“.

Beweis: Für $f(x_0)=y_0$ setze

$$g^*(y)=\begin{cases}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}, & y\neq y_0,\\ g'(y_0), & y=y_0.\end{cases}$$

Da f als differenzierbare Funktion stetig ist, folgt $y=f(x)\to y_0=f(x_0)$ für $x\to x_0$. Es gilt $\lim\limits_{y\to y_0} g^*(y)=g'(y_0)$. Die Behauptung folgt jetzt aus

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot g^*(f(x))=f'(x_0)\cdot g'(f(x_0))\quad\diamond$$

Beispiele:

1. Die Kettenregel liefert $\quad\left(e^{x^2}\right)'=e^{x^2}\cdot 2x.$

2. $(a^x)'=\left(e^{\ln a^x}\right)'=\left(e^{x\ln a}\right)'=e^{x\ln a}\cdot\ln a=\ln a\cdot a^x.$

3. Die Ableitung von $y=f(x)=x^x$ erhält man mit der Darstellung $x^x=e^{x\ln x}$ über die Kettenregel:

$$(x^x)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)\,.$$

4. $\left(\sin(x^4)\right)'=\cos(x^4)\cdot 4x^3.$

5. $\left((x^2-1)^4\right)'=4(x^2-1)^3\cdot 2x.$

6. $\left(\sqrt{\ln(x^2-1)}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{\ln(x^2-1)}}\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{\ln(x^2-1)}\cdot(x^2-1)}.$

7. $\left((x^3+7x^2+1)^{12}\right)'=12\cdot(x^3+7x^2+1)^{11}\cdot(3x^2+14x).$

8. Differenzieren Sie durch Anwendung der Kettenregel die Funktionen

   a) $f(x)=e^{\sin x^2}+e^{\sin^2 x},\quad x\in\mathbb{R},$

   b) $g(x)=\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1}+\frac{3}{8}\ln\left(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}\right),\quad x\geq 0.$

a) Anwendung der Kettenregel liefert

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sin x^2}\cos(x^2)\cdot 2x + e^{\sin^2 x}\cdot 2\sin x\cos x \\ &= 2xe^{\sin x^2}\cos(x^2) + 2e^{\sin^2 x}\sin x\cos x. \end{aligned}$$

b) Mit der Kettenregel folgt

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{2x+1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2+(2x+1)\frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}}{2x+1+2\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{1}{8}\cdot\frac{4x^2+4x+4}{\sqrt{x^2+x+1}} = \frac{x^2+x+1+x^2+x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}} \\ &= \sqrt{x^2+x+1}. \end{aligned}$$

Für die Ableitung der Umkehrfunktion gilt:

Satz 9.3 *(Ableitung der Umkehrfunktion)*
Ist $f : D(f) \to W(f)$ streng monoton und in $x_0 \in D(f)$ differenzierbar, so ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W(f) \to D(f)$ in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$[f^{-1}]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Beweis: Aus $f^{-1}(f(x)) = x$ für alle $x \in D(f)$ folgt mit der Kettenregel

$$\left[f^{-1}(f(x))\right]' = 1 \quad\Rightarrow\quad \left[f^{-1}\right]'(f(x))\cdot f'(x) = 1$$

und für $x = x_0$, $y = y_0 = f(x_0)$ folgt

$$\left[f^{-1}\right]'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \diamond$$

Beispiele:

1. Die Funktion $y = f(x) = x^n$, für $x > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist wegen $y' = f'(x) = nx^{n-1} > 0$ für $x > 0$ streng monoton wachsend und somit umkehrbar. Die Umkehrfunktion lautet $x = f^{(-1)}(y) = y^{\frac{1}{n}}$ und für die Ableitung erhält man

$$\left(y^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{(x^n)'} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{ny^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n}y^{\frac{1}{n}-1}.$$

Nennt man die unabhängige Variable x so folgt

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

2. Die Logarithmusfunktion $y = f(x) = \ln x$ besitzt die Umkehrfunktion $x = f^{(-1)}(y) = e^y$. Für die Ableitung der Exponentialfunktion erhält man

$$(e^y)' = \frac{1}{(\ln x)'} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = e^y.$$

Nennt man die unabhängige Variable x so folgt

$$(e^x)' = e^x.$$

3. Die Funktion $y = f(x) = \sin x$ ist für $x \in D(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $W(f) = (-1, 1)$ umkehrbar. Für die Ableitung der Umkehrfunktion $x = \arcsin y$ im Punkt $y \in (-1, 1)$ erhalten wir

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sin'(x)} = \frac{1}{\cos x},$$

bzw. mit $y = \sin x$ und $\cos x = \sqrt{1-\sin^2(x)}$ folgt

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}, \quad y \in (-1, 1).$$

Nennt man die unabhängige Variable wieder x so folgt

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

Entsprechend zeigt man:

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1,1) \quad \text{und} \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bemerkungen:

1. Mit der Kettenregel lassen sich Funktionen $y = f(x)$ in impliziter Darstellung $F(x, y) = 0$ differenzieren. So erhalten wir beispielsweise mit der Kettenregel die Ableitung von $y^2 - x - y = 0$ zu $2y \cdot y' - 1 - y' = 0 \Leftrightarrow y' = \dfrac{1}{2y-1}$ für $y \neq \dfrac{1}{2}$.

2. Für differenzierbare Funktionen f ist die *Logarithmische Ableitung* gegeben durch

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}, \quad f(x) \neq 0.$$

Für $y = f(x) = \sin x$ erhält man speziell:

$$[\ln \sin x]' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x, \quad x \neq k\pi.$$

9.2.2 Höhere Ableitungen

Definition 9.2 *Die höheren Ableitungen einer Funktion f werden rekursiv definiert:*

$$f^{(0)}(x)=f(x),\quad f'(x)=[f(x)]',\quad f''(x)=[f'(x)]',\ldots,\quad f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]',\quad n\in\mathbb{N}.$$

Beispiele:

1. Berechnen Sie die ersten vier Ableitungen der Funktion
$$f(x)=x^8-x^4+2x^3-2\sin x.$$
Nach Definition ist
$$f'(x)=8x^7-4x^3+6x^2-2\cos x,\quad f''(x)=56x^6-12x^2+12x+2\sin x,$$
$$f'''(x)=336x^5-24x+12+2\cos x,\quad f^{(IV)}(x)=1680x^4-24-2\sin x.$$

2. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, daß die n-te Ableitung der Funktion
$$f(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad x\in(-1,1)$$
gegeben ist durch
$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\left((-1)^{n-1}(1+x)^{-n}+(1-x)^{-n}\right),\quad x\in(-1,1).$$
(I) Induktionsanfang: Es gilt $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\ln(1+x)-\ln(1-x)$. Für $n=1$ folgt
$$\left[\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right]'=\frac{1}{1+x}-\frac{-1}{1-x}=(1+x)^{-1}+(1-x)^{-1},$$
d.h. die Behauptung ist richtig für $n=1$.
(II) Induktionsannahme: Wir nehmen an, daß für beliebig aber festes $n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$, gilt
$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\left((-1)^{n-1}(1+x)^{-n}+(1-x)^{-n}\right),\quad x\in(-1,1).$$
(III) Induktionsschluss: Zwischen der n-ten Ableitung $f^{(n)}(x)$ und der $(n+1)$-ten Ableitung $f^{(n+1)}(x)$ besteht die Beziehung $f^{(n+1)}(x)=[f^{(n)}(x)]'$. Nach Induktionsannahme ist
$$[f^{(n)}(x)]'=\left((n-1)!\left((-1)^{n-1}(1+x)^{-n}+(1-x)^{-n}\right)\right)',\quad x\in(-1,1)$$
und mit der Summenregel der Differenziation folgt
$$(n-1)!\left((-1)^{n-1}\cdot(-n)\cdot(1+x)^{-n-1}+(-n)\cdot(1-x)^{-n-1}\cdot(-1)\right).$$
Ausklammern des Faktors n:
$$(n-1)!\cdot n\left((-1)^{n-1}\cdot(-1)\cdot(1+x)^{-n-1}+(-1)\cdot(1-x)^{-n-1}\cdot(-1)\right).$$
Wegen $(n-1)!\cdot n=n!$ erhalten wir damit die Formel für die $n+1$-te Ableitung:
$$n!\left((-1)^n\cdot(1+x)^{-(n+1)}+(1-x)^{-(n+1)}\right),$$
damit ist die Behauptung für alle $n\in\mathbb{N}$ richtig.

9.3 Eigenschaften differenzierbarer Funktionen

9.3.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Satz 9.4 *Ist die Funktion f im Intervall $[a,b]$ differenzierbar, dann ist f auch stetig in $[a,b]$.*

Beweis: Es gilt
$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{=0}\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{=f'(x_0)}=0,$$
also gilt $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, d.h. f ist in x_0 stetig $\diamond$

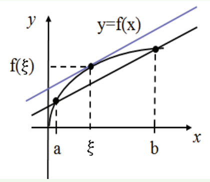
Die Umkehrung von Satz 9.4 ist falsch, denn nicht jede stetige Funktion ist differenzierbar, so ist z.B. $f(x)=|x|,\ x\in\mathbb{R}$ für $x\in\mathbb{R}$ stetig, aber im Nullpunkt nicht differenzierbar.

Definition 9.3 *(Stetig differenzierbare Funktion)*
Eine Funktion f heißt stetig differenzierbar, *wenn sowohl f als auch f' stetig sind. Eine Funktion f heißt n-*mal stetig differenzierbar, *wenn die Funktionen $f,f',f'',\ldots,f^{(n)}$ stetig sind. Mit $C[a,b]$ bzw. $C^n[a,b]$ werden die im Intervall $[a,b]$ stetig differenzierbaren bzw. n-mal stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet.*

9.3.2 Der Mittelwertsatz

Satz 9.5 *(Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)*

Ist f im Intervall $[a,b]$ stetig sowie in (a,b) differenzierbar und ist S die Sekante durch die Punkte $(a,f(a))$ und $(b,f(b))$, dann gibt es in (a,b) mindestens eine Tangente T an f, die zu S parallel ist, d.h. es existiert eine Stelle $\xi\in(a,b)$ mit



$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Der Mittelwertsatz der Differenzialrechnung wird auch häufig in der Form
$$f(b)-f(a)=f'(\xi)\cdot(b-a)$$
geschrieben. Über die genaue Lage der Stelle $\xi\in(a,b)$ kann i.a. keine Aussage gemacht werden.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Spezialfall $f(a) = f(b) = 0$. Zu zeigen ist: es existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$. Wenn es in (a,b) überhaupt positive Funktionswerte $f(x)$ gibt, so existiert aufgrund der Stetigkeit von f eine Maximumstelle ξ mit

$$\frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \begin{cases} \geq 0, & x < \xi, \\ \leq 0, & x > \xi. \end{cases}$$

Für $x \to \xi$ folgt $f'(\xi) = 0$. Gibt es in (a,b) nur negative Funktionswerte, so argumentiert man mit der Minimumstelle entsprechend. Die Anwendung des eben bewiesenen Spezialfalls auf die Funktion

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a)$$

liefert

$$g'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

und damit die Behauptung $\diamond$

Bemerkung: Die Aussage des Mittelwertsatzes für den Spezialfall $f(a) = f(b) = 0$ wird auch als *Satz von Rolle* bezeichnet.

Satz 9.6 *(Erweiterter Mittelwertsatz)*
Sind f und g im Intervall $[a,b]$ stetig, in (a,b) differenzierbar und ist $g'(x) \neq 0$ für $x \in (a,b)$, so gibt es einen Punkt $\xi \in (a,b)$ mit

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Beweis: Mit der Funktion $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$ kann dieser Beweis auf den Satz von Rolle zurückgeführt werden $\diamond$

Beispiel:

Wir untersuchen die Funktion $y = f(x) = \ln x$ im Intervall $[a,b] = [1,3]$. Es ist $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ und $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{\ln 3 - \ln 1}{3 - 1} = \dfrac{\ln 3}{2}$ und daraus folgt die Existenz einer Stelle $\xi \in (1,3)$ mit $f'(\xi) = \dfrac{1}{\xi} = \dfrac{\ln 3}{2}$ bzw. $\xi = \dfrac{2}{\ln 3}$. Im Punkt $P\left(\dfrac{2}{\ln 3}, \ln\left(\dfrac{2}{\ln 3}\right)\right)$ ist die Tangente an die Kurve $y = \ln x$ parallel zur Sekante durch $P_1 = (1,0)$ und $P_2 = (3, \ln 3)$.

9.3.3 Weitere Beispiele zum Mittelwertsatz

1. Wenden Sie den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung auf die Funktion $f(x) = \arcsin x$ im Intervall $[0,x]$, $\; 0 < x < 1$ an und bestätigen Sie dann die Abschätzung

$$x < \arcsin x < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 < x < 1.$$

Wir wenden den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung auf folgende Situation an: $a = 0, \; b = x, \; f(x) = \arcsin x$, und erhalten

$$\arcsin x - \arcsin 0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}}(x - 0) \quad \text{mit} \quad 0 < \xi < x.$$

Da $\xi < x$ ist, folgt zusammen mit $\arcsin 0 = 0$ die rechte Seite der Abschätzung

$$\arcsin x = \frac{x}{\sqrt{1 - \xi^2}} < \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Wenn wir beachten, daß wegen $0 < \xi < x < 1$ die Abschätzung $0 < \sqrt{1 - \xi^2} < 1$ richtig ist und somit $\dfrac{1}{\sqrt{1 - \xi^2}} > 1$ gilt, so folgt $\arcsin x = \dfrac{x}{\sqrt{1 - \xi^2}} > x$ und damit auch die linke Seite der Ungleichung.

2. Beweisen Sie mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differenzialrechnung die Abschätzung

$$1 + x < e^x < \frac{1}{1 - x}, \quad 0 < x < 1.$$

Wir wenden den Mittelwertsatz der Differenzialrechnung auf folgende Situation an: $a = 0, \; b = x, \; f(x) = e^x$, und erhalten

$$e^x - e^0 = e^\xi (x - 0) \quad \text{bzw.} \quad e^x = 1 + e^\xi x \quad \text{mit} \quad 0 < \xi < x.$$

Da $0 < \xi$ gilt, folgt wegen der Monotonie der Exponentialfunktion

$$e^x = 1 + e^\xi x > 1 + e^0 x = 1 + x.$$

Andererseits gilt $\xi < x$ und die Monotonie der e-Funktion liefert $e^\xi < e^x$. Aus dem Mittelwertsatz folgt somit

$$e^x = 1 + e^\xi x < 1 + e^x x.$$

Auflösen dieser Ungleichung nach e^x liefert

$$e^x - e^x x < 1 \quad \Rightarrow \quad (1 - x)e^x < 1.$$

Da $0 < x < 1$ vorausgesetzt war, darf man die Ungleichung mit dem positiven Faktor $\dfrac{1}{1 - x}$ multiplizieren und erhält somit die rechte Seite der Ungleichung.

10 Anwendungen der Differenzialrechnung

10.1 Die Regeln von l'Hospital

Sind $f(x), g(x)$ differenzierbare Funktionen mit der Eigenschaft $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$, dann können zur Bestimmung von Grenzwerten des Typs $\frac{f(x)}{g(x)}$, welche auf unbestimmte Ausdücke der Form „$\frac{0}{0}$“ oder „$\frac{\infty}{\infty}$“ führen, die *l'Hospitalschen Regeln* herangezogen werden.

10.1.1 Erste und zweite l'Hospitalsche Regel

Satz 10.1 *(Erste l'Hospitalsche Regel)*
Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$, *dann ist*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der zweite Grenzwert existiert.

Beweis: Wir zeigen die Regel für den Fall linksseitiger Grenzwerte $x \to x_0-$. Setze zunächst $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Für die Funktion

$$f_1(x) := f(x_1) \cdot g(x) - g(x_1) \cdot f(x), \quad x_1 < x_0 \quad \text{mit} \quad f_1(x_1) = f_1(x_0) = 0$$

existiert nach dem Mittelwertsatz eine Stelle $\xi \in (x_1, x_0)$ mit

$$0 = \frac{f_1(x_1) - f_1(x_0)}{x_1 - x_0} = f_1'(\xi) = f(x_1) \cdot g'(\xi) - g(x_1) \cdot f'(\xi).$$

Es folgt

$$\frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x_1 < \xi < x_0.$$

Grenzübergang $x_1 \to x_0$ liefert

$$\lim_{x_1\to x_0} \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = \lim_{\xi\to x_0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)},$$

also die Behauptung. Den Fall rechtsseitiger Grenzwerte zeigt man analog $\diamond$

Ähnlich läßt sich zeigen:

Satz 10.2 *(Zweite l'Hospitalsche Regel)*
Gilt $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$, *dann folgt*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

sofern der zweite Grenzwert existiert.

Manchmal ist es erforderlich die l'Hospitalschen Regeln mehrfach anzuwenden:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}.$$

Die l'Hospitalschen Regeln dürfen nur für unbestimmte Ausdrücke der Form „$\frac{0}{0}$“ bzw. „$\frac{\infty}{\infty}$“ benutzt werden. Vor Anwendung der Regeln ist daher unbedingt zu prüfen, ob ein unbestimmter Ausdruck dieses Typs vorliegt. Dabei kann x_0 auch für $\pm\infty$ stehen.

