Setze $l = n-k$ bzw. $k = n-l$

Dann: $k=0 \Rightarrow l=n$

$k=n \Rightarrow l=0$

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{l=n}^{0} a_{n-l} = \sum_{l=0}^{n} a_{n-l}$$

Umkehrung der Summationsreihenfolge

3. Zeigen Sie $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n$$
$$S = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1$$

$$2S = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n}$$

$$2S = n(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} k$$
$$S = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$$

$$2S = \sum_{k=0}^{n} (\underbrace{n-k+k}_{=n})$$
$$= n \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{n+1} = n(n+1)$$

$$\Rightarrow S = \frac{n(n+1)}{2}$$

4. Zeigen Sie die geometrische Summenformel

$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad q \neq 1$$

$$S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$$
$$q \cdot S = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$

$$\underbrace{q \cdot S - S}_{(q-1)\cdot S} = q^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}, \quad q \neq 1$$

$$S = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{n} q^k$$

$$qS = \sum_{k=0}^{n} q^{k+1} = q^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} q^{k+1} = \sum_{k'=1}^{n} q^{k'} = \sum_{k=1}^{n} q^k$$

$k' = k+1$

$k=0: k'=1$

$k=n-1: k'=n$

$$qS - S = q^{n+1} - 1 \Rightarrow S = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Sei $|q| < 1$, d.h. $-1 < q < 1$: $q^{n+1} \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{0-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}.$$

Paradoxon von Zeno

Achilles läuft $v_a = 10 \frac{m}{s}$, $s_a = v_a \cdot t$

Schildkröte lauf $v_s = 1 \frac{m}{s}$, Vorsprung: 10m $s_s = 10 + v_s \cdot t$

$t=0$	$s_a = 0$	$s_s = 10$
1	$s_a = 10$	$s_s = 11$
0.1	$s_a = 11$	$s_s = 11{,}1$
0.01	$s_a = 11{,}1$	$s_s = 11{,}11$
0.001	$s_a = 11{,}11$	$s_s = 11{,}111$
⋮		

"langweilige" Rechnung:

$s_a = s_s$

$v_a \cdot t = 10 + v_s \cdot t$

$10 \cdot t = 10 + t$

$9t = 10$

$t = \frac{10}{9} = 1{,}\overline{1}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 0.1^k = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{10}{9} = 1{,}\overline{1}$$

Produktzeichen

Def.: Es seien $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Dann setzen wir

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$\prod$: „Pi", Produktzeichen

Beispiele:

1. $\prod_{k=1}^{3} 2k = 2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$

2. $\prod_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n = n!$

3. $\prod_{k=1}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ Faktoren}} = a^n$

4. $\prod_{k=1}^{n} a_k = \prod_{k=1+l}^{n+l} a_{k-l}$ Indexverschiebung

5. $\prod_{k=-1}^{2} (k+2) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$

6. $\prod_{k=m}^{n} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-m+1 \text{ Faktoren}} = a^{n-m+1}$; $\prod_{k=3}^{5} a = a \cdot a \cdot a = a^3$
$= a^{5-3+1}$

7. $\prod_{k=1}^{5} 2x^k = \prod_{k=1}^{5} 2 \prod_{k=1}^{5} x^k = 2^5 \cdot x \cdot x^2 \cdot \ldots \cdot x^5 = 2^5 \cdot x^{1+2+3+4+5}$
$= 2^5 \cdot x^{15}$

→ Binomische Formeln

Sei $a,b \in \mathbb{R}$:

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ erste binomische Formel

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ zweite " "

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ dritte " "

$$
\begin{aligned}
(a+b)^3 &= (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2+2ab+b^2) \\
&= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 \\
&= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
&= \binom{3}{0} a^3 + \binom{3}{1} a^2 b + \binom{3}{2} ab^2 + \binom{3}{3} b^3 \\
&= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} \cdot b^k
\end{aligned}
$$

Satz (Binomischer Lehrsatz)

Für $a,b \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$
\begin{aligned}
(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k} = (b+a)^n
\end{aligned}
$$

Pascalsche Dreieck

$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

$$\binom{0}{0}$$
$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$
$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$
$$\binom{4}{0} \quad \binom{4}{1} \quad \binom{4}{2} \quad \binom{4}{3} \quad \binom{4}{4}$$

Bildungsgesetz:
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ziel
$$\frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!}$$

Nachweis:

$$\frac{n!}{(n-k)!\;k!} + \frac{n!}{\underbrace{(n-(k+1))}_{n-k-1}!\;(k+1)!} = \frac{n!\,(k+1) + n!\,(n-k)}{(n-k)!\quad(k+1)!}$$