Salle de devoir surveillé
(probabilités récursives)

F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

Problème original

Pour un devoir surveillé, n élèves doivent s'assoir dans une salle avec n tables à leurs noms. Les élèves n'ont pas regardé le plan de la salle et s'assoient au hasard[*] dans la salle. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne se soit assis à la bonne place ?

[*] Au hasard signifie exactement ceci : les élèves discutent debout en étant répartis de façon quelconque dans la salle. Chaque élève est à une plus courte distance d'une des tables et, pour chaque table, cette distance la plus courte correspond à un élève distinct. À l'instant de la sonnerie, tous les élèves s'assoient, en même temps, à la table dont ils sont la plus proche.

Remarque : il peut être intéressant de résoudre le problème généralisé ci-dessous pour répondre au problème original.

Problème généralisé

On considère la généralisation suivante.

Le surveillant ne connaît pas les élèves.

k élèves, qui n'ont pas révisé, envoient un élève d'une autre classe à leur place pour faire le devoir surveillé. (On suppose que les k "remplaçants" ne sont pas des homonymes des k élèves qui se sont fait remplacés).

Il y aura toujours n élèves dans la salle mais k d'entre eux n'ont pas leur véritable nom inscrit sur le plan de la salle (et pour cause !).

On reprend le problème précédent où les n élèves s'installent au hasard sans regarder le plan de classe. Les k "remplaçants" sont forcément à une place qui n'est pas à leur véritable nom.

On note $p_{n,k}$ la probabilité qu'aucun élève ne se soit assis à la place correspondant à son véritable nom lorsqu'il y a k "remplaçants" parmi les n élèves.

Calculer $p_{n,k}$ par récurrence.

Remarque : $p_{n,0}$ correspond au problème original.

Limite

Calculer $p_{n,0}$ pour n grand et conjecturer la limite : $\lim\limits_{n\to\infty} p_{n,0}$