TD : Calcul de Π

F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

1 Position du problème

On se propose d'étudier différentes méthodes pour calculer les décimales du nombre π.

1.1 Convergence d'une suite

1.1.1 Méthode d'Archimède

Le premier calcul mathématique de π remonte à Archimède de Syracuse (287-212 avant J.-C.). Celui-ci reposait sur un encadrement du périmètre du cercle par ceux de polygones réguliers inscrit et circonscrits. Soit p_n le périmètre d'un polygone régulier à n côtés inscrit dans un cercle de diamètre unité et p'_n celui d'un polygone régulier à n côtés circonscrit au même cercle. En utilisant l'inégalité $p_n < \pi < p'_n$ pour $n = 6 \times 2^k$, on peut obtenir une approximation de π avec :

$p_n = n.u_n \left(\text{où } u_n = \sin\frac{\pi}{n},\ u_6 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{2n} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-u_n^2}}{2}}\right)$

et $p'_n = n.u'_n \left(\text{où } u'_n = \tan\frac{\pi}{n},\ u'_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ et } u'_{2n} = \frac{u_n}{\sqrt{1-u_n^2}}\right)$.

Programmer le calcul de la suite u_n par une méthode itérative et par une méthode récursive. Pour évaluer la vitesse de convergence de cette suite, tracer $\log(\pi - p_n)$ en fonction de n.

1.1.2 Méthode de Monte-Carlo

Tirer au sort un couple (x_i, y_i) de nombres compris entre 0 et 1. Évaluer $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Si $r_i \leq 1$, alors incrémenter un compteur c. Réitérer le calcul pour un très grand nombre n de couples $\{(x_i, y_i)\}$. Tracer $u_n = 4 \times c/n$ en fonction de n.

1.2 Convergence d'une série

1.2.1 **Série** Arctan

D'après la formule de J. Gregory (1638-1675) : $\operatorname{Arctan} x = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k.x^{2k+1}}{2k+1}$. Lorsque l'on arrête la série au rang n, l'erreur commise est inférieure ou de l'ordre de $\frac{|x|^{2n+3}}{2n+3}$.

On en déduit la formule de Leibniz : $\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan} 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Programmer le calcul de la série $S_n = 4 \times \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

Pour évaluer la vitesse de convergence de cette suite, tracer $\log(|\pi - S_n|)$ en fonction de n.

Cette série convergeant assez lentement (car $x = 1$), on peut - pour accélérer la convergence - utiliser des combinaisons de fonctions $\operatorname{Arctan} x$ avec $x \ll 1$. Programmer une série utilisant la formule de Gauss : $\pi = 48. \operatorname{Arctan}\frac{1}{18} + 32. \operatorname{Arctan}\frac{1}{57} - 20. \operatorname{Arctan}\frac{1}{239}$

1.2.2 Série de Ramanujan

Au début du vingtième siècle, S. Ramanujan, mathématicien autodidacte indien, proposa la série : $\displaystyle\frac{1}{\pi} = \frac{2.\sqrt{2}}{9801} \times \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(4k)!.(1103 + 26390.k)}{(n!)^4.393^{4n}}$.

Programmer le calcul de la série $S'_n = \frac{9801}{2.\sqrt{2}} \times \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(4k)!.(1103+26390.k)}{(n!)^4.393^{4n}}}$.

Cette série converge très vite : vérifier qu'au bout de 2 termes, on a déjà π à 8 décimales. Mais les termes supplémentaires ne permettent de gagner qu'une précision relativement faible. Évaluer l'évolution de la précision $P_n = \pi - S'_n$ en traçant $\log(|P_{n+1} - P_n|)$ en fonction de n.