

Урок №27

Тема. Розв'язування задач з теми “Чотирикутники”

Мета: удосконалити знання учнів про чотирикутники, їх властивості; показати практичну спрямованість математичних знань під час розв'язування задач

Повторення

Головне в розділі 1

**ЧОТИРИКУТНИК, ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ.
СУМА КУТІВ ЧОТИРИКУТНИКА**

Чотирикутник – фігура, що складається із чотирьох точок і чотирьох відрізків, які послідовно їх сполучають.

Відрізки, які сполучають протилежні вершини чотирикутника, – **діагоналі** чотирикутника.

Сума кутів чотирикутника дорівнює 360° .
Якщо всі кути чотирикутника менші від 180° , то він **опуклий**.
Якщо один з кутів чотирикутника більший за 180° , то він **неопуклий**.

ПАРАЛЕЛОГРАМ, ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКИ

Паралелограм – чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно паралельні.

- Сума будь-яких двох сусідніх кутів паралелограма дорівнює 180° .
- Паралелограм є опуклим чотирикутником.
- У паралелограмі протилежні сторони рівні й протилежні кути рівні.
- Периметр паралелограма

$$P_{ABCD} = 2(AB + BC).$$
- Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Висота паралелограма – перпендикуляр, проведений з будь-якої точки сторони паралелограма до прямої, що містить протилежну сторону.

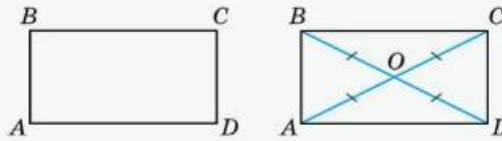
Теорема (ознаки паралелограма). Якщо в чотирикутнику: 1) дві сторони рівні й паралельні, або 2) протилежні сторони попарно рівні, або 3) діагоналі перетинаються й точкою перетину діляться навпіл, або 4) протилежні кути попарно рівні, – то чотирикутник є паралелограмом.

ПРЯМОКУТНИК І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Прямокутник – це паралелограм, у якого всі кути прямі.

- У прямокутнику протилежні сторони рівні.

2. Периметр прямокутника $P_{ABCD} = 2(AB + BC)$.
3. Діагоналі прямокутника точкою перетину діляться навпіл.
4. Діагоналі прямокутника рівні.
5. Точка перетину діагоналей прямокутника рівновіддалена від усіх його вершин.

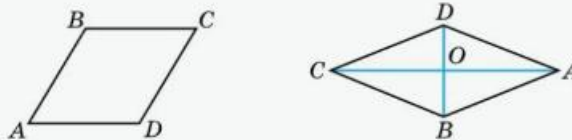


Теорема (ознаки прямокутника). Якщо в паралелограмі: 1) усі кути рівні, або 2) один кут прямий, або 3) діагоналі рівні, – то паралелограм є прямокутником.

РОМБ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Ромб – це паралелограм, у якого всі сторони рівні.

1. Сума будь-яких двох сусідніх кутів ромба дорівнює 180° .
2. У ромба протилежні кути рівні.
3. Діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл.
4. Периметр ромба $P_{ABCD} = 4AB$.
5. Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні й ділять його кути навпіл.

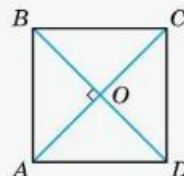
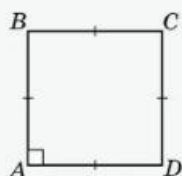


Теорема (ознаки ромба). Якщо в паралелограмі: 1) дві сусідні сторони рівні, або 2) діагоналі перетинаються під прямим кутом, або 3) діагональ ділить навпіл кути паралелограма, – то паралелограм є ромбом.

КВАДРАТ І ЙОГО ВЛАСТИВОСТІ

Квадрат – це прямокутник, у якого всі сторони рівні.

1. Усі кути квадрата прямі.
2. Периметр квадрата $P_{ABCD} = 4AB$.
3. Діагоналі квадрата між собою рівні.



4. Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні й точкою перетину діляться навпіл.

5. Діагоналі квадрата ділять його кути навпіл, тобто утворюють кути 45° зі сторонами квадрата.

6. Точка перетину діагоналей квадрата рівновіддалена від усіх його вершин: $AO = BO = CO = DO$.

Теорема (ознаки квадрата). 1) Якщо діагоналі прямокутника взаємно перпендикулярні, то він є квадратом. 2) Якщо діагоналі ромба між собою рівні, то він є квадратом.

ТРАПЕЦІЯ

Трапеція – це чотирикутник, у якого дві сторони паралельні, а дві інші непаралельні.

Паралельні сторони трапеції – **основи**, а непаралельні – **бічні сторони**. На малюнку AD і BC – основи трапеції, AB і CD – її бічні сторони.

1. Сума кутів трапеції, прилеглих до бічної сторони, дорівнює 180° .

2. Трапеція є опуклим чотирикутником.

Висота трапеції – це перпендикуляр, проведений з будь-якої точки основи трапеції до прямої, що містить протилежну основу.

