Hochschule Karlsruhe
Fakultät IWI und Fakultät EIT
Prof. Dr. Stefan Ritter

# Übungsblatt 2
# Mathematik 1 für Bachelor Data Science

**Aufgabe 1**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Gleichungen
a) $4x^2 + 8x - 60 = 0$, b) $x^5 - 3x^3 + x = 0$, c) $\sqrt{x-1} = \sqrt{x+1}$,
d) $\sqrt{x^2+4} = x - 2$, e) $|x+1| = |x-1|$, f) $|x^2 + 2x - 1| = |x|$,
g) $2^x + 4 \cdot 2^{-x} - 5 = 0$, h) $\lg(4x-5) = \frac{3}{2}$,
i) $3 + 2e^{-2t} - 5e^{-t} = 0$, j) $\lg(x+1)^2 = \lg 2 + \lg(x+1) + \lg(x-1)$.

**Aufgabe 2**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Betragsgleichungen
a) $|3x - 12| - |x+7| = 25$, b) $|2x-3| + |3x+2| = 21$,
c) $|x+2| - (x+2) = |x-2| - (x-2)$, d) $|2x-3| + |3x+2| = -18$.

**Aufgabe 3**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Wurzelgleichungen
a) $\sqrt{-6x+8} - \sqrt{36+4x} = \sqrt{4x+46}$, b) $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-3} + 4 = 0$,
c) $\sqrt{x + \sqrt{2x+5}} = \sqrt{3x-1}$, d) $\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1} = \frac{10}{\sqrt{x+2}}$.

**Aufgabe 4**
Bestimmen Sie die Lösungsmenge folgender Ungleichungen
a) $2x - 8 > |x|$, b) $x^2 + x + 1 \geq 0$, c) $|x| \leq x - 2$,
d) $|x-4| > x^2$, e) $\frac{3}{x-5} < \frac{2}{x+3}$, f) $|x^2 - 1| \leq 4$.

**Aufgabe 5**
Bei einer Baulandumlegung sollen mehrere rechteckige Grundstücke der Größe $400\text{m}^2$ erzeugt werden. In welchen Bereichen dürfen sich die Seitenlängen bewegen, wenn der Umfang der Baugrundstücke höchstens 100m betragen soll?

**Aufgabe 6**
Lösen Sie auf nach $x$
a) $y = \ln(1 - \frac{x}{2})$, b) $y = \frac{1}{2}(e^{2x} - 1)$, c) $y = \frac{e^x}{1+e^x}$,
d) $y = \ln(x+1) + \ln(x-1)$.

**Aufgabe 7**
Die Lautstärke wird üblicherweise in Dezibel (dB) gemessen. Die Hörbarkeitsschwelle wird bei einer physikalischen Schallintensität von $I_0 = 10^{-12}$ [Watt/m$^2$] erreicht. Die Lautstärke eines Tons mit der Intensität $I$ ergibt sich dann als

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0} \text{ dB}.$$

a) Wie groß ist nach obiger Definition die Lautstärke der Hörbarkeitsschwelle $I_0$?
b) Ein Staubsauger hat eine Lautstärke von ca. 80 dB, laute Rockmusik bis zu 120 dB. Um wie viel höher ist die Schallintensität $I_R$ der Rockmusik gegenüber der des Staubsaugers $I_S$? Kontrollieren Sie Ihr Ergebnis, indem Sie die Intensitäten nachrechnen.

**Aufgabe 8**
Die durchschnittliche Inflationsrate während der Existenz der D-Mark in den Jahren von Anfang 1948 bis Ende 2001 betrug 2.7%. Auf das Wievielfache sind demzufolge in dieser Zeit die Preise gestiegen? Wie viel Prozent der ursprünglichen Kaufkraft hatte die D-Mark bei ihrer Ablösung? Zu welchem Zeitpunkt betrug die Kaufkraft der D-Mark gerade 50% der ursprünglichen Kaufkraft.

