


16.04.2025. Алгебра 8
Розв'язування задач за
допомогою раціональних
рівнянь



Мета уроку: формування знань на складання дробово-раціональних рівнянь для розв'язування задач; розробити алгоритм розв'язування задач за допомогою дробово-раціональних рівнянь ; розвивати логічне мислення та уяву; виховувати вміння досягати мети.

Задача 1

Поїзд мав проїхати 64 км. Коли він проїхав 24 км, то був затриманий біля семафора на 12 хв. Тоді він збільшив швидкість на 10 км/год і прибув у пункт призначення із запізненням на 4 хв. Знайдіть початкову швидкість поїзда.

Розв'язання

$64 - 24 = 40$ (км) – відстань, на якій відбулися зміни

$12\text{хв} - 4\text{хв} = 8\text{хв} = \frac{2}{15}$ год - заощадив часу

	S, км	v, км/год	t, год
Планував	40	x	$\frac{40}{x}$
Фактично	40	x+10	$\frac{40}{x+10}$

на $\frac{2}{15}$ год

Нехай початкова швидкість поїзда x км/год. Тоді останні 40 км він планував проїхати за $\frac{40}{x}$ год. Після збільшення швидкості на 10 км/год, вона становить $(x+10)$ км. Тобто фактично витратив $\frac{40}{x+10}$ год, що на $8\text{ хв} = \frac{2}{15}$ год менше, ніж планував. Складемо та розв'яжемо рівняння

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+10} = \frac{2}{15}$$

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+10} = \frac{2}{15}$$

$$\begin{aligned} \text{ОДЗ: } x &\neq 0 \\ x+10 &\neq 0 \quad x \neq -10 \end{aligned}$$

$$\frac{40}{x} - \frac{40}{x+10} - \frac{2}{15} = 0$$

$$\frac{40 \cdot 15(x+10) - 40 \cdot 15x - 2 \cdot x(x+10)}{15x(x+10)} = 0$$

$$\frac{600x + 6000 - 600x - 2x^2 - 20x}{15x(x+10)} = 0$$

$$\frac{-2x^2 - 20x + 6000}{15x(x+10)} = 0$$

$$-2x^2 - 20x + 6000 = 0$$

$$x^2 + 10x - 3000 = 0$$

$x = 50$ $x = -60$ – не задовольняє умову задачі.

Отже, початкова швидкість поїзда 50 км/год.

Відповідь: 50 км/год.

Задача 2

Човен пропливає 9 км за течією річки і 1 км проти течії за такий самий час, який потрібен плоту, щоб проплисти 4 км по цій річці. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна становить 8 км/год.

Розв'язання

Нехай швидкість течії, а отже, і швидкість плоту, дорівнюють x км/год. Тоді швидкість човна за течією дорівнює $(8+x)$ км/год, а проти течії $(8-x)$ км/год. Тому 9 км за течією річки і 1 км проти течії човен пропливе за $(\frac{9}{8+x} + \frac{1}{8-x})$ год, а пліт пропливе 4 км за $\frac{4}{x}$ год. Складемо та розв'яжемо рівняння

$$\frac{9}{8+x} + \frac{1}{8-x} = \frac{4}{x}$$

$$\frac{9}{8+x} + \frac{1}{8-x} = \frac{4}{x}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0$$

$$8+x \neq 0 \quad x \neq -8$$

$$8-x \neq 0 \quad x \neq 8$$

$$\frac{9x(8-x) + x(8+x) - 4(8-x)(8+x)}{x(8+x)(8-x)} = 0$$

$$\frac{72x - 9x^2 + 8x + x^2 - 256 + 4x^2}{x(8+x)(8-x)} = 0$$

$$\frac{-4x^2 + 80x - 256}{x(8+x)(8-x)} = 0$$

$$-4x^2 + 80x - 256 = 0$$

$$x^2 - 20x + 64 = 0$$

$$x = 4 \quad x = 16 - \text{не задовольняє умову задачі,}$$

оскільки з умови випливає, що $x < 8$.

Отже, швидкість течії 4 км/год.

Відповідь: 4 км/год.

Задача 3

Дві бригади, працюючи разом, зорали поле за 8 год. За скільки годин може зорати поле кожна бригада, працюючи самостійно, якщо одній бригаді на це потрібно на 12 год більше, ніж іншій?

Розв'язання

Нехай перша бригада може самостійно зорати поле за x год, тоді друга

бригада – за $(x+12)$ год. З 1 год перша бригада зорює $\frac{1}{x}$ частину поля,

друга - $\frac{1}{x+12}$ частину поля, а разом - $\frac{1}{8}$ поля.

Складемо та розв'яжемо рівняння

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} = \frac{1}{8}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0 \\ x+12 \neq 0 \quad x \neq -12$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+12} - \frac{1}{8} = 0$$

$$\frac{8(x+12) + 8x - x(x+12)}{8x(x+12)} = 0$$

$$\frac{8x + 96 + 8x - x^2 - 12x}{8x(x+12)} = 0$$

$$-x^2 + 4x + 96 = 0$$

$$x^2 - 4x - 96 = 0$$

$x = 12$, $x = -8$ – не задовольняє умову задачі.

Отже, перша бригада може зорати поле за
12 год, а друга – за 24 год.

Відповідь: 12год, 24 год.

Задача 4

Для перевезення 30 т вантажному автомобілю треба було зробити кілька рейсів, але вантаж довелося перевозити на автомобілі, який мав вантажопідйомність на 2 т більшу, ніж планувалося. Через це для перевезення вантажу знадобилося на 4 рейси менше, ніж планувалося. Знайдіть вантажопідйомність автомобіля, який перевіз вантаж.

Розв'язання

Нехай вантажоподйомність автомобіля, який перевіз вантаж, становить x т, тоді він зробив $\frac{30}{x}$ рейсів. Планувалося, що вантажопідйомність автомобіля буде $(x - 2)$ т, тоді він зробив би $\frac{130}{x - 2}$ рейсів, що 4 рейси більше.

Складемо та розв'яжемо рівняння

$$\frac{30}{x - 2} - \frac{30}{x} = 4$$

$$\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} = 4$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq 0 \\ x - 2 \neq 0 \quad x \neq 2$$

$$\frac{30}{x-2} - \frac{30}{x} - \frac{4}{1} = 0$$

$$\frac{30x - 30(x-2) - 4x(x-2)}{x(x-2)} = 0$$

$$\frac{30x - 30x + 60 - 4x^2 + 8x}{x(x-2)} = 0$$

$$\frac{-4x^2 + 8x + 60}{x(x-2)} = 0$$

$$-4x^2 + 8x + 60 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$x = 5$, $x = -3$ – не задовольняє умову задачі.

Отже, вантажопідйомність автомобіля, який перевіз вантаж, становить 5 т.

Відповідь: 5 т.

Домашнє завдання

Повторити §25

Опрацювати §26

Виконати завдання за посиланням

<https://vseosvita.ua/test/start/xrr935>

або №989, 993, 998