2811.2023 9 клас

Тема. Скалярний добуток векторів

Мета: ознайомитися з поняттями кута між векторами, скалярного добутку як способу множення векторів та властивостями цього добутку, вчитися знаходити скалярний добуток векторів

Пригадайте

- Що таке вектор, які він має характеристики?
- Які вектори називають колінеарними?
- Які дії з векторами ви вмієте виконувати?

Ознайомтеся з інформацією

Скалярний добуток векторів $\overline{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\overline{b}\,(b_1;\,b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2}$$

Для будь-яких векторів $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$ — переставна властивість;
2) $(k\overline{a})\cdot\overline{b} = k(\overline{a}\cdot\overline{b})$ — сполучна властивість;
3) $(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c} = \overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$ — розподільна властивість.

Косинус кута між ненульовими векторами $\overline{a}\,(a_1;\,a_2)$ і $\overline{b}\,(b_1;\,b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\boxed{\cos\angle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}}$$

Скалярний добуток векторів доцільно використовувати в таких випадках:

1. Для доведення перпендикулярності прямих (променів, відрізків) — у цьому разі достатньо показати, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю.

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 90^\circ = 0$$

2. Для знаходження величини кута — у цьому випадку вектори, якими задано шуканий або даний кут, розкладають за двома неколінеарними векторами, довжини або відношення довжин яких відомі, й обчислюють косинус шуканого кута.

$$\cos\angle(\overline{a},\ \overline{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Розв'язування задач

Задача 1

Вектори $\overline{a} + \overline{b}$ й $\overline{a} - \overline{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

Розв'язання

Оскільки $(\overline{a} + \overline{b}) \perp (\overline{a} - \overline{b})$, то $(\overline{a} + \overline{b}) \cdot (\overline{a} - \overline{b}) = 0$.

$\overline{a}^2 - \overline{b}^2 = 0; \overline{a}^2 = \overline{b}^2$

$\overline{a}^2 = |\overline{a}||\overline{a}|COS\,0° = |\overline{a}|^2$

$\overline{b}^2 = |\overline{b}||\overline{b}|COS\,0° = |\overline{b}|^2$

$|\overline{a}^2| = |\overline{b}^2|$

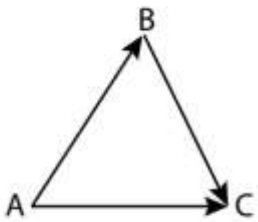
$|\overline{a}| = |\overline{b}|$

Відповідь: $|\overline{a}| = |\overline{b}|$.

Задача 2

Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами $A\,(1; 6)$, $B\,(-2; 3)$ і $C\,(2; -1)$.

Розв'язання



$$cos\,\angle A = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|}$$

$$\overline{AB} = (\overline{-2-1; 3-6}) = (\overline{-3; -3})$$

$$\overline{AC} = (\overline{2-1; -1-6}) = (\overline{1; -7})$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-7) = -3 + 21 = 18$$

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$cos\,\angle A = \frac{18}{3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{18}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$$

$$cos\,\angle B = \frac{\overline{BA}\ \cdot\ \overline{BC}}{|\overline{BA}|\ \cdot\ |\overline{BC}|}$$

$$\overline{BA} = -\,\overline{AB} = \overline{(3;3)}$$

$$\overline{BC} = \overline{(2-(-2);-1-3)} = \overline{(4;-4)}$$

$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = 3\cdot 4 + 3\cdot(-4) = 0$$

$$cos\,\angle B = \frac{0}{|\overline{BA}|\cdot|\overline{BC}|} = 0$$

$$cos\,\angle C = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{|\overline{CA}|\cdot|\overline{CB}|}$$

$$\overline{CA} = -\,\overline{AC} = \overline{(-1;7)}$$

$$\overline{CB} = -\,\overline{BC} = \overline{(-4;4)}$$

$$\overline{CA}\cdot\overline{CB} = -1\cdot(-4) + 7\cdot 4 = 4 + 28 = 32$$

$$|\overline{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$cos\,\angle C = \frac{32}{5\sqrt{2}\ \cdot\ 4\sqrt{2}} = \frac{16}{5\ \cdot\ 4} = \frac{4}{5}$$

Відповідь: $cos\,\angle A = \frac{3}{5}; cos\,\angle B = 0; cos\,\angle C = \frac{4}{5}.$

Задача 3

Відомо, що $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $\angle(\overline{a\,,\,b}) = 120°$. Знайдіть $|3\overline{a} - 2\overline{b}|$.

Розв'язання

Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $|3\overline{a} - 2\overline{b}|^2 = (3\overline{a} - 2\overline{b})^2$. Звідси

$$|3\overline{a} - 2\overline{b}|^2 = \sqrt{(3\overline{a} - 2\overline{b})^2} = \sqrt{9\overline{a}^2 - 12\overline{a}\cdot\overline{b} + 4\overline{b}^2} =$$

$$= \sqrt{9|\overline{a}|^2 - 12|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|cos\angle(\overline{a\,,\,b}) + 4|\overline{b}|^2} = \sqrt{9+18+36} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7}$$

Відповідь: $|3\overline{a} - 2\overline{b}| = 3\sqrt{7}.$

Пригадайте

- Як можна помножити два вектори?
- Як визначити кут між двома векторами?

Домашнє завдання

- **Опрацювати конспект і §10 підручника**
- **Розв'язати (письмово): №412,414, 419**

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- Всеукраїнська школа онлайн