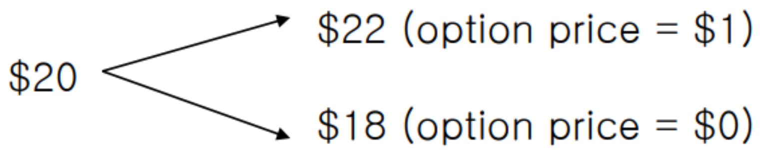
12. An Introduction to Binomial Trees

One-Step Binomial Tree

❓ 현재 주식가격은 20달러이다. 행사가격이 21달러인 3개월 만기 콜옵션의 가격은? 단, 3개월 후 주식가격이 22달러 혹은 18달러 두 가지만 가능하다.



Portfolio :

1. Long position in Δ shares of stock (주식 매입)
2. short position in one call option (콜옵션 매도)

3개월 후 재산가치

- 3개월 후, 주식가격이 22달러인 경우 재산가치 = $22\Delta - 1$
- 3개월 후, 주식가격이 18달러인 경우 재산가치 = 18Δ
- $22\Delta - 1 = 18\Delta$일 때, 포트폴리오는 riskless가 된다.

결론적으로 Riskless Portfolio는

1. 0.25주의 주식을 매입
2. 한 개의 콜옵션 매도

3개월 후 재산가치 : $22 * 0.25 - 1 = 4.5$
현재 자산가치 : $20 * 0.25 - f = 5 - f$
$5 - f$는 4.5의 discounted value이어야 한다.
✔ $5 - f = 4.5e^{-r*0.25}$, $f = 5 - 4.5e^{-r*0.25}$

r = 12%라면, f = 0.633달러

> Riskless Portfolio
>
> 1. long position in 0.25 shares of stock
> 2. short position in one call option
>
> 3개월 후 재산 가치 : 4.5달러
>
> 현재 자산가치 : $5 - f$
>
> $5 - f = 4.5e^{-r*0.25}$
>
> $f = 5 - 4.5e^{-r*0.25}$
>
> r=12%일 때, $f = 5 - 4.5e^{-0.12*0.25} = 0.633$

One-Step Binomial Tree : Generalization

Portfolio

- long position in Δ shares of stock
- short position in one call option

T시기의 재산가치

- 주식가격이 Su인 경우, 재산가치 = $\Delta * Su - f_u$
- 주식가격이 Sd인 경우, 재산가치 = $\Delta * Sd - f_d$

Riskless Portfolio
$\Delta * Su - f_u = \Delta * Sd - f_d$
$\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}$

- long position in Δ shares of stock
- short position in one call option

Value of Option

시간 T에서 재산가치는 $\Delta * Su - f_u$, 현재 재산가치는 $\Delta * S - f$. 현재 재산가치는 미래의 재산가치의 discounted value이다.
$\Delta S - f = e^{-r(T-t)}(\Delta Su - f_u)$
$f = \Delta S - e^{-r(T-t)}(\Delta Su - f_u) = e^{-r(T-t)}(\Delta S * e^{r(T-t)} - \Delta Su + f_u)$
여기서 $\Delta = \frac{f_u - f_d}{S(u-d)}$

$f = e^{-r(T-t)}(\frac{f_u - f_d}{S(u-d)} S * e^{r(T-t)} - \frac{f_u - f_d}{S(u-d)} Su + f_u)$
$= e^{-r(T-t)}(\frac{f_u - f_d}{u-d} e^{r(T-t)} - \frac{f_u - f_d}{u-d} u + f_u)$
$= e^{-r(T-t)}(\frac{f_u(e^{r(T-t)} - u + u - d) + f_d(u - e^{r(T-t)})}{u-d})$
$= e^{-r(T-t)}(\frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d} f_u - \frac{e^{r(T-t)} - u}{u-d} f_d)$
$= e^{-r(T-t)}(pf_u - (1-p)f_d)$, $(p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d})$

Irrelevance of Stock' Expected

$f = e^{-r(T-t)}(pf_u - (1-p)f_d)$

기초자산에 대한 옵션의 가치를 매길 때, 주식에 대한 기대수익은 무관하다.

옵션의 가격은 오를 확률이 0.5던 0.9던 동일하다. 그 이유는 기초자산의 가치를 매기지 않기 때문이다. 오르거나 내려갈 확률은 주식의 가격에 포함되지 않는다.