Zahlreiche Grenzwerte die auf unbestimmte Ausdrücke der Typen

$$0 \cdot \infty, \quad 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty, \quad \infty - \infty$$

führen, können so umgeformt werden, daß die entsprechenden Grenzwerte mit den l'Hospitalschen Regeln bestimmt werden können.

Eine Übersicht der Umformungen ist in nachfolgender Tabelle zusammengestellt.

Typ des Ausdrucks	Form	Umformung
$0 \cdot \infty, \quad 0 \cdot (-\infty)$	$f(x) \cdot g(x)$	$\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$
$0^0, \quad \infty^0, \quad 0^\infty, \quad 1^\infty$	$f(x)^{g(x)}$	$\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \cdot \ln(f(x))$
$\infty - \infty$	$f(x) - g(x)$	$(f(x) - g(x)) \frac{f(x) + g(x)}{f(x) + g(x)}$

Beispiele:

1. Mit der ersten l'Hospitalschen Regel folgt
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$
2. Mehrfache Anwendung der zweiten l'Hospitalschen Regel liefert
$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$
3. Durch Umformung des Grenzwerts vom Typ $0 \cdot \infty$ auf die Form $\frac{0}{0}$ erhält man
$$\lim_{x\to\infty} \left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$
4. Durch Logarithmieren des Ausdrucks x^x erhält man $\ln x^x = x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$. Mit der zweiten l'Hospitalschen Regel folgt weiter
$$\lim_{x\to 0} \ln x^x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$
Damit folgt $\lim\limits_{x\to 0} x^x = \lim\limits_{x\to 0} e^{\ln x^x} = e^0 = 1.$

10.1.2 Weitere Beispiele

1. Berechnen Sie mit Hilfe der l'Hospitalschen Regeln den Funktionenlimes $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

   Vor Anwendung der ersten l'Hospitalschen Regel formen wir die Funktion um:
   $$\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}=\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}.$$
   Weiter gilt
   $$\lim_{x\to 0}(e^x-1-x)=0, \qquad \lim_{x\to 0}x(e^x-1)=0,$$
   d.h. es liegen die Voraussetzungen für die Anwendung der ersten l'Hospitalschen Regel vor:
   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}.$$
   Erneut liegen die Voraussetzungen für die Anwendung der ersten l'Hospitalschen Regel vor, denn es ist $\lim\limits_{x\to 0}(e^x-1)=0$ und $\lim\limits_{x\to 0}(xe^x+e^x-1)=0$:
   $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{xe^x+2e^x}=\frac{1}{0+2}=\frac{1}{2}$$
   und damit $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=\frac{1}{2}$.

2. Die Stromstärke I in einem R/L-Stromkreis ist in Abhängigkeit von der Zeit t, der Spannung U, der Induktivität L und des Widerstands R gegeben durch $I=\frac{U}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$. Man bestimme unter der Voraussetzung, daß R die einzige unabhängige Variable ist, den Wert der Stromstärke für $R\to 0$.

   Wenn wir U, L und t als Konstante und R als Variable betrachten, erhalten wir einen unbestimmten Ausdruck der Form $0/0$. Die erste l'Hospitalsche Regel liefert
   $$\lim_{R\to 0}I=U\lim_{R\to 0}\frac{1-e^{-\frac{R}{L}t}}{R}=U\lim_{R\to 0}\frac{-e^{-\frac{R}{L}t}\left(-\frac{t}{L}\right)}{1}=\frac{U}{L}t.$$

3. Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}$.

   Es liegt ein unbestimmter Ausdruck der Form 1^∞ vor. Umformen ergibt
   $$(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}=e^{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln\sin x}.$$
   Für den Exponenten $\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}$ gilt $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln\sin x=0$ und $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos^2 x=0$, demzufolge sind die Voraussetzungen für die Anwendung der ersten l'Hospitalschen Regel erfüllt:
   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\sin x}{\cos^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x}{-2\cos x\cdot\sin x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-2\sin^2 x}=-\frac{1}{2}.$$
   Auf Grund der Stetigkeit der Exponentialfunktion erhalten wir damit den gesuchten Grenzwert
   $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\frac{1}{\cos^2 x}}=e^{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\ln\sin x\right)}=e^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}.$$

10.2 Untersuchung von Funktionen mit Hilfe der Ableitung

Um den Kurvenverlauf einer reellen Funktion $f(x)$ zu untersuchen kann die Differenzialrechung eingesetzt werden.

10.2.1 Monotonie

Die Monotonie einer Funktion kann durch den Nachweis einer Ungleichung gezeigt werden. Viel leichter fällt dies mit Hilfe der Ableitung:

Satz 10.3 *(Monotonie)*
Die Funktion f sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar. Dann gilt:

a) f ist in $[a,b]$ monoton steigend, falls $f'(x)\geq 0,\ \ x\in[a,b]$,
f ist in $[a,b]$ streng monoton steigend, falls $f'(x)>0,\ \ x\in[a,b]$,

b) f ist in $[a,b]$ monoton fallend, falls $f'(x)\leq 0,\ \ x\in[a,b]$,
f ist in $[a,b]$ streng monoton fallend, falls $f'(x)<0,\ \ x\in[a,b]$.

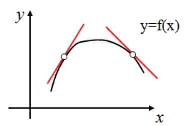
Beweis: Angenommen, f ist monoton steigend in $[a,b]$. Für ein $x_0\in(a,b)$ gilt
$$f(x)-f(x_0)\begin{cases}\geq 0, & x>x_0,\\ \leq 0, & x<x_0.\end{cases}$$
Der Differenzenquotient ist immer positiv und stetig für eine differenzierbare Funktion, woraus die Behauptung folgt. Jetzt sei $f'(x)\geq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Dann muß die Monotonie von f gezeigt werden. Angenommen, es gilt $f(x_0)>f(x_1)$ für $x_0<x_1$ aus dem Intervall (a,b). Dann gibt es mit dem Mittelwertsatz ein $\xi\in(x_0,x_1)$ mit $f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}<0$, ein Widerspruch $\diamond$

Da jede streng monotone Funktion umkehrbar ist, existiert unter der Voraussetzung $f'(x)\neq 0$ in einem Intervall die Umkehrfunktion. Diese weist dasselbe Monotonieverhalten auf wie $f(x)$.

10.2.2 Geometrische Bedeutung von $f'(x)$ und $f''(x)$

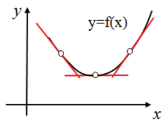
$f'(x)$ gibt die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $(x,f(x))$ an:

- $f'(x_0)>0$: f streng monoton steigend bei x_0,
- $f'(x_0)<0$: f streng monoton fallend bei x_0,
- $f'(x_0)=0$: f besitzt waagerechte Tangente bei x_0.

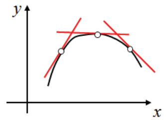


$f''(x)$ gibt die Änderung der Tangentensteigung in $(x,f(x))$ an. Die Änderungsrate der Steigung entspricht der *Krümmung* des Graphs von f in $(x,f(x))$.

- $f''(x_0) > 0$: f' streng monoton steigend bei x_0, der Graph ist nach *links* gekrümmt, man sagt f ist *konvex*,



- $f''(x_0) < 0$: f' streng monoton fallend bei x_0, der Graph ist nach *rechts* gekrümmt, man sagt f ist *konkav*.



10.2.3 Lokale Extrema, lokale Maxima und Minima

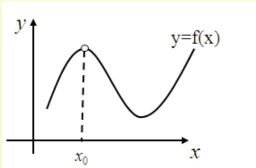
Definition 10.1 *(Lokales Extremum, lokales Maximum, lokales Minimum)*
Eine Stelle $x_0 \in D(f)$ heißt lokales Extremum *von f, wenn in einer Umgebung U von x_0 gilt*

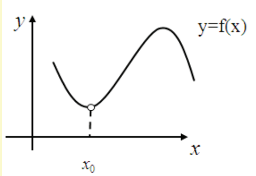
$$f(x) \leq f(x_0) \qquad \text{bzw.} \qquad f(x) \geq f(x_0), \quad x \in U.$$

*Im ersten Fall spricht man von einem **lokalen Maximum** von f in x_0.*

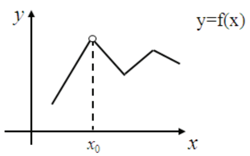
*Man nennt $(x_0, f(x_0))$ **Hochpunkt**. Im zweiten Fall spricht man von einem **lokalen Minimum** von f in x_0.*

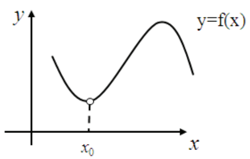
*Man nennt $(x_0, f(x_0))$ **Tiefpunkt**.*





Auch wenn $f(x)$ in x_0 nicht differenzierbar ist, kann ein lokales Extremum vorliegen.





Allerdings gilt:

Satz 10.4 *(Notwendige Bedingung für ein lokales Extremum)*
Ist f in x_0 differenzierbar und besitzt dort ein lokales Extremum, so gilt $f'(x_0) = 0$.

Beweis: In der Nähe eines Maximums x_0 gilt

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad x < x_0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \quad x > x_0$$

und es folgt

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0 \quad \diamond$$

Die Stellen x_0, die für lokale Extrema einer differenzierbaren Funktion in Frage kommen, erhält man aus der Bedingung $f'(x_0) = 0$. Umgekehrt folgt aus $f'(x_0) = 0$ nur das Vorliegen einer waagerechten Tangente, nicht das Vorliegen eines lokalen Extremums.

Es gilt: $(x_0, f(x_0))$ ist lokales Maximum oder Minimum $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Man sagt: die Bedingung $f'(x_0) = 0$ ist *notwendig* für ein lokales Extremum.

In lokalen Extrema wechselt die erste Ableitung das Vorzeichen.

- Wechselt f' in x_0 das Vorzeichen von $+$ nach $-$ handelt es sich um ein lokales Maximum.
- Wechselt f' in x_0 das Vorzeichen von $-$ nach $+$ handelt es sich um ein lokales Minimum.

Satz 10.5 *(Hinreichende Bedingung für ein lokales Extremum)*
Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ zweimal stetig differenzierbar. Gilt

- *$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (Rechtskrümmung) dann hat f in x_0 ein lokales Maximum.*
- *$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (Linkskrümmung) dann hat f in x_0 ein lokales Minimum.*

Beweis: Wir betrachten nur der Fall $f''(x_0) > 0$. Wegen $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ folgt mit der Taylorformel zunächst

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2 \quad \text{bzw.} \quad f(x) - f(x_0) = \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)^2$$

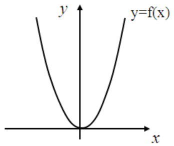
mit ξ zwischen x_0 und x. Wegen der Stetigkeit der zweiten Ableitung ist $f''(\xi) > 0$ (d.h. in der Nähe von x_0 wechselt f'' das Vorzeichen nicht). Daher gilt $f(x) \geq f(x_0)$, d.h. in x_0 besitzt f ein lokales Minimum $\diamond$

Mitunter ist die Richtung des Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung in einem Punkt x_0 leichter zu erkennen als das Vorzeichen der zweiten Ableitung $f''(x_0)$.

Beispiele:

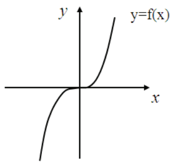
1. Die Funktion $y = f(x) = x^2$ besitzt die Ableitung $f'(x) = 2x$.

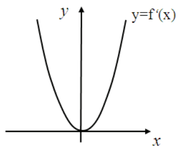
   Es gilt $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
   Bei $x = 0$ wechselt $f'(x)$ das Vorzeichen von $-$ nach $+$.
   Deshalb ist $(0, 0)$ ein Minimum.
   Wegen $f''(x) = 2$ ist der Graph nach links gekrümmt.



2. Die Funktion $y = f(x) = x^3$ besitzt die Ableitung $f'(x) = 3x^2$.

   Es gilt $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
   Jedoch wechselt $f'(x)$ bei $x = 0$ nicht das Vorzeichen.
   Deshalb ist $(0, 0)$ kein lokales Extremum.
   Wegen $f''(x) = 6x$ gilt: $f''(0) = 0$.

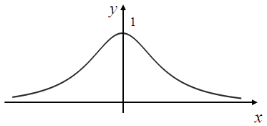




3. Die Funktion $y = f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ besitzt die erste Ableitung

$$f'(x) = -(1+x^2)^{-2} \cdot 2x = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

   Es gilt $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.



   f' wechselt bei $x = 0$ das Vorzeichen von $+$ nach $-$, d.h. $(0, 1)$ ist lokales Maximum.
   Alternativ liefert die Berechnung der zweiten Ableitung

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 - (-2x)\cdot 2(1+x^2)2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2)+8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

   Mit $f''(0) = -2 < 0$ erkennt man $(0, 1)$ als lokales Maximum.

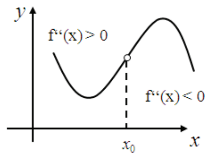
Mitunter müssen auch die höheren Ableitungen untersucht werden:

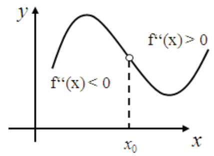
$$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

- Ist n gerade und gilt $f^{(n)}(x_0) < 0$, dann hat die Funktion f in x_0 ein relatives Maximum.
- Ist n gerade und gilt $f^{(n)}(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f in x_0 ein relatives Minimum.
- Falls n ungerade ist, dann hat f in x_0 einen Wendepunkt.

10.2.4 Wendepunkte

Definition 10.2 *(Wendepunkt)*
$f(x)$ besitzt in x_0 einen Wendepunkt, *wenn f auf beiden Seiten von $(x_0, f(x_0))$ unterschiedliches Krümmungsverhalten zeigt.*





Satz 10.6 *(Notwendige und hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt)*
Die Funktion f sei im Intervall $[a, b]$ dreimal differenzierbar. Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, d.h. f'' wechselt beim Durchgang durch x_0 das Vorzeichen. Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente wird als Sattelpunkt *bezeichnet.*

Beispiel:

Man bestimme in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die lokalen Maxima/Minima und Wendepunkte von $f_a(x) = x \cdot e^{-a\,x}$.

Zunächst berechnen wir die Ableitungen von $y = f_a(x)$:

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= e^{-a\,x} + x \cdot (-ae^{-a\,x}) = e^{-a\,x}(1-ax), \\ f''_a(x) &= -ae^{-a\,x}(1-ax) - ae^{-a\,x} = -ae^{-a\,x}(2-ax). \end{aligned}$$

Bestimmung der lokalen Extrema:

$$f'_a(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow e^{-a\,x}(1-ax) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{a}, \quad a \neq 0.$$

Weiter folgt

$$f''_a\left(\frac{1}{a}\right) = -ae^{-1}(2-1) = -\frac{a}{e}.$$

Für $a > 0$ haben wir $f''_a\left(\frac{1}{a}\right) < 0$ und hiermit ein lokales Maximum in $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{ae}\right)$.

Für $a < 0$ ist $f''_a\left(\frac{1}{a}\right) > 0$ und $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{ae}\right)$ ist ein lokales Minimum.

Für $a = 0$ besitzt f_a keine lokalen Extrema.

Zur Bestimmung der Wendepunkte suchen wir nach Nullstellen von f''_a:

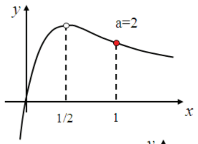
$$f''_a(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow -ae^{-a\,x}(2-ax) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{a}, \quad a \neq 0.$$

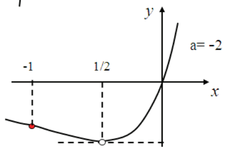
Für $a \neq 0$ besitzt f''_a bei $\frac{2}{a}$ einen Vorzeichenwechsel, d.h. $\left(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}e^{-2}\right)$ ist Wendepunkt.

Im Fall $a = 0$ besitzt f_a keine Wendepunkte.

Insgesamt stellt sich die Situation folgendermaßen dar:

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
Maximum $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{ae}\right)$	kein Extremum	Minimum $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{ae}\right)$
Wendepunkt $\left(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}e^{-2}\right)$	kein Wendepunkt	Wendepunkt $\left(\frac{2}{a}, \frac{2}{a}e^{-2}\right)$

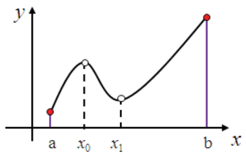


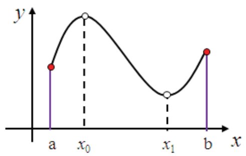


10.2.5 Globale Extrema

Meist interessieren globale Extrema einer Funktion, d.h. Extrema bezogen auf den gesamten Definitionsbereich. Jede stetige Funktion f nimmt auf einer beschränkten und abgeschlossenen Menge ihr globales Maximum und Minimum an. Ist $D(f)$ nicht abgeschlossen oder unbeschränkt, so braucht es keine globalen Extrema zu geben.

