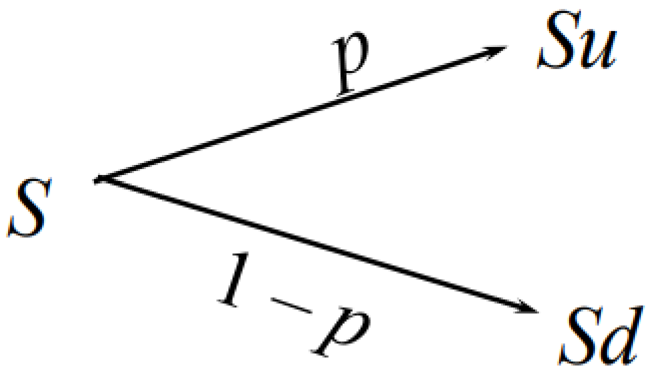
18. Binomial Trees in Practice

Binomial Trees

Binomial Tree는 주식이나 다른 자산의 가격의 움직임을 추정할 때 주로 사용된다.

매우 작은 간격동안 u만큼 오르거나 d만큼 내려갈 것이라고 가정한다.



Risk-neutral Valuation

여기서는 변수로 p, u, d를 골랐는데, 이를 통해 binomial tree는 risk-neutral world 에서 주식가격 변화에 평균과 표준편차에 대한 정확한 값을 알려줄 수 있다.

Determination of p, μ, d

Δt시간 동안, 주식의 기대 수익은 무이자 위험율이다.
$e^{r\Delta t} = pu + (1-p)d$

Δt시간 동안, 주식 가격의 수익의 변동성은 $\sigma^2 \Delta t$이다.
$\sigma^2 \Delta t = pu^2 + (1-p)d^2 - [pu + (1-p)d]^2$

Cox, Ross 그리고 Rubinstein에 의해 사용된 세번째 조건은 다음과 같다.
$u = \frac{1}{d}$

Δt가 매우 작을 때, 방정식의 해는 다음과 같다.

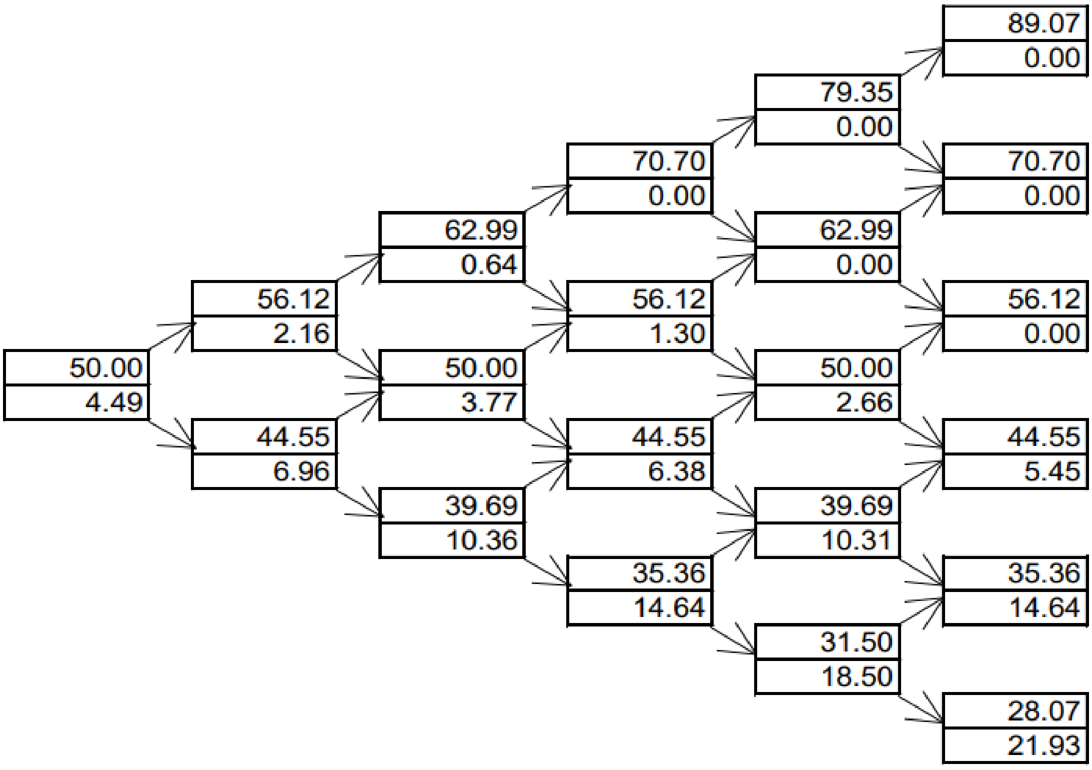
$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$
$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$
$p = \frac{a-d}{u-d}$
$a = e^{r\Delta t}$

