НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§1. Понятие первообразной функции

Задачей дифференциального исчисления является нахождение по функции $y = f(x)$ её производной или дифференциала. В интегральном исчислении решается обратная задача: по заданной функции $y = f(x)$ требуется найти такую функцию $F(x)$, что $F'(x) = f(x)$, то есть требуется *восстановить функцию по её производной.* Например, по закону изменения скорости восстановить уравнение закона движения.

Определение. Функция $F(x)$ называется ***первообразной для функции*** $f(x)$ на интервале (a, b), если она дифференцируема на этом интервале и для $\forall x \in (a, b)$ $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = f(x)dx$.

Например, для функции $f(x) = cosx$ первообразной является функция $F(x) = sinx$, так как производная от нее равна исходной функции.
Естественным образом возникает два следующих вопроса:

1. для всякой ли функции существует первообразная;
2. если первообразная существует, то является ли она единственной,

то есть вопрос существования и единственности первообразной функции.
Ответ на первый из них дает следующая теорема.

Теорема. Любая непрерывная на интервале (a, b) функция имеет на этом интервале первообразную.

Разберемся далее с вопросом единственности первообразной. Пусть $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале (a, b). Составим функцию $F(x) = F_2(x) - F_1(x)$, которая является дифференцируемой функцией на (a, b), как разность двух дифференцируемых функций. Найдем производную функции $F(x)$:

$$F'(x) = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

По теореме Лагранжа, из этого следует, что $F(x) = \mathrm{C}$, C – *const*. Значит, для любых двух различных первообразных одной и той же функции, выполняется равенство $F_2(x) - F_1(x) = \mathrm{C}$ для $\forall x \in (a, b)$. Доказали следующий факт.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – две различные первообразные одной и той же функции $f(x)$ на интервале (a, b), то они отличаются друг от друга постоянным слагаемым, то есть $F_2(x) = F_1(x) + \mathrm{C}$, C – *const*.

Следствие. Если $F(x)$ некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале (a, b), то все первообразные этой функции определяются выражением $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная.

Операция отыскания первообразной называется интегрированием.

Определение. Совокупность $\{F(x)+C\}$ всех первообразных на функции $f(x)$ на интервале (a,b) называется ***неопределенным интегралом*** и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Здесь:

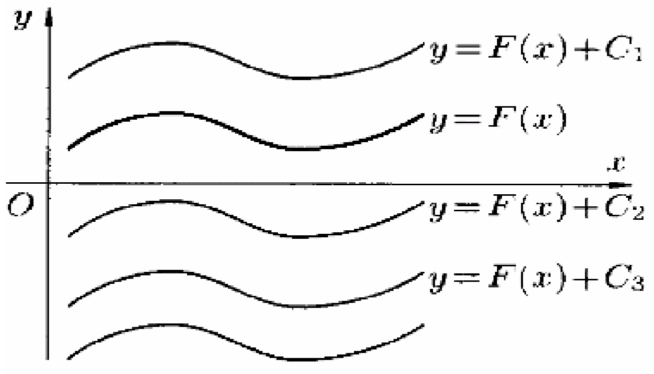
$f(x)dx$ – подынтегральное выражение;

$f(x)$ – подынтегральная функция;

x – переменная интегрирования;

C – постоянная интегрирования.

С *геометрической точки зрения,* неопределенный интеграл представляет собой однопараметрическое семейство кривых $y = F(x) + C$, обладающих следующим свойством: *все касательные к кривым в точках с одинаковой абсциссой параллельны между собой.* Эти кривые называются ***интегральными кривыми***. Они не пересекаются между собой и не касаются друг друга. Получаются одна из другой параллельным переносом вдоль оси ординат Oy.



Основные свойства неопределенного интеграла

1. Производная и дифференциал неопределенного интеграла равны соответственно подынтегральной функции и подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

2. Неопределенный интеграл от производной (дифференциала) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \int df(x) = f(x) + C.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла:

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx\,, A - const.$$

4. Неопределенный интеграл от суммы (разности) интегрируемых функций равен сумме (разности) интегралов этих функций:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Это свойство будет верно для алгебраической суммы любого конечного числа интегрируемых функций.

Последние два свойства часто объединяют в одно и называют ***свойством линейности неопределенного интеграла***: неопределенный интеграл от линейной комбинации интегрируемых функций равен соответствующей линейной комбинации интегралов от этих функций

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} \int \alpha_i f_i(x) dx.$$

где α_i – некоторые постоянные, а $f_i(x)$ – интегрируемые функции ($i = \overline{1, n}$).

5. Любая формула интегрирования сохраняет свой вид, если переменную интегрирования заменить любой дифференцируемой функцией этой переменной:

$$\int f(x) dx = F(x) + C \implies \int f(u) du = F(u) + C.$$

Это свойство вытекает из свойства инвариантности первого дифференциала и может быть проверено по правилу дифференцирования сложной функции. Оно эффективно при практическом применении, так как основная таблица интегралов в силу этого оказывается справедливой независимо от того, является ли переменная интегрирования независимой переменной или любой дифференцируемой функцией от неё. В частности, из этого следует еще одно свойство.

6. Если $F(x)$ первообразная функции $f(x)$, то

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, a \neq 0 \,.$$

§2. Таблица основных интегралов

Так как интегрирование, это действие обратное дифференцированию, то таблица простейших интегралов получается обращением формул дифференцирования. Другими словами, таблица основных формул интегрирования получается из таблицы производных элементарных функций при обратном ее чтении (справа налево).

Таблица простейших интегралов ($u = u(x)$)

1. $\int 0 \cdot du = C$;	
2. $\int u^{\alpha} du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где $\alpha \neq -1$;	2а. $\int 1 \cdot du = u + C$; 2б. $\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$; 2в. $\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$;
3. $\int \frac{1}{u} du = \ln\lvert u\rvert + C$;	
4. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$;	4а. $\int e^u du = e^u + C$;

5. $\int \sin u du = -\cos u + C$;	
6. $\int \cos u du = \sin u + C$;	
7. $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \mathrm{tg} u + C$;	
8. $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\mathrm{ctg} u + C$;	
9. $\int \frac{1}{u^2 + a^2} du = \begin{cases} \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{u}{a} + C \\ -\frac{1}{a} \mathrm{arcctg} \frac{u}{a} + C_1 \end{cases}$;	9a. $\int \frac{1}{1+u^2} du = \mathrm{arctg} u + C =$ $= -\mathrm{arcctg} u + C_1$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \begin{cases} \arcsin \frac{u}{a} + C \\ -\arccos \frac{u}{a} + C \end{cases}$;	10a. $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C =$ $= -\arccos u + C_1$
11. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{u-a}{u+a} \right\| + C$; $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left\| \frac{a+u}{a-u} \right\| + C$;	11a. $\int \frac{du}{u^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left\| \frac{u-1}{u+1} \right\| + C$; $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left\| \frac{1+u}{1-u} \right\| + C$;
12. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a}} = \ln \left\| u + \sqrt{u^2 \pm a} \right\| + C$.	

