

Тема. Прямокутна система координат на площині. Синус, косинус, тангенс кутів від 0 до 180

Мета: відновити та розширити знання про прямокутну систему координат на площині та основні тригонометричні функції кута, навчитись визначати синус, косинус, тангенс кута від 0° до 180° у прямокутній системі координат за допомогою одиничного півкола

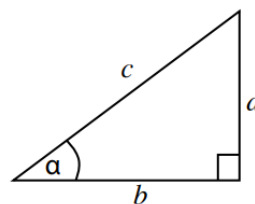
Пригадайте

- Як задати прямокутну систему координат на площині?
- Що таке одиничний відрізок?
- Як визначити координати точки в прямокутній системі координат?
- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в прямокутному трикутнику.

Ознайомтеся з інформацією

У прямокутному трикутнику маємо співвідношення:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$



Дамо означення тригонометричних функцій для будь-якого кута від 0° до 180° . Для цього в прямокутній системі координат, з якою ви добре знайомі, побудуємо коло радіуса 1 з центром у початку координат (рис. 2). Таке коло називають тригонометричним. Від додатної півосі осі Ox відкладемо у напрямі проти ходу годинникової стрілки гострий кут α . Нехай $M(x; y)$ — точка, у якій сторона цього кута перетинає дане коло (рис. 2, а). Проведемо перпендикуляр MN до осі Ox . Утворився прямокутний трикутник OMN з гострим кутом α , гіпотенузою $OM = 1$ і катетами, довжини яких дорівнюють координатам точки M : $ON = x$, $MN = y$. Із трикутника OMN маємо:

$$\sin \alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y, \quad \cos \alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{x}{y}.$$

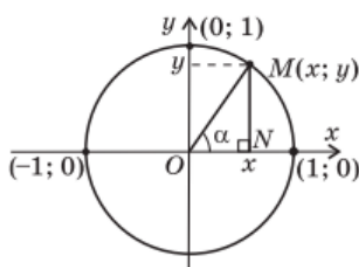


Рис. 2. До означення тригонометричних функцій

Отже, в тригонометричному колі синус і косинус гострого кута дорівнюють, відповідно, ординаті й абсцисі точки, у якій сторона цього кута перетинає коло, а тангенс і котангенс цього кута дорівнюють відношенням ординати до абсциси й абсциси до ординати, відповідно:

$$\sin \alpha = y, \cos \alpha = x, \operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Визначмо значення тригонометричних функцій кутів 0° , 90° , 180° (рис. 3). Якщо $\alpha = 0^\circ$, то точка M_1 має координати $(1; 0)$. Звідси $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 0^\circ$ не існує.

Якщо $\alpha = 90^\circ$, то точка M_2 має координати $(0; 1)$. Звідси $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{tg} 90^\circ$ не існує.

І, нарешті, якщо $\alpha = 180^\circ$, то точка M_3 має координати $(-1; 0)$. Звідси $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 180^\circ$ не існує.

Зауважимо також, що абсциси точок M для кутів від 0° до 180° змінюються в межах від -1 до 1 , тобто $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$, а ординати — в межах від 0 до 1 , тобто $0 \leq \sin \alpha \leq 1$.

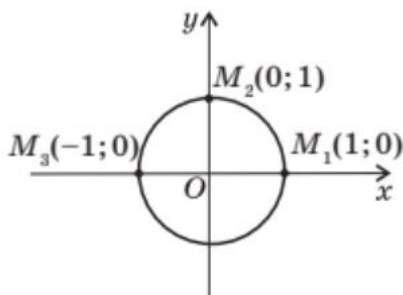


Рис. 3. Для означення кутів 0° , 90° , 180°

Перегляньте відеоурок за посиланням:

<https://youtu.be/SM3U7XaSuTk>

Робота в зошиті

Запишіть приклади розв'язування задач:

Задача 1

Чи існує кут α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, для якого:

- 1) $\cos \alpha = \frac{2}{5}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{2}{5}$; 3) $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$;

Розв'язання

Для довільного α такого, що $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, виконуються нерівності:

$0 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$. Отже, кути, для яких $\cos \alpha = \frac{2}{5}$, $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$,

$\sin \alpha = -\frac{2}{5}$ існують.

Задача 2

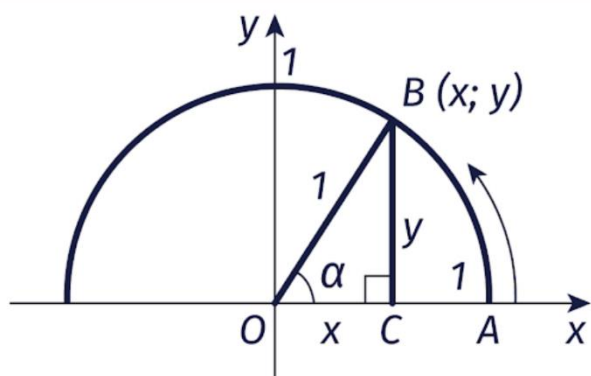
Розв'язання

Обчисліть значення тригонометричної функції $tg90^\circ$

$$tg90^\circ = \frac{\sin 90^\circ}{\cos 90^\circ} = \frac{1}{0} - \text{вираз не має змісту, отже } tg90^\circ \text{ не існує}$$

Задача 3

За допомогою одиничного кола запишіть розрахунок функцій синуса, косинуса і тангенса кута α , якщо $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{1}{2}$.



Розв'язання

$$\sin \alpha = y = \frac{1}{2}$$

$$\cos \alpha = x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$tg \alpha = \frac{y}{x} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати задачі (письмово):

1. Чи існує кут α , де $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$, для якого:

4) $\sin \alpha = \frac{2}{5}$;

5) $\cos \alpha = 1,2$;

6) $\sin \alpha = 1,2$?

2. За допомогою одиничного кола запишіть розрахунок функцій синуса, косинуса і тангенса кута α , якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Центр кола, радіус якого дорівнює 2 одиниці, збігається з початком координат. Які координати мають точки перетину кола з осями координат? Виконайте малюнок до задачі.

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерела

- [Всеукраїнська школа онлайн](#)
- О. Істер Геометрія. 9 клас. – Київ: Генеза, 2017