

3. 선물상품을 이용한 헷징 전략

3.1 Basic Principles

What is Hedging?

헷징이란 : 가격변동에 따른 재산가치 변화의 위험성을 회피할 수 있는 방법

예시

금 100온스를 900달러/온스에 구입한 투자자A는 가격변동에 따른 위험에 직면한다. 금의 현물가격에 떨어지게 되면 손해를 입기 때문이다. 이러한 경우를 방지하기 위해 헷징을 한다.

금의 가격이 900달러/온스에서 890달러/온스로 온스 당 10달러가 하락했다. 10계약을 체결했다면, 100달러의 손해가 발생한다.

그런데 만약에 투자자가 선물계약을 920달러/온스에 Short Position을 체결하고 910달러/온스로 선물가격이 온스 당 10달러가 하락하였다. 이렇게 되면 910달러의 금을 920달러에 판매할 수 있으므로 온스 당 10달러의 이익이 발생하고, 10계약 체결하였으므로 100달러의 이익이 발생한다.

따라서 최종 순이익은 $100 - 100 = 0$ 이므로, 금 가격 변동에 따른 재산가치의 변화를 회피할 수 있다.

반대로, 금 현물가격이 900달러/온스에서 910달러/온스로 상승하고, 선물가격이 920달러/온스에서 930달러/온스로 상승하게 되면 이것 역시 재산가치의 변동이 0이 된다.

위와 같은 경우를 Perfect Hedging이라고 한다.

Perfect Hedging

Perfect Hedging이란 선물을 통해 헷징할 때 불확실성을 완전히 제거하는 방법이며, 가격이 상승하거나 하락하더라도 자산가치는 변화가 없는 경우를 말한다.

예시

금 100온스를 900달러/온스에 구입하여 소유하고 있다. 이 투자자는 가격변동에 따른 재산가치 변화의 위험성을 회피하기 위해 6개월 만기 100온스 선물계약을 체결하였다. 현재 금의 선물가격은 910달러/온스이다. 이 투자자는 Short Position을 취한다. 이 때 두 가지 상황을 가정한다.

첫 번째 가정은 금의 현물가격이 890달러/온스로 하락하고, 금 선물가격도 900달러/온스로 하락한 경우이다. 이 때 현물가격 하락으로 인해 1000달러의 손해를 입었지만 금 선물가격도 하락하여 1000달러의 이익을 얻었고 결과적으로 자산가치의 변화는 없다.

두 번째 가정은 금의 현물가격 920달러/온스로 상승하고, 금 선물가격도 930달러/온스로 상승한 경우이다. 이때 현물가격 상승으로 2000달러의 이익을 얻지만 선물계약으로 인해 2000달러의 손실이 생기므로 이것 역시 결과적으로 자산가치의 변화는 없다.

Perfect 헷징은 실생활에서는 일어나기 불가능하다. 기본적으로 현물가격과 선물가격의 변화 방향이 같더라도 변동폭이 무조건 같아야 이루어질 수 있기 때문이다.

Short Hedges

- **Short Hedges** : 선물 계약에서 short position을 취해 손실을 막는 헷징방법이다.
- short hedging은 hedger가 자산을 소유하고 있고, 미래에 자산을 판매하려고 할 때 사용한다.
- A short hedge can be used when an asset is not owned right now but will be owned at some time in the future

예시

5월 15일에 Company X는 백만 배럴을 8월 15일에 판매한다고 계약하였다. 5월 15일 현물가격은 60달러/barrel이고 8월 15일 선물가격은 59달러/barrel이다. contract size는 1000배럴/contract이다.

Company X는 **1000개의 future short position**을 계약하며 8월 15일에 position을 close out한다. 8월 15일의 선물가격은 59달러/배럴이다.

