

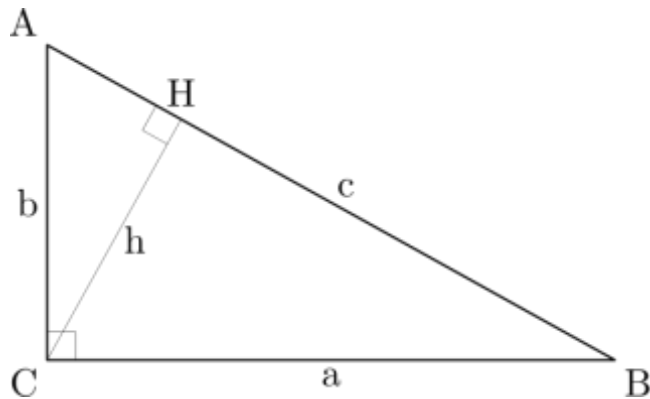
Тема: Розв'язування прямокутних трикутників. Розв'язування задач (повторення)

Опорний конспект

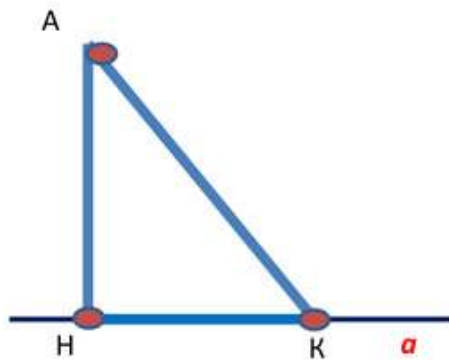
Повторення

Теорема Піфагора:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$



Перпендикуляр і похила, їх властивості



АН – перпендикуляр, проведений з точки А до прямої ***a***.

Точку **Н** називають основою перпендикуляра АН.

К – довільна точка прямої ***a***, відмінна від Н.

Відрізок **АК** називають похилою, проведеною з точки А до прямої ***a***,

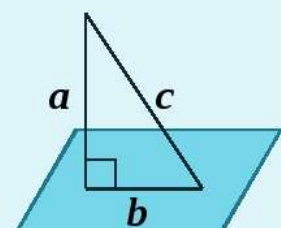
а точку **К** – основою похилої.

Відрізок **НК** називають проекцією похилої АК на пряму ***a***.

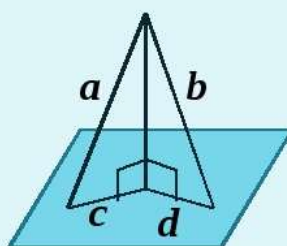
Властивості перпендикуляра й похилої

Якщо з точки, взятої поза площиною, проведено до площини перпендикуляр і похилі, то:

- 1) перпендикуляр коротший за будь-яку похилу;
- 2) проєкції рівних похилих є рівними й, навпаки, похилі, що мають рівні проєкції, є рівними;
- 3) з двох похилих більша та, проєкція якої більша.

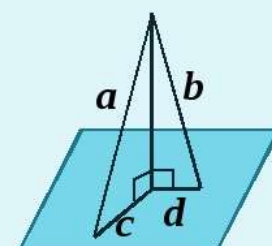


$$c > a, \quad c > b$$



$$\text{Якщо } a = b, \text{ то } c = d$$

$$\text{Якщо } c = d, \text{ то } a = b$$



$$\text{Якщо } c > d, \text{ то } a > b$$

$$\text{Якщо } a > b, \text{ то } c > d$$

Елементи прямокутного трикутника

$\triangle ABC$ - прямокутний

$AB = c$ - гіпотенуза

$BC = a$ і $AC = b$ - катети

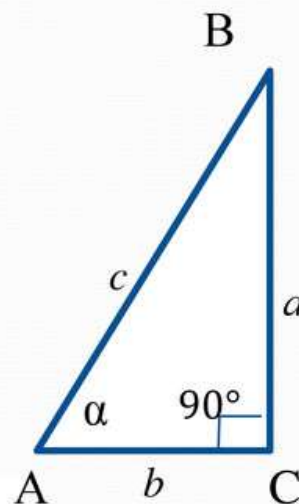
α - гострий кут

BC - протилежний катет куту α
і AC - прилеглий катет

- відношення $\frac{a}{c}$ позначають $\sin \alpha$ і читають «синус альфа»;

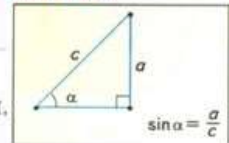
- відношення $\frac{b}{c}$ позначають $\cos \alpha$ і читають «косинус альфа»;

- відношення $\frac{a}{b}$ позначають $\tan \alpha$ і читають «тангенс альфа».