Эти интегралы называют ***табличными***. Проверяется их правильность непосредственным дифференцированием. Если первообразная $F(x)$ функции $f(x)$ является элементарной функцией, то говорят, что интеграл $\int f(x)dx$ ***выражается в элементарных функциях*** или функция $f(x)$ ***интегрируема в квадратурах (интегрируема в конечном виде).***

Пример. Найти неопределенный интеграл с помощью таблицы интегралов:

$$\int \frac{dx}{5x^2+1} = \int \frac{dx}{5\left(x^2 + \frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 + \frac{1}{5}} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{x^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{5}}\right)^2} = \frac{1}{5} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} \mathrm{arctg} \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{5}}} + C =$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{5} \mathrm{arctg} \sqrt{5} x + C.$$

Используя таблицу и свойства интегрирования можно находить интегралы от более сложных функций. Но, в отличие от дифференциального исчисления, где можно найти производную от любой элементарной функции (и она также будет элементарной функцией), интегралы не от всех функций выражаются в элементарных, то есть неопределенный интеграл является некоторой новой функцией, а интеграл в этом случае называется ***неберущимся интегралом.***

Например: $\int e^{-x^2}dx$, $\int sinx^2dx$, $\int \frac{e^x}{x}dx$, $\int \frac{x}{\ln x}dx$, $\int \frac{sinx}{x}dx$.

Интегрирование, в отличие от дифференцирования с его установленными формальными правилами, в большей степени требует индивидуального подхода. Нет общих приемов нахождения неопределенных интегралов, а разработаны лишь частные методы, позволяющие (хоть и не всегда) свести интеграл к табличному. Один из таких методов – нахождение интегралов с помощью тождественных преобразований подынтегрального выражения с использованием основных свойств и таблицы неопределенных интегралов. Он называется ***непосредственным интегрированием***.

Пример. Найти интегралы:

1. $\int \frac{x^7+x^5-1}{x^5}dx$. Разделим числитель на знаменатель почленно и воспользуемся свойством линейности неопределенного интеграла:

$$\int \frac{x^7+x^5-1}{x^5}dx = \int \frac{x^7}{x^5}dx + \int dx - \int x^{-5}dx = \frac{x^3}{3} + x + \frac{x^{-4}}{4} + C;$$

2. $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx = \int \frac{\left(x^2+4\right)-4}{x^2+4}dx = \int \left(1-\frac{4}{x^2+4}\right)dx = x - 2\text{arctg}\frac{x}{2} + C$;

3. $\int \frac{7^x+1}{3^x}dx = \int \left(\frac{7}{3}\right)^x dx + \int \left(\frac{1}{3}\right)^x dx = \frac{\left(\frac{7}{3}\right)^x}{\ln\frac{7}{3}} + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\frac{1}{3}} + C =$

$$= \frac{7^x}{3^x\left(\ln 7 - \ln 3\right)} - \frac{1}{3^x \ln 3} + C;$$

4. $\int \text{tg}^2 x dx = \int \left[\left(1+\text{tg}^2 x\right)-1\right]dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \text{tg}x - x + C$;

5. $\int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \int \frac{dx}{\left(x+3\right)^2+4} = \frac{1}{2}\text{arctg}\frac{x+3}{2} + C$;

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(x-1\right)^2}} = \int \frac{d\left(x-1\right)}{\sqrt{1-\left(x-1\right)^2}} = \arcsin(x-1) + C$.

Произвольная постоянная записывается при этом не каждый раз при нахождении интеграла от суммы, а лишь один раз, когда исчезает знак последнего интеграла в сумме.

§3. Интегрирование путем замены переменной (подстановкой)

Пусть требуется вычислить интеграл $\int f(x)dx,$ который не является табличным. Суть метода подстановки состоит в том, что в интеграле $\int f(x)dx$ переменную *x* заменяют переменной *t* по формуле $x = \varphi(t)$, откуда $dx = \varphi'(t)dt$ и получают другой интеграл, метод интегрирования которого известен, с по-следующим возращением к исходной переменной. Существуют две разновидности замены переменной в неопределенном интеграле: вынесение (и внесение) множителя из-под знака (под знак) дифференциала. Они опираются на следующую теорему.

Теорема* (*интегрирование подстановкой). Пусть функция $x = \varphi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T и пусть X – множество значений этой функции, на котором определена функция $f(x)$. Тогда, если на множестве X функция $f(x)$ имеет первообразную, то на множестве T справедлива формула

$$\int f(x)dx = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Эта формула называется ***формулой замены переменной в неопределенном интеграле***.
Докажем теорему. Формула замены переменной справедлива, если дифференциал ее левой и правой частей равны. Учитывая, что $f(x) = f(\varphi(t))$ – сложная функция, имеем

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Дифференциал правой части равен

$$d\left(\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt\right) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Таким образом, формула справедлива.

Допустим, что интеграл, стоящий в правой части формулы замены переменной, известен:

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C.$$

Отсюда легко найти искомый интеграл в виде функции от x. Для этого уравнение $x = \varphi(t)$ следует разрешить относительно t. Если $t = \varphi^{-1}(x)$, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \Phi(t) + C = \Phi(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

Заметим, что свойства 5 и 6 неопределенного интеграла основаны на методе замены переменной.

При интегрировании заменой переменной важно удачно подобрать подстановку. Однако, нельзя дать общее правило выбора замены переменной для любой функции. Это можно сделать только для интегрирования отдельных классов функций (рациональных, тригонометрических, иррациональных и т.д.).

Очень часто при вычислении интегралов пользуются приемом «подведения подынтегральной функции под дифференциал». По определению дифференциала функции $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$. Переход от левой части этого равенства к правой называют «***подведением множителя*** $\boldsymbol{\varphi'(x)}$ ***под знак дифференциала***». Пусть требуется найти интеграл вида

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dt.$$

Внесем в этом интеграле множитель $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, а затем выполним подстановку $u = \varphi(x)$. Тогда по свойству 5 неопределенного интеграла:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dt = \int f(\varphi(x))d(\varphi(x)) = \int f(u)du.$$

Если интеграл $\int f(u)du$ – табличный, его вычисляем непосредственным интегрированием. Легко заметить, что если подынтегральная функция имеет вид $\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, то подведение множителя $\varphi'(x)$ под знак дифференциала приводит к табличному интегралу $\int \frac{du}{u}$:

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = \int \frac{d\varphi(x)}{\varphi(x)} = \ln|\varphi(x)| + C.$$

Пример. $\int tgx dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx = -\int \frac{d(cosx)}{cosx} = -\ln|cosx| + C.$

При интегрировании подведением под знак дифференциала промежуточное обозначение $u = \varphi(x)$, как правило опускают. Удобство подведения под дифференциал (не вводя нового обозначения) состоит в том, что нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной.

Часто метод замены переменной и подведение под знак дифференциала формулируют двумя отдельными теоремами. Однако, полученные обе формулы называют формулой замены переменной в неопределенном интеграле. Это в действительности одна формула, но прочитанная в первом случае слева направо, а при подведении под знак дифференциала – справа налево.

