24.11 9 клас

Тема. Скалярний добуток векторів

<u>Мета:</u> ознайомитися з поняттями кута між векторами, скалярного добутку як способу множення векторів та властивостями цього добутку, вчитися знаходити скалярний добуток векторів

Пригадайте

- Що таке вектор, які він має характеристики?
- Які вектори називають колінеарними?
- Які дії з векторами ви вмієте виконувати?

Ознайомтеся з інформацією

Нехай $\overline{a}$ і $\overline{b}$ — два ненульових та неспівнапрямлених вектори (рис. 1). Від довільної точки O відкладімо вектори $\overline{OA}$ і $\overline{OB}$, відповідно, рівні векторам $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Величину кута AOB називатимемо кутом між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

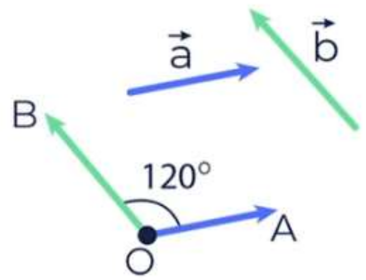

Рис. 1.

Кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $\angle(\overline{a}, \overline{b})$. Наприклад, на рисунку 1 $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 120°$, а на рисунку 2 $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 180°$.

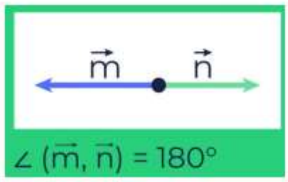

Рис. 2. Кут між протилежно напрямленими векторами

Якщо вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ **співнапрямлені** (рис. 3), то вважають, що $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0°$. Якщо хоча б один із векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ **нульовий**, то також вважають, що $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0°$.

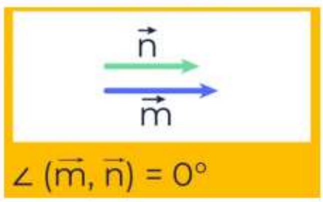

Рис. 3. Кут між співнапрямленими векторами

Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює $90°$. Записують: $\overline{a} \perp \overline{b}$.

Отже, для будь-яких векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ справджується нерівність: $0^\circ \le \angle(\overline{a}, \overline{b}) \le 180^\circ$.

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними. Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначають так: $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}, \vec{b})}$$

Якщо хоча б один із векторів $\overline{a}$ або $\overline{b}$ нульовий, то їх добуток дорівнюватиме нулю, тобто $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0$.

Якщо обидва вектори рівні один одному, тобто кут між ними дорівнює нуль градусів, а модулі однакові, то їх добуток буде рівний квадрату модуля одного із векторів.

Нехай $\overline{a} = \overline{b}$. Тоді $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{a} = |\overline{a}||\overline{a}|\cos 0^\circ = |\overline{a}|^2$.

Скалярний добуток двох однакових векторів $\overline{a} \cdot \overline{a}$ називають **скалярним квадратом вектора** $\overline{a}$ і позначають його як $\overline{a}^2$.

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Тобто, $\overline{a}^2 = |\overline{a}|^2$.

Однією з найважливіших теорем зі скалярним добутком векторів є **теорема про перпендикулярність**. Вона звучить так: скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos 0^\circ = 0$

Перегляньте відео за посиланням:

https://youtu.be/wpByXsgUH0k

Розв'язування задач

Задача 1

Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, якщо:

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|$;
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}||\overline{b}|$.

Розв'язання

1) $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|$. Оскільки $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b})$, то звідси $\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 1$, тоді кут між векторами $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 0^\circ$, отже $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$;
2) $\overline{a} \cdot \overline{b} = -|\overline{a}||\overline{b}|$. Оскільки $\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos\angle(\overline{a}, \overline{b})$, то звідси $\cos\angle(\overline{a}, \overline{b}) = -1$, тоді кут між векторами $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 180^\circ$, отже $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$.

Відповідь: 1) $\overline{a} \uparrow\uparrow \overline{b}$ — співнапрямлені; 2) $\overline{a} \uparrow\downarrow \overline{b}$ — протилежно напрямлені.

Приклад 2.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cdot\cos\alpha$$

Дано: $|\vec{a}| = 5, |\vec{b}| = 6, < (\vec{a}\,;\vec{b}) = 120^o$

Знайти: $(2\vec{a} + 3\vec{b})\cdot\vec{a}$

Розв'язання:

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$(2\vec{a} + 3\vec{b})\cdot\vec{a} = 2\vec{a}^2 + 3\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$2\vec{a}^2 = 2\cdot|\vec{a}|^2 = 2\cdot 5^2 = 50$$

$$3\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\alpha = 3\cdot 5\cdot 6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -45$$

$$(2\vec{a} + 3\vec{b})\cdot\vec{a} = 50 - 45 = 5$$

Відповідь: 5

Приклад 3.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$$

Дано: $\vec{a}(5;2)$ і $\vec{b}(-4;y)$

$\vec{a}\perp\vec{b}$

Знайти: y

Розв'язання:

Оскільки $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 5\cdot(-4) + 2y = 0$$

$$-20 + 2y = 0$$

$$2y = 20 \qquad y = 10$$

Відповідь: 10

Приклад 4.

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$$

Дано: $\vec{a}\,(-2;3)$ і $\vec{b}(3;-4)$

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

Знайти: cosa

Розв'язання:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = -2\cdot 3 + 3\cdot(-4) = -6 - 12 = -18$$

$$\cos\alpha = \frac{-18}{5\cdot\sqrt{13}} = \frac{-18}{5\sqrt{13}}$$

Пригадайте

- Як можна помножити два вектори?
- Як визначити кут між двома векторами?

Домашнє завдання

- **Опрацювати конспект і §10 підручника с.78-80**
- **Розв'язати (письмово): №395,404,406**

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- Всеукраїнська школа онлайн