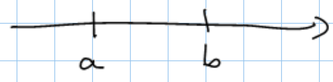
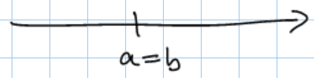
→ Ordnungsrelationen und Betrag

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt genau eine der Aussagen

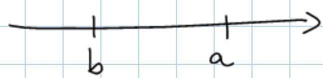
$a < b$: „a ist kleiner als b"



$a = b$: „a ist gleich b"



$a > b$: „a ist größer als b"



<u>Beispiel</u>: $1 < 2$ ✓

$1 \leq 2$ ✓

$1 \leq 1$ ✓

$5 > 3$ ✓

$3 \not> 5$ ✓

<u>Satz</u> (Rechenregeln für Ungleichungen)

Sei $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gelten

1. $a < b$ und $b < c \Rightarrow a < c$
2. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
3. $a < b$, $c > 0 \Rightarrow a \cdot c < b \cdot c$

   $c < 0 \Rightarrow a \cdot c > b \cdot c$

4. $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0$ und $b > 0)$ oder $(a < 0$ und $b < 0)$ } a und b haben gleiches Vorzeichen

   $a \cdot b < 0 \Leftrightarrow a, b$ haben unterschiedliche Vorzeichen

5. $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

<u>Beispiele</u>: 1. $1 < 2 \quad | \cdot 3 \Rightarrow 3 < 6$; $1 < 2 \quad | (-3) \Rightarrow -3 > -6$

2. $0 < 2 < 5 \Rightarrow \frac{1}{2} > \frac{1}{5} > 0$.

Def: (Betrag, Abstand)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann

1. $$|a| := \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

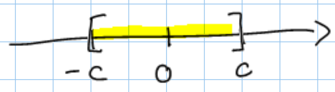
heißt Betrag von a. Es ist $|a| \geq 0$. $|a|$ ist der Abstand von a zum Nullpunkt.

2. $|a-b| = |b-a|$: Abstand von a und b

Satz (Rechenregeln für den Betrag)

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$. Dann gilt

1. $|x| \leq c \iff -c \leq x \leq c$

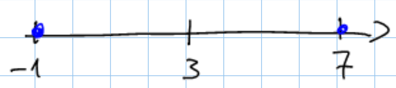


2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$.

Beispiele:

1. $|2| = 2$, $|-3| = -(-3) = 3$

2. $|x-3| = 4$



Fall 1: $x-3 \geq 0 \iff x \geq 3$: $|x-3| = 4 \iff x-3 = 4 \iff \underline{x = 7}$

Fall 2: $x-3 < 0 \iff x < 3$: $|x-3| = 4 \iff -(x-3) = 4$

$\iff -x+3 = 4 \iff \underline{x = -1}$

$\mathbb{L}_1 = \{7\}$, $\mathbb{L}_2 = \{-1\}$,

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = \{-1, 7\}$

3. $|x-3| > 4$

Fall 1: $x-3 \geq 0$, $x \geq 3$: $|x-3| > 4 \iff x-3 > 4 \iff x > 7$

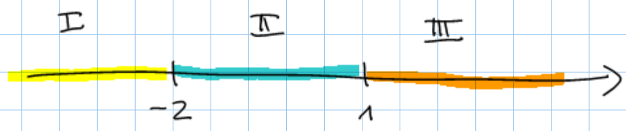
$\mathbb{L}_1 = (7, \infty)$

Fall 2: $x-3 < 0$, $x < 3$: $|x-3| > 4 \iff -x+3 > 4 \quad | +x-4$

$\iff -1 > x$, $\mathbb{L}_2 = (-\infty, -1)$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, -1) \cup (7, \infty)$