Пример. Найти интегралы методом замены переменной:

1. $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} \underset{\boxed{xdx=\frac{1}{2}dx^2}}{=} \int \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)d\left(4-x^2\right)}{\sqrt{4-x^2}} = -\frac{1}{2}\int\left(4-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}d\left(4-x^2\right) =$

$\displaystyle= -\frac{1}{2}\cdot 2\left(4-x^2\right)^{\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{4-x^2} + C;$

2. $\displaystyle\int e^{\sin x}\cos x dx \underset{\boxed{\cos x dx = d\sin x}}{=} \int e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} + C;$

3. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\ln x\sqrt{\ln x}} \underset{\boxed{\frac{dx}{x}=d(\ln x)}}{=} \int \frac{d(\ln x)}{\ln x\sqrt{\ln x}} = \int(\ln x)^{-\frac{3}{2}}d(\ln x) = \frac{-2}{\sqrt{\ln x}} + C;$

4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 4\cos^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x\left(\mathrm{tg}^2 x + 4\right)} \underset{\boxed{\frac{dx}{\cos^2 x} = d\mathrm{tg}x}}{=} \int \frac{d\mathrm{tg}x}{\left(\mathrm{tg}^2 x + 4\right)} =$

$= \frac{1}{2}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{tg}x}{2} + C$;

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(7+\sqrt[3]{x}\right)} = \begin{vmatrix} x = t^6, t = \sqrt[6]{x} \\ dx = 6t^5 dt \end{vmatrix} = \int \frac{6t^5 dt}{\sqrt{t^6}\left(7+\sqrt[3]{t^6}\right)} = 6\int \frac{t^5 dt}{t^3\left(7+t^2\right)} =$

$= 6\int \frac{t^2 dt}{7+t^2} = 6\int \frac{\left(t^2+7\right)-7}{7+t^2} dt = 6\int\left(\frac{t^2+7}{t^2+7} - \frac{7}{7+t^2}\right)dt =$

$= 6\left(\int dt - 7\int \frac{dt}{\left(\sqrt{7}\right)^2 + t^2}\right) = 6\left(t - \frac{7}{\sqrt{7}}\mathrm{arctg}\frac{t}{\sqrt{7}}\right) + C =$

$= 6\left(\sqrt[6]{x} - \sqrt{7}\mathrm{arctg}\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{7}}\right) + C$.

Для применения формулы замены переменных в неопределенном интеграле будет весьма полезна следующая таблица.

Формулы наиболее часто встречающихся дифференциалов

1. $dx = \frac{1}{a}d\left(ax+b\right) = \frac{1}{a}d(ax)$.	2. $xdx = \frac{1}{2}d\left(x^2\right) = \frac{1}{2a}d(ax^2+b)$.
3. $\frac{1}{x}dx = d(\ln x) = d(\ln(ax))$ $= \frac{1}{a}d(a\ln x + b)$.	4. $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\left(\sqrt{x}\right) = \frac{2}{a}d(a\sqrt{x}+b)$.
5. $\frac{1}{x^2}dx = -d\left(\frac{1}{x}\right)$.	6. $e^x dx = d\left(e^x\right) = \frac{1}{a}d(ae^x+b)$.
7. $\cos x dx = d\left(\sin x\right) =$ $= \frac{1}{a}d\left(a\sin x + b\right)$.	8. $\sin x dx = -d\left(\cos x\right) =$ $= -\frac{1}{a}d\left(a\cos x + b\right)$.
9. $\frac{dx}{\cos^2 x} = d\left(\mathrm{tg}x\right)$.	10. $\frac{dx}{\sin^2 x} = -d\left(\mathrm{ctg}x\right)$.
11. $\frac{dx}{1+x^2} = d\left(\mathrm{arctg}x\right) = -d\left(\mathrm{arcctg}x\right)$.	12. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d\left(\arcsin x\right) = -d\left(\arccos x\right)$.

§3. Интегрирование по частям

Рассмотрим две дифференцируемые функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$. По формуле дифференциала произведения двух функций

$$d(uv) = udv + vdu.$$

Проинтегрируем это равенство:

$$\int d(uv) = \int udv + \int vdu,$$

но так как

$$\int d(uv) = uv + C,$$

то получим формулу

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Она называется ***формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле***. Ее целесообразно применять, когда интеграл в правой части проще, чем интеграл в левой. Постоянную интегрирования в формуле не записывают, так как в правой части находится неопределенный интеграл, содержащий произвольную постоянную.

Практическое применение интегрирования по частям заключается в том, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляется некоторым образом в виде произведения двух множителей u и dv (последний обязательно содержит dx) и заменяется двумя интегрированиями: при отыскании v из выражения dv и при нахождении интеграла от $v\,du$. Иногда для получения результата нужно последовательно несколько раз применить интегрирование по частям.

***Метод интегрирования по частям удобно применять для вычисления интегралов следующих стандартных типов*:**

1) $\int P_n(x)e^{mx}dx, \int P_n(x)a^{mx}dx, \int P_n(x)\cos(mx)dx, \int P_n(x)\sin(mx)dx,$

где $m \in R$, $P_n(x)$ – многочлен степени n относительно переменной x (в качестве u берем многочлен $u = P_n(x)$);

2) $\int P_n(x)\ln(mx)dx, \int P_n(x)\arccos(mx)dx, \int P_n(x)\arcsin(mx)dx,$ $\int P_n(x)\operatorname{arctg}(mx)dx,$ $\int P_n(x)\operatorname{arcctg}(mx)dx$ (здесь $dv = P_n(x)dx$);

3) $\int e^{mx}\cos(\alpha x)dx$, $\int e^{mx}\sin(\alpha x)dx$, где $\alpha \in R$ (дважды интегрируем по частям, полагая $u = e^{mx}$; повторное интегрирование по частям приводит к линейному уравнению, содержащему исходный интеграл, решая которое, находим интеграл).

Пример. Вычислить неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

$$1.\ \int (2x+5)\cos\frac{x}{3}dx = \left| \begin{array}{ll} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = \cos\frac{x}{3}dx & v = \int\cos\frac{x}{3}dx = 3\sin\frac{x}{3} \end{array} \right| =$$

$$=3(2x+5)\sin\frac{x}{3}-\int 3\sin\frac{x}{3}2dx=3(2x+5)\sin\frac{x}{3}-6\int\sin\frac{x}{3}dx=$$

$$=3(2x+5)\sin\frac{x}{3}+18\cos\frac{x}{3}+C;$$

2. $$\int x^2e^{-5x}dx=\left|\begin{matrix} u=x^2, & du=2xdx \\ dv=e^{-5x}dx, & v=\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x}\end{matrix}\right|=-x^2\frac{1}{5}e^{-5x}+$$

$$+\int\frac{1}{5}e^{-5x}2xdx=-\frac{1}{5}x^2e^{-5x}+\frac{2}{5}\int xe^{-5x}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix} u=x, & du=dx \\ dv=e^{-5x}dx, & v=\int e^{-5x}dx=-\frac{1}{5}e^{-5x}\end{matrix}\right|=-\frac{1}{5}x^2e^{-5x}+\quad+\frac{2}{5}\left(-x\frac{1}{5}e^{-5x}+\int\frac{1}{5}e^{-5x}dx\right)=$$

$$-\frac{1}{5}x^2e^{-5x}+\frac{2}{5}\left(-\frac{1}{5}xe^{-5x}-\frac{1}{25}e^{-5x}\right)+C=$$

$$=-\frac{e^{-5x}}{125}\left(25x^2+10x+2\right)+C;$$

3. $$\int \mathrm{arctg}3xdx=\left|\begin{matrix} u=\mathrm{arctg}3x, & du=\dfrac{3dx}{1+9x^2} \\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right|=x\mathrm{arctg}3x-\int\frac{3xdx}{1+9x^2}=$$

$$=x\mathrm{arctg}3x-\frac{1}{6}\int\frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2}=x\mathrm{arctg}3x-\frac{1}{6}\ln\left|1+9x^2\right|+C.$$

§4. Интегрирование рациональных функций

Рациональной функцией (или ***дробно-рациональной функцией***, или ***рациональной дробью***) называется дробь, числителем и знаменателем которой являются многочлены, то есть дробь вида

