

Finite-Elemente-Analyse von Stahlbetonbauteilen im ebenen Spannungszustand

Scheiben- und Plattenberechnungen auf der Grundlage des gerissenen Scheibenmodells

Der ebene Spannungszustand nimmt in der Analyse von Stahlbetonbauteilen eine zentrale Rolle ein. Das Last-Verformungs-Verhalten von Balken, Scheiben und dünnen Platten kann mithilfe des ebenen Spannungszustands ausreichend genau beschrieben werden. Im Folgenden wird eine Finite-Elemente-Analyse von Stahlbetonscheiben und Stahlbetonplatten auf Basis nichtlinearer Materialmodelle vorgestellt. Das den Berechnungen zugrunde gelegte mechanische Modell ist das gerissene Scheibenmodell, das einen ebenen Spannungszustand voraussetzt und frei drehbare Risse mit diskretem Rissabstand berücksichtigt. Für die Berechnung des Last-Verformungs-Verhaltens von Stahlbetonscheiben wird das gerissene Scheibenmodell um das linear elastische Werkstoffgesetz und das zweiachsige Druckmodell für Beton ergänzt. Die Analyse dünner Platten erfolgt mit einem Schichtenmodell. Die Voraussetzung eines ebenen Spannungszustands in jeder Schicht erlaubt die Betrachtung der Schichten als Stahlbetonscheiben. Die der Berechnung vorausgesetzten mechanischen Modelle und Werkstoffgesetze werden in Form eines „User Defined Materials“ in das nichtlineare Finite-Elemente-Programm ANSYS Mechanical APDL implementiert. Folgend werden ausgewählte Scheiben- und Plattenversuche nachgerechnet.

1 Einleitung

Im Bauingenieurwesen haben sich die Finite-Elemente-Methoden zur Tragwerksanalyse durchgesetzt. Bei den meisten der heute gängigen Finite-Elemente-Programmen können diskrete Strukturmodelle aufgebaut werden, die ein Tragwerk in viele endliche (finite) Elemente aufteilen. Den einzelnen Elementen und ihren Verknüpfungen werden anschließend Parameter zugeordnet, die die Abbildung des tatsächlichen Verhaltens durch physikalische Modelle ermöglichen.

Geeignete nichtlineare mechanische Modelle zur Beschreibung des Last-Verformungs-Verhaltens von Stahlbetonelementen wurden unter anderem an der ETH Zürich am Institut für Baustatik und Konstruktion (IBK) unter der Leitung von Prof. Dr. P. MARTI entwickelt [1]. Der Aufwand einer Handrechnung einzelner Elemente ist mit diesen Modellen (z. B. eines Zugelements unter konstanter Belastung) noch vertretbar, ist jedoch für die Berechnung von Bauteilen oder gar Tragwerken unverhältnismäßig groß. Konsequenterweise kommen diese mechanischen Modelle, obwohl der Gewinn an Informationen zum Tragwerksverhalten unbestritten

Finite-element-analysis of reinforced concrete structural elements under plane stress – Membrane and thin plate calculations based on the cracked membrane model.

Plane stress fields play a central role in the analysis of reinforced concrete structural elements. The load-deformation behavior of beams, membranes and thin plates can be represented with sufficient accuracy by plane stress states. This paper presents a finite-element-analysis approach of reinforced concrete membranes and plates, which is based on the cracked membrane model. The cracked membrane model assumes a plane stress state and considers discrete crack patterns that spacing are rotationally unconstrained. In order to compute the load-deformation behavior of reinforced concrete membranes, the cracked membrane model is combined with a linear elastic material law and a biaxial compression model for the concrete. The analysis of thin reinforced concrete plates is based on a multi-layer model. Assuming that each of the layers is under plane stress, it is possible to model a thin plate as an assemblage of reinforced concrete membranes. The presented mechanical models are implemented in the nonlinear finite-element-analysis software, ANSYS Mechanical APDL, by developing specialized „user defined materials“. To validate the finite-element-implementation, analysis results are compared with experimental results from selected membrane and plate tests.

groß ist, kaum oder nur in Ausnahmefällen zum Einsatz.

2 Zielsetzung

Erst die Implementierung dieser mechanischen Modelle in ein geeignetes Finite-Elemente-Programm eröffnet die Möglichkeit, das Tragverhalten ganzer Stahlbetonbauteile zu berechnen. An der Hochschule Luzern Technik & Architektur wurden die Modelle als ein „User Defined Material“ in das nichtlineare Finite-Elemente-Programm ANSYS Mechanical APDL [2] implementiert. Diese Vorgehensweise ermöglicht es, die verwendeten mechanischen Modelle an Versuchen zu verifizieren und den Einfluss wichtiger Parameter auf das Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbetonbauteilen zu diskutieren.

3 Mechanische Modelle

3.1 Belastungszustände

Grundlage finiter Weggrößenverfahren ist die Näherung des globalen Verschiebungsfelds mithilfe von Ansatzfunk-

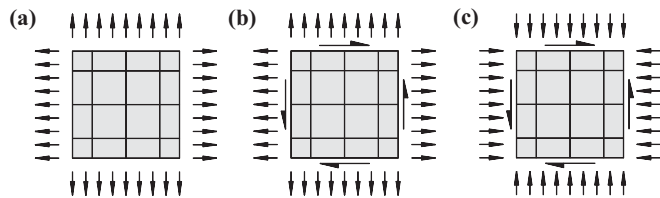


Bild 1 Belastungszustände am Element: (a) zweiachsiger Zug; (b) zweiachsiger Zug mit Schubbeanspruchung; (c) zweiachsiger Druck mit Schubbeanspruchung
Element stress states: (a) biaxial tension; (b) biaxial tension and shear; (c) biaxial compression and shear

tionen im einzelnen Element. Ist die Ansatzfunktion bekannt, können die Verzerrungen im Element berechnet werden. Unter Berücksichtigung von Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen und Werkstoffbeziehungen kann sodann der Spannungszustand im Element bestimmt werden [3].

Die gewählten mechanischen Modelle sind so zu formulieren, dass jedem beliebigen Verzerrungszustand ein eindeutiger Spannungszustand zugeordnet werden kann. Eine Auswahl möglicher Spannungszustände ist in Bild 1 aufgezeigt. Basierend auf dem Zuggurtmodell [4], dem gerissenen Scheibenmodell [5] und dem zweiachsigen Betongesetz [6] können die in Bild 1 (a) bis (c) dargestellten Spannungszustände und Variationen davon beschrieben werden. In Kombination mit dem Schichtenmodell können die erwähnten Modelle auch für Stahlbetonplatten genutzt werden.

