04.12.23 9Б клас Вчитель: Артемюк Н.А.

Тема. Квадратична функція та її графік

Мета. Ознайомитися з квадратичною функцією, її видами та її графіком, навчитися будувати графік квадратичної функції шляхом найпростіших перетворень функції *y=ax*^{2}

Повторюємо

- Які функції ви знаєте?
- Як побудувати графік функції?
- Які правила перетворень для графіків функцій ви знаєте?
- Як побудувати графік функції f(x)+a, f(x)-a?
- Як побудувати графік функції f(x+a), f(x-a)?
- Як побудувати графік функції kf(x)+a?

Ознайомтеся з інформацією

Функцію, яку можна задати формулою виду

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}, \qquad (1)$$

де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають *квадратичною*.

Наприклад, $y = 5x^2 - 4x + 1$, $y = 2x^2 + x$, $y = -3x^2 - 6$, $y = -5x^2$— квадратичні функції.

Коефіцієнти b та c у формулі (1) квадратичної функції в окремих випадках можуть дорівнювати 0. Розглянемо ці випадки.

1. **При $b = c = 0$** функція (1) набуває вигляду $\boldsymbol{y = ax^2}$***, де*** $\boldsymbol{a \neq 0}$**.**

Властивості функції $\boldsymbol{y = ax^2}$***, де*** $\boldsymbol{a \neq 0}$

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2) Якщо $a > 0$, то $E(y) = [0; +\infty)$;
   якщо $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; 0]$.
3) Графік функції — парабола.
4) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Графік проходить через точку $(0; 0)$.
Цю точку називають ***вершиною параболи***.
5) Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору,
   якщо $a < 0$ — вниз.
6) Якщо $a > 0$, то функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.
   Якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.
7) Графік функції симетричний відносно осі O*y*.

2. **При $\boldsymbol{b = 0, c \neq 0}$** функція (1) набуває вигляду $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$, де $a \neq 0$, $c \neq 0$.

У цьому випадку графік функції можна отримати, здійснивши паралельне перенесення графіка функції $\boldsymbol{y = ax^2}$ на c одиниць угору (якщо $c > 0$) або на $|c|$ одиниць униз (якщо $c < 0$).

Властивості функції $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$, де $a \neq 0$, $c \neq 0$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.
2) Якщо $a > 0$, то $E(y) = [c; +\infty)$,
   якщо $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; c]$.
3) Графік функції — парабола.
4) Якщо $x = 0$, то $\boldsymbol{y = c}$. Точка $(0; c)$ — ***вершина параболи***.
5) Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$ — вниз.
6) Якщо $a > 0$, функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.
   Якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.
7) Графік функції симетричний відносно осі Oy.

3. $\boldsymbol{b \neq 0,\ c \neq 0}$.

Позначимо

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Тоді формулу

$$y = ax^2 + bx + c$$

можна подати у вигляді

$$y = a(x - x_0)^2 + y_0.$$

Схема побудови шуканого графіка є такою:

$$y = ax^2 \xrightarrow[\text{на } |x_0| \text{ од.}]{\text{управо або вліво}} y = a(x - x_0)^2 \xrightarrow[\text{на } |y_0| \text{ од.}]{\text{угору або вниз}} y = a(x - x_0)^2 + y_0$$

На рисунку 2 показано побудову для випадку, коли $a > 0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$. На рисунку 3 показано побудову для випадку, коли $a < 0$, $x_0 < 0$, $y_0 > 0$.

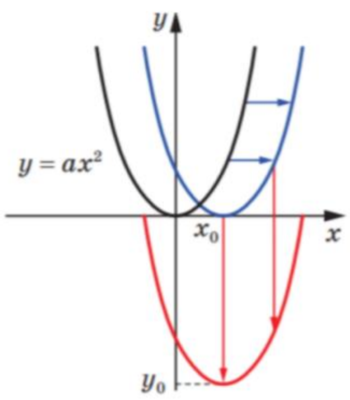


Рис. 2

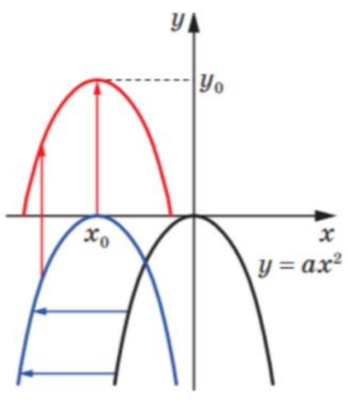


Рис. 3

Тепер можна зробити такий висновок:
графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, яка дорівнює параболі $y = ax^2$ з вершиною в точці $(x_0; y_0) = (x_B; y_B)$, де

$$x_B = -\frac{b}{2a}, \quad y_B = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$:
– якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору,
– якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.
Віссю симетрії параболи є пряма

$$x = x_B.$$

Розв'язування завдань

Побудувати графік функції $y = 2x^2 - 12x + 19$.

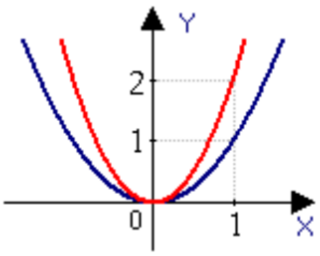
Розв'язання:

Виділимо повний квадрат з квадратного тричлена, який задає функцію:

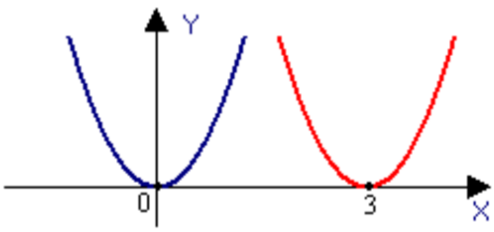
$$2x^2 - 12x + 19 = 2x^2 - 12x + 18 + 1 = 2(x^2 - 6x + 9) + 1 = 2(x - 3)^2 + 1.$$

Отже, $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x - 3)^2 + 1$.

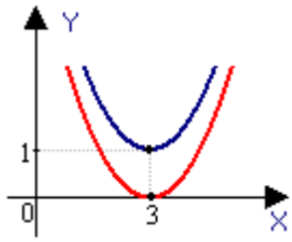
Побудуємо графік шляхом геометричних перетворень:



Крок 1. Розтяг синьої параболи $y = x^2$вдвічі вздовж осі Оу



Крок 2. Паралельне перенесення графіка функції $y = 2x^2$ вздовж осі Ox вправо на 3 одиниці



Крок 3. Паралельне перенесення графікау $= 2(x - 3)^2$ вздовж осі Oy вгору на 1 одиницю

Пригадайте

- Яку функцію називають квадратичною?
- Як побудувати графік квадратичної функції?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Побудувати один з графіків:

1. $y = -x^2 - 5$;
2. $y = x^2 - 4x - 5$;
3. $y = -x^2 + 2x + 3$

Джерело

[Всеукраїнська школа онлайн]