פתרונות מלאים עם הסברים

לתרגול הקיץ במתמטיקה — 5 יחידות לימוד

החוברת עוסקת בחקירת פונקציות: חיתוך עם הצירים, נקודות קיצון, תחומי עלייה וירידה, פיתול וקעירות. בכל סעיף מופיעים גם החישובים העיקריים, כדי שאפשר יהיה לעקוב אחר הדרך ולא רק לבדוק את התשובה הסופית.

הערה: סימון תחום כמו (a,b) פירושו שהקצוות אינם כלולים; נקודת חור בפונקציה אינה נקודת גרף, גם אם אפשר לחשב את הערך שאליו הפונקציה מתקרבת שם.

כלי עבודה קצר

נקודות קיצון מתקבלות בדרך כלל מ־f′(x)=0, ולאחר מכן בודקים שינוי סימן של הנגזרת. נקודות פיתול מתקבלות מ־f″(x)=0 רק אם יש שינוי קעירות. בחקירת פונקציה רציונלית יש להוציא מהתחום גם את האפסים של המכנה.

1. פולינומים — חקירה מלאה

א. $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f(x)=x(x-3)^2$ | $f'(x)=3(x-1)(x-3)$ | $f''(x)=6x-12$

חיתוך עם הצירים: עם ציר x: (0,0), (3,0). עם ציר y: (0,0).

קיצון: מקסימום מקומי (1,4); מינימום מקומי (3,0).

עלייה וירידה: עולה ב־(−∞,1) וב־(3,∞); יורדת ב־(1,3).

פיתול: $f''=0$ ב־$x=2$, ולכן נקודת הפיתול היא (2,2).

קעירות: קעורה מטה ב־(−∞,2); קעורה מעלה ב־(2,∞).

סקיצה: גרף ממעלה שלישית, עולה משמאל עד (1,4), יורד ונוגע בציר x ב־(3,0), ואז עולה שוב. הוא חוצה את הראשית.

ב. $y = 3x^5 - 10x^3$

$f'(x)=15x^2(x^2-2)$ | $f''(x)=60x(x^2-1)$

חיתוך: עם ציר x: $x=0,\ x=\pm\sqrt{10/3}$; עם ציר y: (0,0).

קיצון: מקסימום מקומי $(-\sqrt{2},\ 2\sqrt{8})$; מינימום מקומי $(\sqrt{2},\ -2\sqrt{8})$. ב־$x=0$ הנגזרת מתאפסת אך אין קיצון.

עלייה וירידה: עולה ב־$(-\infty,-\sqrt{2})$ וב־$(\sqrt{2},\infty)$; יורדת ב־$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

פיתול: הנקודות הן (−1,7), (0,0), (1,−7).

קעירות: מטה ב־(−∞,−1) וב־(0,1); מעלה ב־(−1,0) וב־(1,∞).

1. פולינומים — המשך

ג. $y = x^4 - 6x^3 + 12x^2$

$f'(x)=2x(2x^2-9x+12)$ | $f(x)=x^2[(x-3)^2+3]$

חיתוך: הביטוי שבסוגריים חיובי תמיד, ולכן החיתוך היחיד הוא (0,0), עם שני הצירים.

קיצון: ב־x=0 מתקבל מינימום (0,0).

עלייה וירידה: יורדת ב־(−∞,0); עולה ב־(0,∞).

פיתול: f″=12(x−1)(x−2), ולכן נקודות הפיתול הן (1,7) ו־(2,16).

קעירות: מעלה ב־(−∞,1) וב־(2,∞); מטה ב־(1,2).

ד. $y = -x^4 + 6x^2$

$f''(x)=12(1-x^2)$ | $f'(x)=-4x(x^2-3)$

חיתוך: עם ציר x: (−√6,0), (0,0), (√6,0); עם ציר y: (0,0).

קיצון: מקסימום ב־(−√3,9) וב־(√3,9); מינימום ב־(0,0).

עלייה וירידה: עולה ב־(−∞,−√3) וב־(√3,0); יורדת ב־(−√3,0) וב־(√3,∞).

פיתול: ב־x=±1: הנקודות (−1,5), (1,5).

קעירות: מעלה ב־(−1,1); מטה ב־(−∞,−1) וב־(1,∞).

סקיצה: הפונקציה זוגית, ולכן הגרף סימטרי לציר y. יש שתי פסגות בגובה 9, עמק בראשית, והיא יורדת ל־−∞ בשני הכיוונים.

2. נגזרות ופונקציות עזר

א. $f(x) = (x^2 + 3x)/(x^2 + 3)$

$f'(x)=-3(x-3)(x+1)/(x^2+3)^2$

תחום: כל x, כי x^2+3 חיובי תמיד.

אפסי הנגזרת: $x=-1,3$. מתקבלים מינימום $(-1,-1)$ ומקסימום $(3,3/2)$.

מונוטוניות: עולה ב־$(-1,3)$; יורדת ב־$(-\infty,-1)$ וב־$(3,\infty)$.

ב. $f(x) = 1/(1-x)$

$f'(x)=1/(1-x)^2$ | $f''(x)=2/(1-x)^3$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq 1$; אסימפטוטה אנכית $x=1$ ואופקית $y=0$.

מונוטוניות: הנגזרת חיובית בכל תחום ההגדרה, לכן הפונקציה עולה ב־$(-\infty,1)$ וב־$(1,\infty)$, ואין נקודות קיצון.

