

# Collection de vignettes

ISEN-Brest. Croix-Rouge. F. Kany

On souhaite collectionner des vignettes (de joueurs de foot, de héros de dessins animés,...) vendues avec des tablettes de chocolat<sup>1</sup>. Chaque tablette contient une vignette et la collection complète comporte  $n$  vignettes.

La probabilité de tirer une vignette donnée dans une tablette est supposée uniforme<sup>2</sup> sur  $[1, \dots, n]$ .

## Questions

1. Une collection
  - Pour  $n = 500$ , effectuer une simulation pour déterminer le nombre  $Z_{n,1}$  de tablettes à acheter pour obtenir une unique collection complète de vignettes.
  - Ré-itérer le calcul précédent une centaine de fois pour déterminer l'espérance de  $Z_{n,1}$  :  $E(Z_{n,1})$
2. Deux collections
  - Pour  $n = 500$ , effectuer une simulation pour déterminer le nombre  $Z_{n,2}$  de tablettes à acheter pour obtenir deux collections complètes de vignettes.
  - Ré-itérer le calcul précédent une centaine de fois pour déterminer l'espérance de  $Z_{n,2}$  :  $E(Z_{n,2})$
3. Pour  $n \in [2, 2000]$ , écrire dans un fichier les valeurs  $n$ ,  $Z_{n,1}$  et  $Z_{n,2}$  (sans refaire le calcul une centaine de fois pour chaque  $n$ ).
4. À l'aide<sup>3</sup> de `scipy.signal.savgol_filter(liste,21,3)`, lisser les listes de valeurs (`liste`) de  $Z_{n,1}$  et  $Z_{n,2}$ .

5. Tracer, en bleu, sur un même graphique :

$$Z_{n,1,lissé}, \quad n \cdot \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad n \cdot \ln(n).$$

6. Tracer, en rouge, sur le même graphique :

$$Z_{n,2,lissé}, \quad n \cdot \int_0^\infty [1 - (1 - (1+t) \cdot e^{-t})^n] \cdot dt \quad \text{et} \quad n \cdot \ln(n) + n \cdot \ln(\ln(n)).$$

---

1. Références : The Double Dixie Cup Problem, D.J. Newman, The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 1 (Jan., 1960), pp. 58-6 <https://statistics.wharton.upenn.edu/files/?whdmsaction=public:main.file&fileID=735> et G. Lavaud et A. Bégin, Bulletin vert de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques. N°250 (printemps 2015), pp. 39-45.

2. Si on utilise une liste PYTHON, on pourra prendre l'intervalle  $[0, \dots, n-1]$  et utiliser `random.randint(0,n-1)`.

3. Attention : `scipy.__version__` >=14 sinon : <http://wiki.scipy.org/Cookbook/SavitzkyGolay>.