- (상황-1) 8월 15일 현물 가격이 55달러인 경우
- 현물가격은 55달러인데 선물가격 59달러에 판매한다. 이로 인해 4달러/barrel의 이익이 발생한다.
- 이로 인해 4000달러 이득
- (상황-2) 8월 15일 현물 가격이 65달러인 경우
- 현물 가격은 65달러인데 59달러에 판매한다. 따라서 배럴당 6달러의 손해가 발생한다.
- 이로 인해 6000달러 손해

정리하자면,

- 현물가격과 선물가격이 **하락**하는 경우의 short hedge
미래에 short position을 취하는 경우, **현물가격이 하락하게 되면** 내가 가진 자산의 가치가 **하락**하는 것이므로 손실이다. 반면에 **선물가격이 상승**하게 되면 받게 되는 금액(선물가격)이 올라가게 되는 것이므로 **이익**이다.
- 현물가격과 선물가격이 **상승**하는 경우의 short hedge
현물가격이 상승하게 되면 내가 가진 자산의 가치가 높아지는 것이므로 이익이다. 반면, 선물가격이 하락하게 되면 나중에 받게 되는 금액이 줄어들게 되므로 손해이다.

Long Hedges

Long Hedges : 선물 계약에서 long position을 취해 손실을 막는 헷징방법이다.

Long hedges는 자산을 미래 시점에 구입하고 싶고, 가격을 고정시키고 싶을 때 사용하는 전략이다.

예시문제

1월 15일, 구리제조자는 5월 15일에 100,000 파운드의 구리가 필요하다. 구리의 **현물가격은 3.4달러/pound**이고, **5월에 구리 선물가격은 3.2달러/pound**이다. contract size는 25,000파운드/contract이다.

구리제조자는 1월 15일에 4개의 future long position을 취하였고, 5월 15일에 close out하려고 한다. 따라서 구리 제조자는 **5월 15일에 구리 선물가격을 3.2달러/파운드로 고정**시켰다.

- (상황-1) 5월 15일 구리 현물가격이 3.25달러/파운드로 내려갔을 때
 - 현물가격이 3.25달러나 되는 것을 3.2달러만 주고 살 수 있기 때문에 파운드당 0.05달러 이익이다. 총 100,000파운드를 구입하므로 5,000달러 이익이다.
- (상황-2) 5월 15일 구리 현물가격이 3.05달러/파운드 인 경우
 - 현물가격이 3.05달러밖에 안되는 것을 3.2달러나 주고 사기 때문에 파운드당 0.15달러 손해이다. 총 15,000달러 손해이다.

3.2 Hedging can lead to a worse outcome

Hedging의 결과가 반드시 이익을 보장하는 것은 아니다. Hedging의 목적은 미래의 가격을 사전에 확정하여 가격변동에 따른 위험을 회피하고자 하는 것이다.

예시문제

Company X는 8월 15일에 백만 배럴을 판매하기로 하였다. 5월 15일의 현물가격은 60달러/barrel이고, 8월달 선물가격은 59달러/barrel이다. contract size는 1000배럴/contract이다. Company X의 헷징 전략은 5월 15일에 1000개의 future short position을 취하는 것이다.

만약 8월 15일 현물 가격이 62달러로 올랐다면? \square 현물가격이 62달러나 되는 것을 59달러밖에 못받고 팔기 때문에 배럴당 3달러 손해. 총 3백만 달러 손해이다.

3.3 Basic Risk

예시문제

한 투자자가 미국 달러를 100,000 달러를 소유하며, 가격변동에 의한 위험성을 막기 위해 달러 선물계약을 이용해서 헤징하려고 한다. 현재는 9월이며 환율은 **1150원/달러**, 12월달 만기인 선물가격은 **1170원/달러**이다. 계약 사이즈는 10,000달러/1계약 이며 투자자는 10개의 Short Position Future Contract를 9월에 맺었다.

이때 만약 1달 뒤에 10월 달러 현물가격이 1170원/달러로 상승하고, 10월 달러 선물가격이 1180원/달러로 상승했을 때 **총 자산가치의 변화**는 얼마인가?

투자자는 Short Position을 취하였기 때문에 현물가격 상승, 또는 선물가격 하락으로 이익을 얻는다.

현물가격 20원 상승으로 인해 2,000,000 달러의 이익이 발생하고, 선물가격 10원 상승으로 1,000,000 달러의 손실이 발생한다. 결과적으로 1,000,000달러의 이익이 발생하게 된다.

$$basis = b_2 - b_1 = (S_2 - F_2) - (S_1 - F_1) = (S_2 - S_1) - (F_2 - F_1) = (1170 - 1150) - (1180 - 1170) = 20 - 10 = 10$$

따라서 달러당 10원의 이익이 발생하며, 100,000달러를 헤징하므로, 총 1,000,000원의 이익이 발생한다.

