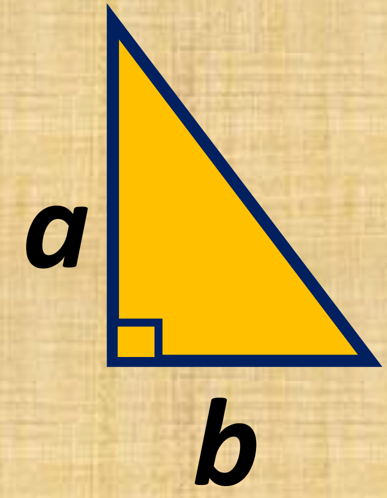
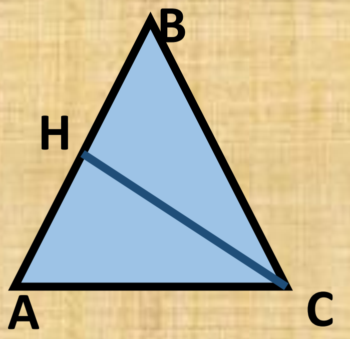
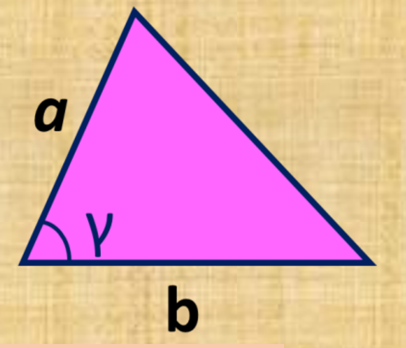
Площа трикутника



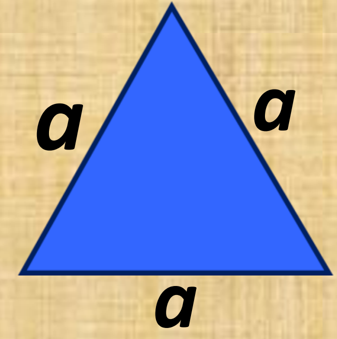
$$S = \frac{1}{2} a\, b$$



$$S_{ABC} = \frac{1}{2} a h_a$$



$$S = \frac{1}{2}\, a\, b\, sin\gamma$$



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

МЕТА УРОКУ:

домогтися засвоєння учнями змісту та ідеї доведення теореми про формулу площі трикутника й наслідків з неї.

Сформувати вміння:

- відтворювати зміст вивчених формул;
- записувати формули відповідно до заданих позначень елементів трикутників;
- застосовувати вивчені формули до розв'язування задач.

Теорема: (про площу трикутника)

Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони на висоту, проведену до цієї сторони.

Дано: трикутник ABC ,
AH –висота ,
BC=a, AH=h_a.

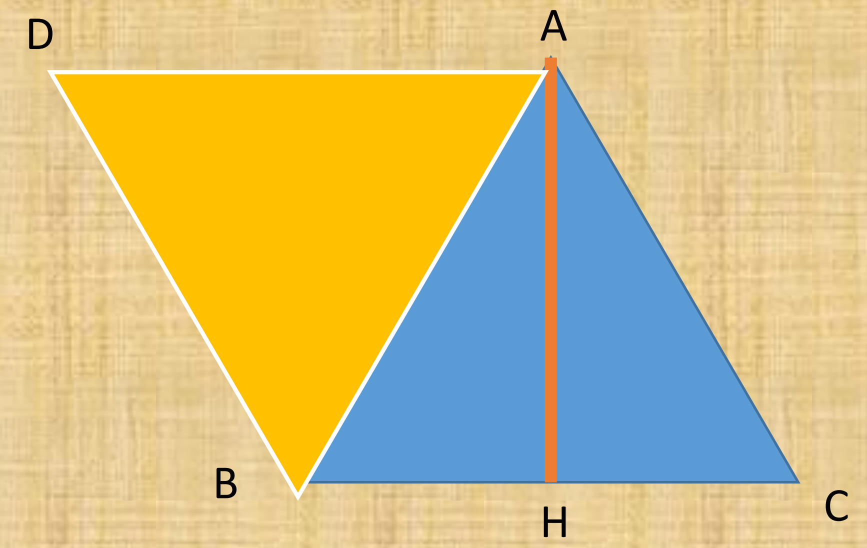
Довести: $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a$

Доведення:

На стороні AB даного трикутника побудуємо рівний йому трикутник BAD. Отримали,ADBC – паралелограм, у якого BC=a, AH= h_a. Тому $S_{ADBC} = ah_a$.

