10. Properties of Stock Options

Factors Affecting Option Prices

1. Stock Price and Strike price

   콜옵션은 주식가격이 상승할수록, 행사가격이 낮을수록 가치가 증가한다.
   풋옵션은 주식가격이 하락할수록, 행사가격이 높을수록 가치가 증가한다.

2. Time to Expiration

   American 옵션의 경우, 만기까지의 시간이 길수록 가치 증가
   European 옵션의 경우, 옵션의 가치와 상관관계는 불확실.

3. Volatility

   주식가격의 변동이 클수록 옵션의 가치 증가.

4. Risk-free Interest rate

   이자율이 상승할 때, 주식투자 수익률도 상승

   - 풋옵션의 경우 옵션 가치 하락, 콜옵션의 경우 옵션가치 상승

   이자율이 상승할 때, 옵션의 소유자가 얻는 수익의 현재 가치 하락

   - 풋옵션의 경우 옵션의 가치 하락,

American vs European Options

American Option은 만기일 이전 어느때라도 옵션을 행사할 수 있다.

American Options은 European Options보다는 가치가 높다. 왜냐하면 European Option은 현재 가치만큼 discount되기 때문이다.

Upper Bounds for Option Prices

Call Option의 경우

- 콜옵션의 소유자는 단지 주식을 살 수 있는 권리를 가지고 있으므로 옵션의 가치는 주식의 가치보다 클수 없다.

Put Option의 경우

- 풋옵션의 소유자에게 단지 주식을 K에 팔 수 있는 권리를 가지고 있으므로 옵션의 가치는 K보다 클수는 없다.($p \leq K, P \leq K$)
- European Put Options의 경우, 만기일에 옵션의 가치는 K보다 클 수는 없다. ($p \leq Ke^{-rt}$)

Lower Bounds for Calls on Nondividend-Paying Stocks

European Call option의 하한선

- $c \geq S - Ke^{-rt}$
- ❓ 주식 가격이 20달러, 이자율은 10%, 행사가격이 18달러, 만기가 1년이라고 했을 때
  ✓ 콜옵션의 하한선은 3.71달러

- ❓ European Call Option의 가격이 3달러인 경우, arbitrage 전략은?
  ✔ 솔루션
  1. 콜옵션을 매입한다 (-3달러)
  2. 주식을 공매도한다 (+ 20달러)
  3. 그 결과, 17달러가 주머니 속으로 들어오고, 1년후에 17달러가 $17 * e^{0.1}$ 이 된다.
  4. 1년 후

     4-1. 주식가격이 18달러 이상이면, 매입한 콜옵션을 행사하여 18달러에 주식을 매입한다. 이로 인해 순이익은 18.79-18=0.79달러가 된다.

     4-2. 주식가격이 18달러 이하이면, 옵션을 행사하지 않고 만기시점의 주식 가격으로 주식을 매입한다. 이로 인해 순이익은 18.79-(만기시점의 주식가격) >= 0.79달러
- ❓ 배당금이 없는 주식에 대한 European call option의 예시. 주식가격은 51달러, 이자율은 12%, 행사가격은 50달러, 만기는 6개월
  ✔ $c \geq S - Ke^{-rt} = 3.91$

Lower Bounds for Puts on Nondividend-Paying Stocks

European Put Option의 하한선

- $p \geq Ke^{-rt} - S$
- ❓ 현 주식가격이 37달러이고, 이자율이 5%이고, 행사가격이 40달러이고 만기가 6개월인 경우의 풋옵션 하한선은
  ✔ $p \geq Ke^{-rt} - S = 2.01$
- ❓ European Put Option의 가격이 1달러인 경우, arbitrage를 위한 투자전략은?

  ✔ 솔루션
  38달러를 빌려 풋옵션과 주식을 매입한다.
  6개월 후, $(1+37) * e^{0.05*0.5} = 38.96$달러를 갚아야 한다
  이때, 주식가격이 40달러 이하이면 옵션을 행사한다. 즉, 주식을 40달러에 매도한다. 순이익은 $40 - 38.96 = 1.04$의 이익이 남는다.
  주식가격이 40달러 이상이면, 옵션을 행사하지 않고 주식을 시장가로 매도한다. 순이익은 $? - 38.96 \geq 1.04$

❓ 두 개의 포트폴리오가 있다. 포트폴리오 C는 한개의 유로피안 풋옵션과 하나의 주식을 가지고 있으며, 포트폴리오 D는 Ke^{-rt}의 현금이 있다. 이때 풋옵션의 하한선은?

