20.11.2024 **Урок 22** **Алгебра 8**

Тема. Степінь з цілим показником.
Мета. домогтися засвоєння учнями змісту означення степеня з цілим від'ємним показником (для цілої та дробової основи степеня); сформувати вміння відтворювати означення степеня та застосовувати його для перетворення степеня з цілим від'ємним показником у дріб, та навпаки, сформувати вміння розв'язувати вправи на обчислення значень числових виразів із застосуванням вивченого означення степеня з цілим показником.
Тип уроку. Засвоєння знань та первинних умінь.

Хід уроку

I. Організаційний етап.

III. Формулювання мети і завдань уроку

IV. Актуалізація опорних знань та умінь

Що називається степенем числа?
Що означає a^5, $в^3$, 7^{10}...

Виконання усних вправ

1. Прочитайте вираз, назвавши основу і показник степеня:

1) 5^4; 2) $(6,1)^9$; 3) 10^1;

4) $(-8)^5$; 5) 0^{17}; 6) $-(\frac{1}{7})^5$.

2. Піднесіть до квадрата:

1) 4; 2) -3; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{2}{3}$; 5) $-\frac{3}{7}$ 6) 0,9.

3. Піднесіть до куба:

1) 3; 2) -2; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{2}{5}$; 5) $-\frac{1}{2}$; 6) -0,1.

4. Визначте знак виразу, не виконуючи піднесення до степеня:

1) $(\frac{1}{4})^3$; 2) $-(\frac{1}{4})^7$; 3) $(-\frac{1}{4})^2$; 4) $-(\frac{1}{4})^2$;

5) $(-2)^9$ 6) -2^{10} 7) $(-2)^{10}$; 8) -2^9;

5.Укажіть порядок дій в обчисленні значення виразів:

$15^2 - 3^4$; $2\ \ 7^2 - 3 :\ \frac{1}{2}^{\ 3}$; $(3^2 - 2^3)^{20}$.

V. Засвоєння знань

Нагадаємо, що в 7 класі ми вивчали степінь з натуральним показником. За означенням степеня $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множників}}$, якщо $n > 1$, n — натуральне число і $a^1=a$.

Під час розв'язування задач практичного змісту, наприклад з фізики або хімії, трапляються степені, показник яких нуль або ціле від'ємне число. Степінь з від'ємним показником можна знайти в науковій та довідковій літературі. Наприклад, масу атома гелію, записують так: $6{,}64 \cdot 10^{-27}$ кг. Як розуміти зміст запису 10^{-27}?

Розглянемо степені числа 3 з показниками 1, 2, 3, 4...:

$$3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4\ \ldots \text{ або } 3,\ 9,\ 27,\ 81\ldots$$

У цьому рядку кожне наступне число у 3 рази більше за попереднє. Продовжимо рядок вліво, зменшуючи кожного разу показник степеня на 1. Дістанемо:

$$\ldots 3^{-3},\ 3^{-2},\ 3^{-1},\ 3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3,\ 3^4\ldots$$

Число 3^0 повинно бути в 3 рази менше за $3^1=3$. Але в 3 рази меншим за число 3 є число 1, отже, $3^0 = 1$. Така сама рівність $a^0 = 1$ буде виконуватися для будь-якої основи а, відмінної від нуля.

Степінь числа а, яке не дорівнює нулю, з нульовим показником дорівнює одиниці:

$$\boldsymbol{a^0 = 1 \ (якщо\ a \neq 0).}$$

Зліва у рядку від числа $3^0 = 1$ стоїть число 3^{-1}. Це число у 3 рази менше за 1, тобто дорівнює $\frac{1}{3}$. Отже, $3^{-1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3^1}$. Міркуючи далі аналогічно, дістанемо

$$3^{-2} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2};\ 3^{-3} = \frac{1}{27} = \frac{1}{3^3}$$

і т.д. Доцільно прийняти наступне означення степеня з цілим від'ємним показником $(-n)$:

$$\textit{якщо } a \neq 0 \textit{ і } n \textit{ — натуральне число, то } a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{aaa\ldots a}_{n-раз}, & \textit{якщо натуральне число } n > 1; \\ a, & \textit{якщо } n = 1; \\ 1, & \textit{якщо } n = 0 \textit{ і } a \neq 0; \\ \frac{1}{a^{-n}}, & \textit{якщо } n - \textit{ціле від'ємне і } a \neq 0. \end{cases}$$

Приклад 1. Замінити степінь з цілим від’ємним показником дробом:

1) 5^{-7}; 2) x^{-1}; 3) $(a+b)^{-9}$.

Розв’язання:

$$1)\ 5^{-7}=\frac{1}{5^7};\ 2)\ x^{-1}=\frac{1}{x^1}=\frac{1}{x};\ 3)\ (a+b)^{-9}=\frac{1}{(a+b)^9}.$$

Приклад 2. Замінити дріб степенем з цілим від'ємним показником:

$$1)\ \frac{1}{a^2};\ 2)\ \frac{1}{m-n};\ 3)\ \frac{1}{7^{13}}.$$

Розв'язання:

$$1)\ \frac{1}{a^2}=a^{-2};\ 2)\ \frac{1}{m-n}=(m-n)^{-1};\ 3)\ \frac{1}{7^{13}}=7^{-13}.$$

Приклад 3. Виконати піднесення до степеня: $1)\ 4^{-2};\ 2)\ (-9)^0;\ 3)\ (-5)^{-3}.$