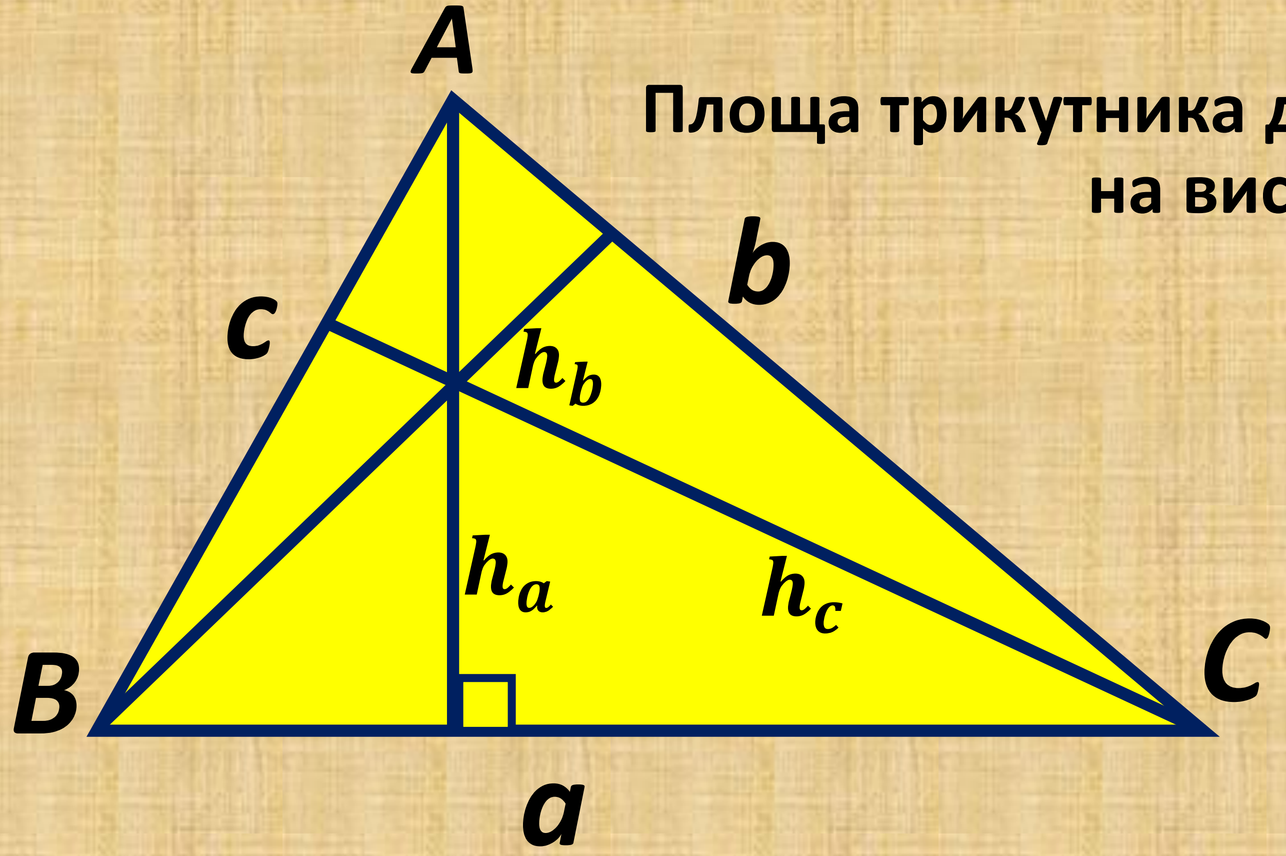
Звідси одержуемо: $S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ADBC} = \frac{1}{2}ah_a$.

Отже, $S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a$.



