

## Тема. Тригонометричні тотожності

Мета: відновити та розширити знання про тригонометричні тотожності та навчитись застосовувати їх до розв'язування задач

### Пригадайте

- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в прямокутному трикутнику.
- Дайте означення синуса, косинуса і тангенса гострого кута в тригонометричному колі.
- Чому дорівнюють тригонометричні функції кутів  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ?
- Які основні тригонометричні тотожності ви знаєте?

### Ознайомтеся з інформацією

Пригадаймо, що для будь-якого гострого кута  $\alpha$  прямокутного трикутника було доведено основну тригонометричну тотожність:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Ця ж тотожність дійсна і для кута  $\alpha$  з проміжку  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$ .

З основної тригонометричної тотожності з урахуванням знаків тригонометричних функцій для кутів від  $0^\circ$  до  $180^\circ$  випливає, що:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}.$$

Знак  $\cos\alpha$  обирають залежно від того, чи є кут  $\alpha$  гострим (знак «+»), чи тупим (знак «-»). Безпосередньо з означень тригонометричних функцій випливають такі тотожності:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ), \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ), \\ \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha &= 1 \quad (\alpha \neq 0^\circ, \alpha \neq 90^\circ, \alpha \neq 180^\circ). \end{aligned}$$

У 8-ому класі ви вивчали, що для гострого кута  $\alpha$  справджуються формули доповнення, які виражають функції кута  $(90^\circ - \alpha)$  через функції кута  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \alpha) &= \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \\ \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) &= \operatorname{ctg}\alpha, \quad \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha. \end{aligned}$$

Формули зведення для кута на проміжку  $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  будуть мати такий вигляд:

$$\begin{aligned} \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin\alpha, \quad \cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha, \\ \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg}\alpha \quad (0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ, \alpha \neq 90^\circ), \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{ctg}\alpha \quad (0^\circ < \alpha < 180^\circ). \end{aligned}$$

### Перегляньте відео

<https://youtu.be/-8Gk0dy7giE>

## Робота в зошиті

Запишіть приклади розв'язування задач:

### Задача 1

Обчисліть значення тригонометричних функцій кута  $150^\circ$ .

**Розв'язання.**

$$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 150^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{tg} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 150^\circ = \operatorname{ctg}(180^\circ - 30^\circ) = -\operatorname{ctg} 30^\circ = -\sqrt{3}.$$

**Відповідь:**  $\sin 150^\circ = \frac{1}{2}, \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \operatorname{ctg} 150^\circ = -\sqrt{3}.$

### Задача 2

Обчисліть:

1)  $\sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ$ ;

**Розв'язання**

$$\begin{aligned} 1) \sin 150^\circ + \operatorname{tg} 135^\circ &= \sin(180^\circ - 30^\circ) + \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = \sin 30^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = \\ &= \frac{1}{2} - 1 = -0,5; \end{aligned}$$

### Задача 3

Кут  $\beta$  – гострий. Знайдіть:  $\cos \beta$ , якщо  $\sin \beta = \frac{4}{5}$

**Розв'язання**

$$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta = 1.$$

$$1) \sin \beta = \frac{4}{5}; \cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta; \cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta};$$

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5};$$

## Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати задачі (письмово):

1. Обчисліть  $\cos 150^\circ \cdot \sin 120^\circ$ .

2. Кут  $\beta$  гострий. Знайдіть  $\sin \beta$ , якщо  $\cos \beta = \frac{5}{13}$

3. Спростіть вираз

$$(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha);$$

$$\frac{\cos(90^\circ - \alpha)}{\sin(180^\circ - \alpha)}.$$

Фото виконаних робіт надсилайте у HUMAN або на електронну пошту [nataliartemiuk.55@gmail.com](mailto:nataliartemiuk.55@gmail.com)

### Джерело

[Всеукраїнська школа онлайн](#)