1.2 Zahlenmengen

Bekannt sind:

Rechenoperationen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ natürliche Zahlen $+, \cdot$

$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ " " mit 0 $+, \cdot$

$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ ganze Zahlen $+, \cdot, -$

$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ rationale Zahlen $+, \cdot, -, :$

klar: $\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Beispiele:

a) in $\mathbb{N}$: $1 + 1 = 2$, $1 \cdot 2 = 2$, $x + 2 = 1$ nicht lösbar

b) in $\mathbb{Z}$: $1 - 3 = -2$, $(-3) \cdot (-2) = 6$ $\cancel{-3 \cdot -2}$

$x \cdot 3 = 1$ nicht lösbar

c) in $\mathbb{Q}$:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{7} = \frac{7}{21} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{13} = \frac{1 \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 13} = \frac{1}{13}$$

$$\frac{1}{2} : \frac{2}{13} = \frac{1}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{13}{4}$$

Üben Sie Bruchrechnen!

1.3 Natürliche Zahlen

→ Primzahlen

Def: Eine natürliche Zahl größer 1, die nur durch sich selbst und durch 1 ohne Rest teilbar ist heißt Primzahl

Primzahlen: $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots$

Satz: Jede natürliche Zahl $a \in \mathbb{N}$ läßt sich eindeutig als Produkt aus lauter Primzahlen darstellen:

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \,, \qquad p_k: \text{ Primzahl}$$

Beispiele: $4 = 2 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$, $17 = 17$

→ Fakultät und Binomialkoeffizient

Def: Die Fakultät einer natürlichen Zahl n ist erklärt durch

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1$$

Zusätzlich $0! := 1$.

Beispiele: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Def: Es sei $n \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}_0$, $n \geq k$. Dann heißt

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!\, k!}$$

der Binomialkoeffizient von n und k, gelesen:

„n über k".

Für $n < k$: $\binom{n}{k} := 0$.

Beispiele:

1. Es gilt die Rekursion

$$n! = \underline{n \cdot (n-1)!} = \underline{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!} \qquad \text{denn}$$

$$n! = n \cdot \underbrace{(n-1) \cdot \overbrace{(n-2) \cdots 2 \cdot 1}^{=(n-2)!}}_{=(n-1)!}$$

2. $n!$ wächst sehr schnell mit n:

$5! = 120$, $20! = 2.43 \cdot 10^{18}$

3. $\binom{3}{2} = \frac{3!}{(3-2)!\,2!} = \frac{3 \cdot \cancel{2!}}{1! \cdot \cancel{2!}} = 3$

$\binom{11}{8} = \frac{11!}{(11-8)!\,8!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot \cancel{8!}}{3!\,\cancel{8!}} = \frac{11 \cdot \cancel{10}^{5} \cdot \cancel{9}^{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 165$

Satz: Es gilt

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

2. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$

3. $\binom{n}{n-1} = \binom{n}{1} = n$

Beweis: Einsetzen in die Definition

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!}$$

$$= \binom{n}{n-k}$$

alternativ: $\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-(n-k))!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!\,0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1$, $\binom{n}{n} = \frac{n!}{\underbrace{(n-n)!}_{=0!=1}\,n!} = 1$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!\,(n-1)!} = \frac{n!}{1 \cdot (n-1)!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!}} = n$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \frac{n\,\cancel{(n-1)!}}{\cancel{(n-1)!} \cdot 1} = n.$$

$\square$

Übg.:

(2)

(a) $\frac{-8x(x^2-x)}{4x^2} = -\frac{8\cancel{x^2}(x-1)}{4\cancel{x^2}} = -2(x-1) = -2x+2$

(b) $\frac{6x+8x^3-x^2}{2x^2} = \frac{\cancel{x}(6+8x^2-x)}{2\cancel{x}x} = \frac{6+8x^2-x}{2x}$

(3)

(a) $(-2x^2)^3(-3x^{-5})^2 \cdot \frac{1}{x^7} = (-8)x^6 \cdot 9x^{-10} \cdot \frac{1}{x^7} = \frac{-72}{x^{11}}$

(b) $2(x-3y)^2 - (4x^2y + 5y^2)$

$= 2(x^2 - 6xy + 9y^2) - 4x^2y - 5y^2$

$= 2x^2 - 12xy + 18y^2 - 4x^2y - 5y^2$

$= 2x^2 - 12xy + 13y^2 - 4x^2y$

(4) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{x^6}}} = \left(\left((x^6)^{1/2}\right)^{1/4}\right)^{1/3} = x^{6\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}} = x^{1/4}$

$= \sqrt[4]{x}$

(5) $16^{-1/4} = \frac{1}{16^{1/4}} = \frac{1}{2}$

(6) $f(x) = \frac{(x+2)^4(x-3)(x^2-1)}{x+4}$, $D(f) = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$

$\frac{(x+2)^4(x-3)(x^2-1)}{x+4} = 0$ $\qquad \mathbb{L} = \{-2, 3, 1, -1\}$

$x^2-1 = (x+1)(x-1)$

(7) (a) $x^2 - 6x + 12 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 3 \pm \sqrt{9-12} \notin \mathbb{R}$

$\mathbb{L} = \emptyset$

(b) $9 + \sqrt{x} = 0 \implies \sqrt{x} = -9 \qquad \mathbb{L} = \emptyset$

(c) $\frac{1}{x} < 3 \quad | \cdot x$

<u>Fall 1</u>: $x > 0$: $\frac{1}{x} < 3 \quad | \cdot x \implies 1 < 3x \implies x > \frac{1}{3}$

$$\mathbb{L}_1 = \left(\tfrac{1}{3}, \infty \right)$$

<u>Fall 2</u>: $x < 0$: $\frac{1}{x} < 3 \quad | \cdot x \implies 1 > 3x \implies x < \frac{1}{3}$

$$\mathbb{L}_2 = (-\infty, 0)$$

$$\mathbb{L} = \mathbb{L}_1 \cup \mathbb{L}_2 = (-\infty, 0) \cup (1/3, \infty)$$