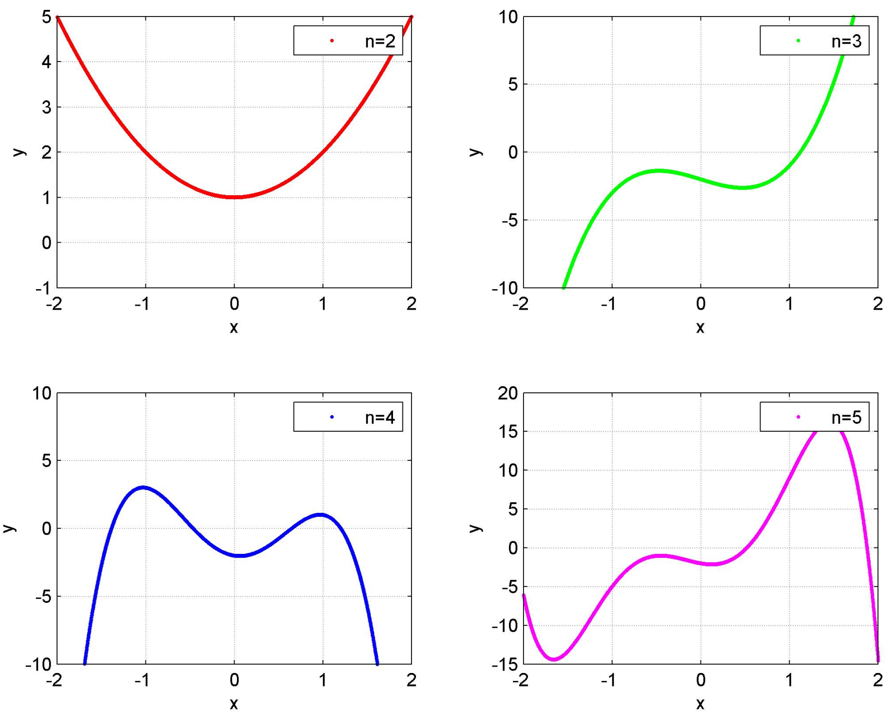
Hochschule Karlsruhe
Fakultät für Elektro- und Informationstechnik

Zusatzübung
Elementare Funktionen
Höhere Mathematik 1

1 Ganzrationale Funktionen

$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$



2 Gebrochenrationale Funktionen

$$y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x^1 + b_0}$$

$n > m$: Echt gebrochenrationale Funktion

$n \leq m$: Unecht gebrochenrationale Funktion

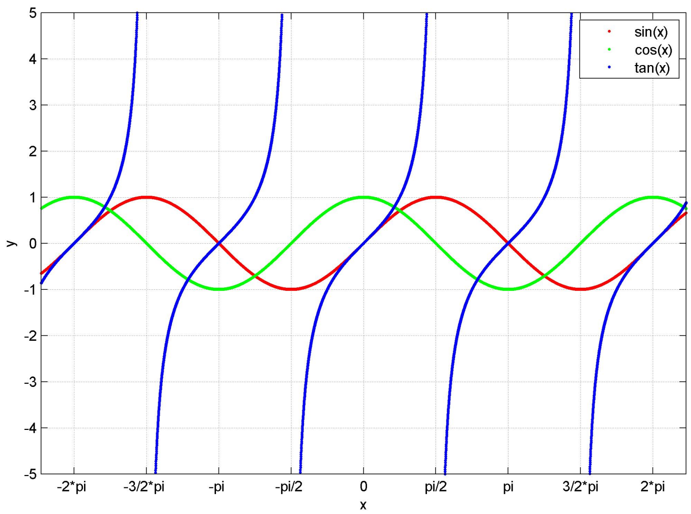
Vorgehensweise

1. Durchführung einer Linearfaktorzerlegung des Zählers und des Nenners.
2. Die Nennernullstellen sind die Definitionslücken.
3. Kürzen, wenn möglich.
4. Die Zählernullstellen sind nun die Nullstellen der Funktion,die Nennernullstellen sind die Polstellen. Hebbare Definitionslücken, sind Definitionslücken, die keine Polstellen sind.
5. Verhalten gegen ∞:
   Echt gebrochenrationale Funktionen: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$
   Unecht gebrochenrationale Funktionen: Polynomdivision
   $f(x) = \underbrace{q_{n-m}(x)}_{\substack{\text{ganzrat.}\\ \text{Funkt.}}} + \underbrace{r(x)}_{\substack{\text{echt gebrochenrat.}\\ \text{Funkt.}}}$

