2024-09-24

14장 통합리스크 관리

Keywoong Bae

AIRM Research Group,
Department of Industrial and Management Engineering,
POSTECH

1. 서론

RBC (Risk Based Capital)

- 우리나라의 RBC 제도
  - RBC제도는 **보험사에 내재된 다양한 리스크**를 종합적으로 측정하고, 이에 상응한 최소자본량을 재무건정성 기준으로 활용하는 **리스크 기반의 자기자본 규제제도**임.
  - 개별 위험액 간의 분산효과를 반영하여 총위험을 산출함.
  - 단순 합산을 하게 되면 총 요구자본을 과대 계상하게 되기 때문임.

ex) A=20, B=30일 때, 단순 합산할 경우 총 리스크량은 **50**이며,
분산효과를 반영할 경우($\rho = 0.5$)
$\sqrt{20^2 + 30^2 + 2 \times 0.5 \times 20 \times 30} = \mathbf{24.94}$임.

- RBC 통합 리스크는 개별 리스크 간의 상관관계를 완전상관($\rho = 1$) 또는 무상관 ($\rho = 0$) 이라는 단순한 가정을 통해 산출함.
  - $RBC = \sqrt{I^2 + M^2 + (i + C)^2} + o$
  - 위 과정은 계산이 용이하긴 하지만 신뢰성이 떨어짐.
- 따라서, 개별 리스크들을 어떻게 통합하는지는 매우 중요한 문제임.

Framework

- 본 Chapter는 다음과 같이 진행됨.

개별 리스크 산출 (RBC) ⇨ 개별 리스크 통합 ⇨ Solvency II 규제모형 ⇨ RBC vs SII

- 보험리스크
- 시장리스크
- 금리리스크
- 신용리스크
- 운영리스크

- 분산공분산 방법
- Copula 방법

2. 보험사의 RBC 요구자본 산출

개별 리스크 산출 (RBC) → 개별 리스크 통합 → Solvency II 규제모형 → RBC vs SII

- 보험리스크
- 시장리스크
- 금리리스크
- 신용리스크
- 운영리스크

- 분산공분산 방법
- Copula 방법

개별리스크 산출

- 다섯 가지 개별 리스크를 각각 산출하여 통합함.
  - 보험리스크, 시장리스크, 금리리스크, 신용리스크, 운영리스크
- 개별리스크 = 리스크 노출정도 (exposure) x 산정된 위험계수
  - 리스크 노출정도 예: 자산, 부채, 수입 보험료 등
  - 위험계수: 자산 항목별, 보험 종목별, 금리 민감도별로 구분하여 산정함.

2. 보험사의 RBC 요구자본 산출

개별리스크 산출

- 보험사에서 RBC 요구자본 산출하는 과정은 다음과 같음.

$$RBC = \sqrt{I^2 + M^2 + (i+c)^2} + o$$

- 보험리스크(I), 시장리스크(M), 금리리스크(i), 신용리스크(c), 운영리스크(o) 각각을 산출하여 통합함.
- 개별리스크는 노출정도에 산정된 위험계수를 서로 곱하여 산출함.

개별리스크 1 - 보험리스크(I)

- 보험 계약 인수 및 보험금 지급 관련 위험. 보험가격리스크(IV)와 준비금리스크(R)로 나뉨 ($I = \sqrt{IV^2 + R^2}$).
    - 보험가격리스크(IV): 예상 위험률과 실제 위험률의 차이로 인해 손실이 발생하거나 손익이 변동될 위험.
    - IV = 계약노출정도 x 위험계수
        - (생명보험 및 장기손보) 산출기준일 직전 1년간 보유위험보험료
        - (일반손보) 산출기준일 직전 1년간 보유보험료
    - 준비금리스크(R): 예상 보험금과 실제 보험금의 차이로 인해 손실이 발생할 위험.
    - R = 계약노출정도 x 위험계수 • 보험종목별로 1.2%~77.9%

• 산출기준일 현재 대차대조표 상의 보유지급준비금

2. 보험사의 RBC 요구자본 산출

개별리스크2 - 시장리스크$(\boldsymbol{M})$

- 시장가격 (주가, 금리, 환율)의 변동으로 자산의 가치가 하락하여 보험사에 손실이 발생할 위험
- $\boldsymbol{M}$ = 요구자본 측정 대상의 노출정도 x 위험계수

개별리스크3 - 금리리스크$(\boldsymbol{i})$

- 미래 시장금리변동 및 자산과 부채의 만기구조 차이로 인해 발생하는 경제적 손실 위험
- $\boldsymbol{i}$ = | (자산노출정도 x 자산금리민감도) – (보험부채노출정도 x 부채금리민감도) | x 금리변동계수

개별리스크4 - 신용리스크$(\boldsymbol{c})$

- 채무자의 부도, 거래 상대방의 계약 불이행 등 채무 불이행으로 인하여 발생할 수 있는 잠재적인 경제적 손실 위험
- 신 BIS 협약 표준 방법의 자산분류 및 측정방식을 참고하여 요구자본을 산출함.
- 개별자산 요구자본을 합산하여 산출되며, 개별자산 요구자본은 노출정도와 위험계수를 곱하여 산출함.

개별리스크5 - 운영리스크$(\boldsymbol{o})$

- 보험사의 부적절한 내부절차, 인력, 시스템 상의 문제 및 사고 발생으로 인한 손실 가능성.
- $\boldsymbol{o}$ = 요구자본 산출대상 계약의 수입보험료 x 위험계수
- IAIS(International Association of Insurance Supervisors)에서는 보험사 운영리스크의 구성내용이 다양하고, 보험사의 내부통제와 시스템의 차이가 있어 요구자본 측정이 어렵다는 것을 인정하여, 국가별로 간편한 방법을 통한 요구자본 측정을 인정하고 있음.

