

Тема. Розв'язування систем двох рівнянь з двома змінними

Мета. Вчитися застосовувати аналітичні способи до розв'язування систем нелінійних рівнянь

Повторюємо

- Що буде розв'язком системи рівнянь з двома змінними?
- Які способи розв'язування систем рівнянь називають аналітичними?
- Що означає графічно розв'язати систему рівнянь?
- В яких випадках доцільно використовувати графічний метод?

Ознайомтеся з інформацією

Якщо у системі одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему можна розв'язувати способом підстановки.

*Алгоритм розв'язування системи двох рівнянь
із двома змінними **методом підстановки***



1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння системи.
2. Підставити отриманий вираз замість відповідної змінної у друге рівняння системи.
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною: знайти один або кілька коренів (залежно від рівняння).
4. Підставити по чергову кожний зі знайдених коренів рівняння у вираз, отриманий у п. 1.
5. Записати відповідь у вигляді пар значень змінних, знайдених у п. 3, 4.

Метод заміни змінної для розв'язування систем рівнянь

можна застосувати таким чином:

1) Ввести одну нову змінну і використати заміну тільки в *одному* рівнянні системи.

Наприклад: для розв'язання системи

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 2;$$

$$x^2 + y^2 = 2$$

вводимо одну змінну $t = \frac{x}{y}$. Перше рівняння матиме вигляд:

$$t + \frac{1}{t} = 2.$$

2) Або ввести *дві нові змінні* і використати їх одночасно в *обох* рівняннях системи.

Наприклад: для розв'язання системи

$$\begin{cases} \frac{2}{x-2y} + \frac{3}{3x+y} = 3; \\ \frac{4}{x-2y} - \frac{9}{3x+y} = 1 \end{cases}$$

вводимо дві змінні:

$$a = \frac{2}{x-2y}, \quad b = \frac{3}{3x+y}.$$

Враховуючи, що $\frac{4}{x-2y} = 2a$, $\frac{9}{3x+y} = 3b$, запишемо систему у вигляді:

$$\begin{cases} a + b = 3; \\ 2a - 3b = 1. \end{cases}$$

Розв'язування завдань

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання:

І спосіб:

Додамо перше та друге рівняння системи.

$$+ \begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y = 2, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} y=2, \\ y=-1, \end{cases} \\ x = y + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x=5, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases} \end{cases} \quad (5;2); (2;-1).$$

II спосіб:

Розв'яжемо систему методом підстановки.

$$\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 + 1 - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ \begin{cases} y=2, \\ y=-1; \end{cases} \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} x=5, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=2, \\ y=-1; \end{cases} \end{cases} \quad (5;2); (2;-1).$$

Відповідь: $(5;2); (2;-1)$.

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - xy = 1; \\ xy(x + y) = 20. \end{cases}$$

Розв'язання:

Зауважимо, що дана система не зміниться, якщо замінити x на y , а y на x . Такі системи називаються симетричними. І для їх розв'язування може виявитися ефективною заміна

$$x + y = u, \quad xy = v.$$

Виконаємо зазначену заміну. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ v \cdot u = 20. \end{cases}$$

Звідси (розв'яжіть методом підстановки), маємо

$$\begin{cases} u = -4, \\ v = -5; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u = 5, \\ v = 4. \end{cases}$$

Повернувшись до заміни, маємо дві системи:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -5; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи методом підстановки, розв'язками першої з них є пари чисел $(-5;1)$ та $(1;-5)$, а розв'язками другої — $(1;4)$ та $(4;1)$.

Відповідь: $(-5;1), (1;-5), (1;4), (4;1)$.

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 6; \\ 3xy + \frac{2x}{y} = 28. \end{cases}$$

Розв'язання:

Зробимо заміну. Нехай

$$a = xy, \quad b = \frac{x}{y}.$$

Маємо:

$$\begin{cases} a - b = 6; \\ 3a + 2b = 28; \end{cases} \times 2 \quad \begin{cases} 2a - 2b = 12; \\ 3a + 2b = 28. \end{cases}$$

Почленно додавши рівняння системи, матимемо:

$$5a = 40 \Rightarrow a = 8; \quad b = a - 6, b = 2.$$

Повернувшись до заміни, одержимо:

$$\begin{cases} xy = 8, \\ \frac{x}{y} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} xy = 8, \\ x = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y \cdot y = 8, \\ x = 2y; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 = 4, \\ x = 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ x_1 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -4. \end{cases}$$

Відповідь: (4;2) (-4;-2)**Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь**

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 4. \end{cases}$$
*Розв'язання:*I спосіб

$$\begin{cases} (4+y)^2 - y^2 = 8, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} 16 + 8y + y^2 - y^2 = 8, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} 8y = -8, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = -1, \\ x = 3; \end{cases} \quad (3; -1).$$

II спосіб

$$\begin{cases} (x-y) \cdot (x+y) = 8, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \pm \begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 6, \\ 2y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3, \\ y = -1; \end{cases} \quad (3; -1).$$

Відповідь: (3;-1).**Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases}$$
Розв'язання:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + \frac{9x^2}{16} = 100, \\ y = \frac{3x}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{25x^2}{16} = 100, \\ y = \frac{3x}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 = 64, \\ y = \frac{3x}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 8, \\ y = 6, \\ x = -8, \\ y = -6; \end{cases} \quad (8;6); (-8;-6).$$

Відповідь: (8;6); (-8;-6).**Поміркуйте**

Якими способами можна перевірити правильність та точність отриманих розв'язків системи рівнянь?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати два завдання із запропонованих на вибір:

Розв'яжіть системи рівнянь, використовуючи аналітичні методи:

а) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28. \end{cases}$

1. Розв'яжіть системи рівнянь, використовуючи метод заміни змінної:

а) $\begin{cases} \frac{x+y}{x} + \frac{4x}{x+y} = 4; \\ (x-4)(y+3) = 9. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 2y - xy = 4; \\ xy(x+y) = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 9; \\ 2xy + \frac{x}{3y} = 23. \end{cases}$

Джерело

[Всеукраїнська школа онлайн](#)