Hochschule Karlsruhe
Fakultät IWI und Fakultät EIT
Prof. Dr. Stefan Ritter

Übungsblatt 1
Mathematik 1 für Bachelor Data Science

Aufgabe 1

Ein Jahrgang von Studierenden bestehe aus 200 Personen. 50 Personen belegen das Praktikum A, 60 Personen belegen die Vorlesung B und 30 Personen belegen das Seminar C. 15 Studierende haben Praktikum A und Vorlesung B belegt, 10 Studierende belegen Praktikum A und das Seminar C. Von den Studierenden, die das Seminar C besuchen, haben 5 die Vorlesung B belegt. Keine Person hat alle Veranstaltungen gebucht.

a) Wieviele Studierende des Jahrgangs haben genau eine Veranstaltung gebucht?
b) Wieviele Studierende belegen ausschließlich andere Veranstaltungen als die hier aufgezählten?

Aufgabe 2

Gegeben sind die drei Mengen $M_1 = \{a, b, c, d, e\}$, $M_2 = \{e, f, g, h, i\}$ und $M_3 = \{a, c, e, g, i\}$. Bilden Sie die Mengen $M_1 \cap M_2$, $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_3$, $M_1 \cup M_3$, $M_2 \cap M_3$ und $M_2 \cup M_3$ sowie $M_1 \setminus M_2$, $M_2 \setminus M_1$, $M_1 \setminus M_3$, $M_2 \setminus M_3$, $\bigcap_{n=1}^{3} M_n := M_1 \cap M_2 \cap M_3$ und $\bigcup_{n=1}^{3} M_n := M_1 \cup M_2 \cup M_3$.

Aufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe von Venn-Diagrammen, daß für drei Mengen A, B und C gilt:
a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Aufgabe 4

Vereinfachen Sie folgenden Mengenausdruck $(X \cap (\overline{X} \cup Y)) \cup (Y \cap (Y \cup Z)) \cup (Y \cap Z)$.

Aufgabe 5

a) Die neunstellige Dualzahl $a = 110110110$ ist als Summe von Potenzen der Basis $B = 2$ darzustellen. Mit Hilfe des Horner-Schemas berechne man die Dezimaldarstellung von a.
b) Man stelle die hexadezimale Zahl $z = 7f85ab$ als Summe von Potenzen der Basis $B = 16$ dar und bestimme mittels Horner-Schema die Dezimaldarstellung.
c) Schreiben Sie die periodische Dezimalzahl $r = 0.\overline{479}$ als Bruch $\dfrac{p}{q}$ mit $p, q \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 6

Man berechne die Binomialkoeffizienten

a) $\binom{13}{4}$, b) $\binom{10}{5}$, c) $\binom{13}{11}$, d) $\binom{n+k}{k+1}$, e) $\binom{2n-1}{n+1}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$ für $n = 49$.

Aufgabe 7

a) Wieviele Wörter kann man aus den Buchstaben des Worts „ANNABELLA“ bilden?
b) Aus einer Gruppe von 30 Personen soll ein 7-köpfiger Ausschuss mit gleichberechtigten Mitgliedern gebildet werden. Wieviele Möglichkeiten gibt es?

Aufgabe 8
Zur Markierung von Werkstücken mit Farbstrichen stehen n Farben zur Verfügung. Wieviele Markierungen sind möglich, wenn ein Werkstück
a) zwei verschiedenfarbige Striche und
b) drei Striche, die untereinander auch gleichfarbig sein können
erhalten? Wie viele Farben braucht man im Falle von 20 Werkstücken bei a) und b) mindestens?

Aufgabe 9
Berechnen Sie die folgenden Summen:
a) $\displaystyle\sum_{j=1}^{5}(-1)^j j^2$, b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20}\left((k+1)^2-k^2\right)$, c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-2)$, d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^k$.

Aufgabe 10
Zeigen Sie: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k^2+7k}=\frac{n}{7n+7},\quad n\in\mathbb{N}.$

Aufgabe 11
Bestimmen Sie jeweils den Koeffizienten der Potenz x^5 in der binomischen Entwicklung von
a) $(1-4x)^8$, b) $(x+0.5a)^{12}$.

Aufgabe 12
Zeigen Sie mit Hilfe der binomischen Formel für $n\in\mathbb{N}$ die Identität:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}.$$

Aufgabe 13
Vereinfachen Sie soweit als möglich
a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6b^{12}}}$, b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt[6]{a^4}}}$, c) $\left(\dfrac{x^2}{2y}-\dfrac{y^2}{2x}\right):\left(\dfrac{2}{x}-\dfrac{2}{y}\right)$,
d) $\left(\dfrac{8x+6}{5xy-x^2}\cdot\dfrac{25xy-5x^2}{6xy}\right):\dfrac{20xy+15y}{9x^3y^2}$, e) $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}}$.

