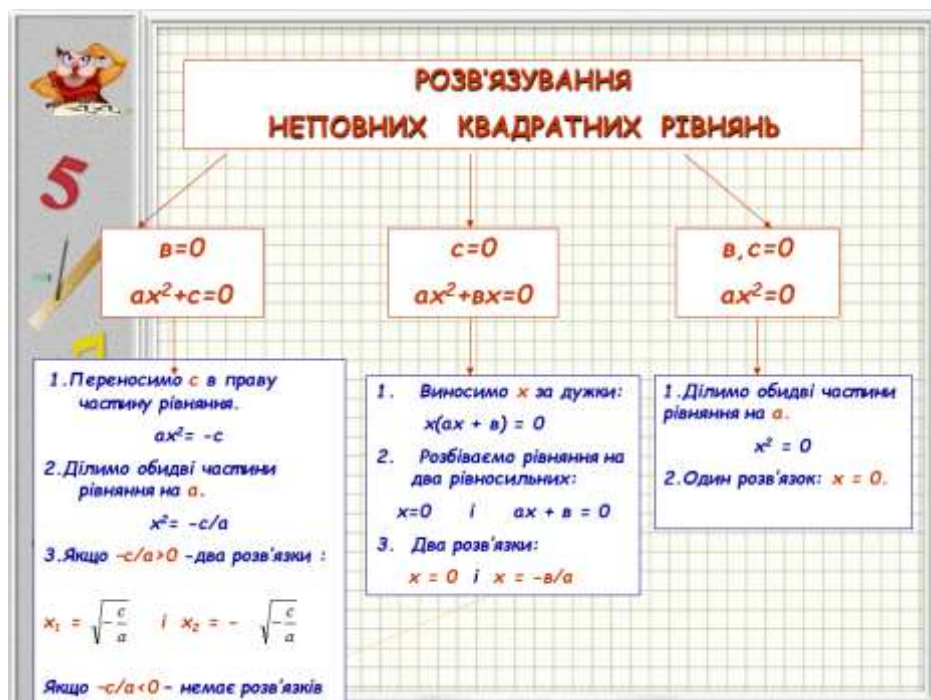


Тема: Розв'язування квадратних рівнянь (повторення)

Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь (повторення)

Опорний конспект

Повне квадратне рівняння	$D = b^2 - 4ac$	Корені	Неповне квадратне рівняння	Корені
$ax^2 + bx + c = 0$ $a \neq 0$	$D > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$	$ax^2 = 0, a \neq 0$	$x = 0$
	$D = 0$	$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	$ax^2 + bx = 0, a \neq 0$	$x_1 = 0$ $x_2 = -\frac{b}{a}$
	$D < 0$	Не існує	$ax^2 + c = 0, a \neq 0$	$x_{1,2} = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$
Зведене квадратне рівняння	Корені			
$x^2 + px + q = 0$	$x_1 + x_2 = -p$, $x_1 x_2 = q$.			



Алгоритм

розв'язування повного квадратного рівняння за формулою

$$ax^2 + bx + c = 0;$$

$$a = \dots, b = \dots, c = \dots;$$

$$D = b^2 - 4ac = \dots;$$

$$\sqrt{D} = \dots;$$

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a};$$

$$x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a};$$

Відповідь : \dots ; \dots

$$9x^2 - 12x - 5 = 0;$$

$$a = 9, b = -12, c = -5;$$

$$D = 144 - 4 \cdot 9 \cdot (-5) = 324;$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{324} = 18;$$

$$x_1 = \frac{12 - 18}{2 \cdot 9} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3};$$

$$x_2 = \frac{12 + 18}{2 \cdot 9} = \frac{30}{18} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3};$$

Відповідь : $-\frac{1}{3}$; $1\frac{2}{3}$

Теорема Вієта

для **зведеного**
квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 - корені
квадратного рівняння
 $x^2 + px + q = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

для **повного**
квадратного рівняння

Якщо x_1 і x_2 - корені
квадратного рівняння
 $ax^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

ПРИКЛАДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗВЕДЕНИХ КВАДРАТНИХ РІВНЯНЬ ЗА Т.ВІЄТА

$$-\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = 0 \quad | \cdot (-2)$$

Це рівняння можна розв'язати за дискримінантом, а можна зробити його зведеним, помноживши на -2 і розв'язати за теоремою Вієта

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

Рівняння стало зведеним, тому можемо використати теорему Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -4 \\ x_1 \cdot x_2 = 4 \end{cases}$$

Тепер нам потрібно придумати такі два числа, щоб при додаванні = -4, а при множенні = 4.