3. 통합리스크 산출 방법

개별 리스크 산출 (RBC) → 개별 리스크 통합 → Solvency II 규제모형 → RBC vs SII

개별 리스크 산출 (RBC)
- 보험리스크
- 시장리스크
- 금리리스크
- 신용리스크
- 운영리스크

개별 리스크 통합
- 분산공분산 방법
- Copula 방법

Solvency II 규제모형

RBC vs SII

접근방법

- 상관관계를 이용하여 개별 리스크들을 통합 → **상관계수를 활용한 전통적인 방법(분산공분산 방법) / Copula 기반의 통합**
- 리스크 시나리오를 생성하여 각 보험사별 총손실분포와 개별손실분포를 산출하여 측정

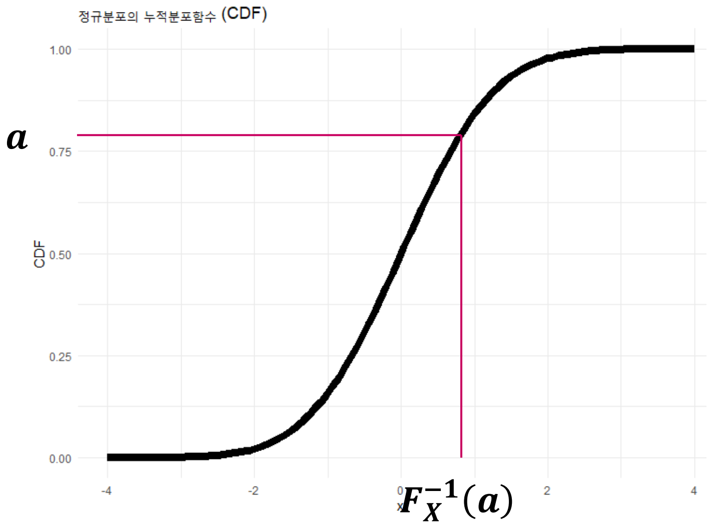
3. 통합리스크 산출 방법

분산공분산 방법

- 개별 리스크 간의 상관계수로 구성된 상관행렬을 기반으로 리스크를 통합함.

- $CaR_X(a) = \sqrt{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} CaR_{X_i}(a) CaR_{X_j}(a)}$ 방식으로 개별리스크들을 통합함 (CaR = Capital at Risk, VaR를 통하여 설정된 위험기초자본으로, 주어진 허용 수준 하에서 금융기관의 잠재적 손실을 흡수하기 위해 요구되는 자본 수준).

- 분산공분산 방법은 5가지의 가정을 기반으로 진행함.
  ① i번째 리스크 확률변수 X_i는 평균 μ_i와 분산 σ_i^2, 누적분포함수 $F_{X_i}(x)$를 가짐.
  ② 총 리스크에 대한 확률변수 X는 평균 μ_X와 분산 σ_X^2, 누적분포함수 $F_X(x)$를 가짐.
  ③ 총 리스크에 대한 확률변수 X는 확률변수 X_i가 통합되어 산출됨.
  ④ 확률변수 X_i와 확률변수 X의 분포가 동일한 경우, $F_X^{-1}(a) = F_{X_i}^{-1}(a)$를 만족함.
  ⑤ 리스크 자본은 VaR로 측정함 ($VaR = \mu + \sigma \times Z$).



3. 통합리스크 산출 방법

$\boldsymbol{CaR_X(a) = \sqrt{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} CaR_{X_i}(a) CaR_{X_j}(a)}}$ **증명**

① i번째 리스크 확률변수 X_i는 평균 μ_i와 분산 σ_i^2, 누적분포함수 $F_{X_i}(x)$를 가짐.
② 총 리스크에 대한 확률변수 X는 평균 μ_X와 분산 σ_X^2, 누적분포함수 $F_X(x)$를 가짐.
③ 총 리스크에 대한 확률변수 X는 확률변수 X_i가 통합되어 산출됨.
④ 확률변수 X_i와 확률변수 X의 분포가 동일한 경우, $F_X^{-1}(a) = F_{X_i}^{-1}(a)$를 만족함.
⑤ 리스크 자본은 VaR로 측정함 ($VaR = \mu + \sigma \times Z$).

$$\boldsymbol{CaR_X(a)} = \mu_X + \sigma_X F_X^{-1}(a)$$

$$= \mu_X + F_X^{-1}(a)\sqrt{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j} \; \left(\because \sigma_X^2 = \Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j\right)$$

$$= \mu_X + \sqrt{[F_X^{-1}(a)][F_X^{-1}(a)]\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j}$$

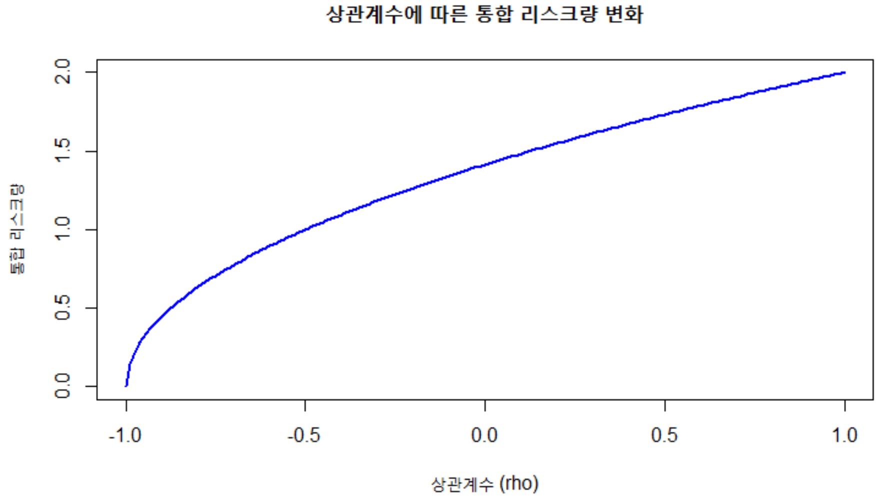
$$= \mu_X + \sqrt{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j \left[F_{X_i}^{-1}(a)\right]\left[F_{X_i}^{-1}(a)\right]} \; (\because ④) = \mu_X + \sqrt{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} \cancel{\sigma_i} \cancel{\sigma_j} \frac{[CaR_{X_i}(a) - \mu_i]}{\cancel{\sigma_i}} \frac{[CaR_{X_j}(a) - \mu_j]}{\cancel{\sigma_j}}} \; (\because ⑤)$$

$$= \sqrt{\boldsymbol{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} CaR_{X_i}(a) CaR_{X_j}(a)}}$$ (요구자본의 정의 기반?)