3.2 Gerissenes Scheibenmodell

Das gerissene Scheibenmodell beschreibt das Last-Verformungs-Verhalten eines gerissenen, orthogonal bewehrten Betonscheibenelements im ebenen Spannungszustand und basiert auf den Grundüberlegungen des Zuggurtmodells [4]. Beim gerissenen Scheibenmodell werden fiktive, frei drehbare Risse vorausgesetzt, welche sich senkrecht zu ihrer Richtung öffnen. Es wird ein diskreter Rissabstand angenommen und die infolge der Verbundspannungen auftretende Variation der Hauptdruckspannungsrichtung im Beton zwischen den Rissen vernachlässigt. Aus den getroffenen Annahmen folgt, dass sich die Richtung der Risse in Abhängigkeit vom Belastungszustand frei einstellen kann und die Risse spannungsfrei sind. Infolge diskreter Rissabstände liegt im Beton ein einachsiger Druckspannungszustand vor, und die Richtungen der Hauptverzerrungen und Hauptspannungen sind identisch.

Für den richtungsabhängigen diagonalen Rissabstand einer orthogonal bewehrten Stahlbetonscheibe machen VECCHIO/COLLINS [7] den auf heuristischen Überlegungen basierenden Vorschlag

$$s_{m0} = \frac{1}{\frac{\sin(\theta_{cr})}{s_{rx0}} + \frac{\cos(\theta_{cr})}{s_{ry0}}}, \quad (1)$$

der von KAUFMANN/MARTI [8] analytisch begründet wurde. Basierend auf den Überlegungen zum Zuggurtmodell [4] gilt für den diagonalen Rissabstand (Bild 2 (a))

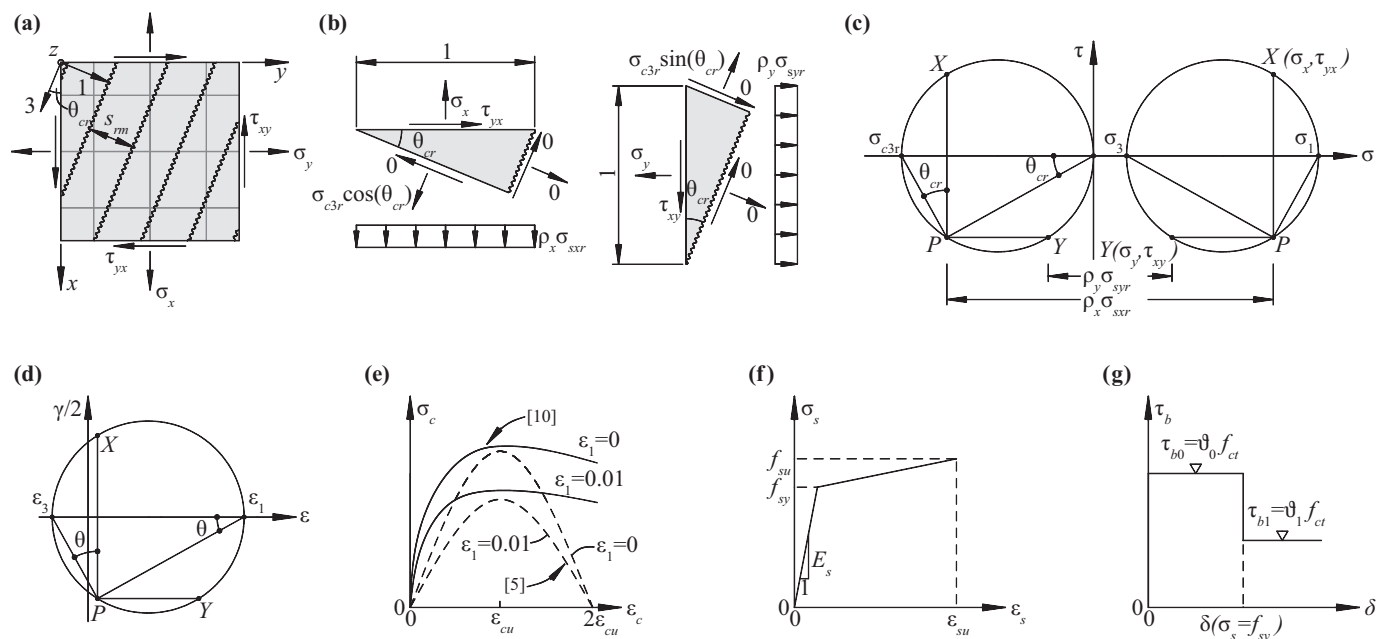


Bild 2 Gerissenes Scheibenmodell: (a) Bezeichnungen; (b) Schnittkörper; (c) Betonspannungen am Riss und aufgebrauchte Spannungen; (d) MOHR'scher Verzerrungskreis; (e) Betondruckfestigkeiten; (f) bilineare Idealisierung des Betonstahls; (g) abgetreppte starr-ideal plastische Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung
Cracked membrane model: (a) notations; (b) free-body diagrams; (c) concrete stresses at the crack and applied stresses; (d) MOHR's strain circle; (e) stress-strain diagrams of concrete; (f) idealized bilinear stress-strain diagram of steel; (g) stepped rigid-perfectly plastic bond-slip behavior

$$s_{rm} = \lambda s_{rm0} \quad \text{mit} \quad 0.5 \leq \lambda \leq 1 \quad (2)$$

und für den maximalen Rissabstand in x - resp. y -Richtung

$$s_{rx0} = \frac{d_x f_{ct}(1 - \rho_x)}{2\tau_{b0}\rho_x} \quad \text{und} \quad s_{ry0} = \frac{d_y f_{ct}(1 - \rho_y)}{2\tau_{b0}\rho_y}. \quad (3)$$

mit:

- θ_{cr} Neigung der Betonhauptdruckspannung am Riss
- s_{rx0} maximaler Rissabstand in x -Richtung
- s_{ry0} maximaler Rissabstand in y -Richtung
- λ Parameter zur Beschreibung des Rissabstandes
- d Stabdurchmesser der Bewehrung
- f_{ct} Betonzugfestigkeit
- τ_{b0} Verbundspannung vor dem Fließbeginn der Bewehrung
- ρ geometrischer Bewehrungsgehalt

3.2.1 Gleichgewichtsbedingungen

Die Gleichgewichtsbedingungen (4) werden beim gerissenen Scheibenmodell im Gegensatz zu den klassischen Druckfeldmodellen [7, 9] am Riss formuliert (Bild 2 (b)) und können mithilfe der MOHR'schen Spannungskreise gemäß Bild 2 (c) verdeutlicht werden.

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{c3r} \cos^2 \theta_{cr} + \rho_x \sigma_{sxr} \\ \sigma_y &= \sigma_{c3r} \sin^2 \theta_{cr} + \rho_y \sigma_{syr} \\ \tau_{xy} &= -\sigma_{c3r} \cos \theta_{cr} \sin \theta_{cr} \end{aligned} \quad (4)$$

mit:

- σ Normalspannung
- τ Schubspannung

3.2.2 Verträglichkeitsbedingung

Das Lösen des einfach unbestimmten Gleichungssystems (4) erfordert die Formulierung einer weiteren Bedingung. Unter Berücksichtigung der Forderung nach identischen Richtungen der Hauptverzerrungen und -spannungen kann die erforderliche Verträglichkeitsbedingung (5) hergeleitet werden.

$$\theta = \theta_{cr} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{\gamma_{xy}}{\epsilon_y - \epsilon_x} \right) \quad (5)$$

mit:

- θ Neigung der Hauptverzerrung γ gegenüber der x -Achse
- γ Schubverzerrung
- ϵ Verzerrung

Im mechanischen Modell entspricht damit die Richtung der Hauptdruckspannung der Rissneigung und kann grafisch mithilfe des MOHR'schen Verzerrungskreises abgebildet werden, Bild 2 (d).