**Lösungen zum Übungsblatt 2**
**Mathematik 1 für Bachelor Data Science**

**Aufgabe 1**
a) $4x^2+8x-60=0 \Leftrightarrow x^2+2x-15=0 \Rightarrow x_{1,2}=-1\pm\sqrt{1-(-15)}=-1\pm 4=3,-5$. Also $\mathbb{L}=\{3,-5\}$.

b) $x^5-3x^3+x=0 \Leftrightarrow x\cdot(x^4-3x^2+1)=0$. Klar $x_1=0$ ist Lösung. Der zweite Faktor ist ein biquadratischer Term. Setze $t:=x^2$: $t^2-3t+1=0 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}-1}\geq 0$. Also $x_{2,3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}$, $x_{4,5}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}$.

c) $\sqrt{x-1}=\sqrt{x+1}$. Quadrieren liefert: $x-1=x+1 \Rightarrow -1=+1$, eine falsche Aussage. Deshalb $\mathbb{L}=\emptyset$.

d) $\sqrt{x^2+4}=x-2$. Quadrieren liefert: $x^2+4=x^2-4x+4 \Leftrightarrow x=0$, jedoch ist 0 keine Lösung der Wurzelgleichung $\Rightarrow \mathbb{L}=\emptyset$.

e) $|x+1|=|x-1|$. Jede mögliche Konstellation ist zu untersuchen:
<u>Fall 1</u>: $x+1\geq 0$: Fall (i): $x-1\geq 0$: $x+1=x-1\Rightarrow 1=-1$ falsch $\Rightarrow \mathbb{L}_{1,i}=\emptyset$.
Fall (ii): $x-1<0$: $x+1=-x+1\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0\Rightarrow \mathbb{L}_{1,ii}=\{0\}$.
<u>Fall 2</u>: $x+1\leq 0$: Fall (i): $x-1\geq 0$: ausgeschlossen, denn $x\leq -1$ und $x\geq 1$ nicht erfüllbar.
Fall (ii): $x-1<0$: $-x-1=-x+1\Rightarrow -1=+1$ falsch $\Rightarrow \mathbb{L}_{2,ii}=\emptyset$.
Ingesamt $\mathbb{L}=\{0\}$.

f) $|x^2+2x-1|=|x|$. Jede mögliche Konstellation ist zu untersuchen:
<u>Fall 1</u>: $x\geq 0$: Fall (i): $x^2+2x-1\geq 0$: $x^2+2x-1=x \Leftrightarrow x^2+x-1=0\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$. Also $x_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}>0$, $x_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}<0\Rightarrow \mathbb{L}_{1,i}=\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\}$.
Fall (ii): $x^2+2x-1<0$: $-x^2-2x+1=x\Leftrightarrow x^2+3x-1=0\Rightarrow x_{1,2}=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{9}{4}+1}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}$.
$x_1=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{13}}{2}\overset{!}{>}0\Rightarrow \mathbb{L}_{1,ii}=\{\frac{-3+\sqrt{13}}{2}\}$.
<u>Fall 2</u>: $x<0$: Fall (i): $x^2+2x-1\geq 0$: $x^2+2x-1=-x\Leftrightarrow x^2+3x-1=0$ (vgl. Fall 1,ii) $\Rightarrow \mathbb{L}_{2,i}=\{\frac{-3-\sqrt{13}}{2}\}$.
Fall (ii): $x^2+2x-1<0$: $-x^2-2x+1=-x\Leftrightarrow x^2+x-1=0$ (vgl. Fall 1,i) $\Rightarrow \mathbb{L}_{2,ii}=\{\frac{-\sqrt{5}-1}{2}\}$.
Insgesamt: $\mathbb{L}=\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2},\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}\}$.