선물을 이용하는 헤징의 경우, 기본적으로 자산가치의 변화는 현물가격과 선물가격의 변동에 기인한다. 현물가격과 선물가격의 가격변동에 따른 자산가치 변동의 위험을 Basis Risk라고 한다.

S_1	spot price at time t_1
S_2	spot price at time t_2
F_1	future price at time t_1
F_2	future price at time t_2
b_1	basis at time $t_1, S_1 - F_1$
b_2	basis at time $t_2, S_2 - F_2$

$$b_2 > b_1 \text{ 일 때 } ((S_2 - F_2) > (S_1 - F_1))$$

$$b_2 - b_1 = (S_2 - F_2) - (S_1 - F_1) = (S_2 - S_1) - (F_2 - F_1) > 0$$

즉, 선물가격의 변화폭이 현물가격의 변화폭보다 크다. 즉, 현물가격의 상승폭이 선물가격의 상승폭보다 크거나, 현물가격의 하락폭이 선물가격의 하락폭보다 작은 경우를 말한다.

Short Position은 현물가격의 상승과 선물가격의 하락으로 이익을 얻는다. 따라서 (1) 현물가격의 상승폭이 선물가격 상승폭보다 크거나, (2) 선물가격의 하락폭이 현물가격의 하락폭보다 클 때 이익을 얻어 자기자산의 가치가 상승한다.

또한 이러한 경우에 **자산가치**는 t_2 에서 현물가격과 선물가격 변동에 따른 손익을 합한 값이며,

$$S_2 - (F_2 - F_1) = F_1 + b_2 \text{로 표현한다.}$$

내용	공식
자산가치	$F_1 + b_2$ (F_1 은 상수, b_2 는 변수)
자산가치의 변동	$b_2 - b_1$

Basis Risk in a Short Hedge

연습문제

현재 (t_1)일 때, 현물가격은 1150원/달러이며, 12월 만기인 선물가격은 1170원/달러이다. 한달 후(t_2)에 현물가격은 1170원/달러로 상승하였으며, 12월 만기인 선물가격은 1180원/달러로 상승하였다. 이때 Short Position을 취하는 투자자의 재산가치 변동은?

Short Position 투자자는 현물가격의 상승 및 선물가격의 하락으로 이익을 얻는다. 위 경우에는 현물가격은 20원/달러 상승하였으며, 선물가격은 10원/달러 상승하였다.

따라서 $basis = b_2 - b_1 = (S_2 - S_1) - (F_2 - F_1) = 20 - 10 = 10$ 이므로, 10원/달러로 이익을 얻게 된다.

	현재	한달 후	
Spot Price	1150원/달러	1170원/달러	20원/달러 이득
December Future price	1170원/달러	1180원/달러	10원/달러 손해
Basis Risk(basis)	$b_1 = -20$	$b_2 = -10$	

추가로, 한달 후 (t_2)의 재산가치는 $F_1 + b_2 = 1170 + (-10) = 1160$, 1160원/달러이다.

Perfect Hedging이란 가격변동에 따른 재산가치의 변동이 0인 것을 말한다. 위의 식으로부터 b_2 를 알고 있다면 F_1 은 상수값이므로 perfect hedging이 가능하지만 현실적으로 b_2 를 아는 것은 불가능하기 때문에 Perfect Hedging은 어렵다.

연습문제

9월 20일에 Company X는 11월 말에 100,000달러를 받기로 계약하였다. 9월 20일 당시의 달러 현물가격은 1150원/달러이며, 12월만기 선물가격은 1170원/달러이며, 10,000달러/1계약이다. 이 회사는 10개의 Short Position Contracts를 맺어서 11월 말에 달러를 매입하면 계약을 close out할 예정이다.

11월 말에 달러 현물가격이 1140원/달러로 하락하였으며, 12월만기 선물가격은 1150원/달러로 20원 하락하였다. 이 경우의 재산가치와 재산가치의 변화는?