3.2.3 Werkstoffbeziehungen

Zur Beschreibung der Spannungs-Dehnungs-Beziehung des einachsigen beanspruchten Betons wird in der Literatur eine Vielzahl von Beziehungen angegeben. Für die Finite-Elemente-Analyse wird die Beziehung von SARGIN [10] verwendet, da der Elastizitätsmodul des Betons E_c im Ursprung gut abgebildet wird (Bild 2 (e)). Das verwendete zweiachsige Betondruckgesetz [6] basiert ebenfalls auf dieser Werkstoffbeziehung. Der Elastizitätsmodul des Betons wird mit $E_c = 10\,000 \cdot f_{cc}^{1/3}$ und die Zugfestigkeit des Betons mit $f_{ct} = 0.3 \cdot f_{cc}^{2/3}$ aus der Betonzylinderdruckfestigkeit f_{cc} in N/mm² bestimmt.

Die Spannungs-Dehnungs-Beziehung des Betonstahls wurde mit einer bilinearen Werkstoffbeziehung idealisiert, Bild 2 (f). Sowohl das Zuggurtmodell als auch das gerissene Scheibenmodell zeichnen sich durch die Verwendung einer abgetrepten starr-plastischen Verbundschubspannungs-Schlupf-Beziehung (τ_b - δ -Beziehung) aus (Bild 2 (g)). Für die Verbundschubspannungen verwenden SIGRIST/MARTI [11] die in Gl. (6) angegebenen Werte.

$$\tau_{b0} = \vartheta_0 f_{ct}; \quad \tau_{b1} = \vartheta_1 f_{ct} \quad \text{mit} \quad \vartheta_0 = 2 \quad \text{und} \quad \vartheta_1 = 1 \quad (6)$$

mit:

- τ_{b1} Verbundspannung nach dem Fließbeginn der Bewehrung
- $\vartheta_{0,1}$ Parameter gemäß Abschn. 3.2.4

3.2.4 Modellparameter

Das Festlegen der Modellparameter eines mechanischen Modells ist von zentraler Bedeutung. Dies ermöglicht nicht nur das gezielte Planen von Versuchen zur statistischen Analyse dieser Parameter, sondern auch in einem weiteren Schritt die stochastische Formulierung des Modells. Im Zuggurtmodell und dem darauf basierenden gerissenen Scheibenmodell sind die Parameter ϑ_0 und ϑ_1 in der abgetrepten starr-plastischen Verbundspannungs-Schlupf-Beziehung die Modellparameter [12]. Die Kalibrierung der Modelle erfolgte ausschließlich an diesen beiden Parametern.

3.3 Schichtenmodell

Schichtenmodelle zur Bestimmung des Last-Verformungs-Verhaltens von Stahlbetonplatten sind weit verbreitete Ansätze [13, 14, 15]. Der Stahlbetonquerschnitt wird in n Schichten unterteilt, wobei in jeder Schicht ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt wird.

3.3.1 Annahmen

Dem Modell wird zugrunde gelegt, dass die vorhandene Bewehrung ein schlagartiges Versagen des Querschnitts

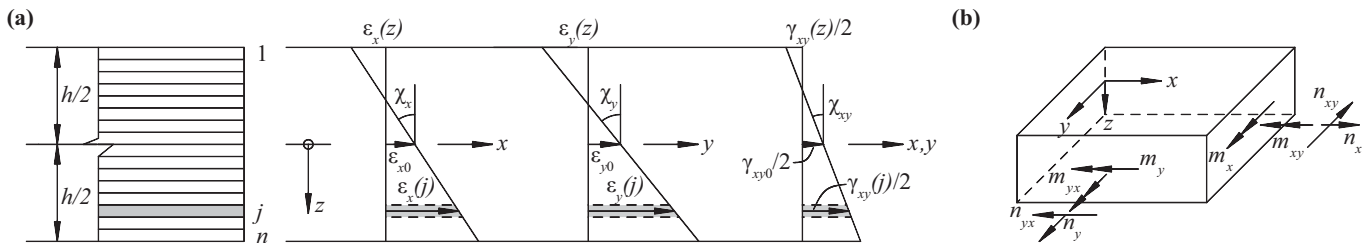


Bild 3 Schichtenmodell: (a) Bezeichnungen der Verzerrungen und Krümmungen am Plattenelement; (b) Schnittgrößen am Plattenelement
Multi-layer model for thin plates: (a) strains and curvatures on shell element; (b) free-body stress resultants on plate element

bei Erstrissbildung verhindert. Zudem werden dünne ebene Flächentragwerke konstanter Dicke mit im Vergleich zur Querschnittshöhe kleinen Durchbiegungen behandelt. Des Weiteren wird das Eben- und Senkrechtbleiben der Querschnitte vorausgesetzt (KIRCHHOFF/LOVE-Theorie), weshalb der Verzerrungszustand jeder einzelnen Schicht durch die Beziehung (7) angegeben werden kann, Bild 3 (a).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x(z) &= \varepsilon_{x0} + z \cdot \chi_x \\ \varepsilon_y(z) &= \varepsilon_{y0} + z \cdot \chi_y \\ \gamma_{xy}(z) &= \gamma_{xy0} + z \cdot 2\chi_{xy} = \gamma_{yx}(z)\end{aligned}\quad (7)$$

Dabei bezeichnen ε_{x0} , ε_{y0} und γ_{xy0} die Verzerrungen in der Mittelebene und χ_x , χ_y und χ_{xy} die Krümmungen resp. die Drillungen eines ebenen Plattenelements.

3.3.2 Mechanisches Modell

Da in jeder Schicht ein ebener Spannungszustand vorausgesetzt wird, können die Modellvorstellungen aus Abschn. 3.2 übernommen werden. Um die Zugversteifung zwischen den Rissen berücksichtigen zu können, wird die Dicke der auf Zug mitwirkenden Betonschicht auf den doppelten Abstand vom Rand zum Schwerpunkt der Bewehrung festgelegt [16]. Die Plattenmomente m_x , m_y und m_{xy} und die Membrankräfte n_x , n_y und n_{xy} resultieren aus der Integration der Spannungen σ_x , σ_y , und σ_{xy} über die Querschnittshöhe, Bild 3 (b).