3. 통합리스크 산출 방법

리스크 통합과 분산효과

- 통합리스크 $CaR_X(a)$는 $\sqrt{\Sigma_i \Sigma_j \rho_{ij} CaR_{X_i}(a)\ CaR_{X_j}(a)}$로 표현됨.
- 이때, ρ_{ij}인 리스크 간의 상관성이 높으면 분산효과(diversification effect)가 적어 $CaR_X(a)$가 크게 산출됨.



- $A = 1\,, B = 1$
- $\rho = -1$일 때, 통합리스크는 $\sqrt{1^2 + 1^2 + 2(-1)} = 0$
- $\rho = 1$일 때, 통합리스크는 $\sqrt{1^2 + 1^2 + 2(1)} = 2$

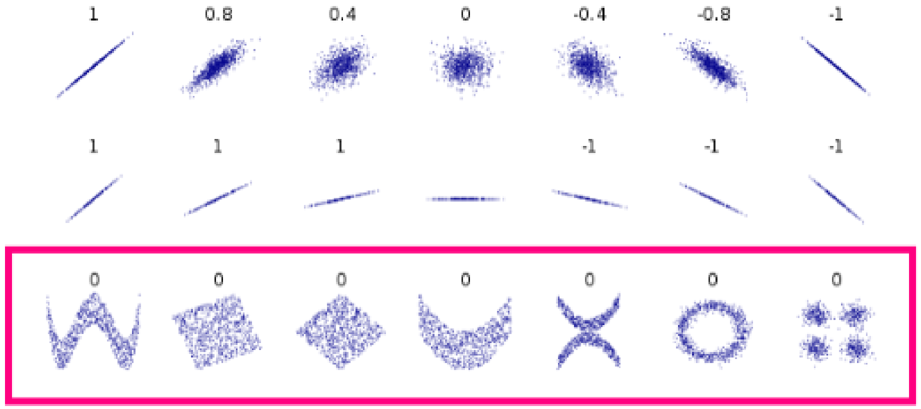
상관계수($\boldsymbol{\rho}$)와 상관행렬 ($\boldsymbol{R}$)

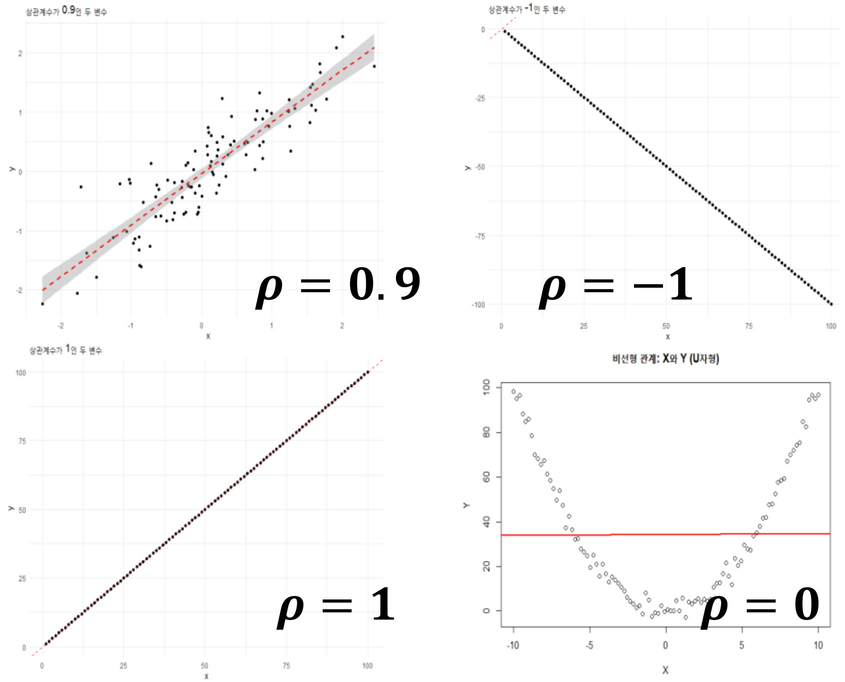
- 일반적으로 피어슨 직선상관계수(단순상관계수)를 사용함.
- 변수 X와 Y간의 상관계수 ρ_{XY}는 다음과 같이 계산함.
  - $\rho_{XY} = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var\ (Y)}}$
- 3개 이상의 리스크 통합 시, 상관계수로 구성된 상관행렬 R을 사용함.
  - $R = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdots & \rho_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{n1} & \cdots & \rho_{nn} \end{bmatrix}$
- χ가 각 유형별 리스크 양으로 구성된 $n \times 1$형태의 벡터일 때, 통합리스크 $CaR_X(a)$는 다음과 같이 표현함.
  - 통합리스크 $= \sqrt{\chi' R\ \chi}$.

