Sauts de puce

F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

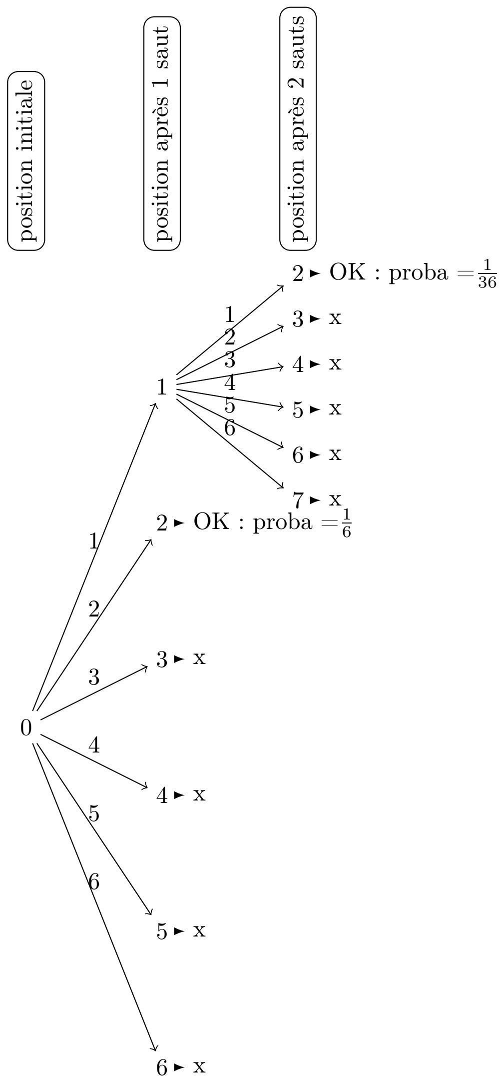
Exercice

Une puce se trouve initialement à x mètres d'un mur. Elle saute en direction de ce mur en effectuant des bonds équiprobables de 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 mètres. Quelle est la probabilité que la puce ne s'écrase pas contre le mur, autrement dit qu'elle arrive exactement au pied de ce mur ?

Methode 1

On réalise une exploration systématique de tous les cas possibles. Lorsque - au bout de n sauts - on arrive exactement au pied du mur, on écrit la probabilité : $\frac{1}{6^n}$. On somme toutes les probabilités pour trouver la probabilité demandée.

Exemple avec $x = 2$.



Probabilité d'arriver au pied du mur : $\frac{1}{6}+\frac{1}{36}=\frac{7}{36}$.
À titre de vérification, les premières valeurs sont :

x	probabilité
1	$1/6 = 0.16666666666666666$
2	$7/36 = 0.19444444444444445$
3	$49/216 = 0.22685185185185186$
4	$343/1296 = 0.2646604938271605$
5	$2401/7776 = 0.30877057613168724$
6	$16807/46656 = 0.36023233882030176$
7	$70993/279936 = 0.25360439529035206$
8	$450295/1679616 = 0.268094016727633$
9	$2825473/10077696 = 0.28036894544149776$

Méthode 2

On définit le vecteur ligne $\vec{p}_n = \begin{pmatrix} p_{n,0} & p_{n,1} & p_{n,2} & \dots & p_{n,x} \end{pmatrix}$ comme le vecteur constitué des probabilités $p_{n,i}$ d'être à l'abscisse i au bout de n sauts.

On a la relation : $\vec{p}_{n+1} = \vec{p}_n.M$ où M est la matrice de taille $(x+1)\times(x+1)$ telle que :

$$M = \frac{1}{6}.\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & & 0 \\
 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\
 & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 & 1 & 1 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 1 \\
0 & & & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}_{x+1,x+1}$$

et $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{x+1}$

La probabilité recherchée est : $p = \displaystyle\sum_{n=x/6}^{x/1} p_{n,x}$ où le nombre n de sauts va de $x/6$ (que des sauts de 6 mètres) à $x/1$ (que des sauts de 1 mètre).