4 Implementierung in ANSYS Mechanical APDL

Das gerissene Scheibenmodell wurde bereits von FORSTER/MARTI [17] als ein finites Element zur Berechnung von Stahlbeton-Scheibenelementen formuliert. Für die nachfolgenden Berechnungen von Stahlbetonscheiben und Stahlbetonplatten werden zum gerissenen Scheibenmodell die linear elastische Werkstoffbeziehung für Scheiben und das zweiachsige Betondruckgesetz entsprechend Abschn. 3.1 als „User Defined Material“ in ANSYS Mechanical APDL [2] zusammengefasst. Aus dem gegebenen Verzerrungszustand eines finiten Elements muss neben den Elementspannungen σ_x , σ_y , und σ_{xy} auch die Elementsteifigkeitsmatrix $k^e = \partial \sigma / \partial \varepsilon$ (Tangentialsteifigkeit) berechnet werden. Aufgrund der in den mechanischen Modellen berücksichtigten physikalischen Nichtlinearität

ten ist die Elementsteifigkeitsmatrix in jedem Lastschritt und in jedem Integrationspunkt zu berechnen; die Berechnung von k^e erfolgt auf der Grundlage bekannter numerischer Methoden [18].

5 Elementversuche von Xie/Bentz/Collins

Zur Untersuchung des Einflusses einer Axialbelastung auf den Querkraftwiderstand von Stahlbetonscheiben wurden von XIE/BENTZ/COLLINS [19] Versuche an Stahlbetonscheibenelementen durchgeführt. Dabei wurde das Verhältnis von Axialbeanspruchung σ_x zu Schubspannung τ_{xy} variiert. Es wurden die Elementversuche PL1, PL2, PL3, PL5 und PL6 bezüglich des Last-Verformungsverhaltens nachgerechnet. Die Geometrie und die Bewehrungsführung sind in Bild 4 (a) dargestellt. Das Finite-Elemente-Modell, die Belastung und die verwendeten Werkstoffparameter sind in Bild 4 (b) resp. Tab. 1 aufgezeigt.

Bild 5 zeigt die an den Versuchen gemessenen (grau) und die aus der Finite-Elemente-Analyse (schwarz) resultierenden Schubspannungs-Schubverzerrungs-Diagramme. Unabhängig vom Verhältnis σ_x/τ_{xy} ist eine gute Übereinstimmung feststellbar. Nach der linear elastischen Phase nehmen die Schubverzerrungen $\gamma/2$ beim Reißen aufgrund der im Modell berücksichtigten diskreten Risse schlagartig zu. Danach wird das Verhalten der Verformungskurven vorwiegend vom idealisierten Spannungs-Dehnungs-Verhalten der Bewehrung bestimmt; der Fließ-

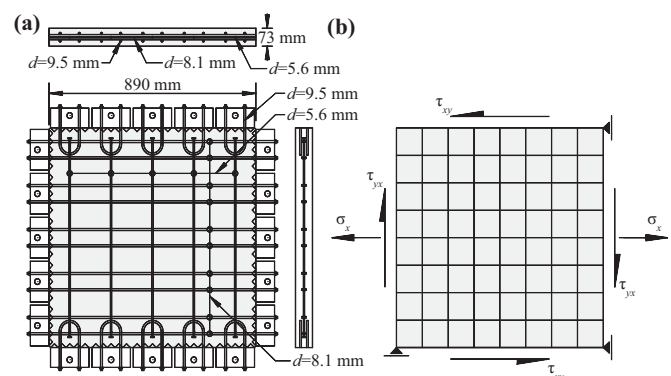


Bild 4 Elementversuche von XIE/BENTZ/COLLINS [19]: (a) Geometrie und Bewehrungsführung; (b) Finites-Elemente-Modell
Experimental tests by XIE, BENTZ and COLLINS [19]: (a) geometry and rebar layout; (b) finite-element-model

Tab. 1 Elementversuche von XIE/BENTZ/COLLINS [19]: Werkstoffparameter
Experimental tests by XIE, BENTZ and COLLINS [19]: material properties

Versuch	Bewehrung				Beton	
PL	$f_{sy}^{(a)}$	$f_{su}^{(a)}$	$\epsilon_{su}^{(a)}$	$E_s^{(a)}$	$f_{cc}^{(a)}$	$\epsilon_{cu}^{(a)}$
[–]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]
PL1					38,5	0,18
PL2					38,2	0,20
PL3	604 ¹ /529 ²	641 ¹ /581 ²	3 ¹ /4,5 ²	205 800 ^{1,2}	42,0	0,25
PL5					38,1	0,19
PL6					43,5	0,22

1 Werte in x-Richtung (a) Werte aus XIE/BENTZ/COLLINS [19] f_{sy} Fließspannung; f_{su} Bruchspannung; ϵ_{su} bzw.
2 Werte in y-Richtung (b) übliche Werte für Betonstahl ϵ_{cu} Bruchverzerrung; E_s Elastizitätsmodul

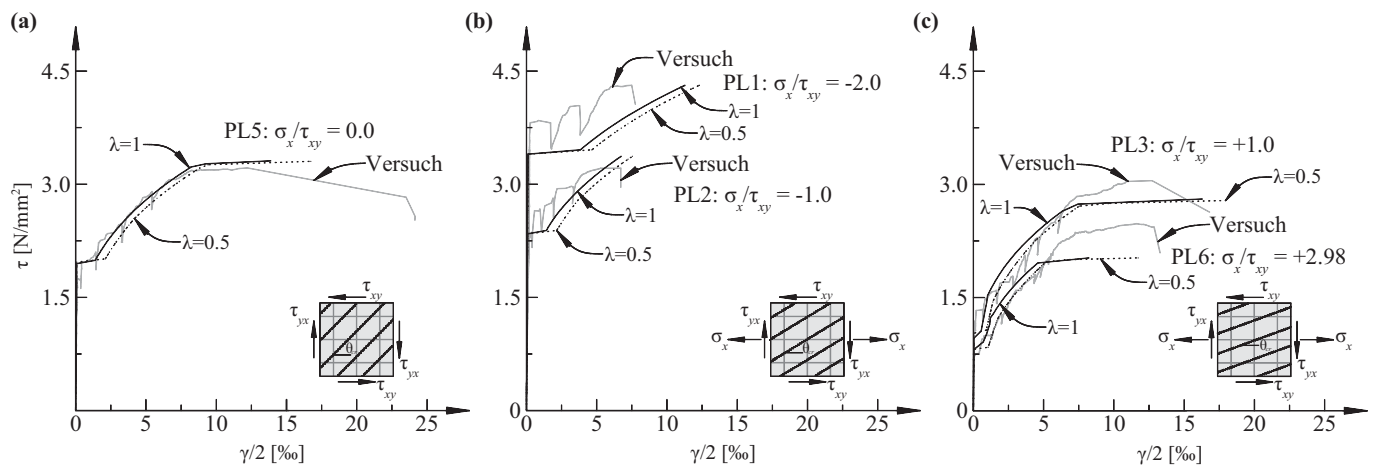


Bild 5 Schubspannungs-Schubverzerrungs-Diagramme der Elementversuche von XIE/BENTZ/COLLINS [19]: (a) PL5; (b) PL1 und PL2; (c) Versuche PL3 und PL6
Shear stress-strain diagrams from experimental tests by XIE, BENTZ AND COLLINS [19]: (a) test PL5; (b) tests PL1 and PL2; (c) tests PL3 and PL6

beginn der Bewehrung hat einen ausgeprägten Steifigkeitsabfall zur Folge.