Short Position을 취한 투자자는 현물가격 상승과 선물가격 하락으로 이익을 얻는다. 위 상황에서는 현물가격이 10원/달러 하락하였고, 선물가격은 20원/달러 하락하였다. 정리하면 다음 표와 같다.

	9월 20일	11월 말	
현물가격	1150원/달러	1140원/달러	10원 이득
12월 선물가격	1170원/달러	1150원/달러	20원 손해
Basis Risk	$b_1 = -20$	$b_2 = -10$	

Hedging을 통한 실질적 가격인 재산가치는 $F_1 + b_2 = 1170 - 10 = 1160$, 1160원/달러이며, 재산가치의 변화는 $b_2 - b_1 = -10 - (-20) = 10$ 으로, 10원/달러만큼 이익이 발생한다. 본 사례에서는 100,000달러를 매도하므로 헤징을 통해 총 1,000,000달러의 이익을 얻게 된다..

Basis Risk in a Long Hedge

연습문제

6월 8일, 한 회사는 10월이나 11월 즈음에 20,000배럴을 구입하기로 하였다. 6월 8일의 현물가격은 모르며, 12월만기 선물가격은 68달러/배럴이다. 이 회사는 20개의 Long Position Contracts를 진행할 예정이며, 기름 20,000배럴을 다 구입하면 close out한다.

11월 10일에 기름의 현물가격은 75달러/배럴이며, 12월만기 선물가격은 72달러/배럴이다. 이때 재산가치의 변화와 헤징을 통한 실질적 가격은?

우선 상황을 표로 정리하면 다음과 같다.

	6월 8일	11월 10일	
현물가격	?	75달러/배럴	?
12월 선물가격	68달러/배럴	72달러/배럴	3달러/배럴 이득.
Basis Risk	$b_1 = ?$	$b_2 = 3$	

Long Position 투자자는 물건을 만기일에 구입하는 입장으로, 선물가격이 상승해야 이득을 본다.

Hedging을 통한 실질적 가격인 재산가치는 $F_1 + b_2 = 68 + (75 - 72) = 71$ 이 되며, 71원/달러가 된다.

Short Hedge 투자자와 Long Hedge 투자자의 입장을 정리하면 다음 표와 같다.

입장	입장	이득	선물계약 체결시
Short Position Hedging	제가 만기일에 x 원을 받고 물건을 팔겠습니다.	x 원(선물가격)이 높을수록 좋다.	주로 선물가가 현물가보다 높게 체결한다.
Long Position Hedging	제가 만기일에 x 원을 주고 이 물건을 사겠습니다.	x 원(선물가격)이 낮을수록 좋다.	주로 선물가가 현물가보다 낮게 체결한다.

3.4 Cross Hedging

3.4.1 Minimum Variance Hedge Ratio

미래 시점에서 재산 가치 분산을 최소화하는 방법이다. 위에서는 100,000달러에 대한 hedging을 하기 위해서는 100,000달러에 해당하는 선물을 통해 hedging을 하였다. 만약, 현물가격 변동폭과 선물가격 변동폭이 다른 경우에 optimal hedging을 위해서는 현물에 대한 선물의 비율이 달라질 수 있다.

h 를 선물의 비율(hedge ratio)라고 할 때 재산가치의 변동은 $(S_2 - S_1) - h(F_1 - F_2) = \Delta S - h\Delta F$ 이다. hedging은 재산가치의 변동을 0으로 만드는 것이 목표이다. 그러기 위해서는 $h = \Delta S / \Delta F$ 가 되어야 한다.

