π

# 23.04.2025. Алгебра8
# Урок №60

**Тема.** Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних

# Задачі, які розв'язуємо за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних:

- задачі на рух;
- задачі на роботу;
- задачі на співвідношення чисельників і знаменників дробу;
- задачі на купівлю товарів;
- задачі на запис числа;
- геометричні задачі;
- інші задачі.

π

## При розв'язуванні задач за допомогою рівнянь

## Треба пам'ятати!

Значення коренів рівняння можуть задовольняти ОДЗ рівняння, <u>але не задовольняти умову задачі.</u>

# ЗАПАМ'ЯТАЙ!

## Алгоритм розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь.

**Аналіз умови задачі**

↓

**Математична модель задачі**

↓

**Рівняння**

↓

**Розв'язування рівняння**

↓

**Аналіз отриманих результатів**

↓

**Відповідь**

# Це треба знати!

Задачі на роботу $v = p * t$ $p = \frac{v}{t}$ $t = \frac{v}{p}$

де $v$ – обсяг роботи,

***p*** – продуктивність праці (обсяг роботи, яку виконано за одиницю часу),

***t*** – час, протягом якого кожний виконує весь обсяг роботи, працюючи самостійно.

# Запам'ятай!

Якщо не зазначено, який обсяг роботи виконується, то вважається що **$v$=1 *(обсяг усієї роботи позначаємо через 1)***

# Скористайся алгоритмом!

**№1.** Два робітники, працюючи разом, виконали виробниче завдання за 12 годин. За скільки годин може виконати це завдання кожен робітник, працюючи самостійно, якщо один з них, може це зробити на 7 годин швидше за другого?

**1. Аналіз умови задачі.**

***Основні величини:***

- обсяг усієї роботи;
- час роботи І робітника;
- час роботи ІІ робітника;
- час роботи І і ІІ робітників разом.

***Аналізуємо обсяг роботи:*** всю роботу приймемо за одиницю. Ця величина не зазначена в умові й не впливає на розв'язання задачі.

***Аналізуємо час роботи:*** позначаємо час виконання всієї роботи І робітником як $X$ годин, тоді ІІ робітник, працюючи самостійно, виконає всю роботу за $(X+7)$ годин.

***Аналізуємо продуктивність роботи:*** продуктивність роботи І робітника буде $\frac{1}{X}$, а ІІ робітника – $\frac{1}{X+7}$. Спільна продуктивність обох робітників ( у разі спільної роботи) буде $\frac{1}{12}$.

## 2. Математична модель (у вигляді таблиці).

| | Продуктивність праці, *p* | Робота, *v=1* | Час, *t год* |
|---|---|---|---|
| **І робітник** | $\frac{1}{x}$ | 1 | X |
| **ІІ робітник** | $\frac{1}{x+7}$ | 1 | X+7 |
| **Працюючи разом І і ІІ робітники** | $\frac{1}{12}$ | 1 | 12 |

## 3. Складаємо рівняння.

Враховуючи, що $p_I + p_{II} = p_{спільна}$ де $p_{спільна} = \frac{1}{t_{спільний}}$ маємо $\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{12}$

## 4. Розв'язуємо рівняння.

1) $$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7} - \frac{1}{12} = 0$$

$$\frac{12(x+7) + 12x - x(x+7)}{12x(x+7)} = 0$$

$$\begin{cases} 12(x+7) + 12x - x^2 - 7x = 0 \\ 12x(x+7) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 12x + 84 + 12x - x^2 - 7x = 0 \\ x \neq 0; x \neq -7 \end{cases}$$

$$-x^2 + 17x + 84 = 0$$

$$x^2 - 17x - 84 = 0$$

За теоремою Вієта:

$x_1 + x_2 = 17$

$x_1 * x_2 = -84$

$x_1 = 21$

$x_2 = -4$ – не задовольняє умову задачі.

## 5. Аналізуємо отримані результати.

$x_2 = \cancel{-4}$ не задовольняє умову задачі.

Отже, ***x=21*** (год) – за скільки виконує роботу І робітник.

**2)** *21+7=27* (год) – за скільки виконує роботу ІІ робітник.

**Відповідь:** 21 година; 27 годин.

№2. Перший насос може наповнити басейн на 12 годин швидше, ніж другий. Через 4 години після того, як було включено другий насос, включили перший, і через 10 годин спільної роботи виявилося, що наповнено $\frac{2}{3}$ басейну.

**За скільки годин може наповнити басейн кожен насос, працюючи самостійно?**

### *1. Аналіз умови задачі*

1) задача на спільну роботу;
2) основні величини: час роботи I і II насосів, продуктивність роботи;
3) всю роботу приймаємо за одиницю.

*Аналізуємо час роботи і продуктивність:*

Нехай I насос може наповнити весь басейн за ***х годин***, тоді II насос може його наповнити за ***(х+12) годин.*** I насос за 1 годину наповнює $\frac{1}{x}$ басейну, II насос – $\frac{1}{x+12}$ басейну. Перший насос працював 10 годин і заповнив $\frac{10}{x}$ басейну, а II насос працював 4+10=14 (год) і заповнив $\frac{14}{x+12}$ басейну.