g) $2^x+4\cdot 2^{-x}-5=0$. Setze $z=2^x$: $z+\frac{4}{z}-5=0|\cdot z\Rightarrow z^2-5z+4=0\Rightarrow z_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-4}=\frac{5}{2}\pm\frac{3}{2}=4,1$. $2^x=4|\ln()\Rightarrow x=\frac{\ln 4}{\ln 2}=2$, $2^x=1|\ln()\Rightarrow x=\frac{\ln 1}{\ln 2}=0\Rightarrow \mathbb{L}=\{2,0\}$.

h) $\lg(4x-5)=\frac{3}{2}$, $x\geq\frac{5}{4}$. $\lg(4x-5)=\frac{3}{2}|10^{(..)}\Rightarrow 4x-5=10^{3/2}\Rightarrow x=\frac{10^{3/2}+5}{4}=9.15569..$

i) Substitution $z=e^{-t}$ ergibt wegen $z^2=e^{-2t}$ die quadratische Gleichung $3+2z^2-5z=2\left(z^2-\frac{5}{2}z+\frac{3}{2}\right)=0$ mit Lösungen $z_1=\frac{3}{2}$ und $z_2=1$. Umkehrung der Substitution $z=e^{-t}$ ergibt $t=-\ln z$ und man erhält die beiden Lösungen $t_1=-\ln z_1=-\ln\frac{3}{2}=\ln\frac{2}{3}$ und $t_2=-\ln z_2=-\ln 1=0$.

j) Mit den Logarithmenregeln folgt $\lg(x+1)^2=\lg 2+\lg(x+1)+\lg(x-1)=\lg(2(x+1)(x-1))$. Die Argumente der Logarithmen müssen übereinstimmen, so daß sich die quadratische Gleichung $(x+1)^2=2(x+1)(x-1)$ ergibt bzw. $(x+1)[(x+1)-2(x-1)]=0$. Der erste Faktor liefert die Lösung $x_1=-1$ und der zweite Faktor die Lösung $x_2=3$. Da weiterhin die Argumente der

Logarithmen in der Ausgangsgleichung größer Null sein müssen, sind nur Lösungen $x > 1$ zugelassen. Damit ist $x = 3$ die einzige Lösung der Ausgangsgleichung.

**Aufgabe 2**
a) Wir bestimmen zunächst die Fallgrenzen: $3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$, $x + 7 = 0 \Rightarrow x = -7$. Zwei Grenzen führen zu drei Fällen:
Fall 1: $x < -7$: $|3x-12|-|x+7| = 25 \Leftrightarrow 12-3x+7+x = 25 \Leftrightarrow -2x = 6 \Leftrightarrow x = -3 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$.
Fall 2: $-7 \leq x \leq 4$: $|3x - 12| - |x + 7| = 25 \Leftrightarrow 12 - 3x - 7 - x = 25 \Leftrightarrow -4x = 20 \Leftrightarrow x = -5 \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{-5\}$.
Fall 3: $x > 4$: $|3x-12|-|x+7| = 25 \Leftrightarrow 3x-12-7-x = 25 \Leftrightarrow 2x = 44 \Leftrightarrow x = 22 \Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{22\}$.
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{-5, 22\}$.

b)Wir bestimmen zunächst die Fallgrenzen: $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$, $3x + 2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$. Zwei Grenzen führen zu drei Fällen:
Fall 1: $x < -\frac{2}{3}$: $|2x - 3| + |3x + 2| = 21 \Leftrightarrow 3 - 2x - 2 - 3x = 21 \Leftrightarrow -5x = 20 \Leftrightarrow x = -4 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \{-4\}$.
Fall 2: $-\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{3}{2}$: $|2x - 3| + |3x + 2| = 21 \Leftrightarrow 3 - 2x + 3x + 2 = 21 \Leftrightarrow x = 16 \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \emptyset$.
Fall 3: $x > \frac{3}{2}$: $|2x-3|+|3x+2| = 21 \Leftrightarrow 2x-3+3x+2 = 21 \Leftrightarrow 5x = 22 \Leftrightarrow x = \dfrac{22}{5} \Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{\dfrac{22}{5}\}$.
$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{-4, \frac{22}{5}\}$.