3. 통합리스크 산출 방법

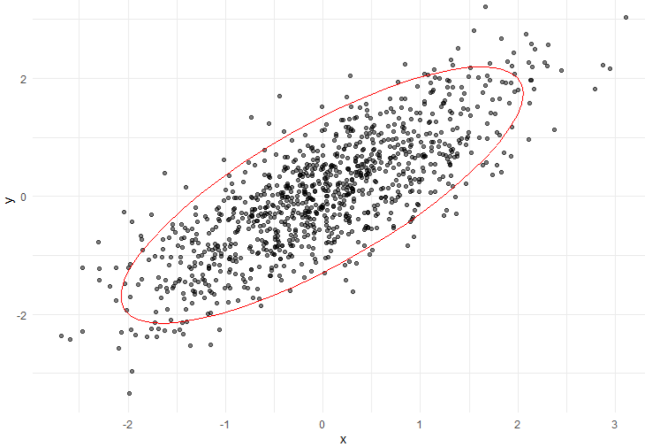
상관계수 사용의 문제점

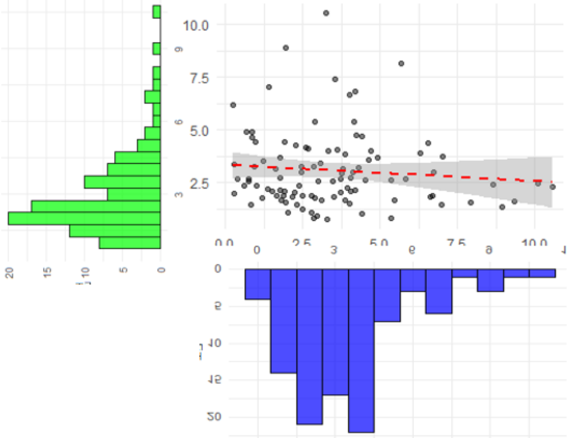
- 선형관계만 설명이 가능하며, 비선형관계를 설명할 수 없음.
    - $\rho = 1$인 경우 완전 양의 상관관계, $\rho = -1$인 경우 완전 음의 상관관계를 가지며 , $\rho = 0$인 경우 무상관을 가짐.
    - 하지만 $\rho = 0$인 경우여도 두 변수가 관련성을 가질 수 있음.





- 대규모 손실발생 사례를 과소평가함.
    - 직선상관계수는 확률변수 간의 분포가 타원형일 때 유용함.





3. 통합리스크 산출 방법

코퓰라의 개요

- 기존 피어슨 상관계수의 한계점을 보완함.
  - 분산공분산 방법을 사용하기 위해서는 개별 리스크의 분포와 통합 리스크의 분포가 무조건 같아야 한다는 가정이 필요하였으나, 실무에서는 성립하지 않을 수 있음.
  - 따라서, 일반적으로 독립이라는 가정을 기반으로 결합확률분포를 산출함.
- 위 방법은 계산이 용이하고 간단하지만, 실제 분포와의 차이가 존재함 (상관계수가 선형에 대한 영향을 반영하므로).

코퓰라의 정의

- 각각의 변수의 주변분포함수를 이용하여 다변수의 결합확률분포를 만드는 함수
- 2차원 코퓰라($[0,1]^2 \to [0,1]$)는 다음의 특성을 가짐.
  - (grounded) $[0,1]$에 있는 모든 u값에 대하여 $C(0,u) = C(u,0) = 0$임.
  - $[0,1]$에 있는 모든 u_1, u_2값에 대하여 $C(u_1,1) = u_1,\ C(1,u_2) = u_2$임.
  - (2-increasing) $[0,1]$에 있는 $u_1 \le v_1, u_2 \le v_2$인 모든 u_1, u_2, v_1, v_2에 대해서 $C(u_1,u_2) \le C(v_1,v_2)$를 만족함.

3. 통합리스크 산출 방법

코퓰라가 기반으로 하는 Sklar 정리

- 어떤 확률변수 $X_1, \dots, X_n$에 대해 각각 누적확률분포 $F_1, \dots, F_n$가 존재하고 모두 연속인 경우, 이를 결합할 수 있는 유일한 코퓰라 함수 C가 존재함.
    - $F(x_1, \dots, x_n) = C\big(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)\big) = \Pr(U_1 \le F_1(x_1), \dots, U_n \le F_n(x_n))$
    - $C(u_1, \dots, u_n) = F\left(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n)\right) = \Pr(U_1 \le u_1, \dots, U_n \le u_n)$
- 코퓰라 함수는 단변량 주변분포함수 F_i와 다변량 분포함수 F를 연결하는 함수임.

코퓰라의 유용성

- 코퓰라에 기초한 상관관계 계수(켄달의 타우 등)는 정보가 분리되어도 값이 불변함.
- 코퓰라에 기초한 변수간 관계분석은 변수간 상관성을 선형 상관관계보다 더 넓게 정의할 수 있음.
- 극치부분에서의 변수간 관계를 설정할 수 있음.

3. 통합리스크 산출 방법

코퓰라의 종류

•

	모수 코퓰라	비모수 코퓰라
특징	• 모수를 포함한 특정 코퓰라를 가정함. • 데이터를 이용하여 코퓰라의 모수를 추정함.	• 특정 모형을 가정하지 않고, 주어진 데이터를 그대로 반영하는 코퓰라임.

종류	• Elliptical copulas
	  • **Gaussian copula**
	  • **Student's t copula**
	
	• Archimedean copulas
	  • Clayton copula
	  • Gumbel copula
	  • Frank copula
		• Deheuvel's Empirical copula
		• Berstein copula
		• Kernel copula

3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포를 따르는 종속성 구조를 가진 변수들을 생성 (이때, 각 변수의 주변분포는 자유롭게 설정 가능)
    - 정규분포의 상관행렬 (R)을 기반으로 종속성을 설명함.
    - $C_R^{Gauss}(u_1, \dots, u_n) = \Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$.
- Φ_R: n차원 표준정규분포함수

3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \ldots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  ① 임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \ldots, Z_n$생성
  ② Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산
  ③ $(W_1, \ldots, W_n) = L^T(Z_1, \ldots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \ldots, W_n$생성
  ④ $u_i = \Phi(W_i)$를 계산함 $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$
  ⑤ $F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \ldots, X_n$ 산출

3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  - ① **임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \dots, Z_n$ 생성**
  - ② Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산
  - ③ $(W_1, \dots, W_n) = L^T(Z_1, \dots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \dots, W_n$생성
  - ④ $u_i = \Phi(W_i)$를 계산함 $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$
  - ⑤ $F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$ 산출

```
set.seed(123)

n <- 1000 # 각 변수별로 1000개의 난수를 생성
m <- 3 # 3개의 변수 사용
z <- matrix(rnorm(n * m), nrow = n, ncol = m)
```

3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  - ① 임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \dots, Z_n$생성
  - ② **Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산**
  - ③ $(W_1, \dots, W_n) = L^T(Z_1, \dots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \dots, W_n$생성
  - ④ $u_i = \Phi(W_i)$를 계산함 $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$
  - ⑤ $F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$ 산출

```
R <- matrix(c(1, 0.8, 0.5, 0.8, 1, 0.6, 0.5, 0.6, 1), nrow = 3) # 3x3 상관행렬
R
L <- chol(R) # 상관행렬 R에 대해서 Cholesky 분해
L
```

```
> R
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  1.0  0.8  0.5
[2,]  0.8  1.0  0.6
[3,]  0.5  0.6  1.0
> L <- chol(R)
> L
     [,1] [,2]      [,3]
[1,]    1  0.8 0.5000000
[2,]    0  0.6 0.3333333
[3,]    0  0.0 0.7993053
```

Choleksy 분해란?