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}.$$

Если степень многочлена в числителе больше или равна степени многочлена в знаменателе ($n\geq m$), то дробь называется ***неправильной***. Если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе ($n<m$), то дробь называется ***правильной***. Например, $\frac{3x^3-1}{x^2+x-1}$ – неправильная рациональная дробь, а $\frac{x-1}{x^2+2x-3}$ – правильная. Всякую неправильную рациональную дробь можно однозначно представить (путем деления числителя на знаменатель по правилу деления многочленов) в виде суммы многочлена – целой части – и правильной рациональной дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=R(x)+\frac{P_k(x)}{Q_m(x)},$$

где $R(x)$ – целая часть (многочлен (частное) рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$), а $P_k(x)$ – остаток (многочлен степени $k < m$).
Например,

$$\frac{x^3+3x^2+4x+1}{x^2+x+1} = x+2+\frac{x-1}{x^2+x+1},$$

так как

$$\begin{array}{r|l} -\;x^3+3x^2+4x+1 & x^2+x+1 \\ \underline{x^3+x^2+x\qquad} & \overline{x+2} \\ -\;2x^2+3x+1 & \\ \underline{2x^2+2x+2} & \\ x-1 & \end{array}$$

Здесь $(x+2)$ – целая часть, а $(x-1)$ – остаток.

Так как интегрирование многочлена не представляет затруднений, то интегрирование рациональных дробей сводится к интегрированию правильных рациональных дробей.

§4.1. Интегрирование простейших рациональных дробей

Простейшей дробью называется правильная рациональная дробь одного из следующих четырех типов:

I. $\frac{A}{x-a}$; II. $\frac{A}{(x-a)^n}$ $(n \geq 2)$;

III. $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$; IV. $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geq 2)$.

Здесь A, a, p, q, M, N – действительные числа, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней (то есть $\frac{p^2}{4} - q < 0$).
Простейшие дроби первого и второго типов интегрируются непосредственно с помощью основных правил интегрального исчисления:

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A\int \frac{dx}{x-a} = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C;$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^n} = A\int (x-a)^{-n}dx = A\int (x-a)^{-n}d(x-a) = \frac{A}{(1-n)(x-a)^{n-1}} + C.$$

Интеграл от простейшей дроби третьего типа приводится к табличным интегралам путем выделения в числителе дифференциала знаменателя, а затем приведения знаменателя к сумме квадратов:

$$\int \frac{(Mx+N)dx}{x^2+px+q} = \left| \begin{array}{c} d(x^2+px+q) = (2x+p)dx \\ Mx+N = \frac{M}{2}(2x+p) + N - \frac{Mp}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln(x^2+px+q) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p}} + C.$$

Так как квадратный трехчлен x^2+px+q не имеет (по определению простейшей дроби третьего типа) действительных корней, то:

1. интеграл нашли по формуле 9 таблицы интегралов (так как $q-\frac{p^2}{4}>0$);
2. $x^2+px+q>0$ для всех значений аргумента x и модуль под знаком логарифма заменили на обычные скобки.

Интеграл от простейшей дроби IV типа

$$\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} \quad (n \geq 2).$$

можно найти методом интегрирования по частям с помощью рекуррентных соотношений, понижающих степень в знаменателе дроби или с помощью таблиц неопределенных интегралов. Для этого предварительно выделим полный квадрат в трехчлене, не имеющем действительных корней, в знаменателе простейшей дроби четвертого типа

$$x^2+px+q = \left(x^2+2\frac{p}{2}x+\frac{p^2}{2^2}\right)-\frac{p^2}{2^2}+q$$

и сделаем замену переменной, положив $t=x+\frac{p}{2}$, dx=dt, $a^2=q-\frac{p^2}{4}$. Тогда

$$x^2+px+q=t^2+a^2$$

и искомый интеграл можно переписать в виде

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n} = \int\frac{M\left(x+\frac{p}{2}\right)+N-\frac{Mp}{2}}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}dx = M\int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} +$$

$$+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = MI_0+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_n\,.$$

Интеграл I_0 вычисляется достаточно легко:

$$I_0 = \int\frac{tdt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{1}{2}\int(t^2+a^2)^{-n}d(t^2+a^2) = \frac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}+C.$$

Заметив, что

$$I_{n-1} = \int\frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}},$$

получаем

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(I_{n-1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n}\right).$$

Для вычисления интеграла $\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n}$ воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^n} = \left| \begin{matrix} u = t, & du = dt, \\ dv = \dfrac{tdt}{(t^2+a^2)^n}, & v = \dfrac{1}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{n-1}} =$$

$$= \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{2(1-n)} I_{n-1}\,.$$

Подставляя найденное выражение в формулу для I_n, имеем рекуррентную формулу

$$I_n = \frac{1}{a^2}\left(\frac{2n-3}{2n-2} I_{n-1} - \frac{t}{2(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}}\right).$$

Зная табличный интеграл

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{t}{a} + C$$

можно найти интеграл I_2

$$I_2 = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^2} = \frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+a^2} + \frac{t}{2(t^2+a^2)}\right) =$$

$$= \frac{t}{2a^2(t^2+a^2)} + \frac{1}{2a^2} arctg \frac{t}{a} + C$$

и так далее для других значений n.

Таким образом, получены формулы для интегрирования всех типов простейших дробей.

§4.2. Интегрирование правильных рациональных дробей

Всякую правильную рациональную дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ($n<m$) можно представить в виде суммы конечного числа простейших рациональных дробей первого-четвертого типов. Для этого первоначально нужно разложить знаменатель дроби $Q_m(x)$ на линейные и квадратные множители, для чего надо решить уравнение

$$Q_m(x) = 0 \iff b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_m = 0.$$

Предположим, что это уравнение решено и найдены его корни. Согласно основной теореме алгебры, уравнение $Q_m(x) = 0$ имеет ровно m корней (действительных и комплексных) с учетом их кратности. То есть корни уравнения могут быть действительными (простыми или кратными) и комплексными (простыми или кратными). При разложении следует учитывать, что:

1. если a является простым действительным ($a \in \mathbb{R}$) корнем уравнения ($Q_m(a) = 0$), то многочлен $Q_m(x)$ делится на линейный множитель $(x-a)$ без

остатка

$$Q_m(x) = (x - a)Q_{m-1}(x),$$

причем $Q_{m-1}(a) \neq 0$;

2. если b является действительным корнем кратности k многочлена $Q_m(x)$, то $Q_m(x)$ делится на $(x - b)^k$ без остатка

$$Q_m(x) = (x - b)^k Q_{m-k}(x),$$

причем $Q_{m-k}(b) \neq 0$;

3. если многочлен имеет простой комплексно-сопряженный корень, то он представим в виде

$$Q_m(x) = (x^2 + px + q)Q_{m-2}(x),$$

где квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней, то есть $\frac{p^2}{4} - q < 0$.

