Marche au hasard

F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

Position du problème

On se propose de simuler la marche au hasard d'une particule dans un espace à une ou plusieurs dimensions. Ce phénomène correspond en physique au mouvement Brownien ; il s'applique au mouvement d'un électron dans un fil métalique, à l'adsorption d'une particule sur une surface, à la diffusion d'un parfum dans un volume,... On suppose que la particule M part de l'origine O et, qu'à chaque pas, elle se déplace d'une petite quantité par rapport à sa position précédente. On veut trouver, au bout de N pas, la position finale $\overrightarrow{OM_{(N)}}$ de la particule et sa distance $d_{(N)}$ à l'origine. On refait le calcul K fois. On souhaite vérifier que, si toutes les directions sont équiprobables, la moyenne des $d_{(N)}$ est nulle et que l'écart-type dépend de $\sqrt{N}$.

Déplacement sur une droite

On suppose que la particule se déplace, à chaque itération, de Δx sur un axe (Ox).

1. À chaque pas, la particule effectue un déplacement entier $\Delta x = \pm 1$. (On a donc : $\langle (\Delta x)^2 \rangle = 1$).
   (a) Se fixer une valeur de N (par exemple $N = 100$).
   (b) Calculer $OM_{(N)}$ au bout de N pas ($OM_{(N)} \in \mathbb{Z}$) ; incrémenter un compteur $c_{(N)}[OM_{(N)}]$ pour comptabiliser le nombre de fois où la position $OM_{(N)}$ a été atteinte.
   (c) Réitérer K fois l'opération b. (K de l'ordre de $\sqrt{N}$).
   (d) Tracer un graphique indiquant, pour chaque position $x \in \mathbb{Z}$, le nombre de fois $c_{(N)}(x)$ où cette position a été atteinte lors des K essais.
   (e) Calculer la moyenne et l'écart-type de $c_{(N)}(x)$.
   (f) Reprendre tout le calcul pour différentes valeurs de N et tracer l'écart-type de $c_{(N)}(x)$ en fonction de $\sqrt{N}$.
2. À chaque pas, la particule effectue un déplacement dans $\mathbb{R}$ tel que $\Delta x \in [-\sqrt{3}, +\sqrt{3}]$.
   (On a donc : $\langle (\Delta x)^2 \rangle = 1$ car $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \int_{-x_{max}}^{+x_{max}} x^2.\underset{\cdot}{\mathrm{p}}$ avec $\underset{\cdot}{\mathrm{p}} = \frac{\underset{\cdot}{\mathrm{x}}}{2.x_{max}}$).
   (a) Se fixer une valeur de N.
   (b) Calculer $OM_{(N)}$ au bout de N pas ($OM_{(N)} \in \mathbb{R}$).
   (c) Réitérer K fois le calcul et calculer σ^2 : la moyenne de $(OM_{(N)})^2$ (i.e. la variance de la distance à l'origine).
   (d) Reprendre tout le calcul pour différentes valeurs de N et tracer σ (i.e. l'écart-type de la distance à l'origine) en fonction de $\sqrt{N}$.

Déplacement dans un plan

On suppose que la particule se déplace, à chaque itération, de $(\Delta x, \Delta y)$ dans un plan (Oxy).
En théorie, on a : $d_{(N)}^2 = (\Delta x_1 + \Delta x_2 + \cdots + \Delta x_N)^2 + (\Delta y_1 + \Delta y_2 + \cdots + \Delta y_N)^2$.
D'où : $d_{(N)}^2 = \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_N^2 + 2.\Delta x_1.\Delta x_2 + 2.\Delta x_1.\Delta x_3 + \cdots + 2.\Delta x_2.\Delta x_3 + \cdots + (x \rightarrow y)$.
Pour un déplacement équiprobable dans toute les directions, les termes croisés s'annulent en moyenne ; il reste : $d_{(N)}^2 \simeq \Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \cdots + \Delta x_N^2 + \Delta y_1^2 + \Delta y_2^2 + \cdots + \Delta y_N^2 = N.(\langle \Delta x^2 \rangle + \langle \Delta y^2 \rangle) = N.\langle d^2 \rangle$.
Finalement : $d_{(N)} \simeq \sqrt{N}.d_{rms}$.

1. À chaque pas, la particule effectue un déplacement entier vers le haut ($\Delta y = +1$), le bas ($\Delta y = -1$), la droite ($\Delta x = +1$) ou la gauche ($\Delta x = -1$). Cela revient à choisir une direction parmi 4 avec la probabilité 1/4 et à avoir : $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta y)^2 \rangle = 1/2$.
   (a) Se fixer une valeur de N.
   (b) Tracer l'évolution de $\overrightarrow{OM_{(N)}}$ en fonction de N.
   (c) Réitérer K fois le calcul et calculer σ^2 : la moyenne de $(OM_{(N)})^2$.
   (d) Reprendre tout le calcul pour différentes valeurs de N et tracer σ en fonction de $\sqrt{N}$.
2. À chaque pas, la particule effectue un déplacement $\Delta x \in [-\sqrt{3/2}, +\sqrt{3/2}]$ et $\Delta y \in [-\sqrt{3/2}, +\sqrt{3/2}]$. (Ainsi : $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (\Delta y)^2 \rangle = 1/2$). Reprendre les mêmes questions.