6 Scheibenversuche von Leonhardt/Walther

LEONHARDT/WALTHER [20] führten Versuche an wandartigen Trägern mit dem Ziel durch, den Einfluss der Bewehrungsführung auf das Tragverhalten von Stahlbetonwandscheiben zu bestimmen. Im Folgenden werden die Versuche WT4 und WT7 auf der Grundlage der in Abschn. 3 vorgestellten Werkstoffmodelle mithilfe einer Finite-Elemente-Analyse nachgerechnet. Beim Versuchskörper WT4 wurde die Last q oben aufgebracht und die Auflagerzonen durch Auflagerlisenen verstärkt. Die Wandscheibe WT7 wurde am unteren Rand mit einer durchgehenden, nach beiden Seiten auskragenden Konsole zur Eintragung der aufgehängten Lasten ausgeführt. Die Abmessungen, die Bewehrungsführung und das verwendete Finite-Elemente-Modell sind in Bild 6 dargestellt. Die der Berechnung zugrunde gelegten Materialparameter sind in Tab. 2 zusammengefasst.

Bild 7 (a) und (d) zeigt das Last-Verformungs-Diagramm (Q - w) der beiden Scheibenversuche WT4 und WT7. Es ist eine gute Übereinstimmung zwischen den berechneten und den gemessenen Kurven feststellbar. Das leicht zu

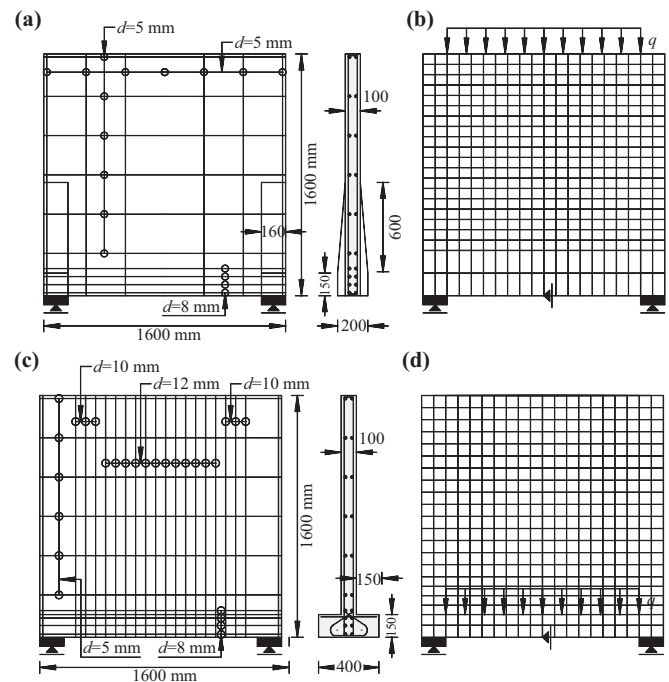


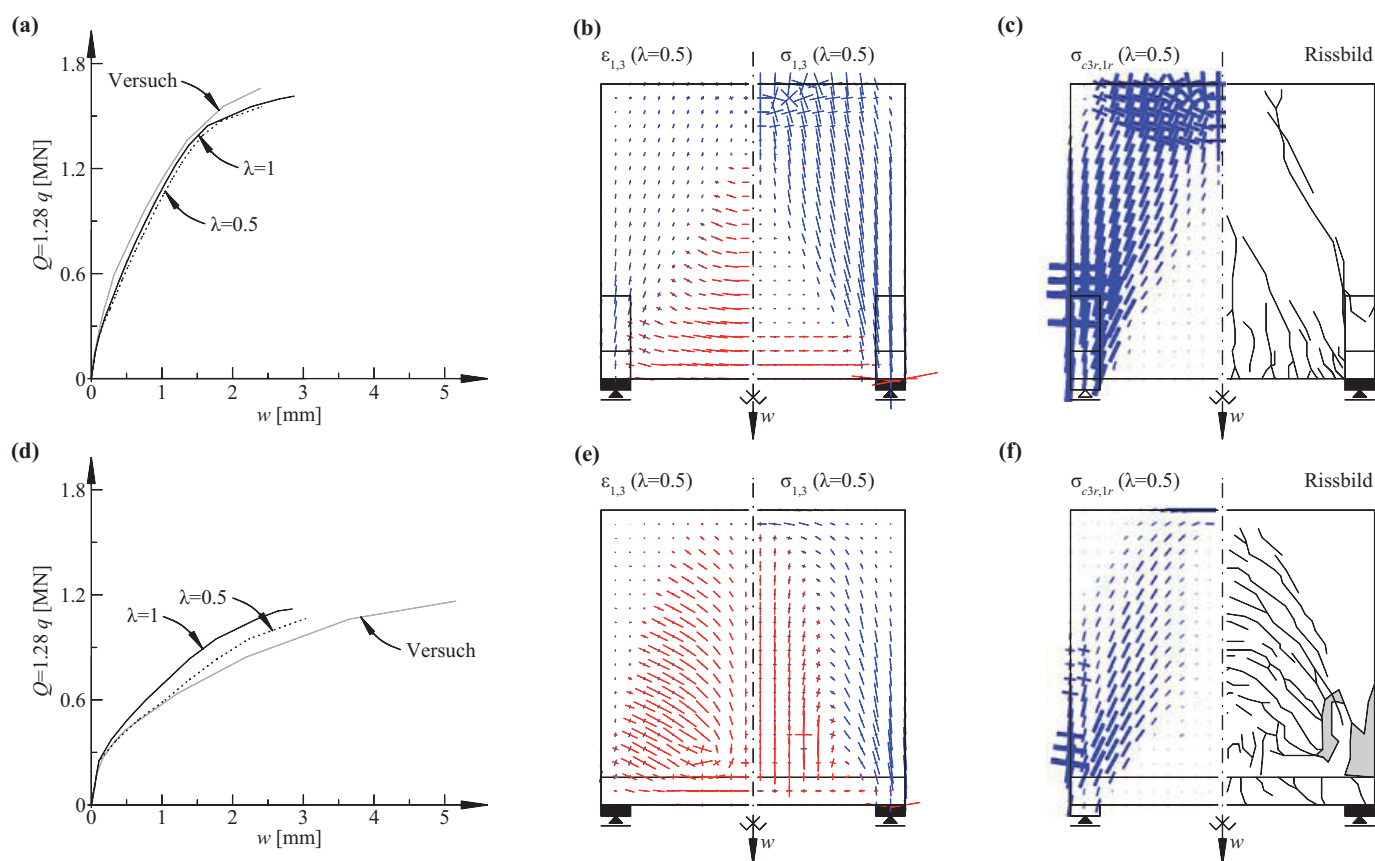
Bild 6 Elementversuche von LEONHARDT/WALTHER [20]: (a) Geometrie und Bewehrungsführung WT4; (b) Finites-Elemente-Modell WT4; (c) Geometrie und Bewehrungsführung WT7; (d) Finites-Elemente-Modell WT7
Experimental tests by LEONHARDT and WALTHER [20]: (a) geometry and rebar layout for specimen WT4; (b) finite-element-model for specimen WT4; (c) geometry and rebar layout for specimen WT7; (d) finite-element-model for specimen WT7

