Тема. Скалярний добуток векторів

Мета: ознайомитися з поняттями кута між векторами, скалярного добутку як способу множення векторів та властивостями цього добутку, вчитися знаходити скалярний добуток векторів

Пригадайте

- Що таке вектор, які він має характеристики?
- Які вектори називають колінеарними?
- Які дії з векторами ви вмієте виконувати?

Ознайомтеся з інформацією

Нехай $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — два ненульових та неспівнапрямлених вектори (рис. 1). Від довільної точки O відкладімо вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, відповідно, рівні векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Величину кута AOB називатимемо кутом між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

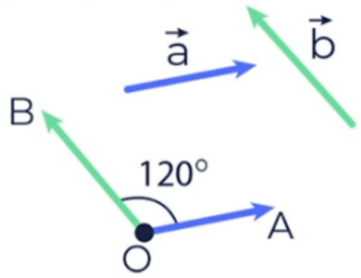

Рис. 1.

Кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $\angle(\overline{a}, \overline{b})$. Наприклад, на рисунку 1 $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 120^\circ$, а на рисунку 2 $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 180^\circ$.

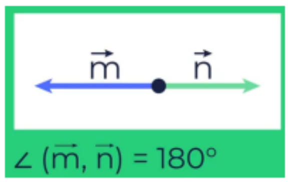

Рис. 2. Кут між протилежно напрямленими векторами

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ **співнапрямлені** (рис. 3), то вважають, що $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0^\circ$. Якщо хоча б один із векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ **нульовий**, то також вважають, що $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0^\circ$.

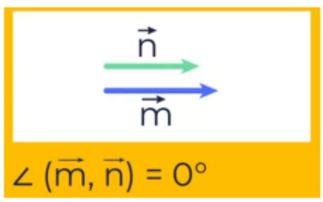

Рис. 3. Кут між співнапрямленими векторами

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90°. Записують: $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Отже, для будь-яких векторів $\underline{a}$ і $\underline{b}$ справджується нерівність: $0^\circ \le \angle(\overline{a, b}) \le 180^\circ$.

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Якщо хоча б один із векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ нульовий, то їх добуток дорівнюватиме нулю, тобто $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Якщо обидва вектори рівні один одному, тобто кут між ними дорівнює нуль градусів, а модулі однакові, то їх добуток буде рівний квадрату модуля одного із векторів.

Нехай $\overline{a} = \overline{b}$. Тоді $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}| \cos 0^\circ = |\overline{a}|^2$.

Скалярний добуток двох однакових векторів $\overline{a} \cdot \overline{a}$ називають **скалярним квадратом вектора** $\overline{a}$ і позначають його як $\overline{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Тобто, $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$.

Однією з найважливіших теорем зі скалярним добутком векторів є **теорема про перпендикулярність**. Вона звучить так: скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos 0^\circ = 0$

Перегляньте відео за посиланням:

https://youtu.be/wpByXsgUH0k

Розв'язування задач

Задача 1

Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|$;
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}||\overline{b}|$.

Розв'язання

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|$. Оскільки $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \angle(\overline{a, b})$, то звідси $\cos \angle(\overline{a, b}) = 1$, тоді кут між векторами $\angle(\overline{a, b}) = 0^\circ$, отже $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$;
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}||\overline{b}|$. Оскільки $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}| \cos \angle(\overline{a, b})$, то звідси $\cos \angle(\overline{a, b}) = -1$, тоді кут між векторами $\angle(\overline{a, b}) = 180^\circ$, отже $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Відповідь: 1) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ — співнапрямлені; 2) $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ — протилежно напрямлені.

Задача 2

У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CB = 2$. Знайдіть скалярний добуток векторів $\overline{AC}$ і $\overline{BC}$.

Розв'язання

Зауважмо, що вектори $\overline{AC}$ і $\overline{BC}$ перпендикулярні, оскільки $\angle C = 90^\circ$, а отже, їх скалярний добуток рівний 0°. Проте, все одно проведімо подальші розрахунки для підтвердження цього висновку.

$tg\ 30^\circ = \frac{CB}{AC}$, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{AC}$, $AC = |\overline{AC}| = 2\sqrt{3}$

$CB = |\overline{CB}| = 2$

$\overline{AC} \cdot \overline{BC} = |\overline{AC}| \cdot |\overline{BC}| \cdot cos\ 90^\circ = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 0 = 0$

Відповідь: $\overline{AC} \cdot \overline{BC} = 0.$

Пригадайте

- Як можна помножити два вектори?
- Як визначити кут між двома векторами?

Домашнє завдання

- **Опрацювати конспект і §10 підручника с.78-80**
- **Розв'язати (письмово): №395**

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- Всеукраїнська школа онлайн