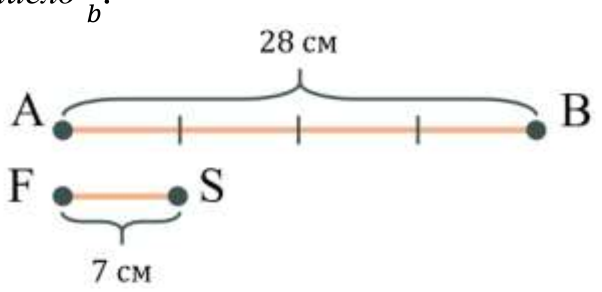
Тема: Узагальнена теорема Фалеса

Мета: сформулювати означення пропорційних відрізків, узагальнену теорему Фалеса; розвивати вміння застосовувати набуті знання на практиці та вміння аналізувати завдання на основі отриманих знань; виховувати охайність при оформленні конспекту;

Давайте пригадаємо

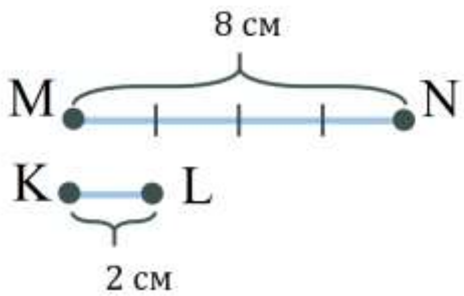
- **Відношення відрізків**

Відношенням відрізків завдовжки a і b називається частка їх довжин, тобто число $\frac{a}{b}$.



- Скільки разів відрізок FS укладається у відрізку AB? ($\frac{AB}{FS} = \frac{28}{7} = 4$)

- Скільки разів відрізок KL укладається у відрізку MN? ($\frac{MN}{KL} = \frac{8}{2} = 4$)

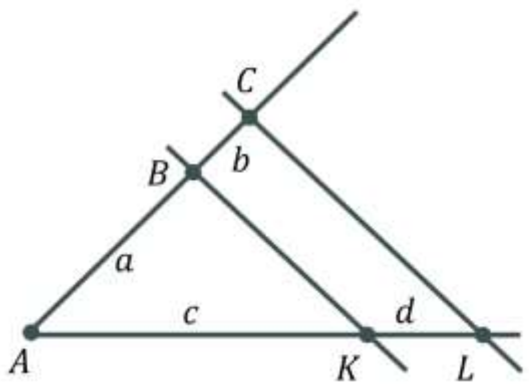


- **Пропорційні відрізки**

Відрізки завдовжки a і c пропорційні відрізкам завдовжки b і d, якщо $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Наприклад, відрізки розглянуті вище пропорційні (з коефіцієнтом пропорційності 4), так як $\frac{AB}{FS} = \frac{MN}{KL} = 4$.

Вивчення нового матеріалу

Узагальнена теорема Фалеса *(про пропорційні відрізки)*



Паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на сторонах цього кута пропорційні відрізки, наприклад: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Можливі пропорції:

1) $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{KL}$

2) $\frac{AL}{AK} = \frac{AC}{AB}$

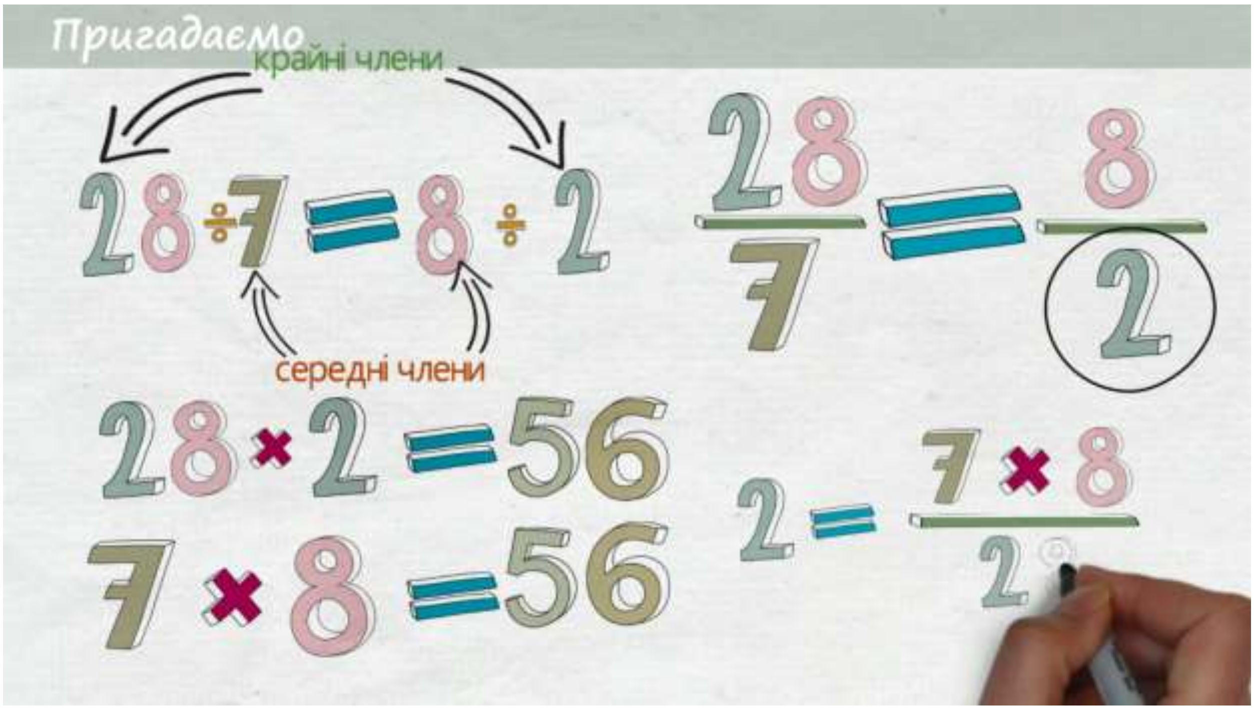
3) $\frac{AL}{KL} = \frac{AC}{BC}$

**Доведення цієї теореми вважається найскладнішим в розділі планіметрії і навіть виходить за рамки шкільного курсу геометрії. В більшості підручників наводиться доведення окремих випадків цієї теореми.*

Теорема про пропорційні відрізки стверджує нам, що відношення відрізків на одній стороні кута дорівнює відношенню відрізків на іншій стороні кута. Цю теорему можна узагальнити і для довільних прямих однієї площини, а не тільки сторін кута.* ***Паралельні прямі, які перетинають прямі a і b, відтинають від них пропорційні відрізки.*

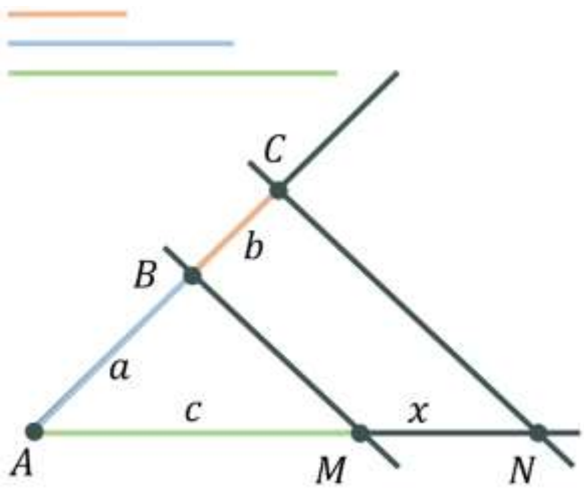
Пригадаємо:

- Основна властивість пропорції говорить нам, що добуток крайніх членів дорівнює добутку середніх членів.
- Розглянемо наведену нами раніше пропорцію, $\frac{28}{7} = \frac{8}{2}$. Тут 28 і 2 – крайні члени, а 7 і 8 – середні члени.
- Тоді за основною властивістю пропорції $28 \cdot 2 = 56,\ 7 \cdot 8 = 56$
- Припустимо, що один з членів нашої пропорції невідомий, нехай це буде 2.
- Для того щоб знайти його, нам треба виконати наступні дії:



Запишіть в зошитах число класна робота. І законспектуйте дані завдання.

- Задача на побудову четвертого пропорційного відрізка



1. Побудуємо довільний нерозгорнутий кут
2. Відкладемо на одній його стороні відрізки $AB = a$, $BC = b$, а на іншій стороні – відрізок $AM = c$
3. Проведемо пряму BM і $CN \parallel BM$, $CN \cap AM = N$

Доведемо, що MN – шуканий відрізок:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AM}{MN}, MN = \frac{BC \cdot AM}{AB} = \frac{b \cdot c}{a}$$

№1.

Визначте, чи є відрізки завдовжки a і b пропорційними відрізкам c і d, якщо:

а) $a = 8$ см, $b = 24$ см, $c = 4$ см, $d = 12$ см;

б) $a = 9$ см, b $= 14$ см, $c = 7$ см, $d = 18$ см;

Необхідно перевірити умову: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

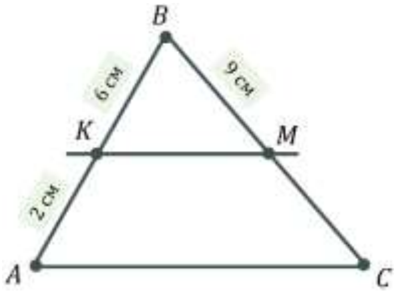
а) $\frac{8}{24} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, відрізки пропорційні.

б) $\frac{9}{14} \neq \frac{7}{18}$, відрізки не пропорційні.

