Initiation à la mécanique quantique
Interféromètre de Mach-Zenhder

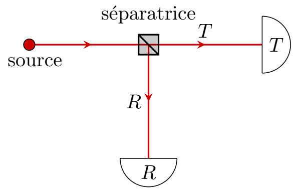
F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

1 Présentation

— La lumière est constituée de particules élémentaires indivisibles : les photons.
— On sait réaliser des miroirs semi-transparents (ou des lames semi-réfléchissantes) qui laissent passer la moitié de la lumière et qui réfléchissent la moitié de la lumière. (C'est assez facile à faire en jouant sur l'épaisseur du dépôt métallique). Très exactement, cela veut dire ceci : si on éclaire ce miroir semi-transparent avec un laser de 100 mW : 50 mW est réfléchi et 50 mW est transmis.

1.1 Dispositif à une séparatrice

Dans le cas où un photon unique arrive sur un miroir semi-transparent, on ne peut pas prédire si celui-ci sera transmis ou réfléchi. Le phénomène est aléatoire (complètement imprévisible).



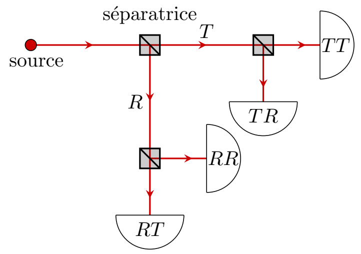
Simuler l'arrivée d'un photon sur un miroir semi-transparent
— en utilisant des probabilités classiques
— en utilisant le formalisme quantique.
Ce formalisme repose sur trois principes.
- Premier principe : la probabilité P pour qu'une particule, émise initialement en I, soit détectée finalement en F, est le module carré d'un nombre complexe qui représente l'amplitude de probabilité pour que la particule aille de I à F. On écrit : $P = \Big| \langle F|I \rangle \Big|^2$.
  Avec cette notation : le symbole $\langle \ldots \rangle$ signifie "amplitude de probabilité pour que ..." et le contenu des crochets signifie "condition finale | condition initiale".
  Pour une particule libre (i.e. soumise à aucune force), d'impulsion $\vec{p}$, l'amplitude de probabilité d'aller de I à F est (à un facteur numérique près) : $\langle F|I \rangle = \frac{1}{IF}.e^{i.\vec{p}.\vec{IF}\ /\hbar}$
  avec $p^2.c^2 = E^2 - (m_0.c^2)^2$ pour une particule relativiste
  ou $p^2 = 2.m.E_c$ (i.e. $\vec{p} = m.\vec{v}$) pour une particule non-relativiste.
- Deuxième principe : lorsqu'une particule a à sa disposition deux chemins indiscernables 1 **ou** 2 pour aller de I à F, on **somme** les amplitudes de probabilité : $\langle F|I \rangle = \langle F|I \rangle_1 + \langle F|I \rangle_2$.
  On a alors : $P = \Big| \langle F|I \rangle_1 + \langle F|I \rangle_2 \Big|^2$.
  En revanche, si les deux chemins sont discernables, on somme les probabilités (et non les amplitudes) : $P = \Big| \langle F|I \rangle_1 \Big|^2 + \Big| \langle F|I \rangle_2 \Big|^2 = P_1 + P_2$.
- Troisième principe : lorsqu'un chemin particulier se décompose en deux étapes, par exemple s'il faut que la particule aille de I à E **et** de E à F, on **multiplie** les amplitudes de probabilité : $\langle F|I \rangle = \langle F|E \rangle.\langle E|I \rangle$.

Ici, la source émet une particule dans l'état $|S\rangle$.
On montre, en électromagnétisme, que la réflexion sur un miroir introduit un déphasage qui se traduit ici par une multiplication par $e^{i.\pi/2} = i$.
L'état initial $|S\rangle$ doit s'écrire : $|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}.(|T\rangle + i.|R\rangle)$; calculer $\langle T|S\rangle$ et $\langle R|S\rangle$; en déduire les probabilités d'atteindre les détecteurs R et T.
On pourra utiliser la bibliothèque `sympy.physics.quantum` et créer une une classe de Bra et Ket orthogonaux :

```
from sympy.physics.quantum import HilbertSpace, Ket, Bra

class OrthogonalKet(Ket):

    def __new__(cls, n):
        return Ket.__new__(cls, n)

    @property
    def n(self):
        return self.label[0]

    @classmethod
    def dual_class(self):
        return OrthogonalBra

    @classmethod
    def _eval_hilbert_space(cls, label):
        return HilbertSpace()

    def _eval_innerproduct_OrthogonalBra(self, bra, **hints):
        if self.n == bra.n:
            return 1
        else:
            return 0


class OrthogonalBra(Bra):

    def __new__(cls, n):
        return Bra.__new__(cls, n)

    @property
    def n(self):
        return self.label[0]

    @classmethod
    def dual_class(self):
        return OrthogonalKet
```

1.2 Deux séparatrices en cascade

Simuler le comportement d'un photon sur deux miroirs semi-transparents en cascade (voir figure).
— en utilisant des probabilités classiques
— en utilisant le formalisme quantique.
Calculer $\langle TT|S\rangle$, $\langle TR|S\rangle$, $\langle RR|S\rangle$ et $\langle RT|S\rangle$; en déduire les probabilités d'atteindre les différents détecteurs.



1.3 Interféromètre de Mach Zehnder

Simuler le comportement d'un photon dans un interféromètre de Mach Zehnder (voir figure).
— en utilisant des probabilités classiques
— en utilisant le formalisme quantique.
Les miroirs parfaits transforment $|T\rangle$ en $|T\rangle = i.|T'\rangle$ et $|R\rangle$ en $|R\rangle = i.|R'\rangle$. Calculer $\langle D_1|S\rangle$ et $\langle D_2|S\rangle$; en déduire les probabilités d'atteindre les détecteurs D_1 et D_2.
Comparer les deux méthodes et conclure.