TD n°3

B. Louédoc & F. Kany. ISEN-Brest

Exercice 1.

Objectif : Compréhension de la commande random()

La commande `random()` permet de tirer un réel au hasard dans l'intervalle $[0, 1]$.

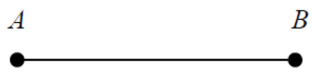
Pour comprendre ce que cela signifie et l'utilisation que l'on peut en faire, écrire un programme, ayant en argument 2 réels a, b de $[0, 1]$ $(0 < a < b)$ et le nombre r de fois que vous allez tirer au hasard un réel dans $[0, 1]$, à l'aide la commande `random()`, pour estimer la probabilité que le réel soit compris entre a et b. Que constatez-vous ?

Exercice 2.

Objectif : Utilisation de la commande random() pour simuler un évènement ayant une probabilité p de se produire $(0 < p < 1)$**.**

p désigne un réel de $]0, 1[$

Soit le segment $[A, B]$ ci-contre



Un pion se déplace sur les sommets du segment $[A, B]$ selon le protocole suivant :

— Le pion est sur le sommet A au départ (instant 0)

— Lorsque le pion est à un instant donné sur le sommet A du segment, il se déplace à l'instant suivant vers le sommet B avec la probabilité $q = 1 - p$

— Lorsque le pion est à un instant donné sur le sommet B, il se déplace à l'instant suivant vers le sommet A avec la probabilité $q = 1 - p$

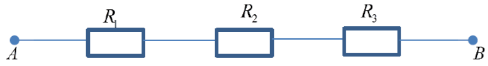
1. Ecrire un programme, ayant en argument le réel p et un entier n, qui simule l'expérience aléatoire et qui retourne la position du pion à l'instant n.
2. Ecrire un programme, ayant en argument le réel p, un entier n et le nombre r de fois que vous allez simuler l'expérience pour votre estimation, et qui retourne la probabilité d'être en A à l'instant n.
3. Tracer sur un même graphique des courbes représentatives de fonctions $f_n : p \to f_n(p)$ où $f_n(p)$ désigne votre estimation de la probabilité d'être en A à l'instant n.
4. Comment peut-on se servir de ce qui a été fait pour répondre au problème suivant :
   Une succession d'individus A_1, A_2,... A_n se transmet une information binaire du type « oui » ou « non ».
   Chaque individu A_k transmet l'information qu'il a reçu avec la probabilité p à l'individu A_{k+1} ou la transforme en son inverse avec la probabilité $q = 1 - p$. $(0 < p < 1)$
   Chaque individu se comporte indépendamment des autres.
   Calculer la probabilité p_n pour que l'information reçue par A_n soit identique à celle émise par A_1.
   Quelle est la limite de p_n quand $n \to \infty$?

Exercice 3.

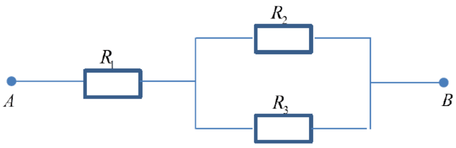
Objectif : Comment tenir compte de l'indépendance de 2 évènements ou de la mutuelle indépendance d'une famille d'évènements dans une simulation informatique d'une expérience aléatoire ?

On dispose de 3 résistances R_1, R_2, R_3. Chaque résistance R_i a une probabilité p_i de fonctionner. Quand une résistance ne fonctionne pas, elle fait office de coupe-circuit.
Le fonctionnement ou non de l'une des résistances est indépendante du fonctionnement ou non des autres.
Déterminer, en fonction de p_1, p_2, p_3, pour chacun des 3 circuits ci-dessous, la probabilité qu'un courant puisse parcourir le dipôle AB.

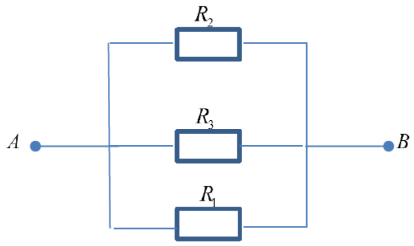
Circuit 1 :



Circuit 2 :



Circuit 3 :



1. Ecrire, pour chacun des 3 schémas, un programme, ayant en argument p_1, p_2, p_3, et qui retourne 1 si un courant peut parcourir le dipôle AB et 0 sinon.
2. Ecrire, pour chacun des 3 schémas, un programme, ayant en argument p_1, p_2, p_3 et le nombre r de fois que vous avez simulé l'expérience, et qui retourne une estimation de la probabilité qu'un courant puisse parcourir le dipôle AB.

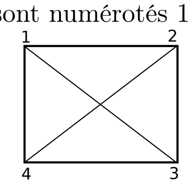
Exercice 4.

On considère un jeu à plusieurs manches entre trois joueurs A, B, C qui se déroulent de la manière suivante :
- — Pour chaque manche, il n'y a qu'un vainqueur possible.
- — Lors de chaque $n^{ième}$ manche ($n \geq 1$), quand elle a lieu, A et B ont la même probabilité $p = 0.247$ de la remporter et C a la probabilité $1 - 2.p$ de la remporter.
- — Le jeu s'arrête quand un des trois joueurs a remporté 2 manches consécutives et ce joueur est déclaré vainqueur du jeu.

1. Ecrire un programme qui simule le déroulement d'une manche et qui retourne le nom du vainqueur de la manche
2. Ecrire un programme qui simule le jeu et qui retourne le nom du vainqueur du jeu
3. Ecrire un programme qui prend en argument le nombre r de fois où on a répété l'expérience pour notre simulation, et qui retourne une estimation de la probabilité que A soit le vainqueur du jeu.

Exercice 5.

