

Тема. Скалярний добуток векторів

Мета: ознайомитися з поняттями кута між векторами, скалярного добутку як способу множення векторів та властивостями цього добутку, вчитися знаходити скалярний добуток векторів

Пригадайте

- Що таке вектор, які він має характеристики?
- Які вектори називають колінеарними?
- Які дії з векторами ви вмієте виконувати?

Ознайомтеся з інформацією

Нехай \vec{a} і \vec{b} — два ненульових та неспівнаправлених вектори (рис. 1). Від довільної точки O відкладемо вектори \vec{OA} і \vec{OB} , відповідно, рівні векторам \vec{a} і \vec{b} . Величину кута AOB називатимемо кутом між векторами \vec{a} і \vec{b} .

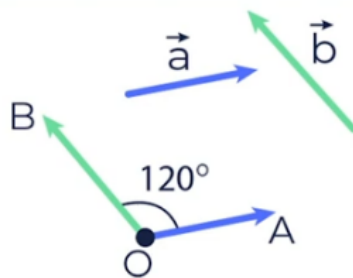


Рис. 1.

Кут між векторами \vec{a} і \vec{b} позначають так: $\angle(\vec{a}, \vec{b})$. Наприклад, на рисунку 1 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 120^\circ$, а на рисунку 2 $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$.

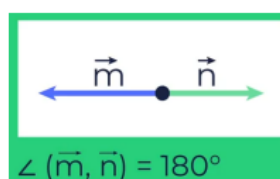


Рис. 2. Кут між протилежно напрямленими векторами

Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} **співнаправлені** (рис. 3), то вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$. Якщо хоча б один із векторів \vec{a} або \vec{b} **нульовий**, то також вважають, що $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.

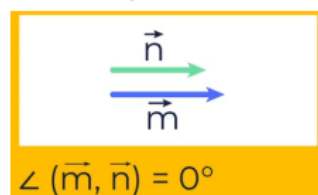


Рис. 3. Кут між співнаправленими векторами

Вектори \vec{a} і \vec{b} називають **перпендикулярними**, якщо кут між ними дорівнює 90° . Записують: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Отже, для будь-яких векторів \vec{a} і \vec{b} справджується нерівність:
 $0^\circ \leq \angle(\vec{a}, \vec{b}) \leq 180^\circ$.

Скалярним добутком двох векторів називають добуток їхніх модулів і косинуса кута між ними. Скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} позначають так: $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$$

Якщо хоча б один із векторів \vec{a} або \vec{b} нульовий, то їх добуток дорівнюватиме нулю, тобто $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Якщо обидва вектори рівні один одному, тобто кут між ними дорівнює нуль градусів, а модулі однакові, то їх добуток буде рівний квадрату модуля одного із векторів.

Нехай $\vec{a} = \vec{b}$. Тоді $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$.

Скалярний добуток двох однакових векторів $\vec{a} \cdot \vec{a}$ називають **скалярним квадратом вектора** \vec{a} і позначають його як \vec{a}^2 .

Скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля. Тобто, $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

Однією з найважливіших теорем зі скалярним добутком векторів є **теорема про перпендикулярність**. Вона звучить так: скалярний добуток двох ненульових векторів дорівнює нулю тоді й тільки тоді, коли ці вектори перпендикулярні.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переставна властивість;
- 2) $(k \vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сполучна властивість;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Скалярний добуток векторів доцільно використовувати в таких випадках:

1. Для доведення перпендикулярності прямих (променів, відрізків) — у цьому разі достатньо показати, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

2. Для знаходження величини кута — у цьому випадку вектори, якими задано шуканий або даний кут, розкладають за двома неколінеарними векторами, довжини або відношення довжин яких відомі, й обчислюють косинус шуканого кута.

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Розв'язування задач

Задача 1

Визначте взаємне розміщення двох ненульових векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$.

Розв'язання

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}|$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то звідси $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 1$, тоді кут між векторами $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$, отже $\vec{a} \uparrow \vec{b}$;
- 2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| |\vec{b}|$. Оскільки $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle(\vec{a}, \vec{b})$, то звідси $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = -1$, тоді кут між векторами $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ$, отже $\vec{a} \downarrow \vec{b}$.

Відповідь: 1) $\vec{a} \uparrow \vec{b}$ — співнаправлені; 2) $\vec{a} \downarrow \vec{b}$ — протилежно напрямлені.

Задача 2

У трикутнику ABC відомо, що $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, $CB = 2$. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{AC} і \vec{BC} .

Розв'язання

Зауважмо, що вектори \vec{AC} і \vec{BC} перпендикулярні, оскільки $\angle C = 90^\circ$, а отже, їх скалярний добуток рівний 0° . Проте, все одно проведемо подальші розрахунки для підтвердження цього висновку.

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{CB}{AC}, \quad \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{AC}, \quad AC = |\vec{AC}| = 2\sqrt{3}$$

$$\vec{CB} = |\vec{CB}| = 2$$
$$\vec{AC} \cdot \vec{BC} = |\vec{AC}| \cdot |\vec{BC}| \cdot \cos 90^\circ = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 0 = 0$$

Відповідь: $\vec{AC} \cdot \vec{BC} = 0$.

Пригадайте

- Як можна помножити два вектори?
- Як визначити кут між двома векторами?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект і §10
- Розв'язати (письмово): №3-5

3. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо

$$|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = 2\sqrt{2}, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ.$$

4. Знайдіть скалярний добуток векторів \vec{a} і \vec{b} , якщо

$$\vec{a} \left(\frac{3}{2}; -1 \right), \vec{b} (6; 9).$$

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- [Всеукраїнська школа онлайн](#)