### *2. Математична модель (у вигляді таблиці)*

| | ***Час, год*** | ***Продуктивність роботи*** | ***Робота*** | ***Спільна робота I і II насосів*** |
|---|---|---|---|---|
| ***I насос*** | *x* | $\frac{1}{x}$ | $\frac{10}{x}$ | $\frac{2}{3}$ |
| ***II насос*** | *x+12* | $\frac{1}{x+12}$ | $\frac{14}{x+12}$ | |

***3. Складаємо рівняння***

$$\frac{10}{x}+\frac{14}{x+12}=\frac{2}{3}$$

***4. Розв'язуємо рівняння***

1) $\frac{10}{x}+\frac{14}{x+12}=\frac{2}{3} \,|\,:2$

$$\frac{5}{x}+\frac{7}{x+12}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{5(x+12)+7x}{x(x+12)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{5x+60+7x}{x(x+12)}=\frac{1}{3}$$

$$\frac{12x+60}{x(x+12)}=\frac{1}{3}$$

$$3(12x+60)=x(x+12)$$

$$36x+180=x^2+12x$$

$$x^2+12x-36x-180=0$$

$$x^2-24x-180=0$$

$$x_1=30, x_2=-6$$

***5. Аналізуємо отримані результати***

$x_2 = -6$ – не задовольняє умову задачі.

Отже, $x_1 = 30$ (год) – може наповнити басейн I насос, працюючи самостійно.

**2)** 30+12=42 (год) – може наповнити басейн II насос при роботі самостійно.

***6. Відповідь***

30 годин; 42 години.

Рівняння виду $ax^4 + bx^2 + c = 0$,
де x-змінна, a, b,c – числа, причому $a \neq 0$,
називають **біквадратним**

## *Метод заміни змінної*

Вводимо нову змінну t таку, що $x^2 = t \ \ (t > 0)$. Тоді біквадратне рівняння відносно змінної x перетворюється у квадратне рівняння відносно змінної t: $at^2 + bt + c = 0$.

# Зведення рівняння до квадратного способом заміни

**Приклад:**

$$(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) = 24$$

**Розв'язання**

Заміна: $x^2 + 5x = y$

$$y^2 - 2y - 24 = 0$$

$$y_1 = 6,\ y_2 = -4$$

| | |
|---|---|
| $x^2 + 5x = 6$ | $x^2 + 5x = -4$ |
| $x^2 + 5x - 6 = 0$ | $x^2 + 5x + 4 = 0$ |
| $x_1 = -6,\ x_2 = 1$ | $x_3 = -4,\ x_4 = -1$ |

Відповідь: -6, 1, -4, -1

Приклад:

Щоб розв'язати біквадратне рівняння, використаємо метод заміни змінної.
Заміна $x^2 = t$ зводить рівняння до квадратного відносно змінної $t$, корені якого легко знайти.
Далі потрібно повернутися до змінної $x$.

Наприклад:
Розв'яжемо рівняння
$$x^4 - 5x^2 + 4 = 0.$$

Розв'язок:
Зробимо заміну $x^2 = t$. Маємо:
$$t^2 - 5t + 4 = 0.$$
$$t_1 = 1, \;\; t_2 = 4.$$
Повернемося до заміни і знайдемо значення $x$:
$$x^2 = 1; \;\; x^2 = 4;$$
$$x = \pm 1; \;\; x = \pm\sqrt{4}$$
Отже, вихідне рівняння має корені:
$$x_1 = 1; \;\; x_2 = -1; \;\; x_3 = 2; \;\; x_4 = -2.$$
Відповідь: $1; -1; \; 2; -2.$

Приклад:

# Знадіть корені рівняння

$$2t^4 - 7t^2 - 4 = 0$$

## Розв'язання:

Використаємо метод заміни змінної.

$t^2 = y$, тоді $t^4 = (t^2)^2 = y^2$.

Запишемо задане рівняння з використанням змінної у: $2y^2 - 7y - 4 = 0$.

Розв'яжемо отримане квадратне рівняння $2y^2 - 7y - 4 = 0$; $a = 2,\ b = -7,\ c = -4$;

$$D = b^2 - 4ac; \quad D = (-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4) = 49 + 32 = 81, \quad D > 0.$$

$$y_1 = \frac{7+9}{2 \cdot 2} = \frac{16}{4} = 4; \qquad y_2 = \frac{7-9}{2 \cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Повернемося до початкової змінної:

$$y_1 = 4 \quad \text{або} \quad y_2 = -\frac{1}{2};$$

$$x^2 = 4 \text{ або } \quad x^2 = -\frac{1}{2}.$$

Розв'яжемо отримані неповні квадратні рівняння:

$x^2 = 4$ або $x^2 = -\frac{1}{2}$.

$x = \pm 2$; розв'язків немає.