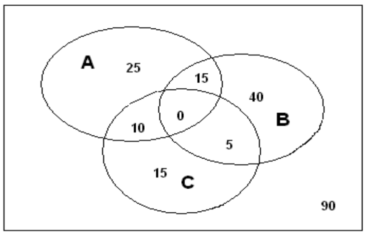
Aufgabe 14
Berechnen Sie
a) $\log_5 2^4$, b) $\ln(\sqrt{e}^3)$, c) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2+\ln e^6)}}$, d) $\log_7\sqrt{12}$.

Aufgabe 15
a) Aus einem Rohr fließen in 3 Minuten 12 Liter Wasser. Wieviel Liter Wasser laufen an einem Tag aus dem Rohr, wieviel in einem Jahr?
b) Ein Fundamentgraben wird von 4 Arbeitern in 9 Stunden ausgehoben und betoniert. Wie lange brauchen 3 Arbeiter für diese Arbeit? Wie lange würden 10 Arbeiter dafür benötigen?
c) Zehn Katzen fangen in zehn Minuten zehn Mäuse. Wie viele Mäuse fangen hundert Katzen in hundert Minuten?

Lösungen zum Übungsblatt 1
Mathematik 1 für Bachelor Data Science

Aufgabe 1

Es sei A die Menge der Besucher der Praktikums, B die Menge der Besucher der Vorlesung und C die Menge der Seminarbesucher. Aus den Angaben ergibt sich folgendes Venn-Diagramm:



a) 25 Studierende haben ausschließlich Praktikum A belegt, 40 besuchen nur die Vorlesung B und 15 Studierende besuchen ausschließlich das Seminar C.
b) 90 Personen belegen Veranstaltungen, die nicht aufgeführt sind.

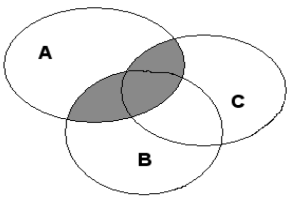
Aufgabe 2

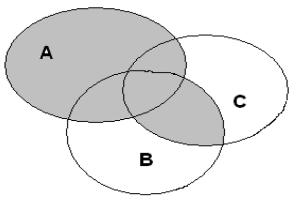
Die Lösungen ergeben sich durch einfaches Benutzen der Definitionen. Zum Beispiel enthält $M_1 \cap M_2$ nur jene Elemente, die beiden Mengen gemeinsam sind – das ist lediglich das Element e. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
M_1 \cap M_2 &= \{e\} \\
M_1 \cup M_2 &= \{a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g,\, h,\, i\} \\
M_1 \cap M_3 &= \{a,\, c,\, e\} \\
M_1 \cup M_3 &= \{a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, g,\, i\} \\
M_2 \cap M_3 &= \{e,\, g,\, i\} \\
M_2 \cup M_3 &= \{a,\, c,\, e,\, f,\, g,\, h,\, i\} \\
M_1 \setminus M_2 &= \{a,\, b,\, c,\, d\} \\
M_2 \setminus M_1 &= \{f,\, g,\, h,\, i\} \\
M_1 \setminus M_3 &= \{b,\, d\} \\
M_2 \setminus M_3 &= \{f,\, h\} \\
\bigcap_{n=1}^{3} M_n &= \{e\} \\
\bigcup_{n=1}^{3} M_n &= \{a,\, b,\, c,\, d,\, e,\, f,\, g,\, h,\, i\}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

Venn Diagramme:





$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\qquad$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Aufgabe 4
Mit den Distributivgesetzen und dem Assoziativgesetz folgt:

$$\begin{aligned} & (X\cap(\overline{X}\cup Y))\cup(Y\cap(Y\cup Z))\cup(Y\cap Z) \\ = \; & ((X\cap\overline{X})\cup(X\cap Y))\cup((Y\cap Y)\cup(Y\cap Z))\cup(Y\cap Z) \\ = \; & (\emptyset\cup(X\cap Y))\cup(Y\cup(Y\cap Z))\cup(Y\cap Z) \\ = \; & (X\cap Y)\cup Y\cup(Y\cap Z)=Y. \end{aligned}$$

Aufgabe 5
a) Es gilt $a = 110110110 = 1\cdot 2^8 + 1\cdot 2^7 + 0\cdot 2^6 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^4 + 0\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0$ sodaß die Zahl a den Wert des Polynoms $P_8(x) = x^8 + x^7 + x^5 + x^4 + x^2 + x$ an der Stelle $x = 2$ darstellt. Das Horner-Schema liefert dann den entsprechenden dezimalen Wert:

	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$x=2$		2	6	12	26	54	108	218	438
	1	3	6	13	27	54	109	219	$438 = a$

b) Unter Beachtung des Stellenwerts 10, 11, 12, 13, 14 und 15 für die Ziffern a, b, c, d, e und f des hexadezimalen Systems erhält man die Darstellung für

$$z = 7f85ab = 7\cdot 16^5 + 15\cdot 16^4 + 8\cdot 16^3 + 5\cdot 16^2 + 10\cdot 16^1 + 11\cdot 16^0.$$

Dies entspricht wiederum dem Wert eines Polynoms 5. Grades an der Stelle $x = 16$. Das Horner-Schema liefert dann:

	7	15	8	5	10	11
$x=16$		112	2032	32640	522320	8 357 280
	7	127	2040	32645	522330	$8\,357\,291 = z$

c) $r = 0.\overline{479} \Rightarrow 1000\cdot r = 479.\overline{479}$. Subtraktion ergibt $999\cdot r = 479 \Rightarrow r = \dfrac{479}{999}$.

Aufgabe 6
a) $\binom{13}{4} = \dfrac{13!}{9!4!} = \dfrac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 715$, b) $\binom{10}{5} = 252$, c) $\binom{13}{11} = 78$,
d) $\binom{n+k}{k+1} = \dfrac{(n+k)!}{(n+k-(k+1))!(k+1)!} = \dfrac{(n+k)!}{(n-1)!(k+1)!}$,
e) $\binom{2n-1}{n+1}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{(2n-1)!}{(2n-1-(n+1))!(n+1)!}\dfrac{n!n!}{(2n)!} = \dfrac{n(n-1)}{2n(n+1)} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{n-1}{n+1}$, und für $n = 49$ folgt $\binom{2n-1}{n+1}\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} = \dfrac{12}{25}$.

Aufgabe 7
a) Das Wort „ANNABELLA“ besteht aus 3xA, 1xB, 1xE, 2xL und 2xN, also aus 9 Buchstaben. 9 (verschiedene) Buchstaben können auf 9! Arten angeordnet werden. Da Buchstaben mehrfach auftreten, muss durch die Anzahl der zusammenfallenden Wörter dividiert werden und es ergibt sich

$$\frac{9!}{3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 2!} = 15120.$$

b) $\binom{30}{7} = \dfrac{30!}{23!\cdot 7!} = \dfrac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25\cdot 24}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 2.035.800.$

Aufgabe 8
a) Gefragt ist nach der Anzahl der Kombinationen zur Klasse 2 von n Elementen ohne Wiederholung: $m = \binom{n}{2} = \dfrac{n\cdot(n-1)}{2}$. Es ist $\binom{7}{2} = 21$, $\binom{6}{2} = 15 \Rightarrow$ zur Kennzeichnung von 20 Werkstücken sind mindestens 7 Farben erforderlich.

b) Gefragt ist nach der Anzahl der Kombinationen zur Klasse 3 von n Elementen mit Wiederholung: $m = \binom{n+3-1}{3} = \frac{(n+2)\cdot(n+1)\cdot n}{3\cdot 2}$. Es ist $\binom{4+3-1}{3} = \binom{6}{3} = 20$, $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10 \Rightarrow$ zur Kennzeichnung von 20 Werkstücken sind mindestens 6-2=4 Farben erforderlich.

Aufgabe 9

a) $\sum_{j=1}^{5}(-1)^j j^2 = -1+4-9+16-25 = -15$,

b) $\sum_{k=0}^{20}\left((k+1)^2-k^2\right) = \sum_{k=0}^{20}(k+1)^2 - \sum_{k=0}^{20}k^2 = \sum_{k=1}^{21}k^2 - \sum_{k=0}^{20}k^2 = 21^2$,

c) $\sum_{k=1}^{n}(4k-2) = 4\sum_{k=1}^{n}k - \sum_{k=1}^{n}2 = 4\frac{n(n+1)}{2} - 2n = 2n^2$,

d) $\sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^k = \sum_{k=0}^{20}\binom{20}{k}2^k\cdot 1^{20-k} = (2+1)^{20} = 3^{20}$.

Aufgabe 10

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{7k^2+7k} = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k} = \frac{1}{7}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{7}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{7(n+1)}.$$

Aufgabe 11

a) $(1-4x)^8 = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}1^k(-4x)^{8-k} = \sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}(-4x)^k$. Der Koeffizient von x^5: $\binom{8}{5}(-4x)^5 = 56\cdot(-1024) = -57344$.

b) $(x+0.5a)^{12} = \sum_{k=0}^{12}\binom{12}{k}x^k(0.5a)^{12-k}$. Der Koeffizient von x^5: $\binom{12}{5}(0.5a)^{12-5} = 792\cdot 0.5^7\cdot a^7 = 6.1875\cdot a^7$.