Beispiel: $|x-1| + |x+2| = 4$



	I	II	III
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$

Fall I: $x \leq -2$

$|x-1| + |x+2| = 4 \iff -(x-1) + (-(x+2)) = 4$

$\iff -x+1-x-2 = 4 \iff 2x = -5 \iff x = \frac{-5}{2}$

$\mathbb{L}_{I} = \{-\frac{5}{2}\}$

Fall II: $-2 < x < 1$

$|x-1| + |x+2| = 4 \iff -(x-1) + (x+2) = 4$

$\iff 3 = 4$ $\quad \mathbb{L}_{II} = \emptyset$

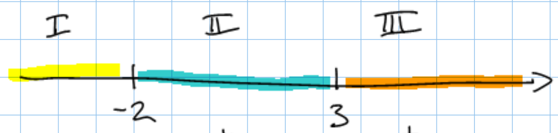
Fall III: $x \geq 1$

$|x-1| + |x+2| = 4 \iff (x-1) + (x+2) = 4 \iff 2x = 3$

$\iff x = \frac{3}{2}$ $\quad \mathbb{L}_{III} = \{\frac{3}{2}\}$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$

Beispiel: $|x+2| - 2|x-3| \geq 3$



	I	II	III
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

Fall I: $x \leq -2$: $|x+2| - 2|x-3| \geq 3 \iff -(x+2) - 2(-(x-3)) \geq 3$

$\iff -x-2+2x-6 \geq 3 \iff x \geq 11$ $\quad \mathbb{L}_{I} = \emptyset$

Fall II: $-2 < x \leq 3$: $|x+2| - 2|x-3| \geq 3 \iff x+2-2(-(x-3)) \geq 3$

$\iff x+2+2x-6 \geq 3 \iff 3x \geq 7 \iff x \geq \frac{7}{3}$

$\mathbb{L}_{II} = [\frac{7}{3}, 3]$

Fall III: $x > 3$: $|x+2| - 2|x-3| \geq 3 \iff (x+2) - 2(x-3) \geq 3$

$\iff -x+8 \geq 3 \iff x \leq 5$ $\quad \mathbb{L}_{III} = (3, 5]$

$\mathbb{L} = \mathbb{L}_{I} \cup \mathbb{L}_{II} \cup \mathbb{L}_{III} = [\frac{7}{3}, 5]$

Aufgabe 6
Man berechne die Binomialkoeffizienten

a) $\binom{13}{4}$, b) $\binom{10}{5}$, c) $\binom{13}{11}$, d) $\binom{n+k}{k+1}$, e) $\binom{2n-1}{n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ für $n = 49$.

a) $$\binom{13}{4} = \frac{13!}{(13-4)!\,4!} = \frac{13!}{9!\,4!} = \frac{13 \cdot \overset{1}{\cancel{12}} \cdot 11 \cdot \overset{5}{\cancel{10}} \cdot \cancel{9!}}{\cancel{9!} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 715$$

c) $$\binom{13}{11} = \frac{13!}{(13-11)!\,11!} = \frac{13 \cdot 12 \cdot \cancel{11!}}{2 \cdot \cancel{11!}} = 13 \cdot 6 = 78$$

d) $$\binom{n+k}{k+1} = \frac{(n+k)!}{(n+k-(k+1))!\,(k+1)!} = \frac{(n+k)!}{(n-1)!\,(k+1)!}$$

e) $$\binom{2n-1}{n+1}\frac{(n!)^2}{(2n)!} = \frac{(2n-1)!}{\underbrace{(2n-1-(n+1))!}_{(n-2)!}\,\underbrace{(n+1)!}_{(n+1)\cdot \cancel{n!}}} \cdot \frac{(n!)^{\cancel{2}}}{\underbrace{(2n)!}_{2n \cdot (2n-1)!}}$$

$$= \frac{\overset{n(n-1)\cancel{(n-2)!}}{n!}}{2n \cdot (n+1) \cdot \cancel{(n-2)!}}$$

$$= \frac{\cancel{n}(n-1)}{2\cancel{n}(n+1)} = \frac{n-1}{2n+2}.$$