## Тема. Квадратна нерівність

Мета. Вдосконалювати вміння розв'язувати квадратні нерівності

#### Повторюємо

- Що таке квадратна нерівність?
- Що означає графічно розв'язати квадратну нерівність?
- Як визначити нулі квадратичної функції та напрям віток її графіка?
- Наведіть алгоритм розв'язування квадратної нерівності.

## Ознайомтеся з інформацією

Нерівність	Неправильне розв'язання	Правильне розв'язання 🎸
$-x^2 + 7x - 12 < 0$	-(x-3)(x-4)<0; (x-3)(x-4)<0. $Bi\partial nosi\partial b: x \in (3;4).$	$x^2-7x+12>0;$ (x-3)(x-4)>0: $Bi\partial no Bi\partial b: x \in (-\infty;3) \cup (4;+\infty).$
$x^2 + 8x + 16 \ge 0$	$(x+4)^{2} \ge 0;$ $x+4 \ge 0;$ $x \ge -4.$ $Bi\partial nosi\partial b: x \in [-4; +\infty).$	$(x+4)^2 \ge 0$ . Нерівність $(x+4)^2 \ge 0$ виконується для всіх значень $x$ , тобто $x$ — будь-яке число. $Bi\partial no Bi\partial b$ : $x \in (-\infty; +\infty)$ .
$x^2 - 6x + 9 > 0$	$(x-3)^2 > 0$ . Нерівність $(x-3)^2 > 0$ виконується для всіх значень $x$ , тобто $x$ — будь-яке число. $Bi\partial nobi\partial b$ : $x \in (-\infty; +\infty)$ .	$(x-3)^2 > 0$ . При $x=3$ маємо $(x-3)^2 = 0$ , отже, $x \neq 3$ . $Bi\partial nosi\partial b: x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ .
$x^2 + 4x + 4 \leq 0$	$(x+2)^2 \le 0$ . Розв'язків немає. Відповідь: $\emptyset$ .	$(x+2)^2 \le 0$ . Нерівність $(x+2)^2 \le 0$ виконується при єдиному значенні $x=-2$ . Відповідь: $x=-2$ , або $\{-2\}$ .
$x^2 + 3x + 4 > 0$	$D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = -7$ . Оскільки $D < 0$ , то розв'язків немає. $Bi\partial nosi\partial b$ : $\emptyset$ .	Оскільки старший коефіцієнт — додатне число і $D < 0$ , то для будь-якого значення $x$ ліва частина нерівності — додатне число. Відповідь: $x \in (-\infty; +\infty)$ .
$x^2 - 49 \leqslant 0$	$x^2 \le 49$ ; $x \le 7$ . $Bi\partial nosi\partial b$ : $x \in (-\infty; 7]$ .	$(x-7)(x+7) \le 0;$ $-7 \le x \le 7.$ $Bi\partial nosi\partial b: x \in [-7;7].$
$x^2 - 25 \geqslant 0$	$x^2 \ge 25;$ $x \ge 5.$ $Bi\partial nosi\partial b: x \in [5; +\infty).$	$(x-5)(x+5) \ge 0;$ $x \le -5, \ x \ge 5.$ $Bi\partial nobi\partial b: \ x \in (-\infty; -5] \cup [5; +\infty).$

# Розв'язування завдань

### Завдання 1

1. Розв'яжіть нерівності:

1) 
$$x^2 \le 25$$
;

2) 
$$x^2 \ge 25$$
.

Розв'язання:

1) 
$$x^2 \le 25$$
;  
 $x^2 - 25 \le 0$ ;  
 $(x - 5)(x + 5) \le 0$ ;

2) 
$$x^2 \ge 25$$
;  
 $x^2 - 25 \ge 0$ ;  
 $(x - 5)(x + 5) \ge 0$ ;

$$(x-5)(x+5) = 0;$$
  
 $x_1 = 5, x_2 = -5.$ 

 $a = 1 > 0 \Rightarrow$  вітки вгору.

 $a = 1 > 0 \Rightarrow$  вітки вгору.

Див. рис. 1.