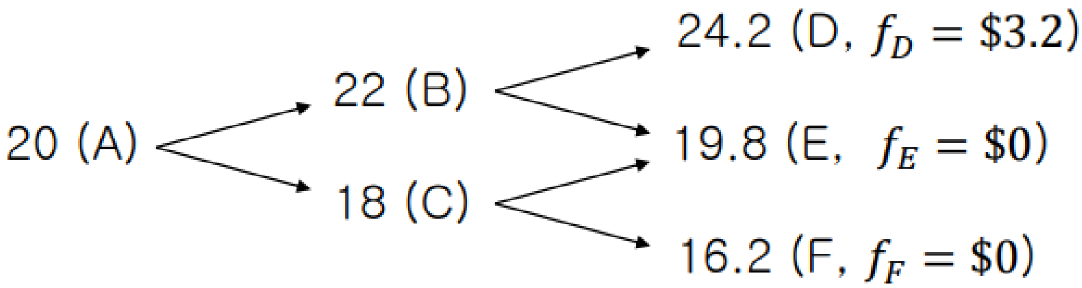
옵션의 가치를 매길 때, 상승 및 하락의 확률을 고려할 필요가 없다.

Risk Neutral Valuation

$f = e^{-r(T-t)}(pf_u - (1-p)f_d)$, $p = \frac{e^{r(T-t)} - d}{u-d}$

- p : risk-neutral world에서 올라갈 확률
- $1-p$: risk-neutral world에서 내려갈 확률
- $[pf_u - (1-p)f_d]$: 옵션의 기대 수익
- $e^{-r(T-t)}[pf_u - (1-p)f_d]$: 기대수익을 현재 가치로 변환한 값

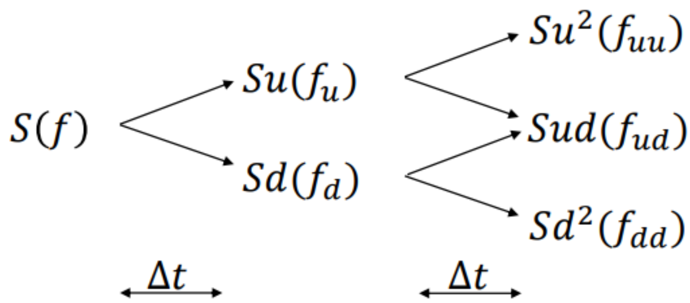
Two-Steps Binomial Tree

> ❓ 현재 주식가격이 20달러라고 할 때, 행사가격 21달러인 만기 6개월 **콜옵션**의 가격은? 이때 주식이 3개월마다 10%상승 혹은 하락한다고 가정한다.
>
> 
>
>
> **DEF에서 구한 옵션의 가격을 이용하여 BC의 옵션가격을 구하고, 이를 다시 이용하여 현 시점 A에서 옵션의 가격을 정한다.**
>
> 1. B에서 옵션의 가격 : $f_B = e^{-r(T-t)}(pf_D - (1-p)f_E)$
> $p = \frac{e^{r(T-t)}-d}{u-d} = \frac{e^{0.12*0.25}-0.9}{1.1-0.9} = 0.6523$
> $f_B = e^{-0.12*0.25}(0.6523*3.2-0) = 2.0257$
> 2. C에서의 옵션 가격
> $f_C = 0$
> 3. A에서의 옵션 가격
> $f_A = e^{-0.12*0.25}(0.6523*2.0257) = 1.2823$

Two-Steps Binomial Tree : Generalization

현재 주식가격을 S라고 하자.

매 스텝 Δt동안, 가격은 초기 가격의 u만큼 오르거나 d만큼 내려간다.



1. $f_u = e^{-r(T-t)}[pf_{uu} + (1-p)f_{ud}]$
2. $f_d = e^{-r(T-t)}[pf_{du} + (1-p)f_{dd}]$
3. $f = e^{-r(T-t)}[pf_u + (1-p)f_d]$
   $= e^{-2r(T-t)}[p^2 f_{uu} + (p-p^2)f_{ud} + (p-p^2)f_{du} + (1-p)^2 f_{dd}]$
   $= e^{-2r(T-t)}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$

- p^2 : 주식가격이 Su^2가 될 확률
- $2p(1-p)$: 주식가격이 Sud가 될 확률
- $(1-p)^2$: 주식가격이 Sd^2가 될 확률
- $[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$: 옵션의 기대수익
- $e^{-2r(T-t)}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$: 옵션의 기대가치를 현재 가치로 환산한 값

