

Тема. Скалярний добуток векторів

Мета: ознайомитися з поняттями кута між векторами, скалярного добутку як способу множення векторів та властивостями цього добутку, вчитися знаходити скалярний добуток векторів

Пригадайте

- Що таке вектор, які він має характеристики?
- Які вектори називають колінеарними?
- Які дії з векторами ви вмієте виконувати?

Ознайомтеся з інформацією

Скалярний добуток векторів $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

Для будь-яких векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і будь-якого числа k виконуються рівності:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — переставна властивість;
- 2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$ — сполучна властивість;
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ — розподільна властивість.

Косинус кута між ненульовими векторами $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ можна обчислити за формулою:

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Скалярний добуток векторів доцільно використовувати в таких випадках:

1. Для доведення перпендикулярності прямих (променів, відрізків) — у цьому разі достатньо показати, що скалярний добуток відповідних векторів дорівнює нулю.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 90^\circ = 0$$

2. Для знаходження величини кута — у цьому випадку вектори, якими задано шуканий або даний кут, розкладають за двома неколінеарними векторами, довжини або відношення довжин яких відомі, й обчислюють косинус шуканого кута.

$$\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

Розв'язування задач

Задача 1

Вектори $\vec{a} + \vec{b}$ й $\vec{a} - \vec{b}$ перпендикулярні. Доведіть, що $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Розв'язання

Оскільки $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$, то $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0$.

$$\vec{a}^2 - \vec{b}^2 = 0; \vec{a}^2 = \vec{b}^2$$

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| |\vec{a}| \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{b}^2 = |\vec{b}| |\vec{b}| \cos 0^\circ = |\vec{b}|^2$$

$$|\vec{a}^2| = |\vec{b}^2|$$

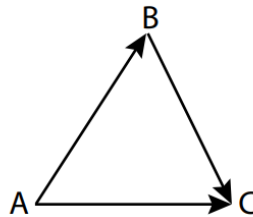
$$|\vec{a}| = |\vec{b}|$$

Відповідь: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Задача 2

Знайдіть косинуси кутів трикутника з вершинами $A(1; 6)$, $B(-2; 3)$ і $C(2; -1)$.

Розв'язання



$$\cos \angle A = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|}$$

$$\vec{AB} = (-2 - 1; 3 - 6) = (-3; -3)$$

$$\vec{AC} = (2 - 1; -1 - 6) = (1; -7)$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -3 \cdot 1 + (-3) \cdot (-7) = -3 + 21 = 18$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{1^2 + (-7)^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$\cos \angle A = \frac{18}{3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{2}} = \frac{18}{3 \cdot 5 \cdot 2} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \angle B = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|}$$

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = (\overline{3}; \overline{3})$$

$$\overline{BC} = (\overline{2 - (-2)}; \overline{-1 - 3}) = (\overline{4}; \overline{-4})$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = 3 \cdot 4 + 3 \cdot (-4) = 0$$

$$\cos \angle B = \frac{0}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = 0$$

$$\cos \angle C = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|}$$

$$\overline{CA} = -\overline{AC} = (\overline{-1}; \overline{7})$$

$$\overline{CB} = -\overline{BC} = (\overline{-4}; \overline{4})$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = -1 \cdot (-4) + 7 \cdot 4 = 4 + 28 = 32$$

$$|\overline{CA}| = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{50} = \sqrt{18} = 5\sqrt{2}$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$

$$\cos \angle C = \frac{32}{5\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}} = \frac{16}{5 \cdot 4} = \frac{4}{5}$$

Відповідь: $\cos \angle A = \frac{3}{5}$; $\cos \angle B = 0$; $\cos \angle C = \frac{4}{5}$.

Задача 3

Відомо, що $|\overline{a}| = 1$, $|\overline{b}| = 3$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 120^\circ$. Знайдіть $|3\overline{a} - 2\overline{b}|$.

Розв'язання

Оскільки скалярний квадрат вектора дорівнює квадрату його модуля, то $|3\overline{a} - 2\overline{b}|^2 = (3\overline{a} - 2\overline{b})^2$. Звідси

$$\begin{aligned} |3\overline{a} - 2\overline{b}|^2 &= \sqrt{(3\overline{a} - 2\overline{b})^2} = \sqrt{9\overline{a}^2 - 12\overline{a} \cdot \overline{b} + 4\overline{b}^2} = \\ &= \sqrt{9|\overline{a}|^2 - 12|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos \angle(\overline{a}, \overline{b}) + 4|\overline{b}|^2} = \sqrt{9 + 18 + 36} = \sqrt{63} = 3\sqrt{7} \end{aligned}$$

Відповідь: $|3\overline{a} - 2\overline{b}| = 3\sqrt{7}$.

Пригадайте

- Як можна помножити два вектори?
- Як визначити кут між двома векторами?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект і §10 підручника
- Розв'язати (письмово): №404(1,2), 410

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- [Всеукраїнська школа онлайн](#)