4. если многочлен имеет комплексно-сопряженные корни кратности k, то он представим в виде произведения

$$Q_m(x) = (x^2 + px + q)^k Q_{m-2k}(x).$$

То есть любой многочлен может быть представлен в виде произведения линейных и квадратичных, не имеющих действительных корней, множителей и их натуральных (больших единицы) степеней.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ - правильная рациональная дробь ($n < m$), где, не ограничивая общности, считаем, что коэффициент при старшей степени x в многочлене $Q_m(x)$ равен 1. Пусть далее

$$Q_m(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta \left(x^2 + px + q\right)^\gamma \dots \left(x^2 + rx + s\right)^\delta$$

- разложение многочлена $Q_m(x)$ на произведение неприводимых (неразложимых в множестве действительных чисел) множителей, где $a, \dots, b$ - действительные корни $Q_m(x)$; $x^2 + px + q, \dots, x^2 + rx + s$ - квадратные трехчлены, не имеющие действительных корней. Тогда имеет место следующее разложение правильной рациональной функции в сумму простейших:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{\left(x^2 + px + q\right)^2} + \dots + \frac{M_\gamma x + N_\gamma}{\left(x^2 + px + q\right)^\gamma} + \dots +$$

$$+ \frac{K_1 x + L_1}{x^2 + rx + s} + \dots + \frac{K_\delta x + L_\delta}{\left(x^2 + rx + s\right)^\delta},$$

где $A_1, A_2, \dots, A_\alpha, B_1, B_2, \dots, B_\beta, M_1, N_1, M_2, N_2, \dots, M_\gamma, N_\gamma, K_1, L_1, \dots, K_\delta$, L_δ – некоторые действительные числа - неизвестные коэффициенты, подлежащие определению.

Следует иметь ввиду, что это разложение единственно, то есть каким способом оно не было получено, оно верно. Формула справедлива для любого конечного числа линейных и квадратичных множителей, входящих в разложение знаменателя правильной дроби, и называется ***разложением правильной рациональной дроби*** $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ***на сумму простейших дробей с вещественными коэффициентами.***

Из формулы разложения дроби на простейшие следует, что линейным множителям знаменателя $Q_m(x)$ соответствуют простейшие дроби I и II типов, а квадратным множителям – III и IV типов, при этом число простейших дробей, соответствующих данному множителю, равно степени, с которой этот множитель входит в разложение знаменателя дроби.

Например, правильная дробь $\frac{x+7}{x^2(x+2)(x^2+7x+16)}$ представима в виде суммы четырех простейших дробей:

$$\frac{x+7}{x^2(x+2)(x^2+7x+16)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{Dx+E}{x^2+7x+16}.$$

Чтобы найти коэффициенты разложения правильной дроби на простейшие, чаще всего применяют ***метод неопределенных коэффициентов*** и ***метод частных значений***, а также их комбинацию.

Суть метода неопределенных коэффициентов:

1. Правую часть равенства с неопределенными коэффициентами (из теоремы) приведем к общему знаменателю $Q_m(x)$, в результате получим тождество $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{S(x)}{Q_m(x)}$, где $S(x)$ - многочлен с неопределенными коэффициентами.

2. Так как в полученном тождестве знаменатели равны, то равны (тождественно) и числители: $P_n(x) \equiv S(x)$.

3. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях тождества, получим систему линейных алгебраических уравнений, из которой определяются искомые коэффициенты $A_1,\ A_2, \ldots,\ L_\delta$.

Пример. Разложить правильную рациональную дробь $\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}$ на сумму простейших дробей.

Решение. Знаменатель уже разложен на множители, поэтому запишем разложение дроби на простейшие с неизвестными (неопределенными, другими словами) коэффициентами

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{Cx+D}{x^2+2x+3}.$$

Правую часть получившегося равенства приведем к общему знаменателю

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\frac{A(x-1)\left(x^2+2x+3\right)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}+$$

$$+\frac{B\left(x^2+2x+3\right)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}.$$

Приравняем числители получившихся дробей с одинаковыми знаменателями, раскроем скобки

$$x^2+1=A(x-1)\left(x^2+2x+3\right)+B\left(x^2+2x+3\right)+$$

$$+(Cx+D)(x-1)^2$$

и приведем подобные члены

$$x^2+1=A\left(x^3+x^2+x-3\right)+B\left(x^2+2x+3\right)+$$

$$+C\left(x^3-2x^2+x\right)+D\left(x^2-2x+1\right)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем систему уравнений для нахождения неопределенных коэффициентов $A, B, C,\ D$

$$\begin{array}{c|ll}
x^3 & 0=A+C & \\
x^2 & 1=A+B-2C+D & \Rightarrow 3A+2D=1 \\
x & 0=A+2B+C-2D & \Rightarrow B=D \\
x^0 & 1=-3A+3B+D & \Rightarrow -3A+4D=1
\end{array}$$

Решаем эту систему: $D=B=\frac{1}{3}$, $A=\frac{1}{9}$, $C=-\frac{1}{9}$.

Запишем разложение данной дроби на простейшие

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2(x^2+2x+3)}=\frac{1/9}{x-1}+\frac{1/3}{(x-1)^2}+\frac{-1/9\,x+1/3}{x^2+2x+3}.$$

Для нахождения неопределенных коэффициентов $A_1,\ A_2,\ldots,\ L_\delta$ применяют также ***метод частных значений*** аргумента: после получения тождества $P_n(x)\equiv S(x)$ аргументу x придают конкретные значения столько раз, сколько неопределенных коэффициентов (очень удобно полагают вместо x значения действительных корней многочлена $Q_m(x)$).

Пример. Разложить на простейшие дроби $\dfrac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}$.

Решение. Знаменатель дроби разложим на неприводимые множители

$$x^3-x^2-2x=x(x^2-x-2)=x(x-2)(x+1).$$

Запишем разложение с неопределенными коэффициентами этой правильной дроби на простейшие

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{x^2+x-1}{x(x-2)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+1}.$$

Правую часть получившегося равенства приведем к общему знаменателю

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=$$
$$=\frac{A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x+1)}$$

Приравняем числители получившихся дробей

$$x^2+x-1=A(x-2)(x+1)+Bx(x+1)+Cx(x-2).$$

Для определения коэффициентов A, B, C придаем неизвестной x частные значения, например значения, совпадающие с действительными корнями знаменателя дроби

$$\begin{array}{c|r}
x=0 & -1=A(-2)\Rightarrow \boxed{A=\dfrac{1}{2}} \\
x=2 & 4+2-1=B\cdot 2\cdot 3\Rightarrow \boxed{B=\dfrac{5}{6}} \\
x=-1 & 1-1-1=C(-1)(-3)\Rightarrow \boxed{C=-\dfrac{1}{3}}
\end{array}$$

Запишем разложение данной дроби на простейшие

$$\frac{x^2+x-1}{x^3-x^2-2x}=\frac{1/2}{x}+\frac{5/6}{x-2}-\frac{1/3}{x+1}.$$

Иногда, для нахождения неопределенных коэффициентов удобно применять комбинацию указанных выше методов, то есть придавать ряд частных значений и приравнивать коэффициенты при некоторых степенях x.

Пример. Разложить на простейшие дробь $\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}$.

Решение. Подынтегральная дробь правильная, запишем с неопределенными коэффициентами ее разложение на простейшие:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{Cx+D}{x^2-4x+5}.$$

Приведем к общему знаменателю и приравниваем многочлены в числителе:

$$1=A(x-2)(x^2-4x+5)+B(x^2-4x+5)+(Cx+D)(x-2)^2.$$

Раскроем скобки и соберем коэффициенты при подлежащих определению постоянных:

$$1=A(x^3-6x^2+13x-10)+B(x^2-4x+5)+C(x^3-4x^2+4x)+$$
$$+D(x^2-4x+4).$$

Знаменатель дроби имеет один действительный корень $x=2$, подставим его и находим B:

$$1 = B(4-8+5) \Rightarrow \boxed{B=1}.$$

Для нахождения остальных коэффициентов воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0=-6A+B-4C+D \\ x & 0=13A-4B+4C-4D \\ x^0 & 1=-10A+5B+4D \end{array} \begin{array}{l} \Rightarrow 0=-11A-12C=0 \\ \Rightarrow 1=3A+B+4C \end{array} \Rightarrow \boxed{A=0}, \boxed{C=0}$$

и $\boxed{D=-1}$.