Ein globales Extremum kann im Innern von $D(f)$ liegen. Dann muß es auch lokales Extremum sein und kann, falls f differenzierbar ist, wie bereits besprochen bestimmt werden. Es kann aber auch auf dem Rand von $D(f)$ liegen. Um die globalen Extrema zu bestimmen, muß man also die Funktionswerte von f am Rand von $D(f)$ mit den lokalen Extrema im Inneren von $D(f)$ vergleichen.





Satz 10.7 *(Globale Extrema)*
Es sei f differenzierbar im Intervall $[a, b]$. Dann besitzt f ein absolutes Maximum *in $[a, b]$. Dieses kann entweder ein lokales (inneres) Maximum sein oder es handelt sich um ein Randmaximum.*

Eine entsprechende Aussage gilt für das absolute Minimum von f in $[a, b]$.

10.3 Kurvendiskussion

10.3.1 Aspekte der Kurvendiskussion

Bei der Untersuchung kann man sich an den in der Tabelle zusammengestellten Punkten orientieren.

Charakteristik	Bedingung
1. Definitionsbereich, Wertebereich, Nullstellen	$D(f), W(f)$ x Nullstelle von $f \Leftrightarrow f(x) = 0$
2. Symmetrieeigenschaften	$f(x) = f(-x)$ Achsensymmetrie bzw. $f(x) = -f(-x)$ Nullpunktsymmetrie
3. Polstellen rationaler Funktionen	Nenner=0 und Zähler$\neq 0$
4. Extremwerte	$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0,$ n gerade: $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ relatives Maximum $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ relatives Minimum
5. Montonie	f monoton steigend, wenn $f'(x) \geq 0$ f monoton fallend, wenn $f'(x) \leq 0$
6. Wendepunkte	$f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,\ f^{(n)}(x_0) \neq 0.$ n ungerade $\Rightarrow x_0$ Wendepunkt
7. Krümmungsverhalten	$f''(x) \geq 0 \Rightarrow$ konvex (f' wächst) $f''(x) \leq 0 \Rightarrow$ konkav (f' fällt)
8. Verhalten im Unendlichen	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$
9. Asymptoten	$\lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x) - (ax + b))$
10. Graphische Darstellung	Wertetabelle und Skizze

Bemerkung: Aus Symmetrien und der Asymptotik einer Kurve kann man häufig Maxima, Minima und Wendepunkte allein aus den notwendigen Bedingungen $f'(x) = 0$ und $f''(x) = 0$ bestimmen. Z.B. liegt zwischen Maximum und Minimum ein Wendepunkt.

Beispiele:

1. Diskutieren Sie die Funktion $y = f(x) = x^4 - 4x^2$ für $D(f) = \mathbb{R}$.

   Symmetrie: Es gilt $f(-x) = (-x)^4 - 4(-x)^2 = x^4 - 4x^2 = f(x)$, d.h. die Funktion ist achsensymmetrisch.

   Nullstellen: $f(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\quad x_{2,3} = \pm 2.$

   Ableitungen: Es ist $f'(x) = 4x^3 - 8x$, $f''(x) = 12x^2 - 8$ und $f'''(x) = 24x$.

   Extrema: $f'(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0,\quad x_{2,3} = \pm\sqrt{2}.$

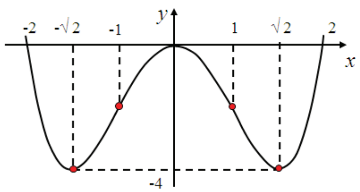
   Es ist $f''(0) = -8 < 0$, d.h. $(0, 0)$ ist lokales Maximum. Es ist $f''(\sqrt{2}) = f''(-\sqrt{2}) = 24 - 8 = 16 > 0$, d.h. $(\pm\sqrt{2}, -4)$ sind lokale Minima.

   Wendepunkte: $f''(x) = 12x^2 - 8 \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 3x^2 = 2 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\dfrac{2}{3}}.$

$f'''\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 24\sqrt{\frac{2}{3}} \neq 0 \Rightarrow \left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{20}{9}\right)$ sind Wendepunkte.

Argumentation ohne f''': Zwischen dem Maximum $(0,0)$ und den Minima $(\pm\sqrt{2}, -4)$ liegt jeweils ein Wendepunkt.

Asymptoten: Es ist $f(x) \approx x^4$ für $|x| \to \infty$, d.h. $f(x)$ ist nach unten beschränkt.



2. Bestimmen Sie die kubische Parabel (Polynom 3. Grades), die durch $P = (2,0)$ geht und in $W = (0,1)$ einen Wendepunkt mit Steigung $m_W = 1$ hat.

   Das allgemeine Polynom dritten Grades lautet $y = p_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Für die ersten Ableitungen erhalten wir

   $$p_3'(x) = 3ax^2 + 2bx + c, \quad p_3''(x) = 6ax + 2b, \quad p_3'''(x) = 6a.$$

   Die in der Aufgabenstellung gegebenen Bedingungen führen auf:

   $$\begin{aligned} p_3(2) = 0 &\Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 0 \Rightarrow 8a = -d - 2c - 4b, \\ p_3(0) = 1 &\Rightarrow d = 1, \\ p_3''(0) = 0 &\Rightarrow 2b = 0, \\ p_3'(0) = 1 &\Rightarrow c = 1. \end{aligned}$$

   Es ergibt sich $8a = -1 - 2 - 0 = -3$, d.h. $a = -\frac{3}{8}$ und mit $b = 0, c = 1, d = 1$ folgt

   $$p_3(x) = -\frac{3}{8}x^3 + x + 1.$$

3. Diskutieren Sie die rationale Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

   Zunächst erhalten wir mit Polynomdivision $y = f(x) = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

   Symmetrie: Es gilt $f(x) = -f(-x)$, denn es ist $\dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \dfrac{-(-x)^3}{(-x)^2 - 1}$ d.h. die Funktion ist symmetrisch bezüglich dem Nullpunkt.

   Nullstellen: Wegen $x^3 = 0$ besitzt f nur $x = 0$ als dreifache Nullstelle.

   Ableitungen:

   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2-1) - 2x \cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} \\ f''(x) &= \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1)^2 - 2(x^2-1)2x(x^4 - 3x^2)}{(x^2-1)^4} = \frac{2x^3 + 6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}. \end{aligned}$$

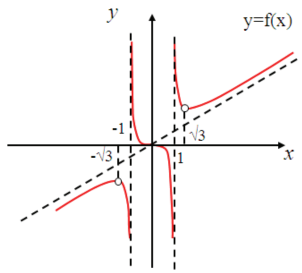
   Extrema: $f'(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \;\; x_{2,3} = \pm\sqrt{3}$ sind kritische Stellen.

   Es ist $f''(0) = 0$, d.h. $(0,0)$ ist kein Extremum. Es ist $f''(\sqrt{3}) = \dfrac{2\sqrt{3}(3+3)}{(3-1)^2} > 0$, d.h. $\left(\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ist lokales Minimum und aus Symmetriegründen ist $\left(-\sqrt{3}, \frac{-3\sqrt{3}}{2}\right)$ lokales Maximum.

   Wendepunkte: $f''(x) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x(x^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ist zu untersuchen. Da f'' bei 0 einen Vorzeichenwechsel hat ist $(0,0)$ ein Wendepunkt.

   Asymptoten: Es ist $f(x) \approx x$ für $|x| \to \infty$, wobei $f(x) > x$, für $x \to \infty$ d.h. die Kurve nähert sich der Asymptote $y = x$ von oben. Für $x \to -\infty$ ist $f(x) < x$ d.h. die Kurve nähert sich der Asymptote $y = x$ von unten.

   Pole: Es ist $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty$, d.h. $x = 1$ ist ein Pol mit Vorzeichenwechsel. Aus Symmetriegründen ist $x = -1$ ebenfalls ein Pol mit Vorzeichenwechsel.



4. Führen Sie für die Funktion $y = f(x) = \dfrac{x^4 + 1}{x^2}$ eine Kurvendiskussion durch.

   Zunächst gilt $y = f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ mit $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Symmetrie: Es gilt $f(x) = f(-x)$, d.h. die Funktion ist achsensymmetrisch.

Nullstellen: Wegen $x^4 + 1 > 0$ besitzt f keine Nullstellen.

Ableitungen: Es ist $f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$ und $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4}$.

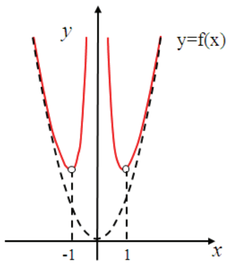
Extrema: $f'(x) \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{2}{x^3} \Leftrightarrow x^4 = 1 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 1$.

Es ist $f''(1) = 2 + \frac{6}{1} = 8 > 0$, d.h. $(1, 2)$ ist lokales Minimum. Aufgrund der Achsensymmetrie ist auch $(-1, 2)$ lokales Minimum.

Wendepunkte: $f''(x) = 2 + \frac{6}{x^4} > 0$, d.h. es gibt keine Wendepunkte.

Asymptoten: Es ist $f(x) \approx x^2$ für $|x| \to \infty$, wobei $f(x) > x^2$, d.h. die Kurve nähert sich der Asymptote $y = x^2$ von oben.

Pole: Es ist $\lim\limits_{x \to 0\pm} \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$, d.h. $x = 0$ ist Pol ohne Vorzeichenwechsel.



5. Die gedämpfte harmonische Schwingung wird beschrieben durch die Funktion

$$x(t) = e^{-\delta t} \cos \omega t \qquad \text{mit} \qquad \delta > 0, \;\; \omega > 0 \quad \text{für} \quad t \geq 0.$$

Führen Sie eine Kurvendiskussion von $x(t)$ durch.

Zunächst gilt $D(f) = [0, \infty)$.

Symmetrie: Die Kurve zeigt kein Symmetrieverhalten.

Nullstellen: Die Bedingung $x(t) \stackrel{!}{=} 0$ liefert $\underbrace{e^{-\delta t}}_{>0} \cos \omega t = 0 \Leftrightarrow \cos \omega t = 0$, d.h.

$\omega t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}_0$ bzw.

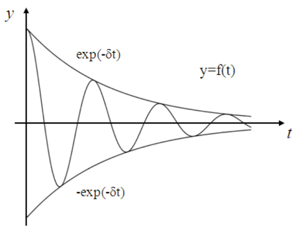
$$t_k = (2k+1)\frac{\pi}{2\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Wegen $|\cos \omega t| \leq 1$ verläuft $x(t)$ zwischen den Hüllkurven $-e^{-\delta t}$ und $+e^{-\delta t}$.

Für die Berührpunkte von $x(t)$ mit den Hüllkurven gilt $\cos \omega t = \pm 1 \Leftrightarrow \omega t = 2\pi k$ (für $\cos = 1$) bzw. $\omega t = 2\pi k + \pi$ (für $\cos = -1$).

Extrema:

$$\begin{aligned}
x'(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad &\Leftrightarrow \quad -\delta e^{-\delta t} \cos \omega t - e^{-\delta t} \omega \sin \omega t = 0 \;\; | \;\; : (-e^{-\delta t}) \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \delta \cos \omega t + \omega \sin \omega t = 0 \Leftrightarrow \tan \omega t = -\frac{\delta}{\omega} \\
&\Leftrightarrow \quad \omega t_k = -\arctan\left(\frac{\delta}{\omega}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{N}_0, \\
&\Leftrightarrow \quad t_k = -\frac{1}{\omega} \arctan\left(\frac{\delta}{\omega}\right) + \frac{k\pi}{\omega}, \quad k \in \mathbb{N}_0.
\end{aligned}$$



10.3.2 Weitere Beispiele

1. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x - 2}$, $x \neq -2, 1$.

   a) Bestimmen Sie alle Extremwerte von f und geben Sie jeweils an, ob es sich um ein Maximum oder ein Minimum handelt.

   b) An welchen Stellen ist f konvex und an welchen Stellen konkav?

   a) Mit Hilfe der Quotientenregel bestimmen wir die Ableitung f'.

$$f'(x) = \frac{(2x+1) \cdot (x^2 + x - 2) - (x^2 + x + 1) \cdot (2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^2} = \frac{(-3) \cdot (2x+1)}{(x^2 + x - 2)^2}.$$

Da der Nenner positiv ist, wird die erste Ableitung genau dann Null, wenn der Zähler Null wird, das ist der Fall für $x_E = -0.5$. Zur Untersuchung der Extremwerteigenschaft benötigen wir die zweite Ableitung $f''(x)$, dazu schreiben wir $f'(x)$ in der Form

$$f'(x) = (-3) \cdot (2x+1) \cdot (x^2 + x - 2)^{-2}$$

und berechnen mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel die zweite Ableitung von f

$$f''(x) = (-6) \cdot (x^2 + x - 2)^{-2} + (-3) \cdot (2x + 1) \cdot (-2) \cdot (x^2 + x - 2)^{-3} \cdot (2x + 1).$$

Einsetzen von $x_E = -0.5$ liefert:

$$f''(-0.5) = (-6) \cdot (0.5^2 + 0.5 - 2)^{-2} + 0 < 0,$$

daher hat f an der Stelle $x_E = -0.5$ ein lokales Maximum.

b) Zur Untersuchung des Krümmungsverhaltens muss das Vorzeichen von $f''(x)$ untersucht werden; dazu schreiben wir $f''(x)$ als Bruch

$$f''(x) = \frac{-6}{(x^2 + x - 2)^2} + \frac{6 \cdot (2x + 1)^2}{(x^2 + x - 2)^2 (x^2 + x - 2)},$$

und entnehmen dieser Darstellung $f''(x) > 0$ genau dann wenn $\dfrac{(2x + 1)^2}{(x^2 + x - 2)} > 1$. Der Zähler ist positiv für alle x und der Nenner ist positiv für $x < -2$ sowie $x > 1$; die Funktion f ist daher konvex für $x \in (-\infty, -2)$ und $x \in (1, \infty)$. Da $f''(x) < 0$ für $x < 1$ und $x > -2$ gilt, ist f konkav für $x \in (-2, 1)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln\left(1 + e^{2x}\right) - \arctan(e^x), \quad x \in \mathbb{R}$.

a) In welchen Intervallen ist f monoton steigend bzw. fallend?

b) Man bestimme alle Extrema von f im Intervall $[-1, 1]$.

a) Zur Bestimmung der Monotonieeigenschaften benötigen wir die erste Ableitung von f. Mit Hilfe der Summen- und Produktregel erhalten wir

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{e^{2x} - e^x}{1 + e^{2x}} = e^x \cdot \frac{e^x - 1}{1 + e^{2x}}.$$

Wegen $e^x > 1$ für $x > 0$ und $e^x < 1$ für $x < 0$ ist $f'(x) > 0$ d.h. f ist streng monoton steigend für $x > 0$ und $f'(x) < 0$ d.h. f ist streng monoton fallend für $x < 0$.

b) Die notwendige Bedingung $f'(x) = e^x \dfrac{e^x - 1}{1 + e^{2x}} = 0$ für ein Extremum im offenen Intervall $(-1, 1)$ ist für $x_E = 0$ erfüllt. Um festzustellen, ob ein Extremwert vorliegt ist das Vorzeichenverhalten der zweiten Ableitung $f''(x)$ zu untersuchen. Mit der Quotientenregel folgt, unter Verwendung des Additionstheorems der e-Funktion

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\left(2e^{2x} - e^x\right)\left(1 + e^{2x}\right) - 2e^{2x}\left(e^{2x} - e^x\right)}{(1 + e^{2x})^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - e^x + 2e^{4x} - e^{3x} - 2e^{4x} + 2e^{3x}}{(1 + e^{2x})^2} = \frac{e^{3x} + 2e^{2x} - e^x}{(1 + e^{2x})^2} \\ &= \frac{e^x}{(1 + e^{2x})^2} \left(e^{2x} + 2e^x - 1\right). \end{aligned}$$

Einsetzen von $x_E = 0$ liefert

$$f''(0) = \frac{e^0}{(1 + e^0)^2} \left(e^0 + 2e^0 - 1\right) = \frac{1}{2} > 0,$$

daher hat f in $x_E = 0$ ein lokales Minimum. Der minimale Funktionswert lautet

$$f(0) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^0) - \arctan(e^0) = -0.438..$$

Die Funktionswerte an den Randpunkten $x = -1$ bzw. $x = 1$ sind

$$f(-1) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^{-2}) - \arctan(e^{-1}) = -0.289..$$

bzw.

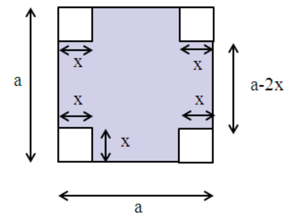
$$f(1) = \frac{1}{2} \ln(1 + e^2) - \arctan(e^1) = 0.154..$$

Die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln(1 + e^{2x}) - \arctan(e^x)$ hat im Intervall $[-1, 1]$ ein absolutes Minimum bei $x = 0$ und ein absolutes Maximum bei $x = 1$.