Відповідь: $\pm 2$

# Алгоритм розв’язування дробово-раціонального рівняння

1. Знайдіть область допустимих значень рівняння.
2. Зведіть рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$.
3. Використайте правило рівності добутку дробу нулю й розв’яжіть рівняння P(x)=0.
4. Перевірте, чи задовольняють знайдені роз’язки рівняння P(x) область допустимих значень. Вилучіть сторонні корені.
5. Запишіть відповідь

Приклад:

Розв'яжіть дробове раціональне рівняння $\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{x^2-25}$

**Розв'язання**

*Виконаємо тотожні перетворення у знаменниках дробів (використаємо формули скороченого множення, знайдемо спільний знаменник і зведемо до нього дроби лівої та правої частин рівняння). Перенесемо доданок з правої частини рівняння до лівої, змінивши знак на протилежний, розкриємо дужки та зведемо подібні доданки. Одержимо:*

$$\frac{4}{x^2-10x+25}-\frac{1}{x+5}=\frac{10}{x^2-25};$$

$$\frac{4}{(x-5)^2}-\frac{1}{x+5}-\frac{10}{(x-5)(x+5)};$$

$$\frac{4(x+5)-(x-5)^2-10(x-5)}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\frac{4x+20-(x^2-10x+25)-10x+50}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\frac{4x+20-x^2+10x-25-10x+50}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

Використаємо умову рівності дробу нулю, перейдемо до системи рівнянь:

$$\frac{-x^2+4x+45}{(x-5)^2(x+5)}=0;$$

$$\begin{cases} x^2-4x-45=0, \\ (x-5)^2(x+5)\neq 0; \end{cases}$$

1) $x^2-4x-45=0,$

$x^2-9x+5x-45=0,$

$x(x-9)+5(x-9)=0,$

$(x-9)(x+5)=0,$

$x=9, \quad x=-5.$

2) $(x-5)^2(x+5)\neq 0,$

$x\neq 5, \quad x\neq -5.$

***Відповідь:*** $x = 9$.

**Приклад:** Розв'яжіть рівняння $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0$

***Розв'язання***

Маємо рівняння $(x^2 - 2)^2 - 8(x^2 - 2) + 7 = 0$
Можна помітити, що в дужках містяться однакові вирази. Тому можемо ввести заміну.
Позначимо $x^2 - 2 = t$

$$t^2 - 8t + 7 = 0,$$
$$t^2 - 7t - t + 7 = 0,$$
$$t(t-7) - (t-7) = 0;$$
$$(t-7)(t-1) = 0,$$
$$t = 7, \quad t = 1.$$

| Якщо $t = 7$, то | Якщо $t = 1$, то |
|---|---|
| $x^2 - 2 = 7,$ | $x^2 - 2 = 1,$ |
| $x^2 = 9,$ | $x^2 = 3,$ |
| $x = \pm 3.$ | $x = \pm\sqrt{3}.$ |

*Відповідь:* $x_{1,2} = \pm\sqrt{3};\ x_{3,4} = \pm 3$

# Розв'яжіть самостійно

## *І варіант*

1. Два вантажні крани, працюючи разом, можуть розвантажити баржу за 6 годин. За скільки годин може розвантажити цю баржу кожен кран, працюючи окремо, якщо другому для цього потрібно на 9 годин менше, ніж першому?

2. Один з робітників може виконати виробниче завдання на 3 години швидше, ніж другий. Якщо перший робітник буде працювати 4 години, а потім його змінить другий, то останньому треба буде працювати 3 години, щоб закінчити завдання. За скільки годин може виконати все завдання перший робітник?

## *ІІ варіант*

1. Басейн наповнюється водою за допомогою двох труб. Коли перша туба пропрацювала 7 годин, включили другу трубу. Разом вони пропрацювали 2 години до повного наповнення басейну. За скільки годин може наповнити басейн кожна труба, працюючи окремо, якщо першій потрібно на це на 4 години більше, ніж другій?

2. Одному робітникові для виконання виробничого завдання потрібно на 2 години більше, ніж другому. Перший робітник пропрацював 2 години, а потім його змінив другий. Після того як другий робітник пропрацював 3 години, виявилося, що виконано $\frac{3}{4}$ завдання. За скільки годин може виконати це завдання кожний з робітників, працюючи самостійно?

# Перевір себе!

| I варіант | II варіант |
|---|---|
| *1.Рівняння:* $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-9}=\frac{1}{6}$ | *1. Рівняння:* $\frac{9}{x+4}+\frac{2}{x}=1$ |
| **Відповідь:** 18 годин, 9 годин. | **Відповідь:** 12 годин, 8 годин. |
| *2. Рівняння:* $\frac{4}{x}+\frac{3}{x+3}=1$ | *2. Рівняння:* $\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x}=\frac{3}{4}$ |
| **Відповідь:** 6 годин. | **Відповідь:** 8 годин, 6 годин. |

# Домашнє завдання

Повторити §24, 25, 26

Виконати завдання за посиланням

https://vseosvita.ua/test/start/szu910

або на с. 228 - 229 №1 - 9