Objectif : Programmation d'une marche aléatoire sur un carré
p désigne un réel de $[0, 1[$.
Soit le carré ci-dessous où les sommets sont numérotés 1, 2, 3 et 4



Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :
— Le pion est sur le sommet 1 au départ

— Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin (relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2.p$.

1. Ecrire un programme, ayant en argument p et un entier n, qui simule l'expérience aléatoire et qui retourne la position du pion à l'instant n.
2. Ecrire un programme, ayant en argument p, un entier n et le nombre de fois que vous avez simulé l'expérience pour votre estimation, et qui retourne une estimation des probabilités du pion d'être à l'instant n respectivement en 1, 2, 3, 4.

Exercice 6

Pour chaque n de $\mathbb{N}$ la probabilité qu'une famille ait n enfants est $\frac{1}{e.n!}$.
À chaque naissance, la probabilité d'avoir une fille ou un garçon est la même.

1. Ecrire un programme qui simule l'expérience aléatoire et qui retourne le nombre d'enfants de la famille.
2. Ecrire un programme qui simule l'expérience aléatoire et qui retourne la composition de la famille dans l'ordre des naissances
3. Ecrire un programme qui prend en argument le nombre r de fois où on a répété l'expérience pour notre simulation et qui retourne la probabilité que la famille ait 2 filles exactement.

Exercice 7

On considère un combat entre trois tireurs A, B et C.
Le combat se déroule en une suite de manches.

— Lors de la manche 1, les trois tireurs A, B et C sont en lice.

— Lors de chaque $n^{ième}$ manche $(n \geq 1)$:
  — le tireur A, quand il est encore en lice et qu'il a encore des adversaires, a une probabilité de $\frac{2}{3}$ de toucher sa cible et ceci indépendamment des tirs des autres tireurs.
  — le tireur B, quand il est encore en lice et qu'il a encore des adversaires, a une probabilité de $\frac{1}{2}$ de toucher sa cible et ceci indépendamment des tirs des autres tireurs.
  — le tireur C, quand il est encore en lice et qu'il a encore des adversaires, a une probabilité $\frac{1}{3}$ de toucher sa cible et ceci indépendamment des tirs des autres tireurs.

— Lors de chaque $n^{ième}$ manche $(n \geq 1)$, la cible de chaque tireur est le tireur qui lui paraît le plus dangereux.

— Lorsque, lors d'une $n^{ième}$ manche, un tireur est touché, il est éliminé et ne participe plus aux manches suivantes.

— Lorsque, lors d'une $n^{ième}$ manche, un tireur se retrouve seul en lice, plus rien ne se passe lors des manches suivantes et il est déclaré vainqueur du combat.

On introduit les évènements suivants :

On note ABC_n $(n \geq 1)$ l'évènement : « à l'issue de la $n^{ième}$ manche, les tireurs A, B et C sont encore tous en lice »

On note AB_n $(n \geq 1)$ l'évènement : « à l'issue de la $n^{ième}$ manche, seuls les tireurs A, B sont encore en lice »

On définit de même AC_n, BC_n.

On note A_n $(n \geq 1)$ l'évènement : « le jeu s'est terminé au plus tard à l'issue de la $n^{ième}$ manche et le vainqueur est le tireur A »

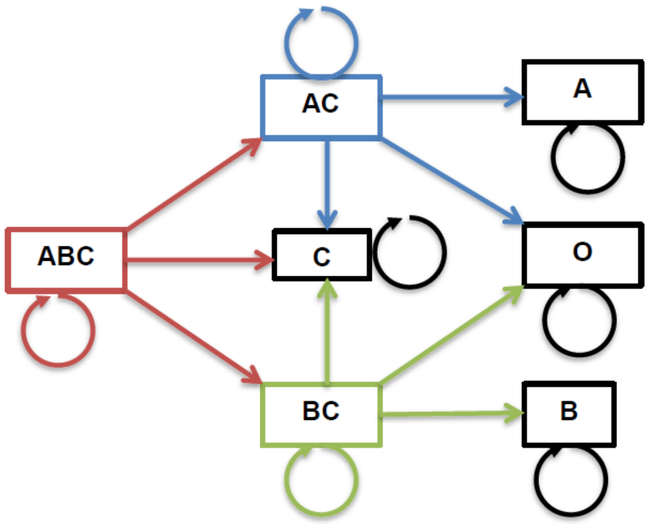
On définit de même B_n, C_n.

Enfin, on note O_n $(n \geq 1)$ l'évènement : « à l'issue de la $n^{ième}$ manche, les trois tireurs sont éliminés »

1. Expliquer pourquoi l'évènement AB_n est l'évènement impossible.

   A l'issue de chaque manche, il y a donc 7 états possibles : les états ABC, AC, BC, A, B, C, O.

   On peut modéliser la situation par le graphe suivant :



2. En utilisant des simulations informatiques, déterminer une estimation des probabilités qui apparaissent sur ce graphe.
3. Un pion initialement en ABC à l'instant 1 se déplace sur ce graphe avec les probabilités que vous ont donné les simulations informatiques.

   Ecrire un programme, ayant un argument un entier n, et qui retourne la position du pion à l'instant n.
4. Ecrire un programme, ayant un argument un entier n et le nombre r de fois que vous avez simulé l'expérience aléatoire, et qui retourne une estimation des probabilités d'être à l'instant n respectivement en ABC, AC, BC, A, B, C, O.
5. Représenter sur un même graphe les fonctions qui à un entier $n \geq 10$ associent les probabilités d'être à l'instant n respectivement en ABC, AC, BC, A, B, C, O.
6. Quelle est une estimation de la probabilité que le vainqueur du combat soit A, soit B, soit C ?