Backward Induction

우리는 Binomial Tree에서 마지막 노드의 옵션의 가치를 안다.

이를 기점으로 risk-neutral valuation을 이용해 각 노드의 옵션의 가치를 계산한다.

> ❓ 예제
>
> $S_t = 50, K = 50, r = 0.1, \sigma = 0.4, T - t = \frac{5}{12}, \Delta t = \frac{1}{12}(0.0833\text{year})$인 풋옵션이 있다. 이를 Binomial Tree로 나타내어라.

> $u = e^{\sigma\Delta t} = e^{0.4*\sqrt{0.0833}} = 1.1244$
> $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.8909$
> $a = e^{0.1*0.0833} = 1.0084$
> $p = \frac{1.0084-0.8909}{1.1244-0.8909} = 0.5032$
>
> 
>

Calculation of Delta

Δ는 Δt 일때 노드로부터 계산된다.
$\Delta = \frac{\Delta f}{\Delta S} = \frac{f_{1,1}-f_{1,0}}{S_0u-S_0d}$

위의 예시에선 $\frac{2.16-6.96}{56.12-44.55} = -0.41$이다.

Calculation of Gamma

Γ는 $2\Delta t$시기의 노드로부터 계산된다. Γ는 Δ의 변화량이다.

1. 우선 첫 번째 Δ_1값을 구한다.
   $\Delta_1 = \frac{f_{2,2}-f_{2,1}}{S_0u^2-S_0}$
2. 두 번째 Δ_2를 구한다.
   $\Delta_2 = \frac{f_{2,1}-f_{2,0}}{S_0-S_0d^2}$
3. Gamma값을 구한다.
   $\Gamma = \frac{\Delta Delta}{\Delta S} = \frac{\Delta_1-\Delta_2}{\frac{S_0u^2+S_0}{2}-\frac{S_0+S_0d^2}{2}} = \frac{\Delta_1-\Delta_2}{\frac{S_0u^2-S_0d^2}{2}}$

> 예제
>
> $\Delta_1 = \frac{0.64-3.77}{62.99-50} = -0.24, \Delta_2 = \frac{3.77-10.36}{50-39.69} = -0.64$
>
> $\Gamma = \frac{-0.24-(-0.64)}{\frac{62.99-39.69}{2}} = 0.0343$

Calculation of Theta

Θ는 다른 변수는 변하지 않는 상태에서 시간의 변화에 따른 파생상품 가치의 변화율을 나타낸다.

Θ는 0일때와 $2\Delta t$의 노드로부터 계산된다.

$\Theta = \frac{f_{2,1} - f_{0,0}}{2\Delta t}$

> 예제
>
> $\Theta = \frac{3,77 - 4.49}{2*0.0833} = -4.3$

Calculation of Vega

Vega는 변동성의 변화에 따른 파생상품 가치의 변화율을 나타낸다.

40%대신에 41%의 변동성을 이용해서 새로 Tree를 만들어본다.

옵션의 가치는 4.49에서 4.62로 변한다. 따라서 Vega는 4.62-4.49=0.13=1%이다.

Trees and Dividend Yield

만약 주가의 배당률이 q라고 하면, tree는 동일하게 구성되지만 a는 다음과 같이 된다. $a = e^{(r-q)\Delta t}$

- q는 주가의 배당률이다.
- 외국통화에 대해서 q는 외국의 무이자 위험률이다.
- 미래 계약의 옵션에 대해서 $q = r$

Alternative Binomial Tree

Binomial Tree에서는 $u = \frac{1}{d}$를 사용하였다. 위의 식말고 아래 2개의 식을 사용할 수 있다.

$u = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}$

$d = e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}$