c)Wir bestimmen zunächst die Fallgrenzen: $x+2 = 0 \Rightarrow x = -2$, $x-2 = 0 \Rightarrow x = 2$. Zwei Grenzen führen zu drei Fällen:
Fall 1: $x < -2$: $|x + 2| - (x + 2) = |x - 2| - (x - 2) \Leftrightarrow -2 - x - x - 2 = 2 - x - x + 2 \Leftrightarrow -4 = 4 \Rightarrow \mathbb{L}_1 = \emptyset$.
Fall 2: $-2 \leq x \leq 2$: $|x + 2| - (x + 2) = |x - 2| - (x - 2) \Leftrightarrow x + 2 - x - 2 = 2 - x - x + 2 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow \mathbb{L}_2 = \{2\}$.
Fall 3: $x > 2$: $|x + 2| - (x + 2) = |x - 2| - (x - 2) \Leftrightarrow x + 2 - x - 2 = x - 2 - x + 2 \Leftrightarrow 0 = 0 \Rightarrow \mathbb{L}_3 = \{x > 2\}$. $\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \{x \geq 2\}$.

d) Hier sieht man sofort, daß die Lösungsmenge leer ist, denn auf der linken Seite steht ein nichtnegativer Term, der Term auf der rechten Seite ist negativ.

**Aufgabe 3**
a) $\sqrt{-6x + 8} - \sqrt{36 + 4x} = \sqrt{4x + 46}$.
Quadrieren liefert: $(-6x + 8) - 2\sqrt{-6x + 8}\sqrt{36 + 4x} + 36 + 4x = 4x + 46$.
Isolieren der Wurzel und nochmaliges quadrieren liefert:
$(6x + 2)^2 = 4(-6x + 8)(36 + 4x) \Leftrightarrow 36x^2 + 24x + 4 = -864x + 1152 - 96x^2 + 128x \Leftrightarrow 132x^2 + 760x - 1148 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{190}{33}x - \dfrac{287}{33} = 0$.
Quadratische Gleichung: $x_{1,2} = -\dfrac{95}{33} \pm \sqrt{(\dfrac{95}{33})^2 + \dfrac{287 \cdot 33}{33 \cdot 33}} \Rightarrow x_1 = \dfrac{41}{33}, x_2 = -7$.
Da nichtäquivalent umgeformt wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen in die Wurzelgleichung zu überprüfen:
für $x_1$: $\sqrt{\dfrac{18}{33}} - \sqrt{\dfrac{1352}{33}} \neq \sqrt{\dfrac{1682}{33}}$, d.h. $x_1$ ist keine Lösung;
für $x_2$: $\sqrt{42 + 8} - \sqrt{36 - 28} = \sqrt{-28 + 46}$, d.h. $x_2$ ist Lösung; Also ist $\mathbb{L} = \{-7\}$.

b) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 3} + 4 = 0$. Hier braucht man nichts zu rechnen. Da die Wurzel nichtnegativ ist, steht links ein positiver Term, rechts die Null. Also $\mathbb{L} = \emptyset$.

c) $\sqrt{x + \sqrt{2x + 5}} = \sqrt{3x - 1}$.
Quadrieren liefert: $x + \sqrt{2x + 5} = 3x - 1 \Leftrightarrow \sqrt{2x + 5} = 2x - 1$.

