29.01.2024 9 клас

Тема. Розв'язування систем двох рівнянь з двома змінними

Мета. Вчитися застосовувати аналітичні способи до розв’язування систем нелінійних рівнянь

Повторюємо

- Що буде розв’язком системи рівнянь з двома змінними?
- Які способи розв’язування систем рівнянь називають аналітичними?
- Що означає графічно розв’язати систему рівнянь?
- В яких випадках доцільно використовувати графічний метод?

Ознайомтеся з інформацією

Якщо у системі одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему можна розв’язувати способом підстановки.

Алгоритм розв’язування системи двох рівнянь із двома змінними ***методом підстановки***

1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння системи.
2. Підставити отриманий вираз замість відповідної змінної у друге рівняння системи.
3. Розв’язати отримане рівняння з однією змінною: знайти один або кілька коренів (залежно від рівняння).
4. Підставити почергово кожний зі знайдених коренів рівняння у вираз, отриманий у п. 1.
5. Записати відповідь у вигляді пар значень змінних, знайдених у п. 3, 4.

Метод заміни змінної для розв’язування систем рівнянь
можна застосувати таким чином:

1) Ввести *одну нову змінну* і використати заміну тільки в *одному* рівнянні системи.

Наприклад: для розв’язання системи

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2;$$
$$x^2+y^2=2$$

вводимо одну змінну $t=\frac{x}{y}$. Перше рівняння матиме вигляд:

$$t+\frac{1}{t}=2.$$

2) Або ввести *дві нові змінні* і використати їх одночасно в *обох* рівняннях системи.

Наприклад: для розв’язання системи

$$\begin{cases}\dfrac{2}{x-2y}+\dfrac{3}{3x+y}=3;\\[2mm] \dfrac{4}{x-2y}-\dfrac{9}{3x+y}=1\end{cases}$$

вводимо дві змінні:

$$a=\frac{2}{x-2y},\quad b=\frac{3}{3x+y}.$$

Враховуючи, що $\frac{4}{x-2y}=2a$, $\frac{9}{3x+y}=3b$, записуємо систему у вигляді:

$$\begin{cases}a+b=3;\\ 2a-3b=1.\end{cases}$$

Розв'язування завдань

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

Розв'язання:

I спосіб:

Додамо перше та друге рівняння системи.

$$+\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y = 2, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=-1, \end{array}\right. \\ x = y + 3; \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases} \end{array}\right. \quad (5;2)\,;\ (2;-1)\,.$$

II спосіб:

Розв'яжемо систему методом підстановки.

$$\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 + 1 - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=-1; \end{array}\right. \end{cases} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=5, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases} \end{array}\right. \quad (5;2)\,;\ (2;-1)\,.$$

Відповідь: $(5;2)$; $(2;-1)$.

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - xy = 1; \\ xy(x + y) = 20. \end{cases}$$

Розв'язання:

Зауважимо, що дана система не зміниться, якщо замінити x на y, а y на x. Такі системи називаються симетричними. І для їх розв'язування може виявитися ефективною заміна

$$x + y = u,\ xy = v.$$

Виконаємо зазначену заміну. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ v \cdot u = 20. \end{cases}$$

Звідси (розв'яжіть методом підстановки), маємо

$$\begin{cases} u = -4, \\ v = -5; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u = 5, \\ v = 4. \end{cases}$$

Повернувшись до заміни, маємо дві системи:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи методом підстановки, розв'язками першої з них є пари чисел (–5;1) та (1;–5), а розв'язками другої – (1;4) та (4;1).

Відповідь: (–5;1), (1;–5), (1;4), (4;1).

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 6; \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28. \end{cases}$$

Розв'язання:

Зробимо заміну. Нехай

$$a = xy,\ b = \frac{x}{y}.$$

Маємо:

$$\begin{cases} a - b = 6; \\ 3a + 2b = 28; \end{cases} \Big| \times \mathbf{2} \qquad \begin{cases} 2a - 2b = 12; \\ 3a + 2b = 28. \end{cases}$$

Почленно додавши рівняння системи, матимемо:

$$5a = 40 \Rightarrow a = 8;\ \ b = a - 6, b = 2.$$

Повернувшись до заміни, одержимо:

$$\begin{cases} xy = 8, \\ \dfrac{x}{y} = 2; \end{cases} \begin{cases} xy = 8, \\ x = 2y; \end{cases} \begin{cases} 2y \cdot y = 8, \\ x = 2y; \end{cases} \begin{cases} y^2 = 4, \\ x = 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ x_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -4. \end{cases}$$

Відповідь: (4;2) (-4;-2)

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 4. \end{cases}$

Розв'язання:

<u>І спосіб</u>

$$\begin{cases} (4+y)^2 - y^2 = 8, \\ x = 4 + y; \end{cases} \begin{cases} 16 + 8y + y^2 - y^2 = 8, \\ x = 4 + y; \end{cases} \begin{cases} 8y = -8, \\ x = 4 + y; \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ x = 3; \end{cases} (3;-1).$$

<u>ІІ спосіб</u>

$$\begin{cases} (x-y)\cdot(x+y) = 8, \\ x - y = 4; \end{cases} \pm \begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4; \end{cases} \begin{cases} 2x = 6, \\ 2y = -2; \end{cases} \begin{cases} x = 3, \\ y = -1; \end{cases} (3;-1).$$

Відповідь: $(3;-1)$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases} \begin{cases} x^2 + \dfrac{9x^2}{16} = 100, \\ y = \dfrac{3x}{4}; \end{cases} \begin{cases} \dfrac{25x^2}{16} = 100, \\ y = \dfrac{3x}{4}; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 64, \\ y = \dfrac{3x}{4}; \end{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 8, \\ y = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -8, \\ y = -6; \end{cases} \end{array} \right. (8;6);\ (-8;-6).$$

Відповідь: $(8;6)$; $(-8;-6)$.

Поміркуйте

Якими способами можна перевірити правильність та точність отриманих розв'язків системи рівнянь?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати №534,542 (2,4)

Джерело

Всеукраїнська школа онлайн