10.4 Extremalprobleme

In der Ingenieurpraxis spielt die Ermittlung von Extremwerten eine bedeutende Rolle.

1. Aus einem quadratischen Stück Pappe der Seitenlänge a werden an den Ecken Quadrate der Seitenlängen x abgeschnitten. Wie groß ist x zu wählen, damit eine Schachtel möglichst großen Volumens gefaltet werden kann?



Das Volumen der Schachtel beträgt

$$V(x) = (a - 2x)^2 \cdot x, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{2}.$$

Zur Lösung des Extremalproblems $V(x) \rightarrow$ Max! sucht man die Nullstellen der ersten Ableitung

$$V'(x) = (a - 2x)^2 + x \cdot 2(a - 2x) \cdot (-2) = (a - 2x) \cdot (a - 6x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = \frac{a}{2} \text{ bzw. } x_1 = \frac{a}{6}.$$

Mit Hilfe der zweiten Ableitung

$$V''(x) = (a - 6x) \cdot (-2) + (a - 2x) \cdot (-6) = 24x - 8a$$

folgt $V''\left(\dfrac{a}{2}\right) = -8a + \dfrac{24}{2} a = 4a > 0$, d.h. $x_0 = \dfrac{a}{2}$ ist lokales Minimum

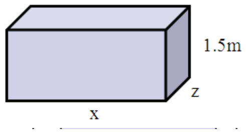
und $V''\left(\dfrac{a}{6}\right) = -8a + \dfrac{24}{6} a = -4a < 0$, d.h. $x_1 = \dfrac{a}{6}$ ist lokales Maximum.

Für $x_1 = \dfrac{a}{6}$ wird das Volumen der Schachtel maximal. Es ist

$$V\left(\frac{a}{6}\right) = \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \left(\frac{2}{3} a\right)^2 \cdot \frac{a}{6} = \frac{2}{27} a^3.$$

2. Ein rechteckiger Swimmingpool soll eine Wassertiefe von 1.50 m haben. Das Becken soll mit 60 m^3 Wasser gefüllt werden. Wie muss die Grundfläche dimensioniert werden, wenn der Material- und Arbeitsaufwand für das Fliesen des Beckens möglichst gering werden soll?

Bezeichnen wir die Grundkantenlängen mit x und z, so gilt $V = 60 = x \cdot z \cdot 1.5$. Der Inhalt A der zu fliesenden Fläche beträgt $A = x \cdot z + 2 \cdot x \cdot 1.5 + 2 \cdot z \cdot 1.5$ und nach Elimination von z durch $z = \dfrac{60}{1.5 \cdot x} = \dfrac{40}{x}$ folgt das Extremalproblem



$$A(x) = 40 + 3x + \frac{120}{x} \quad \rightarrow \quad \text{Min!}$$

mit Nebenbedingung $x > 0, z > 0$.

Die notwendige Bedingung für ein Extremum liefert

$$A'(x) = 3 - \frac{120}{x^2} \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x^2 = 120 \quad \Leftrightarrow \quad x_E = \sqrt{40} \approx 6.32.$$

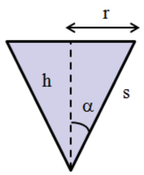
Daß es sich bei x_E um ein Minimum handelt, sieht man mit der zweiten Ableitung

$$A''(x_E) = \frac{240}{x_E^3} > 0.$$

Wir erhalten $x_E = \sqrt{40}$, $z_E = \sqrt{40}$, d.h. das Schwimmbad muß eine quadratische Grundfläche mit 6.32 m Kantenlänge erhalten. Ob sich der Bauherr für diese billigste Variante entscheidet, muß ihm überlassen bleiben.

3. Ein Trichter hat die Form eines geraden Kreiskegels, dessen Seitenlinie die Länge s haben soll. Das Fassungsvermögen des Trichters soll so groß wie möglich sein. Wie groß muß der Öffnungswinkel gewählt werden?

Das Volumen eines Kreiskegels ist $V = \frac{\pi}{3} r^2 \cdot h$, wobei für den Grundkreisradius r und die Kegelhöhe h aus geometrischen Gründen $0 < r < s$ und $0 < h < s$ gelten.
Der Zusammenhang von r, s und dem Öffnungswinkel 2α ist gegeben durch $r = s \cdot \sin\alpha$, $h = s \cdot \cos\alpha$.



Damit lautet die Extremalaufgabe

$$V(\alpha) = \frac{\pi}{3} s^2 \cdot \sin^2\alpha \cdot s \cdot \cos\alpha \quad \rightarrow \quad \text{Max!}$$

mit Nebenbedingung $0 < \alpha < 90°$.

Der konstante Faktor $\frac{\pi}{3} s^3$ hat keinen Einfluß auf den Winkel. Setze also

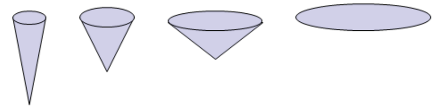
$$f(\alpha) := \sin^2\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Die notwendige Bedingung für ein Extremum liefert

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= 2\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha - \sin^3\alpha \stackrel{!}{=} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0 \\ \Leftrightarrow & \quad \alpha_1 = 0 \quad \text{und} \quad \tan^2\alpha_2 = 2 \quad \text{bzw.} \quad \tan\alpha_2 = \pm\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Wegen $0 < \alpha < 90°$ scheiden die Lösung $\alpha_1 = 0$ und das Minuszeichen aus. Es ergibt sich $\alpha_E = \alpha_2 = \arctan(\sqrt{2}) = 54.7°$.

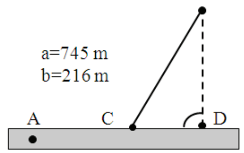
Mit der zweiten Ableitung von f läßt sich nachweisen, das α_E tatsächlich ein Minimum von V liefert. Mitunter führt auch eine „pragmatische“Argumentation dazu, daß man ein lokales Extremum klassifizieren kann.



Macht man α sehr klein (linke Figur) so entsteht ein Trichter mit kleinem Fassungsvermögen. Mit wachsendem α wird der Trichterinhalt größer. Er kann aber nicht unbegrenzt wachsen, denn für $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ entsteht ein sehr flacher Trichter mit wiederum kleinem Volumen. Da bei stetiger Veränderung des Winkels zwischen 0° und 90° keine Unstetigkeit beim Trichterinhalt zu erwarten ist, muss es innerhalb dieses Bereichs eine Stelle geben, für die das Volumen des Trichters am größten wird. Diese Stelle kann nur das berechnete $\alpha_E = 54.7°$ sein.

4. Von einem Punkt A aus soll zu einem abseits gelegenen Haus B eine Leitung verlegt werden.

Die erforderlichen Grabungen kosten entlang der Straße 156 Euro/m und quer über das angrenzende Grundstück 184 Euro/m. An welcher Stelle C muß von der Straße geradlinig abgezweigt werden, wenn die Kosten minimal werden sollen?
Die Gesamtkosten für das Leitungsbauprojekt belaufen sich auf



$$K = 156 \frac{\text{Euro}}{\text{m}} \cdot \overline{AC} + 184 \frac{\text{Euro}}{\text{m}} \cdot \overline{CB}$$

und es soll der Abzweigpunkt C so bestimmt werden, daß K minimal wird.

Setzt man $\overline{CD} = x$ und misst man alle Strecken in m, so lautet die Aufgabe

$$K(x) = 156(a - x) + 184\sqrt{b^2 + x^2} \quad \rightarrow \quad \text{Min!}$$

Dabei sind a und b durch die Problemstellung gegeben. Es ist

$$K'(x) = -156 + 184 \frac{x}{\sqrt{b^2 + x^2}}$$

und

$$K''(x) = 184 \frac{\sqrt{b^2 + x^2} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}}}{b^2 + x^2} = \frac{184 b^2}{(b^2 + x^2)^{3/2}}.$$

Die Forderung $K'(x) = 0$ liefert

$$184\frac{x}{\sqrt{b^2+x^2}} = 156 \quad\Leftrightarrow\quad 184^2x^2 - 156^2x^2 = 156^2b^2$$
$$\Leftrightarrow \quad x_E = \frac{156b}{\sqrt{184^2-156^2}} \approx 345 \text{ m}.$$

Man muss also 745 m - 345 m = 400 m von A entfernt von der Straße geradlinig nach B abzweigen, um die Kosten so gering als möglich zu halten.

Daß es sich bei x_E um ein Minimum handelt, sieht man sofort durch Einsetzen in $K''(x)$.

Folgende Vergleichsrechnungen zeigen das Sparpotenzial:

- der direkte Weg von A nach B kostet $K = 184 \cdot \sqrt{745^2+216^2} \approx 142.725$ Euro,
- der Umweg über D kostet $K = 184 \cdot 216 + 745 \cdot 156 = 155.964$ Euro,
- und das berechnete Minimum beträgt $K = 400 \cdot 156 + \sqrt{345^2+216^2} \cdot 184 \approx 137.296$ Euro.

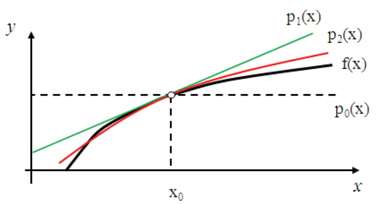
Es macht also Sinn sich hier Gedanken zu machen, da die Einsparpotenziale durchaus interessant sind.

10.5 Taylorsche Formel und Taylorsche Reihe

In vielen Anwendungen ist es erforderlich, eine Funktion f durch einfache Funktionen möglichst gut anzunähern. Mit Hilfe der Taylorschen Formel können Funktionen als Summe eines Polynoms und eines Restglieds dargestellt werden. Somit können auch komplizierte Funktionen wie der Logarithmus oder die Arkusfunktionen durch Polynome approximiert werden.

10.5.1 Taylorsche Formel

Zur Herleitung der Taylorschen Formel sei eine Funktion $y = f(x)$ in einer Umgebung des Punkts $x_0 \in D(f)$ gegeben. f sei hinreichend oft differenzierbar.



Als „Nullte“ Näherung $p_0(x)$ an f wählt man das konstante Polynom

$$p_0(x) = f(x_0),$$

das mit f nur den Funktionswert an der Stelle x_0 gemeinsam hat.

Die lineare Näherung $p_1(x)$ an f erhält man, wenn man die Tangente an f in x_0 wählt

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Die Tangente hat mit der Funktion sowohl den Funktionswert bei x_0 als auch die Ableitung an der Stelle x_0 gemeinsam.

Für die quadratische Näherung $p_2(x)$ an f wählt man den Ansatz

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + c \cdot (x - x_0)^2$$

und bestimmt den Parameter c derart, daß p_2 zusätzlich dieselbe Krümmung wie f in x_0 besitzt:

$$p_2''(x) = 2c \stackrel{!}{=} f''(x_0) \quad\Rightarrow\quad c = \frac{1}{2}f''(x_0).$$

Man erhält

$$p_2(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2.$$

Für die kubische Näherung $p_3(x)$ an f wählt man den Ansatz

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + d \cdot (x - x_0)^3$$

und bestimmt d so, daß p_3 zusätzlich in der dritten Ableitung mit f in x_0 übereinstimmt:

$$p_3'''(x) = 3 \cdot 2 \cdot d \stackrel{!}{=} f'''(x_0) \quad\Rightarrow\quad d = \frac{1}{3!}f'''(x_0).$$

Man erhält

$$p_3(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3.$$

Man gewinnt schrittweise bessere Approximationen an f, in dem man jeweils Terme der Form $\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$ hinzu nimmt. Allgemein gilt:

Satz 10.8 *(Taylorsche Formel)*
Ist die Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ $(n + 1)$-mal stetig differenzierbar, d.h. existieren $f, f', f'', \ldots, f^{(n+1)}$ und sind stetige Funktionen, dann gilt für alle $x \in [a, b]$ die Taylorsche Formel

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x, x_0, \xi)$$

mit dem Taylorpolynom der Ordnung n *(Hauptteil) und dem* Restglied von Lagrange

$$R_n(x, x_0, \xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Der Entwicklungspunkt x_0 ist eine beliebige, aber fest gewählte Stelle aus dem Intervall $[a, b]$, die (nicht näher bekannte) Zwischenstelle ξ liegt zwischen x_0 und x.

Üblich sind noch folgende Darstellungen der Taylorschen Formel:

1. Setzt man $h = x - x_0$, so lautet die Taylorformel
$$f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$
2. Im Fall des Entwicklungspunkts $x_0 = 0$ erhält man
$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1},$$
mit ξ zwischen x_0 und x.

Beweis: Für den Fehler $R_n(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ gilt
$$R_n(x_0) = R_n'(x_0) = \cdots = R_n^{(n)}(x_0) = 0.$$
Die Funktion $\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}}$ erfüllt die Voraussetzungen des erweiterten Mittelwertsatzes, d.h. es gibt ein ξ_1 zwischen x_0 und x mit
$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n(x) - R_n(x_0)}{(x-x_0)^{n+1} - (x_0-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)\cdot(\xi_1-x_0)^n}.$$
Induktiv folgt mit dem erweiterten Mittelwertsatz
$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n'(\xi_1)}{(n+1)\cdot(\xi_1-x_0)^n} = \frac{R_n''(\xi_2)}{(n+1)n\cdot(\xi_2-x_0)^{n-1}} = \cdots = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!\cdot(\xi_n-x_0)},$$
wobei ξ_n zwischen x_0 und x liegt. Da $f^{(n)}$ differenzierbar ist, kann der Mittelwertsatz nun ein letztes mal angewendet werden: es gibt ein $\xi \in (x_0, x)$
$$\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{R_n^{(n)}(\xi_n)}{(n+1)!\cdot(\xi_n-x_0)} = \frac{R_n^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$
d.h. für $R_n(x)$ ergibt sich
$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$
Der Fehler R_n hängt von x, x_0 und von ξ ab $\diamond$

Beispiele:

1. Für $y = f(x) = e^x$ gilt $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x, \ldots$. Es folgt die Taylorentwicklung von e^x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$:
$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x,\xi) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x,\xi), \quad 0 \le |\xi| < |x|, \end{aligned}$$
mit dem Restglied von Lagrange
$$R_n(x,\xi) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 \le |\xi| < |x|.$$

2. Die Zahl e soll bis auf 10^{-6} genau berechnet werden. Dazu gehen wir von der Taylorentwicklung von e^x mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ aus, vgl. Beispiel 1. Wir berechnen $e = e^1$ durch das Taylorpolynom der Ordnung n
$$e = e^1 \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}.$$
Der Fehler nach dem Lagrangeschen Restglied ist
$$R_n(x,\xi) = \frac{e^\xi}{(n+1)!} \le \frac{e^1}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$
Damit der Fehler kleiner als 10^{-6} wird, muß
$$R_n(x,\xi) < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-6} \quad \Rightarrow \quad (n+1)! > 3\cdot 10^6$$
gelten. Dies ist für z.B. für $n \ge 9$ erfüllt, denn $(9+1)! = 3628800$. Für e^1 bis auf 6 Dezimalstellen genau berechnet man
$$e \approx \sum_{k=0}^{9} \frac{1}{k!} = 2.7182815.$$

3. Schreiben Sie für die Funktion $f(x) = \sqrt{3+e^x}$, $x \in [0,\infty)$, die Taylorsche Formel mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$, dem Hauptteil erster Ordnung und dem Lagrangeschen Restglied hin. Was weiß man über die Lage der im Restglied auftretenden Zwischenstelle ξ?

   Für $f(x) = \sqrt{3+e^x}$, $x \in [0,\infty)$ ist $f(0) = \sqrt{3+e^0} = 2$. Mit der Kettenregel berechnen wir die erste Ableitung
$$f'(x) = \frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}} \quad \text{sowie} \quad f'(0) = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{3+1}} = \frac{1}{4}.$$
   Mit der Quotientenregel folgt
$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{e^x\sqrt{3+e^x} - e^x\cdot\frac{1}{2}\frac{e^x}{\sqrt{3+e^x}}}{\left(\sqrt{3+e^x}\right)^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2e^x(3+e^x) - e^{2x}}{\left(\sqrt{3+e^x}\right)^3} = \frac{1}{4}\cdot\frac{e^{2x}+6e^x}{\left(\sqrt{3+e^x}\right)^3}.$$
   Die Taylorformel erster Ordnung um $x_0 = 0$ mit dem Restglied von Lagrange lautet
$$f(x) = \sqrt{3+e^x} = 2 + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}\frac{e^{2\xi}+6e^\xi}{\left(\sqrt{3+e^\xi}\right)^3}\cdot x^2, \quad 0 \le x < \infty.$$
   Falls $0 < x < \infty$ ist, gilt für die Zwischenstelle $0 < \xi < x$.

