

Тема. Множення вектора на число

Мета: ознайомитися зі способами множення вектора на число, вчитися обчислювати і знаходити графічно добуток вектора на число

Пригадайте

- Що таке вектор?
- Які вектори називають колінеарними?
- Що називають довжиною вектора?
- Який вектор буде протилежно напрямленим до даного?

Ознайомтеся з інформацією

Нехай дано ненульовий вектор \vec{a} . На рисунку 1 зображено вектор \overline{AB} , рівний вектору $\vec{a} + \vec{a}$, і вектор \overline{CD} , рівний вектору $(-\vec{a}) + (-\vec{a}) + (-\vec{a})$. Очевидно, що

$$|\overline{AB}| = 2|\vec{a}| \text{ і } \overline{AB} \uparrow \vec{a},$$

$$|\overline{CD}| = 3|\vec{a}| \text{ і } \overline{CD} \downarrow \vec{a}.$$

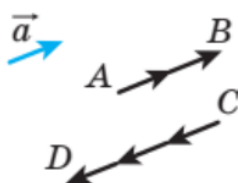


Рис. 1

Вектор \overline{AB} позначають $2\vec{a}$ і вважають, що його отримано в результаті множення вектора \vec{a} на число 2. Аналогічно вважають, що вектор \overline{CD} отримано в результаті множення вектора \vec{a} на число -3 , і записують: $\overline{CD} = -3\vec{a}$.

Добутком вектора $\vec{a}(a_1; a_2)$ на число k (або добутком числа k на вектор \vec{a}) називають вектор $k\vec{a} = k(a_1; a_2) = (ka_1; ka_2)$.

Сформулюймо **властивості множення вектора на число**. Для будь-яких векторів \vec{a} і \vec{b} та чисел k, m :

- 1) $k\vec{a} = \vec{a}k$;
- 2) $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$;
- 3) $k\vec{0} = \vec{0}$;
- 4) $0\vec{a} = \vec{0}$;
- 5) $(k+m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$;
- 6) $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

Ці властивості дають змогу перетворювати вирази, які містять суму векторів, різницю векторів і добуток вектора на число, аналогічно тому, як ми перетворюємо алгебраїчні вирази. Наприклад,
 $2(\vec{a} - 3\vec{b}) + 3(\vec{a} + \vec{b}) = 2\vec{a} - 6\vec{b} + 3\vec{a} + 3\vec{b} = 5\vec{a} - 3\vec{b}$.

Довжина вектора $k\vec{a}$ дорівнює $|k| |\vec{a}|$.

Якщо $\vec{a} \neq \vec{0}$, то вектор $k\vec{a}$ **співнаправлений** із вектором \vec{a} за умови $k > 0$ і **протилежно напрямлений** із вектором \vec{a} , за умови $k < 0$.

Якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $k = 0$, то вважають, що $k\vec{a} = \vec{0}$.

На рисунку 2 зображено вектори \vec{a} , $-2\vec{a}$, $\frac{2}{3}\vec{a}$, $\sqrt{3}\vec{a}$.

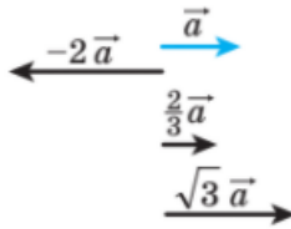


Рис. 2. Приклади зміни довжини вектора внаслідок множення на деяке число k

З означення добутку вектора також випливає, що:

$$\begin{aligned}1 \cdot \vec{a} &= \vec{a}; \\ -1 \cdot \vec{a} &= -\vec{a}.\end{aligned}$$

Також з означення випливає, що **коли** $\vec{b} = k\vec{a}$, **то вектори** \vec{a} і \vec{b} **колінеарні**.

А якщо вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні, то чи можна подати вектор \vec{b} як добуток $k\vec{a}$? Відповідь дає така **теорема**. Якщо вектори \vec{a} і \vec{b} колінеарні й $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k , що $\vec{b} = k\vec{a}$.

Наслідок 1

Вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(kb_1; kb_2)$ колінеарні.

Наслідок 2

Якщо вектори $\vec{a}(a_1; a_2)$ і $\vec{b}(b_1; b_2)$ колінеарні, причому $\vec{a} \neq \vec{0}$, то існує таке число k , що $b_1 = ka_1$ і $b_2 = ka_2$.

