Simuler une loi de probabilité donnée

F. Kany. ISEN-Brest. La Croix-Rouge

Simuler une loi de probabilité donnée

Comment faire pour simuler un générateur aléatoire obéissant à une certaine loi de probabilité $P(x)$?

Méthode 1 : inversion de la fonction de répartition

On se donne une loi de probabilité $P(x)$ pour $x \in [-\infty, +\infty]$.

On cherche la fonction de partition F de la loi de probabilité P définie par : $y = F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(u).\mathrm{d}u$.

N.B. Si le support de la loi de probabilité est $[a, b]$, alors la fonction de partition est définie par : $y = F(x) = \int_{a}^{x} P(u).du$.

On calcule $x = F^{-1}(y)$.

Si y suit la loi de probabilité uniforme (i.e. <tt>random.random()</tt>), alors x suit la loi de probabilité $P(x)$.

Exercice 1 : loi exponentielle

Avec simpy, inverser la loi de probabilité exponentielle, à support dans $\mathbb{R}^+$, de paramètre λ : $P(x) = \lambda.\exp(-\lambda.x)$

1. Définir la fonction $P(u) = \lambda.\exp(-\lambda.u)$.

2. Calculer la fonction de partition $y = F(x) = \int_{0}^{x} P(u).\mathrm{d}u$

3. Calculer $x = F^{-1}(y)$

4. Tracer l'histogramme de la loi de probabilité $F^{-1}(y)$ où y est donné par la loi uniforme sur [0,1]. On fera 1000 tirages.

Comparer avec $P(x)$ pour différentes valeurs de λ : 0.1, 0.5, 0.9

Exercice 2 : loi de Laplace

Faire de même avec la loi de Laplace : $P(x) = \frac{1}{2}.e^{-|x|}$.

On tracera $P(x)$ sur $[-5, 5]$

Problème

Problème : il n'est pas toujours possible d'inverser la fonction F (ex : pour la loi gaussienne : $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\exp(-x^2/2)$, on a : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\exp(-u^2/2).\mathrm{d}u$ qui n'est pas inversable).

Méthode 2 : algorithme de rejet

Le but de cet algorithme est de simuler un tirage suivant une loi de probabilité $P(x)$ à partir d'un générateur aléatoire suivant une loi de probabilité $g(x)$.

Exemple : à partir de $g(x)$ suivant la loi de Laplace (que l'on peut générer par la méthode d'inversion), simuler une loi de Gauss $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.\exp(-x^2/2)$ (que l'on ne peut pas générer par la méthode d'inversion).

L'algoritme consiste à :

1. simuler une variable aléatoire X suivant la loi de probabilité $g(x)$
2. simuler une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur [0,1] (i.e. `U=random.random()`)

3. — si $U \leq \frac{P(X)}{M.g(x)}$ où M est une contante, alors on accepte X comme realisation de la variable aléatoire générée par la loi $P(X)$.
   — sinon, on ré-itère depuis 1.

N.B. La constante M doit être telle que : $\forall x,\ P(x) \leq M.g(x)$. On a intérêt (pour minimiser les cas de rejet) à prendre M la plus petite possible.

1. A l'aide de la méthode d'inversion, créer un générateur suivant la loi de Laplace

2. Dans le cas où $P(x) = \frac{1}{\sqrt{2.\pi}}.e^{-x^2/2}$ et $g(x) = \frac{1}{2}.e^{-|x|}$, on peut montrer que la plus petite valeur de M est $\sqrt{\frac{2.e}{\pi}}$.

Dans une fonction `Gauss()` : tirer une valeur de x suivant la loi de probabilité $g(x)$, tirer une variable u suivant la loi uniforme sur [0,1] et réitérer jusqu'à ce que $u \leq \frac{P(x)}{M.g(x)}$. Renvoyer alors la valeur de x.

3. Tirer au sort 10.000 valeurs en utilisant la fonction <tt>Gauss()</tt>.

Réaliser l'histogramme et comparer à $P(x)$.