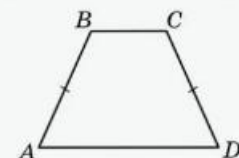
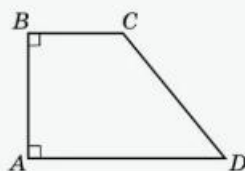
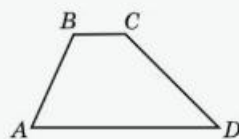
Трапеція **прямокутна**, якщо один з її кутів прямий.

Трапеція **рівнобічна**, якщо її бічні сторони рівні.

1. У рівнобічній трапеції кути при основі між собою рівні.

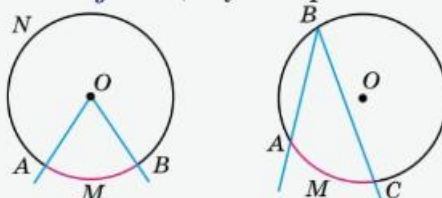
2. Діагоналі рівнобічної трапеції рівні.

Теорема (ознака рівнобічної трапеції). Якщо в трапеції кути при одній основі рівні, то трапеція – рівнобічна.



ВПИСАНІ ТА ЦЕНТРАЛЬНІ КУТИ

Центральний кут – це кут з вершиною в центрі кола.



Градусна міра дуги кола – це градусна міра відповідного центрального кута.

Вписаний кут – це кут, вершина якого належить колу, а сторони перетинають це коло.

Теорема (про вписаний кут). Вписаний кут вимірюється половиною дуги, на яку він спирається.

Наслідок 1. Вписані кути, що спираються на одну й ту саму дугу, між собою рівні.

Наслідок 2. Вписаний кут, що спирається на діаметр, – прямий.

ВПИСАНІ ТА ОПИСАНІ ЧОТИРИКУТНИКИ

Чотирикутник вписаний у коло, якщо всі його вершини лежать на колі.

Коло при цьому – **описане** навколо чотирикутника.

Теорема 1 (властивість кутів вписаного чотирикутника). Сума протилежних кутів вписаного чотирикутника дорівнює 180° .

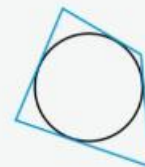
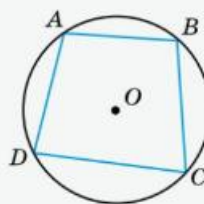
Наслідок 1. Якщо навколо трапеції можна описати коло, то вона рівнобічна.

Теорема 2 (ознака вписаного чотирикутника). Якщо в чотирикутнику сума двох протилежних кутів дорівнює 180° , то навколо нього можна описати коло.

Наслідок 1. Навколо будь-якого прямокутника можна описати коло.

Наслідок 2. Навколо рівнобічної трапеції можна описати коло.

Чотирикутник описаний навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола. **Коло** при цьому – **вписане** в чотирикутник.



Теорема 3 (властивість сторін описаного чотирикутника). В описаному чотирикутнику суми протилежних сторін між собою рівні.

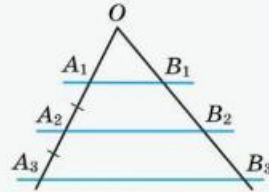
Теорема 4 (ознака описаного чотирикутника). Якщо в чотирикутнику суми протилежних сторін рівні, то в цей чотирикутник можна вписати коло.

Наслідок. У будь-який ромб можна вписати коло.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

Якщо паралельні прямі, які перетинають сторони кута, відтинають на одній його стороні рівні між собою відрізки, то вони відтинають рівні між собою відрізки й на другій його стороні.

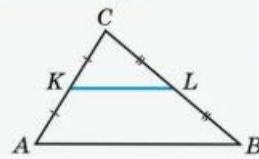
Наслідок. Паралельні прямі, які перетинають дві дані прямі та відтинають на одній з них рівні відрізки, відтинають рівні відрізки й на другій прямій.



СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРИКУТНИКА, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Середня лінія трикутника – це відрізок, який сполучає середини двох його сторін.

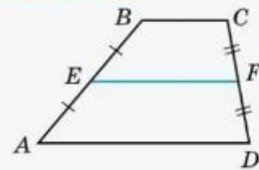
Теорема 1 (властивість середньої лінії трикутника). Середня лінія трикутника, що сполучає середини двох сторін, паралельна третій стороні та дорівнює її половині.



СЕРЕДНЯ ЛІНІЯ ТРАПЕЦІЇ, ЇЇ ВЛАСТИВОСТІ

Середня лінія трапеції – це відрізок, що сполучає середини її бічних сторін.

Теорема (властивість середньої лінії трапеції). Середня лінія трапеції паралельна основам і дорівнює їхній півсумі.