Разложение дроби на простейшие имеет вид:

$$\frac{1}{(x-2)^2(x^2-4x+5)} = \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x^2-4x+5}.$$

§4.3. Правило интегрирования рациональных дробей

1. Представляем рациональную функцию в виде суммы многочлена и правильной рациональной функции (если она неправильная). Для этого числитель делим на знаменатель (например, «уголком»).

2. Раскладываем знаменатель полученной правильной рациональной функции на неприводимые множители (линейные и квадратичные, не имеющие действительных корней).

3. Записываем с неопределёнными коэффициентами разложение полученной правильной рациональной функции на простейшие.

4. Находим неопределенные коэффициенты.

5. Интегрируем рациональную функцию, представленную в виде суммы многочлена и простейших рациональных функций по стандартным правилам интегрирования.

Пример. Найти $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx$.

Решение. Подынтегральная дробь правильная. Записываем теоретическое разложение подынтегральной дроби на простейшие:

$$\frac{2x+3}{(x+5)(x-2)} = \frac{A}{x+5} + \frac{B}{x-2} = \frac{A(x-2)+B(x+5)}{(x+5)(x-2)}.$$

Приравниваем числители: $2x+3 = A(x-2)+B(x+5)$. Придавая x частные значения, равные корням знаменателя, получаем:

$$\begin{array}{c|l} x=-5 & -7=A\cdot(-7),\ A=1; \\ x=2 & 7=7B, \quad B=1. \end{array}$$

Таким образом, $\frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} = \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x-2}$. Имеем:

$$\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)}dx = \int\left(\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x-2}\right)dx = \int\frac{dx}{x-2}+\int\frac{dx}{x+5} = \ln|x-2|+$$

$$+\ln|x+5|+C = \ln|(x-2)(x+5)|+C.$$

§5. Метод рационализации: интегрирование простейших тригонометрических выражений

Будем через $R(u,v,w,\ldots)$ обозначать ***рациональную функцию*** относительно переменных $u,v,w,\ldots$, то есть выражение, которое получено из любых величин $u,v,w,\ldots$ и действительных чисел с помощью четырех арифметических действий. В частности, рациональной функцией $R(u,v)$ двух переменных u и v будет отношение $\frac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ многочленов $P(u,v)$ и $Q(u,v)$ двух переменных u и v. Например:

1. $R(u,v) = \frac{\sqrt{2}u^3-3v+\sqrt[3]{7}}{3v^2-16uv-1}$ – рациональная функция относительно u и v;

2. $R(x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x}) = \frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}+\sqrt[3]{7}}{3x^2-16\sqrt{x}-1}$ – рациональная функция относительно переменных $x,\sqrt{x},\sqrt[3]{x}$;

3. $R(sinx,cosx) = \frac{\sqrt{2}sin^2x-3cosx+\sqrt[3]{7}}{3cos^2x-16sinx+1}$ – рациональная функция относительно $sinx$ и $cosx$;

4. выражение $\frac{\sqrt{2}\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt{x}+\sqrt[3]{7}}{16\sqrt{x}-1}$ не является рациональной функцией относительно x, так как содержит операцию извлечения корня из x, но является рациональной функцией от $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$;

5. выражение $\frac{\sqrt{2}sin^2x-3+\sqrt[3]{7cosx}}{3cos^2x-16sinx+1}$ не является рациональной функцией относительно $sinx$ и $cosx$, так как содержит операцию кубического извлечения корня из $cosx$.

Согласно ***метода рационализации*** ищется подходящая замена переменных, которая приводит рассматриваемый интеграл к интегралу от рациональных функций. О таких заменах говорят, что они рационализируют интеграл. Рассмотрим интегралы вида

$$\int R(sinx,cosx)dx$$

при условии, что они не являются табличными. Вычислить их можно различными методами, рассмотренными ранее: заменой переменных, подведением множителя под дифференциал, интегрированием по частям либо просто использовав тригонометрические формулы. Например:

1. $\int\frac{dx}{cos^4x} = \int\frac{sin^2x+cos^2x}{cos^4x}dx = \int tg^2x\cdot\frac{1}{cos^2x}dx + \int\frac{dx}{cos^2x} = \int tg^2x\,d(tgx) + tgx = \frac{1}{3}tg^3x + tgx + C;$

2. $\int\frac{dx}{sinx} = \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \int\frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{tg\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \int\frac{d\left(\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} = \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C;$

3. $\int \cos^2 x\,dx = \left|\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right| = \frac{1}{2}\int(1+\cos 2x)dx =$
$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

Как отмечалось ранее, в интегральном исчислении нет общих правил, то есть интегрирование может быть выполнено не единственным образом. Но даже тогда, когда имеется теоретическое правило вычисления интеграла, оно может оказаться далеко не лучшим. Для интегралов вида $\int R(sinx, cosx)dx$ существует общая схема вычисления, основанная на ***универсальной тригонометрической подстановке*** $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Этой подстановкой интеграл преобразуется в интеграл от рациональной функции переменной t (или как говорят, подстановка рационализирует интеграл), который, как было показано ранее в §4, всегда выражается в элементарных функциях. Действительно, сделаем замену $t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$. Тогда:

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подставляя в подынтегральное выражение вместо $sinx, cosx$ и dx их значения, выраженные через переменную t, получим

$$\int R(sinx, cosx)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Подынтегральная функция рациональна относительно переменной t. С помощью универсальной тригонометрической подстановке удобно находить интегралы вида

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4+\cos x+4\sin x}$.

Решение. Используя универсальную тригонометрическую подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$, при этом $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, получаем:

$$\int \frac{dx}{4+\cos x+4\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4+\frac{1-t^2}{1+t^2}+\frac{4\cdot 2t}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{4+4t^2+1-t^2+8t} =$$

$$= \int \frac{2dt}{3t^2+8t+5} = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{t^2+\frac{8}{3}t+\frac{5}{3}} = \left[t^2+\frac{8}{3}t+\frac{5}{3} = \left(t+\frac{4}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right] =$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{dt}{\left(t+\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\frac{1}{2\cdot\frac{1}{3}}\ln\left|\frac{t+\frac{4}{3}-\frac{1}{3}}{t+\frac{4}{3}+\frac{1}{3}}\right|+C=\ln\left|\frac{t+1}{t+\frac{5}{3}}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\frac{5}{3}}\right|+C.$$

Метод интегрирования функций $R(sinx, cosx)$ с помощью универсальной тригонометрической подстановки всегда позволяет найти интеграл, но, именно в силу своей общности, он приводит к интегрированию громоздких рациональных дробей. Поэтому в ряде случаев более удобно использовать частные подстановки. Например, разумно воспользоваться следующими рекомендациями:

1) если подынтегральная функция $R(sinx, cosx)$ нечетна относительно $sinx$, то есть $R(-sinx, cosx) = -R(sinx, cosx)$, то применяется подстановка $t = \cos x$;

2) если подынтегральная функция $R(sinx, cosx)$ нечетна относительно $\cos x$, то есть $R(sinx, -cosx) = -R(sinx, cosx)$, то применяется подстановка $t = sinx$;

3) если подынтегральная функция $R(sinx, cosx)$ четна относительно $sinx$ и $\cos x$, то есть $R(-sinx, -cosx) = R(sinx, cosx)$, то применяется подстановка $t = \mathrm{tg}\, x$, при этом:

$$\sin x = \mathrm{tg}\, x \cdot \cos x = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\frac{1}{\cos x}} = \frac{\mathrm{tg}\, x}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 x}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$\cos x = \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x\cdot\frac{1}{\sin x}} = \frac{1}{\mathrm{tg}\, x\sqrt{1+\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Такая же подстановка применяется, если интеграл имеет вид $\int R(\mathrm{tg}\, x)dx$.