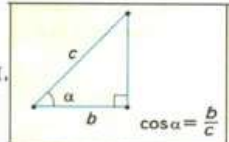


Означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута прямокутного трикутника

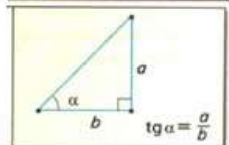
Синусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до гіпотенузи.



Косинусом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення прилеглого катета до гіпотенузи.

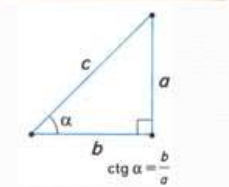


Тангенсом гострого кута прямокутного трикутника називається відношення протилежного катета до прилеглого катета.



Крім косинуса, синуса і тангенса кута α є ще одне відношення сторін прямокутного трикутника, яке має особливу назву — *котангенс*. Це відношення катета b , прилеглого до кута α , до протилежного катета a . Позначається: $\text{ctg } \alpha$.

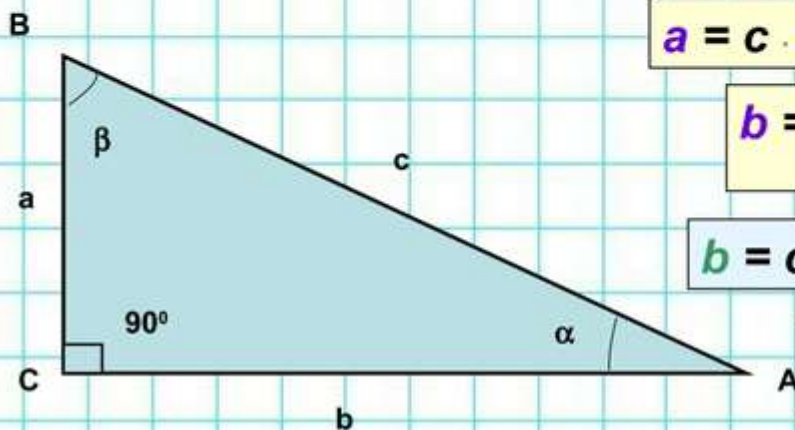
Отже, $\text{ctg } \alpha = \frac{b}{a}$.



Розв'язування прямокутних трикутників

Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на синус кута, протилежного цьому катету

Катет прямокутного трикутника дорівнює добутку гіпотенузи на косинус кута, прилеглого до цього катета



