## 1.6.2 Ungleichungen

Multiplikation einer Ungleichung mit $c \neq 0$:

$c > 0$: Ungleichheitszeichen bleibt erhalten

$c < 0$: " dreht sich um

→ Quadratische Ungleichung: $x^2 + ax + b \geq 0$

$\mathbb{L}$ besteht aus

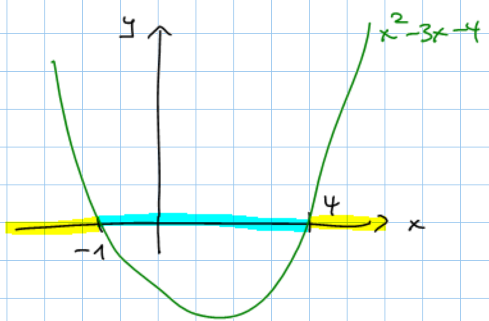
- einem endlichen Intervall oder
- der Vereinigung zweier Halbgeraden oder
- $\mathbb{R}$ oder
- $\emptyset$

Beispiele:

1. $x^2 - 3x - 4 > 0$

Löse $x^2 - 3x - 4 = 0 \iff x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

$x^2 - 3x - 4 = (x-4)(x+1)$



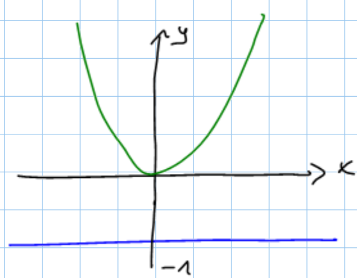

$\iff (x-4)(x+1) > 0$

$\mathbb{L} = (-\infty, -1) \cup (4, \infty)$

2. $x^2 - 3x - 4 < 0$

$(x-4)(x+1) < 0$ für $x \in (-1, 4)$

$\mathbb{L} = (-1, 4)$




3. $x^2 > -1$ : $\mathbb{L} = \mathbb{R}$

4. $x^2 < -1$ : $\mathbb{L} = \emptyset$

→ **Rationale Ungleichungen**

Beispiel: $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 2$ für $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Fall 1: $x > 1$: $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 2 \quad | \cdot (x-1)$

$\Leftrightarrow \quad x+1 \leq 2x-2$

$\Leftrightarrow \quad 3 \leq x$ also $\mathbb{L}_1 = [3, \infty)$

Fall 2: $x < 1$: $\dfrac{x+1}{x-1} \leq 2 \quad | \cdot (x-1) < 0$ !

$x+1 \geq 2x-2$

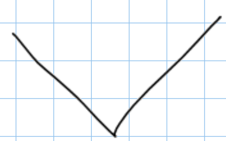
$3 \geq x$ also $\mathbb{L}_2 = (-\infty, 1)$

$\Rightarrow \quad \mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 1) \cup [3, \infty)$

→ **Betragsungleichung**

Beispiel: $\dfrac{1-|x-2|}{|x-3|} \leq \dfrac{1}{2}$ für $x \neq 3$

$\Leftrightarrow \quad 1-|x-2| \leq \frac{1}{2}|x-3|$ für $x \neq 3$




| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| $(x-2)$: | $-$ | $+$ | $+$ |
| $(x-3)$: | $-$ | $-$ | $+$ |

Fall 1: $x \leq 2$: $1-|x-2| \leq \frac{1}{2}|x-3|$

$\Leftrightarrow \quad 1-(-(x-2)) \leq \frac{1}{2}(-(x-3))$

$\Leftrightarrow \quad 1+x-2 \leq -\frac{x}{2}+\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}x \leq 5/2 \quad | \cdot 2/3$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 5/3$ $\qquad \mathbb{L}_1 = (-\infty, 5/3]$

**Fall 2:** $2 < x \leq 3$ :

$$1 - |x-2| \leq \frac{1}{2}|x-3|$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - (x-2) \leq -\frac{1}{2}(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2} \leq \frac{x}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \qquad \mathbb{L}_2 = \emptyset \quad \text{da } x \neq 3$$

(s.o.)

**Fall 3:** $x > 3$ :

$$1 - |x-2| \leq \frac{1}{2}|x-3|$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - (x-2) \leq \frac{1}{2}(x-3)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{9}{2} \leq \frac{3}{2}x \qquad \Big| \cdot \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \geq 3 \qquad \mathbb{L}_3 = (3, \infty)$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 \cup \mathbb{L}_3 = \left(-\infty, \frac{5}{3}\right] \cup (3, \infty).$$

## 2. Mathematische Beweismethoden

### 2.1 Elementare Logik: → siehe Skript

### 2.2 Mathematische Beweise:

#### 2.2.1 Direktes Beweis

Zu zeigen: $A \Rightarrow B$

Methode: Überführe A durch logische Schlusskette nach B

$$A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow A_n \Rightarrow B$$

Beispiel: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ gilt

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

A: „$a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$"  B: „$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$"

$$A \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0$$

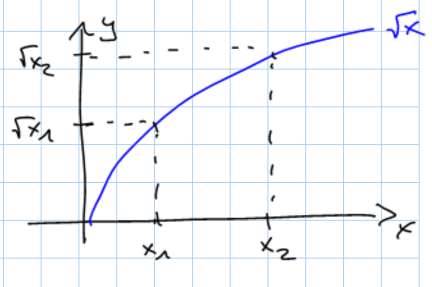
$$\Rightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \quad | + 4ab$$

$$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \quad | : 4$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{4} \underset{(A)}{\geq} ab \quad | \sqrt{\cdots}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$



## 2.2.2 Indirektes Beweis

Beispiel: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ gilt

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Gegenteil: Es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a, b \geq 0$ mit

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

Annahme des logischen Gegenteils:

Angenommen es existiert $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$ mit

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{ab} \quad \Big| \cdot 2$$

$$\Rightarrow (0<) \quad a+b < 2\sqrt{ab} \quad \Big| \, ()^2$$

$$\Rightarrow \quad (a+b)^2 < 4ab$$

$$\Rightarrow \quad a^2 + 2ab + b^2 < 4ab \quad \Big| -4ab$$

$$\Rightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 < 0$$

$$\Rightarrow \quad (a-b)^2 < 0 \qquad ϟ$$

$a, b \in \mathbb{R}$ kann nicht gelten, da Quadrate reeller Zahlen nichtnegativ sind.

## 2.3 Vollständige Induktion

Oft treten Aussagen auf, die eine natürliche Zahl als Parameter enthalten:

$$A(n): \quad 2^n \geq n, \quad n \in \mathbb{N}$$

Prinzip der Induktion: Jede Menge $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$ ist gleich $\mathbb{N}$, d.h. $M = \mathbb{N}$

→ Induktionsbeweis:

(I) Induktionsanfang: Zeige: $A(1)$ ist wahr

(II) Induktionsannahme: $A(n)$ sei richtig für ein $n \in \mathbb{N}$

(III) Induktionsschluss: Zeige: $A(n+1)$ ist richtig, d.h.

$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

Insgesamt: $A(1) \Rightarrow A(2) \Rightarrow A(3) \Rightarrow \ldots$