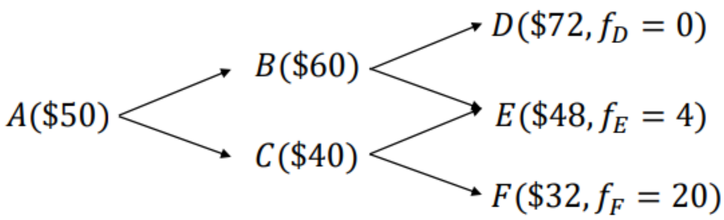
> 예제

> 현재 가격이 50달러이고 행사가격이 52달러인 2년 만기의 풋옵션의 가격은 얼마인가? 주식가격은 매년 20%씩 상승 혹은 하락하며, 무이자위험율은 5%이다.
>
> 풋옵션이라는 것을 명심!
>
> $p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} = \frac{e^{0.05}-0.8}{1.2-0.8} = 0.628$
>
> $$f = e^{-2r\Delta t}[p^2 f_{uu} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{dd}]$$
> $$= e^{-2*0.05*1}[(0.628)^2 * 0 + 2 * 0.628(1-0.628) * 4 + (1-0.628)^2 * 20]$$
> $$= 4.188$$

American Options

testing at each node to see whether early exercise is optimal

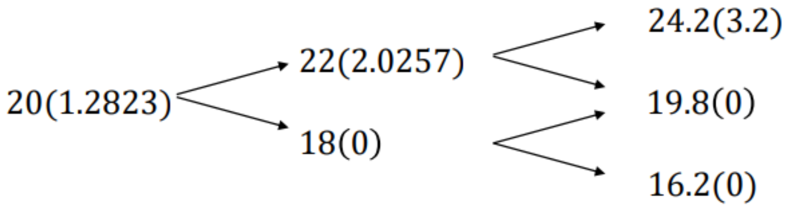
1. 마지막 노드에 있는 옵션의 가치는 European 옵션과 동일하다.
2. 주어진 식에 의한 옵션의 가치보다 미리 옵션을 행사하여 발생하는 이득이 크면 옵션을 행사한다.
   $f = max(e^{-r\Delta t}[pf_u + (1-p)f_d$, payoff from early exercise])

> 예제
>
> 현재 주식가격이 50달러이고, 행사가격이 52달러인 2년 만기의 American put option의 가격은? 이때 주식가격은 매년 20% 상승 혹은 하락하며 무위험이자율은 5%라고 한다.
>
> 
>
>
> $p = \frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d} = 0.6281$
>
> $$f'_B = e^{-r\Delta t}(pf_{uu} + (1-p)f_{ud}) = 1.415$$
> $$f_B = max(1.415, 0) = 1.415$$
>
> $$f'_C = e^{-0.05}(0.6281 * 4 + (1-0.6281) * 20) = 9.465$$
> $$f_C = max(9.465, 52-40) = 12$$
>
> $$f_A = e^{-0.05}(0.6281 * 1.415 + (1-0.6281) * 12) = 5.09$$
>
> 따라서 A에서 옵션의 가치는 5.09달러이다.

Delta

옵션을 이용한 hedging에 사용되는 개념이다.

> 예제
>
> 현재 주식가격이 20달러이고, 행사가격이 21달러인 3개월 만기의 콜옵션인 경우, 주식을 얼마나 구매해야 하는가? 3개월 후 주식가격은 22달러 혹은 18달러가 된다.
>
> 콜옵션 => 주가가 상승할 때 이익이 된다! 따라서 주가가 올라야 행사를 한다.
>
> 주가가 상승한 경우 : $22\Delta - 1$

> 주가가 하락한 경우 : 18Δ
>
> $22\Delta - 1 = 18\Delta$
> $\Delta = \frac{1}{4} = 0.25$ ($\Delta = \frac{f_u - f_d}{Su - Sd}$)
>
> 따라서 0.25주의 주식을 소유해야 riskless가 된다.
>
> 
>
>
> (1) 첫 번째 단계의 Δ
>
> $\Delta_1 = \frac{2.0257}{22-18} = 0.5064$
>
> (2) 두 번째의 첫 단계의 Δ
>
> $\Delta_{21} = \frac{3.2}{24.2-19.8} = 0.727$
> $\Delta_{22} = \frac{0}{19.8-16.2} = 0$
>
> 델타값은 매번 바뀐다. 그러므로 옵션과 기초자산을 이용해 riskless 헷징을 하기 위해선 주기적으로 변경해주어야 한다.

Binomial Trees in practice

옵션의 만기는 30 혹은 그 이상의 스텝으로 구서오딘다.

u값과 d값은 주가의 변동성인 σ로부터 결정된다.