✔ Portfolio C : one European put option + one share / Portfolio D : cash(Ke^{-rt})

만기 시점에서 포트폴리오 C의 가치

- $S_T < K$이면 옵션을 행사하고, 이때의 가치는 K
- $S_T > K$이면 옵션을 행사하지 않고 이때 가치는 S_T
- 즉, 포트폴리오의 가치는 $max(S_T, K)$

만기 시점에서 포트폴리오 D의 가치 = K

포트폴리오 C의 가치 >= 포트폴리오 D의 가치

$p + S \geq Ke^{-rt}, p \geq Ke^{-rt} - S$

정리하면, $p \geq max(Ke^{-rt} - S, 0)$

❓ 배당금 없는 주식에 대한 European 풋옵션의 하한선은? 주식가격은 38달러, 이자율은 10%, 행사가격은 40달러, 만기는 3개월이다.

✔ $p \geq Ke^{-rt} - S = 1.01$

Put-Call Parity

같은 행사가격과 같은 만기의 European Call option의 가치 c와 European Put option의 가치 p 사이에는 특정한 관계식이 성립한다.

Portfolio A : one European call option(c) + cash(Ke^{-rt})
Portfolio C : one European put option(p) + one share(S)

만기 시점에서 두 포트폴리오의 가치 = $max(S_T, K)$

따라서 $c + Ke^{-rt} = p + S$

put-call parity 공식이 성립하지 않을 때의 arbitrage 투자 전략

❓ 현 주식 가격이 31달러, 이자율이 10%, 행사가격은 30달러, 만기는 3개월이라고 할 때 arbitrage 전략은? 콜옵션의 가격은 3달러, 풋옵션의 가격은 2.25달러이다.

✔ 솔루션

1. put-call parity 공식 확인
   $c + Ke^{-rt} = p + S$
   Portfolio A : $3 + 30 * e^{-0.1*0.25} = 32.259$
   Portfolio C : $2.25 + 31 = 33.25$
   Portfolio C가 portfolio A보다 overprice되어있다. put-call parity가 일치하지 않는다!! -> arbitrage 전략
2. Portfolio A에 해당하는 상품을 매입하고, Portfolio C에 해당하는 상품을 매도한다 (가치가 높은 것을 팔고, 낮은 것을 산다)
   $-3 + 2.25 + 31 = 30.25$
   만기 시점의 가치 : $30.25 * e^{0.1*0.25} = 31.02$
3. 만기 시점에서 주식값이 30달러 이상이면 콜옵션을 행사하고, 주식값이 30달러 이하이면 풋옵션의 소유자가 그 옵션을 행사할 것이다.
   만기 시점의 주식값에 상관없이 30달러에 주식을 매입할 수 있다. 공매도한 주식을 다시 매입하여 포지션을 청산한다.
4. Risk-free profit = $31.02 - 30 = 1.02$

❓ 현 주식 가격이 31달러, 이자율이 10%, 행사가격은 30달러, 만기는 3개월이라고 할 때 arbitrage 전략은? 콜옵션의 가격은 3달러, 풋옵션의 가격은 1달러이다.

✔ 솔루션

1. put-call parity 공식 확인
   Portfolio A : $3 + 30 * e^{-0.1*0.25} = 32.259$
   Portfolio C : $1 + 31 = 32$
   따라서 Portfolio A가 Portfolio C보다 overprice 되어있다.
2. Portfolio A에 해당하는 상품을 매도하고 Portfolio C에 해당하는 상품을 매입한다 (가치가 높은 것을 매도하고 가치가 낮은 것을 매입한다)
   $-32 + 3 = -29$
   만기 시점의 가치 : $-29 * e^{-0.1*0.25} = -29.73$
3. 만기 시점의 주식값이 30달러보다 높으면 콜옵션 소유자가 그 옵션을 행사할 것이고, 30달러 이하이면 풋옵션을 행사한다.
   만기 시점의 주식값에 상관없이 30달러에 주식을 매도할 수 있다. 매입한 주식을 다시 매도하여 그 포지션을 청산
4. Risk-free Profit = $30 - 29.73 = 0.27$

Early Exercise for American Call Options

현재 주식가격이 50달러, 행사가격이 40달러, 만기는 1개월이다. 콜옵션의 소유자가 현재 주식가격이 과대 평가되어 있어 곧 하락할 것으로 생각되는 경우에 미리 옵션을 행사하여 이익을 실현하려고 할 것이다.
(1) 옵션을 행사하면 10달러의 이익을 얻는다.

(2) 옵션을 행사하지 않고 콜옵션을 매도하면 $C \geq S - Ke^{-rt} = 50 - 40 * e^{-0.1*1/12} = 10.33$이므로 더 높은 수익을 얻는다.
배당금이 없는 주식에 대한 American call option은 만기일 이전에 그 옵션을 행사하는 것은 적절하지 않다. 왜냐하면 행사가격K로 옵션을 행사할 때, 만기시점의 행사가격 K와 현재 시점의 행사가격의 가치는 다르다. 현재 주식가격이 과대평가되어 있어서 곧 하락할 것으로 생각되는 경우에는 옵션을 행사하여 이익을 실현하는 것보다 옵션을 매도하는 것이 더 이익이 크다.

