

Zusatzübung 1

Gleichungen und Ungleichungen

Mathematik 1

Grundlagen Analysis

1 Binomische Formeln

1. Binomische Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

2. Binomische Formel

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

3. Binomische Formel

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Binomischer Satz

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \dots + \binom{n}{n-1} a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n} a^0 b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k\end{aligned}$$

Die Berechnung der Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ erfolgt dabei nach der Formel:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n - k)!}$$

Wichtige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k} \quad \text{Symmetrie}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

2 Potenzgesetze

2.1 Potenzen mit natürlichen Exponenten

1. Potenzgesetz

$$\begin{aligned} a^m \cdot a^n &= a^{m+n} \\ \frac{a^m}{a^n} &= a^{m-n} \end{aligned} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2. Potenzgesetz

$$\begin{aligned} a^n \cdot b^n &= (a \cdot b)^n \\ \frac{a^n}{b^n} &= \left(\frac{a}{b}\right)^n \end{aligned} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

3. Potenzgesetz

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad \text{mit } m, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.2 Potenzen mit ganzzahligen Exponenten

$$\begin{aligned} a^0 &= 1 \\ a^{-n} &= \frac{1}{a^n} \end{aligned} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

2.3 Potenzen mit rationalen Exponenten

$$\begin{aligned} a^{\frac{1}{n}} &= \sqrt[n]{a} \\ a^{\frac{m}{n}} &= \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \end{aligned} \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}_0^+$$

3 Logarithmusgesetze

Für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} a^b = c &\Leftrightarrow a = \sqrt[b]{c} \\ &\Leftrightarrow b = \log_a c \end{aligned}$$

1. Logarithmusgesetz

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \text{mit } a, x, y \in \mathbb{R}^+$$

2. Logarithmusgesetz

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad \text{mit } a, x, y \in \mathbb{R}^+$$

3. Logarithmusgesetz

$$\log_a (x^n) = n \cdot \log_a x \quad \text{mit } n \in \mathbb{R}, a, x \in \mathbb{R}^+$$

Außerdem gilt:

$$\log_a 1 = 0$$

$$a^{\log_a x} = x$$

$$\log_a (a^x) = x$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \frac{\lg x}{\lg a} = \frac{\ln x}{\ln a} = \dots$$