№2

Пряма KM паралельна стороні AC трикутника ABC. Знайдіть відрізок MC, якщо:

а) $AK = 2$ см, $KB = 6$ см, $BM = 9$ см;

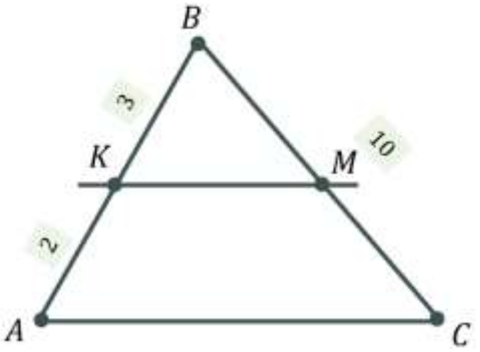


Розглянемо $\angle ABC, KM \parallel AC$:

За теоремою про пропорційні відрізки, маємо:

$$\frac{AK}{KB} = \frac{CM}{MB} \Rightarrow CM = \frac{AK \cdot MB}{KB} = \frac{2 \cdot 9}{6} = 3$$

б) $AK : KB = 2:3, BC = 10$ см;



За теоремою про пропорційні відрізки, маємо:

$$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{MC}$$

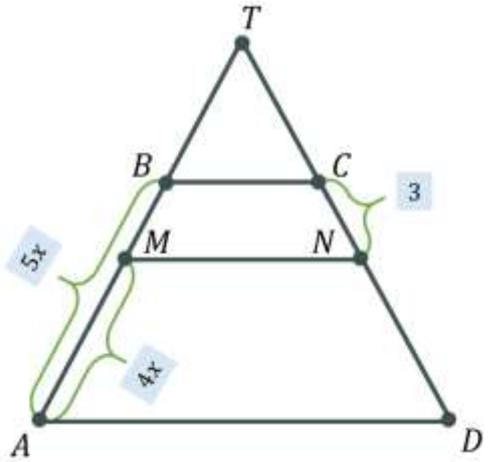
Нехай $MC = x \Rightarrow BC = 10 - x$.
$AB = AK + KB \Rightarrow AB = 5$

$$\frac{5}{2} = \frac{10}{x} \Rightarrow x = \frac{2 \cdot 10}{5} = 4$$

Відповідь: а) 3 см; б) 4

№4

Пряма MN паралельна основам трапеції $ABCD$. Знайдіть:
а) Сторону CD, якщо $AM: AB = 4: 5$, $CN = 3$



Дано:
$ABCD$ – трапеція;
$MN \parallel AD \parallel BC$
$AM: AB = 4: 5$
$CN = 3$

Знайти:
CD - ?

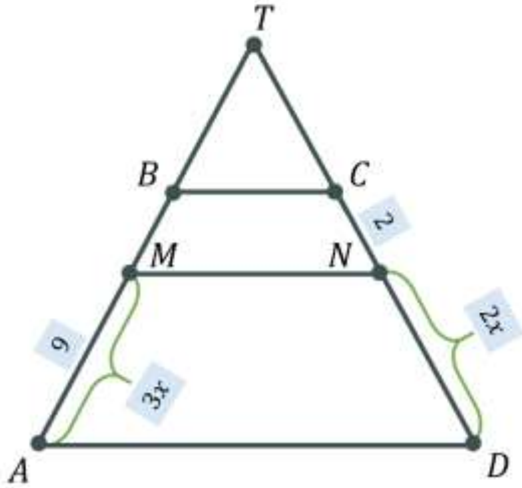
Розв'язок:

- Продовжимо бічні сторони трапеції, отримали точку T.
- За умовою $MN \parallel AD \parallel BC$, отже за теоремою про пропорційні відрізки:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{AM}{BM} = \frac{DN}{CN} \\ AM: AB = 4: 5 \\ x - \text{коефіцієнт пропорційності} \\ BM = 5x - x = x \end{array}\right| \Rightarrow \frac{4x}{x} = \frac{DN}{3} \Rightarrow DN = \frac{4x \cdot 3}{x} = 12 \text{ см}$$

$CD = DN + CN = 12 + 3 = 15$ см
Відповідь: 15 см

б) Сторону AB, якщо $AM{:}\,ND = 3{:}\,2$, $CN = 2$ см, $AM = 9$ см



Дано:
$ABCD$ – трапеція;
$MN \parallel AD \parallel BC$
$AM{:}\,ND = 3{:}\,2$
$CN = 2$ см
$AM = 9$ см

Знайти:
$AB-?$

Розв’язок:

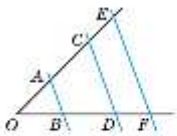
- Продовжимо бічні сторони трапеції, отримали точку T.
- За умовою $MN \parallel AD \parallel BC$, отже за теоремою про пропорційні відрізки:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{MB}{AM} = \dfrac{NC}{DN} \\ x - \text{коефіцієнт пропорційності} \\ 3x = 9, x = 3 \\ ND = 2x = 6\end{array}\right| \Rightarrow \frac{MB}{9} = \frac{2}{6} \Rightarrow MB = \frac{2 \cdot 9}{6} = 3$$

$AB = AM + MB = 9 + 3 = 12$ см
Відповідь: 12 см

Домашнє завдання
Опрацювати § 12
Виконати № 449, 451

449. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута O (мал. 126), $BD = 4$ см, $DF = 2$ см, $CE = 3$ см. Знайдіть AE.



Мал. 126

451. Паралельні прямі AB, CD і EF перетинають сторони кута з вершиною O (мал. 126). $OB = 5$, $BD = 7$, $AC = 4$, $CE = 3$. Знайдіть OA і DF.