

Тема уроку: Теорема Вієта

14.03.2023

Алгебра

8 клас

Мета уроку: сформувати вміння застосовувати теорему Вієта до розв'язування рівнянь; розвивати логічне мислення, увагу, вміння аналізувати та систематизувати; виховувати старанність, самостійність.

СЛІД ЗНАТИ!

Квадратні рівняння
мають
не більш ніж два
(один, два або жодного)
корені.

Означення.

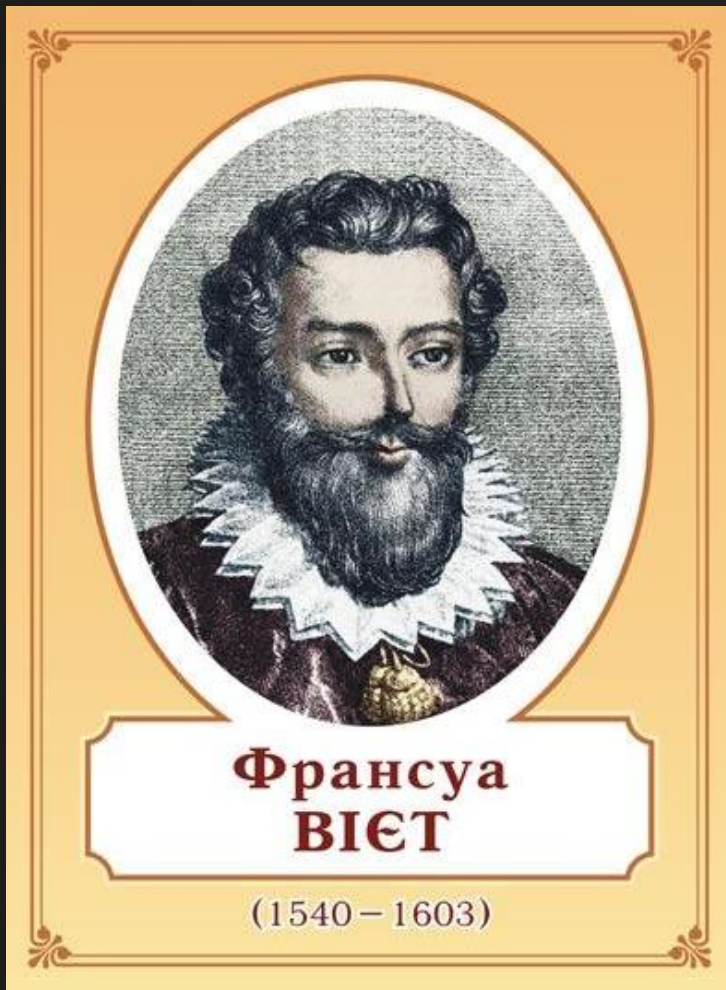
Квадратне рівняння, старший коефіцієнт якого дорівнює 1, називають **зведеним**.

Наприклад, $x^2 - 7x + 10 = 0$; $x^2 - 4x - 32 = 0$

Означення.

Квадратне рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, у якому коефіцієнти a , b та c не дорівнюють нулю називають **повним квадратним рівнянням**.

Наприклад, $2x^2 + 7x + 5 = 0$; $16 - 21x + 5x^2 = 0$



*Франсуа Вієт - французький
математик, «батько
алгебри».*

*У його працях алгебра
набула вигляду загальної
науки про алгебраїчні
рівняння, яка ґрунтується на
символічних позначеннях.*

Теорема Вієта



Теорема Вієта. Сума коренів зведеного квадратного рівняння дорівнює другому коефіцієнту, взятому з протилежним знаком, а добуток коренів – вільному члену.

Доведення. Нехай x_1 і x_2 – корені зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$, дискримінант якого $D = p^2 - 4q$. Якщо $D > 0$, то рівняння має два корені:

$$x_1 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \text{ і } x_2 = \frac{-p - \sqrt{D}}{2}.$$

Якщо $D = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два однакових корені: $x_1 = x_2 = \frac{-p}{2}$.

Знайдемо суму і добуток коренів:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p + \sqrt{D}}{2} + \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-p + \sqrt{D} - p - \sqrt{D}}{2} = \frac{-2p}{2} = -p;$$

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &= \frac{-p + \sqrt{D}}{2} \cdot \frac{-p - \sqrt{D}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{D})^2}{4} = \\ &= \frac{p^2 - (p^2 - 4q)}{4} = \frac{p^2 - p^2 + 4q}{4} = \frac{4q}{4} = q. \end{aligned}$$

Отже, $x_1 + x_2 = -p$; $x_1 \cdot x_2 = q$. Теорему доведено.