4. Bestimmen Sie mit der Taylorschen Formel eine reelle Zahl $C \ge 0$ mit der Eigenschaft
$$|\tan x - x| \le C\cdot x^2, \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right].$$

Für die Funktion $f(x) = \tan x$ lauten die erste und zweite Ableitung

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}, \qquad f''(x) = \frac{-2\cos x \cdot (-\sin x)}{\cos^4 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}.$$

Mit dem Taylorpolynom erster Ordnung, dem Restglied in der Form von Lagrange sowie dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ erhält man

$$\tan x = \tan 0 + \frac{1}{\cos^2 0} \cdot x + \frac{2\sin\xi}{\cos^3\xi} \cdot \frac{x^2}{2} = x + \frac{2\sin\xi}{\cos^3\xi} \cdot \frac{x^2}{2}, \quad 0 < \xi < x \le \frac{\pi}{4}.$$

Da im Intervall $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ der Sinus monoton steigt und der Kosinus monoton fällt, erhalten wir die Abschätzung

$$|\tan x - x| \le \left| x^2 \cdot \frac{\sin\xi}{\cos^3\xi} \right| = x^2 \cdot \frac{\sin\xi}{\cos^3\xi} \le x^2 \cdot \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\cos^3\frac{\pi}{4}} = x^2 \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$$

und eine gesuchte Konstante C ist gegeben durch $C = \dfrac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$.

10.5.2 Taylorreihe

Wir setzen nun voraus, daß $y = f(x)$ Ableitungen beliebig hoher Ordnung besitzt. Läßt man den Grad des Taylorpolynoms unbeschränkt wachsen, so entsteht die *Taylorreihe* von f mit Entwicklungspunkt x_0.

Satz 10.9 *(Taylorreihe)*
Ist die Funktion f in einem Intervall $[a, b]$ beliebig oft differenzierbar und gilt für alle $x \in [a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x, x_0, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = 0, \quad \xi \text{ zwischen } x_0 \text{ und } x,$$

dann ist der Übergang zur Taylorschen Reihe *möglich und f kann als unendliche Reihe nach Potenzen von $x - x_0$ dargestellt werden:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \end{aligned}$$

Im Fall des Entwicklungspunkts $x_0 = 0$ erhält man die so genannte *Mac Laurinsche Reihe*

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Bemerkungen:

1. Der Konvergenzradius einer Taylorreihe ist nicht notwendigerweise > 0.
2. Falls die Taylorreihe von f konvergiert, muß sie nicht notwendigerweise gegen $f(x)$ konvergieren.
3. Die Taylorreihe konvergiert genau dann gegen $f(x)$, wenn das Restglied $R_n(x, x_0, \xi)$ für $n \to \infty$ gegen Null geht. In diesem Fall stimmen Taylorreihe und Funktion für alle x des Konvergenzbereichs der Taylorreihe überein.
4. Ist f eine gerade Funktion, dann treten in der Taylorreihe nur Terme mit geraden Potenzen auf. Ist f ungerade, so besitzt die Taylorreihe nur Terme mit ungeraden Potenzen.

Beispiele:

1. Für die Funktion $y = f(x) = e^x$ gilt die Taylorformel der Ordnung n mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$

   $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x, \xi), \quad 0 \le |\xi| < |x|,$$

   mit dem Restglied nach Lagrange

   $$R_n(x, \xi) = \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 \le |\xi| < |x|.$$

   Wir zeigen nun $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, \xi) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Wegen

   $$a_{n+1} := \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{|x|^n}{n!} \cdot \frac{|x|}{n+1} = a_n \cdot \frac{|x|}{n+1}$$

   nimmt a_{n+1} monoton ab, sobald $n + 1 > |x|$ ist. Mit $a := \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ folgt

   $$a = a \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = a \cdot 0 = 0.$$

   Wegen $0 \le |\xi| \le |x|$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x, \xi) = 0$ und somit gilt die *Exponentialreihe*

   $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

2. Um $y = f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ in eine Taylorreihe zu entwickeln benötigen wir zunächst die Ableitungen

   $$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(iv)}(x) = \sin x, \dots$$

   und die Werte

   $$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = 0, \quad f'''(0) = -1, \quad f^{(iv)}(0) = 0, \dots.$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x,\xi)| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\pm \begin{matrix}\sin\xi \\ \cos\xi\end{matrix}\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \le \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)!}|x|^{n+1} = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

gilt die *Sinusreihe*

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Analog erhalten wir die *Kosinusreihe*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Eine wichtige Rolle beim Rechnen mit komplexen Zahlen spielt die Eulersche Formel:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi.$$

Wir sind jetzt in der Lage, diese wichtige Beziehung nachzuweisen:

Es gelten die Reihendarstellungen

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots &&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \dots &&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \dots &&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}. \end{aligned}$$

Die Exponentialreihe gilt auch für $x = j \cdot \varphi$ und Trennung von Real- und Imaginärteil ergibt:

$$\begin{aligned} e^{j\varphi} &= 1 + j\varphi - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} - + \dots \\ &= \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots\right) + j \cdot \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots\right) \\ &= \cos\varphi + j \cdot \sin\varphi \quad \diamond \end{aligned}$$

10.6 Newton-Verfahren

Mit dem *Newton-Verfahren* kann man eine numerische Näherung an die Lösung x^* der (nicht-linearen) Gleichung

$$f(x) = 0$$

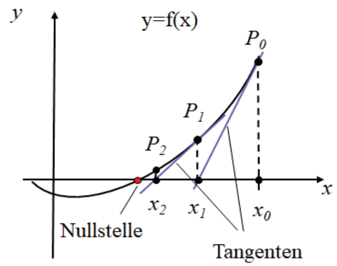
berechnen, falls man eine vernünftige Startnäherung x_0 für x^* kennt und f differenzierbar ist. Wir nehmen an, dass wir ein Intervall $[a,b]$ kennen mit $x^* \in [a,b]$.

Die Grundidee des Verfahrens ist wie folgt: wir wählen eine Startnäherung $x_0 \in [a,b]$ und betrachten die Tangente in $P_0(x_0, f(x_0))$:

$$y(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0),$$

Als Näherung für x^* wählen wir die Nullstelle x_1 der Tangente $y(x)$, also

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_0) \cdot (x_1 - x_0) + f(x_0) \\ \Leftrightarrow x_1 &:= x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \end{aligned}$$



Im n-ten Schritt bilden wir die Tangente $y(x)$ in $P_n(x_n, f(x_n))$ und approximieren die Null-stelle von f durch die Nullstelle x_{n+1} von $y(x)$. Wir erhalten die Iteration

$$x_{n+1} := x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Das Newton-Verfahren liefert i.a. mit wenigen Iterationen brauchbare Ergebnisse.

Wir berechnen die Nullstelle von

$$f(x) = x^2 - 2$$

näherungsweise mit dem Newton-Verfahren. Wegen $\sqrt{2} \in [1,3]$ starten wir mit $x_0 = 2$. Wir erhalten die Iteration

$$\begin{aligned} x_{n+1} &:= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} \\ \Leftrightarrow x_{n+1} &= \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{x_n}, \quad x_0 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Hier entspricht das Newton-Verfahren dem bereits bekannten Heron-Verfahren. Es ergeben sich folgende Werte:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 1.5 \\ x_2 &= 1.4167 \\ x_3 &= 1.41421569 \\ x_4 &= 1.414213562, \quad \text{Genauigkeit: 10 Stellen.} \end{aligned}$$

11 Integralrechnung

Die Berechnung von Flächen unter beliebig geformten Kurven stellt ein klassisches mathematisches Problem dar, man denke etwa an die Bestimmung der Fläche eines Kreises. Die Integralrechnung behandelt diese Aufgabenstellungen. Darüber hinaus kann man mit Integralen Volumina, Oberflächen, Schwerpunkte, Trägheitsmomente und viele andere Kenngrößen beliebiger Körper berechnen, Differenzialgleichungen lösen sowie viele stochastische Fragestellungen bearbeiten. In der Informatik und im Ingenieurbereich benötigt man Integralrechnung beispielsweise für die Computergrafik sowie bei der Simulation dynamischer Systeme.

Der Hauptsatz der Differenzial und Integralrechnung stellt einen interessanten Zusammenhang zwischen Differenziation und Integration her: die Integration ist gerade die „Umkehrung" der Differentiation und somit aus sich selbst heraus wichtig zur Komplettierung des mathematischen Gebäudes.

11.1 Das bestimmte Integral

Wie berechnet man den Flächeninhalt unter dem Graph einer Funktion f über dem Intervall $[a,b]$?
Die Grundidee besteht in der Annäherung des Flächeninhalts durch eine Summe von Rechteckflächen.

11.1.1 Riemannsche Summe

Hierzu betrachten wir eine *Zerlegung* Z_n von $[a,b]$ in n Teilintervalle mit den Punkten

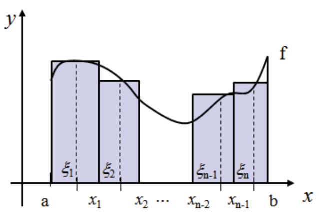
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Die Teilintervalle $[x_{k-1}, x_k]$ besitzen die Länge $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$. Der *Durchmesser* von Z_n ist $d(Z_n) = \max\{\Delta x_1, \ldots \Delta x_n\}$.

Aus jedem Teilintervall wählen wir eine Zwischenstelle $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Die *Riemannsche Summe*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \tag{11.1}$$

ist abhängig von der Zerlegung Z_n und der Wahl der Zwischenstellen.



Die Riemannsche Summe als Näherung für die Fläche unter dem Graph von f in $[a,b]$

Definition 11.1 *(Bestimmtes Integral)*
Sei f auf $[a,b]$ beschränkt. Dann heißt f integrierbar *über $[a,b]$, wenn es eine reelle Zahl I gibt, so daß für alle Zerlegungen Z_n mit $d(Z_n) \to 0$ für $n \to \infty$ und eine beliebige Wahl von Zwischenstellen gilt*

$$I := \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k.$$

Man schreibt

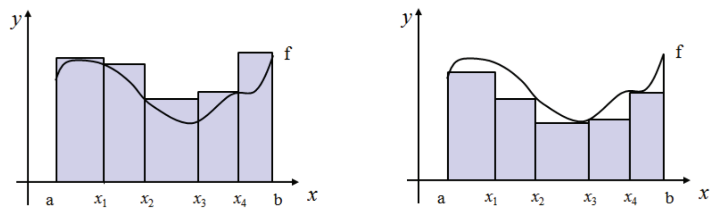
$$I =: \int_a^b f(x)\, dx.$$

Die Zahl I nennt man das bestimmte Integral *von f über $[a,b]$. Existiert dieser Grenzwert nicht, so ist f nicht integrierbar über $[a,b]$.*

11.1.2 Integrierbarkeit

Welche Funktionen f sind integrierbar über dem Intervall $[a,b]$?
Wir betrachten eine auf dem Intervall $[a,b]$ beschränkte Funktion f mit Schranken

$$m \le f(x) \le M, \quad x \in [a,b].$$

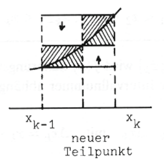


Ober- und Untersumme für eine Zerlegung von $[a,b]$

Wählen wir in der Rechtecksumme (11.1) anstelle der Zwischenwerte $f(\xi_k)$ jeweils die obere Grenzen M_k bzw. die unteren Grenzen m_k von f auf den Teilintervallen $[x_{k-1}, x_k]$, so erhalten wir die *Obersumme* $O(Z)$ bzw. die *Untersumme* $U(Z)$ gemäß

$$O(Z) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \qquad \text{bzw.} \qquad U(Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k.$$

Schaltet man für eine Zerlegung Z von $[a,b]$ zusätzliche Teilpunkte, so erhält man eine *Verfeinerung* Z' von Z. Der Wert der Untersumme wird größer, der Wert der Obersumme wird kleiner:



$$U(Z) \le U(Z') \le O(Z') \le O(Z).$$

Für eine Folge von Zerlegungen Z_n mit $d(Z_n) \to 0$ ist die zugehörige Folge der Untersummen $U(Z_n)$ monoton wachsend und nach oben beschränkt, etwa durch $O(Z_1)$. Die Folge der Obersummen $O(Z_n)$ monoton fallend und nach unten beschränkt, etwa durch $U(Z_1)$. Somit existieren die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} U(Z_n) = \underline{I} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} O(Z_n) = \overline{I}$$

und es gilt $\underline{I} \leq \overline{I}$.

Mit Hilfe der Ober- und Untersumme kann man Funktionen auf Integrierbarkeit untersuchen.

Satz 11.1 *(Riemannsches Integrabilitätskriterium)*
Die beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann über $[a, b]$ integrierbar, wenn die Grenzwerte $\underline{I}$ und $\overline{I}$ existieren und $\underline{I} = \overline{I}$ gilt. Dann ist

$$\underline{I} = \overline{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Ist f über $[a, b]$ integrierbar, so gilt für beliebige Zerlegungen Z, Z' stets

$$U(Z) \leq \int\limits_a^b f(x)\,dx \leq O(Z').$$

Beispiele:

1. Das bestimmte Integral

$$I = \int\limits_a^b 1\,dx$$

kann als Grenzwert von Unter- und Obersummen berechnet werden.

Wir zerlegen das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teile der Länge $\Delta x = \frac{b-a}{n} =: h$ mit Endpunkten

$$x_k = k \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Wegen $f(x) = 1$ erhalten wir die Unter- und Obersummen

$$U(n) = O(n) = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot h = n \cdot h = b - a,$$

und Grenzübergang $n \to \infty$ liefert das bestimmte Integral

$$I = \lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty} O(n) = b - a.$$

2. Das bestimmte Integral

$$I = \int\limits_0^b x\,dx$$

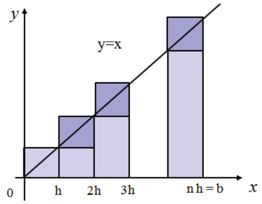
kann als Grenzwert von Unter- und Obersummen berechnet werden.

Zunächst zerlegen wir das Intervall $[0, b]$ in n gleiche Teile der Länge $\Delta x = \frac{b}{n} =: h$ mit Endpunkten

$$x_k = k \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Im Intervall $[x_{k-1}, x_k]$ sind Minimum und Maximum von $f(x) = x$ gegeben durch

$$m_k = x_{k-1}, \quad M_k = x_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$



Die Unter- und Obersumme lautet

$$\begin{aligned} U(n) &= \sum_{k=1}^{n} x_{k-1} \cdot h = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} (k-1), \\ O(n) &= \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot h = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k. \end{aligned}$$

Mit der Identität $\sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ erhalten wir

$$U(n) = \frac{b^2}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \quad \text{und} \quad O(n) = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

und Grenzübergang $n \to \infty$ liefert

$$I = \lim_{n\to\infty} U(n) = \lim_{n\to\infty} O(n) = \frac{b^2}{2}.$$

Dies ist die bekannte Formel „Grundseite $\times$ Höhe / 2“ für die Fläche eines Dreiecks.

Für eine stetige Funktion wird man erwarten, daß der Fall $\underline{I} < \overline{I}$ nicht eintreten kann. In diesem Fall existieren für beliebige Zerlegungen auf jedem Teilintervall sowohl das Maximum als auch das Minimum von $f(x)$ und unterscheiden sich um so weniger, je kleiner $|\Delta x_k|$ ist. Daher wird der Unterschied zwischen $U(Z)$ und $O(Z)$ mit wachsender Verfeinerung von Z ($d(Z) \to 0$) beliebig klein. Es gilt:

Satz 11.2 *(Integrierbare Funktionen)*

(a) Jede auf $[a, b]$ monotone Funktion ist integrierbar.

(b) Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist integrierbar.

(c) Jede auf $[a, b]$ beschränkte und stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Dabei nennt man f *stückweise stetig* auf $[a, b]$, wenn f an höchstens endlich vielen Stellen auf $[a, b]$ endlich hohe Sprünge hat. Die meisten technisch interessanten Funktionen liegen in dieser Klasse.

11.1.3 Elementare Eigenschaften

Wenn für $f(x)$ auf $[a, b]$ das Integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existiert, so setzt man

$$\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$$

und es folgt $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

Unmittelbar aus dem Distributivgesetz für Summen erhalten wir die *Linearität* des Integrals

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \text{(Additivität)}$$

und

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx, \quad c \in \mathbb{R} \qquad \text{(Homogenität).}$$

Man kann also summandenweise integrieren und konstante Faktoren vor das Integral ziehen.

Die im Fall $a \le c \le b$ plausible Regel

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

gilt für jede Anordnung von a, b, c. Auf Grund dieser Regel sind die stückweise stetigen Funktionen integrierbar. Man integriert von Sprungstelle zu Sprungstelle.

Aus $f(x) \le g(x)$ für $x \in [a, b]$ folgt

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx.$$

Insbesondere folgt für $m \le f(x) \le M$, $x \in [a, b]$ die Abschätzung

$$m \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b - a).$$

Beispiel: Für $f(x) = e^{-x}$ auf dem Intervall $[1, 3]$ gilt: $0.05 \le e^{-x} \le 0.368$. Somit folgt

$$0.1 \le \int_1^3 e^{-x}\,dx \le 0.736.$$

Beim Vertauschen von Absolutbetrag und Integral erhält man

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Satz 11.3 *(Mittelwertsatz der Integralrechnung)*
Es sei f stetig auf $[a, b]$. Dann existiert eine Stelle $\xi \in [a, b]$ mit

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi) \cdot (b - a). \tag{11.2}$$

Die Stelle ξ ist nicht weiter spezifiziert.