$$a = c \cdot \sin \alpha$$

$$b = c \cdot \sin \beta$$

$$b = c \cdot \cos \alpha$$

$$a = c \cdot \cos \beta$$

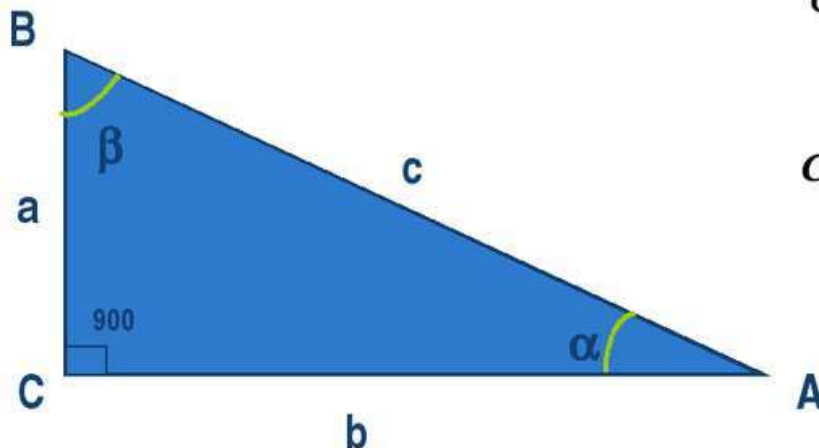
Розв'язування прямокутних трикутників

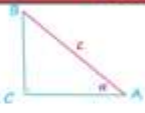
$$c = \frac{a}{\sin \alpha}$$

$$c = \frac{b}{\sin \beta}$$

$$c = \frac{b}{\cos \alpha}$$

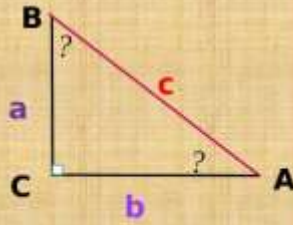
$$c = \frac{a}{\cos \beta}$$



п	Основні поняття	Зміст основних понять	Рисунки та приклади
1	Розв'язування прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом.	 <p>Алгоритм розв'язання:</p> <p>Дано: $c, \angle A$. Знайти: $\angle B, a, b$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 90^\circ - \angle A$. $a = c \sin A$. $b = c \cos A$. 	<p>Задача 1. Дано гіпотенузу c прямокутного трикутника і гострий кут A. Знайдіть другий гострий кут трикутника і його катети.</p> <p>Дано: $c = 7, \angle A = 29^\circ$. Знайти: $\angle B, a, b$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 90^\circ - 29^\circ = 61^\circ$. $a = 7 \sin 29^\circ \approx 3,39$. $b = 7 \cos 29^\circ \approx 6,12$. <p>Відповідь: $61^\circ, \approx 3,39, \approx 6,12$.</p>
2	Розв'язування прямокутних трикутників за катетом і протилежним катету	 <p>Алгоритм розв'язання:</p> <p>Дано: $a, \angle A$. Знайти: $\angle B, b, c$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 90^\circ - \angle A$. $b = \frac{a}{\tan A}$ (або $b = a \operatorname{ctg} A$). $c = \frac{a}{\sin A}$ (або $c = \sqrt{a^2 + b^2}$). 	<p>Задача 2. Дано катет a прямокутного трикутника і гострий кут A. Знайдіть другий гострий кут трикутника, його другий катет і гіпотенузу</p> <p>Дано: $a = 5, \angle A = 63^\circ$. Знайти: $\angle B, b, c$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\angle B = 90^\circ - 63^\circ = 27^\circ$. $b = \frac{5}{\tan 63^\circ} \approx 2,55$. $c = \frac{5}{\sin 63^\circ} \approx 5,61$. <p>Відповідь: $27^\circ, \approx 2,55, \approx 5,61$.</p>

3. Розв'язування прямокутних трикутників за двома катетами

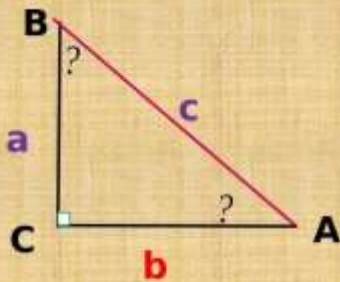
Задача 3. Дано катети a і b прямокутного трикутника. Знайдіть гіпотенузу та гострі кути трикутника.



Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
<p>Дано: a, b. Знайти: $c, \angle A, \angle B$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. $\angle B = 90^\circ - \angle A$. 	<p>Дано: $a = 4, b = 7$. Знайти: $c, \angle A, \angle B$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $c = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8,06$. $\operatorname{tg} A = \frac{4}{7}$; $\angle A \approx 29^\circ 45'$. $\angle B \approx 90^\circ - 29^\circ 45' = 60^\circ 15'$. <p>Відповідь: $8,06, \approx 29^\circ 45', \approx 60^\circ 15'$.</p>

4. Розв'язування прямокутних трикутників за катетом і гіпотенузою

Задача 4. Дано катет a і гіпотенузу c прямокутного трикутника. Знайдіть другий катет і гострі кути трикутника.