Aufgabe 12

Es gilt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k$. Der erste Summand lautet $\binom{n}{0}\left(\frac{1}{n}\right)^0 = 1$. Für $k>0$ erhält man für die Summanden

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{\underbrace{n\cdot n\cdots n}_{k \text{ Faktoren}}}\cdot\frac{1}{k!} = 1\cdot\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n-2}{n}\right)\cdots\left(\frac{n-k+1}{n}\right)\frac{1}{k!}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)}{k!}$.

Aufgabe 13

a) $\sqrt{\sqrt[3]{a^6b^{12}}} = \sqrt{a^{\frac{6}{3}}b^{\frac{12}{3}}} = ab^2$, b) $\frac{\sqrt[6]{a^5\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt[6]{a^4}}} = \frac{\sqrt[6]{a^5a^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt[3]{a^2a^{\frac{4}{6}}}} = \frac{\sqrt[6]{a^{\frac{17}{3}}}}{\sqrt[3]{a^{\frac{16}{6}}}} = \frac{a^{\frac{17}{18}}}{a^{\frac{16}{18}}} = a^{\frac{1}{18}} = \sqrt[18]{a}$,

c) $\left(\frac{x^2}{2y}-\frac{y^2}{2x}\right):\left(\frac{2}{x}-\frac{2}{y}\right) = \frac{(x^3-y^3)xy}{2xy(2y-2x)} = \frac{x^3-y^3}{4(y-x)} = \frac{(x-y)(x^2+xy+y^2)}{4(y-x)} =$

$-\dfrac{1}{4}(x^2+xy+y^2)$, für $x \neq 0$, $y \neq 0$ und $x \neq y$,

d) $\left(\dfrac{8x+6}{5xy-x^2} \cdot \dfrac{25xy-5x^2}{6xy}\right) : \dfrac{20xy+15y}{9x^3y^2} = \dfrac{8x+6}{5xy-x^2} \cdot \dfrac{25xy-5x^2}{6xy} \cdot \dfrac{9x^3y^2}{20xy+15y}$

$= \dfrac{2(4x+3) \cdot 5(5xy-x^2) \cdot 9x^3y^2}{(5xy-x^2) \cdot 6xy \cdot 5y(4x+3)} = 3x^2$, für $5y \neq x, x \neq 0, y \neq 0, x \neq -\frac{3}{4}$,

e) $\dfrac{\frac{2}{x}+\frac{x}{2}}{\frac{2}{x}-\frac{x}{2}} = \dfrac{\frac{4+x^2}{2x}}{\frac{4-x^2}{2x}} = \dfrac{4+x^2}{2x} \cdot \dfrac{2x}{4-x^2} = \dfrac{4+x^2}{4-x^2}$, für $x \neq 0, x \neq 2, x \neq -2$.

Aufgabe 14

a) $\log_5 2^4 = 4\log_5 2 = 4\dfrac{\ln 2}{\ln 5} = 1.7227..$, b) $\ln(\sqrt{e}^3) = \dfrac{3}{2}\ln e = \dfrac{3}{2}$,

c) $\ln\sqrt{e^{3(\ln e^2 + \ln e^6)}} = \dfrac{1}{2}\ln e^{(6\ln e + 18\ln e)} = \dfrac{1}{2}\ln e^{24} = 12\ln e = 12$,

d) $\log_7\sqrt{12} = \dfrac{1}{2}\log_7 12 = \dfrac{1}{2}\dfrac{\ln 12}{\ln 7} = 0.63849..$

Aufgabe 15

a) Wenn in 3 Minuten 12 Liter Wasser aus dem Rohr fließen, so müssen in 1 Minute 4 Liter und in 24 Stunden (bzw. 1440 Minuten) natürlich $1440 \cdot 4 = 5760$ Liter Wasser aus dem Rohr fließen. In einem Jahr laufen folglich $5760 \cdot 365 = 2.102.400$ Liter Wasser aus dem Rohr.

b) Wenn 4 Arbeiter an dem Graben 9 Stunden arbeiten, so wird ein Arbeiter $9 \cdot 4 = 36$ Stunden beschäftigt sein. 3 Arbeiter benötigen demnach $36 : 3 = 12$ Stunden und 10 Arbeiter würden $36 : 10 = 3.6$ Stunden benötigen. 3.6 Stunden sind 3 Stunden und 36 Minuten.

c) Die Grundgröße ist hier, wie viel Mäuse eine Katze pro Minute fängt, dies nennen wir x. Dafür gilt $10 \cdot 10 \cdot x = 10$, also $x = 1/10$. Nun erhalten wir für den Fangerfolg n der hundert Katzen in hundert Minuten $n = 100 \cdot 100 \cdot \frac{1}{10} = 1000$. Die Katzen fangen also tausend Mäuse,