




Тема. Теорема косинусів

Мета: вчитися розв'язувати задачі на застосування теореми косинусів та її наслідків

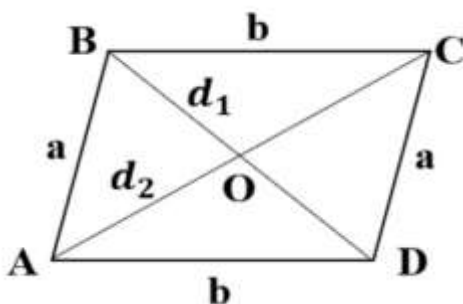
Повторюємо

- Сформулюйте теорему косинусів.
- Який знак має косинус гострого, а який – тупого кута?
- Як знайти косинус кута градусною мірою від 90° до 180° ?
- Як знайти кути трикутника, знаючи довжини всіх його сторін?

Ознайомтеся з інформацією

Нехай a , b і c – довжини сторін трикутника, причому c – довжина його найбільшої сторони.	
Якщо $c^2 < a^2 + b^2$ \rightarrow гострокутний трикутник	
Якщо $c^2 = a^2 + b^2$ \rightarrow прямокутний трикутник	
Якщо $c^2 > a^2 + b^2$ \rightarrow тупокутний трикутник	

Сума квадратів діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів його сторін.



$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$$

Доведення

На рисунку 1 зображено паралелограм ABCD.

Нехай $AB = CD = a$, $BC = AD = b$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle ADC = 180^\circ - \alpha$,
 $BD = d_1$, $AC = d_2$.

Із трикутника ABD за теоремою косинусів отримаємо:

$$BD^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha. \quad (1)$$

Із трикутника ACD за теоремою косинусів отримаємо:

$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos (180^\circ - \alpha).$$

$$\text{Оскільки } \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$AC^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \alpha \quad (2)$$

Додавши рівності (1) і (2), отримаємо:


$$BD^2 + AC^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

$$d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Доведено.

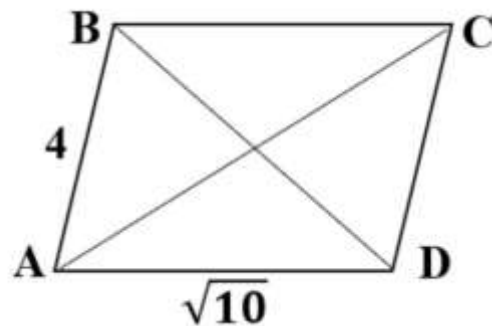
Розв'язування задач

Задача 1

Визначте, гострокутним, прямокутним чи тупокутним є трикутник зі сторонами: 4 см, 5 см і 8 см	$8^2 ? 4^2 + 5^2$ $64 ? 16 + 25$ $64 > 41$ Трикутник є тупокутним.	
--	---	--

Задача 2

Одна з діагоналей паралелограма на 2 см більша за іншу, сторони паралелограма дорівнюють 4 см і $\sqrt{10}$ см. Знайдіть діагоналі паралелограма.



Розв'язання

Нехай діагональ $BD = x$ см, тоді діагональ $AC = (x+2)$ см.

Застосуємо властивість паралелограма:

$$BD^2 + AC^2 = 2AB^2 + 2AD^2$$

Підставимо відповідні значення:

$$x^2 + (x+2)^2 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot (\sqrt{10})^2$$

Розкриємо дужки:

$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 2 \cdot 16 + 2 \cdot 10$$

$$2x^2+4x^2+4=32+20$$

$$2x^2+4x+4=52$$

$$2x^2+4x-48=0$$

Розділимо ліву і праву частину рівняння на 2:

$$x^2+2x-24=0$$

За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1 \cdot x_2=-24 \end{cases}$$

Отже, $x_1=-6$, $x_2=4$. Оскільки $x_1=-6$ не задовольняє умови, $x=4$.

$$x+2=6$$

Отже діагональ $BD=4$ см, а діагональ $AC=6$ см.

Відповідь: 4 см, 6 см.

Пригадайте

- Сформулюйте властивість діагоналей паралелограма

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати (письмово): №506,504

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- [Всеукраїнська школа онлайн](#)