Loi de Poisson

F. Kany. ISEN-Brest & La Croix-Rouge

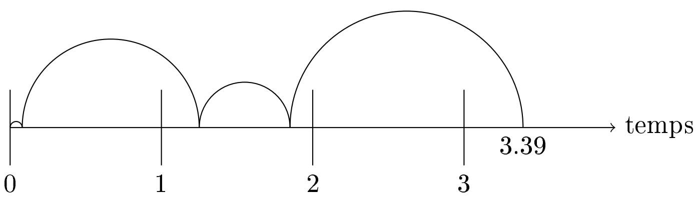
Énoncé

Une entreprise possède un parc important de machines identiques et fonctionnant de façon indépendante. Elle souhaite étudier les pannes de ces machines de façon à établir un plan de maintenance.

Simulation des temps de bon fonctionnement

On choisit une machine au hasard. On suppose que les arrivées des pannes sont indépendantes les unes des autres et que la machine est réparée instantanément. On a relevé les résultats suivants.

Temps de bon fonctionnement	Temps de bon fonctionnement cumulé
0,08	0,08
1,17	1,25
0,60	1,85
1,54	3,39



Le temps t de bon fonctionnement est donné par la loi $t = -\frac{\ln(r)}{2.5}$ où r est une variable aléatoire sur l'intervalle $[0, 1]$. Effectuer 100 000 simulations, trouver le nombre de pannes sur une durée de 2 unités. On tracera la probabilité en fonction du nombre de pannes.

Loi de Poisson

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ si la probabilité qu'il existe exactement k occurrences (k étant un entier naturel, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots$) est donnée par : $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$. La moyenne des occurrences est alors λ.

Calculer la moyenne du nombre de pannes ; en déduire λ ; comparer les valeurs obtenues par simulation aux valeurs théoriques de la loi de Poisson.

Exploitation du modèle

En considérant que X suit la loi de Poisson précédente, déterminer :
- la probabilité qu'une machine tombe en panne au moins trois fois (i.e. 3, 4, 5 ou plus) sur une durée de 2 unités suivant sa mise en service ;
- le nombre maximum de pannes d'une machine (sur une durée de 2 unités suivant sa mise en service) avec une probabilité d'au moins 95 %.