- 대칭행렬에 대하여 하삼각행렬과 상삼각행렬로 분해하는 과정
- 행렬 L의 요소를 결정해주는 식은 다음과 같음.
  - k번째 행: $L_{ki} = \frac{a_{ki} - \Sigma_{j=1}^{i-1} L_{ij} L_{kj}}{L_{ii}}$
  - 대각성분: $L_{kk} = \sqrt{a_{kk} - \Sigma_{j=1}^{k-1} L_{kj}^2}$

3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \ldots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  ① 임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \ldots, Z_n$생성
  ② Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산
  ③ **$(W_1, \ldots, W_n) = L^T(Z_1, \ldots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \ldots, W_n$생성**
  ④ $u_i = \Phi(W_i)$를 계산함 $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$
  ⑤ $F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \ldots, X_n$ 산출

- 변수들이 독립적인 정규분포를 따르면서, 주어진 상관행렬을 만족하도록 샘플을 생성.
- 맨 처음에 생성한 난수 $Z_1, \ldots, Z_n$는 R을 만족하지 않지만 **$L^T Z_1, \ldots, L^T Z_n$는 R을 만족함.**

```
W <- Z %*% L # 상관계수가 반영된 난수 W를 생성
R
cor(W)
```

```
> R
     [,1] [,2] [,3]
[1,]  1.0  0.8  0.5
[2,]  0.8  1.0  0.6
[3,]  0.5  0.6  1.0
> cor(W)
          [,1]      [,2]      [,3]
[1,] 1.0000000 0.8139924 0.5102213
[2,] 0.8139924 1.0000000 0.6230853
[3,] 0.5102213 0.6230853 1.0000000
```

가우시안 분포의 종속성이 $W_1, \ldots, W_n$에 반영되었음을 확인.

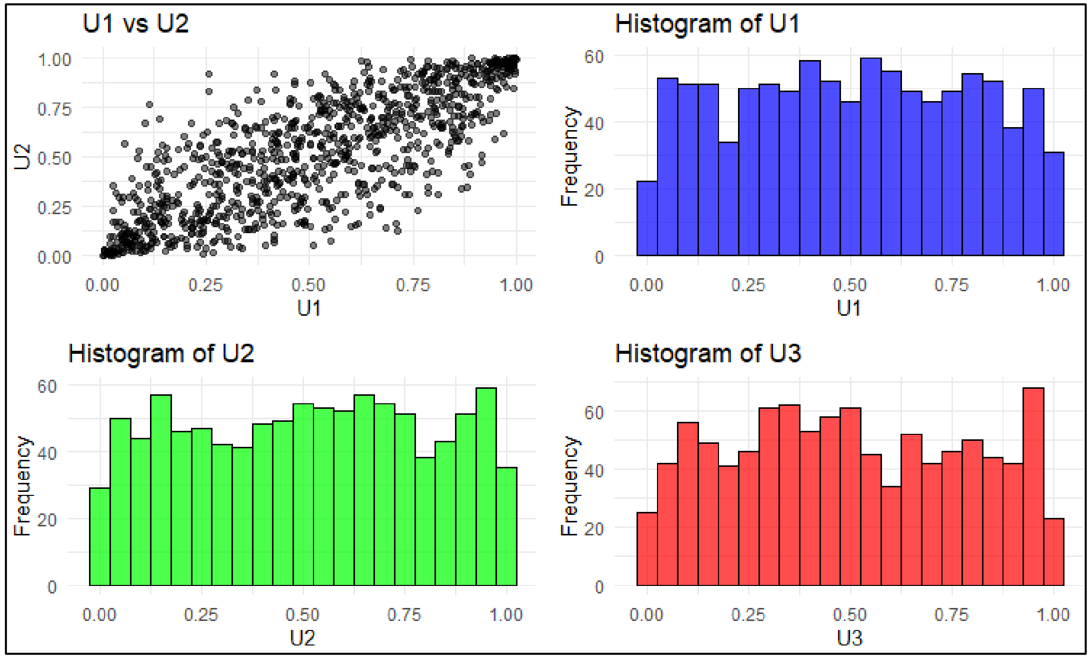
3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  - ① 임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \dots, Z_n$생성
  - ② Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산
  - ③ $(W_1, \dots, W_n) = L^T(Z_1, \dots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \dots, W_n$생성
  - ④ **$u_i = \Phi(W_i)$를 계산하여 표준정규분포의 누적분포함수에 적용함. $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$**
  - ⑤ $F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$ 산출

```
u <- pnorm(w)

df <- data.frame(U1 = u[,1], U2 = u[,2], U3 = u[,3])
```



