Lois de probabilité sur un domaine infini

F. Kany. ISEN-Brest. La Croix-Rouge.

Les lois étudiées ci-dessous ont pour support $\mathbb{N}$.

Loi de Bernoulli

La loi de Bernoulli décrit un tirage aléatoire à deux résultats possibles (succès et échec, numérotés 1 et 0), de probabilités respectives p et $1-p$.

$$P(X=x) = \begin{cases} p & \text{si } x=1, \\ 1-p & \text{si } x=0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

À l'aide de la fonction `random.random()`, écrire une fonction `Bernoulli(p)` qui suit la loi indiquée.

Loi géométrique

La loi géométrique décrit le nombre d'essais nécessaires, dans une suite de tirages Bernoulli, avant d'obtenir un succès.

Définition 1

La probabilité $P(X=k)$ correspond à la probabilité d'obtenir dans une succession de k épreuves de Bernoulli, $k-1$ échecs suivis d'un succès.

Ecrire une fonction `f_geometrique(x,p)` en simulant des tirages aléatoires.

On fera des moyennes sur 10 000 essais.

Tracer la loi géométrique `f_geometrique(x,0.5)` sur l'intervalle $[[0,10]]$

Définition 2

La probabilité $P(X=k)$ correspond à $P(X=k)=(1-p)^{k-1}p$.

Redéfinir la fonction `f_geometrique(x,p)`

Tracer la loi géométrique `f_geometrique(x,0.5)` sur l'intervalle $[[0,10]]$

Tracer la fonction de répartition de la loi géométrique `f_geometrique(x,0.5)` sur l'intervalle $[[0,10]]$

Loi de binomiale négative

Définition 1

La loi **binomiale négative** est une distribution de probabilité discrète. Elle décrit la situation suivante : une expérience consiste en une série de tirages indépendants, donnant un "succès" avec probabilité p (constante durant toute l'expérience) et un "échec" avec une probabilité complémentaire. Cette expérience se poursuit jusqu'à l'obtention d'un nombre donné n de succès. La variable aléatoire représentant le nombre d'échecs (avant l'obtention du nombre donné nn de succès) suit alors une loi binomiale négative. Ses paramètres sont n, le nombre de succès attendus, et p, la probabilité d'un succès.

Ecrire une fonction `f_Pascal(x,n,p)` en simulant des tirages aléatoires.

On fera des moyennes sur 10 000 essais.

Tracer la loi `f_Pascal(x,3,.5)` sur l'intervalle $[[0,10]]$

Définition 2

La loi binomiale négative, de paramètres n et p, est la loi de probabilité discrète d'une variable aléatoire X dont la fonction de masse est donnée par :

$P(X = k; n, p) = \binom{k+n-1}{k} \cdot p^n \cdot q^k$ pour k = 0, 1, 2,...

À l'aide de la fonction `math.factorial`, écrire une fonction `f_Pascal(x,p,n)` qui suit la loi indiquée.

Tracer la loi `f_Pascal(x,3,.5)` sur l'intervalle $[[0, 10]]$

Loi de Poisson

La loi de Poisson décrit la probabilité d'observer un certain nombre d'événements aléatoires dans un intervalle continu (durée, longueur).

Il faut que ces évènements se produisent avec une fréquence moyenne connue et indépendamment du temps écoulé depuis l'évènement précédent.

Définition 1

On rappelle que la loi binomiale, de paramètres n et p, est la loi de probabilité d'une variable aléatoire X égale au nombre de succès rencontrés au cours d'une répétition de n épreuves de Bernoulli, p étant la probabilité de succès dans chacune d'entre elles.

La loi de **Poisson** correspond à la loi binomiale lorsque $n \to \infty$ avec $n \times p = \lambda$. En pratique, il suffit que $n \geq 100$.

Ecrire une fonction `f_Poisson(x,lambda_)` en simulant des tirages aléatoires.

On fera des moyennes sur 10 000 essais.

Tracer, sur un même graphique, les diagrammes pour $p = 0.2$, $p = 0.5$ et $p = 0.8$ sur l'intervalle $[[0, 5]]$

Définition 2

Si le nombre moyen d'occurrences dans cet intervalle est λ, alors la probabilité qu'il existe exactement k occurrences (k étant un entier naturel, $k = 0, 1, 2, \ldots$) est $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

On dit alors que X suit la loi de Poisson de paramètre λ.

À l'aide des fonctions `math.exp` et `math.factorial`, écrire une fonction `f_Poisson(x,lambda_)` qui suit la loi indiquée.

Tracer, sur un même graphique, les diagrammes pour $p = 0.2$, $p = 0.5$ et $p = 0.8$ sur l'intervalle $[[0, 5]]$