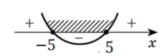


Рис. 2 
$$(-\infty; -5] \cup [5; +\infty)$$

Bi∂nові∂ь: 1) [-5; 5]; 2) (-∞; -5]  $\cup$  [5; +∞).

## Завдання 2

2. **Розв'яжіть нерівність**  $x^2 + x(1 - \sqrt{5}) < \sqrt{5}$ .

Розв'язання:

$$x^2 + x(1 - \sqrt{5}) < \sqrt{5};$$

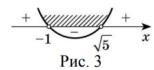
$$x^2 + x(1 - \sqrt{5}) - \sqrt{5} = 0$$

за теоремою, оберненою до теореми Вієта, маємо:

$$x_1 = \sqrt{5}, \ x_2 = -1.$$

 $a = 1 > 0 \Rightarrow$  вітки вгору.

Див. рис. 3.



Відповідь:  $(-1; \sqrt{5})$ .

# Завдання 3

3. Розв'яжіть нерівність  $\frac{x^2-4x}{8} + \frac{x-3}{5} \ge \frac{1-x}{6}$ .

Розв'язання:

$$\frac{x^2 - 4x}{8} + \frac{x - 3}{5} \ge \frac{1 - x}{6} \mid \cdot 120$$

#### Завдання 4

### 4. **Розв'яжіть нерівність** $(6x - 5)^2 + (3x - 2)(3x + 2) > 36$ .

Розв'язання:

$$(6x-5)^2 + (3x-2)(3x+2) > 36,$$
  
 $36x^2 - 60x + 25 + 9x^2 - 4 - 36 > 0,$   
 $45x^2 - 60x - 15 > 0,$   
 $3x^2 - 4x - 1 > 0,$ 

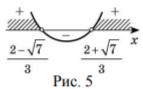
$$3x^{2} - 4x - 1 = 0,$$

$$D = 4^{2} - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 16 + 12 = 28 = (2\sqrt{7})^{2},$$

$$x_{1} = \frac{4 + 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 + \sqrt{7}}{3}, \quad x_{2} = \frac{4 - 2\sqrt{7}}{6} = \frac{2 - \sqrt{7}}{3}.$$

 $a = 3 > 0 \Rightarrow$  вітки вгору.

Див. рис. 5.



 $Bi\partial noвiдь: \left(-\infty; \frac{2-\sqrt{7}}{3}\right) \cup \left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right).$ 

#### Завдання 5

### 5. Posb'яжіть нерівність 2(x+1)(x-3) > (x+5)(x-7).

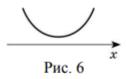
Розв'язання:

$$2(x+1)(x-3) > (x+5)(x-7),$$
  
 $2x^2 - 4x - 6 > x^2 - 2x - 35,$   
 $x^2 - 2x + 29 > 0,$ 

$$x^2 - 2x + 29 = 0$$
,  
 $D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 4 - 116 = -112 < 0$ ,

a=1>0  $\Rightarrow$  вітки вгору.

Див. рис. 6



 $Bi\partial noвiдь: (-\infty; +\infty).$ 

#### Завдання 6

# 6. Знайдіть цілі розв'язки нерівності $-4x^2 + 13x - 3 \ge 0$ .

Розв'язання:

$$-4x^2 + 13x - 3 \ge 0,$$

$$-4x^{2} + 13x - 3 = 0,$$

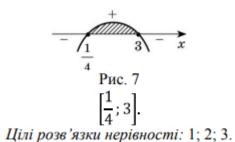
$$4x^{2} - 13x + 3 = 0,$$

$$D = 13^{2} - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 169 + 48 = 121 = 11^{2},$$

$$x_{1} = \frac{13 + 11}{8} = 3, \quad x_{2} = \frac{13 - 11}{8} = \frac{1}{4}.$$

a=-4<0  $\Rightarrow$  вітки вниз.

Див. рис. 7.



Відповідь: 1; 2; 3.

## Поміркуйте

Які помилки при розв'язуванні нерівності можуть призвести до втрати розв'язків?

## Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Розв'язати нерівності:

Знайдіть цілі розв'язки нерівностей:

$$x^{2} - 5 > 0;$$
  
 $-\frac{1}{4}x^{2} + x + 3 > 0.$ 

# Джерело

Всеукраїнська школа онлайн