$$\boldsymbol{S_{ABC} = \frac{1}{2}ah_a}$$

Формула площі трикутника за стороною та висотою



Площа трикутника дорівнює половині добутку сторони на висоту, проведену до неї

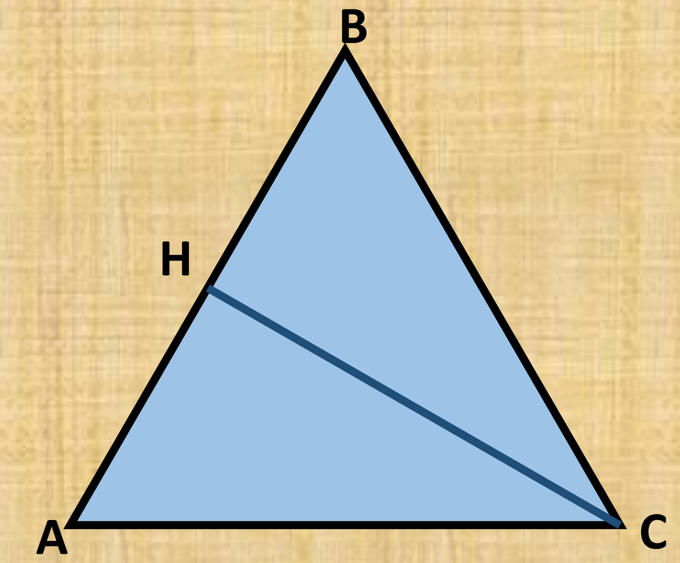
$$S = \frac{1}{2}\, a\, h_a$$

де a – сторона трикутника,
h_a – проведена до неї висота

$$S = \frac{1}{2}\, a\, h_a = \frac{1}{2}\, b\, h_b = \frac{1}{2}\, c\, h_c$$

Вправа 1

У трикутнику ABC, AB=6 см, а висота проведена до цієї сторони CH=4 см. Знайти площу трикутника ABC.



Дано: ABC – трикутник, AB=6см,CH=4см.

Знайти: S_{ABC}

Розв'язання:

AB=a=6 см

CH=h_a=4см

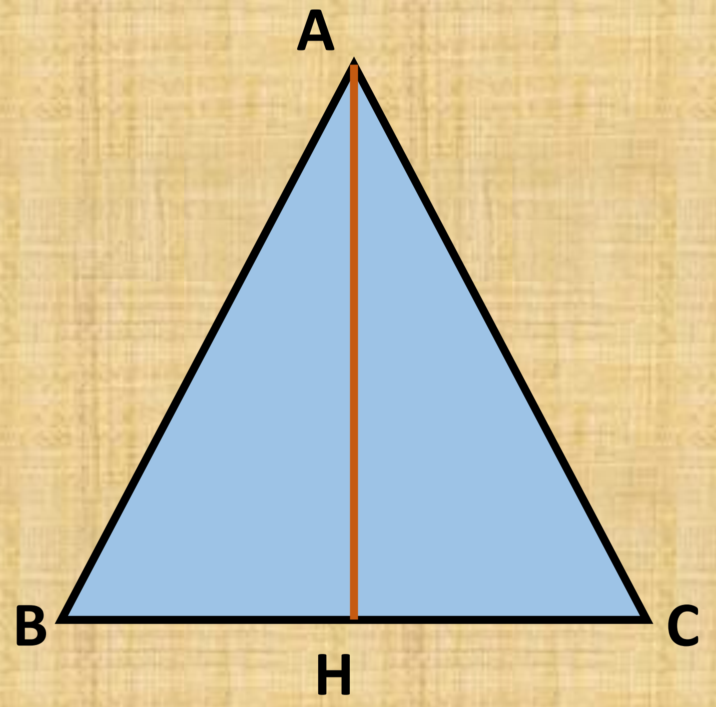
$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ah_a$$

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}6\cdot4=\frac{24}{2}=12\ (\text{см}^2).$$

Відповідь: 12 см^2.

Вправа 2

Площа трикутника дорівнює 30 $см^2$, а одна з його висот – 8см. Знайдіть довжину сторони, до якої проведено цю висоту.



Дано: S=30 $см^2$, h=8см.

Знайти: a

Розв’язання:

Нехай АВС даний трикутник.У якого $S_{ABC} = 30см^2$, АН=h=8см.

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot$ ВС $\cdot$ АН;

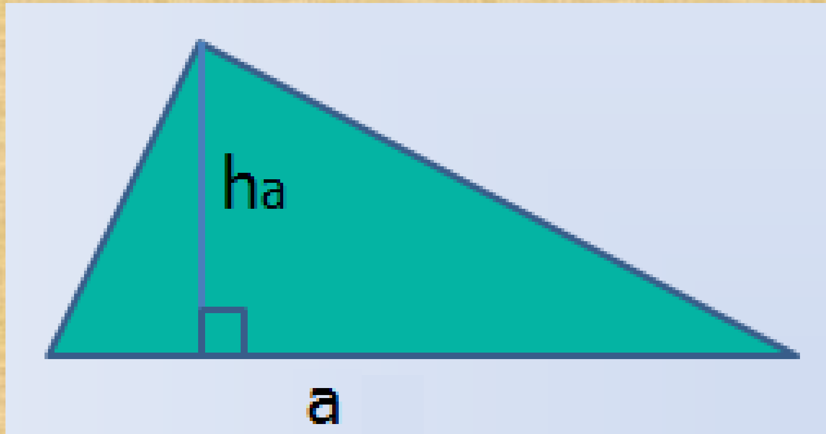
ВС=$\frac{2S_{ABC}}{AH}$;

ВС=$\frac{30\cdot 2}{8} = 7{,}5$(см)

Відповідь: 7,5 см.