Beweis: Als stetige Funktion nimmt f auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ Maximum und Minimum an. Sei $m = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ und $M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$, so gilt $m \le f(x) \le M$ für $x \in [a, b]$. Nach dem Zwischenwertsatz für stetige Funktionen nimmt f jeden Wert zwischen m und M an. Weiter folgt aus $m \le f(x) \le M$ die Abschätzung

$$m \cdot (b - a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M \cdot (b - a) \qquad \text{bzw.} \qquad m \le \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx \le M.$$

Da f jeden Wert zwischen m und M als Funktionswert annimmt, existiert ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx = f(\xi),$$

also (11.2). Der genaue Wert von ξ ist nicht bekannt und meistens auch nicht von Interesse ⋄

11.2 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung, Stammfunktionen

11.2.1 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Satz 11.4 *(Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung)*
Es sei f stückweise stetig auf $[a, b]$. Dann ist die Integralfunktion

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \tag{11.3}$$

stetig differenzierbar in (a,b) und es gilt

$$F'(x) = f(x). \tag{11.4}$$

Für das bestimmte Integral von f über $[\alpha,\beta]$ gilt

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha). \tag{11.5}$$

Beweis: Für

$$F(x) := \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$$

ist zu zeigen

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \stackrel{!}{=} f(x).$$

Mit der Definition von $F(x)$ und dem Mittelwertsatz 11.3 erhalten wir für festes $h > 0$

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_{x}^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)\cdot h$$

mit $\xi_h \in (x, x+h)$. Für den Differenzialquotienten folgt weiter

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(\xi_h) = f(x),$$

was zu zeigen war.

Mit der Definition von F und der Vertauschung der Integrationsgrenzen folgt

$$F(\beta) - F(\alpha) = \int\limits_{a}^{\beta} f(t)\,dt - \int\limits_{a}^{\alpha} f(t)\,dt = \int\limits_{a}^{\beta} f(t)\,dt + \int\limits_{\alpha}^{a} f(t)\,dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt,$$

was den Beweis abschließt ⋄

Üblicherweise schreibt man

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(t)\,dt = [F(t)]_{t=\alpha}^{t=\beta} \quad \text{bzw.} \quad F(t)|_{\alpha}^{\beta} \quad \text{statt} \quad F(\beta) - F(\alpha).$$

Satz 11.5 *Das bestimmte Integral (11.3) einer stetigen Funktion f ist eine stetige Funktion der oberen Integrationsgrenze.*

Beweis: Für $x_0 \in [a,b]$ ist

$$F(x) - F(x_0) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt - \int\limits_{a}^{x_0} f(t)\,dt = \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt.$$

Da f stetig ist, nimmt f auf $[a,b]$ ihr betragsmäßiges Maximum an: $|f(x)| \le M$, $x \in [a,b]$. Dann gilt

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int\limits_{x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \le \int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \le M \cdot |x - x_0|.$$

Zu $\varepsilon > 0$ setze $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/M$. Dann gilt $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$ ⋄

11.2.2 Stammfunktionen und unbestimmtes Integral

Mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung ist die Berechnung des bestimmten Integrals von f über einem Intervall zurückgeführt auf die Bestimmung einer Funktion F mit $F'(x) = f(x)$.

Definition 11.2 *(Stammfunktion)*
Es sei $f(x)$ eine stetige Funktion auf $[a,b]$. Dann heißt eine Funktion $F(x)$ mit

$$F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b)$$

eine Stammfunktion *von $f(x)$ in $[a,b]$.*

Beispiel: $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ ist Stammfunkton zu $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$.

Satz 11.6 *Sei $f(x)$ stetig auf $[a,b]$ und $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Dann erhält man sämtliche Stammfunktionen von $f(x)$ durch $F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Mit $F(x)$ ist auch $F(x) + C$ Stammfunktion von $f(x)$ in $[a,b]$, denn es gilt

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x), \quad x \in (a,b).$$

Ist $G(x)$ eine weitere Stammfunktion von $f(x)$, so ist $F'(x) = G'(x) = f(x)$, d.h. $(F(x) - G(x))' = 0$ in $[a,b]$, d.h. $G(x) = F(x) + C$ mit $C \in \mathbb{R}$ ⋄

Üblicherweise bezeichnet man eine Stammfunktion von $f(x)$ als ein *unbestimmtes Integral* von $f(x)$ und schreibt

$$\int f(x)\,dx.$$

Dieses Symbol bezeichnet einen Repräsentanten aus der Menge aller Stammfunktionen von f, also eine *Funktion* von x, während das bestimmte Integral $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ eine *Zahl* ist.

11.2.3 Grundintegrale

Das Integral einer Summe oder Differenz von Funktionen ist gleich der Summe oder der Differenz der einzelnen Integrale:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx \qquad \text{(Additivität).}$$

Ebenso gilt mit $c \in \mathbb{R}$:

$$\int c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int f(x)\,dx \qquad \text{(Homogenität).}$$

Nach Satz 11.4 und Definition 11.2 folgt aus jeder Ableitungsformel eine Integralformel. Aus den Ableitungen der elementaren Funktionen erhält man die Grundintegrale

Ableitungsformel	$\Rightarrow$	Integralformel
$\left(x^{k+1}\right)' = (k+1)\,x^k$		$\int x^k\,dx = \frac{x^{k+1}}{k+1} + C,\quad k \neq -1$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$		$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$
$(e^x)' = e^x$		$\int e^x\,dx = e^x + C$
$(\sin x)' = \cos x$		$\int \cos x\,dx = \sin x + C$
$(\cos x)' = -\sin x$		$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$		$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\arccos x + C$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$		$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$
$(\sinh x)' = \cosh x$		$\int \cosh x\,dx = \sinh x + C$
$(\cosh x)' = \sinh x$		$\int \sinh x\,dx = \cosh x + C$
$(\tanh x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$		$\int \frac{1}{\cosh^2 x}\,dx = \tanh x + C$
$(\text{arsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \text{arsinh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + C$
$(\text{arcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$		$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \text{arcosh} x + C = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + C,\quad x > 1$
$(\text{artanh} x)' = \frac{1}{1-x^2},\quad \lvert x\rvert < 1$		$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{artanh} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} + C,\quad \lvert x\rvert < 1$
$(\text{arcoth} x)' = \frac{1}{1-x^2},\quad \lvert x\rvert > 1$		$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \text{arcoth} x + C = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} + C,\quad \lvert x\rvert > 1.$

Wir sind bereits in der Lage einfache Stammfunktionen und bestimmte Integrale zu berechnen.

Beispiele:

1. $$\int (x^3 - 2x^2 + 5)\,dx = \int x^3\,dx - 2\int x^2\,dx + \int 5\,dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 5x + C.$$

2. $$\int_0^{\pi/2} (x + \sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} x\,dx + \int_0^{\pi/2} \sin x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi/2} + [-\cos x]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8} + 1.$$

Bemerkung: Als Ableitung einer elementaren Funktion erhält man eine elementare Ableitungsfunktion. Beim Integrieren gilt eine entsprechende Aussage nicht. Beispielsweise gibt es zu $\frac{\sin x}{x}$ und e^{-x^2} keine mit elementaren Funktionen darstellbare Stammfunktionen, d.h. die Funktionen sind nicht geschlossen integrierbar.

11.3 Integrationstechniken

Mit dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung (Satz 11.4) erhält man für jede Ableitungsregel eine entsprechende Integrationsregel.

11.3.1 Partielle Integration

Aus der Produktregel für Ableitungen

$$f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

erhält man durch Integration

$$\int f'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) = \int \left(u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)\right)\,dx.$$

Damit folgt

Satz 11.7 *(Partielle Integration, Produktintegration)*
Sind u und v auf $[a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt für das unbestimmte Integral

$$\int u(x) \cdot v'(x)\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx,$$

bzw. für das bestimmte Integral

$$\int_a^b u(x) \cdot v'(x)\,dx = [u(x) \cdot v(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u'(x) \cdot v(x)\,dx.$$

Die partielle Integration gelingt, wenn sich der Integrand in Faktoren $u(x)$ und $v'(x)$ zerlegen läßt mit den Eigenschaften

1. Zu $v'(x)$ kann eine Stammfunktion $v(x)$ angegeben werden,
2. das Integral $\int u'(x) \cdot v(x)\, dx$ ist lösbar.

Beispiele:

1. $$\begin{aligned} \int x \cdot e^x \, dx &= x \cdot e^x - \int e^x \, dx = x \cdot e^x - e^x + C \\ &= e^x (x-1) + C. \end{aligned}$$
Hier ist $u = x$, $u' = 1$ und $v' = e^x$, $v = e^x$.

2. $$\begin{aligned} \int \ln x \, dx &= \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= x \cdot \ln x - x + C. \end{aligned}$$
Hier ist $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$ und $v' = 1$, $v = x$.

3. $$\begin{aligned} \int x \cdot \sin x \, dx &= -x \cdot \cos x + \int \cos x \, dx \\ &= -x \cdot \cos x + \sin x + C. \end{aligned}$$
Hier ist $u = x$, $u' = 1$ und $v' = \sin x$, $v = -\cos x$.

4. $$\int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + \int \cos^2 x \, dx.$$
Hier ist $u = \sin x$, $u' = \cos x$ und $v' = \sin x$, $v = -\cos x$.
Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ für $x \in \mathbb{R}$ folgt für das Integral auf der rechten Seite
$\int \cos^2 x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \, dx = x - \int \sin^2 x \, dx$
und somit folgt
$2 \int \sin^2 x \, dx = -\sin x \cdot \cos x + x + C$, also insgesamt
$\int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + C.$

5. $$\begin{aligned} \int_1^2 x \cdot \ln x \, dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2} x \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^2 - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - \frac{3}{4}. \end{aligned}$$
Hier ist $u = \ln x$, $u' = \dfrac{1}{x}$ und $v' = x$, $v = \dfrac{1}{2}x^2$.

11.3.2 Integralsubstitution

Die Substitutionsregel erhält man durch Umkehrung der Kettenregel für Ableitungen:

$$[f(u(x))]' = f'(u(x)) \cdot u'(x) \Rightarrow f(u(x)) = \int f'(u(x)) \cdot u'(x) \, dx.$$

Ersetzt man f durch eine Stammfunktion F von f sowie f' durch f, so folgt

$$[F(u(x))]' = f(u(x)) \cdot u'(x) \Rightarrow F(u(x)) = \int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx.$$

Dabei ist die Umrechnung des Differenzials dx in das Differenzial du wesentlich. Diese Umrechnung erhält man aus der Ableitung der *Substitutionsgleichung* $u = u(x)$ bzw. $x = x(u)$:

$$u'(x) = \frac{du}{dx} \Rightarrow du = u'(x) \cdot dx \quad \text{bzw.} \quad x'(u) = \frac{dx}{du} \Rightarrow dx = x'(u) \cdot du.$$

Satz 11.8 *(Substitution)*
Es sei f stetig auf dem Intervall I und u auf einem Intervall J stetig differenzierbar. Weiter gelte $u(J) \subset I$, sodaß die Verkettung $f \circ u$ möglich ist. Ist F eine Stammfunktion von f, so gilt für das unbestimmte Integral

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = \int f(u) \, du = F(u(x))$$

bzw. für das bestimmte Integral

$$\int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x) \, dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) \, du = [F(y)]_{u(a)}^{u(b)}.$$

Beispiele:

1. $$\begin{aligned} \int \sqrt{1+3x} \, dx &= \int \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} \, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{9} u^{3/2} \\ &= \frac{2}{9} \sqrt{1+3x}^3 + C. \end{aligned}$$
Hier ist $f(u) = \sqrt{u}$, $u(x) = 1 + 3x$, d.h. $du = 3\, dx$ und $\int f(u)\, du = \dfrac{2}{3} u^{3/2}$.

2. $$\int e^{-2x+3} \, dx = -\frac{1}{2} \int e^u \, du = -\frac{1}{2} e^u + C = -\frac{1}{2} e^{-2x+3} + C.$$
Hier ist $u(x) = -2x + 3$, d.h. $du = -2\, dx$.

3. $$\int \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \int u^2 \, du = \frac{1}{3} u^3 + C = \frac{1}{3} \sin^3 x + C.$$
Hier ist $u(x) = \sin x$, d.h. $du = \cos x \, dx$.

4. $$\int (7-5x)^7\,dx = -\frac{1}{5}\int u^7\,du = -\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}u^8 + C = -\frac{1}{40}(7-5x)^8 + C.$$

Hier ist $u(x) = 7-5x$, d.h. $du = -5\,dx$.

5. $$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}\,du = \sqrt{u} + C = \sqrt{1+x^2} + C.$$

Hier ist $u(x) = 1+x^2$, d.h. $du = 2x\,dx$.

6. $$\int \frac{x^2}{\sqrt{5-2x^3}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{6}\right)du = -\frac{1}{6}\cdot 2u^{1/2} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{5-2x^3} + C.$$

Hier ist $u(x) = 5-2x^3$, d.h. $du = -6x^2\,dx$.

In technischen Anwendungen treten häufig folgende Integraltypen auf, die durch geeignete Substitutionen gelöst oder zumindest vereinfacht werden können:

Satz 11.9 *(Ableitung des Quadrats und Logarithmisches Integral)*
Es sei f stetig differenzierbar. Dann gelten

$$\int f(x)\cdot f'(x)\,dx = \frac{1}{2}f^2(x) + C$$

und mit $f(x) \neq 0$:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C.$$

Beweis: Folgende Substitutionen führen zum Ziel:
Beim ersten Integral liefert die Substitution $u = f(x)$, d.h. $du = f'(x)\,dx$ das Integral $\int u\,du$ mit Stammfunktion $\frac{1}{2}u^2 + C$.
Beim Logarithmischen Integral setzen wir $u = f(x)$, d.h. $du = f'(x)\,dx$ und erhalten das Integral $\int \frac{1}{u}\,du$ mit Stammfunktion $\ln|u| + C$ $\diamond$

Beispiele:

1. $$\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

   Hier ist $f(x) = \sin x$, d.h. $f'(x) = \cos x$.

2. $$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\ln^2 x + C.$$

   Hier ist $f(x) = \ln x$, d.h. $f'(x) = \frac{1}{x}$.

3. $$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(x^2+1) + C.$$

   Hier ist $f(x) = x^2+1$, d.h. $f'(x) = 2x$.

4. $$\int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C.$$

   Hier ist $f(x) = \cos x$, d.h. $f'(x) = -\sin x$.

Weitere Tipps und Tricks:

- Ist der Integrand eine Funktion von $\sin x$ und $\cos x$, so führt häufig die Substitution

$$u = \tan\frac{x}{2} \Leftrightarrow x = 2\arctan u, \quad -\pi < x < \pi$$

weiter. Hierbei verwendet man die Beziehungen

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad dx = \frac{2}{1+u^2}\,du.$$

Beispiel: $$\int \frac{1}{\sin x}\,dx = \int \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,du = \ln|u| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

- Integrale, die Terme der Form

$$\sqrt{a^2-x^2}, \quad \sqrt{a^2+x^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{x^2-a^2} \quad \text{mit } a > 0$$

enthalten, sind durch die Substitutionen

$$x = a\cdot\cos u, \quad x = a\cdot\sinh u \quad \text{und} \quad x = a\cdot\cosh u$$

zu vereinfachen.

Beispiel: $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a\cdot\cosh u\,du}{a\sqrt{1+\sinh^2 u}} = \int 1\,du = u + C = \text{arsinh}\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

Hier liefert die Substitution $x = a\cdot\sinh u$ das Gewünschte. Für die Rechnung werden die Eigenschaften der Hyperbelfunktionen benutzt: $\sinh' x = \cosh x$, $\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x$.

Beispiel: $$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx &= a\int \sqrt{1-\cos^2 u}\cdot(-a\sin u)\,du = -a^2\int \sin^2 u\,du \\ &= -\frac{a^2}{2}(u - \sin u\cdot\cos u) + C \\ &= -\frac{a^2}{2}\arccos\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2} + C.\end{aligned}$$

Hier wird die Substitution $x = a\cdot\cos u$ verwendet sowie das bereits bekannte Integral $\int \sin^2 x\,dx$. In der Rechnung werden die Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen benutzt: $\cos' x = -\sin x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Anwendungsbeispiel: (Fläche des Einheitskreises)
Die Fläche A des Viertelkreises ist gleich der Fläche unter dem Graph der Funktion $\sqrt{1-x^2}$ zwischen $x = 0$ und $x = 1$:

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Die Substitution $x = \sin t$, d.h. $dx = \cos t\,dt$ liefert

$$A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\,dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t\,dt.$$

Mit der Beziehung $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ für $t \in \mathbb{R}$ folgt

$$A = \int_0^{\pi/2} (1-\sin^2 t)\,dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt$$

und mit dem bekannten Integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = \left[\frac{1}{2}t - \sin t\cdot\cos t\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}$$

erhalten wir $A = \frac{\pi}{4}$. Die Fläche des Einheitskreises ist demnach $4\cdot A = \pi$.

