12.12.2023 9 клас

Тема. Теорема косинусів. Наслідки з теореми косинусів

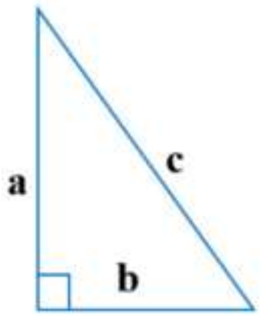
Мета: ознайомитися з теоремою косинусів та наслідками з неї, вчитися знаходити у довільному трикутнику невідому сторону трикутника за відомими сторонами та кутом між ними та невідомі кути за всіма відомими сторонами

Повторюємо

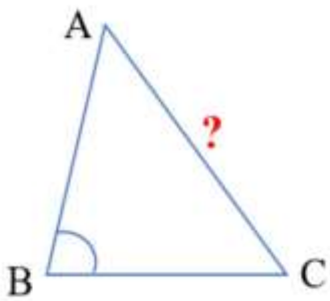
- Сформулюйте теорему Піфагора.
- Який знак має косинус гострого, а який – тупого кута?
- Як знайти косинус кута градусною мірою від 90^{o} до 180^{o}?

Ознайомтеся з інформацією

Для обчислення елементів прямокутного трикутника достатньо 2 дані величини (дві сторони або сторона і кут). Для обчислення елементів довільного трикутника необхідно хоча б 3 дані величини.



$$c^2 = a^2 + b^2$$



Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot \cos A$$

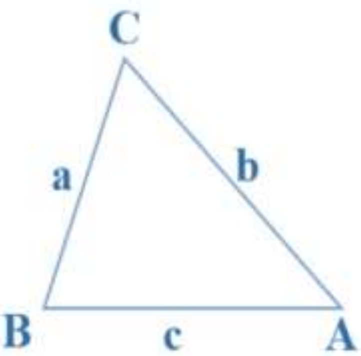
Також теорема виконується для будь-якої сторони трикутника:

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot \cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot \cos C$$

Теорема косинусів використовується для обчислення:

1) невідомої сторони трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними;

2) обчислення косинуса невідомого кута трикутника, якщо відомі всі сторони трикутника.



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Значення косинуса тупого кута знаходиться за формулою зведення:

$\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$

Найчастіше використовуються тупі кути:

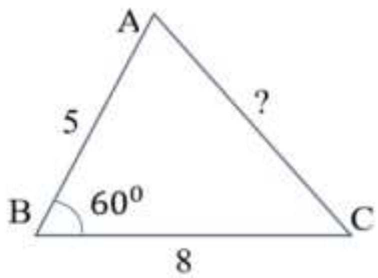
$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$
$\cos 150° = \cos(180° - 30°) = -\cos 30° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos 135° = \cos(180° - 45°) = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Розв'язування задач

Задача 1

У трикутнику ABC відомо сторони AB і BC. AB=5 см, BC= 8 см, а кут між цими сторонами становить 60 градусів.

Знайдіть невідому сторону трикутника ABC.



Застосуємо теорему косинусів:

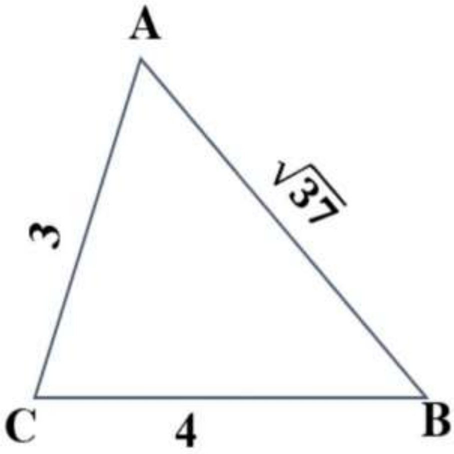
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos\angle B$$
$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^0 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$$
$$AC^2 = 49$$
$$AC = 7$$
$$AC = -7,$$

не задовольняє умові задачі, оскільки довжина відрізка не може бути від'ємним числом

Відповідь: AC=7

Задача 2

У трикутнику ABC відомо, що AB= $\sqrt{37}$ см, AC=3 см, BC=4 см. Знайдіть найбільший кут у трикутнику ABC.



Розв'язання

$$\sqrt{37} > \sqrt{36} = 6 > 4 > 3$$

Напроти найбільшої сторони в трикутнику завжди лежить найбільший кут. Тому кут C – найбільший. Знайдемо його величину.

Застосуємо теорему косинусів для сторони AB:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\angle C$$

$$37=3^2+4^2-2\bullet 3\bullet 4\bullet \cos< C$$

$$37=9+16-2\bullet 3\bullet 4\bullet \cos< C$$

$$37=25-2\bullet 3\bullet 4\bullet \cos< C$$

$$2\bullet 3\bullet 4\bullet \cos< C=-12$$

Виразимо косинус кута C: $\cos\angle C = -\frac{12}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1}{2}$

Пригадаємо формулу: $\cos\,(180^0 - x) = -\cos x$

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

$$-\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\,(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: найбільший кут C дорівнює 120^0.

Поміркуйте

- Чому теорему косинусів називають узагальненням теореми Піфагора?

Домашнє завдання

- **Опрацювати конспект і §11 підручника**
- **Розв’язати (письмово): №495(3,4), 497**

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- Мій клас
- Всеукраїнська школа онлайн