

Тема. Тригонометричні тотожності

Мета: відновити та розширити знання про тригонометричні тотожності та навчитись застосовувати їх до розв'язування задач

Пригадайте

- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в прямокутному трикутнику.
- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в тригонометричному колі.
- Чому дорівнюють тригонометричні функції кутів 0° , 90° , 180° ?
- Які основні тригонометричні тотожності ви знаєте?

Ознайомтеся з інформацією

Пригадаймо, що для будь-якого гострого кута α прямокутного трикутника було доведено основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Ця ж тотожність дійсна і для кута α з проміжку $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

З основної тригонометричної тотожності з урахуванням знаків тригонометричних функцій для кутів від 0° до 180° випливає, що:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}.$$

Знак $\cos \alpha$ обирають залежно від того, чи є кут α гострим (знак «+»), чи тупим (знак «-»). Безпосередньо з означень тригонометричних функцій випливають такі тотожності:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ), \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ), \\ \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha &= 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ). \end{aligned}$$

У 8-ому класі ви вивчали, що для гострого кута α справджуються формули доповнення, які виражають функції кута $(90^\circ - \alpha)$ через функції кута α :

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Формули зведення для кута на проміжку $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ, \alpha \neq 90^\circ), \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg} \alpha \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ). \end{aligned}$$

Теорема синусів.

Сторони трикутника (рис. 2) пропорційні синусам протилежних кутів:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де a, b, c — сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C , відповідно;

R — радіус описаного кола навколо трикутника.

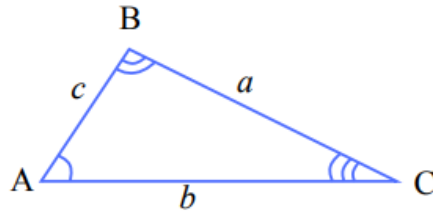


Рис. 2. До теореми синусів

Теорема косинусів.

Квадрат будь-якої сторони трикутника (рис. 4) дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \gamma,$$

де a, b, c — сторони трикутника, кут γ — кут між сторонами a і b .

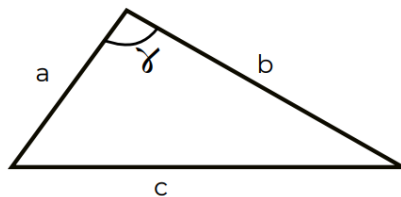


Рис. 4. До теореми косинусів

Перегляньте навчальне відео за посиланням:

<https://youtu.be/-8Gk0dy7giE>

Робота в зошиті

Запишіть приклади розв'язування задач:

Задача 1

Обчисліть значення тригонометричних функцій кута 150° .

Розв'язання.

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 150^{\circ} = \operatorname{tg}(180^{\circ} - 30^{\circ}) = -\operatorname{tg} 30^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 150^{\circ} = \operatorname{ctg}(180^{\circ} - 30^{\circ}) = -\operatorname{ctg} 30^{\circ} = -\sqrt{3}.$$

Відповідь: $\sin 150^{\circ} = \frac{1}{2}, \cos 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 150^{\circ} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 150^{\circ} = -\sqrt{3}.$

Задача 2

Обчисліть:

1) $\sin 150^{\circ} + \operatorname{tg} 135^{\circ}$

Розв'язання

$$\begin{aligned} 1) \sin 150^{\circ} + \operatorname{tg} 135^{\circ} &= \sin(180^{\circ} - 30^{\circ}) + \operatorname{tg}(180^{\circ} - 45^{\circ}) = \sin 30^{\circ} - \operatorname{tg} 45^{\circ} = \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -0,5; \end{aligned}$$

Задача 3

Кут β – гострий. Знайдіть: $\cos \beta$, якщо $\sin \beta = \frac{4}{5}$

Розв'язання

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

$$1) \sin \beta = \frac{4}{5}; \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta; \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$$

Задача 4

За трикутником ABC (рис. 3) знайдіть кут B, якщо $AB = \sqrt{3}, AC = \sqrt{2}, \angle C = 60^{\circ}$.

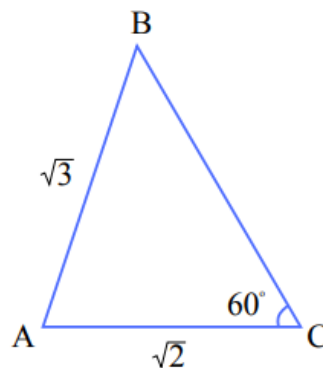


Рис. 3.

Розв'язання.

За теоремою синусів маємо:

$$\sin \angle B = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{AC}{\sin \angle B};$$

$$\angle B = 45^\circ.$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle B};$$

Відповідь: $\angle B = 45^\circ$.

$$\sqrt{3} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle B};$$

$$\frac{\sqrt{3} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sin \angle B};$$

Задача 5 (додаткова)

Знайдіть сторони паралелограма, якщо його діагоналі завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60° .

Розв'язання.

Нехай діагоналі паралелограма ABCD перетинаються в точці O, AC = 16 см, BD = 10 см, $\angle AOB = 60^\circ$ (рис. 5).

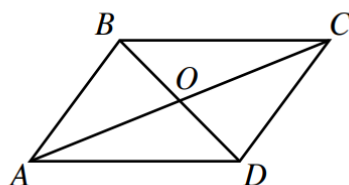


Рис. 5.

Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то AO = OC = 8 см, BO = OD = 5 см. За теоремою косинусів із трикутника AOB маємо:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos \angle AOB,$$

$$AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 7 \text{ см}.$$

Оскільки $\angle AOD = 120^\circ$ як суміжний з кутом AOB, то з трикутника AOD за теоремою косинусів маємо:

$$AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos \angle AOD,$$

$$AD^2 = 8^2 + 5^2 - 2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos 120^\circ.$$

Оскільки $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, то $AD^2 = 129$, $AD = \sqrt{129}$ см.

Відповідь: 7 см і $\sqrt{129}$ см.

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати задачі (письмово):

1. Обчисліть $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$.

2. Кут β гострий. Знайдіть $\sin \beta$, якщо $\cos \beta = \frac{5}{13}$

3. Спростіть вираз

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha);$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)}.$$

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерело

[Всеукраїнська школа онлайн](#)