만기 시점에서 옵션을 행사할 때 가치

- Portfolio E : $max(S_T, K)$
- Portfolio : S_T

Portfolio E의 가치가 Portfolio F의 가치보다 높다.

옵션을 만기 이전에 행사할 때는 Portfolio E의 가치가 Portfolio F보다 낮지만, 만기 시점에서 옵션을 행사할 때는 Portfolio E의 가치가 Portfolio의 가치보다 높다. 그러므로 American call option의 경우 옵션을 만기시점 이전에 행사하는 것이 바람직하지 않다.

위 사실로부터 call option의 경우 European option과 American option의 가치는 같다. 따라서 $C = c$

Early Exercise for American Put Options

Call option과 달리 Put option의 경우에는 만기일 이전에 옵션을 행사하는 것이 유리할 수 있다. Call option을 만기일 이전에 행사하는 경우는 옵션의 소유자가 미리 행사금액만큼 지불함으로써 그에 따른 손실이 있지만 put option의 경우는 옵션의 소유자가 미리 행사금액만큼 받고 이를 재투자할 수 있으므로 이익이 될 수 있다.

행사가격이 10달러이고, 현 주식가격이 0달러이다. 이때 풋옵션을 현재 시점에서 행사하는 경우 10달러를 얻는다. 풋옵션을 만기일에 행사하는 경우 이익은 10달러 이하로 떨어진다. 이를 통해 풋옵션을 행사하는 것이 만기일까지 기다리는 것보다 유리하다.

- Portfolio G : one American put option + one share
- Portfolio H : cash ($Ke^{-r(T-t)}$)

만기 이전의 시간 t_1에서 옵션을 행사할 때 가치

- Portfolio G : K
- Portfolio H : $Ke^{-r(T-t_1)}$

Portfolio G의 가치가 Portfolio H의 가치보다 높다.

Call option과 달리 옵션의 행사시점에 상관없이 Portfolio G의 가치가 Portfolio H의 가치보다 높다. 하지만 Put option의 경우 만기일 이전에 옵션을 행사하는 것이 유리할 수 있다. European put option의 경우 $p \geq Ke^{-r(T-t)} - S$이고 American put option은 현재 시점에서 당장 행사할 수 있으므로 $P \geq K - S$이다.

Relationship between American Put and Call Prices

$P \geq p, c + Ke^{-r(T-t)} = p + S, C = c$이므로

$P \geq p = c + Ke^{-r(T-t)} - S = C + Ke^{-r(T-t)} - S$

즉, $C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)}$

❓ 두 포트폴리오

- Portfolio I : one European call option + cash(K)
- Portfolio J : one American put option + one share

✓ 만기일 이전에 American put option이 행사되지 않을 때의 가치

- Portfolio I : $max(S_T - K, 0) + Ke^{r(T-t)} = max(S_T, K) + (Ke^{r(T-t)} - K)$
- Portfolio J : $max(S_T, K)$

Portfolio I의 가치가 Portfolio J의 가치보다 높다.

✓ 만기일 이전에 American put option이 행사될 때 가치

- Portfolio I : $\geq Ke^{r(T-t)}$ (call option의 가치는 0 이상이므로)
- Portfolio J : K

Portfolio I의 가치가 Portfolio J의 가치보다 높다.

✓ 항상 Portfolio의 가치가 Portfolio J의 가치보다 높다. 따라서 $c + K \geq P + S$
$C = c$이므로 $C - P \geq S - K$

따라서 $S - K \leq C - P \leq S - Ke^{-r(T-t)}$

❓ 현재 주식가격이 19달러, 무위험이자율이 10%, 행사가격이 20달러이다. 만기 5개월의 American Call option의 가격이 1.5달러일 때 European put option의 가격과 American put option의 가격범위는?

✓ 우선 $C = c = 1.5$이다.

$p = c - S + Ke^{-rt} = 1.5 - 19 + 20e^{-0.1*5/12} = 1.68$, 따라서 European Put option의 가격은 1.68달러이다.

그리고 $S - K \leq C - P \leq S - Ke - r(T - t)$ 이므로

$1.68 \leq P \leq 2.5$

Effect of Dividends

배당금의 현재 가치를 D라고 할 때, 실질적으로 현재 주식 가격 S를 $(S - D)$로 변화시킨 것과 같은 효과가 있다.

- $c \geq S - Ke^{-r(T-t)}$로부터
  $c \geq (S - D) - Ke^{-r(T-t)}$
- $p \geq Ke^{-r(T-t)} - S$로부터
  $p \geq Ke^{-r(T-t)} - (S - D)$
- $c + Ke^{-r(T-t)} = p + S$로부터
  $c + Ke^{-r(T-t)} = p + (S - D)$