

## Тема. Основні типи задач на розв'язування трикутників

Мета: вчитися знаходити невідомі сторони і кути трикутника за відомими сторонами і кутами

### Повторюємо

- Сформулюйте теорему Піфагора.
- Сформулюйте теорему косинусів.
- Сформулюйте теорему синусів.
- Чому дорівнює сума кутів трикутника?
- Як знайти кути трикутника, знаючи довжини всіх його сторін?

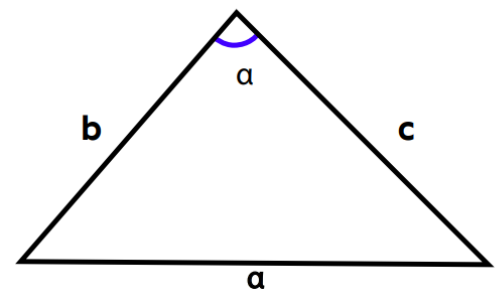
### Ознайомтеся з інформацією та зробіть конспект у зошиті

**Розв'язати трикутник** – означає знайти невідомі сторони і кути трикутника за відомими сторонами і кутами.

Теореми, які використовують при розв'язуванні трикутників.

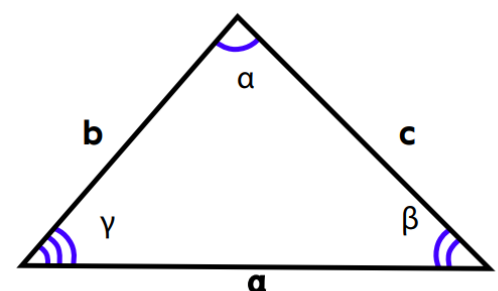
Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



При розв'язуванні задач використовуються такі позначення:

$a, b$  і  $c$  – сторони трикутника,  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  – кути протилежні відповідно сторонам  $a, b$  і  $c$ .

Розглянемо чотири види задач на розв'язування трикутників.

## **1. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом між ними**

**Задача 1.** Дано сторони трикутника  $a$  і  $b$  та кут  $C$  між ними. Знайти сторону  $c$  та кути  $A$  і  $B$ .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Д а н о: <math>a, b, \angle C</math>.  З н а й т и: <math>c, \angle A, \angle B</math>.  Р о з в' я з а н н я.</p> <p>1. <math>c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}</math>.</p> <p>2. <math>\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}</math>.</p> <p>Далі знаходимо кут <math>A</math> за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>3. <math>\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C)</math>.</p>	<p>Д а н о: <math>a = 4, b = 7, \angle C = 40^\circ</math>.  З н а й т и: <math>c, \angle A, \angle B</math>.  Р о з в' я з а н н я.</p> <p>1. <math>c = \sqrt{4^2 + 7^2 - 2 \cdot 4 \cdot 7 \cos 40^\circ} \approx 4,70</math>.</p> <p>2. <math>\cos A \approx \frac{7^2 + 4,70^2 - 4^2}{2 \cdot 7 \cdot 4,7} \approx 0,8372</math>,</p> <p><math>\angle A \approx 33^\circ 09'</math>.</p> <p>3. <math>\angle B \approx 180^\circ - (33^\circ 09' + 40^\circ) = 106^\circ 51'</math>.</p>

## **2. Розв'язування трикутників за стороною і двома кутами**

**Задача 2.** Дано сторону трикутника  $a$  і кути  $B$  і  $C$ . Знайти сторони трикутника  $b$  і  $c$  і кут  $A$ .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Д а н о: <math>a, \angle B, \angle C</math>.  З н а й т и: <math>\angle A, b, c</math>.  Р о з в' я з а н н я.</p> <p>1. <math>\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C)</math>.</p> <p>2. <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}; b = \frac{a \sin B}{\sin A}</math>.</p> <p>3. <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; c = \frac{a \sin C}{\sin A}</math>.</p>	<p>Д а н о: <math>a = 8, \angle B = 40^\circ, \angle C = 80^\circ</math>.  З н а й т и: <math>\angle A, b, c</math>.  Р о з в' я з а н н я.</p> <p>1. <math>\angle A = 180^\circ - (40^\circ + 80^\circ) = 60^\circ</math>.</p> <p>2. <math>b = \frac{8 \sin 40^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 5,94</math>.</p> <p>3. <math>c = \frac{8 \sin 80^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 9,10</math>.</p>

### 3. Розв'язування трикутників за трьома сторонами

**Задача 3.** Дано три сторони  $a$ ,  $b$  і  $c$  трикутника ( $|b - c| < a < b + c$ ). Знайти три кути  $A$ ,  $B$  і  $C$  трикутника.