Tab. 2 Elementversuche von LEONHARDT/WALTHER [20]: Werkstoffparameter
Experimental tests by LEONHARDT AND WALTHER [20]: material properties

Versuch	Bewehrung				Beton	
WT	$f_{sy}^{(a)}$	$f_{su}^{(a)}$	$\epsilon_{su}^{(b)}$	$E_s^{(b)}$	$f_{cc}^{(a)}$	$\epsilon_{cu}^{(a)}$
[-]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]
WT4	419 ^{1,2}	536 ^{1,2}	13 ^{1,2}	205 000 ^{1,2}	30	0,2
WT7						

1 Werte in x-Richtung (a) Werte LEONHARDT/WALTHER [20]

2 Werte in y-Richtung (b) übliche Werte für Betonstahl

 f_{sy} Fließspannung; f_{su} Bruchspannung; ϵ_{su} bzw. ϵ_{cu} Bruchverzerrung; E_s Elastizitätsmodul**Bild 7** Nachrechnung der Scheibenversuche von LEONHARDT/WALTHER [20]: (a) Last-Verformungs-Kurve WT4; (b) Hauptverzerrungen und Hauptspannungen WT4; (c) Hauptdruckspannungen am Riss (Richtung und Intensität) und Rissbild WT4; (d) Last-Verformungs-Kurve WT7; (e) Hauptverzerrungen und Hauptspannungen WT7; (f) Hauptdruckspannungen am Riss (Richtung und Intensität) und Rissbild WT7

Validation based on membrane tests by LEONHARDT and WALTHER [2]: (a) load-deformation curves for specimen WT4; (b) principal strains and stresses for specimen WT4; (c) principal compression stresses (direction and magnitude) and crack pattern for specimen WT4; (d) load-deformation curves for specimen WT7; (e) principal strains and stresses for specimen WT7; (f) principal compression stresses (direction and magnitude) and crack pattern for specimen WT7

steife Verhalten der berechneten Last-Verformungs-Kurve kann teilweise auf die im Versuch verwendete rippenlose Bewehrung (Stahl I; $d = 5$ mm) zurückgeführt werden. Die berechnete Traglast mit $\lambda = 0.5$ beträgt für WT4 1.60 MN (97 % der gemessenen Traglast); für WT7 wurde mit dem Finiten-Elemente-Modell eine Traglast von 1.08 MN berechnet (93 % der gemessenen Traglast).

Nach dem Reißen des Betonquerschnitts wird das Last-Verformungs-Verhalten des Versuchskörpers WT4 durch die Spannungs-Dehnungs-Charakteristik des Betonstahls bestimmt; das zu weiche Verhalten der berechneten Last-Verformungs-Kurve von WT4 gegenüber dem Versuch nach dem Fließen der Bewehrung kann mit der bilinea-

ren Idealisierung der Spannungs-Dehnungs-Charakteristik des Betonstahls erklärt werden. Ein Vergleich der Hauptverzerrungen $\epsilon_{1,3}$ und der Hauptspannungen $\sigma_{1,3}$ (Bild 7 (b) resp. (e)) mit den in Bilder 7 (c) resp. (f) dargestellten Rissbildern zeigt, dass auch die Tragwirkung mit dem Finite-Elemente-Modell gut abgebildet wird. Die Scheibe WT4 trägt im Bruchzustand die Beanspruchung über zwei fächerförmige Druckspannungsfelder ab, die mit dem unten liegenden Zugband der Scheibe im Gleichgewicht gehalten werden. Demgegenüber trägt die Wandscheibe WT7 die unten angreifende Beanspruchung über eine Bogentragwirkung ab. Dabei wird die Beanspruchung mit der stehenden Bewehrung aufgehängt und sukzessive auf die Druckbögen abgestützt.

Die Auswertung der Finiten-Elemente-Analyse ergibt, dass im Falle der Wandscheibe WT4 das unten liegende Zugband und in weiten Bereichen die Scheibenbewehrung fließen. Bild 7 (c) zeigt, dass die Hauptdruckspannung σ_{c3r} im Bereich der Verstärkungslisenen zunimmt. Wie auch im Versuch zeigt die Nachrechnung im Bereich der Verstärkungslisenen ein Druckversagen des Betons aufgrund der hohen Querdehnung. Für die Wandscheibe WT7 zeigt die FE-Analyse ebenfalls, dass die Bewehrung im unten liegenden Zugband fließt. Die Aufhängebewehrung und die horizontale Bewehrung verbleiben hingegen im linear elastischen Bereich. Wie Bild 7 (f) verdeutlicht, nimmt die Intensität der errechneten Hauptdruckspannung σ_{c3r} oberhalb des Untergurts ein Maximum an. Sowohl im Versuch als auch in der Nachrechnung erfolgt das Versagen des Prüfkörpers infolge eines Betonversagens an dieser Stelle, wie das in Bild 7 (c) dargestellte Rissbild nach dem Bruch verdeutlicht.

7 Plattenversuche von Marti/Leesti/Khalifa

MARTI/LEESTI/KHALIFA [21] führten Bauteilversuche an torsionsbeanspruchten Stahlbetonplatten durch. Mithilfe einer Finiten-Elemente-Analyse unter Verwendung des in Abschn. 3.3 aufgezeigten Schichtenmodells wird das Momenten-Verformungs-Verhalten des Versuchskörpers ML8 nachgerechnet. Die Geometrie und das verwendete Finite-Elemente-Netz sind in Bild 8 dargestellt. Die Werkstoffparameter, die der Berechnung zugrunde gelegt wurden, sind in Tab. 3 zusammengefasst. Die Lasteinleitung

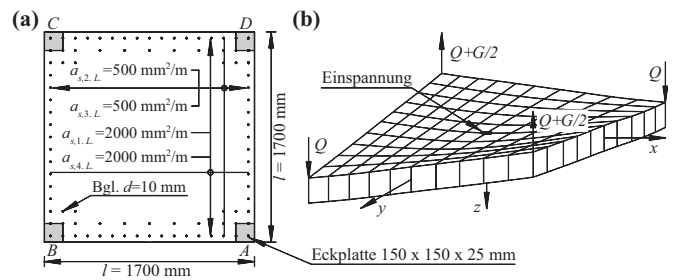


Bild 8 Plattenversuch von MARTI/LEESTI/KHALIFA [21]: (a) Geometrie und Bewehrungsführung; (b) Finites-Elemente-Modell
Experimental tests by MARTI, LEESTI and KHALIFA [21]: (a) geometry and rebar layout; (b) finite-element-model and loading condition

der Beanspruchung Q erfolgte an den Ecken der Versuchskörper mit identischen, aber entgegengesetzten Kräften, die eine Torsionsbeanspruchung erzeugten, Bild 8 (b). An den Ecken C und A wird zur aufgetragenen Last zusätzlich das Eigengewicht G des Versuchskörpers abgetragen. Die fehlende Angabe der Last Q wird mithilfe der von MARTI/LEESTI/KHALIFA [21] angegebenen Beziehung (8) zurückgerechnet.