3. 통합리스크 산출 방법

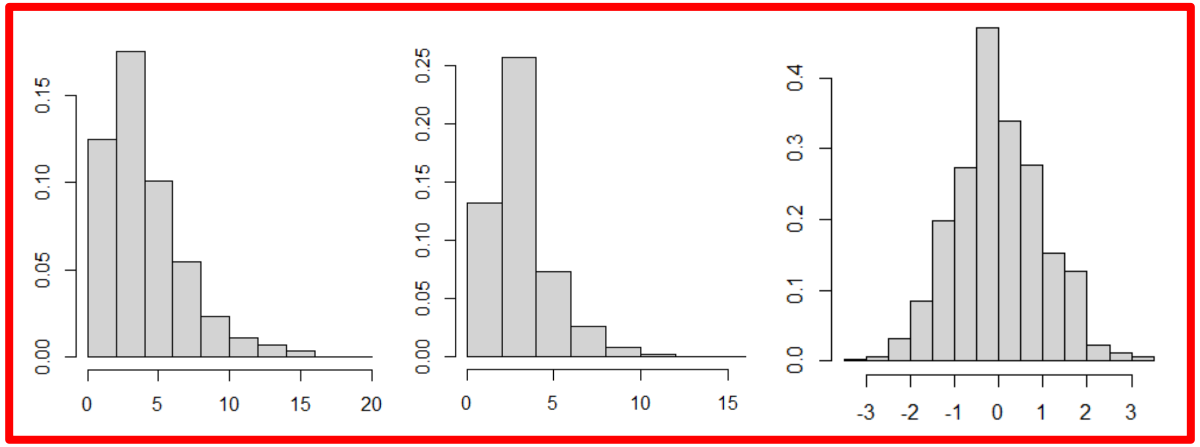
Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  ① 임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \dots, Z_n$생성
  ② Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산
  ③ $(W_1, \dots, W_n) = L^T(Z_1, \dots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \dots, W_n$생성
  ④ $u_i = \Phi(W_i)$를 계산함 $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$
  ⑤ **$F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$ 산출**

```
# 첫 번째 변수는 감마분포를 따른다고 가정
shape_X1 <- 2
scale_X1 <- 2
X1 <- qgamma(u[,1], shape = shape_X1, scale = scale_X1)

# 두 번째 분포는 로그노말 분포를 따른다고 가정
meanlog_X2 <- 1
sdlog_X2 <- 0.5
X2 <- qlnorm(u[,2], meanlog = meanlog_X2, sdlog = sdlog_X2)

# 세 번째 분포는 표준정규분포를 따른다고 가정
X3 <- qnorm(u[,3])
```



정규분포의 종속성을 반영한 확률변수

3. 통합리스크 산출 방법

Gaussian Copula (가우시안 코퓰라)

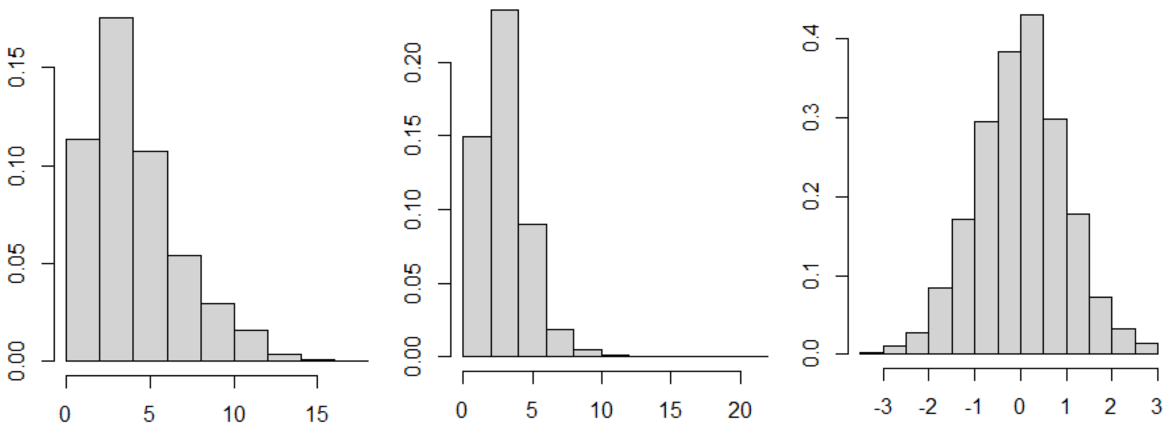
- 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$의 난수 생성 과정은 다음과 같음.
  - ① **임의의 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \dots, Z_n$생성**
  - ② **Cholesky 분해를 통해 $R = LL^T$인 L행렬 계산**
  - ③ **$(W_1, \dots, W_n) = L^T(Z_1, \dots, Z_n)$을 통해 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \dots, W_n$생성**
  - ④ **$u_i = \Phi(W_i)$를 계산함 $(\forall\, i,\ 0 \le u_i \le 1)$**
  - ⑤ **$F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 정규분포의 종속성을 가지는 확률변수 $X_1, \dots, X_n$ 산출**

```
library(copula)

# 상관행렬
rho_matrix <- matrix(c(1, 0.8, 0.5,
                      0.8, 1, 0.6,
                      0.5, 0.6, 1), ncol = 3)

# 정규분포 종속성을 반영하여줌
gaussian_copula <- ellipCopula("normal"
                              , param = rho_matrix[lower.tri(rho_matrix)]
                              , dim = 3, dispstr = "un")
# 종속성을 지닌 코퓰라 난수샘플 생성
samples <- rCopula(1000, gaussian_copula)

X1 <- qgamma(samples[,1], shape = 2, scale = 2)
X2 <- qlnorm(samples[,2], meanlog = 1, sdlog = 0.5)
X3 <- qnorm(samples[,3])
```



3. 통합리스크 산출 방법

Student's t Copula (스튜던트 t 코퓰라)

- t-Copula는 Gaussian copula와 유사하지만, 꼬리부분이 두터운 특성을 가지고 있음.
  - t-Copula는 상관관계 행렬과 함께 자유도(degrees of freedom)을 이용하여 변수들 간의 종속성을 설명함.
  - 자유도가 작을수록 꼬리에서의 종속성이 강해지며, 자유도가 낮을수록 t-분포는 가우시안 분포보다 꼬리가 두꺼워져 변수들 간의 극단적인 상황에서 더 높은 상관관계를 나타낼 수 있음.
- $C^t_{\nu,R}(\boldsymbol{u}) = \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_\nu^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{\nu+n}{2})}{(\pi\nu)^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)|R|^{1/2}} \left(1+\frac{1}{\nu}x^T R^{-1} x\right)^{-(\nu+n)/2} dx.$

- t-Copula를 이용해서 **상관성이 있는 확률변수 $\boldsymbol{X_1, \dots, X_n}$의 난수**를 생성하는 방법은 다음과 같음.

