<u>דף עבודה - מספרים טבעיים ואינדוקציה</u>

<u>הגדרה:</u> <u>מספר טבעי –</u> מספר נקרא טבעי, אם הוא מספר שלם, וגדול מאפס. כלומר, המספרים שעליהם למדנו בכיתה א, ...,1,2,3,4,5. קבוצת המספרים הטבעיים מסומנת ב$\mathbb{N}$. אם n מספר טבעי, נסמן $n\in\mathbb{N}$.

<u>הגדרה:</u> <u>טענות מתמטיות על המספרים הטבעיים –</u> תכונות, או טענות, שמתקיימות לכל המספרים הטבעיים.

לדוגמא: לכל $n\in\mathbb{N}$, המספר 2n+1 לא מתחלק ב2.

<u>הגדרה:</u> <u>אינדוקציה –</u> שיטה להוכחת טענות מתמטיות על המספרים הטבעיים. אנחנו מראים, שהטענה מתקיימת למספר הטבעי הראשון, כלומר 1. ואז, מוכיחים, שאם הטענה מתקיימת לn אז היא מתקיימת לn+1. כדי להבין את השיטה יותר טוב נסתכל על דוגמא:

<u>דוגמא:</u> יש לנו טור של אנשים, וידוע לנו שהראשונה בטור היא אישה. בנוסף, ידוע לנו שאחרי כל אישה בטור, נמצאת אישה. אזי כל האנשים בטור הם נשים. בואו נתרגם את זה לשפה המתמטית ונראה שזו דוגמא לאינדוקציה. במקום הראשון בטור, כלומר מקום מספר 1, נמצאת אישה. ידוע, שאם במקום n נמצאת אישה, אז גם במקום n+1 נמצאת אישה. כלומר אם אישה נמצאת במקום 1, אז גם במקום 2 נמצאת אישה, ואז גם במקום 3 נמצאת אישה, וכך העלה. ולכן בכל הטור יש רק נשים.

עכשיו בואו נסתכל על דוגמא יותר מתמטית להוכחה באינדוקציה:

<u>דוגמא:</u> נוכיח שלכל $n\in\mathbb{N}$ סכום המספרים הטבעיים מ1 עד n שווה לn(n+1) כפול חצי. כלומר:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

נראה שהטענה מתקיימת לn=1:

$$1+\cdots+n=1=\frac{1\times 2}{2}=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

עכשיו, נניח שהטענה מתקיימת לn, ונוכיח שהטענה מתקיימת לn+1, כלומר שמתקיים:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

קודם כל נגיע לביטוי שבו אפשר יהיה להשתמש בהנחה שלנו:

$$1+2+\cdots+\mathrm{n}+(\mathrm{n}+1)=(1+2+\cdots+\mathrm{n})+(\mathrm{n}+1)$$

עכשיו נשתמש בהנחה שלנו:

$$(1+2+\cdots+\mathrm{n})+(\mathrm{n}+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(\mathrm{n}+1)$$

מכנה משותף:

$$\frac{n(n+1)}{2}+(\mathrm{n}+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

לכן, מתקיים השוויון. ■

<u>הערה:</u> הסימון ■ אומר מש"ל, או מה שצריך להוכיח.

<u>הגדרה:</u> <u>מספרי פיבונאצ'י –</u> סדרה של מספרים המוגדרת בצורה הזאת:

f_n=(0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,...)

כלומר שני האיברים הראשונים הם 0, ו1(0 נמצא במקום ה0, ו1 נמצא במקום הראשון) ואז כל מספר זה סכום שני המספרים הקודמים. נסמן את המספר במקום הn בסדרה בf_n.

כלומר בשפה מתמטית:

$$f_0=0, \qquad f_1=1, \qquad f_n=f_{n-1}+f_{n-2}$$

נשים לב, שגם טענות למספרי פיבונאצ'י ניתן להוכיח בעזרת אינדוקציה.

<u>תרגילים:</u>

1. הוכח שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים:

א. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ב. $1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{(n^2)((n+1)^2)}{4}$

ג. $\frac{1^2}{(2-1)(2+1)}+\frac{2^2}{(4-1)(4+1)}+\cdots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

ד. $f_{n-1}f_{n+1}-f_n^2=(-1)^n$

ה. $f_1^2+f_2^2+f_3^2+\cdots+f_n^2=f_nf_{n+1}$

ו. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{(2n+1)(2n-1)n}{3}$

2. הציגו עם המספרים 2,4,6,8 ובעזרת פעולות החשבון הבסיסיות(+,-,×,÷) את המספר 25.

3. האם קיים מספר טבעי n, כך ש $n^2=168^{1990}+7$?