Перегляньте відео за посиланням:

https://youtu.be/zc9_fs9J2Ek

Розв'язування задач

Задача 1

Знайдіть модулі векторів $3\vec{m}$ та $-\frac{1}{2}\vec{m}$, якщо $|\vec{m}| = 4$.

Розв'язання

$$|3\vec{m}| = 3 \cdot |\vec{m}| = 3 \cdot 4 = 12$$

$$|-\frac{1}{2}\vec{m}| = \frac{1}{2}|\vec{m}| = \frac{1}{2} \cdot 4 = 2$$

Відповідь: $|3\overline{m}| = 12$, $|\frac{1}{2}\overline{m}| = 2$.

Задача 2

Визначте, співнаправленими чи протилежно напрямленими є ненульові вектори \overline{a} і \overline{b} , якщо:

1) $\overline{b} = 2\overline{a}$;

2) $\overline{a} = -\frac{1}{3}\overline{b}$;

3) $\overline{b} = \sqrt{2}\overline{a}$.

Знайдіть відношення $\frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|}$.

Розв'язання

1) $\overline{b} = 2\overline{a} \Rightarrow \overline{b} \uparrow \overline{a}, \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{|\overline{a}|}{|2\overline{a}|} = \frac{|\overline{a}|}{2|\overline{a}|} = \frac{1}{2}$

2) $\overline{a} = -\frac{1}{3}\overline{b} \Rightarrow \overline{b} \uparrow \overline{a}, \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{|-\frac{1}{3}\overline{b}|}{|\overline{b}|} = \frac{\frac{1}{3}|\overline{b}|}{|\overline{b}|} = \frac{1}{3}$

3) $\overline{b} = \sqrt{2}\overline{a} \Rightarrow \overline{b} \uparrow \overline{a}, \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{|\overline{a}|}{|\sqrt{2}\overline{a}|} = \frac{|\overline{a}|}{\sqrt{2}|\overline{a}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Відповідь: 1) $\overline{b} \uparrow \overline{a}, \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{1}{2}$; 2) $\overline{b} \uparrow \overline{a}, \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{1}{3}$; 3) $\overline{b} \uparrow \overline{a}, \frac{|\overline{a}|}{|\overline{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 3

Дано вектор $\overline{a}(-4; 2)$. Знайдіть координати векторів $3\overline{a}$, $-\frac{1}{2}\overline{a}$, $\frac{3}{2}\overline{a}$.

Розв'язання

$$3\overline{a} = (3 \cdot (-4); 3 \cdot 2) = (-12; 6)$$

$$-\frac{1}{2}\overline{a} = (-\frac{1}{2} \cdot (-4); -\frac{1}{2} \cdot 2) = (2; -1)$$

$$\frac{3}{2}\overline{a} = (\frac{3}{2} \cdot (-4); \frac{3}{2} \cdot 2) = (-6; 3)$$

Відповідь: $3\overline{a} = (-12; 6)$; $-\frac{1}{2}\overline{a} = (2; -1)$; $\frac{3}{2}\overline{a} = (-6; 3)$.

Пригадайте

- Як можна помножити вектор на число графічно?
- Як можна помножити вектор на число, знаючи його координати?
- Сформулюйте умову колінеарності векторів.

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект і §9 підручника.
- Розв'язати (письмово) №4, 5

4. Дано $\vec{b}(-2; 6)$. Знайдіть:

1) $3\vec{b}$; 2) $-2\vec{b}$; 3) $\frac{1}{2}\vec{b}$; 4) $-\vec{b}$; 5) $10\vec{b}$; 6) $-5\vec{b}$.

5. Накресліть вектор \vec{a} . Побудуйте вектор:

1) $3\vec{a}$; 2) $-\vec{a}$; 3) $-\frac{1}{2}\vec{a}$; 4) $2\vec{a}$; 5) $-3,5\vec{a}$; 6) $1,5\vec{a}$.

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту nataliartemiuk.55@gmail.com

Джерела

- Істер О.С. Геометрія: 9 клас. — Київ: Генеза, 2017
- [Всеукраїнська школа онлайн](#)