16.01.2024 9 клас

Тема. Основні типи задач на розв'язування трикутників

Мета: вчитися знаходити невідомі сторони і кути трикутника за відомими сторонами і кутами

Повторюємо

- Сформулюйте теорему Піфагора.
- Сформулюйте теорему косинусів.
- Сформулюйте теорему синусів.
- Чому дорівнює сума кутів трикутника?
- Як знайти кути трикутника, знаючи довжини всіх його сторін?

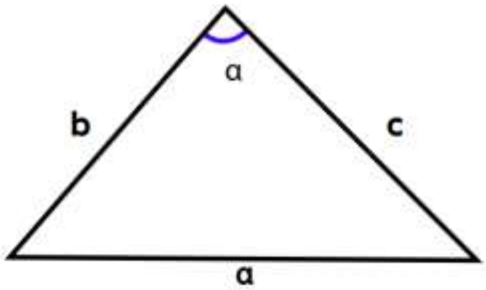
Ознайомтеся з інформацією та зробіть конспект у зошиті

Розв'язати трикутник – означає знайти невідомі сторони і кути трикутника за відомими сторонами і кутами.

Теореми, які використовують при розв'язуванні трикутників.

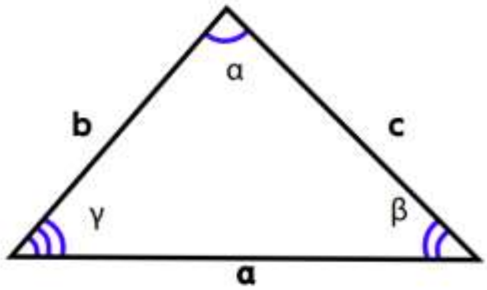
Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot cos \propto$$



Теорема синусів

$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{a}{sin\gamma}$$



При розв'язуванні задач використовуються такі позначення:

a, b і c – сторони трикутника, α, β і γ – кути протилежні відповідно сторонам a, b і c.

Розглянемо чотири види задач на розв'язування трикутників.

1. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними

Задача 1. Дано сторони трикутника a і b та кут C між ними. Знайти сторону c та кути A і B.

Розв'язання у загальному вигляді	**Приклад**
Д а н о: a, b, $\angle C$.	Д а н о: $a = 4$, $b = 7$, $\angle C = 40°$.
З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$.	З н а й т и: c, $\angle A$, $\angle B$.
Р о з в' я з а н н я.	Р о з в' я з а н н я.
1. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C}$.	1. $c = \sqrt{4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7\cos 40°} \approx 4,70$.
2. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.	2. $\cos A \approx \dfrac{7^2 + 4,70^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 4,7} \approx 0,8372$,
Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць.	$\angle A \approx 33°09'$.
3. $\angle B = 180° - (\angle A + \angle C)$.	3. $\angle B \approx 180° - (33°09' + 40°) = 106°51'$.

2. Розв'язування трикутників за стороною і двома кутами

Задача 2. Дано сторону трикутника a і кути B і C. Знайти сторони трикутника b і c і кут A.

Розв'язання у загальному вигляді	**Приклад**
Д а н о: a, $\angle B$, $\angle C$.	Д а н о: $a = 8$, $\angle B = 40°$, $\angle C = 80°$.
З н а й т и: $\angle A$, b, c.	З н а й т и: $\angle A$, b, c.
Р о з в' я з а н н я.	Р о з в' я з а н н я.
1. $\angle A = 180° - (\angle B + \angle C)$.	1. $\angle A = 180° - (40° + 80°) = 60°$.
2. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$; $b = \dfrac{a\sin B}{\sin A}$.	2. $b = \dfrac{8\sin 40°}{\sin 60°} \approx 5,94$.
3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$; $c = \dfrac{a\sin C}{\sin A}$.	3. $c = \dfrac{8\sin 80°}{\sin 60°} \approx 9,10$.

3. Розв'язування трикутників за трьома сторонами

Задача 3. Дано три сторони a, b і c трикутника ($|b - c| < a < b + c$). Знайти три кути A, B і C трикутника.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Дано: a, b, c. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. 1. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Далі знаходимо кут A за допомогою калькулятора або таблиць. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.	Дано: $a = 7$, $b = 8$, $c = 9$. Знайти: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. 1. $\cos A = \dfrac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \dfrac{2}{3}$; $\angle A \approx 48°11'$. 2. $\cos B = \dfrac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \dfrac{11}{21}$; $\angle B \approx 58°25'$. 3. $\angle C \approx 180° - (48°11' + 58°25') = 73°24'$.

4. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

Задача 4. Дано сторони трикутника a, b і кут A. Знайти сторону c трикутника та кути B і C.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
Дано: a, b, $\angle A$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. *I спосіб.* 1. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. З цього рівняння знаходимо c. Задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку. 2. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$. Далі знаходимо кут B за допомогою калькулятора або таблиць. 3. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$.	Дано: $a = 10$, $b = 8$, $\angle A = 70°$. Знайти: c, $\angle B$, $\angle C$. Розв'язання. *I спосіб.* 1. $10^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos 70°$. $c^2 - 5{,}47c - 36 = 0$; $c_1 \approx 9{,}33$; $c_2 \approx -3{,}86$ не задовольняє змісту задачі. Отже, $c \approx 9{,}33$. 2. $\cos B \approx \dfrac{10^2 + 9{,}33^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9{,}33} \approx 0{,}659$; $\angle B \approx 48°45'$. 3. $\angle C \approx 180° - (70° + 48°45') = 61°15'$.

II спосіб. 1. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$; $\sin B = \dfrac{b \sin A}{a}$. Може існувати два, один або не існувати жодного кута, що задовольняли б останню рівність та нерівність $\angle A + \angle B < 180°$. 2. $\angle C = 180° - (\angle A + \angle B)$. 3. $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{c}{\sin C}$; $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$.	*II спосіб.* 1. $\sin B = \dfrac{8 \sin 70°}{10} \approx 0{,}7518$; $\angle B \approx 48°45'$ або $\angle B \approx 180° - 48°45' = 131°15'$. Оскільки $\angle A + \angle B = 70° + 131°15' >$ $> 180°$, то $\angle B = 131°15'$ не є розв'язком задачі. 2. $\angle C \approx 180° - (70° + 48°45') =$ $= 61°15'$. 3. $c \approx \dfrac{10 \sin 61°15'}{\sin 70°} \approx 9{,}33$.

Ця задача, на відміну від трьох попередніх, які завжди мають єдиний розв'язок, може мати один, два або не мати жодного розв'язку.

Поміркуйте

- Що значить розв'язати трикутник?
- Які співвідношення між сторонами і кутами трикутника використовують для розв'язування трикутників?

Домашнє завдання

- **Опрацювати параграф 13**
- **Виконати №582(1), 584(1), 586 (1)**

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- [Всеукраїнська школа онлайн]