Вправа 3

Сторона трикутника вдвічі більша за висоту, яка проведена до цієї сторони. Знайдіть висоту, якщо площа трикутника дорівнює 64 см².



Дано: трикутник з основою ***a***, висотою, проведеною до основи h_a і площею S;

$a = 2h_a$, S = 64 см^2

Знайти: h_a

Розв'язання:

Нехай $h_a = x$ см, тоді $a = 2x$ см. За умовою **S = 64** см^2

За формулою площі трикутника $S = \frac{1}{2}ah_a$ складаємо рівняння:

$\frac{1}{2}x \cdot 2x = 64$

$x^2 = 64$

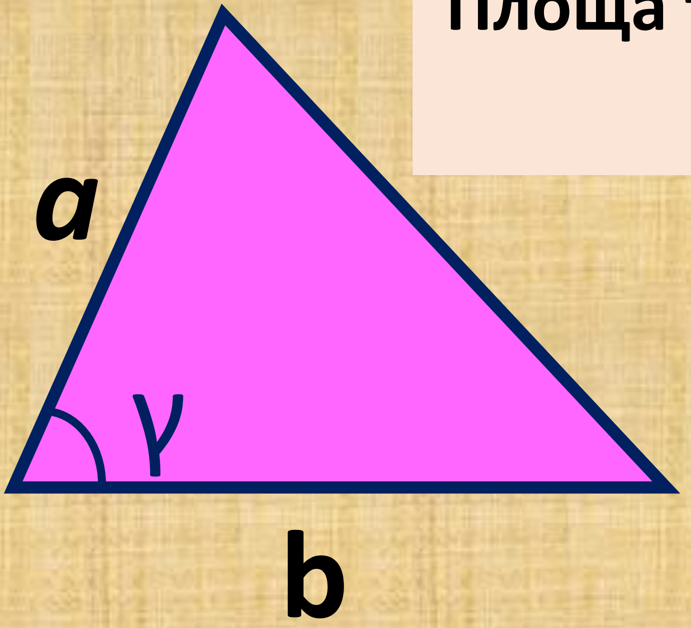
$x_1 = 8$

$x_2 = -8 < 0$ – не задовольняє умову задачі

Отже, $h_a = 8$ см

Відповідь: 8 см

Формула площі трикутника за двома сторонами і кутом між ними



Площа трикутника дорівнює половині добутку двох його сторін на синус кута між ними

$$S = \frac{1}{2}\, a\, b\, \sin\gamma$$

де a і b – сторони трикутника,
γ – кут між ними

Вправа 4

Сторони трикутника дорівнює 8 см і 12 см, а кут між ними становить 30°. Знайдіть площу трикутника.

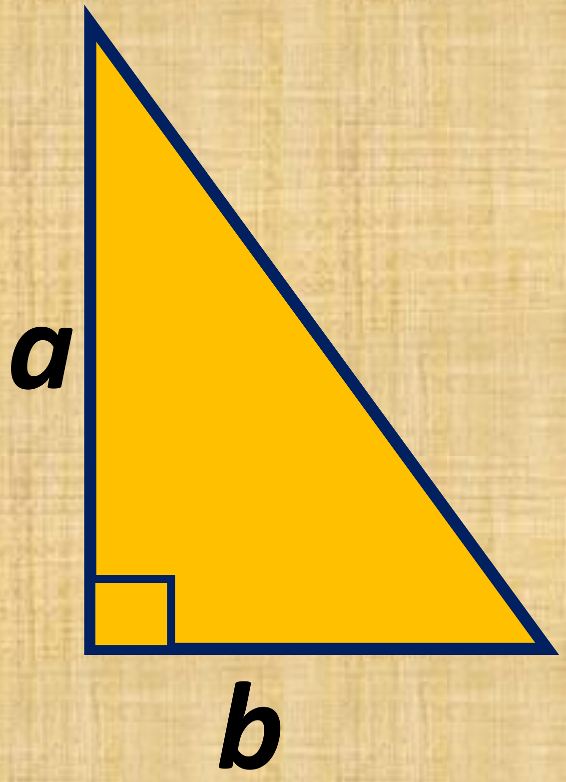
Нехай задано ∆ABC у якого AB=8 см, BC=12 см і ∠B=30°.

