27.09, 30.09.2022 7 клас

Тема. Степінь з натуральним показником. Властивості степеню з натуральним показником

Мета. Повторити поняття степеню з натуральним показником та ознайомитися з його властивостями, навчитися застосовувати властивості степеню до спрощення виразів

Пригадайте

- Що називають степенем числа?
- Що називають основою, а що показником степеню?
- Чому дорівнює нульовий степінь числа, перший степінь?
- Як називають другий, третій степінь числа?

Ознайомтеся з інформацією

Розгляньмо добуток кількох однакових множників, кожен з яких дорівнює a:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$$

Такий запис досить громіздкий і незручний. Існує більш зручний спосіб записати добуток, усі множники якого рівні.

Наприклад, добуток семи множників, кожен з яких дорівнює 4, записують так:

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}_{7 \text{ множників}} = 4^7$$

Вираз 4^7 називають **степенем числа 4**, множник, який повторюється, у нашому випадку число 4, — **основою степеня**, а число 7, яке показує кількість множників, — **показником степеня**. Вираз 4^7 можна читати «чотири в сьомому степені» або «сьомий степінь числа чотири».

Зверніть увагу, що показник степеня вказує на кількість множників, а отже, є натуральним числом, більшим за 1.

Означення

Степенем числа a з натуральним показником n, більшим за 1, називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}, \, n > 1.$$

Другий степінь числа a називають квадратом числа a. Третій степінь числа a називають кубом числа a.

a^2 — «квадрат числа a»

a^3 — «куб числа a»

$a^1 = a$

$a^0 = 1$

Обчислення степеня числа ще називають **піднесенням до степеня**. Піднесення до степеня — це п'ята арифметична дія. Черговість її виконання визначається **правилом:** якщо в числовий вираз входить степінь, то спочатку виконується піднесення до степеня, а після цього — інші дії.

Детальніше зупинімося на тому, як визначити знак степеня з натуральним показником:

1) якщо $a > 0$, то a^n — це добуток n додатних чисел, а отже, теж додатне число: $a^n > 0$.

2) якщо $a = 0$, то $0^n = 0$. Будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює нулю.

3) якщо a < 0, то можливі два випадки. Результат залежить від того, яким є показник — парним чи непарним. Наприклад:

$$(-2)^4 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{\text{парна кількість множників}} > 0$$

$$(-2)^5 = \underbrace{(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)}_{\text{непарна кількість множників}} < 0$$

Отже, якщо $a < 0$ і n — парне, то $a^n > 0$; якщо a < 0 і n — непарне, то $a^n < 0$.

Висновок: Степінь від'ємного числа з парним показником є додатним числом, степінь від'ємного числа з непарним показником є від'ємним числом.

Розгляньмо добуток двох степенів з однаковими основами.

$$a^3 \cdot a^5 = \underbrace{a\cdot a\cdot a}_{\text{3 множника}} \cdot \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{\text{5 множників}} = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{\text{8 множників}} = a^8$$

Отже, $a^3 \cdot a^5 = a^{3+5} = a^8$.

Далі — аналогічний приклад.

$$a^3 \cdot a^5 = \underbrace{a\cdot a}_{\text{2 множника}} \cdot \underbrace{a\cdot a\cdot a}_{\text{3 множника}} = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}_{\text{5 множників}} = a^5$$

Отже, $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$.

Логічним буде припустити, що для будь-яких натуральних чисел m і n виконується рівність: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, де n і m — довільні натуральні числа.

Дійсно, існує властивість, яка має назву **основна властивість степеня.**

Властивість 1

Для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m і n виконується рівність $\boldsymbol{a^n \cdot a^m = a^{n+m}}$.

Правило множення степенів:

під час множення степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а показники степенів додають.

Властивість 2

Для будь-якого числа $a \neq 0$ і довільних натуральних чисел m і n, таких, що

m < n, виконується рівність $\boldsymbol{a^n : a^m = a^{n-m}}$.

Правило ділення степенів:

під час ділення степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Властивість 3

Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n є справедливою рівність $\boldsymbol{(a^n)^m = a^{n \cdot m}}$.

Наслідком цієї властивості є **правило**:

підносячи степінь до степеня, основу залишають тією самою, а показники перемножують.

Властивість 4

Для будь яких чисел a і b та будь-якого натурального числа n є справедливою рівність $(ab)^n = a^n b^n$.

Наслідком з цієї властивості є **правило**:

підносячи добуток до степеня, кожний множник підносять до степеня й отримані результати перемножують.

Завдання

Усні вправи

Завдання 1

Подати у вигляді степеня: 1) bbbb; 2) $17 \cdot 17 \cdot 17$; 3) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$.

Розв'язання

1) $\mathrm{bbbb} = \mathrm{b}^4$;

2) $17 \cdot 17 \cdot 17 = 17^3$;

3) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^5$.

Відповідь: b^4; 17^3; 10^5.

Завдання 2

Виконати піднесення до степеня: 1) 2^5; 2) 0^4; 3) $(-3)^3$.

Розв'язання

1) $2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$;

2) $0^4 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$;

3) $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$.

Відповідь: 32; 0; -27.

Завдання 3

Порівняти з нулем значення виразу: 1) $(-3,7)^3$; 2) $(-2,15)^6$; 3) $-(-7)^5$.

Розв'язання

1) $(-3,7)^3 < 0$ (показник 3 — непарне число);

2) $(-2,15)^6 > 0$ (показник 6 — парне число)

3) $-(-7)^5 > 0$ (даний вираз є протилежним виразу $(-7)^5$, а $(-7)^5 < 0$)

Завдання 4

Подайте добуток у вигляді степеня: 1) $12^3 \cdot 12^7$; 2) $2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^8$; 3) $y^3yy^7y^2$.

Розв'язання

Для розв'язання цих прикладів застосуймо правило множення степенів.

1) $12^3 \cdot 12^7 = 12^{3+7} = 12^{10}$

2) $2^5 \cdot 2^6 \cdot 2^8 = 2^{5+6+8} = 2^{19}$

3) $y^3yy^7y^2 = y^{3+1+7+2} = y^{13}$

Відповідь: 12^{10}; 2^{19}; y^{13}.

Письмові вправи

Завдання 5

Знайдіть значення виразу $\left(-\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{7}$.

Розв'язання

$$\left(-\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{3}{4}\right)^{7} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{10-7} = \left(-\frac{3}{4}\right)^{3} = -\frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{27}{64}$$

Відповідь: $-\frac{27}{64}$.

Завдання 6

Обчисліть, використовуючи властивості степенів: $243 : 3^4 \cdot 9$.

Розв'язання

Представмо числа 243 і 9 як степінь числа 3:

$243 : 3^4 \cdot 9 = 3^5 : 3^4 \cdot 3^2 = 3^{5-4+2} = 3^3 = 27$.

Відповідь: 27.

Допоміжний матеріал

Під час розв'язання вправ буде доцільним користуватись таблицею степенів чисел 2 і 3:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

Пригадайте

- Що називають степенем числа?
- Які властивості степенів ви знаєте?

Домашнє завдання

- Прочитайте в підручнику §5,6

Виконайте письмово завдання

Завдання 7

Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості степенів та таблицю степенів чисел 2 і 3:

1) $2^3 \cdot 2^7$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^{12} : 2^4$.

Завдання 8

Спростіть вираз:

1) $(-x)^3 \cdot x^2$; 2) $-z^7 : z^6$; 3) $(-b) \cdot b^2 \cdot (-b)^3$.

Фото виконаної роботи потрібно надіслати вчителю на HUMAN або на електронну пошту nataliartemiuk.55@gmail.com