1.6 Gleichungen und Ungleichungen

1.6.1 Gleichungen

→ Algebraische Gleichungen: vereinfache algebraische Gleichg mit Hilfe von Äquivalenzumformungen und löse nach x auf.

Quadratische Gleichung: $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$

Normalform $x^2+px+q=0$, $p=\frac{b}{a}$, $q=\frac{c}{a}$.

Fall 1: $p=0$: $x^2+q=0 \iff x^2=-q$

Fall 1a: $q<0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{-q} \in \mathbb{R}$

Fall 1b: $q=0 \Rightarrow x_1=0$

Fall 1c: $q>0 \Rightarrow$ keine Lösung $\mathbb{R}$

Fall 2: $p\neq 0$ $\quad x^2+px+q=0 \quad \Big| +\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}$

quadr. Ergänzung

$$\iff x^2+px+\frac{p^2}{4}+q-\frac{p^2}{4}=0$$

$$\iff \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=0 \quad \Big| +\frac{p^2}{4}-q$$

$$\iff \Big(\underbrace{x+\frac{p}{2}}_{=:y}\Big)^2 = \frac{p^2}{4}-q$$

Fall 2a: $\frac{p^2}{4}-q>0$: $\quad y_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Fall 2b: $\frac{p^2}{4}-q=0$: $\quad x_1=-p/2$

Fall 2c: $\frac{p^2}{4}-q<0$: keine Lösung in $\mathbb{R}$.

Beispiele:

1. $-2x^2-4x+6=0 \quad | :(-2) \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow x_{1/2}=-1\pm\sqrt{1+3}$
$= \begin{cases} 1 \\ -3 \end{cases}$

2. $x^2-4x+13=0 \Rightarrow x_{1/2}=2\pm\sqrt{4-13} = 2\pm\sqrt{-9} \notin \mathbb{R}$

Gleichungen höheres Ordnung: z.B. $x^5+2x^3-x^2+7=0$

Die Lösung gelingt nur in Spezialfällen. Häufig kann man eine Lösung raten und den Grad der Gleichung durch Polynomdivision reduzieren.

Beispiele:

1. $x^3-2x^2+x-2=0$

Rate $x=2$: $2^3-2\cdot 2^2+2-2=0$ ✓

$$\begin{array}{l} (x^3-2x^2+x-2) : (x-2) = x^2+1 \\ \underline{-(x^3-2x^2)} \\ \qquad\qquad x-2 \\ \qquad\quad \underline{-(x-2)} \\ \qquad\qquad - \end{array}$$

$\Rightarrow x^3-2x^2+x-2 = (x-2)\underbrace{(x^2+1)}_{\geq 1} \Rightarrow x=2$ einzige Nullstelle.

2. Biquadratische Gleichung $ax^4+bx^2+c=0$

Subs.: $z=x^2$ liefert die quadr. Gleichung $az^2+bz+c=0$

Beispiel: $x^4-10x^2+9=0$, Subs. $z=x^2$:

$z^2-10z+9=0 \Rightarrow z_{1/2}=5\pm\sqrt{25-9} = 5\pm 4 = \begin{cases} 9 \\ 1 \end{cases}$

$\Rightarrow z_1=9,\ z_2=1$: $x^2=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$; $x^2=1 \Rightarrow x_{3,4}=\pm 1$

Insgesamt: $x^4-10x^2+9 = (x-3)(x+3)(x-1)(x+1)$

– <u>gebrochenrationale Gleichungen</u>, z.B. $\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^3+ex^2+f}=0$

Hier ist zu beachten, daß nicht durch Null dividiert wird. Anschliessend mit Hauptnenner durchmultiplizieren und als algebraische Gleichung lösen.

<u>Beispiel:</u> $\dfrac{5x+1}{x+2}-\dfrac{2x^2+3x-8}{x^2+4x+4}=3$

$$\frac{5x+1}{x+2}-\frac{2x^2+3x-8}{(x+2)^2}=3\,,\quad x\neq-2 \qquad |\cdot HN$$

$$(x+2)(5x+1)-(2x^2+3x-8)=3(x+2)^2$$

$$\Leftrightarrow\ 5x^2+x+10x+2-2x^2-3x+8=3x^2+12x+12$$

$$\Leftrightarrow\ -2=4x$$

$$\Leftrightarrow\ x=-\tfrac{1}{2} \qquad \Rightarrow\ \mathbb{L}=\{-\tfrac{1}{2}\}$$

→ <u>Wurzel- und Betragsgleichungen</u>

<u>Wurzelgleichungen:</u> forme Ausdrücke soweit als möglich äquivalent um und isoliere den Wurzelterm. Anschließend muß man quadrieren, d.h. nicht äquivalent umformen. Deshalb erhält man u.U. zusätzliche Scheinlösung. D.h. immer in Originalgleichung einsetzen!

<u>Beispiele:</u>

1. $\sqrt{x+2}=x \quad |()^2$

$$\Rightarrow\ x+2=x^2 \ \Leftrightarrow\ x^2-x-2=0 \ \Leftrightarrow\ x_{1,2}=\tfrac{1}{2}\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}+2}=\tfrac{1}{2}\pm\tfrac{3}{2}=\begin{cases}2\\-1\end{cases}$$

<u>check:</u>

$$\left.\begin{array}{ll} x_1=2: & \sqrt{2+2}=2 \ ✓ \\ x_2=-1: & \sqrt{-1+2}=-1 \ ✗ \end{array}\right\}\ \mathbb{L}=\{2\}$$

2. $\sqrt{2x-3}+5-3x=0 \iff \sqrt{2x-3} = 3x-5 \quad |()^2$

$\Rightarrow 2x-3=(3x-5)^2 \iff 2x-3 = 9x^2-30x+25 \iff$

$\iff 9x^2-32x+28=0 \iff x^2-\frac{32}{9}x+\frac{28}{9}=0$

$\iff x_{1,2}=\frac{16}{9}\pm\sqrt{\frac{256}{81}-\frac{252}{81}} = \frac{16}{9}\pm\frac{2}{9} = \begin{cases} 2 \\ 14/9 \end{cases}$

Check: $x_1=2$: $\sqrt{2\cdot 2-3}+5-3\cdot 2=0$ ✓

$x_2=\frac{14}{9}$: $\sqrt{\frac{28}{9}-\frac{27}{9}}+5-\frac{14}{3} = \frac{1}{3}+5-\frac{14}{3} \neq 0$ ✗

$\mathbb{L}=\{2\}$.

→ Betragsgleichungen ... siehe Übg.

$|x-1|-|x-5|=2x+1$ hat $\mathbb{L}=\{-5/2\}$.

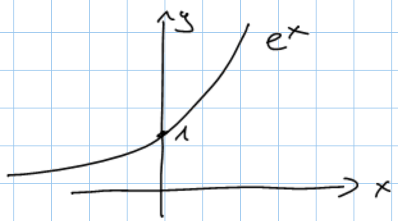
→ Vermischte Gleichungen

1. $\log_x\left(\frac{1}{5}\right)=-1 \iff x^{-1}=\frac{1}{5} \iff x=5$

2. $1+2\cdot e^{-2x}-4e^{-x}=0$, Subs.: $z=e^{-x}$

$1+2z^2-4z=0 \iff z^2-2z+\frac{1}{2}=0 \iff z_{1,2}=1\pm\sqrt{1-\frac{1}{2}}$

$z_{1,2}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}>0$



$\Rightarrow e^{-x}=1\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \quad |\ln(.)$

$\Rightarrow -x=\ln\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \iff x_{1,2}=-\ln\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.