$S = \frac{1}{2} ab \sin\angle B$

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \sin\angle B = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \sin 30° = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 24(\text{см}^2)$.

Відповідь: 24см^2.

Формула площі прямокутного трикутника



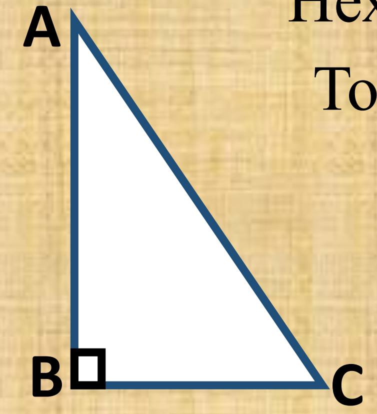
Площа прямокутного трикутника дорівнює половині добутку його катетів

$$\mathbf{S = \frac{1}{2}\, a\, b}$$

де ***a і b*** – катети

Вправа 5

Знайдіть площу прямокутного трикутника катети якого дорівнюють 4 см і 3 см



Нехай ABC – даний трикутник ($\angle B = 90^o$)

Тоді ми можемо скористатися формулою

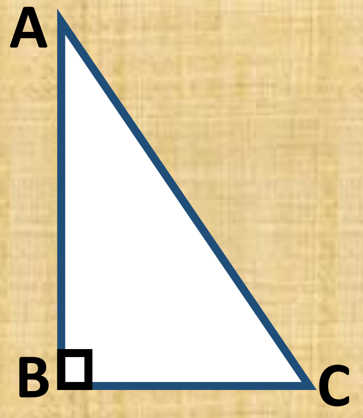
$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = \frac{12}{2} = 6(\text{см}^2).$$

Відповідь: 6 см^2.

Вправа 7

Знайдіть площу прямокутного трикутника, один з катетів якого дорівнює 6 см, а гіпотенуза – 10 см.



Розв'язання:

Нехай задано ΔABC ($\angle B = 90^o$) у якого AB= a =6 см, AC= c = 10 см

За теоремою Піфагора $c^2 = a^2 + b^2$. Звідси знайдемо другий катет:

$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (см).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}ab$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24 \ (\text{см}^2)$$

Відповідь: 24 см^2

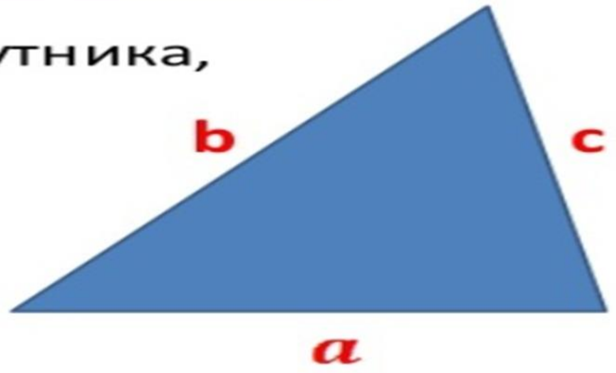
Формула Герона для знаходження площі трикутника

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

де a, b, c – сторони трикутника,

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

S – площа трикутника



Вправа 8

Знайдіть площу трикутника сторони якого дорівнюють 26 см, 28 см і 30см.

Розв'язання:

Нехай задано ∆ABC у якого a =26 см, b= 28 см і с = 30 см.

Знайдемо півпериметр трикутника $\boldsymbol{p} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{26+28+30}{2}$=42(см)