Розв'язання:

$$1)\ 4^{-2}=\frac{1}{4^2}=\frac{1}{16};\qquad 2)\ (-9)^0=1;$$

$$3)\ (-5)^{-3}=\frac{1}{(-5)^3}=\frac{1}{-125}=-\frac{1}{125}.$$

Розглянемо піднесення до від'ємного цілого степеня дробу $\frac{a}{b}$. Якщо n - натуральне число і $a\neq 0$, маємо:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n}=1:\left(\frac{a}{b}\right)^n=1:\frac{a^n}{b^n}=1\cdot\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Отже, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n$

Приклад 4. Обчислити: $1)\ \left(2\frac{1}{3}\right)^{-2};\qquad 2)\ 27\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}.$

Розв'язання:

$$1)\ \left(2\frac{1}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{7}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{7}\right)^{2}=\frac{9}{49}.\ 2)$$

$$27\cdot\left(1\frac{1}{2}\right)^{-4}=27\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-4}=27\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{4}=\frac{27\cdot 16}{81}=\frac{16}{3}=5\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $1)\ \frac{9}{49};\qquad 2)\ 5\frac{1}{3}.$

Означення степеня з цілим від'ємним показником	
1.Якщо: $a\neq 0$, n — натуральне число, то $\boldsymbol{a^{-n}=\frac{1}{a^n}}$	Приклад. 1) $3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$;
2. Якщо: $a\neq 0$, n=0; то $\boldsymbol{a^0=1}$	Приклади.1) $(-2{,}6)^0=1$; 2) $(\frac{2}{3})^0=1$

3. Записи $\mathbf{0^0}$, $\mathbf{0^{-n}}$ не мають змісту	
4. Якщо: $\frac{a}{b} \neq 0$; n — натуральне число, то $\boldsymbol{(\frac{a}{b})^{-n} = (\frac{b}{a})^{n}}$.	Приклад. $(\frac{2}{3})^{-2} = (\frac{2}{3})^{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$
5.Обчисліть значення виразу:	$(\frac{3}{8})^{-1} + 9^{-2} - (-2{,}6)^0 =$
Крок 1. Замінити степені з від'ємними показниками на степені з натуральними показниками:	$= \frac{8}{3} + \frac{1}{9^2} - (-2{,}6)^0 =$
Крок 2. Виконати піднесення до степеня:	$= \frac{8}{3} + \frac{1}{81} - 1 =$
Крок 3. Виконати дії з дробами:	$2\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{81} = 1\frac{55}{81}$

VI. Формування умінь

Виконання усних вправ

1. Обчисліть: 2^4; $(-3)^2$; $(0{,}1)^3$; $(-1)^8$; $\frac{1}{3^4}$; $\frac{1}{(-2)^3}$; $(-15)^9$; $0{,}3^0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^0$; 0^0.
2. Замініть дробом степінь із цілим від'ємним показником. Заповніть пропуски.
$$9^{-2} = \frac{1}{9^{\cdots}};\ 15^{-1} = \frac{1}{15^{\cdots}};\ 3^{-3} = \frac{1}{\ldots};\ (-2)^{-4} = \frac{\ldots}{\ldots}.$$
3. Замініть дріб степенем із цілим від'ємним показником:
$$\frac{1}{3^2} = 3^{\cdots};\ \frac{1}{7} = 7^{\cdots};\ \frac{1}{4^3} = \ldots;\ \frac{1}{2^9} = \ldots$$

Від'ємні показники степеня першим систематично почав вживати І. Ньютон, хоч вони були відомі раніше. У 1667 році він зазначив «як алгебраїсти замість ***aa, aaa*** і т.д. пишуть $\boldsymbol{a^2}$, $\boldsymbol{a^3}$, і т.д. так я замість $\boldsymbol{\frac{1}{a^2}}$, $\boldsymbol{\frac{1}{a^3}}$ пишу, $\boldsymbol{a^{-2}}$, $\boldsymbol{a^{-3}}$»

До нашого часу збереглися глиняні плитки з таблицями квадратів і кубів натуральних чисел, зроблені стародавніми вавилонянинами. Згодом учені стали розглядати четвертий, п'ятий та вищі степені.

Степінь з нульовим показником запровадили в V столітті незалежно один від одного самаркандець Аль – Каші і француз Н. Шюке. Француз Н. Шюке також використовував степені з від'ємними показниками. Теорію степенів з від'ємними показниками розробив у XVII столітті англійський математик Джорж Валліс.

Виконання письмових вправ

№268, 270, 272

VII. Підсумки уроку

Тестові завдання

1. Тотожно рівним виразу 7^{-3} є вираз:

а) -7^3; б) $\frac{1}{7^3}$; в) $\frac{1}{7 \cdot 3}$ г) $\frac{1}{7^{-3}}$.

2. Тотожно рівним дробу $\mathbf{\frac{1}{8}}$ є вираз:

а) 2^3 ; б) 2^4; в) 4^{-2}; г) 2^{-3}

3. Значення виразу $2^{-3} + 2^{-2}$ дорівнює:

а) -10; б) $\frac{3}{8}$; в) $\frac{5}{12}$; г) 12.

4. Тотожним до степеня $(\frac{3}{4})^{-2}$ є вираз:

а) $(\frac{4}{3})^{-2}$; б) $\left(\frac{4}{3}\right) \cdot 2$; в) $(\frac{4}{3})^2$; г) $\frac{3}{4} \cdot (-2)$

VIII. Домашнє завдання

Повторити властивості степенів з натуральним показником

Опрацювати § 9, вивчити правила, формули.

Переглянути навчальне відео

https://www.youtube.com/watch?v=XrcSK8ou170&authuser=1

Виконати завдання за посиланням

https://vseosvita.ua/test/start/rde756

або розв'язати №277, 281