

Тема. Теорема косинусів. Наслідки з теореми косинусів

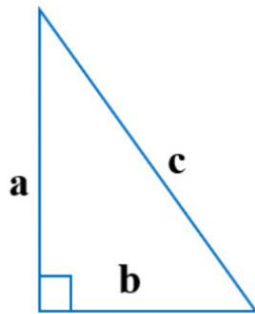
Мета: ознайомитися з теоремою косинусів та наслідками з неї, вчитися знаходити у довільному трикутнику невідому сторону трикутника за відомими сторонами та кутом між ними та невідомі кути за всіма відомими сторонами

Повторюємо

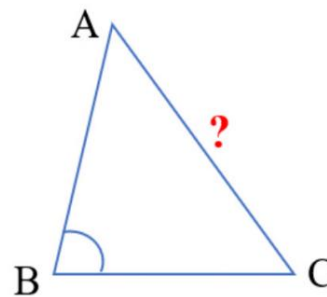
- Сформулюйте теорему Піфагора.
- Який знак має косинус гострого, а який – тупого кута?
- Як знайти косинус кута градусною мірою від 90° до 180° ?

Ознайомтеся з інформацією

Для обчислення елементів прямокутного трикутника достатньо 2 дані величини (дві сторони або сторона і кут). Для обчислення елементів довільного трикутника необхідно хоча б 3 дані величини.



$$c^2 = a^2 + b^2$$



Теорема косинусів

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін мінус подвоєний добуток цих сторін на косинус кута між ними:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

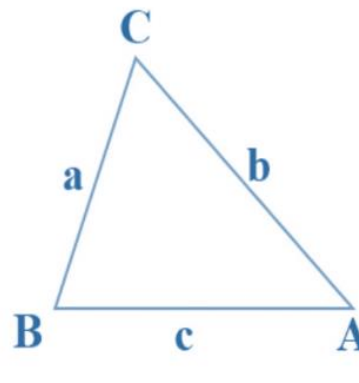
Також теорема виконується для будь-якої сторони трикутника:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Теорема косинусів використовується для обчислення:

- 1) невідомої сторони трикутника, якщо відомі дві сторони і кут між ними;
- 2) обчислення косинуса невідомого кута трикутника, якщо відомі всі сторони трикутника.



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Значення косинуса тупого кута знаходиться за формулою зведення:

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

Найчастіше використовуються тупі кути:

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

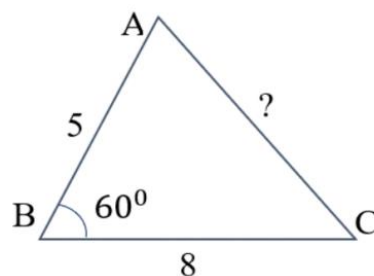
$$\cos 135^\circ = \cos(180^\circ - 45^\circ) = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Розв'язування задач

Задача 1

У трикутнику ABC відомо сторони AB і BC.
AB=5 см, BC= 8 см, а кут між цими сторонами
становить 60 градусів.

Знайдіть невідому сторону трикутника ABC.



Застосуємо теорему косинусів:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$$

$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$$

$$AC^2 = 49$$

$$AC = 7$$

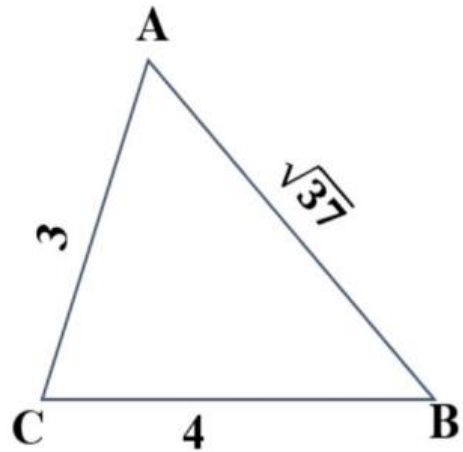
$$AC = -7,$$

не задовольняє умові задачі, оскільки довжина відрізка не може бути від'ємним числом

Відповідь: AC=7

Задача 2

У трикутнику ABC відомо, що $AB = \sqrt{37}$ см,
 $AC = 3$ см, $BC = 4$ см. Знайдіть найбільший кут у
трикутнику ABC.



Розв'язання

$$\sqrt{37} > \sqrt{36} = 6 > 4 > 3$$

Напроти найбільшої сторони в трикутнику завжди лежить найбільший кут. Тому кут C – найбільший. Знайдемо його величину.

Застосуємо теорему косинусів для сторони AB:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos \angle C$$

$$37 = 3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \angle C$$

$$37 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \angle C$$

$$37 = 25 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \angle C$$

$$2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \angle C = -12$$

Виразимо косинус кута C: $\cos \angle C = -\frac{12}{2 \cdot 3 \cdot 4} = -\frac{1}{2}$

Пригадаємо формулу: $\cos (180^\circ - x) = -\cos x$

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$-\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: найбільший кут C дорівнює 120° .

Поміркуйте

- Чому теорему косинусів називають узагальненням теореми Піфагора?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект і §11 підручника
- Розв'язати (письмово): №495(3,4)

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту

nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. – Київ: Генеза, 2017
- [Мій клас](#)
- [Всеукраїнська школа онлайн](#)