$$m_{xy} = \left(\frac{Q}{2} + \frac{G}{8} \right) \frac{l}{b} \quad (8)$$

mit:

l Länge der Stahlbetonplatte

Dabei ist b der Hebelarm der inneren Kräfte aus Torsion und wurde gemäß [21] für die Auswertung mit

Tab. 3 Elementversuche von MARTI/LEESTI/KHALIFA [21]: Werkstoffparameter
Experimental tests by MARTI, LEESTI and KHALIFA [21]: material properties

Versuch	Bewehrung				Beton	
ML	$f_{sy}^{(a)}$	$f_{su}^{(b)}$	$\epsilon_{su}^{(b)}$	$E_s^{(b)}$	$f_{cc}^{(a)}$	$\epsilon_{cu}^{(a)}$
[-]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]	[N/mm ²]	[N/mm ²]	[%]
ML8	412 ¹ /479 ²	600 ^{1,2}	10 ^{1,2}	205 000 ^{1,2}	49.1	0.3

1 Werte in x-Richtung (a) Werte MARTI/LEESTI/KHALIFA [21] f_{sy} Fließspannung; f_{su} Bruchspannung; ϵ_{su} bzw.
2 Werte in y-Richtung (b) übliche Werte für Betonstahl ϵ_{cu} Bruchverzerrung; E_s Elastizitätsmodul

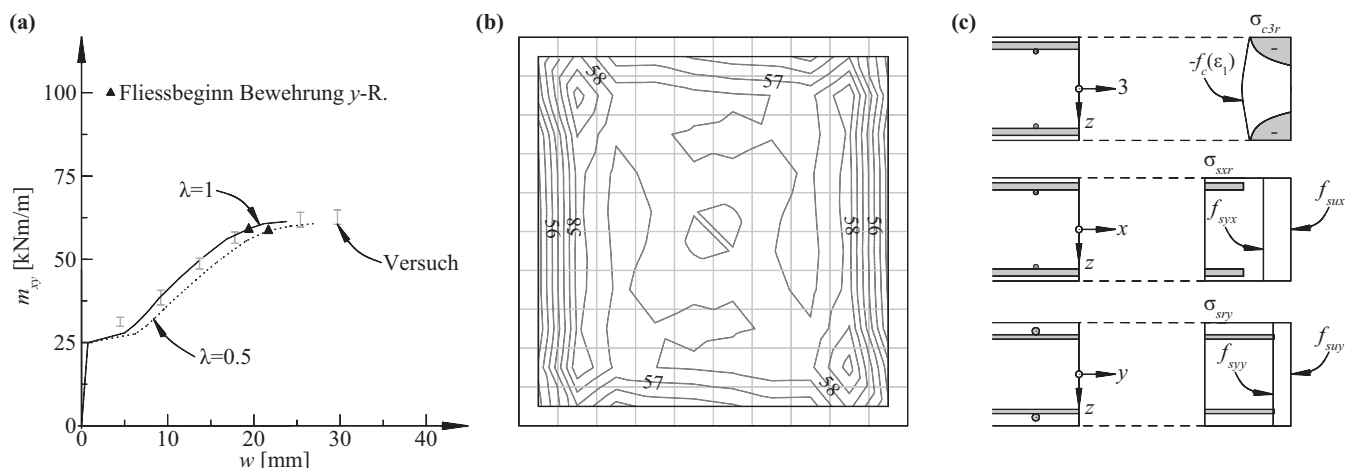


Bild 9 Nachrechnung des Versuchs ML8 von MARTI/LEESTI/KHALIFA [21]: (a) Momenten-Verformungs-Kurve; (b) Drillmomente in [kNm/m]; (c) Spannungsverteilung
Validation based on experimental test ML8 by MARTI, LEESTI and KHALIFA [21]: (a) moment-deformation diagram; (b) twisting moments in [kNm/m]; (c) stress distribution between concrete and steel

$b = 1600$ mm angenommen. Bild 9 (a) zeigt den Zusammenhang des mittleren Drillmoments m_{xy} (Beziehung (8)) zum Mittelwert der relativen Deformation w der vier Plattenecken. Die Momenten-Verformungs-Kurven (m_{xy} - w) werden für den minimalen ($\lambda = 0.5$) und maximalen ($\lambda = 1.0$) Rissabstand dargestellt und zeigen eine gute Übereinstimmung mit den vorhandenen Messwerten aus dem Versuch. Das rechnerische Bruchmoment beträgt 94 % resp. 95 % des am Versuch beobachteten Bruchmoments $m_{xyu} = 64.8$ kNm/m. In Bild 9 (b) ist der Verlauf des Drillmoments dargestellt. Es ist zu erkennen, dass das in Plattenmitte nahezu konstante Drillmoment an den Plattenrändern leicht abnimmt. Wie am Versuchskörper tritt auch in der Finiten-Elemente-Analyse das Versagen infolge des Betonbruchs ein, d.h. die Betonspannungen in Hauptrichtung 3 erreichen die effektive Betondruckfestigkeit $f_c(\epsilon_1)$ sowohl am oberen als auch am unteren Rand des Querschnitts (Bild 9 (c)). Die errechneten Stahlspannungen überschreiten in y -Richtung dabei gerade die Fließgrenze, wohingegen die Bewehrung in x -Richtung elastisch bleibt.

8 Ausblick

Im Model Code 2010 [22] wird für die Validierung von numerischen Modellen folgendes Vorgehen vorgeschlagen:

- Überprüfung der Modelle an standardisierten Werkstoffversuchen sowie an Bauteilversuchen.
- Einfluss der gewählten Elementgröße auf die Berechnungsergebnisse der Finiten-Elemente-Analysen.

Der erste Punkt wurde im Rahmen dieses Fachaufsatzes behandelt. Sowohl die Nachrechnungen von Werkstoffversuchen (Abschn. 4) als auch die Nachrechnung von Bauteilversuchen (Abschn. 5 und 6) bestätigten, dass mit der Implementierung des gerissenen Scheibenmodells als „User Defined Material“ in ANSYS Mechanical APDL [2] das Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbetonbauteilen im ebenen Spannungszustand mit ausreichender Genauigkeit berechnet werden kann. Im Rahmen einer Masterarbeit [23] wurde die Sensitivität der FE-Analyse bezüglich der gewählten Elementgröße und der gewählten Schichtenanzahl im Schichtenmodell diskutiert; eine Publikation der Resultate ist geplant.