קעירות: מעלה ב־$(-\infty,1)$, מטה ב־$(1,\infty)$.

בבדיקת נגזרת של מנה משתמשים בכלל: $(u/v)'=(u'v-uv')/v^2$. המכנה בריבוע אינו שלילי,
ולכן סימן הנגזרת נקבע בעיקר על ידי המונה.

3. פונקציות רציונליות — 21 עד 23

21. $y = -x/(x^2 - 10x + 16)$

$x^2-10x+16=(x-2)(x-8)$ | $f'(x)=(x-4)(x+4)/[(x-2)^2(x-8)^2]$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq 2,8$; אסימפטוטות אנכיות $x=2,x=8$ ואופקית $y=0$.

חיתוך: הנקודה היחידה עם שני הצירים היא $(0,0)$.

קיצון: מינימום $(4,1/18-)$; מקסימום $(4,1/2)$.

עלייה וירידה: עולה ב־$(4,2-)$ וב־$(2,4)$; יורדת ב־$(-\infty,4-)$, $(4,8)$, $(8,\infty)$.

22. $y = (2x^2 - 5x + 2)/(3x^2 - 10x + 3)$

$N=(2x-1)(x-2)$, $D=(3x-1)(x-3)$ | $f'=-5(x-1)(x+1)/D^2$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq 1/3,3$; אסימפטוטות אנכיות $x=1/3,3$ ואופקית $y=2/3$.

חיתוך: עם ציר $(2,0)$,$(1/2,0)$:x); עם ציר $(0,2/3)$:y).

קיצון: מינימום $(1,9/16-)$; מקסימום $(1,1/4)$.

מונוטוניות: עולה ב־$(1,1-)$; יורדת ב־$(-\infty,1-)$,$(1,3)$,$(3,\infty)$.

23. $y = x/(x^2 - x - 6)$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)$ | $f'=-(x^2+6)/[(x-3)^2(x+2)^2]$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq -2,3$; אסימפטוטות אנכיות $x=-2,3$ ואופקית $y=0$.

חיתוך: עם שני הצירים: $(0,0)$.

מונוטוניות: הנגזרת שלילית תמיד בתחום, לכן הפונקציה יורדת בכל אחד מהקטעים $(-\infty,2-)$, $(2,3-)$, $(3,\infty)$, ללא קיצון.

3. פונקציות רציונליות — 24 עד 26

24. $y = (x-2)/(x^2-4)$

$y=1/(x+2)$, רק $x\neq-2,2$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq-2,2$; אסימפטוטה אנכית $x=-2$ ואופקית $y=0$.

חור: בגלל הצמצום $x=2$ אינו בתחום. החור נמצא ב־$(2,1/4)$.

חיתוך: עם ציר y: $(0,-1/2)$; אין חיתוך עם ציר x.

מונוטוניות: $f'=-1/(x+2)^2<0$, לכן יורדת ב־$(-\infty,-2)$ וב־$(-2,2),(2,\infty)$.

25. $y = (x^2 + 4x + 3)/(1-x^2)$

$y=(x+3)/(1-x)$, רק $x\neq-1,1$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq-1,1$; אסימפטוטה אנכית $x=1$ ואופקית $y=-1$.

חור וחיתוך: חור ב־$(-1,1)$. חיתוך עם ציר x: $(-3,0)$; עם ציר y: $(0,3)$.

מונוטוניות: $f'=4/(x-1)^2>0$, לכן עולה בכל אחד מהקטעים $(-\infty,-1),(-1,1),(1,\infty)$.

26. $y = (x^3 - 3x^2)/(9-x^2)$

$y=-x^2/(x+3)$, רק $x\neq-3,3$ | $y=-x+3-9/(x+3)$

תחום ואסימפטוטות: $x\neq-3,3$; אנכית $x=-3$, ואסימפטוטה אלכסונית $y=-x+3$.

חור וחיתוך: חור ב־$(-3,3/2)$. חיתוך עם שני הצירים: $(0,0)$.

קיצון: מקסימום מקומי $(-6,12)$; מינימום מקומי $(0,0)$.

מונוטוניות: יורדת ב־$(-\infty,-6)$; עולה ב־$(-6,-3),(-3,0)$; יורדת ב־$(0,3),(3,\infty)$.

קעירות: $f''=-18/(x+3)^3$; קעורה מעלה ב־$(-\infty,-3)$, מטה ב־$(-3,3)$ וב־$(3,\infty)$. אין נקודת פיתול בתחום, כי $x=-3$ אינו מוגדר.

סיכום בדיקה מהיר

לפני שמשרטטים, מסמנים על מערכת הצירים את כל החיתוכים, הקיצון, נקודות הפיתול והאסימפטוטות. אחר כך משתמשים בטבלאות הסימנים כדי לחבר את החלקים בצורה נכונה.

- ✓ בפולינום: התחום הוא כל המספרים הממשיים ואין אסימפטוטות.
- ✓ במנה: המכנה קובע את תחום ההגדרה ואת נקודות אי־ההגדרה.
- ✓ בצמצום גורם משותף: מתקבל חור, לא אסימפטוטה אנכית.
- ✓ נקודה שבה $f'=0$ אינה בהכרח קיצון; חייבים לבדוק שינוי סימן.
- ✓ נקודת פיתול דורשת שינוי קעירות, ולא רק פתרון של $f''=0$.

בהצלחה!