

# Paradoxe de Parrondo

F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

## Présentation

Soit  $A$  un jeu de pile ou face avec une pièce biaisée (pile avec une probabilité de  $p = \frac{1}{2} - \varepsilon$ , face avec une probabilité de  $\frac{1}{2} + \varepsilon$  où  $\varepsilon > 0$ ). On lance la pièce. Si on obtient pile, on gagne un jeton (ou un euro) ; sinon on perd un jeton (ou un euro).

Soit  $B$  un jeu avec deux pièces biaisées. La pièce 1 donne pile avec une probabilité  $p_1 = \frac{1}{10} - \varepsilon$  et la pièce 2 donne pile avec une probabilité  $p_2 = \frac{3}{4} - \varepsilon$ . Si le joueur a un capital  $K$  (de jetons ou d'euros) qui est un multiple de  $m = 3$ , on lance la pièce 1, sinon on lance la pièce 2. Comme dans le jeu  $A$ , si on obtient pile, on gagne un jeton (ou un euro) ; sinon on perd un jeton (ou un euro).

Soit  $AB$  un jeu avec une pièce non biaisée. On lance la pièce. Si on obtient pile, on joue à  $A$  ; sinon on joue à  $B$ .

## Questions

On prend  $\varepsilon = \frac{5}{1000}$ .

On démarre avec un capital  $K = 0$ .

1. Simuler 100 000 fois, l'évolution du capital  $K$  d'un joueur qui joue  $k$  fois au jeu  $A$  avec  $k \in [1, 100]$ . Tracer l'évolution de la moyenne de  $K$  en fonction de  $k$ . Vérifier que  $A$  est un jeu perdant (i.e. qui provoque la ruine du joueur s'il joue suffisamment longtemps).
2. Quelle est l'espérance  $E_A$  du jeu  $A$  ? Tracer  $E_A$  en fonction de  $k$ . Vérifier que ce calcul se superpose à la simulation précédente.
3. Simuler 100 000 fois, l'évolution du capital  $K$  d'un joueur qui joue  $k$  fois au jeu  $B$  avec  $k \in [1, 100]$ . Tracer l'évolution de la moyenne de  $K$  en fonction de  $k$ . Vérifier que  $B$  est un jeu perdant.
4. Quelle est l'espérance  $E_B$  du jeu  $B$  ? (On calculera les probabilités par récurrence). Tracer  $E_B$  en fonction de  $k$ . Vérifier que ce calcul se superpose à la simulation précédente.
5. Simuler 100 000 fois, l'évolution du capital  $K$  d'un joueur qui joue  $k$  fois au jeu  $AB$  avec  $k \in [1, 100]$ . Tracer l'évolution de la moyenne de  $K$  en fonction de  $k$ .
6. Quelle est l'espérance  $E_{AB}$  de ce jeu ? (On calculera les probabilités par récurrence). Tracer  $E_{AB}$  en fonction de  $k$ . Vérifier que ce calcul se superpose à la simulation précédente.
7.  $A$  et  $B$  sont des jeux perdants. Le jeu  $AB$  est-il également perdant ?