Hochschule Karlsruhe
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Zusatzübung
Stetigkeit und Differenzierbarkeit
Höhere Mathematik 1

1 Stetigkeit an der Stelle x_0

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn der Grenzwert der Funktion an dieser Stelle vorhanden ist und mit dem dortigen Funktionswert übereinstimmt:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Bemerkung: Bei zusammengesetzten Funktionen muss sowohl rechtsseitiger als auch linksseitiger Grenzwert existieren und mit dem Funktionswert übereinstimmen.

2 Differenzierbarkeit an der Stelle x_0

Eine Funktion $y = f(x)$ heißt an der Stelle x_0 differenzierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert. Man bezeichnet ihn als erste Ableitung von $y = f(x)$ an der Stelle x_0.

Bemerkung:

- Bei zusammengesetzten Funktionen müssen sowohl rechtsseitiger als auch linksseitiger Grenzwert existieren und übereinstimmen.
- Sind die Ableitungen links und rechts von x_0 bereits bekannt, kann die Differenzierbarkeit über die Gleichheit der Ableitungen nachgewiesen werden. Eine an der Stelle x_0 **stetige Funktion** $y = f(x)$ ist also differenzierbar, wenn beide Grenzwerte existieren und es gilt:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

3 Ableitungsregeln

Faktorregel

Ein konstanter Faktor bleibt beim Differenzieren erhalten.

$$y = C \cdot f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = C \cdot f'(x)$$

Summenregel

Bei einer endlichen Summe von Funktionen darf gliedweise differenziert werden.

$$y = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f_1'(x) + f_2'(x) + ... + f_n'(x)$$

Produktregel

Die Ableitung einer in der Produktform $y = u(x) \cdot v(x)$ darstellbaren Funktion erhält man nach der Produktregel

$$y' = u'(x) \cdot v(x) + v'(x) \cdot u(x)$$

Quotientenregel

Die Ableitung einer Funktion, die als Quotient zweier Funktionen $u(x)$ und $v(x)$ in der Form $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ darstellbar ist, erhält man nach der Quotientenregel

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - v'(x) \cdot u(x)}{v^2(x)}$$

Kettenregel

Die Ableitung einer zusammengesetzten (verketteten) Funktion $y = F(u(x)) = f(x)$ erhält man als Produkt aus äußerer und innerer Ableitung.

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = F'(u) \cdot u'(x)$$

wobei $F'(u)$ die äußere und $u'(x)$ die innere Ableitung ist.