Optimal Hedge Ratio : $h^* = \rho \frac{\sigma_S}{\sigma_F}$ (σ_S : 현물가격 변동의 표준편차, σ_F : 선물가격변동의 표준편차, ρ : 현물가격변동과 선물가격변동의 상관계수)

Proof of the Minimum Variance Hedge Ratio Formula

N_A : 헷징하려는 자산의 수, N_F : 선물계약 수

Hedging을 통한 실질적 가격은 $F_1 + b_2 = F_1 + (S_2 - F_2) = S_2 - \Delta F$ 로 구한다. 이를 응용하여 재산가치 분산을 최소화시키는 h^* 값을 구해본다.

t_2 에서의 portfolio 재산가치

$$\begin{aligned}
&= \\
&S_2 * N_A - (F_2 - F_1) * N_F = S_1 * N_A + (S_2 - S_1) * N_A - (F_2 - F_1) * N_F = S_1 * N_A + \Delta S * N_A - \Delta F * N_F \\
&= S_1 * N_A + N_A(\Delta S - h * \Delta F)
\end{aligned}$$

여기서 S_1 과 N_A 는 알고 있으므로 $\Delta S - h * \Delta F$ 에 의해 포트폴리오 재산가치는 변화한다. 따라서 $\Delta S - h * \Delta F$ 의 변동성을 줄이면 된다.

$$Var(\Delta S - h * \Delta F) = \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2hcov(\Delta S, \Delta F)$$

$$= \sigma_S^2 + h^2 \sigma_F^2 - 2h * \rho * \sigma_S * \sigma_F$$

위 식을 완전 제곱식으로 나타내면 다음과 같이 나온다.

$$\sigma_F(h - \frac{\rho\sigma_S}{\sigma_F})^2 + \sigma_S^2 - \rho^2\sigma_S^2$$

따라서 $h = \rho\sigma_S/\sigma_F$ 이며, ρ 가 1이거나 -1이면 perfect Hedging을 할 수 있다.

연습문제

$\hat{\sigma}_S = 0.0263, \hat{\sigma}_F = 0.0313, \hat{\rho} = 0.928$ 일 때, optimal hedging ratio는?

$$h^* = 0.928 * \frac{0.0263}{0.0313} = 0.778.$$

따라서 선물 1매수, 매도 계약은 자산의 액면가의 78%만큼 이루어진다.

3.4.2 Optimal Number of Contracts

Notation

- Q_A : 헷징되는 포지션의 사이즈
- Q_F : 선물 계약 한 개의 사이즈
- N^* : 헷징할 때 최적의 선물계약 수

선물계약은 자산 h^*Q_A 개가 단위가 되어서 이루어져야 하기 때문에, 선물계약시 최적의 선물 계약 수는 $N^* = h^* \frac{Q_A}{Q_F}$ 이다.

연습문제

airline회사는 2백만 갤런을 구입하려고 한다. 선물 계약 한개는 42,000갤런이며, h^* 는 0.778이다. 이때 optimal number of futures contracts for hedging?

$$Q_A = 2,000,000 \text{이며, } Q_F = 42,000 \text{이다.}$$

$$N^* = h^* \frac{Q_A}{Q_F} = 0.778 * \frac{2000000}{42000} = 37.04$$

airline회사는 만기일에 기름을 구입하려고 하는 것이 목적이므로, Long Hedging을 취한다. 따라서 airline회사는 37개의 Long Hedge 선물계약을 체결해야 한다.

3.4.3 Tailing the Hedge

헷징에 사용되는 계약의 수를 결정하는 방법은 또 있다. 바로 **가치개념**을 이용하는 방법인데, V_A 가 헷징되는 포지션의 달러 가치이고, V_F 가 선물계약 한개의 달러 가치(이 값은 Q_F 에 선물가격을 곱한 값이다)라고 할 때, optimal number of futures contracts for hedging은

$$N^* = h^* \frac{V_A}{V_F} \text{이다.}$$

연습문제

airline 회사에서는 2백만 갤런의 상품을 구매하려고 하며, 헷징을 하려 한다. 선물계약 한개의 사이즈는 42000갤런이다. $h^* = 0.778$ 이라고 할 때 단위 가격은 다음과 같다. 현물가격은 1.94달러/갤런, 선물가격은 1.99달러/갤런이다. 이때 optimal number of futures contract for hedging은?

$$Q_A = 2,000,000, Q_F = 42,000$$

$$V_A = 2,000,000 * 1.94 = 3,880,000, V_F = 42,000 * 1.99 = 83,580$$

$$N^* = h^* \frac{V_A}{V_F} = 0.778 * \frac{2000000 * 1.94}{42000 * 1.99} = 36.11$$

따라서 36개의 Long Position future contract를 취한다.