① 독립인 표준정규분포 난수 $Z_1, \dots, Z_n$와 $Y_1, \dots, Y_\nu$를 생성한 후, $\boldsymbol{\omega = Y_1^2 + \cdots + Y_\nu^2}$

② Cholesky 분해를 통해 상관행렬 $R = LL^T$인 L행렬을 계산함.

③ $(W_1, \dots, W_n) = L^T(Z_1, \dots, Z_n)$를 통하여 상관계수가 반영된 표준정규분포의 난수 $W_1, \dots, W_n$를 생성함.

④ 상관계수가 반영된 t분포 난수인 $\boldsymbol{T_i = W_i\sqrt{\nu/\omega}}$를 생성함.

⑤ 모든 $i = 1,2, \dots, n$에 대하여 $u_i = \begin{cases} 1 - Tdist(T_i, \nu, 1), & T_i \geq 0 \\ Tdist(-T_i, \nu, 1), & T_i < 0 \end{cases}$ 를 계산함.

⑥ $F_i(X_i) = u_i$ 또는 $F_i^{-1}(u_i) = X_i$를 이용하여 상관성이 있는 $X_1, \dots, X_n$를 산출함.

3. 통합리스크 산출 방법

Archimedean copula (아르키메데안 코퓰라)

- Elliptical copula는 타원형분포(정규분포, t-분포)에서 파생되며, 상관행렬(+자유도)을 이용하여 종속성을 모델링함 → 꼬리 종속성 모델링에는 한계 존재.
- Archimedean copula는 비선형적이고 다양한 형태의 종속성을 모델링을 할 수 있어 꼬리 종속성을 보다 유연하게 설명할 수 있음.
- Archimedean copula는 다음과 같음.
  - $C_\theta(u,v) = \Phi^{-1}(\Phi(u),\Phi(v))$.
  - Φ는 생성함수(generator)임: $\Phi:[0,1] \rightarrow [0,+\infty]$이며, 연속/감소/ 볼록함수이고 $\Phi(1)=0$임.
  - 의사역재생함수 (Φ^{-1})는 다음과 같음: $\Phi = \begin{cases} \Phi^{-1}(v), & 0 \le v \le \Phi(0) \\ 0, \Phi(0) \le v \le +\infty \end{cases}$.

- Archimedean copula의 종류 및 코퓰라함수와 생성함수는 다음과 같음.

	$C_\theta(u,v)$	$\Phi_\theta(x)$
Clayton copula	$\max([u^{-\theta}+v^{-\theta}-1]^{-\frac{1}{\theta}},0)$	$\frac{1}{\theta}(x^{-\theta}-1)$
Gumbel copula	$\exp\left\{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{-1/\theta}\right\}$	$(-\ln x)^\theta$
Frank copula	$-\frac{1}{\theta}\ln(1+\frac{(e^{-\theta u}-1)(e^{-\theta v}-1)}{e^{-\theta}-1})$	$-\ln(\frac{e^{-\theta x}-1}{e^{-\theta}-1})$

3. 통합리스크 산출 방법

연관성 측도

- 피어슨의 직선상관계수, Kendall's tau, Spearman's rho등을 통해 변수 간의 연관성을 확인함.

Kendall's tau

- 두 변수들 간의 순위를 비교하여 연관성을 제시함.
    - 피어슨 상관계수는 변수 값의 평균과 분산을 사용하기 때문에, 변수가 정규분포를 따르지 않으면 오류 발생함.
    - Kendall's tau는 이러한 단점을 보완함.
- Concordant pair(C)와 Disconcordant pair(D)를 이용하여 kendall's tau값을 계산함.
    - $\tau = \frac{C-D}{C+D}$
    - C: 각 변수의 비교 대상의 상하관계가 같은 경우
    - D: 각 변수의 비교 대상의 상하관계가 다른 경우

Spearman's rho

- 값에 순위를 매겨 그 순위에 대해 상관계수를 구하는 것 (순서 상관계수).
- 코퓰라 함수 C로부터 독립 상등인 세 확률벡터 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2)$, (X_3, Y_3)에 대한 Spearman's rho (ρ_S)는 다음과 같음.
    - $\rho_S = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n(n^2-1)}$

3. 통합리스크 산출 방법

Kendall's tau 예제

- $\tau = 1/{-1}$인 경우

$\tau = 1$인 경우				
	사람 A	사람 B	사람 C	사람 D
국어	50	60	70	80
수학	60	70	80	90

$\tau = -1$인 경우				
	사람 A	사람 B	사람 C	사람 D
국어	50	60	70	80
수학	70	60	50	40

- τ 계산 예제

	사람 A	사람 B	사람 C	사람 D
국어	50	70	90	80
수학	60	80	70	90

Pair	국어	수학	C/D
A, B	50<70	60<80	C
A, C	50<90	60<70	C
A, D	50<80	60<90	C
B, C	70<90	80>70	D
B, D	70<80	80<90	C
C, D	90>80	70<80	D

$C = 4, D = 2$

$$\therefore \boldsymbol{\tau} = \frac{4-2}{4+2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

```
> x = c(50,70,90,80)
> y = c(60,80,70,90)
> KendallTauA(x,y)
[1] 0.3333333
```

3. 통합리스크 산출 방법

Spearman's rho 예제

① 두 변수 X와 Y의 값이 다음과 같이 구성되어 있음.

X	Y
30	8
10	4
40	7
20	6
50	9

② 각 변수의 값을 순위로 변환한 후, 각 쌍의 순위차이를 계산함.

X	Y	X순위	Y순위	차이(d)	d^2
30	8	3	4	−1	1
10	4	1	1	0	0
40	7	5	3	1	1
20	6	2	2	0	0
50	9	5	5	0	0

③ Spearman's rho를 계산함.

