→ Induktionsbeweis

(I) Induktionsanfang: Zeige: $A(1)$ ist wahr

(II) Induktionsannahme: $A(n)$ sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}_0$

(III) Induktionsschluss: Zeige: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$, d.h. zeige $A(n+1)$ ist wahr

$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \dots$$

Beispiele:

1. $A(n): \quad 2^n \geq n \quad$ für $n \in \mathbb{N}$

(I) Induktionsanfang: $A(1): \quad 2^1 \geq 1$ ✓

(II) Induktionsannahme $A(n): 2^n \geq n$ sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$

(III) Induktionsschluß: Zeige: $A(n+1): 2^{n+1} \geq n+1$

$$2^n \geq n \quad | \cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad 2^{n+1} \geq 2n = n+n \geq n+1 \quad ✓$$

$$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \dots$$

2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

(I) Induktionsanfang: $A(1): \displaystyle\sum_{k=1}^{1} k \stackrel{?}{=} \frac{1 \cdot 2}{2}$ ✓

(II) Induktionsannahme: Es gelte $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluss: Zeige: $\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad \Big| +(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \checkmark$$

$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow \dots$.

3. Für $x > -1$, $x \in \mathbb{R}$ gilt die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \quad n \geq 2$$

(I) Induktionsanfang: $A(2)$: $(1+x)^2 \geq 1 + 2 \cdot x$, $x > -1$

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x \quad \checkmark$$

(II) Induktionsannahme: Es gelte

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x, \quad x > -1 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}.$$

(III) Induktionsschluss: Zeige:

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1) \cdot x, \quad x > -1$$

Bew: $(1+x)^n \geq 1 + nx$, $x > -1$ $\quad | \cdot (1+x) > 0$ da $x > -1$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x)$$

$$= 1 + nx + x + nx^2$$

$$\geq 1 + (n+1) \cdot x \quad \checkmark$$

$A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \dots$

4. Zeigen Sie die geometrische Summenformel

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad q \neq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

(I) Induktionsanfang: $A(1)$: $\sum_{k=0}^{1} q^k = \frac{q^{1+1}-1}{q-1}$

$$1+q = \frac{q^2-1}{q-1}$$

$$= \frac{(q+1)(q-1)}{q-1}$$

$$= 1+q \checkmark$$

(II) Induktionsannahme: $A(n)$: $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$ gilt für ein $n \in \mathbb{N}$

(III) Induktionsbeweis: Zeige

$A(n+1)$: $\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+2}-1}{q-1}$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \qquad \mid + q^{n+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1}$$

$$= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+1}(q-1)}{q-1}$$

$$= \frac{q^{n+1}(1+q-1)-1}{q-1}$$

$$= \frac{q^{n+1}\cdot q-1}{q-1}$$

$$= \frac{q^{n+2}-1}{q-1} \checkmark$$

$A(1) \to A(2) \to \ldots$

5. Zeigen Sie mit vollst. Induktion

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

(I) Induktionsanfang: $\underbrace{\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)}}_{= \frac{1}{2}} \overset{?}{=} \frac{1}{1+1}$ ✓

(II) Induktionsannahme: Es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

(III) Induktionsschluss: Zeige: $$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n+1}{(n+1)+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \quad \Big| + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^{\cancel{2}}}{\cancel{(n+1)}(n+2)}$$

$$= \frac{n+1}{n+2}$$

$A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow \ldots$