22.01.24 9Б клас Вчитель: Артемюк Н.А.

Тема. Розв'язування систем двох рівнянь з двома змінними

Мета. Пригадати способи розв'язування систем лінійних рівнянь та вчитися застосовувати графічний спосіб до розв'язування систем нелінійних рівнянь

Повторюємо

- Що таке система лінійних рівнянь?
- Що буде розв'язком системи лінійних рівнянь з двома змінними?
- Які способи розв'язування систем рівнянь називають аналітичними?
- Що означає графічно розв'язати систему рівнянь?
- Назвіть рівняння відомих вам фігур.

Ознайомтеся з інформацією

Про поняття «система рівнянь» ви дізналися у 7 класі. Тоді розглядали системи двох лінійних рівнянь з двома змінними та способи їх розв'язування. На практиці часто доводиться розглядати системи, що містять рівняння другого степеня.

Рівняння

$$y - x^2 = 0,\ \ x^2 + y^2 = 9,\ \ xy = 3$$

є рівняннями з двома змінними другого степеня; рівняння

$$x + y = 2x^2y^2 \ —$$

четвертого степеня.

Розв'язком рівняння з двома змінними є пара значень змінних, за яких рівняння перетворюється на правильну числову рівність.

Наприклад, пара $(-1; 2)$ є розв'язком рівняння

$$x^2 - y + 1 = 0,$$

оскільки $(-1)^2 - 2 + 1 = 0$, а пара $(2; -1)$ не є розв'язком цього рівняння, оскільки

$$2^2 - (-1) + 1 \neq 0.$$

Якщо на координатній площині позначити всі точки, координати яких є розв'язками деякого рівняння з двома змінними, то одержимо ***графік цього рівняння***.

Наприклад, графік рівняння $2x - 5y = 2$ — пряма; графік рівняння $x^2 + y^2 = 9$ — коло радіуса 3 і з центром у початку координат; $y - x^2 = 0$ — парабола $y = x^2$; $xy = 3$ — гіпербола $(y = \frac{3}{x})$.

Розв'язок системи рівнянь із двома змінними x і y — пара чисел $(x_0; y_0)$, яка є розв'язком кожного з рівнянь системи, тобто перетворює кожне з них у правильну числову рівність.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що їх немає.

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь

У 7 класі ви вже вивчали графічний спосіб розв'язування систем рівнянь — лінійних.

Пригадайте, щоб *розв'язати систему рівнянь графічно*, слід:

- побудувати в одній системі координат графіки рівнянь системи;
- знайти спільні точки графіків (координати цих точок і є розв'язками системи рівнянь).

Зауважимо, що часто для побудови графіків рівнянь зручно звести їх до класичного вигляду відомого рівняння або функції.

Під час розв'язування систем рівнянь *графічним способом* наприкінці **обов'язково** потрібно **зробити перевірку**, підставивши одержані розв'язки в систему, оскільки графічний метод не гарантує того, що одержаний результат є точним.

Графічний метод ефективний у тих випадках, коли треба знайти кількість розв'язків або достатньо знайти їх приблизно, оскільки координати точок перетину не завжди виявляються цілими числами, що ускладнює знаходження правильної відповіді.

Розв'язування завдань

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4. \end{cases}$

Розв'язання:
Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 1).
$x^2 + y^2 = 16$ — коло радіуса 4 із центром у початку координат.
$x - y = 4 \Rightarrow y = x - 4$ — пряма.

x	0	4
y	–4	0

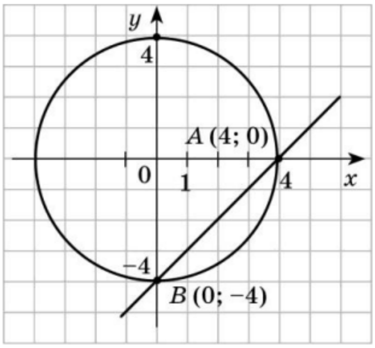

Рис. 1

Ці графіки мають дві спільні точки $(4; 0)$; $(0; -4)$.
Відповідь: $(4; 0)$; $(0; -4)$.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y = x - 2, \\ y = x^2 - 4. \end{cases}$

Розв'язання:
Графік рівняння $y = x - 2$ — пряма.

x	2	0
y	0	–2

Графік рівняння $y = x^2 - 4$ — парабола.

