$$\begin{array}{ccccccccc} &&&&1&&&& \\ &&&1&&1&&& \\ &&1&&2&&1&& \\ &1&&3&&3&&1& \\ 1&&4&&6&&4&&1 \end{array}$$

Beispiele:

1. $(a-b)^4 = (a+(-b))^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{n}{k} a^{4-k} (-b)^k$

$$= a^4 - 4a^3 b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4$$

2. Es gilt $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$. Für $a=b=1$ folgt

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} .$$

Interpretation: $\binom{n}{k}$ Anzahl der k-elementigen Teilmengen aus n Element

$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ Anzahl aller Teilmengen aus n Elementen

$M = \{ \circ, \bullet, * \}$, $|M| = 3$ $\Rightarrow$ Es exist. $2^{|M|} = 2^3 = 8$ Teilmengen

$P(M) = \{ \emptyset, \{\circ\}, \{\bullet\}, \{*\}, \{\circ, \bullet\}, \{\circ, *\}, \{\bullet, *\}, \{\circ, \bullet, *\} \}$

$|P(M)| = 8 = 2^3$

→ Potenzen und Wurzeln

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann

$$a^n := \underbrace{a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} ,$$ n-te Potenz von a

(b) Die n-te Wurzel von $a \geq 0$ ist erklärt als diejenige nichtnegative Zahl b mit der Eigenschaft

$$b^n = a$$

$$\sqrt[n]{a} := a^{1/n} := b , \quad n \in \mathbb{N} .$$

Satz (Potenzregeln)

Sei $a \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$. Dann gelten

(1) $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$, $\quad \dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, $\quad b \neq 0$

(2) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, $\quad \dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $\quad a \neq 0$

(3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$, $\quad \sqrt[m]{a^n} = a^{n/m}$, $\quad$ speziell $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$,

$a^0 = 1$.

Beispiel: Vereinfache soweit als möglich

1. $$\frac{\sqrt{a}}{a^{3/4}} = a^{1/2} \cdot a^{-3/4} = a^{1/2 - 3/4} = a^{-1/4} = \frac{1}{a^{1/4}} = \frac{1}{\sqrt[4]{a}}.$$

2. $$\left(\frac{a^{5n-2m}}{b^{6m-1}}\right) : \left(\frac{a^{5n+m}}{b^{m-2}}\right) = \frac{a^{\cancel{5n}-2m}}{b^{6m-1}} \cdot \frac{b^{m-2}}{a^{\cancel{5n}+m}} = a^{-3m} \cdot b^{m-2-(6m-1)}$$
$$= a^{-3m} \cdot b^{-5m-1} = \frac{1}{a^{3m} \cdot b^{5m+1}}$$

→ Logarithmen

Sei $a > 0$, $a \neq 1$. Dann besitzt die Gleichung

$$a^x = b$$

für jedes $b > 0$ stets eine reelle Lösung x.

$$a^x = b \iff x = \log_a(b)$$

$\log_a(b)$ ist derjenige Exponent, mit dem man die Basis a potenzieren muß, um b zu erhalten.

$$a^{\log_a(b)} = b.$$

<u>Beispiele:</u>

1. $\log_{10}(100) = 2$, denn $10^2 = 100$
2. $\log_a(a^x) = x$, denn $a^x = a^x$
3. $\log_5(125) = 3$, denn $5^3 = 125$
4. $\log_a(1) = 0$, denn $a^0 = 1$

   $\log_a(a) = 1$, denn $a^1 = a$

<u>Satz</u> (Logarithmenregeln)

Für den Logarithmus zu einer festen Basis a gelten folgende Regeln

1. $\log(u \cdot v) = \log(u) + \log(v)$
2. $\log\left(\frac{u}{v}\right) = \log(u) - \log(v)$
3. $\log(u^v) = v \cdot \log(u)$, speziell $\log\left(\frac{1}{u}\right) = -\log(u)$

<u>Beweis</u>: Die Regeln lassen sich aus den Potenzgesetzen herleiten:

$$a^{x+y} = a^x \cdot a^y \quad | \log_a(..)$$

$$\log_a(a^{x+y}) = \log_a(a^x \cdot a^y)$$

$$x + y = \log_a(a^x \cdot a^y)$$

Setze $u := a^x$, $v := a^y$ $\iff$ $x = \log_a(u)$

$y = \log_a(v)$

$$\Rightarrow \quad \log_a(u) + \log_a(v) = \log_a(u \cdot v)$$

Die anderen Regeln zeigt man entsprechend.

Beispiele:

1. $$\log_x\left(\frac{\sqrt{a\cdot b}\cdot c}{a}\right) = \log_x(\sqrt{ab}\cdot c) - \log_x(a)$$
$$= \log_x(\sqrt{ab}) + \log_x(c) - \log_x(a)$$
$$= \frac{1}{2}\log_x(ab) + \log_x(c) - \log_x(a)$$
$$= \frac{1}{2}\log_x(a) + \frac{1}{2}\log_x(b) + \log_x(c) - \log_x(a)$$
$$= -\frac{1}{2}\log_x(a) + \frac{1}{2}\log_x(b) + \log_x(c)$$

2. $$\log_3\left(\frac{81}{27}\right) = \log_3(81) - \log_3(27) = \log_3(3^4) - \log_3(3^3)$$
$$= 4\log_3(3) - 3\log_3(3) = 4-3 = 1$$

wichtige Logarithmen:

$\lg(x) := \log_{10}(x)$ 10-er Logarithmus, dekadischer Log.

$\ln(x) := \log_e(x)$ natürlicher Logarithmus, Basis e

$\mathrm{ld}(x) := \log_2(x)$ dualer Logarithmus, Basis 2

Basiswechsel

$$\log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

denn: $a^{\log_a(b)} = b \mid \log_c(\ldots) \Rightarrow \log_c\left(a^{\log_a(b)}\right) = \log_c(b)$

$$\Rightarrow \log_a(b)\,\log_c(a) = \log_c(b)$$

$$\Rightarrow \log_a(b) = \frac{\log_c(b)}{\log_c(a)}$$

$$\log_{10}(7) = \frac{\log_e(7)}{\log_e(10)} = \frac{\ln(7)}{\ln(10)} = 0{,}845...$$

Check: $10^{0.845...} = 7$

Übungsblatt 1

Aufgabe 7

a) Wieviele Wörter kann man aus den Buchstaben des Worts „ANNABELLA" bilden?

– aus „ABCD" kann man 4! Wörter bilden

→ $A_1\, N_1\, N_2\, A_2\, B\, E\, L_1\, L_2\, A_3$ 9! Wörter mögl.

$$\Rightarrow \frac{9!}{3!\ 2!\ 2!} = 15120$$

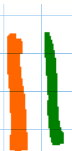
Aufgabe 8

Zur Markierung von Werkstücken mit Farbstrichen stehen n Farben zur Verfügung. Wieviele Markierungen sind möglich, wenn ein Werkstück

a) zwei verschiedenfarbige Striche und

b) drei Striche, die untereinander auch gleichfarbig sein können

erhalten? Wie viele Farben braucht man im Falle von 20 Werkstücken bei a) und b) mindestens?

a) 

b)