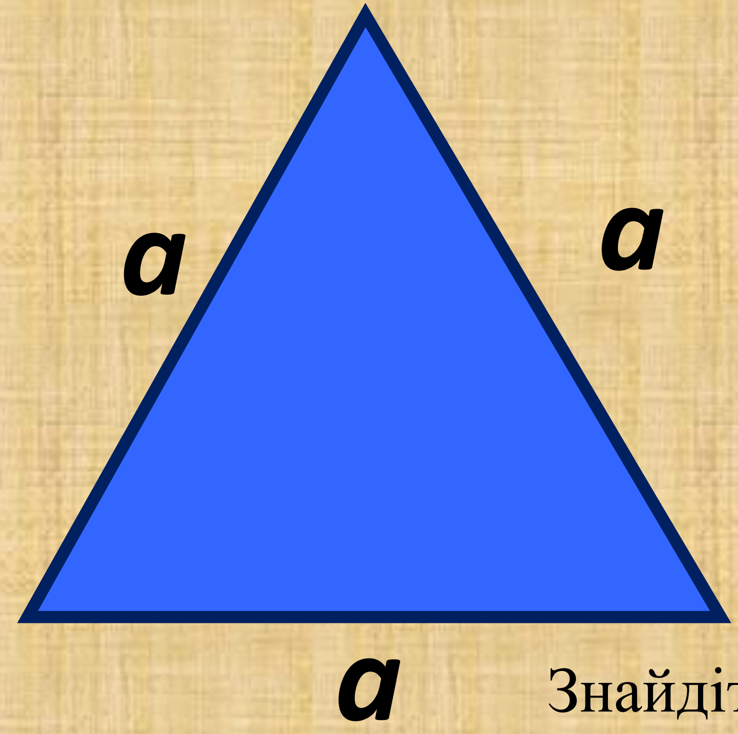
За формулою Герона знайдемо площу

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{42(42-26)(42-28)(42-30)} =$

$= \sqrt{42 \cdot 16 \cdot 14 \cdot 12} = \sqrt{6 \cdot 7 \cdot 16 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6} = 6 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 2 = 336(\text{см}^2)$

Відповідь: **336** см^2

Формула площі рівностороннього трикутника



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

де *a* – сторона трикутника

Вправа 9

Знайдіть площу рівностороннього трикутника зі стороною 6 см.

Нехай задано ∆ABC –рівносторонній, у якого *a* =6 см.

За формулою **S** = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ знайдемо площу.

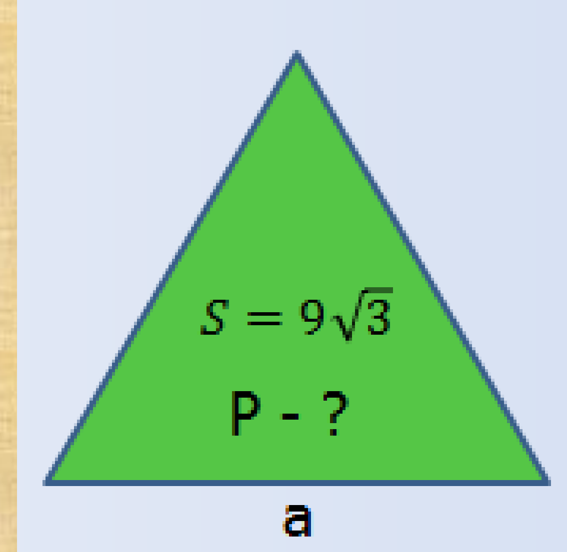
S = $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ (см^2)

Відповідь: $9\sqrt{3}$ см^2

Вправа 10

Площа рівностороннього трикутника дорівнює $9\sqrt{3}$ см². Знайдіть його периметр.

Розв'язання:



$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

Нехай задано ΔABC у якого $\boldsymbol{S} = 9\sqrt{3}$ см²

З формули площі рівностороннього трикутника $\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{a^2\sqrt{3}}}{\mathbf{4}}$ виразимо квадрат сторони і знайдемо сторону.

$$a^2 = \frac{4S}{\sqrt{3}};$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot 9\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 36;$$

$a = \pm 6$; $a = -6 < 0$- не задовольняє умову задачі,

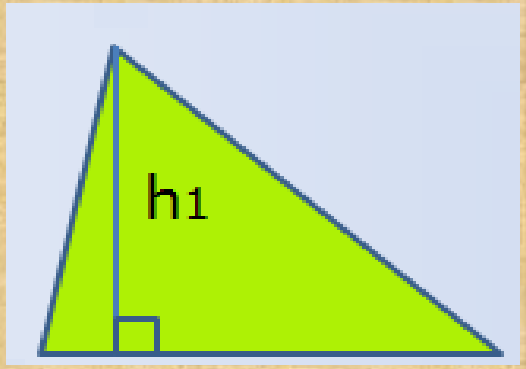
тому a = 6 см;

P = 3a

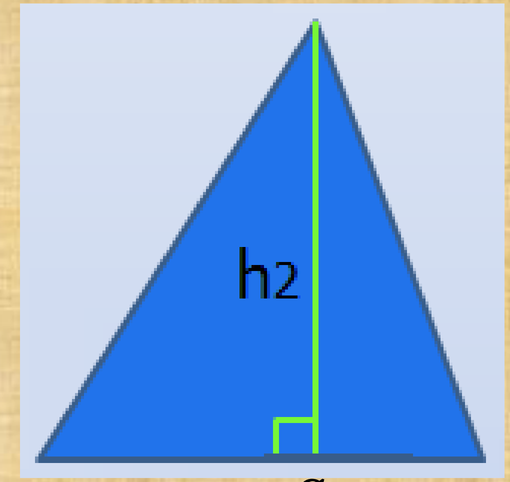
Отже, Р =**3a**= 6·3 = 18 (см).