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 2).

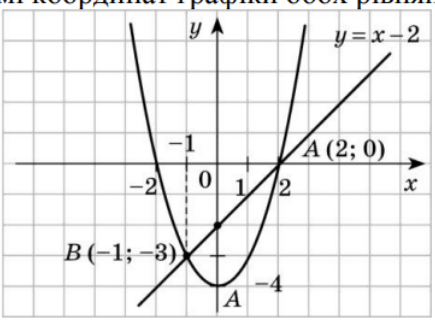

Рис. 2

Ці графіки мають дві спільні точки $(2; 0)$; $(-1; -3)$.
Відповідь: $(2; 0)$; $(-1; -3)$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy = 12, \\ y = x - 1. \end{cases}$

Розв'язання:

Графік рівняння $xy = 12 \Rightarrow y = \frac{12}{x}$ — гіпербола.

x	-2	-3	-4	-6	2	3	4	6
y	-6	-4	-3	-2	6	4	3	2

Графік рівняння $y = x - 1$ — пряма.

x	0	1
y	–1	0

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 3).

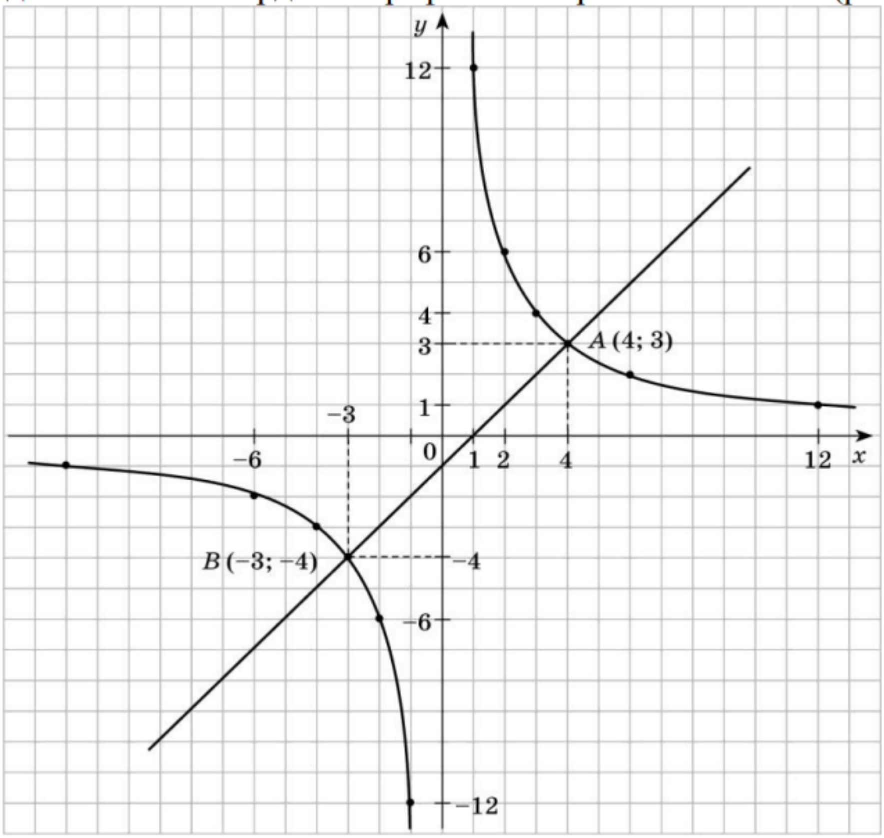

Рис. 3

Ці графіки мають дві спільні точки $(4; 3)$; $(-3; -4)$.