$$\begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Ми отримали два однакові корені, тому відповідь буде така:

Відповідь: $x = -2$

Приклади розв'язування квадратних рівнянь за формулою

$2x^2 + 5x - 3 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) = 49;$ $\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7;$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2 \cdot 2} = -\frac{12}{4} = -3;$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2 \cdot 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2};$ Відповідь: -3, 0.5.	$x(x+1) = 56;$ $x^2 + x - 56 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 1 + 4 \cdot 1 \cdot (-56) = 225;$ $\sqrt{D} = \sqrt{225} = 15;$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 - 15}{2 \cdot 1} = -8;$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-1 + 15}{2 \cdot 1} = 7;$ Відповідь: -8, 7.	$5x^2 + 1 = 6x;$ $5x^2 - 6x + 1 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 5 \cdot 1 = 16;$ $\sqrt{D} = \sqrt{16} = 4;$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 - 4}{2 \cdot 5} = \frac{2}{10} = 0.2;$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{6 + 4}{2 \cdot 5} = \frac{10}{10} = 1;$ Відповідь: 0.2; 1
$\frac{x^2 + 3x}{2} = \frac{x+7}{4} \quad \cdot 4$ $2x^2 + 6x = x + 7;$ $2x^2 + 5x - 7 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 25 + 4 \cdot 2 \cdot 7 = 81;$ $\sqrt{D} = \sqrt{81} = 9;$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 - 9}{2 \cdot 2} = -\frac{14}{4} = -3\frac{1}{2};$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-5 + 9}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1;$ Відповідь: -3.5; 1	$-2x^2 + 8x + 2 = 0 \quad + (-2)$ $x^2 - 4x - 1 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 16 + 4 \cdot 1 \cdot 1 = 20;$ $\sqrt{D} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5};$ $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 - 2\sqrt{5}}{2 \cdot 1} = 2 - \sqrt{5};$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{4 + 2\sqrt{5}}{2 \cdot 1} = 2 + \sqrt{5};$ Відповідь: $2 \pm \sqrt{5};$	$4x^2 + 5x + 3 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 3 < 0;$ Відповідь: коренів немає
		$x^2 - 2x + 1 = 0;$ $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0;$ $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2 \cdot 1} = 1;$ Відповідь: 1

Алгоритм дій:

1. Перенесемо всі доданки в ліву частину рівняння, розкладемо знаменники на множники. Зведемо до спільного знаменника дробу в лівій частині та виконаємо дії додавання і віднімання раціональних дробів.
2. Скористаємося правилом рівності дробу нулю і запишемо систему, рівносильну даному рівнянню.
3. Розв'яжемо одержане рівняння системи, звівши його до квадратного.
4. Знаходимо розв'язки системи.

Приклад: $\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} = \frac{8}{x^2-4}$.

1.
$$\frac{x-1}{x+2} + \frac{x}{x-2} - \frac{8}{(x-2)(x+2)} = 0;$$
$$\frac{(x-1)(x-2) + x(x+2) - 8}{(x-2)(x+2)} = 0.$$
2.
$$\begin{cases} (x-1)(x-2) + x(x+2) - 8 = 0, \\ (x-2)(x+2) \neq 0. \end{cases}$$
3.
$$\begin{aligned} x^2 - 2x - x + 2 + x^2 + 2x - 8 &= 0; \\ 2x^2 - x - 6 &= 0; \\ D &= (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-6) = 49; x = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2}; x = \frac{1 \pm 7}{4}; \\ x_1 &= 2, x_2 = -1,5. \end{aligned}$$
4.
$$\begin{cases} x \neq -2, x \neq 2, \\ \begin{cases} x = 2, \\ x = -1,5; \end{cases} \Leftrightarrow x = -1,5. \end{cases}$$

Отже, рівняння має один розв'язок. **Відповідь: -1,5**

4. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДРОБОВО-РАЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ МЕТОДОМ МНОЖЕННЯ ОБОХ ЧАСТИН РІВНЯННЯ НА СПІЛЬНИЙ ЗНАМЕННИК

$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$$

- 1) ОДЗ: $x-5 \neq 0$, $x \neq 5$ та $x \neq 0$
- 2) Спільний знаменник $x(x-5)$
- 3) $\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)} \cdot x(x-5);$
$$\frac{x-3}{x-5} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$$
- 4) $x(x-3) + x-5 = x+5;$
$$x^2 - 3x + x - 5 - \frac{x}{x} - \frac{5}{x} = 0;$$
$$x^2 - 3x - 10 = 0; \text{ за теоремою Вієта}$$
$$x_1 = -2, x_2 = 5 - \text{ не задовольняє ОДЗ.}$$

Відповідь : -2.