Розв'язання в загальному вигляді	Приклад
<p>Дано: a, c. Знайти: $b, \angle A, \angle B$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. $\sin A = \frac{a}{c}$. Далі $\angle A$ знаходимо за допомогою калькулятора або таблиць. $\angle B = 90^\circ - \angle A$. 	<p>Дано: $a = 5, c = 12$. Знайти: $b, \angle A, \angle B$.</p> <p>Розв'язання.</p> <ol style="list-style-type: none"> $b = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119} \approx 10,91$. $\sin A = \frac{5}{12}$; $\angle A \approx 24^\circ 37'$. $\angle B \approx 90^\circ - 24^\circ 37' = 65^\circ 23'$. <p>Відповідь: $\approx 10,91, \approx 24^\circ 37', \approx 65^\circ 23'$.</p>

Розв'язування задач

Задача 3



Знайти невідомі сторони й гострі кути прямокутного трикутника за гіпотенузою $c=2$ та гострим кутом $\alpha=20^\circ$.

Розв'язання

Так як сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° , то:

$$\angle B = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ, \quad \angle A = 20^\circ.$$

$$\text{AC будемо шукати із співвідношення: } \frac{AC}{AB} = \sin B,$$

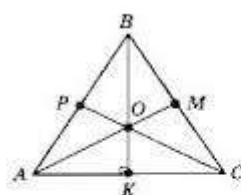
$$AC = AB \cdot \sin 70^\circ, \quad AC = 2 \cdot 0,9397 = 1,8794 \approx 1,88; \quad AC = 1,88$$

$$\text{BC шукаємо із співвідношення: } \frac{BC}{AB} = \sin A; \quad BC = AB \sin 20^\circ;$$

$$BC = 2 \cdot 0,3420 = 0,6840 \approx 0,68, \quad BC = 0,68$$

Відповідь: $70^\circ, 1,88, 0,68$.

5.



$\triangle ABC$ —
рівносторінний.
 BK — медіана
і висота.
 $AB = 18$ см,
 $AK = 9$ см.

$$BK^2 = AB^2 - AK^2 = 324 - 81 = 243.$$

$$BK = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}, \quad OK : OB = 1 : 2.$$

$$x + 2x = 9\sqrt{3}, \quad 3x = 9\sqrt{3}, \quad x = 3\sqrt{3}.$$

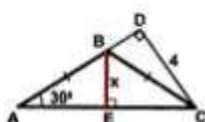
$$OK = 3\sqrt{3} \text{ см}, \quad OB = 6\sqrt{3} \text{ см}.$$

Відповідь: $3\sqrt{3}$ см; $6\sqrt{3}$ см.

Задача 8

Знайти X за даними малюнка.

Розв'язання



Розглянемо $\triangle ADC$: Він прямокутний

Катет DC лежить проти кута 30° , а тому дорівнює половині гіпотенузи AC .

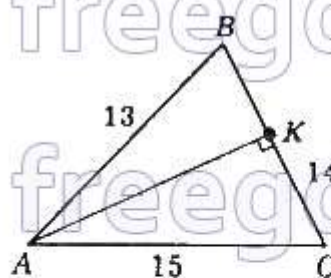
Отже $AC = 8$. Розглянемо $\triangle ABC$.

Він рівнобедрений. Тому $AE = EC = 4$.

Розглянемо трикутник ABE . Він прямокутний.

$$\frac{BE}{AE} = \tan 30^\circ, \quad BE = AE \cdot \tan 30^\circ, \quad BE = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

10.



$\triangle ABC$.

$AK \perp BC$.

Нехай $BK = x$,

$KC = 14 - x$.

$\triangle ABK$.

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 169 - x^2, \quad \triangle AKC.$$

$$AK^2 = AC^2 - KC^2 = 225 - (14 - x)^2.$$

$$169 - x^2 = 225 - (14 - x)^2.$$

$$169 - x^2 = 225 - 196 + 28x - x^2,$$

$$28x = 140, \quad x = 5. \quad BK = 5 \text{ см},$$

$$KC = 14 - 5 = 9 \text{ см}.$$

Відповідь: 5 см, 9 см.

Робота з інтернет ресурсами

<https://youtu.be/HxOGUMbYXjI>

https://youtu.be/yItW_OfWMc0

Домашнє завдання

Виконати ПИСЬМОВО

Усні вправи

1. Периметр прямокутника дорівнює 40 см, а одна з його сторін – 15 см. Знайдіть площу прямокутника.



2. Сторона прямокутника дорівнює $5\sqrt{3}$ см і утворює з діагоналлю кут 30° . Діагональ прямокутника дорівнює 10 см. Знайдіть площу прямокутника.