11.3.3 Partialbruchzerlegung

Jede unecht gebrochen rationale Funktion kann eindeutig zerlegt werden in eine ganzrationale Funktion (Polynom) und eine echt gebrochen rationale Funktion. Polynome lassen sich leicht integrieren. Für die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen wird in diesem Abschnitt ein Verfahren vorgestellt.

Aus der Zerlegung der echt gebrochen rationalen Funktion in *Partialbrüche*

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2+5x+6} = \frac{4}{x+3} - \frac{3}{x+2}$$

(nachrechnen!) erhält man die Stammfunktion von f auf einfache Weise:

$$\int f(x)\,dx = 4\int \frac{1}{x+3}\,dx - 3\int \frac{1}{x+2}\,dx = 4\,\ln|x+3| - 3\,\ln|x+2| + C.$$

Die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen ist möglich, wenn es gelingt $f(x)$ in eine Summe einfacher *Partialbrüche* zu zerlegen. Entscheidend für die Bauart dieser Partialbrüche sind die Nullstellen des Nenners von $f(x)$.

Beispiele:

1. Stammfunktion von $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+5x+6}$.

Entsprechend der Faktorzerlegung des Nenners $x^2+5x+6 = (x+2)(x+3)$ versucht man einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten A und B von der Form

$$f(x) = \frac{1}{x^2+5x+6} \stackrel{!}{=} \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner ergibt

$$A\cdot(x+3) + B\cdot(x+2) = 1 \Leftrightarrow (A+B)\cdot x + 3A + 2B = 1$$

und durch Koeffizientenvergleich erhält man das lineare Gleichungssystem

$$\left.\begin{array}{rrl} A & +B & = 0 \\ 3A & +2B & = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = 1,\ B = -1,$$

d.h. es gilt die Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{x^2+5x+6} = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}.$$

Die Stammfunktion ist nun leicht zu bestimmen:

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{x+3}\,dx = \ln|x+2| - \ln|x+3| + C.$$

2. Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+4x+4} = \dfrac{x-1}{(x+2)^2}$.

Der zunächst nahe liegende Ansatz

$$\frac{x-1}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+2}$$

führt wegen der doppelten Nullstelle $x_0 = -2$ nicht zum Ziel. Der Ansatz muß so gestaltet werden, daß bei Zusammenfassung im Nenner der Hauptnenner $(x+2)^2$ und im Zähler ein linearer Ausdruck in x steht. Dies erreicht man durch den Ansatz

$$\frac{x-1}{(x+2)^2} = \frac{A_1}{x+2} + \frac{A_2}{(x+2)^2}.$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner und Koeffizientenvergleich ergibt $A_1 = 1,\ \ A_2 = -3$. Für die Stammfunktion erhält man

$$\int \frac{x-1}{(x+2)^2}\,dx = \int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{3}{(x+2)^2}\,dx = \ln|x+2| + \frac{3}{x+2} + C.$$

3. Partialbruchzerlegung von $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x+2}$.

Der Nenner x^2+2x+2 besitzt keine reellen Nullstellen, eine weitere (reelle) Zerlegung ist nicht möglich. Zunächst formt man den Nenner mit quadratischer Ergänzung um:

$$\frac{1}{x^2+2x+2} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

und mit der Substitution $u = x+1$ folgt

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{du}{u^2+1} = \arctan u + C = \arctan(x+1) + C.$$

Wir betrachten im folgenden echt gebrochen rationale Funktionen der Bauart

$$f(x) = \frac{Z_n(x)}{N_m(x)}$$

mit Zählerpolynom $Z_n(x)$ vom Grad n und Nennerpolynom $N_m(x)$ vom Grad m mit reellen Koeffizienten und $n < m$.

Satz 11.10 *(Produktdarstellung und Partialbruchzerlegung)*
Jedes Polynom mit reellen Koeffizienten läßt sich darstellen als Produkt aus linearen und (reell nicht weiter zerlegbaren) quadratischen Faktoren der Form:

lineare Faktoren: $(x - x_0), (x - x_0)^2, \ldots$

quadratische Faktoren: $(x^2 + bx + c), (x^2 + bx + c)^2, \ldots$ *mit* $4c > b^2$.

Jede echt gebrochen rationale Funktion läßt sich eindeutig darstellen als Summe von Partialbrüchen *gemäß folgender Tabelle:*

Nennerfaktor	*zugehöriger Ansatz*
$x - x_0$ *(einfach)*	$\frac{A}{x - x_0}$
$(x - x_0)^2$ *(doppelt)*	$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2}$
$\ldots$	$\ldots$
$(x - x_0)^k$ *(k-fach)*	$\frac{A_1}{x - x_0} + \frac{A_2}{(x - x_0)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x - x_0)^k}$
$x^2 + bx + c$ *(einfach)*	$\frac{B \cdot x + C}{x^2 + bx + c}$
$(x^2 + bx + c)^2$ *(doppelt)*	$\frac{B_1 \cdot x + C_1}{x^2 + bx + c} + \frac{B_2 \cdot x + C_2}{(x^2 + bx + c)^2}$
$\ldots$	$\ldots$

Beispiele: Ansätze für die Partialbruchzerlegung:

1. $$\frac{x - 1}{(x + 2)^2} = \frac{A_1}{x + 2} + \frac{A_2}{(x + 2)^2}$$

2. $$\frac{3 - x}{(x + 1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}$$

3. $$\frac{x^4 + x^2 + x + 2}{x^5 + x^3} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{A_3}{x^3} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1}$$

4. $$\frac{x^3 - 3x^2 + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{B_1 x + C_1}{x^2 + 2x + 2} + \frac{B_2 x + C_2}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Bestimmung der Koeffizienten

Die Gleichung des Partialbruch-Ansatzes für eine echt gebrochen rationale Funktion $f(x)$ muß für alle x des Definitionsbereichs von f erfüllt sein. Aus dieser Forderung ergeben sich folgende Methoden zur Bestimmung der Koeffizienten:

1. ***Koeffizientenvergleich:*** Durch Multiplikation des Ansatz mit dem Hauptnenner erhält man auf beiden Seiten ein Polynom. Durch Koeffizientenvergleich auf linker und rechter Seite ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die unbekannten Koeffizienten.

   Beispiel: $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}.$

   Multiplikation mit dem Hauptnenner liefert

   $x - 1 = A\,(x + 3) + B\,(x + 2).$

   Der Koeffizientenvergleich ergibt:

   $A + B = 1,\ \ 3A + 2B = -1$ mit Lösung $A = -3$ und $B = 4$.

2. ***Einsetzen spezieller Werte:*** Man setzt soviele einfache x-Werte aus dem Definitionsbereich ein, wie der Ansatz unbestimmte Koeffizienten enthält. So ergibt sich ein lineares Gleichungssystem für die Koeffizienten.

   Beispiel: $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}.$

   Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

   $x - 1 = A\,(x + 3) + B\,(x + 2)$

   setzt man einfache Werte, etwa $x = 0$ und $x = 1$ ein. Dies liefert:

   $-1 = 3A + 2B$ und $0 = 4A + 3B$ mit Lösung $A = -3$ und $B = 4$.

3. ***Grenzwertmethode:*** Erweiterung der Methode des Einsetzens spezieller Werte, bei der nach entsprechender Umformung die Nullstellen des Nenners eingesetzt werden.

   Beispiel: $f(x) = \frac{x - 1}{(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3}.$

   Nach Multiplikation mit dem Hauptnenner

   $x - 1 = A\,(x + 3) + B\,(x + 2)$

   bilde die Grenzwerte $x \to -3$ und $x \to -2$. Dies ergibt:

   $-4 = -B$ und $-3 = A$.

   Bei der Grenzwertmethode erhält man unmittelbar die gesuchten Koeffizienten.

Integration der Partialbrüche

Mit Hilfe der Partialbruchzerlegung wird die Integration echt gebrochen rationaler Funktionen auf die Integration der Partialbrüche zurückgeführt:

Satz 11.11 *(Integration der Partialbrüche)*
Für die Anteile der reellen Nullstellen in der Partialbruchzerlegung gelten die folgenden Integrale:

$$\int \frac{dx}{x-x_0} = \ln|x-x_0| + C, \qquad \int \frac{dx}{(x-x_0)^2} = -\frac{1}{x-x_0} + C$$

bzw. für $k \geq 2$*:*

$$\int \frac{dx}{(x-x_0)^k} = -\frac{1}{k-1} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{k-1}} + C.$$

Zur Integration der quadratischen Anteile in der Partialbruchzerlegung

$$\int \frac{B \cdot x + C}{x^2 + bx + c}\, dx \qquad \textit{mit} \qquad 4c > b^2$$

ist der Integrand derart in zwei Terme umzuformen, daß der Zähler des ersten Terms gerade die Ableitung des Nenners ist und logarithmisch integriert werden kann. Der Zähler des zweiten Terms ist dann konstant und kann beispielsweise in Integraltafeln nachgeschlagen werden.

Beispiel: Zur Berechnung des Integrals

$$I = \int \frac{3x-1}{x^2+2x+5}\, dx$$

für einen quadratischen Term aus einer Partialbruchzerlegung spalten wir den Integranden gemäß Satz 11.11 in zwei Teile auf:

$$\frac{3x-1}{x^2+2x+5} = \frac{3}{2} \cdot \frac{2x+2}{x^2+2x+5} - 4 \cdot \frac{1}{(x+1)^2+2^2}$$

wobei beim zweiten Term im Nenner quadratisch ergänzt wurde. Der erste Term kann durch die Substitution $u = x^2 + 2x + 5$, d.h. $dx = (2x+2)\, du$ logarithmisch integriert werden. Für den zweiten Term liefert die Substitution $u = \frac{x+1}{2}$, d.h. $du = \frac{1}{2} dx$ eine Stammfunktion. Insgesamt erhält man:

$$I = \frac{3}{2} \ln|x^2 + 2x + 5| - 2 \arctan \frac{x+1}{2} + C.$$

11.4 Numerische Integration

Viele einfache Funktionen wie beispielsweise e^{-x^2} oder $\dfrac{\sin x}{x}$ lassen sich nicht elementar integrieren. Bei vielen Anwendungen liegen von der Funktion nur Werte an bestimmten Stellen vor. In diesen Fällen ist man auf *numerische Methoden* angewiesen.

Wir betrachten im folgenden die näherungsweise Berechnung des bestimmten Integrals einer stetigen Funktion f:

$$I = \int_a^b f(x)\, dx =: Q + E.$$

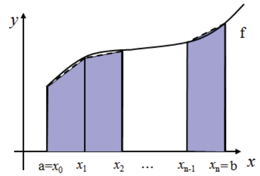
Q ist eine Formel zur numerischen Integration, durch die ein Näherungswert für I berechnet wird, eine *Quadraturformel*. E ist der Fehler des Verfahrens.

Zur näherungsweisen Berechnung von I zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in n äquidistante Teilintervalle der Länge $h = \dfrac{b-a}{n}$ mit den *Stützstellen*

$$x_k = a + k \cdot h, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

wobei $a = x_0$ und $b = x_n$. Die zugehörigen Funktionswerte seien $f_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Für die Konstruktion einer Quadraturformel ersetzen wir die Funktion f in $[a, b]$ oder in Teilintervallen $[x_k, x_{k+1}]$ durch ein *Interpolationspolynom* niedrigen Grades m. Das Interpolationspolynom wird exakt integriert. Der Wert Q dieses Integrals dient als Näherung für I.



11.4.1 Rechteckregel

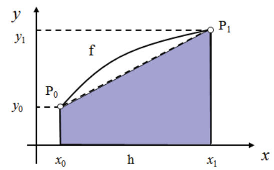
Ersetzt man die Funktion $f(x)$ in jedem Intervall $[x_k, x_{k+1}]$ durch eine *konstante Funktion*, z.B. $f_k := f(x_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, so erhält man durch stückweise Integration über alle Teilintervalle die *Rechteckregel*

$$Q = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f_k\, dx = h \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f_k. \tag{11.6}$$

11.4.2 Trapezregel

Eine genauere Integrationsregel erhält man, indem man die Funktion f im k-ten Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ *linear interpoliert*, d.h. die Funktion f durch die Sehne p_k^1 durch die Punkte (x_k, f_k) und (x_{k+1}, f_{k+1}) ersetzt:

$$p_k^1(x) = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{h} \cdot (x - x_k).$$



Die Gerade $p_k^1(x)$ wird dann über $[x_k, x_{k+1}]$ exakt integriert:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} p_k^1(x)\, dx = \frac{x_{k+1} - x_k}{2} \cdot (f_k + f_{k+1}) = \frac{h}{2} \cdot (f_k + f_{k+1}).$$

Summation über alle Teilintervalle ergibt die *Trapezregel*

$$Q_T = \frac{h}{2} \cdot (f_0 + 2\, f_1 + 2\, f_2 + \ldots 2\, f_{n-1} + f_n).$$

Beispiel: Berechnung des Integrals $I = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx = 0.7468$ mit der Trapezregel:

(i) Schrittweite $h = 0.2$:

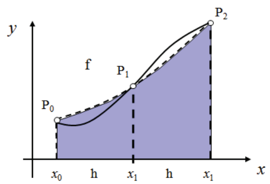
$$\begin{aligned} Q_T(0.2) &= \frac{1}{2} \cdot 0.2\,(1 + 2 \cdot 0.9608 + 2 \cdot 0.8521 + 2 \cdot 0.6977 + 2 \cdot 0.5273 + 0.3679) \\ &= 0.7444. \end{aligned}$$

(ii) Schrittweite $h = 0.1$:

$$\begin{aligned} Q_T(0.1) &= \frac{1}{2} \cdot 0.1\,(1 + 2 \cdot 0.99 + 2 \cdot 0.9608 + 2 \cdot 0.9139 + 2 \cdot 0.8521 + 2 \cdot 0.7788 \\ &\qquad +2 \cdot 0.6977 + 2 \cdot 0.6126 + 2 \cdot 0.5273 + 2 \cdot 0.4449 + 0.3679) \\ &= 0.7462. \end{aligned}$$

11.4.3 Simpsonregel

Wir setzen nun voraus, daß die Anzahl der Teilintervalle $n = 2m$ ist, also eine gerade Zahl. Im Doppelintervall $[x_k, x_{k+1}] \cup [x_{k+1}, x_{k+2}]$ ersetzen wir f durch die *Parabel* p_k^2 durch die drei Punkte (x_k, f_k), (x_{k+1}, f_{k+1}) und (x_{k+2}, f_{k+2}):



$$p_k^2(x) = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{h} \cdot (x - x_k) + \frac{f_{k+2} - 2f_{k+1} + f_k}{2h^2} \cdot (x - x_k) \cdot (x - x_{k+1}).$$

Das Integral über das Näherungspolynom p_k^2 im Doppelintervall $[x_k, x_{k+2}]$ ist dann

$$\int\limits_{x_k}^{x_{k+2}} p_k^2(x)\,dx = \frac{1}{3}\,h \cdot (f_k + 4f_{k+1} + f_{k+2}).$$

Summation über alle Doppelintervalle ergibt die *Simpsonregel* (oder *Keplersche Faßregel*)

$$Q_S = \frac{4}{3}h \cdot (f_1 + f_3 + \cdots + f_{2m-1}) + \frac{2}{3}h \cdot (f_2 + f_4 + \cdots + f_{2m-2}) + \frac{1}{3}h \cdot (f_0 + f_{2m}).$$

Beispiel: Berechnung des Integrals $I = \int\limits_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln 2 = 0.693147$ mit $n = 2$, d.h. Schrittweite $h = 0.5$ und Funktionswerten $f_0 = 1,\ f_1 = 0.6667,\ f_2 = 0.5$:

(i) Trapezregel:

$$Q_T(0.5) = \frac{1}{2} \cdot 0.5\,(1 + 2 \cdot 0.6667 + 0.5) = 0.7083.$$

(ii) Simpsonregel $(m = 1)$:

$$Q_S(0.5) = \frac{4}{3} \cdot 0.5 \cdot 0.6667 + \frac{1}{3} \cdot 0.5 \cdot (1 + 0.5) = 0.6944.$$

11.4.4 Fehlerverhalten der Quadraturformeln

Bei Verkleinerung der Schrittweite h nimmt die Güte der Näherung $Q_T(h)$ bzw. $Q_S(h)$ zu, d.h. für den Fehler E der beiden Verfahren gilt $\lim\limits_{h \to 0} E(h) = 0$.

Genauere Betrachtungen liefern:

für die Trapezregel Q_T: $\quad |E_T(h)| \le c_1 \cdot h^2$

für die Simpsonregel Q_S: $\quad |E_S(h)| \le c_2 \cdot h^4$.

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen ab von der Funktion f und den Intervallgrenzen a und b.

Die Potenz der Schrittweite h in den Fehlerformeln bezeichnet man als *Ordnung* des Verfahrens. Ein Verfahren ist umso besser, je höher seine Ordnung ist. Dabei sind Rundungsfehler nicht berücksichtigt. Diese Fehler nehmen bei Verkleinerung von h, d.h. mit wachsender Zahl von Teilintervallen und Summanden natürlich zu.