Відповідь: $(4; 3)$; $(-3; -4)$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y - x = 5, \\ y = |x^2 + 6x + 5|. \end{cases}$

Розв'язання:

$\begin{cases} y - x = 5, \\ y = |x^2 + 6x + 5|; \end{cases}$ $\begin{cases} y = x + 5, \\ y = |x^2 + 6x + 5|. \end{cases}$

Графік рівняння $y = x + 5$ — пряма.

x	0	–5
y	5	0

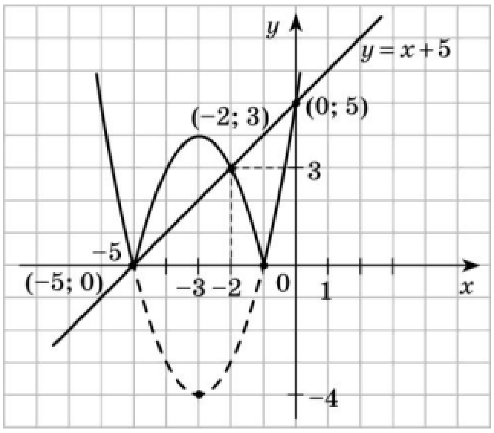

Рис. 4

Графік рівняння $y = x^2 + 6x + 5$ — парабола.

$$x_B = \frac{-6}{2} = -3,\ \ y_B = f(x_B) = 9 - 18 + 5 = -4.$$

$(-3; -4)$ — вершина параболи.

$x^2 + 6x + 5 = 0$,

$x_1 = -5, x_2 = -1$. Точки перетину з віссю Ox: $(-5; 0), (-1; 0)$.

Як побудувати графік $y = |x^2 + 6x + 5|$, маючи графік $y = x^2 + 6x + 5$ див. урок 4.

Побудувавши в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 4), видно, що ці графіки мають три спільні точки $(0; 5)$; $(-5; 0)$; $(-2; 3)$.

Відповідь: $(0; 5)$; $(-5; 0)$; $(-2; 3)$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} \boldsymbol{y - x^2 = -4,} \\ \boldsymbol{x^2 + y^2 = 16.} \end{cases}$

Розв'язання:

Обидва рівняння системи є рівняннями другого степеня.

Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 16$ є коло радіуса 4 із центром у початку координат, графіком рівняння $y - x^2 = -4$ є парабола ($y = x^2 - 4$).

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи (рис. 5).

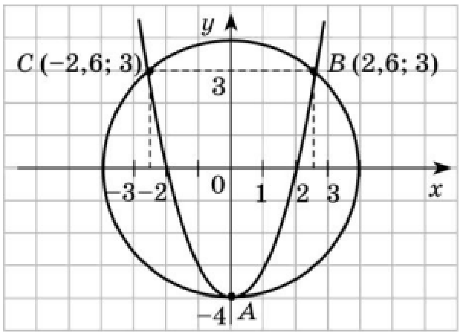

Рис. 5

Ці графіки мають три спільні точки: $A(0; -4)$; $B(2{,}6; 3)$; $C(-2{,}6; 3)$. Причому, значення абсцис точок B і C знайдено наближено, а не точно. Це і є негативним моментом у розв'язуванні систем рівнянь графічним способом. Якби ми розв'язували цю систему аналітично, то одержали б значення $x = \sqrt{7}$ і точки з координатами $(0; -4)$; $(\sqrt{7}; 3)$; $(-\sqrt{7}; 3)$.

Поміркуйте

Якими способами можна перевірити правильність та точність отриманих розв'язків системи рівнянь?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати два завдання із запропонованих на вибір:

Розв'язати графічним методом системи рівнянь:

а) $\begin{cases} y = x + 2, \\ xy = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y + 2x = 0, \\ x^2 - y = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x^2 + y^2 = 9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} y - x^2 + 3 = 0, \\ x^2 + y^2 = 4. \end{cases}$

Джерело

[Всеукраїнська школа онлайн]