Відповідь: 18 см

Якщо сторона одного трикутника дорівнює стороні другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як їх висоти, проведені до цих сторін



a



a

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2}ah_1}{\frac{1}{2}ah_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

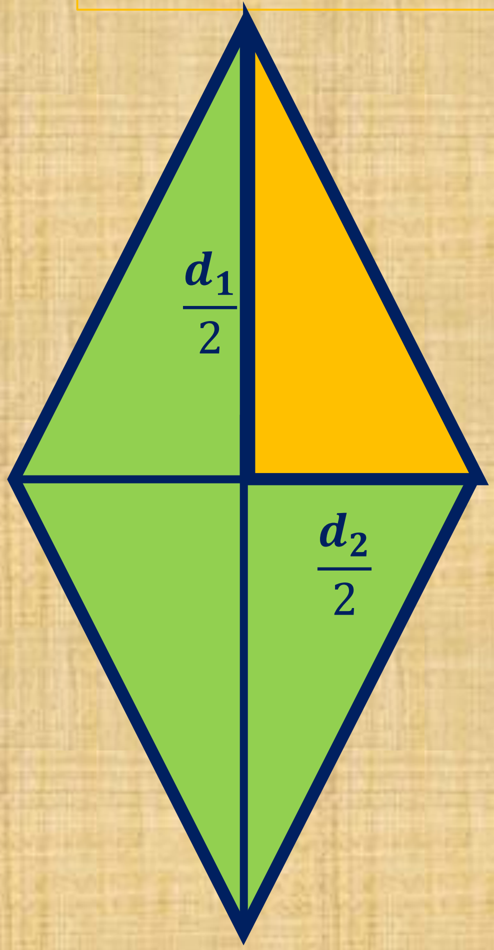
$$S_1 = \frac{1}{2}a \cdot h_1$$

$$S_2 = \frac{1}{2}a \cdot h_2$$

Якщо висота одного трикутника дорівнює висоті другого трикутника, то площі цих трикутників відносяться як їх сторони, до яких проведені ці висоти

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1}{a_2}$$

Площа ромба



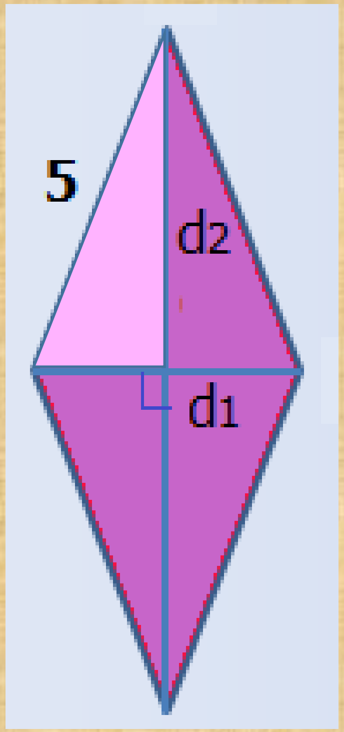
$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

де d_1 і d_2 – діагоналі ромба

Площа ромба дорівнює половині добутку його діагоналей

Вправа 11

Знайдіть площу ромба, у якого довжини діагоналей відносяться як 3 : 4, а сторона дорівнює 5 см.



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Дано: ромб; a = 5 см; $d_1 : d_2 = 3 : 4$

Знайти: S

Розв'язання:

Нехай коефіцієнт пропорційності k = x, тоді d_1= 3x, а d_2= 4x.

Розглянемо прямокутний трикутник.

Один з катетів дорівнює $\frac{d_1}{2} = \frac{3x}{2}$ см, другий - $\frac{d_2}{2} = \frac{4x}{2}$ см,

а гіпотенуза дорівнює 5 см.

