[1. Basic Linear Algebra]

2023 2863 배기웅

- Contents
  - Cauchy-Schwarz inequality
  - Orthogonal basis
  - Column, row, and null spaces
  - Rank and determinant of matrix
  - Properties of rank
  - Properties of determinant
  - Trace

* Cauchy-Schwarz inequality

- V를 내적 공간이라고 할 때,
  - $|\langle x, y\rangle|^2 \le \|x\|^2 \|y\|^2, \forall x, y \in V$
  - $|x^T y|^2 \le \|x\|_2^2 \cdot \|y\|_2^2, \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$

    Q. 왜 =가 아니라 ≤이지?

* Orthogonal basis

- $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$가 내적 공간 $\mathcal{L}$에 있고, $\langle x_i, x_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$ 이면, orthogonal하다고 함.
- 그리고 이 기저 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$들의 $\|x_i\| = 1$이면 orthonormal하다고 함.
- 만약 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$가 $\mathcal{L}$의 orthonomal 기저이고 $y \in \mathcal{L}$ 이면,

  $y = \langle x_1, y\rangle x_1 + \cdots + \langle x_k, y\rangle x_k$로 분해시킬 수 있음.

  ↳ Q. 이게 무슨 의미지?

  $y = x_1^T \cdot y \cdot x_1 + x_2^T \cdot y \cdot x_2 + \cdots + x_k^T \cdot y \cdot x_k = k \cdot y.$

• Column, row and null spaces.

- $\mathcal{C}(A)$: A의 column space
  - A의 column들에 의해 생성된 선형 subspace
  - $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ 일 때 $[(1,2,3), (4,5,6), (7,8,9)]$

- $R(A)$: A의 row space
  - A의 row로 인해 생성된 선형 subspace.
  - A^T의 column space
  - $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ 일 때 $[(1,4,7), (2,5,8), (3,6,9)]$

- $\mathcal{N}(A)$: A의 null space
  - $Ax = 0$을 만족시키는 x.

    Q. 예시를 들어주세요...

    A. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ 일 때 $N(A)$는 $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0.$

    $x_1 + 3x_2 = 0$

    $2x_1 + 4x_2 = 0$

* Null space (영공간)

- $Ax=0$을 만족시키는 x의 집합
- $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $Ax= x_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$x=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \dots c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$x_n = c\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($N(A)$와 $C(A)$는 완전히 다른 차원)

- A가 $m\times n$ 행렬 일 때, $\dim(N(A)) = n-r$, $\dim(N(A)) + \dim(R(A)) = n$ $\boxed{}$

Ex) $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $r=2, n=2$ → $N(A)$는 0차원

- $N(A) \perp R(A)$

* Rank and determinant of a matrix.

- $A \in \mathbb{R}^{n\times p}$ 일 때, $\dim(C(A)) = \dim(R(A))$
- 이 때, $\text{rank}(A)$는 $\dim(C(A))$ 임.
- 행렬 A의 determinant는 다음과 같음.

$$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, \quad \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi)\, a_{1\pi(1)} a_{2\pi(2)} \cdots a_{n\pi(n)}$$

Q. 이게 무슨 기호?

Ⓐ. $\pi = \{1, 2, \dots, n\}$. you can ignore

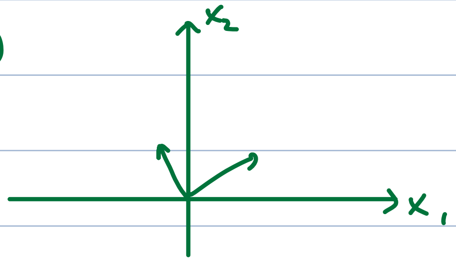
$\sum_1 \text{sgn}(1) \cdot a_{11} a_{21} \cdots a_{n1}$

* rank (행렬의 계수)

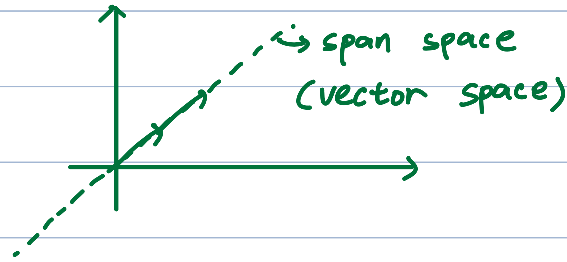
- 행렬이 가지는 independent한 column의 수, $\dim(C(A))$, $\dim(R(A))$
- ☆ • independent 한 column의 수 = independent한 row의 수 ($\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$)
- Ex) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(A) = \dim(C(A)) = 1$, $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{rank}(B) = 2$

* Linear combination

- $a_1 V_1 + a_2 V_2 + a_3 V_3$ (이렇게 선형조합하는 것, span 하는 것)
- Ex)



만약 $V_1 = (1,1)$ $V_2 = (2,2)$이면?



* Linear Independent

- orthogonal ⊂ Independent
- $a_1 v_1 + a_2 V_2 = 0$ 이면, V_1과 V_2는 dependent.

* basis

- 어떤 공간을 이루는 필수적인 구성요소
- 대표적인 2차원 내 basis : $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

* Properties of rank

- $A, B \in \mathbb{R}^{n \times p}$일 때, 아래 특징들을 가짐

$A = n\overset{p}{\begin{bmatrix} n \times p \end{bmatrix}}$, $rank(A) = r$.

① $rank(A) \leq min(n, p)$

② $rank(A) = rank(A^T)$

Ⓐ $rank(A) = dim(C(A)) = r$, $dim(R(A)) = n - r$.

③ $rank(A) + dim(N(A)) = p$ → Q. 이거 증명 필요

④ 만약 $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 이면,

Q. 이게 무슨 의미?

- $rank(A) = n$, $det(A) \neq 0$, A는 nonsingular하며 A^{-1}가 존재.

⑤ $rank(A, B) = rank(A)$ if B is nonsingular

Ⓐ A^{-1}가 존재하면, A는 Invertible matrix or Non singular matrix 임.

⑥ $rank(A, B) = rank(B)$ if A is nonsingular

⑦ $rank(A, B) \leq min\{rank(A), rank(B)\}$

Ex) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$은 singular matrix ($\because det(A) = 0$)

⑧ $rank(A^T A) = rank(AA^T) = rank(A)$

* Properties of determinant

- $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 일 때, 아래 특징을 가짐.

① Multilinear

- $\det(a_1, a_2, .., ca_i + d, \dots, a_n)$

$$= c\cdot\det(a_1, \dots, a_n) + \det(a_1, \dots, d, \dots, a_n)$$

② Alternating

- $\det(a_1, \dots, ca_i+d, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, ca_i+d, \dots, a_n)$

③ Normalized

- $\det(I_n) = 1$

④ $\det(cA) = c\cdot\det(A)$

⑤ $\det(A) = \det(A^T)$

⑥ $\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B)$

⑦ $\det(A^{-1}) = [\det(A)]^{-1}$

⑧ A 가 triangular 하면 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

⑨ λ_i가 A의 고유값이면 $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

* Trace

- $tr(A)$로 표기하며, A의 dialog 요소들의 합.
- 아래와 같은 특징 존재

① $tr(A) = tr(A^T)$

② $tr(A+B) = tr(A) + tr(B)$

③ $tr(AB) = tr(BA)$

④ $tr(AA^T) = tr(A^TA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = \|A\|_F^2$

⑤ $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$