   Die Asymptote für $x \to \pm\infty$ ist $q_{n-m}(x)$, da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} r(x) = 0$.
6. Symmetrie:
   Achsensymmetrie zur y-Achse: $f(-x) = f(x)$
   Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$

3 Trigonometrische Funktionen

sin- und cos- und tan-Funktion

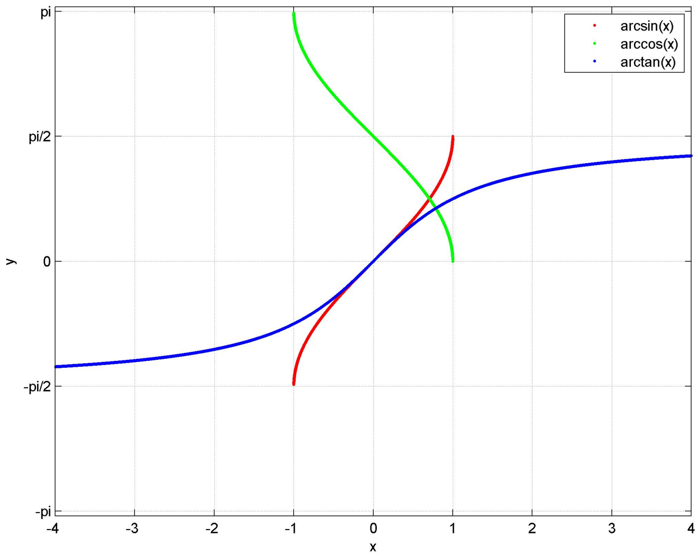


Trigonometrischer Pythagoras:
$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Additionstheoreme:
$\sin(x_1 \pm x_2) = sin(x_1)\cos(x_2) \pm \cos(x_1)\sin(x_2)$
$\cos(x_1 \pm x_2) = \cos(x_1)\cos(x_2) \mp \sin(x_1)\sin(x_2)$

Arkusfunktionen

Grundsätzlich lassen sich die trigonometrischen Funktionen infolge fehlender Monotonie nicht umkehren. Beschränkt man sich jedoch auf gewisse Intervalle, in denen die Funktion streng monoton verlaufen, so ist jede der vier Winkelfunktionen umkehrbar.