Теорема Вієта

для зведеного
квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 - корені
квадратного рівняння
 $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

для повного
квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 - корені
квадратного рівняння
 $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Теорема, обернена до теореми Вієта

для зведеного квадратного рівняння

Якщо
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$$

то

x_1 і x_2 - корені
квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$.

Завдання 1. Знайдіть суму і добуток коренів рівняння $5x^2 - 7x + 2$

Розв'язання:

$$5x^2 - 7x + 2 = 0$$

$$a = 5, \quad b = -7, \quad c = 2$$

$$\frac{5}{5}x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$x^2 - \frac{7}{5}x + \frac{2}{5} = 0$$

$$p = -\frac{7}{5}, \quad -p = \frac{7}{5}$$

$$q = \frac{2}{5}$$



$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{7}{5}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}, \end{cases}$$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Якщо $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q, \end{cases}$ то

x_1 та x_2 - корені квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$

Відповідь: $x_1 + x_2 = \frac{7}{5}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{2}{5}$

Завдання 2. Підберіть корені рівняння $x^2 - 6x - 16 = 0$, використовуючи теорему, обернену до теореми Вієта.

Розв'язання:

$$x^2 - 6x - 16 = 0$$

$$p = -6, \quad q = -16$$

Оскільки $x_1 \cdot x_2 = -16$, тобто $x_1 \cdot x_2 < 0$,

отже, корені рівняння мають різні знаки.

Підберемо усі можливі розклади на множники числа (-16):

$$-16 = -16 \cdot 1 = 1 \cdot (-16);$$

$$-16 = -8 \cdot 2 = 8 \cdot (-2);$$

$$-16 = 4 \cdot (-4).$$

Серед отриманих пар чисел вибираємо ту пару, яка задовольняє умову $x_1 + x_2 = 6$, тобто $x_1 = 8, x_2 = -2$

Відповідь: $x_1 = 8, x_2 = -2$

ЗАПАМ'ЯТАЙТЕ!

Визначення знаків коренів рівняння слід починати з аналізу знака добутку:

- 1) Якщо $x_1 \cdot x_2 > 0$ то
 $\begin{cases} x_1 > 0, \\ x_2 > 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} x_1 < 0, \\ x_2 < 0 \end{cases}$
тобто корені мають один знак;
- 2) Якщо $x_1 \cdot x_2 < 0$, то корені мають різні знаки

Завдання №3. У завданнях 1-4 перевірте, чи є коренями рівняння:

$$x^2 + 15x - 34 = 0, \text{ числа } -2 \text{ і } 17;$$

$$p = 15, \quad q = -34.$$

Якщо $x_1 = -2$, $x_2 = 17$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 x_2 = q \end{cases}, \quad \begin{cases} -2 + 17 \neq -15 \\ -2 \cdot 17 = -34 \end{cases}, \quad \begin{cases} 15 \neq -15 \\ -34 = -34 \end{cases}$$

Відповідь: числа -2 і 17 не є коренями квадратного рівняння $x^2 + 15x - 34 = 0$

Завдання №4. Складіть квадратне рівняння з цілими коефіцієнтами, коренями якого є $x_1 = -2\frac{1}{2}i$ $x_2 = 4$

Розв'язання:

$$x^2 + px + q = 0, \quad x_1 = -2\frac{1}{2}i \quad x_2 = 4$$

За теоремою Вієта:

$$1) \quad -p = x_1 + x_2; \quad -p = -2\frac{1}{2} + 4 = -2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{2} = 1\frac{1}{2}.$$

$$\text{Оскільки } -p = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad \text{то} \quad p = -\frac{3}{2}.$$

$$2) \quad q = x_1 \cdot x_2; \quad q = -2\frac{1}{2} \cdot 4 = -\frac{5}{2} \cdot \frac{4}{1} = -10, \quad q = -10.$$

Підставимо в рівняння $x^2 + px + q = 0$ отримані значення p і q .

$$x^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)x + (-10) = 0;$$

$$x^2 - \frac{3}{2}x - 10 = 0; \quad \left| \cdot 2 \right.$$

$$2x^2 - 3x - 20 = 0.$$

Відповідь: $2x^2 - 3x - 20 = 0$.

Домашнє завдання:

- Опрацювати §22.
- Вивчити теорему Вієта.
- Виконати письмово № 836, 840.

Відправити на Human або електронну пошту smartolenka@gmail.com