- 1) Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної в рівнянні;
- 2) Знайдіть спільний знаменник дробів, що входять до рівняння.
- 3) Помножити обидві частини рівняння на спільний знаменник.
- 4) Розв'язати здобуте рівняння.
- 5) Виключити з його коренів ті, за яких спільний знаменник дорівнює нулю.

Розв'язування задач за допомогою рівнянь, які зводяться до квадратних

АЛГОРИТМ

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

1. Уважно прочитати задачу (якщо потрібно, скласти коротку умову або таблицю)
2. Одну з невідомих позначити за x
3. Інші невідомі виразити через x
4. За умовою задачі скласти рівняння
5. Розв'язати рівняння
6. Проаналізувати умову та корінь рівняння
7. Знайти інші невідомі, якщо потрібно
8. Дати відповідь



Задача 1

Потяг мав проїхати 64 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля semaфора на 12 хв. Тоді він збільшив швидкість на 10 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість потяга.

Розв'язання

$64 - 24 = 40$ (км) – відстань, на якій відбулися зміни

$12 \text{ хв} - 4 \text{ хв} = 8 \text{ хв} = \frac{2}{15} \text{ год}$ – запізнення часу

	S , км	v , км/год	t , год
Планував	40	x	$\frac{40}{x}$
Фактично	40	$x+10$	$\frac{40}{x+10}$

на $\frac{2}{15} \text{ год}$

Нехай початкова швидкість потяга x км/год. Тоді останні 40 км він планував проїхати за $\frac{40}{x}$ год. Після збільшення швидкості на 10 км/год, вона становить $(x+10)$ км. Тобто фактично витратив $\frac{40}{x+10}$ год, що на 8 хв $= \frac{2}{15} \text{ год}$ менше, ніж планував. Складемо та розв'яжемо рівняння

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+10} = \frac{2}{15}$$

№ 2

У прямокутному трикутнику один із катетів менший за гіпотенузу на 4 см, а другий – на 18 см.

Знайдіть периметр трикутника.

$$x^2 - 44x + 340 = 0;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 44, \\ x_1 \cdot x_2 = 340. \end{cases}$$

$$x_1 = 10 \text{ і } x_2 = 34.$$

$x_1 = 10$ – сторонній корінь, тому гіпотенуза – 34 (см),

$$340 = 1 \cdot 340$$

$$340 = 2 \cdot 170$$

$$340 = 4 \cdot 85$$

$$340 = 5 \cdot 68$$

$$340 = 10 \cdot 34.$$



Задача 3. Човен пройшов 5 км за течією річки і 3 км проти течії, витративши на весь шлях 40 хв. Швидкість течії становить 3 км/год. Знайдіть швидкість руху човна за течією

x км/год- швидкість човна

$x+3$ км/год – швидкість за течією

$x-3$ км/год – швидкість проти течії

$5/(x+3)$ год – час в дорозі за течією

$3/(x-3)$ год - проти течії

Всього в дорозі - 40 хв.

40 хв = $2/3$ год

Складемо рівняння:

$$5/(x+3) + 3/(x-3) = 2/3$$

$$5 \cdot 3(x-3) + 3 \cdot 3(x+3) = 2(x-3)(x+3)$$

$$15x - 45 + 9x + 27 = 2x^2 - 18$$

$$2x^2 - 24x = 0$$

$$x^2 - 12x = 0$$

$$x(x-12) = 0$$

$$x = 0 \text{ – сторонній корінь}$$

$$x - 12 = 0$$

$$x = 12 \text{ (км/год) – швидкість човна}$$

Робота з інтернет ресурсами

<https://youtu.be/BslmVEjg7E4>

https://youtu.be/bUA4_ynbFpU

https://youtu.be/N9NU3dy_RAs

Домашнє завдання

Виконання письмових вправ

І. Розв'язування квадратного рівняння за формулами.

1) Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 2x - 1 = 0$; б) $7x^2 - 18x + 8 = 0$;
 в) $3x^2 + 22x - 16 = 0$; г) $x^2 + 21x + 90 = 0$;
 д) $3x^2 + 53x - 18 = 0$; е) $-25x^2 + 50x + 75 = 0$;
 ж) $x^2 + 0,5x - 1,5 = 0$; з) $2x^2 - x + \frac{1}{9} = 0$;
 и) $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{8}{9} = 0$.

MyShared