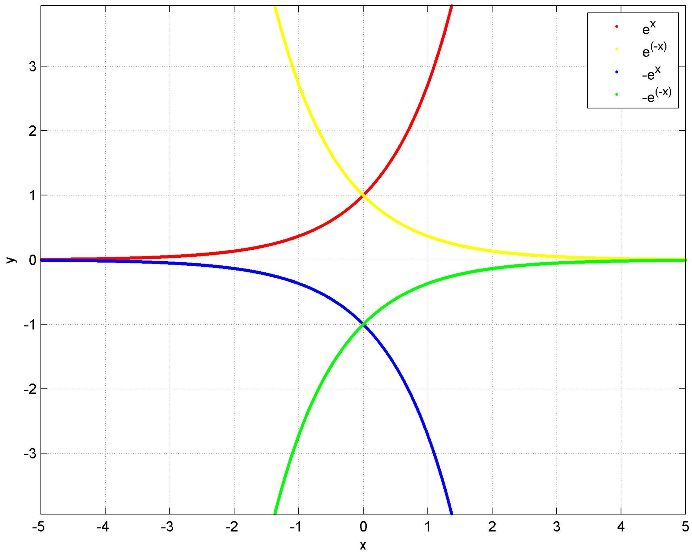


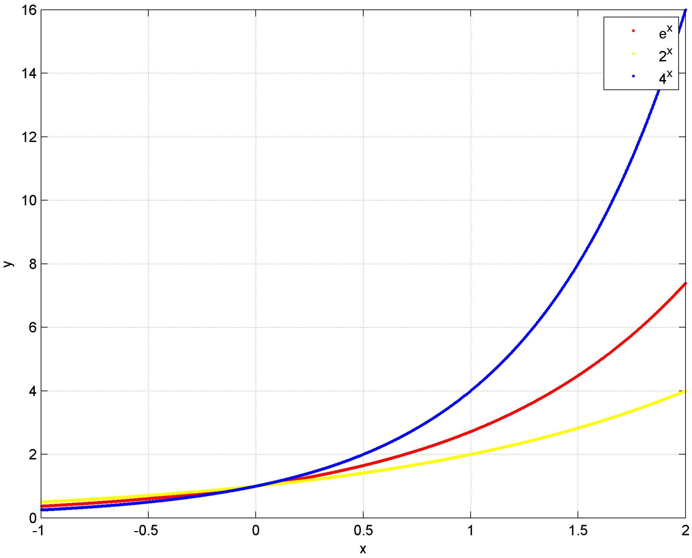
$\arcsin(x)$: Definitionsbereich : $-1 \leq x \leq 1$ Wertebereich : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\arccos(x)$: Definitionsbereich : $-1 \leq x \leq 1$ Wertebereich : $0 \leq x \leq \pi$

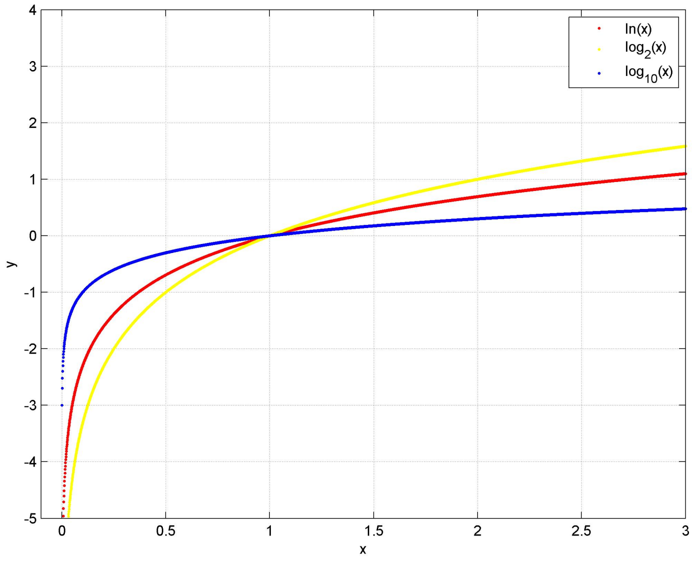
$\arctan(x)$: Definitionsbereich : $-\infty < x < +\infty$ Wertebereich : $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

4 Exponentialfunktionen





5 Logarithmusfunktionen



6 Geometrische Operationen

6.1 Spiegelung an der y-Achse

$g(x) = f(-x)$

6.2 Spiegelung an der x-Achse

$g(x) = -f(x)$

6.3 Punktspiegelung am Ursprung

$g(x) = -f(-x)$

6.4 Verschieben um c in Richtung der positiven y-Achse

$g(x) = f(x) + c$

6.5 Verschieben um b in Richtung der positiven x-Achse

$g(x) = f(x - b)$

6.6 Streckung entlang der x-Achse

$g(x) = f(d \cdot x)$
$d > 1$ Stauchung; $d < 1$ Streckung

6.7 Streckung entlang der y-Achse

$g(x) = a \cdot f(x)$
$a > 1$ Streckung; $a < 1$ Stauchung

6.8 Mehrfache Transformationen

$g(x) = a \cdot f(d \cdot (x - b)) + c$
Reihenfolge d, b, a, c