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Д а н о: <math>a, b, c</math>. З н а й т и: <math>\angle A, \angle B, \angle C</math>. Р о з в' я з а н н я.</p> <p>1. <math>\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}</math>.</p> <p>Далі знаходимо кут <math>A</math> за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>2. <math>\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}</math>. Далі знаходимо кут <math>B</math> за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>3. <math>\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)</math>.</p>	<p>Д а н о: <math>a = 7, b = 8, c = 9</math>. З н а й т и: <math>\angle A, \angle B, \angle C</math>. Р о з в' я з а н н я.</p> <p>1. <math>\cos A = \frac{8^2 + 9^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 9} = \frac{2}{3}</math>; <math>\angle A \approx 48^\circ 11'</math>.</p> <p>2. <math>\cos B = \frac{7^2 + 9^2 - 8^2}{2 \cdot 7 \cdot 9} = \frac{11}{21}</math>; <math>\angle B \approx 58^\circ 25'</math>.</p> <p>3. <math>\angle C \approx 180^\circ - (48^\circ 11' + 58^\circ 25') = 73^\circ 24'</math>.</p>

### 4. Розв'язування трикутників за двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них

**Задача 4.** Дано сторони трикутника  $a, b$  і кут  $A$ . Знайти сторону  $c$  трикутника та кути  $B$  і  $C$ .

Розв'язання у загальному вигляді	Приклад
<p>Д а н о: <math>a, b, \angle A</math>. З н а й т и: <math>c, \angle B, \angle C</math>. Р о з в' я з а н н я. І сп о с і б.</p> <p>1. <math>a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A</math>. З цього рівняння знаходимо <math>c</math>. Задача може мати два, один або не мати жодного розв'язку.</p> <p>2. <math>\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}</math>. Далі знаходимо кут <math>B</math> за допомогою калькулятора або таблиць.</p> <p>3. <math>\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B)</math>.</p>	<p>Д а н о: <math>a = 10, b = 8, \angle A = 70^\circ</math>. З н а й т и: <math>c, \angle B, \angle C</math>. Р о з в' я з а н н я. І сп о с і б.</p> <p>1. <math>10^2 = 8^2 + c^2 - 2 \cdot 8 \cdot c \cdot \cos 70^\circ</math>. <math>c^2 - 5,47c - 36 = 0</math>; <math>c_1 \approx 9,33</math>; <math>c_2 \approx -3,86</math> не задовольняє змісту задачі. Отже, <math>c \approx 9,33</math>.</p> <p>2. <math>\cos B \approx \frac{10^2 + 9,33^2 - 8^2}{2 \cdot 10 \cdot 9,33} \approx 0,659</math>; <math>\angle B \approx 48^\circ 45'</math>.</p> <p>3. <math>\angle C \approx 180^\circ - (70^\circ + 48^\circ 45') = 61^\circ 15'</math>.</p>

<p><i>II спосіб.</i></p> <p>1. <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B};</math>  <math>\sin B = \frac{b \sin A}{a}.</math></p> <p>Може існувати два, один або не існувати жодного кута, що задовольняли б останню рівність та нерівність <math>\angle A + \angle B &lt; 180^\circ</math>.</p> <p>2. <math>\angle C = 180^\circ - (\angle A + \angle B).</math></p> <p>3. <math>\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}; c = \frac{a \sin C}{\sin A}.</math></p>	<p><i>II спосіб.</i></p> <p>1. <math>\sin B = \frac{8 \sin 70^\circ}{10} \approx 0,7518;</math>  <math>\angle B \approx 48^\circ 45'</math> або  <math>\angle B \approx 180^\circ - 48^\circ 45' = 131^\circ 15'.</math></p> <p>Оскільки <math>\angle A + \angle B = 70^\circ + 131^\circ 15' &gt; 180^\circ</math>, то <math>\angle B = 131^\circ 15'</math> не є розв'язком задачі.</p> <p>2. <math>\angle C \approx 180^\circ - (70^\circ + 48^\circ 45') = 61^\circ 15'.</math></p> <p>3. <math>c \approx \frac{10 \sin 61^\circ 15'}{\sin 70^\circ} \approx 9,33.</math></p>
--	---

Ця задача, на відміну від трьох попередніх, які завжди мають єдиний розв'язок, може мати один, два або не мати жодного розв'язку.

### Поміркуйте

- Що значить розв'язати трикутник?
- Які співвідношення між сторонами і кутами трикутника використовують для розв'язування трикутників?

### Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати задачу:

Розв'яжіть трикутник за стороною  $a = 10$  см і двома кутами  $\beta = 26^\circ$ ,  $\gamma = 62^\circ$ .

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

[nataliartemiuk.55@gmail.com](mailto:nataliartemiuk.55@gmail.com)

### Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- [Всеукраїнська школа онлайн](#)