3.5 Stock Index Futures

주가지수선물은 주로 주식 포트폴리오를 헷징하는데 사용이 된다.

Notation

- V_A : 헷징되는 포트폴리오의 현재 가치
- V_F : 선물 계약 주식 한개의 현재 가치

베타 (β)

베타는 투자경향을 의미한다.

만약 베타값이 1이라면, 포트폴리오는 시장의 주가지수를 따라가는 경향이 있으며 hedge 비율 역시 1이다. 이러한 경우 계약의 수는 $N^* = \frac{V_A}{V_F}$ 라고 할 수 있다.

만약 베타값이 2라면, 포트폴리오는 주가지수 평균에 2배이며, 포트폴리오를 헷지할 때 2배더 많은 계약 수를 사용해야 한다. 베타값이 1/2라면 계약수는 1/2배가 된다.

포트폴리오 위험을 헷지하기 위한 선물계약의 수는 $N^* = \beta \frac{V_A}{V_F}$ 가 된다.

연습문제

만기 4개월짜리 선물을 이용하여 앞으로 3개월동안 헷징하려고 한다.

주가지수 평균은 1000포인트이며, 선물가격은 1010포인트이다. 포트폴리오의 가치는 5,050,000 달러이고, 무위험이자율은 4%, 배당률은 1%이다. 포트폴리오의 베타값은 1.5이고, 한 선물계약의 가치는 주가지수 포인트에 250달러를 곱한 값이다.

3개월 동안 헷징하려고 할 때, (1)헷징 전략은 무엇인가? 그리고 만약 3개월 후 주가지수가 900로 하락하고 선물가격은 902포인트로 하락했다면, (2) 3개월 뒤 투자자가 얻게되는 총 가치는 얼마인가?

Short Position을 취하는 투자자는 현물가격의 상승과 선물가격의 하락으로 이익을 얻는다.

현 상황을 표로 나타내면 다음과 같다.

	t_1	t_2	설명
현물가격	1000	900	현물포인트 100포인트 하락 (손실)
선물가격	1010	902	선물 포인트 18포인트 하락 (이익)

(1) 먼저 헷징 전략을 구한다.

$V_A = 5,050,000$ 이며, $V_F = 1010 * 250$ 이다. $\beta = 1.5$ 이므로

$$N^* = 1.5 * \frac{5,050,000}{252,500} = 30$$

따라서 선물계약을 30개 체결한다.

(2) 그 다음 3개월 뒤에 투자자가 얻게 되는 총 가치를 구해보자. 계약 기간이 3개월이라는 점을 주의해야 한다.

$\text{risk on portfolio} - \text{risk free rate} = \beta (\text{risk on stock} - \text{risk free rate})$

$\text{risk free rate} = 0.04 \times \frac{3}{12} = 0.01$

$\text{loss on risk} = \frac{900}{1000} - 1 = -0.1$, $\text{dividend yield} = 0.01 \times \frac{3}{12} = 0.0025$

따라서 $\text{risk on stock} = -0.1 + 0.0025 = -0.0975$ 이다.

위의 계산 결과로 인해 risk on portfolio 는

$0.01 + 1.5 \times (-0.0975 - 0.01) = 0.009625 = -0.15125 = -15.125\%$ 이다.

risk on portfolio 가 -15.125% 이므로, 3개월 뒤 포트폴리오의 가격은

$5,050,000 \times (1 - 0.15125) = 4,286,187.5$ 이다.

하지만 투자자는 30개의 선물계약을 체결하였기 때문에 위의 위험을 헤징한다.

$30 \times (1010 - 902) \times 250 = 810,000$ 달러의 이익을 얻게 된다.

Hedging을 통한 실질적 가격인 재산가치는 현물가격 하락으로 인한 손실이 반영된 포트폴리오의 가치와 선물가격 하락으로 인한 이익이 합쳐져서 최종 가치는 $4,286,187.5 + 810,000 = 5,096,187.5$ 원이다.

Rolling the Hedge Forward

여러 개의 선물계약을 이용해서 헷징의 기간을 늘리는 것을 의미한다.