13. Valuing Stock Options : The Black-Scholes-Merton Model

Assumptions Underlying Black-Scholes

블랙숄즈 모형에서는 주식가격이 랜덤으로 움직인다고 가정한다.

Δt동안 주식가격의 변동은 ΔS라고 정의한다. 그리고 그 시간 동안의 수익률은 $\Delta S/S$다.

매우 짧은 Δt시간 동안 수익률 $\Delta S/S$는 평균 $\mu \Delta t$ 그리고 $\sigma\sqrt{\Delta t}$를 따른다. ($\frac{\Delta S}{S}$ ~$N(\mu\Delta t, \sigma^2\Delta t)$)

The Lognormal Property

$\frac{dS}{S}$ ~ $N(\mu dt, \sigma^2 dt)$

$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dZ$

시간차를 두고 생각하면 다음과 같다

$lnS_T - lnS_t$(=$ln\frac{S_T}{S_t}$)~$N(((\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)), \sigma^2(T-t))$

lnS_T ~ $N(lnS_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})(T-t), \sigma^2(T-t))$

> lnS_T가 정규분포를 따르므로, S_T는 로그정규분포를 따른다.

The Volatility

변동성은 1년동안 연속복리에 기반한 수익률 분포의 표준편차이다.

$ln\frac{S_T}{S_t}$의 표준편차는 $\sigma\sqrt{T-t}$

$\frac{\Delta S}{S}$의 표준편차는 $\sigma\sqrt{\Delta t}$이다.

Estimating Volatility from Historical Data

1. τ년의 간격으로 주식가격 $S_0, S_1, .., S_n$을 관찰한다.
2. 연속복리 수익률을 다음과 같이 정의한다
   $u_i = ln(\frac{s_i}{s_{i-1}})$
3. u_i의 표준편차를 계산한다.
4. 변동성 추정은 다음과 같이 나온다.
   $\hat{\sigma} = \frac{s}{\sqrt{\tau}}$

예를 들어, 21일 동안 관찰한 주식가격의 표준편차가 0.01216이라고 하자.

이때 $\tau = \frac{1}{252}$이므로, 변동성은
$\hat{\sigma} = 0.01216 * \sqrt{252} = 0.193$이다.

따라서 추정된 변동성은 19.3%이다.

The Concepts Underlying Black-Scholes

옵션 가격과 주식가격은 같은 기초자산의 불확실성에 기반을 둔다.

불확실성을 제거하는 주식과 옵션으로 구성된 무위험 포트폴리오를 형성할 수 있다.

무위험 포트폴리오로부터의 수익률은 무위험이자율이어야 한다.

The Black-Scholes Formulas

European 콜옵션의 가격은 다음과 같다.

$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}[max(S_T - K, 0)] = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$

$d_1 = \frac{ln(S/K)+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$d_2 = \frac{ln(S/K)+(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

그리고 $\hat{E}$는 무위험 세계에서 기댓값이다.

$N(x) = P(Z < x)$

European 풋옵션의 가격은 다음과 같다.

$p = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$

American 옵션에 대해서는 따로 공식이 존재하지 않다.

> 예제
> 현재 주식가격은 42달러, 행사가격은 40달러, r은 10%, 변동성은 연간 20%이다. 만기는 6개월이다. 이때 옵션 가격은?
>
> ☑
>
> $d_1 = \frac{ln(42/40)+(0.1+\frac{0.2^2}{2})*0.5}{0.2*\sqrt{0.5}} = 0.7693$
>
> $d_2 = \frac{ln(42/40)+(0.1-\frac{0.2^2}{2})*0.5}{0.2*\sqrt{0.5}} = 0.6278$
>
> $c = 42N(0.7693) - 40e^{-0.1*0.5}N(0.6278) = 4.76$
>
> $p = 40e^{-0.1*0.5}N(-0.6278) - 42N(-0.7693) = 0.81$

Implied Volatility

European 옵션 가격에 의해 증폭된 변동성은 블랙숄즈모형이 주어졌을 때 옵션 가격을 알려주는 변동성이다.

European Options on Dividend Paying Stocks

> 예제
> 주식가격이 40달러이고, 행사가격이 40달러이며, 만기는 6개월, 배당금은 2개월 5개월마다 0.5달러라고 하자. 변동성은 연간 30%, 무이자 위험률은 9%이다. 이때 콜옵션의 가격은? >> 3.67달러