Beispiel: Berechnung des Integrals $\int\limits_1^2 \sqrt{1 + e^{1/2\,x^2}}\,dx = 2.09883511.$

Für die Trapez- und Simpsonregel mit unterschiedlichen Schrittweiten h werden folgende Fehler $E = I - Q$ berechnet:

n	h	$E_T(h)$	$E_S(h)$
2	0.5	$4.2 \cdot 10^{-2}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$
4	0.25	$1.0 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
8	0.125	$2.6 \cdot 10^{-3}$	$7.6 \cdot 10^{-6}$
$\vdots$			
20	0.05	$4.2 \cdot 10^{-4}$	$2.0 \cdot 10^{-7}$
40	0.025	$1.0 \cdot 10^{-4}$	$1.4 \cdot 10^{-8}$
80	0.0125	$2.6 \cdot 10^{-5}$	$3.0 \cdot 10^{-9}$

Man erkennt aus der Tabelle, daß der Fehler der Trapezregel $\sim h^2$ ist, d.h. bei Halbierung der Schrittweite reduziert sich der Fehler auf etwa 1/4. Der Fehler der Simpsonregel ist $\sim h^4$, d.h. bei Halbierung der Schrittweite reduziert sich der Fehler auf etwa 1/16.

11.5 Uneigentliche Integrale

Bestimmte Integrale der Form $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ sind bisher nur definiert, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

1. $f(x)$ ist im Intervall $[a, b]$ beschränkt
2. das Integrationsintervall $[a, b]$ ist endlich.

Unter bestimmten Voraussetzungen kann es sinnvoll sein, allgemeinere Situationen zu betrachten:

Definition 11.3 *(Uneigentliches Integral 1. und 2. Art)*
Es sei $f(x)$ eine Funktion mit einer Unendlichkeitsstelle b, d.h. $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \pm\infty$. Existiert der endliche Grenzwert $\lim\limits_{t\to b} \int\limits_a^t f(x)\,dx$, so nennt man f bezüglich $[a,b]$ uneigentlich integrierbar *und*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx := \lim_{t\to b} \int\limits_a^t f(x)\,dx$$

heißt uneigentliches Integral 1. Art bezüglich b. *Falls der Grenzwert nicht existiert, ist das uneigentliche Integral* divergent.

Ist der Integrationsbereich unbeschränkt und existieren die Grenzwerte so definiert man

$$\int\limits_a^\infty f(x)\,dx := \lim_{b\to\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad \textit{bzw.} \qquad \int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx := \lim_{a\to-\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

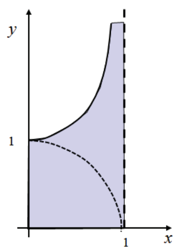
Man spricht hier vom uneigentlichen Integral 2. Art. *Falls der Grenzwert nicht existiert, heißt das uneigentliche Integral* divergent.

Beispiele:

1. Das Integral $I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ ist uneigentlich erster Art

   bezüglich der oberen Grenze $b = 1$. Es gilt

   $$\int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = [\arcsin x]_0^t = \arcsin t$$



   und weiter

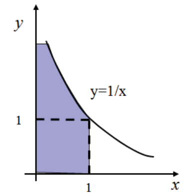
   $$\lim_{t\to 1} \int\limits_0^t \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{t\to 1} (\arcsin t) = \frac{\pi}{2}.$$

   Fazit: es gibt Bereiche, die sich ins Unendliche erstrecken, aber dennoch einen endlichen Flächeninhalt besitzen.

2. Das Integral $I = \int\limits_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ ist uneigentlich

   erster Art bezüglich der unteren Grenze $a = 0$. Es gilt

   $$\int\limits_t^1 \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_t^1 = -\ln t.$$



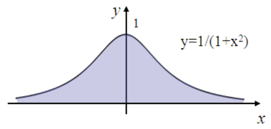
   Jedoch ist

   $$\lim_{t\to 0+} (-\ln t) = \infty$$

   und I erweist sich als divergent. Der Flächeninhalt ist nicht endlich.

3. Die Fläche zwischen der Kurve $y = \frac{1}{1+x^2}$ und der x-Achse ist gegeben als uneigentliches Integral 2. Art:

   $$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} &= 2\int\limits_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} \\ &= 2\lim_{b\to\infty} [\arctan x]_0^b = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi. \end{aligned}$$



11.6 Anwendungen der Integralrechnung

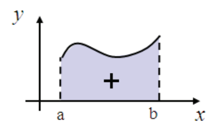
11.6.1 Flächenberechnung

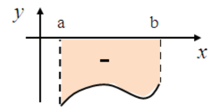
Gilt $f \geq 0$ in $[a,b]$, so ist die Fläche zwischen dem Graph von f und der x-Achse in $[a,b]$ gegeben durch

$$I = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

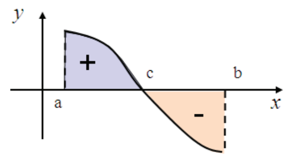
Für $f(x) \leq 0$ ist $I \leq 0$ und die Fläche zwischen Graph und x-Achse ist $-I$.

Wechselt f in $[a,b]$ das Vorzeichen, so liefert das bestimmte Integral I die *Differenz* der oberhalb (positiv) und unterhalb (negativ) der x-Achse liegenden Flächen.





Zur Bestimmung des Betrags der Fläche zwischen der Kurve $y = f(x)$ und der x-Achse ist das Integral an den Nullstellen von $f(x)$ aufzuspalten. Die Beträge der Teilintegrale sind zu addieren.



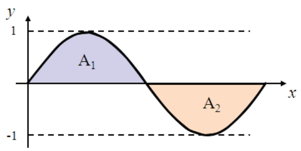
Beispiele:

1. Fläche zwischen der Sinus-Kurve und der x-Achse:

(a) $I_1 = \int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx = 2 \quad \Rightarrow A_1 = 2,$

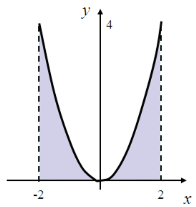
(b) $I_2 = \int\limits_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx = -2 \quad \Rightarrow A_2 = |I_2| = 2,$

(c) $I = \int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0, \qquad A = A_1 + A_2 = 4.$



2. Fläche zwischen $y = x^2$, $y = 0$ für $-2 \le x \le 2$:

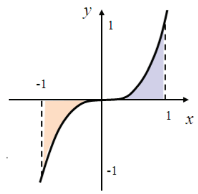
$$I = \int\limits_{-2}^{2} x^2\,dx = 2\int\limits_0^2 x^2\,dx = 2\cdot\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{16}{3}.$$



3. Fläche zwischen $y = x^3$, $y = 0$ für $-1 \le x \le 1$:

$$I = \int\limits_{-1}^{1} x^3\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^1 = 0.$$

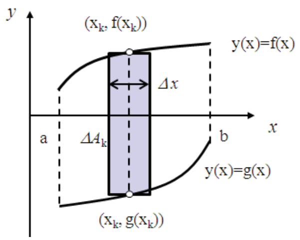
$$A = 2\int\limits_0^1 x^3\,dx = 2\cdot\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$



Ganz allgemein gilt für die Berechnung der Fläche zwischen zwei Kurven:

Ist $f(x) \ge g(x)$ für $x \in [a,b]$, so berechnet sich die Fläche zwischen f und g über dem Intervall $[a,b]$ durch

$$A = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx.$$

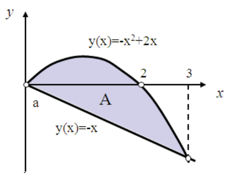


Beispiele:

1. Fläche zwischen den Kurven $y = -x$ und $y = -x^2 + 2x$:

   Die Kurven schneiden sich bei $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$:

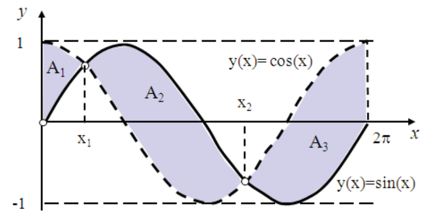
$$\begin{aligned} A &= \int\limits_0^3 ((-x^2+2x) - (-x))\,dx = \int\limits_0^3 (-x^2+3x)\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2\right]_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



2. Fläche zwischen $y = \sin x$ und $y = \cos x$ im Intervall $[0, 2\pi]$:

   Die Kurven schneiden sich bei $x_1 = \frac{\pi}{4}$ und $x_2 = \frac{5\pi}{4}$.
   Aus Symmetriegründen ist $A_2 = A_1 + A_3$:

$$\begin{aligned} A &= 2A_2 = 2\int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx \\ &= [-\cos x - \sin x]_{\pi/4}^{5\pi/4} = 4\sqrt{2}. \end{aligned}$$

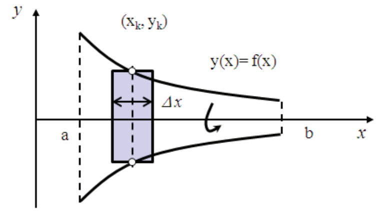


11.6.2 Volumen eines Rotationskörpers

Rotiert die Kurve $y = f(x)$ im Intervall $[a,b]$ um die x-Achse, so entsteht ein Rotationskörper. Die Funktion f heißt die *erzeugende Kurve* des Körpers.

Zur Berechnung des Volumens zerlegt man $[a,b]$ in n Teile der Länge Δx. Den Rotationskörper kann man sich näherungsweise aus dünnen Kreiszylinderscheiben der Dicke Δx aufgebaut denken. An der Stelle x_k beträgt der Radius $r = f(x_k)$ und das Volumenelement lautet $\Delta V_k = \pi\, f(x_k)^2 \cdot \Delta x$. Für das gesuchte Volumen gilt näherungsweise

$$V_x \approx \sum_{k=1}^n \Delta V_k = \pi \sum_{k=1}^n f(x_k)^2 \cdot \Delta x.$$

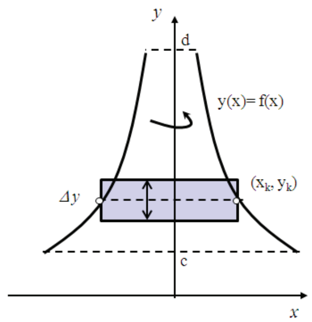


Durch Verfeinerung der Zerlegung $n \to \infty, \Delta x \to 0$ geht die Summe über in das Integral

$$V_x = \pi \int\limits_a^b f(x)^2\,dx.$$

Entsprechend erhält man bei Rotation der Kurve $x = g(y)$ im Intervall $[c,d]$ um die y-Achse das Volumen des Rotationskörpers zu

$$V_y = \pi \int\limits_c^d g(y)^2\,dy.$$



Beispiele:

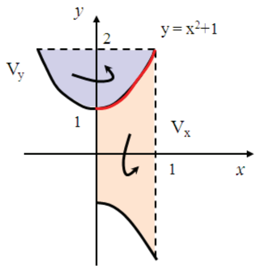
1. Drehkörper mit erzeugender Kurve $y = x^2 + 1$ für $0 \le x \le 1$:

(a) Drehung um x-Achse:

$$V_x = \pi \int_0^1 (x^2+1)^2\, dx = \frac{28}{15}\pi.$$

(b) Drehung um y-Achse:

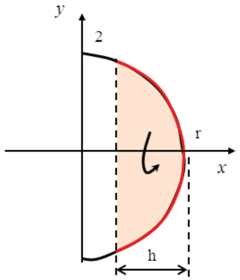
$$V_y = \pi \int_1^2 x^2(y)\, dy = \pi \int_1^2 (y-1)\, dy = \frac{\pi}{2}.$$



2. Volumen des Kugelabschnitts mit Radius r und Höhe h:

Durch Rotation der Fläche, begrenzt durch $y = \sqrt{r^2 - x^2}$, $y = 0$ für $r - h \leq x \leq r$, um die x-Achse erhält man:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{r-h}^{r} (r^2 - x^2)\, dx = \pi \left[r^2\, x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{r-h}^{r} \\ &= \frac{\pi}{3} h^2\, (3r - h). \end{aligned}$$



Integriert man in den Grenzen $-r$ bis r, so erhält man das Volumen der Kugel. Aus der Formel für den Kugelabschnitt folgt mit $h = -2r$:

$$V_{\text{Kugel}} = \frac{4}{3}\pi\, r^3.$$

11.6.3 Bogenlänge einer ebenen Kurve

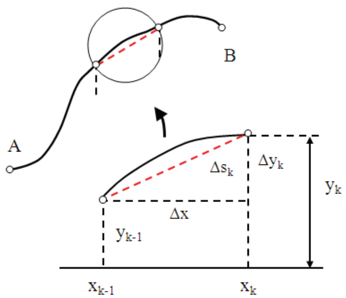
Für eine glatte Kurve $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ sei die Länge des Kurvenstücks zwischen den Punkten $A(a, f(a))$ und $B(b, f(b))$ gesucht.

Man zerlegt das Intervall $[a, b]$ in n gleiche Teilintervalle der Länge Δx und nähert die Kurve durch einen Polygonzug an. Im k-ten Teilintervall gilt:

$$\Delta s_k = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y_k^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k^2}{\Delta x^2} \right)} \cdot \Delta x$$

mit

$$\Delta y_k := y_k - y_{k-1} = f(x_k) - f(x_{k-1}).$$



Für die gesuchte Bogenlänge ergibt sich die Näherung

$$S_{AB} \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k^2}{\Delta x^2} \right)} \cdot \Delta x.$$

Bei Verfeinerung der Zerlegung ($n \to \infty$, $\Delta x \to 0$) erhält man daraus wegen $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ für die Bogenlänge S_{AB}:

$$S_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

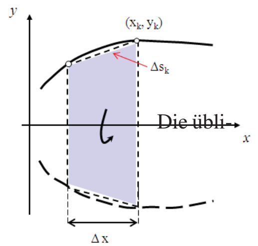
Beispiel: (Kreisumfang)
Der Graph von $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in [-r, r]$ beschreibt einen Halbkreis mit Radius r. Mit $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ erhält man die Länge des Kreisbogens zu

$$\begin{aligned} U &= 4 \cdot \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4 \cdot \int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx \\ &= 4r \int_0^r \sqrt{\frac{1}{r^2 - x^2}}\, dx = 4r \left[\arcsin \frac{x}{r} \right]_0^r = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2r \cdot \pi. \end{aligned}$$

11.6.4 Oberfläche eines Rotationskörpers

Rotiert der Kurvenbogen AB der glatten Kurve $y = f(x)$ um die x-Achse, so beschreibt er die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Ersetzt man die Kurve näherungsweise durch einen Polygonzug, so wird der Rotationskörper angenähert durch eine Summe von Kegelstümpfen mit der Mantelfläche

$$\Delta A_k \approx 2\pi\, y_k \cdot \Delta s_k = 2\pi\, y_k \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k^2}{\Delta x^2} \right)} \cdot \Delta x.$$



Die übliche Summation und Grenzwertbildung liefert das Integral für die Mantelfläche des Rotationskörpers:

$$O = 2\pi \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Beispiel: Durch Rotation von $y = f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ für $x \in [-r, r]$ um die x-Achse erhält man eine Kugel mit Radius r um den Ursprung.

Mit $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$ folgt für die Oberfläche:

$$O_{\text{Kugel}} = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{r^2}{r^2 - x^2}}\, dx = 4\pi \cdot r \int_0^r dx = 4\pi \cdot r^2.$$

Literatur

[1] T. Arens et al., Mathematik, 4. Auflage, Springer Spektrum, Heidelberg 2018.

[2] H.-J. Dobner und B. Engelmann, Analysis 1 und 2., 5. und 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, München, 2007, 2013.

[3] K. Dürrschnabel, Mathematik für Ingenieure, 2. Auflage, Vieweg-Teubner, Wiesbaden 2012, Höhere Mathematik für Ingenieure, Vieweg/Teubner, Wiesbaden 2004.

[4] S. Göbbels, S. Ritter, Mathematik verstehen und anwenden, 3. Auflage, Springer-Spektrum, Heidelberg 2018.

[5] L. Göllmann et al., Mathematik für Ingenieure: Verstehen – Rechnen – Anwenden, Bände 1 und 2, 1. Auflage, Springer-Vieweg 2017.

[6] P. Hartmann, Mathematik für Informatiker, 7. Auflage, Springer-Vieweg, Wiesbaden 2019.

[7] E. Hohloch et al., Brücken zur Mathematik, Bände 1-3, 3. Auflage, Cornelsen-Verlag, 1996.

[8] L. Papula, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler Bände 1-3. Vieweg, Braunschweig 2008.

[9] P. Stingl, Mathematik für Fachhochschulen, 8. Auflage, Carl Hanser Verlag, München 2009.

[10] G. Teschl, S. Teschl, Mathematik für Informatiker, Bände 1 und 2, 4. und 3. Auflage, Springer-Vieweg, Wiesbaden 2013 und 2014.

[11] T. Westermann, Mathematik für Ingenieure, 8. Auflage, Springer-Vieweg, Wiesbaden 2020.