Пример. Найти интеграл $\int\frac{dx}{4+\cos^2 x}$.

Решение. Поскольку подынтегральная функция не меняется при замене $\cos x$ на $(-\cos x)$, то используем подстановку $t = tg\, x$, при этом $\cos^2 x = \frac{1}{1+t^2}$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$. тогда

$$\int\frac{dx}{4+\cos^2 x}=\int\frac{dt}{(1+t^2)\left(4+\frac{1}{1+t^2}\right)}=\int\frac{dt}{4+4t^2+1}=\int\frac{dt}{4t^2+5}=\int\frac{dt}{(2t)^2+5}=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{d(2t)}{(2t)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2t}{\sqrt{5}}+C=\frac{1}{2\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}+C.$$

Пример. Найти $\int \operatorname{tg}^3 x dx$.

Решение. $\int \operatorname{tg}^3 x dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arctg}t\\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{t^3dt}{1+t^2}$ – подынтегральная функция представляет собой неправильную дробь. Поэтому разделим числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l} -\,t^3 & t^2+1 \\ \cline{2-2} \underline{t^3+t} & t \\ -t & \end{array}\qquad\qquad \frac{t^3}{t^2+1}=t-\frac{t}{t^2+1}.$$ Тогда

$$\int\frac{t^3}{t^2+1}dt=\int\left(t-\frac{t}{t^2+1}\right)dt=\int tdt-\int\frac{tdt}{t^2+1}=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}=\frac{1}{2}t^2-$$

$$-\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x-\frac{1}{2}\ln\left(\operatorname{tg}^2x+1\right)+C=\left[\operatorname{tg}^2x+1=\frac{1}{\cos^2x}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x-\frac{1}{2}\ln\frac{1}{\cos^2x}+C=\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2x+\ln\left|\cos x\right|+C.$$

Для нахождения интегралов вида $\int \sin^m x\cdot\cos^n x\,dx$, где m и n – целые числа используются следующие приемы:

1) подстановка $t=sinx$, если n – нечетное число;
2) подстановка $t=\cos x$, если m – нечетное число

и, отделяя от нечетной степени один сомножитель, а, затем выражая с помощью формулы $\sin^2x+\cos^2x=1$, оставшуюся четную степень через кофункцию, приходим к берущемуся интегралу;

3) формулы понижения порядка
$\sin^2x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$, $\cos^2x=\frac{1}{2}(1+\cos 2x)$, $\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$,
если m и n – четные числа;
4) подстановка $\operatorname{tg}x$, если $m+n$— четное отрицательное число.

Пример. Найти $\int\sin^5 x dx$.

Решение. Подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, поэтому применяем подстановку $\cos x=t$, тогда $\sin xdx=-dt$ и

$$\int\sin^5xdx=\int\sin^4x\sin xdx=\int\left(\sin^2x\right)^2\sin xdx=$$

$$=\int\left(1-\cos^2x\right)^2\sin xdx=-\int\left(1-t^2\right)^2dt=-\int\left(1-2t^2+t^4\right)dt=-t+\frac{2}{3}t^3-$$

$$-\frac{1}{5}t^5+C=-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3x-\frac{1}{5}\cos^5x+C.$$

Пример. Найти $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$.

Решение. Под интегралом стоит произведение четных степеней $\sin x$ и $\cos x$. Тогда $\sin^4 x \cos^4 x = \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^4 = \frac{1}{16}\sin^4 2x$ и

$$\int \cos^4 x \sin^4 x dx = \frac{1}{16}\int \sin^4 2x dx = \frac{1}{16}\int \left(\sin^2 2x\right)^2 dx = = \frac{1}{16}\int \left(\frac{1}{2}\left(1-\cos 4x\right)\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - 2\int \cos 4x dx + \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 8x\right) dx\right) =$$

$$= \frac{1}{64}\left(x - \frac{2}{4}\sin 4x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) + C = \frac{1}{64}\left(\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin 4x + \frac{1}{16}\sin 8x\right) +$$

$$+C = \frac{1}{128}\left(3x - \sin 4x + \frac{1}{8}\sin 8x\right) + C.$$

При нахождении интегралов вида

$$\int \sin \alpha x \cos \beta x \, dx, \int \cos \alpha x \cos \beta x \, dx, \int \sin \alpha x \sin \beta x \, dx \ (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$$

используют формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cdot \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

Пример. Найти $\int \sin 5x \cos 3x dx$.

Решение.

$$\int \sin 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin 2x + \sin 8x\right) dx = \frac{1}{2}\left(\int \sin 2x dx + \int \sin 8x dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{1}{8}\cos 8x\right) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

§5. Интегрирование простейших иррациональных функций. Понятие о неберущихся интегралах

1. Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right) dx$, где m_i – целые; n_i – натуральные $\left(i = \overline{1,k}\right)$; a, b, c, d – действительные числа, причем $c^2 + d^2 \neq 0$, сводятся к интегралам от рациональной функции путем подстановки (заменой переменной): $\frac{ax+b}{cx+d} = t^\nu$, где ν – общий знаменатель дробей

$\frac{m_1}{n_1}, \dots, \frac{m_k}{n_k}$. Тогда $x = \frac{dt^\nu - b}{a - ct^\nu}$ и дифференциал замены $dx = \frac{ad-bc}{(a-ct^\nu)^2}\nu t^{\nu-1}dt.$

Пример. Найти $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx$.

Решение. Выполним замену переменной:

$$\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = t,\ x = \frac{1+t^2}{1-t^2},\ dx = \frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt.$$

Тогда исходный интеграл примет вид $\int\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx = \int t\frac{4t}{\left(1-t^2\right)^2}dt$. Подынтегральная дробь правильная, раскладываем ее на простейшие:

$$\frac{4t^2}{\left(1-t\right)^2\left(1+t\right)^2} = \frac{A}{1-t} + \frac{B}{\left(1-t\right)^2} + \frac{C}{1+t} + \frac{D}{\left(1+t\right)^2}.$$

Приравниваем числители:

$$4t^2 = A\left(1-t\right)\left(1+t\right)^2 + B\left(1+t\right)^2 + C\left(1+t\right)\left(1-t\right)^2 + D\left(1-t\right)^2 \text{ или}$$

$$4t^2 = t^3\left(-A+C\right) + t^2\left(-A+B-C+D\right) + t\left(A+2B-C-2D\right) + \left(A+B-C+D\right).$$

Так как знаменатель дроби имеет два действительных корня $t=1, t=-1$, то находим B и D:

При $t=1$ $\quad 4 = 4B \Rightarrow B=1.$

При $t=-1$ $\quad 4 = 4D \Rightarrow D=1.$

Для нахождения остальных коэффициентов воспользуемся методом неопределенных коэффициентов:

$$\begin{array}{c|c} t^3 & 0 = -A + C \\ t^2 & 4 = -A + B - C + D \end{array} \Rightarrow A=C=-1.$$

