22.09, 23.09.2022 9 клас Вчитель: Артемюк Н.А.

Тема. Тригонометричні тотожності

Мета: відновити та розширити знання про тригонометричні тотожності та навчитись застосовувати їх до розв’язування задач

Пригадайте

- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в прямокутному трикутнику.
- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в тригонометричному колі.
- Чому дорівнюють тригонометричні функції кутів 0°, 90°, 180°?
- Які основні тригонометричні тотожності ви знаєте?

Ознайомтеся з інформацією

Пригадаймо, що для будь-якого гострого кута **α** прямокутного трикутника було доведено основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ця ж тотожність дійсна і для кута **α** з проміжку $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$.

З основної тригонометричної тотожності з урахуванням знаків тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180° випливає, що:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}.$$

Знак cos**α** обирають залежно від того, чи є кут **α** гострим (знак «+»), чи тупим (знак «–»). Безпосередньо з означень тригонометричних функцій випливають такі тотожності:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \ (\alpha \ne 90^\circ), \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ),$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha = 1 \ (\alpha \ne 0^\circ,\ \alpha \ne 90^\circ,\ \alpha \ne 180^\circ).$$

У 8-ому класі ви вивчали, що для гострого кута **α** справджуються формули доповнення, які виражають функції кута (90°– **α**) через функції кута **α**:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha, \quad \mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha.$$

Формули зведення для кута на проміжку $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ будуть мати такий вигляд:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha.$$
$$\mathrm{tg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha \ (0^\circ \le \alpha \le 180^\circ,\ \alpha \ne 90^\circ),$$
$$\mathrm{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha \ (0^\circ < \alpha < 180^\circ).$$

Теорема синусів.

Сторони трикутника (рис. 2) пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C, відповідно;

R — радіус описаного кола навколо трикутника.

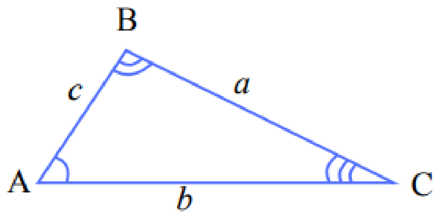

Рис. 2. До теореми синусів

Теорема косинусів.

Квадрат будь-якої сторони трикутника (рис. 4) дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\angle\gamma$,

де a, b, c — сторони трикутника, кут γ — кут між сторонами a і b.

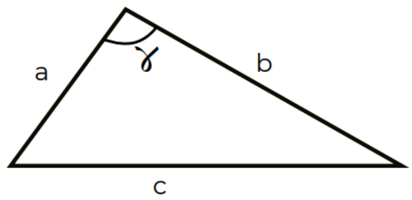

Рис. 4. До теореми косинусів

Перегляньте навчальне відео за посиланням:

https://youtu.be/-8Gk0dy7giE

Робота в зошиті

Запишіть приклади розв'язування задач:

Задача 1

Обчисліть значення тригонометричних функцій кута 150°.

Розв'язання.

$\sin 150° = \sin(180° - 30°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$, $\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\text{tg } 150° = \text{tg}(180° - 30°) = -\text{tg}30° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg } 150° = \text{ctg}(180° - 30°) = -\text{ctg } 30° = -\sqrt{3}$.

Відповідь: $\sin 150° = \dfrac{1}{2}$, $\cos 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{tg } 150° = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, $\text{ctg } 150° = -\sqrt{3}$.

Задача 2

Обчисліть:

1) $\sin 150° + \text{tg } 135°$

Розв'язання

1) $\sin 150° + \text{tg } 135° = \sin(180° - 30°) + \text{tg}(180° - 45°) = \sin 30° - \text{tg } 45° =$

$= \dfrac{1}{2} - 1 = -0,5;$

Задача 3

Кут β – гострий. Знайдіть: $\cos\beta$, якщо $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$

Розв'язання

$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1.$

1) $\sin\beta = \dfrac{4}{5}$; $\cos^2\beta = 1 - \sin^2\beta$; $\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$;

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$$

Задача 4

За трикутником ABC (рис. 3) знайдіть кут B, якщо $AB = \sqrt{3}$, $AC = \sqrt{2}$, $\angle C = 60°$.

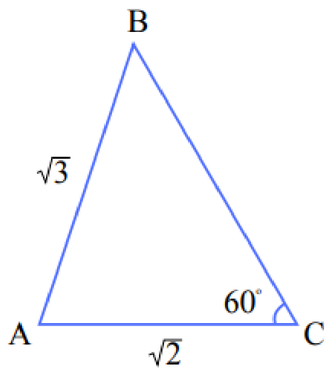

Рис. 3.

Розв'язання.

За теоремою синусів маємо:

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B};$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\angle B};$$

$$\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\angle B};$$

$$\frac{\sqrt{3}\cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin\angle B};$$

$$\sin\angle B = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$\angle B = 45°$.

Відповідь: $\angle B = 45°$.

Задача 5 (додаткова)

Знайдіть сторони паралелограма, якщо його діагоналі завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60°.

Розв'язання.

Нехай діагоналі паралелограма ABCD перетинаються в точці O, AC = 16 см, BD = 10 см, ∠AOB = 60° (рис. 5).

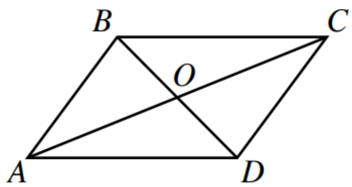

Рис. 5.

Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то AO = OC = 8 см, BO = OD = 5 см. За теоремою косинусів із трикутника AOB маємо:

$AB^2 = OA^2+OB^2-2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$,

$AB^2 = 8^2+5^2-2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\angle 60° = 7$см.

Оскільки ∠AOD = 120° як суміжний з кутом AOB, то з трикутника AOD за теоремою косинусів маємо:

$AD^2 = AO^2+OD^2-2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos\angle AOD$,

$AD^2 = 8^2+5^2-2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\angle 120°$.

Оскільки $\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$, то $AD^2=129$, $AD = \sqrt{129}$ см.

Відповідь: 7 см і $\sqrt{129}$ см.

Домашнє завдання

- **Опрацювати конспект**
- **Розв'язати задачі (письмово):**

1. Обчисліть $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.
2. Кут β гострий. Знайдіть $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \dfrac{5}{13}$
3. Спростіть вираз

   $(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)$;

   $\dfrac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)}$.

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту nataliartemiuk.55@gmail.com