Розв'язування задач

1. Знайдіть сторону ромба, периметр якого дорівнює 28 см

А) 7 см	Б) 14 см	В) 18 см	Г) 9 см
---------	----------	----------	---------

2. AC - діагональ квадрата ABCD. Обчисліть величину кутів трикутника ADC

А) 60°; 60°; 60°	Б) 45°; 45°; 90°	В) 30°; 30°; 120°	Г) 45°; 75°; 60°
------------------	------------------	-------------------	------------------

3. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, у якої основи та бічна сторона дорівнюють відповідно 12 см, 8 см, 3 см

А) 23 см	Б) 27 см	В) 26 см	Г) 34 см
----------	----------	----------	----------

4. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника ABCD, якщо $\angle BAC = 56^\circ$

А) 96°	Б) 68°	В) 84°	Г) 112°
---------------	---------------	---------------	----------------

5. Знайдіть кути ромба, якщо сума двох із них дорівнює 160°

А) $40^\circ; 40^\circ; 140^\circ; 140^\circ$	Б) $60^\circ; 60^\circ; 120^\circ; 120^\circ$	В) $80^\circ; 80^\circ; 100^\circ; 100^\circ$	Г) $20^\circ; 20^\circ; 160^\circ; 160^\circ$
---	---	---	---

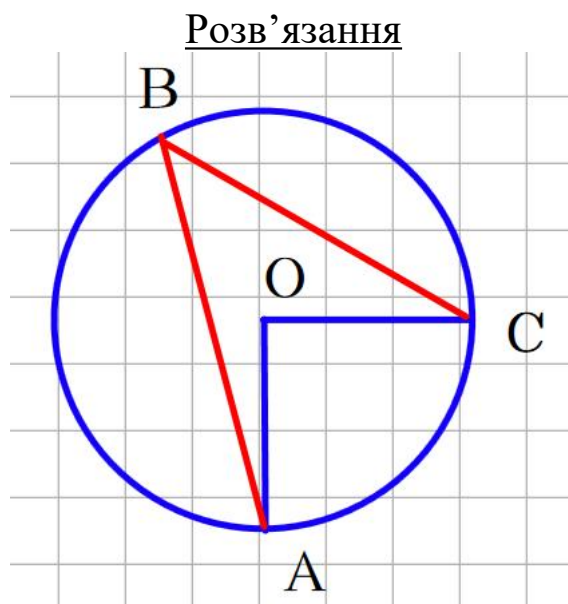
6. Знайдіть периметр описаного чотирикутника, три послідовні сторони якого дорівнюють 4 см; 8 см; 12 см

А) 17 см	Б) 24 см	В) 32 см	Г) 34 см
----------	----------	----------	----------

7. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо різниця між основами трапеції дорівнює 4 см.

А) 20 см	Б) 12 см	В) 15 см	Г) 18 см
----------	----------	----------	----------

8. Обчисліть величину вписаного та відповідного йому центрального кута, якщо вписаний кут на 45° менший від центрального кута.



$\angle AOC$ - центральний, $\angle ABC$ - вписаний

$\angle AOC = 2\angle ABC$ (теорема); $\angle AOC - \angle ABC = 45^\circ$ (за умовою).

Нехай $\angle ABC = x$, тоді $\angle AOC = x + 45$

$$x + 45 = 2x$$

$$x = 45$$

$$\angle ABC = 45^\circ, \angle AOC = 45 + 45 = 90^\circ$$

Відповідь. $45^\circ, 90^\circ$

9. Кут при основі рівнобічної трапеції 60° . Бічна сторона перпендикулярна до однієї з діагоналей. Знайдіть периметр трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 8 см

Розв'язання



За умовою задачі $AB = CD = 8$ см, $\angle D = 60^\circ$, $\angle ACD = 90^\circ$
 $\angle CAD = 30^\circ$, $AD = 2CD$ (катет CD лежить проти кута 30°). $AD = 16$ см
 Проведемо дві висоти BK і CM .
 $AK = MD$ (як відповідні сторони рівних трикутників ABK і DMC)
 $MD = 4$ см (катет $\triangle DMC$, який лежить проти $\angle MCD = 30^\circ$, CD - гіпотенуза)
 $BC = MK = 16 - 2 \cdot 4 = 8$ (см).
 $P_{ABCD} = 8 + 8 + 8 + 16 = 40$ (см)

Відповідь. 40 см

Домашнє завдання

Повторити правила на с. 81 - 85

Розв'язати задачі

1. Знайдіть сторону ромба, периметр якого дорівнює 36 см
2. AC - діагональ квадрата $ABCD$. Обчисліть величину кутів трикутника ABC
3. Знайдіть периметр рівнобічної трапеції, у якої основи та бічна сторона дорівнюють відповідно 15 см, 5 см, 7 см
4. Знайдіть кут між діагоналями прямокутника $ABCD$, якщо $\angle ACD = 48^\circ$
5. Знайдіть кути ромба, якщо сума двох із них дорівнює 120°
6. Знайдіть периметр описаного чотирикутника, три послідовні сторони якого дорівнюють 3 см; 5 см; 9 см
7. Середня лінія трапеції дорівнює 10 см. Знайдіть більшу основу трапеції, якщо одна з основ трапеції в 3 рази більша від другої.
8. Обчисліть величину вписаного та відповідного йому центрального кута, якщо центральний кут на 35° більший від вписаного кута.
9. Кут при основі рівнобічної трапеції 60° . Бічна сторона перпендикулярна до однієї з діагоналей. Знайдіть периметр трапеції, якщо її бічна сторона дорівнює 4 см