

Тема. Властивості квадратичної функції

Мета. Ознайомитися з властивостями квадратичної функції, навчитися будувати графік квадратичної функції за її властивостями

Повторюємо

- Яку функцію називають квадратичною?
- Яких видів може набувати квадратична функція залежно від значень коефіцієнтів?
- Як побудувати графік квадратичної функції?

Ознайомтеся з інформацією

Властивості функції $y = ax^2 + bx + c$.

1. Область визначення та область значень функції $y = ax^2 + bx + c$.

1) Областю визначення функції $y = ax^2 + bx + c$ є множина всіх дійсних чисел. Якщо $a > 0$, областю значень функції $y = ax^2 + bx + c$ є проміжок $[y_0; +\infty)$, а якщо $a < 0$ — проміжок $(-\infty; y_0]$, де y_0 — ордината точки, яка є вершиною параболи.

2. Нулі функції.

Оскільки *нулі функції* — це значення аргументу, при яких значення функції дорівнює нулю, то їхня наявність і кількість залежать від знака дискримінанта.

Якщо $D > 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має два різні корені, а отже, функція має два нулі й дві точки перетину з віссю абсцис.

Якщо $D = 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ має один корінь, тоді функція має один нуль і вершина параболи лежить на осі абсцис.

Якщо $D < 0$, то рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ не має коренів, тоді нулів функція не має і парабола не перетинається з віссю абсцис.

3. Проміжки знакосталості.

Кожен із проміжків, на якому функція набуває значення того самого знака, як ви вже знаєте, називають *проміжком знакосталості функції*.

Нехай x_1, x_2 — нулі функції, тоді:

1) якщо $a > 0, D > 0$, то

$y > 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$; $y < 0$ при $x \in (x_1; x_2)$ (рис. 2).

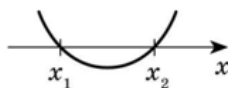


Рис. 2

2) якщо $a < 0, D > 0$, то

$y > 0$ при $x \in (x_1; x_2)$; $y < 0$ при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ (рис. 3).



Рис. 3

3) якщо $a > 0, D = 0$, то

$y > 0$ при $x \neq x_1 \neq x_2$ (рис. 4).

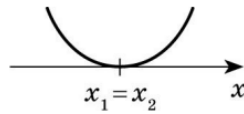


Рис. 4

4) якщо $a < 0, D = 0$,

то $y < 0$ при $x \neq x_1 \neq x_2$ (рис. 5).

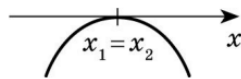


Рис. 5

5) якщо $a > 0, D < 0$, то

$y > 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 6).

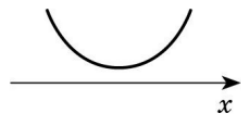


Рис. 6

6) якщо $a < 0, D < 0$, то

$y < 0$ при $x \in (-\infty; +\infty)$ (рис. 7).



Рис. 7

4. Зростання і спадання функції.

Функцію називають *спадною* на певному проміжку, якщо для будь-яких значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції, а *зростаючою*, якщо для будь-яких значень аргументу з цього проміжку більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Нехай x_0 — абсциса вершини параболи, тоді:

- 1) якщо $a > 0$, функція зростає при $x \in [x_0; +\infty)$ і спадає при $x \in [-\infty; x_0)$;
- 2) якщо $a < 0$, функція зростає при $x \in [-\infty; x_0)$ і спадає при $x \in [x_0; +\infty)$.

5. Найбільше і найменше значення функції.

Якщо $a > 0$, функція має найменше значення, яке дорівнює y_0 при $x = x_0$, де x_0 — абсциса вершини параболи, а y_0 — її ордината.

Якщо $a < 0$, функція має найбільше значення, що дорівнює y_0 при $x = x_0$.

Перегляньте відео за посиланням:

<https://youtu.be/5yXdNdCq6H4>

Розв'язування завдань

Завдання 1

Побудувати графік функції $y = x^2 - 6x + 8$.

Розв'язання.

Дана функція є квадратичною. Її графіком є парабола.

Знайдемо абсцису й ординату вершини параболи. Маємо:

$$1) \quad x_0 = +\frac{6}{2} = 3; \quad y_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1.$$

Точка $A(3; -1)$ — вершина параболи.

2) $a = 1 > 0$, вітки параболи напрямлені вгору.

3) Знайдемо координати точок перетину параболи з віссю абсцис.

Для цього розв'яжемо рівняння:

$$x^2 - 6x + 8 = 0; \quad \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}. \quad C(4; 0); \quad D(2; 0).$$

Перетин з віссю Oy: $x = 0; \quad y = 8; \quad B(0; 8).$

Оскільки $x_B = 3$ — вісь параболы, то доцільно знайти значення даної функції в точках $x = 1$ і $x = 5$ та позначити відповідні точки на координатній площині.

Маємо: $f(1) = f(5) = 3$.

Сполучимо всі позначені точки плавною неперервною лінією.

Графік побудовано на рис. 1.

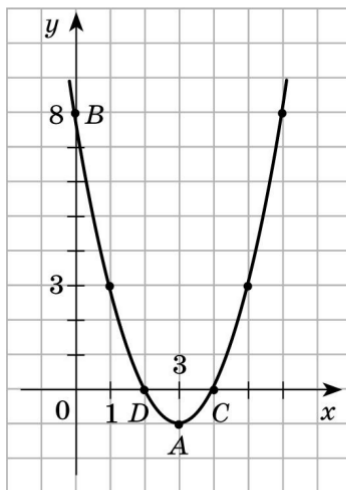


Рис.1

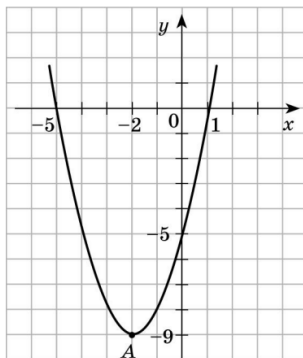
Пригадайте

- Які властивості має квадратична функція?
- Як побудувати графік квадратичної функції за її властивостями?

Домашнє завдання

- Опрацювати конспект
- Виконати завдання за готовим графіком:

1. Використовуючи рисунок, заповніть пропуски.



- 1) Координати вершини параболы: $A(\dots; \dots)$.
- 2) Вісь симетрії параболы — пряма $x = \dots$.
- 3) Нулі функції: \dots
- 4) Точка перетину з віссю ординат: $(\dots; \dots)$.
- 5) $y > 0$, якщо $x \in \dots$; $y < 0$, якщо $x \in \dots$
- 6) Функція зростає, якщо $x \in \dots$; функція спадає, якщо $x \in \dots$
- 7) Найменше значення функції дорівнює \dots , якщо $x = \dots$

Джерело: [Всеукраїнська школа онлайн](#)