Nochmaliges Quadrieren liefert: $2x+5=4x^2-4x+1 \Leftrightarrow 4x^2-6x-4=0 \Leftrightarrow x^2-\dfrac{3}{2}x-1=0$.
Quadratische Gleichung: $x_{1,2}=\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+1} \Rightarrow x_1=2, x_2=-\frac{1}{2}$.
Da nichtäquivalent umgeformt wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen in die Wurzelgleichung zu überprüfen:
für $x_1$: $\sqrt{2+\sqrt{4+5}}=\sqrt{6-1}$, d.h. $x_1$ ist Lösung.
für $x_2$: $\sqrt{-\dfrac{1}{2}+\sqrt{-1+5}} \neq \sqrt{-\dfrac{3}{2}-1}$, d.h. $x_2$ ist keine Lösung. Also ist $\mathbb{L}=\{2\}$.

d) $\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=\dfrac{10}{\sqrt{x+2}}$.
Multiplikation mit $\sqrt{x+2}$ liefert:
$x+2+\sqrt{4x+1}\sqrt{x+2}=10 \Leftrightarrow \sqrt{4x+1}\sqrt{x+2}=8-x$ und quadrieren liefert weiter $(4x+1)(x+2)=64-16x+x^2 \Leftrightarrow 3x^2+25x-62=0 \Leftrightarrow x^2+\dfrac{25}{3}x-\dfrac{62}{3}=0$.
Quadratische Gleichung: $x_{1,2}=-\frac{25}{6}\pm\sqrt{\frac{25^2}{36}+\frac{62}{3}}=-\frac{25}{6}\pm\frac{37}{6} \Rightarrow x_1=2, x_2=-\frac{62}{6}$.
Da nichtäquivalent umgeformt wurde, sind die Lösungen durch Einsetzen in die Wurzelgleichung zu überprüfen:
für $x_1$: $\sqrt{2+2}+\sqrt{8+1}=\dfrac{10}{\sqrt{2+2}}$, d.h. $x_1$ ist Lösung. Also ist $\mathbb{L}_1=\{2\}$.
für $x_2$: $\sqrt{-\dfrac{62}{6}+2}+\sqrt{-\dfrac{62}{6}\cdot 4+1} \neq \dfrac{10}{\sqrt{-\frac{62}{6}+2}}$, da die Diskriminanten auf der linken Seite negativ sind. Also $\mathbb{L}_2=\emptyset$.
Ingesamt: $\mathbb{L}=\{2\}$.

**Aufgabe 4**
a) $2x-8>|x|$, Fall 1: $x\geq 0$: $2x-8>x$, $x>8, \mathbb{L}_1=\{x: x>8\}$.
Fall 2: $x<0$: $2x-8>-x$, $3x>8, \mathbb{L}=\emptyset$.

b) $x^2+x+1\geq 0 \Rightarrow x^2+x+(\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq 0 \Rightarrow (x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq 0, \mathbb{L}=\mathbb{R}$.

c) $|x|\leq x-2$, Fall 1: $x\geq 0$: $x\leq x-2 \Leftrightarrow 0\leq -2$ ist falsch, also $\mathbb{L}=\emptyset$.
Fall 2: $x<0$: $-x\leq x-2$, $2\leq 2x \Leftrightarrow 1\leq x$, also $\mathbb{L}=\emptyset$.

d) $|x-4|>x^2$. Fall 1: $x\geq 4$: $x-4>x^2$, $0>x^2-x+4$ also $0>(x-\frac{1}{2})^2+3\frac{3}{4} \Rightarrow \mathbb{L}=\emptyset$.
Fall 2: $x<4$: $-x+4>x^2 \Leftrightarrow 0>x^2+x-4$ also $0>(x+\frac{1}{2})^2-4\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{17}{4}>(x+\frac{1}{2})^2$, $|x+\frac{1}{2}|<\frac{\sqrt{17}}{2}$, d.h. $-\frac{\sqrt{17}}{2}<x+\frac{1}{2}<\frac{\sqrt{17}}{2}$ also $\mathbb{L}=\{-\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}<x<\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}\}$.
e) $\frac{3}{x-5}<\frac{2}{x+3}$, $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,5\}$. Multiplikation mit HN=$(x-5)(x+3)$ ergibt:
Fall 1: HN$\geq 0$, d.h. ($x\geq 5$ und $x\geq -3$), ergo $x\geq 5$ <u>oder</u> ($x\leq 5$ und $x\leq -3$), ergo $x\leq -3$: $3(x+3)<2(x-5) \Leftrightarrow 3x+9<2x-10 \Leftrightarrow x<-19$, d.h. $\mathbb{L}_1=\{x:\ x<-19\}$.
Fall 2: HN$<0$, d.h. ($x<5$ und $x>-3$), ergo $-3<x<5$ <u>oder</u> ($x>5$ und $x<-3$), ergo kein $x$: $3(x+3)>2(x-5) \Leftrightarrow x>-19$, d.h. $\mathbb{L}_2=\{x:\ -3<x<5\}$.
Insgesamt: $\mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}:\ x<-19 \text{ oder } -3<x<5\}$.