- $\rho = 1 - \frac{6\,\Sigma d^2}{n(n^2-1)} = 1 - \frac{6\times2}{5\times(5^2-1)} = 1 - 0.1 = 0.9$

```
> X <- c(3, 1, 4, 2, 5)
> Y <- c(8, 4, 7, 6, 9)
> corr <- cor.test(x=X, y=Y, method = 'spearman')
> corr

        Spearman's rank correlation rho

data:  X and Y
S = 2, p-value = 0.08333
alternative hypothesis: true rho is not equal to 0
sample estimates:
rho
0.9
```

4. Solvency II

개별 리스크 산출 (RBC) → 개별 리스크 통합 → Solvency II 규제모형 → RBC vs SII

- 보험리스크
- 시장리스크
- 금리리스크
- 신용리스크
- 운영리스크

- 분산공분산 방법
- Copula 방법

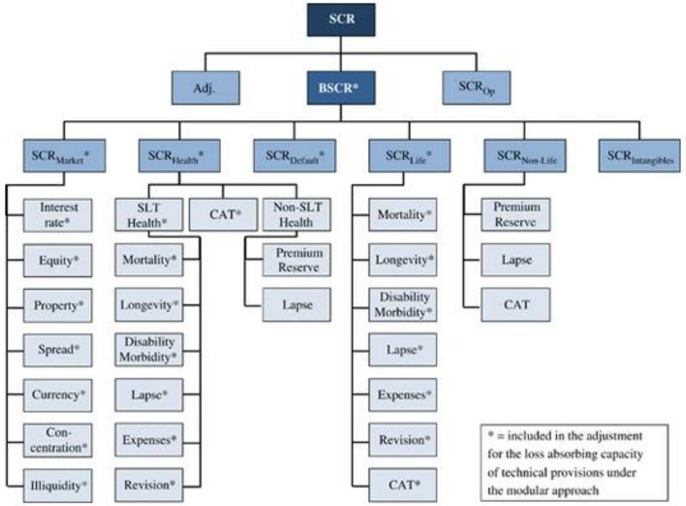
Solvency II란?

- 보험사에 예상치 못한 손실이 발생해도 보험금 지급의무를 이행할 수 있도록 준비금을 쌓게 하는 자기자본 규제제도임.
- 리스크 중심의 경제적 요구 자본 개념을 도입함.
- 보험사별 리스크 특성을 반영하여 지급능력 요구자본(SCR), 최소요구자본(MCR), 책임준비금을 결정함.
- 3개의 축을 가짐: 지급능력(pillar 1), 리스크 관리(pillar 2), 공시(pillar 3)

지급능력 요구자본(SCR; Solvency Capital Requirements)

- 보험사업자의 파산확률을 0.5% 이내로 하기 위해 보유하여야 하는 요구자본임.
- 모든 잠재손실을 표준공식 또는 내부모형을 이용하여 신뢰도 99.5%의 VaR로 측정한 값.

4. Solvency II



SCR 산출 표준모형

- 분류된 각 리스크 별로 산출한 SCR을 결합하는 방식인 모듈 방식을 사용
- SCR 계산 시, 리스크 간 상관계수를 이용.
- 오른쪽 그림과 같이 QIS-5에서 제시한 SCR모듈구조를 기반으로 산출함.
    - 기본요구자본($BSCR$)과 운영리스크 요구자본(SCR_{op})로 나눔 (운영리스크의 불확실성 때문).
- BSCR은 6개의 모듈로 구성됨.
    - 시장리스크, 건강보험리스크, 거래상대방파산리스크, 생명보험리스크, 손해보험리스크, 무형자산리스크.

Solvency II의 보험부채평가 원칙

- SII에서는 자체적인 재무제표를 작성 (총 재무제표 방식; Total Balance Sheet)
- 자산, 부채, 순자산 및 적정요구자본 상호 간의 상관관계를 인식하여 자산 및 부채의 공정가치를 평가함.
- SII에서 **부채인 기술적 준비금 (TP)**은 최선추정치(BE)와 리스크마진(RM)의 합으로 정의됨.
    - BE: 보험 사업자가 보험계약에 대한 권리와 의무를 다른 보험사업자에게 이전할 경우 지급해야 하는 금액
    - RM: 보험계약에 내재된 불확실성에 대비한 버퍼 (buffer)

4. Solvency II

Solvency II와 RBC 비교

	Risk Based Capital	Solvency II
재무제표	• 공시용 재무제표 (원가+시가평가)	• 총 재무제표 방식 • (자산, 부채, 순자산 및 적정요구자본 상호 간의 상관관계 인식)
요구자본 산출단위	• 생명보험, 장기손해보험, 일반손해보험으로 구분됨 • 일반손해보험은 일반보험, 자동차보험 및 보증보험으로 구분하고 있음.	• LoBs별로 기술적 준비금 평가 및 SCR 계산 • 생명보험과 일반보험으로 구분됨.
리스크의 분산효과	• 상관계수가 0또는 1임.	• 하부리스크 모듈별로 통합할 때마다 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1 및 • 음수의 상관관계를 사용.
리스크 계산방식	• Factor방식 • 익스포저 x 리스크 계수의 공식 사용	• 주로 시나리오 방식을 이용. • 금리, 사망률, 해약률 등 리스크 요인에 shock을 주고, 그에 따른 순 자산가치의 변화분을 SCR로 계산함.
통계 신뢰수준	• VaR(95%)	• VaR(99.5%)
요구자본의 구분	• 요구 자본에 대한 구분이 없음. • 지급여력비율로 표현	• MCR(최소요구자본)과 SCR(지급여력 요구자본)으로 구분
가용 자본의 계층화	• 자본 계층화 되어 있지 않음.	• Tier 1, 2, 3로 자본 계층화
내부모형 적용	• 내부 모형을 적용하지 않고, 표준 방법만 허용.	• 내부 모형 적용 가능
리스크 분류 체계	• 보험(생/손보), 금리, 시장, 신용 및 운영리스크로 분류	• 시장(금리리스크 포함), 신용(거래상대방 부도 리스크), 보험(생/손보, 건강보험), 무형자산 리스크 및 운영리스크로 구분됨.

Appendix