21.11.2023 9 клас

Тема. Множення вектора на число

Мета: ознайомитися зі способами множення вектора на число, вчитися обчислювати і знаходити графічно добуток вектора на число

Пригадайте

- Що таке вектор?
- Які вектори називають колінеарними?
- Що називають довжиною вектора?
- Який вектор буде протилежно напрямленим до даного?

Ознайомтеся з інформацією

Нехай дано ненульовий вектор $\overline{a}$. На рисунку 1 зображено вектор $\overline{AB}$, рівний вектору $\overline{a} + \overline{a}$, і вектор $\overline{CD}$, рівний вектору $(-\overline{a}) + (-\overline{a}) + (-\overline{a})$. Очевидно, що

$$|\overline{AB}| = 2|\overline{a}| \text{ і } \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{a},$$

$$|\overline{CD}| = 3|\overline{a}| \text{ і } \overline{CD} \uparrow\downarrow \overline{a}.$$

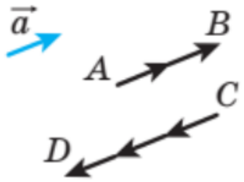

Рис. 1

Вектор $\overline{AB}$ позначають $2\overline{a}$ і вважають, що його отримано в результаті множення вектора $\overline{a}$ на число 2. Аналогічно вважають, що вектор $\overline{CD}$ отримано в результаті множення вектора $\overline{a}$ на число -3, і записують: $\overline{CD} = -3\overline{a}$.

Добутком вектора $\overline{a}(a_1; a_2)$ на число k (або добутком числа k на вектор $\overline{a}$) називають вектор $k\overline{a} = k(a_1; a_2) = (ka_1; ka_2)$.

Сформулюймо **властивості множення вектора на число**. Для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ та чисел k, m:

1) $k\overline{a} = \overline{a}k$;
2) $(km)\overline{a} = k(m\overline{a})$;
3) $k\overline{0} = \overline{0}$;
4) $0\overline{a} = \overline{0}$;
5) $(k+m)\overline{a} = k\overline{a} + m\overline{a}$;
6) $k(\overline{a} + \overline{b}) = k\overline{a} + k\overline{b}$.

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, різницю векторів і добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази.Наприклад,

$2(\overline{a} - 3\overline{b}) + 3(\overline{a} + \overline{b}) = 2\overline{a} - 6\overline{b} + 3\overline{a} + 3\overline{b} = 5\overline{a} - 3\overline{b}$.

Довжина вектора $k\overline{a}$ дорівнює $|k||\overline{a}|$.

Якщо $\overline{a} \neq 0$, то вектор $k\overline{a}$ **співнапрямлений** із вектором $\overline{a}$ за умови $k > 0$ і **протилежно напрямлений** із вектором $\overline{a}$, за умови $k < 0$.

Якщо $\overline{a} = \overline{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\overline{a} = \overline{0}$.

На рисунку 2 зображено вектори $\overline{a}, -2\overline{a}, \frac{2}{3}\overline{a}, \sqrt{3}\,\overline{a}$.

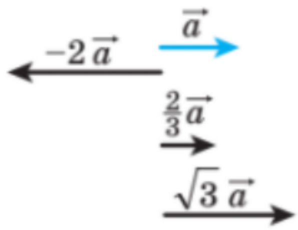

Рис. 2. Приклади зміни довжини вектора внаслідок множення на деяке число k

З означення добутку вектора також випливає, що:

$$1 \cdot \overline{a} = \overline{a};$$
$$-1 \cdot \overline{a} = -\overline{a}.$$

Також з означення випливає, що **коли** $\overline{b} = k\overline{a}$ **, то вектори** $\overline{a}$ **і** $\overline{b}$ **колінеарні**.

А якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, то чи можна подати вектор $\overline{b}$ як добуток $k\overline{a}$? Відповідь дає така **теорема**. Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні й $\overline{a} \neq 0$, то існує таке число k, що $\overline{b} = k\overline{a}$.

Наслідок 1

Вектори $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(kb_1; kb_2)$ колінеарні.

Наслідок 2

Якщо вектори $\overline{a}(a_1; a_2)$ і $\overline{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\overline{a} \neq 0$, то існує таке число k, що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

Перегляньте відео за посиланням:

https://youtu.be/zc9_fS9J2Ek

Розв'язування задач

Задача 1

Знайдіть модулі векторів $3\overline{m}$ та $-\frac{1}{2}\overline{m}$, якщо $|\overline{m}| = 4$.

Розв’язання

$$|3\overline{m}| = 3 \cdot |\overline{m}| = 3 \cdot 4 = 12$$
$$\left|-\frac{1}{2}\overline{m}\right| = \frac{1}{2}|\overline{m}| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Відповідь: $|3\overline{m}| = 12$, $|-\frac{1}{2}\overline{m}| = 2.$

Задача 2

Визначте, співнапрямленими чи протилежно напрямленими є ненульові вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{b} = 2\overline{a}$;
2) $\overline{a} = -\frac{1}{3}\overline{b}$;
3) $\overline{b} = \sqrt{2}\,\overline{a}$.

Знайдіть відношення $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$.

Розв'язання

1) $\overline{b} = 2\overline{a} \Rightarrow \overline{b}\uparrow\uparrow\overline{a}$, $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{|\overline{a}|}{|2\overline{a}|} = \frac{|\overline{a}|}{2|\overline{a}|} = \frac{1}{2}$

2) $\overline{a} = -\frac{1}{3}\overline{b} \Rightarrow \overline{b}\uparrow\downarrow\overline{a}$, $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{|-\frac{1}{3}\overline{b}|}{|\overline{b}|} = \frac{\frac{1}{3}|\overline{b}|}{|\overline{b}|} = \frac{1}{3}$

3) $\overline{b} = \sqrt{2}\,\overline{a} \Rightarrow \overline{b}\uparrow\uparrow\overline{a}$, $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{|\overline{a}|}{|\sqrt{2}\,\overline{a}|} = \frac{|\overline{a}|}{\sqrt{2}|\overline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Відповідь: 1) $\overline{b}\uparrow\uparrow\overline{a}$, $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{1}{2}$; 2) $\overline{b}\uparrow\downarrow\overline{a}$, $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{1}{3}$; 3) $\overline{b}\uparrow\uparrow\overline{a}$, $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 3

Дано вектор $\overline{a}(-4; 2)$. Знайдіть координати векторів $3\overline{a}$, $-\frac{1}{2}\overline{a}$, $\frac{3}{2}\overline{a}$.

Розв'язання

$$3\overline{a} = \overline{(3\cdot(-4); 3\cdot 2)} = \overline{(-12; 6)}$$

$$-\frac{1}{2}\overline{a} = \overline{(-\frac{1}{2}\cdot(-4); -\frac{1}{2}\cdot 2)} = \overline{(2; -1)}$$

$$\frac{3}{2}\overline{a} = \overline{(\frac{3}{2}\cdot(-4); \frac{3}{2}\cdot 2)} = \overline{(-6; 3)}$$

Відповідь: $3\overline{a} = \overline{(-12; 6)}$; $-\frac{1}{2}\overline{a} = \overline{(2; -1)}$; $\frac{3}{2}\overline{a} = \overline{(-6; 3)}$.

Пригадайте

- Як можна помножити вектор на число графічно?
- Як можна помножити вектор на число, знаючи його координати?
- Сформулюйте умову колінеарності векторів.

Домашнє завдання

- **Опрацювати конспект і §9 підручника**
- **Розв'язати (письмово): №364, №367, 369, 380**

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- Всеукраїнська школа онлайн