f) $|x^2-1|\leq 4$, $-4\leq x^2-1\leq 4$, $-3\leq x^2\leq 5$, d.h. $-\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5} \Rightarrow \mathbb{L}=\{x\in\mathbb{R}:\ -\sqrt{5}\leq x\leq\sqrt{5}\}$.

**Aufgabe 5**
Es bezeichnen $x$ und $y$ die Seitenlängen der Grundstücke. Dann gilt: Fläche: $x\cdot y=400$, Umfang: $2x+2y\leq 100$. Somit ist $y=\frac{400}{x}$ und weiter die Bedingung $2x+\frac{800}{x}\leq 100$ bzw. nach Multiplikation mit $x$: $2x^2+800\leq 100x \mid :2, -100x \Rightarrow x^2-50x+400\leq 0$. Die Lösung der quadratischen

Gleichung $x^2 - 50x + 400 = 0$ lautet $x_{1,2} = 25 \pm \sqrt{\frac{2500}{4} - 400} = 25 \pm 15$, also $x_1 = 40, x_2 = 10$. Die quadratische Ungleichung $(x-40)(x-10) \leq 0$ besitzt die Lösung $10 \leq x \leq 40$.

**Aufgabe 6**

a) $y = \ln(1 - \dfrac{x}{2}) \Leftrightarrow x = 2(1 - e^y)$,

b) $y = \dfrac{1}{2}(e^{2x} - 1) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\ln(2y + 1)$,

c) $y = \dfrac{e^x}{1 + e^x} \Leftrightarrow x = \ln \dfrac{y}{1 - y}$,

d) $y = \ln(x + 1) + \ln(x - 1) \Leftrightarrow x = \sqrt{1 + e^y}$.

**Aufgabe 7**

a) Es ist $L_H = 10 \cdot \lg \frac{I_0}{I_0} = 0$.

b) Es ist $L_S = 80$ dB $\Rightarrow I_S = I_0 \cdot 10^{\frac{L_S}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^8 = 10^{-4}$.

Weiter ist $L_R = 120$ dB $\Rightarrow I_R = I_0 \cdot 10^{\frac{L_R}{10}} = 10^{-12} \cdot 10^{12} = 1$.

Also ist $\dfrac{I_R}{I_S} = 10^4 = 10000$.

**Aufgabe 8**

Es bezeichne $P(n)$ den Preis eines Artikels nach $n$ Jahren, der 1948 1 DM kostete: $P(1) = 1.027, \quad P(2) = 1.027^2, \quad P(n) = 1.027^n$. Der Zeitraum von Anfang 1948 bis Ende 2001 umfaßt 54 Jahre. Also gilt $P(54) = 1.027^{54} \approx 4.215$. Die Kaufkraft betrug Ende 2001 noch $\frac{1}{4.215} \approx 0.237$, d.h. ca. 24% des unsprünglichen Werts.

Die Hälfte der Kaufkraft hat die DM dann eingebüßt, wenn der Referenzartikel 2DM kostet. Dies liefert die Bedingung für $n$:

$$1.027^n = 2 \Leftrightarrow n \cdot \ln 1.027 = \ln 2 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1.027} \approx 26.$$

Also hat die DM nach ca. 26 Jahren die Hälfte ihres ursprünglichen Werts verloren.