Получаем:

$$\int\frac{(-1)}{1-t}dt + \int\frac{1}{\left(1-t\right)^2}dt - \int\frac{1}{1+t}dt + \int\frac{dt}{\left(1+t\right)^2} = \ln\left|t-1\right| + \frac{1}{1-t} - \ln\left|1+t\right| -$$

$$-\frac{1}{1+t} + C = \ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + \frac{2t}{1-t^2} + C = \ln\left|\frac{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}\right| + \frac{2\cdot\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}}{1-\frac{x-1}{x+1}} + C =$$

$$= \sqrt{x^2-1} + \ln\left|\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}\right| + C = \sqrt{x^2-1} - \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

В частности, интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \dots, \sqrt[m]{x}\right)dx$, где подынтегральная функция $R\left(x, \sqrt[k]{x}, \dots, \sqrt[m]{x}\right)$ - рациональная функция своих аргументов, рационализируется заменой переменной $x = t^{\nu}$, $dx = \nu t^{\nu-1}dt$, где ν – наименьшее общее кратное показателей степеней $k, \dots, m$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Подынтегральная функция искомого интеграла записана как функция корней второй и третьей степеней, наименьшее общее кратное чисел 2 и 3 равно 6. Тогда данный интеграл может быть рационализован с помощью замены $\sqrt[6]{x} = t$. Имеем

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[3]{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[6]{x} = t, x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \\ \sqrt{x} = t^3, \sqrt[3]{x} = t^2 \end{array} \right| = \int \frac{6t^5}{t^3+2t^2}dt = \int \frac{6t^3}{t+2}dt =$$

$$= 6\int \frac{t^3+8-8}{t+2}dt = 6\int \frac{(t+2)(t^2-2t+4)}{t+2}dt - 48\int \frac{dt}{t+2} =$$

$$= 6\int (t^2-2t+4)dt - 48\int \frac{d(t+2)}{t+2} = 6\frac{t^3}{3} - 12\frac{t^2}{2} + 24t - 48\ln|t+2| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x} + 24\sqrt[6]{x} - 48\ln\left(\sqrt[6]{x}+2\right) + C.$$

2. Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$, где a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$, $R(u, v)$ - рациональная функция переменных $u. v$. Подстановка $u = x + \frac{b}{2a}$ позволяет выделить полный квадрат под знаком корня. В результате исходный интеграл преобразуется к одному из следующих трех типов, которые с помощью дальнейших тригонометрических подстановок сводятся к интегралам от функций, рационально зависящих от тригонометрических функций:

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx = \left| x + \frac{b}{2a} = u \right| =$$

$$= \begin{cases} \int \tilde{R}\left(u, \sqrt{a^2-u^2}\right)du = |u = a\sin t| = \int \tilde{R}(\sin t, \cos t)dt = \dots \\ \int \tilde{R}\left(u, \sqrt{a^2+u^2}\right)du = |u = a\mathrm{tg}t| = \int \tilde{R}(\sin t, \cos t)dt = \dots \\ \int \tilde{R}\left(u, \sqrt{u^2-a^2}\right)du = \left|u = \frac{a}{\sin t}\right| = \int \tilde{R}(\sin t, \cos t)dt = \dots \end{cases}$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}}$.

Решение. Данный интеграл может быть рационализирован с помощью замены $x = 5\sin t$.

$$\text{Имеем: } \int \frac{dx}{x^2\sqrt{25-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = 5\sin t,\ t = \arcsin\dfrac{x}{5} \\ dx = 5\cos t\,dt \\ \sqrt{25-x^2} = \sqrt{25-25\sin^2 t} = 5\cos t \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{5\cos t}{25\sin^2 t\cdot 5\cos t}dt = \frac{1}{25}\int\frac{dt}{\sin^2 t} = -\frac{1}{25}\operatorname{ctg} t + C = -\frac{1}{25}\operatorname{ctg}\arcsin\frac{x}{5} + C =$$

$$= -\frac{1}{25}\frac{\cos\arcsin\dfrac{x}{5}}{\sin\arcsin\dfrac{x}{5}} + C = -\frac{1}{5}\frac{\sqrt{1-\dfrac{x}{25}^2}}{x} + C = -\frac{1}{25}\frac{\sqrt{25-x^2}}{x} + C.$$

Рассмотрим, далее, некоторые типы интегралов, содержащие квадратичные иррациональности:

А) $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$. Вынося за символ интеграла $\frac{1}{\sqrt{a}}$ (если $a>0$) или $\frac{1}{\sqrt{-a}}$ (если $a<0$), приведем интеграл к виду

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}.$$

Выделяя полные квадраты, получаем табличные интегралы:

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2+\dfrac{4q-p^2}{4}}} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{-a}}\int\frac{dx}{\sqrt{\dfrac{4q+p^2}{4}-\left(x-\dfrac{p}{2}\right)^2}}.$$

Первый интеграл выражается через логарифмы, а второй при $4q+p^2>0$ – через арксинус.

Б) $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$. Этот интеграл можно разбить на два, выделив в числителе производную подкоренного выражения. Тогда один интеграл берется непосредственно как интеграл от степенной функции, а второй является интегралом вида А).

3. Интегралы вида $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ $(m,n,p\in\mathbb{Q}, a,b\in\mathbb{R})$. Такие интегралы называются ***интегралами от дифференциального бинома*** $x^m(a+bx^n)^p dx$ и выражаются через элементарные функции только в трех случаях:

1. если $p\in\mathbb{Z}$, то применяется подстановка $x=t^s$, где s – общий знаменатель дробей m и n;

2. если $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то используется подстановка $a + bx^n = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$;

3. если $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то используется подстановка $ax^{-n} + b = t^s$, где s – знаменатель дроби $p = \frac{k}{s}$

Во всех остальных случаях, как было доказано П.Л.Чебышевым, интегралы от дифференциального бинома не выражаются через элементарные функции.

Пример. Найти $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$

Решение. Здесь $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z},\ m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4},\ \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, поэтому применим подстановку $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$. Тогда $x = (t^3 - 1)^4$, $dx = 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt,$

$$\int x^{-\frac{1}{2}} \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx = \int (t^3 - 1)^{-2} \cdot t \cdot 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt = 12 \int t^3 (t^3 - 1) dt =$$

$$= 12 \left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C = \frac{12}{7} \sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(1 + \sqrt[4]{x}\right)^4} + C.$$

Таким образом, познакомились с некоторыми стандартными приемами нахождения неопределенных интегралов. Интегрирование чаще всего может быть выполнено не единственным способом. Владение искусством интегрирования заключается не только в знании методов интегрирования, но и в большей степени в «видении» различных подходов к интегрированию той или иной функции, что обычно приходит с опытом, после рассмотрения многих примеров.

Как вытекает из алгоритма интегрирования рациональной функции, интеграл от всякой рациональной функции является функцией элементарной. Элементарными функциями будут и интегралы, полученные методом рационализации. Существуют, однако, элементарные функции, интегралы от которых элементарными функциями не являются. Такие интегралы принято называть «неберущимися». В качестве примеров неберущихся интегралов можно привести следующие интегралы:

$\int e^{-x^2} dx$; $\int \sin x^2 dx$;

$\int \frac{\sin x}{x} dx = si\,x$ - интегральный синус;

$\int \frac{\cos x}{x} dx = ci\,x$ - интегральный косинус.