



Тема. Квадратна нерівність

Мета. Вдосконалювати вміння розв'язувати квадратні нерівності

Повторюємо

- Що таке квадратна нерівність?
- Що означає графічно розв'язати квадратну нерівність?
- Як визначити нулі квадратичної функції та напрям віток її графіка?
- Наведіть алгоритм розв'язування квадратної нерівності.

Ознайомтеся з інформацією

| Нерівність | Неправильне розв'язання  | Правильне розв'язання  |
|------------------------|--|--|
| $-x^2 + 7x - 12 < 0$ | $-(x-3)(x-4) < 0;$ $(x-3)(x-4) < 0.$ Відповідь: $x \in (3; 4).$ | $x^2 - 7x + 12 > 0;$ $(x-3)(x-4) > 0:$ Відповідь: $x \in (-\infty; 3) \cup (4; +\infty).$ |
| $x^2 + 8x + 16 \geq 0$ | $(x+4)^2 \geq 0;$ $x+4 \geq 0;$ $x \geq -4.$ Відповідь: $x \in [-4; +\infty).$ | $(x+4)^2 \geq 0.$ Нерівність $(x+4)^2 \geq 0$ виконується для всіх значень x , тобто x — будь-яке число. Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty).$ |
| $x^2 - 6x + 9 > 0$ | $(x-3)^2 > 0.$ Нерівність $(x-3)^2 > 0$ виконується для всіх значень x , тобто x — будь-яке число. Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty).$ | $(x-3)^2 > 0.$ При $x=3$ маємо $(x-3)^2 = 0$, отже, $x \neq 3$. Відповідь: $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty).$ |
| $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ | $(x+2)^2 \leq 0.$ Розв'язків немає. Відповідь: $\emptyset.$ | $(x+2)^2 \leq 0.$ Нерівність $(x+2)^2 \leq 0$ виконується при єдиному значенні $x = -2$. Відповідь: $x = -2$, або $\{-2\}.$ |
| $x^2 + 3x + 4 > 0$ | $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7.$ Оскільки $D < 0$, то розв'язків немає. Відповідь: $\emptyset.$ | Оскільки старший коефіцієнт — додатне число і $D < 0$, то для будь-якого значення x ліва частина нерівності — додатне число. Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty).$ |
| $x^2 - 49 \leq 0$ | $x^2 \leq 49;$ $x \leq 7.$ Відповідь: $x \in (-\infty; 7].$ | $(x-7)(x+7) \leq 0;$ $-7 \leq x \leq 7.$ Відповідь: $x \in [-7; 7].$ |
| $x^2 - 25 \geq 0$ | $x^2 \geq 25;$ $x \geq 5.$ Відповідь: $x \in [5; +\infty).$ | $(x-5)(x+5) \geq 0;$ $x \leq -5, x \geq 5.$ Відповідь: $x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty).$ |

Розв'язування завдань

Завдання 1

1. Розв'яжіть нерівності:

1) $x^2 \leq 25$;

2) $x^2 \geq 25$.

Розв'язання:

1) $x^2 \leq 25$;

$x^2 - 25 \leq 0$;

$(x - 5)(x + 5) \leq 0$;

$(x - 5)(x + 5) = 0$;

$x_1 = 5, x_2 = -5$.

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ вітки вгору.

Див. рис. 1.

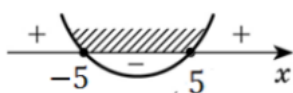


Рис. 1

$[-5; 5]$

Відповідь: 1) $[-5; 5]$; 2) $(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$.

2) $x^2 \geq 25$;

$x^2 - 25 \geq 0$;

$(x - 5)(x + 5) \geq 0$;

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ вітки вгору.

Див. рис. 2.



Рис. 2

$(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$

Завдання 2

2. Розв'яжіть нерівність $x^2 + x(1 - \sqrt{5}) < \sqrt{5}$.

Розв'язання:

$x^2 + x(1 - \sqrt{5}) < \sqrt{5}$;

$x^2 + x(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{5} = 0$,

за теоремою, оберненою до теореми Вієта, маємо:

$x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -1$.

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ вітки вгору.

Див. рис. 3.

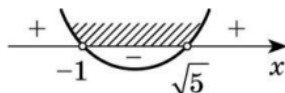


Рис. 3

Відповідь: $(-1; \sqrt{5})$.

Завдання 3

3. Розв'яжіть нерівність $\frac{x^2 - 4x}{8} + \frac{x - 3}{5} \geq \frac{1 - x}{6}$.

Розв'язання:

$\frac{x^2 - 4x}{8} + \frac{x - 3}{5} \geq \frac{1 - x}{6} \quad | \cdot 120$

Завдання 4

4. Розв'яжіть нерівність $(6x - 5)^2 + (3x - 2)(3x + 2) > 36$.

Розв'язання:

$$(6x - 5)^2 + (3x - 2)(3x + 2) > 36,$$

$$36x^2 - 60x + 25 + 9x^2 - 4 - 36 > 0,$$

$$45x^2 - 60x - 15 > 0,$$

$$3x^2 - 4x - 1 > 0,$$

$$3x^2 - 4x - 1 = 0,$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^2,$$

$$x_1 = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \quad x_2 = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}.$$

$a = 3 > 0 \Rightarrow$ вітки вгору.

Див. рис. 5.

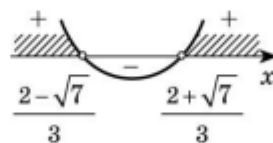


Рис. 5

Відповідь: $(-\infty; \frac{2 - \sqrt{7}}{3}) \cup (\frac{2 + \sqrt{7}}{3}; +\infty)$.

Завдання 5

5. Розв'яжіть нерівність $2(x + 1)(x - 3) > (x + 5)(x - 7)$.

Розв'язання:

$$2(x + 1)(x - 3) > (x + 5)(x - 7),$$

$$2x^2 - 4x - 6 > x^2 - 2x - 35,$$

$$x^2 - 2x + 29 > 0,$$

$$x^2 - 2x + 29 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 4 - 116 = -112 < 0,$$

$a = 1 > 0 \Rightarrow$ вітки вгору.

Див. рис. 6



Рис. 6

Відповідь: $(-\infty; +\infty)$.

Завдання 6

6. Знайдіть цілі розв'язки нерівності $-4x^2 + 13x - 3 \geq 0$.

Розв'язання:

$$-4x^2 + 13x - 3 \geq 0,$$

$$-4x^2 + 13x - 3 = 0,$$

$$4x^2 - 13x + 3 = 0,$$

$$D = 13^2 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 - 48 = 121 = 11^2,$$

$$x_1 = \frac{13 + 11}{8} = 3, \quad x_2 = \frac{13 - 11}{8} = \frac{1}{4}.$$

$a = -4 < 0 \Rightarrow$ вітки вниз.

Див. рис. 7.

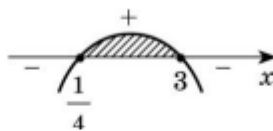


Рис. 7

$$\left[\frac{1}{4}; 3\right].$$

Цілі розв'язки нерівності: 1; 2; 3.

Відповідь: 1; 2; 3.

Поміркуйте

Які помилки при розв'язуванні нерівності можуть призвести до втрати розв'язків?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати нерівності:

Знайдіть цілі розв'язки нерівностей:

$$x^2 - 5 > 0;$$

$$-\frac{1}{4}x^2 + x + 3 > 0.$$

Джерело

[Всеукраїнська школа онлайн](#)