$\left(\frac{3x}{2}\right)^2 + \left(\frac{4x}{2}\right)^2 = 5^2$;

$\frac{9x^2}{4} + \frac{16x^2}{4} = 25$;

$25x^2 = 100$;

$x^2 = 4$

$x = \mp 2$.

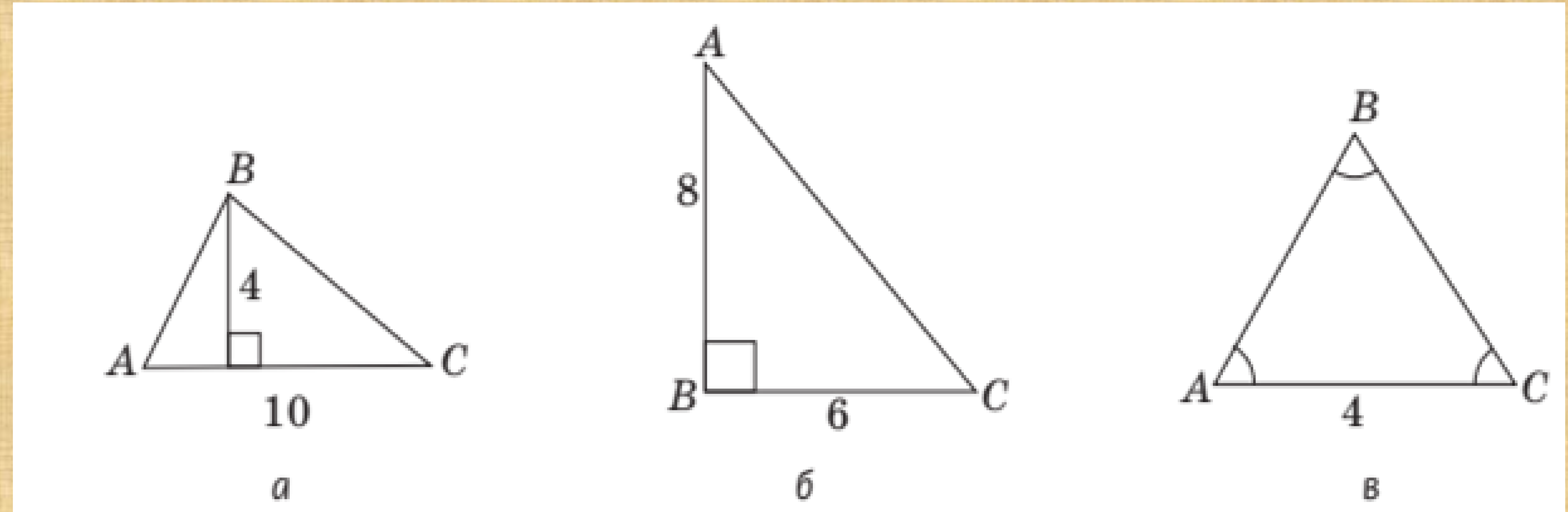
Отже, к = 2, то d_1= 3·2=6см, d_2= 4 ·2=8см.

$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} d_1 d_2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$ (см^2).

Відповідь: 24 см^2

Вправа 12

За даними на рисунку, знайдіть площу трикутника ABC.



а) $S = \frac{1}{2}\,a\,h_a = \frac{1}{2}\,10 \cdot 4 = \frac{40}{2} = 20$ (см^2).

в) $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}$ (см^2)

б) $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}\,6 \cdot 8 = \frac{48}{2} = 24$ (см^2)

Площа трикутника:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ah_a$, (*a* -сторона і h_a-висота проведена до цієї сторони)

$S = \frac{1}{2}\ a\ b\ sin\gamma$, (де *a* і *b* – сторони трикутника, γ – кут між ними)

Площа трикутника за формуло Герона:

$S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, , $p = \frac{a+b+c}{2}$, (*a*, *b* і *c* – сторони трикутника)

Площа прямокутного трикутника:

$S_{ABC} = \frac{1}{2} ab$, (*a* і *b* – катети прямокутного трикутника)

Площа рівностороннього трикутника:

$S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, (*a* – сторона рівностороннього трикутника)

Домашнє завдання

Опрацювати параграф 25

Виконати № 945, 949, 953

945. Площа трикутника дорівнює 20 см^2, а одна з його сторін – 8 см. Знайдіть висоту трикутника, проведену до цієї сторони.

949. Один з катетів прямокутного трикутника дорівнює 7 см, а гіпотенуза – 25 см. Знайдіть площу трикутника.

953. Знайдіть площу ромба, діагоналі якого дорівнюють 12 см і 6 см.