Literatur

- [1] MARTI, P.; ALVAREZ, M.; KAUFMAN, W.; SIGRIST, V.: *Tension Chord Model for Structural Concrete*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 8, No. 4, November 1998, pp. 287–298.
- [2] Ansys Mechanical APDL, Release 14.0, Canonsburg, USA.
- [3] KRÄTZIG, W. B.; BASAR, Y.: *Tragwerke 3 – Theorie und Anwendung der Methode der Finiten Elemente*. Springer-Verlag, Berlin, 1997, 402 pp.
- [4] ALVAREZ, M.: *Einfluss des Verbundverhaltens auf das Verformungsvermögen von Stahlbeton*. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 236, Birkhäuser Verlag, Basel, Juli 1998, 182 pp.
- [5] KAUFMANN, W.: *Strength and Deformations of Structural Concrete Subjected to In-Plane Shear and Normal Forces*. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 234, Birkhäuser Verlag, Basel, Juli 1998, 147 pp.
- [6] STERNPIEWSKI, L.; EIBL, J.: *Finite Elemente im Stahlbeton*. Sonderdruck aus dem Betonkalender 1996, Ernst & Sohn Verlag, Berlin, 1996, pp. 577–647.
- [7] VECCIO, F. J.; COLLINS, P.: *The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear*. ACI Structural Journal, V. 83, No. 2, 1986, pp. 219–231.

Mit dem Ziel, ausgewählte Fragen zum Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbetonbauteilen detaillierter zu untersuchen, sind folgende Schritte vorgesehen:

- Implementierung von Werkstoffbeziehungen mit nichtlinearer Verfestigung für den Betonstahl (kaltverformte und naturharte Betonstähle), um einen Vergleich der Berechnungsergebnisse basierend auf der bilinearen Näherung zu ermöglichen.
- Erweiterung der Implementierung auf räumliche Tragwerke, wobei der Spannungszustand der einzelnen Bauteile weiterhin durch einen ebenen Spannungszustand beschrieben werden kann.
- Implementierung schiefer Bewehrung.
- Überprüfung eines bestehenden Bauwerks und Vergleich mit den üblicherweise zur Anwendung kommenden Berechnungsverfahren.

9 Zusammenfassung

Durch die Implementierung des gerissenen Scheibenmodells als „User Defined Material“ in ANSYS Mechanical APDL [2] konnte das Last-Verformungs-Verhalten von Stahlbetonscheiben und Stahlbetonplatten mit einer guten Übereinstimmung zu den Versuchsergebnissen berechnet werden. Zudem entsprach die im mechanischen Modell maßgebende Versagensart (Abbruchkriterium) dem im Versuch beobachteten Bruch. Da die Modelle mechanisch begründet sind und nur wenige Modellparameter aufweisen, können die Berechnungsergebnisse gut interpretiert werden.

Obwohl mit dem aktuellen Stand der Implementierung des gerissenen Scheibenmodells als „User Defined Material“ ein effizientes Instrument zur Berechnung des Last-Verformungs-Verhaltens von Stahlbetonscheiben und Stahlbetonplatten zur Verfügung steht, sind weitere Entwicklungen und Versuchsnachrechnungen vorgesehen. Insbesondere die Erweiterung der Implementierung auf räumliche Tragwerke und die Berücksichtigung schiefer Bewehrungen würden es erlauben, ein breites Spektrum an Fragestellungen aus der Anwendung und der Forschung zu diskutieren.

- [8] KAUFMANN, W.; MARTI, P.: *Structural Concrete: Cracked Membrane Model*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 124, No. 12, 1998, pp. 1467–1475.
- [9] MITCHELL, D.; COLLINS, M. P.: *Diagonal Compression Field Theory – A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion*. ACI Structural Journal, Vol. 71, No. 8, 1974, pp. 396–408.
- [10] SARGIN, M.: *Stress-Strain Relationships for Concrete and the Analysis of Structural Concrete Sections*. Solid Mechanics Division, University of Waterloo, Waterloo Ontario, 1971, 167 pp.
- [11] SIGIRST, V.; MARTI, P.: *Ductility of Structural Concrete: A Contribution*. Proceedings, Workshop on Development of EN 1992 in Relation to New Research Results and to the CEB-FIP Model Code 1990, Czech Technical University, Prague, 1994, pp. 211–223.
- [12] THOMA, K. H.: *Stochastische Betrachtung von Modellen für vorgespannte Zugelemente*. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 287, vdf Hochschulverlag, Basel, 2004, 118 pp.
- [13] CEB Comité Euro-International du Béton, CEB-FIP: *Practitioners' guide to finite element modelling of reinforced concrete structures*. Bulletin d'Information 45, Lausanne, 2008, 337 pp.
- [14] KOLLEGER, J.: *Algorithmus zur Bemessung von Flächen-tragwerken unter Normalkraft- und Momentenbeanspruchung*. Beton- und Stahlbetonbau 86 (1991), Heft 5, S. 114–119.
- [15] SEELHOFFER, H.: *Ebener Spannungszustand im Betonbau: Grundlagen und Anwendung*. Institut für Baustatik und Konstruktion, ETH Zürich, IBK Bericht Nr. 320, vdf Hochschulverlag, November 2009, 236 pp.
- [16] MARTI, P.: *Design of Concrete Slabs for Transverse Shear*. ACI Structural Journal, Vol. 87, No. 2, March–April 1990, pp. 180–190.
- [17] FOSTER, J. S.; MARTI, P.: *FE Modelling of RC Membranes using the CMM Formulation*. Fifth World Congress on Computational Mechanics, Vienna, Austria, July 7–12 2002.
- [18] BATHE, K. J.: *Finite Elemente Methoden*. Springer-Verlag, Berlin, 1990, 820 pp.
- [19] XIE, L.; BENTZ, E. C.; COLLINS, M. P.: *Influence of Axial Stress on Shear Response of Reinforced Concrete Elements*. ACI Structural Journal, Vol. 108, No. 6, November–Dezember 2011, pp. 745–754.
- [20] LEONHARDT, F.; WALTHER, R.: *Wandartige Träger*. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 178, Ernst & Sohn, Berlin, 1966, 159 pp.
- [21] MARTI, P.; LEESTI, P.; KHALIFA, W. U.: *Torsion Tests on Reinforced Concrete Slab Elements*. ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 113, No. 5, Mai 1987, pp. 994–1010.
- [22] CEB Comité Euro-International du Béton, CEB-FIP, *fib Model Code for Concrete Structures 2010*. Ernst & Sohn Verlag Berlin, Lausanne, 2013, 402 pp.
- [23] ROOS, P.: *FEM Modelle für Stahlbetonplatten – Verifizierung des Schichtenmodells anhand von Bauteilversuchen*. Masterthesis, Hochschule Luzern Technik & Architektur, Horw, Februar 2014, 107 pp.

Autoren



Prof. Dr. Karel Thoma
Hochschule Luzern
Technik & Architektur
Technikumstr. 21
6048 Horw
karel.thoma@hslu.ch



Patrick Roos, BSc
Hochschule Luzern
Technik & Architektur
Technikumstr. 21
6048 Horw
patrick.roos@hslu.ch



Marius Weber, MSc
Hochschule Luzern
Technik & Architektur
Technikumstr. 21
6048 Horw
marius.weber@hslu.ch