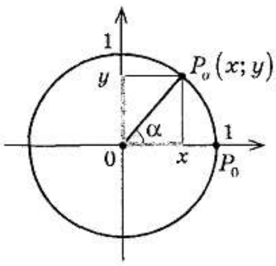
Дата: 296.04. 2021

Клас 11-А алгебра і початки аналізу

Тема: Повторення. Підготовка до ЗНО. Тригонометрична функція. Тригонометричні рівняння.

СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ ТРИГОНОМЕТРИЧНИМИ ФУНКЦІЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТУ

$x^2+y^2=1$



$\cos\alpha = x$
$\sin\alpha = y$

Основна тригонометрична тотожність

$$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1}$$

$$\boxed{1+\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}}$$

$$\boxed{1+\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}}$$

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ ПОДВІЙНОГО АРГУМЕНТУ

$$\boxed{\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

$$\boxed{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1}$$

КОСИНУС РІЗНИЦІ ТА СУМИ

$$\boxed{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

СИНУС СУМИ ТА РІЗНИЦІ

$$\boxed{\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}$$

$$\boxed{\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}$$

ТАНГЕНС СУМИ ТА РІЗНИЦІ

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}$$

ФОРМУЛИ ЗВЕДЕННЯ

Функція	**Аргумент t**							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$	$2\pi+\alpha$
$\sin t$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
$\cos t$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$

ФОРМУЛИ СУМИ ТА РІЗНИЦІ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

ПЕРЕТВОРЕННЯ ДОБУТКУ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ НА СУМУ

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right)$$

ФОРМУЛА ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ $a\sin\alpha+b\cos\alpha$

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

де аргумент φ визначають із співвідношень:

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}};\quad \sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

1. Обчисліть $\sin\frac{5\pi}{2}+\cos 5\pi$. [Т. 2008.]

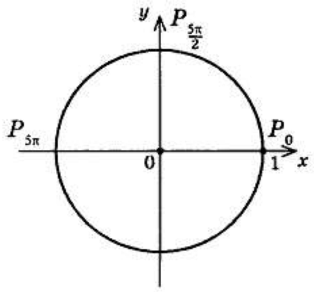
А	Б	В	Г	Д
-2	-1	0	1	2

Розв'язання

I спосіб

Оскільки $P_{\frac{5\pi}{2}}(0;1)$, $P_{5\pi}(-1;0)$, то $\sin\frac{5\pi}{2}=1$, $\cos 5\pi=-1$,

то $\sin\frac{5\pi}{2}+\cos 5\pi=1-1=0$.



II спосіб

Оскільки періоди функцій $\sin t$ і $\cos t$ дорівнюють 2π, то виділимо ціле число періодів. Тоді

$$\sin\frac{5\pi}{2}+\cos 5\pi=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\cos(4\pi+\pi)=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\pi=1-1=0.$$

Відповідь: В.

2. Знайдіть значення виразу $\frac{4\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+4\sin\alpha}$, якщо $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{3}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{3}{13}$	$\frac{11}{13}$	3	$-\frac{1}{3}$	$\frac{4}{13}$

Розв'язання

$$\frac{4\sin\alpha-\cos\alpha}{\cos\alpha+4\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha\left(4-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)}{\sin\alpha\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+4\right)}=\frac{4-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+4}=\frac{4-\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+4}=3\frac{2}{3}:4\frac{1}{3}=\frac{11}{3}\cdot\frac{3}{13}=\frac{11}{13}.$$

Відповідь: Б.

ЗАВДАННЯ ВІДКРИТОЇ ФОРМИ З РОЗГОРНУТОЮ ВІДПОВІДДЮ

Доведіть рівність $\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{1}{2}$.

Розв'язання

$$\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}=\frac{2\sin\frac{\pi}{19}\left(\cos\frac{\pi}{19}+\cos\frac{3\pi}{19}+\cos\frac{5\pi}{19}+\ldots+\cos\frac{17\pi}{19}\right)}{2\sin\frac{\pi}{19}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{\pi}{19}+2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{3\pi}{19}+2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{5\pi}{19}+\ldots+2\sin\frac{\pi}{19}\cos\frac{17\pi}{19}}{2\sin\frac{\pi}{19}}=$$

$$=\frac{\sin\frac{2\pi}{19}+\sin\frac{4\pi}{19}-\sin\frac{2\pi}{19}+\sin\frac{6\pi}{19}-\sin\frac{4\pi}{19}+\ldots+\sin\frac{18\pi}{19}-\sin\frac{16\pi}{19}}{2\sin\frac{\pi}{19}}=\frac{\sin\frac{18\pi}{19}}{2\sin\frac{\pi}{19}}=\frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{19}\right)}{2\sin\frac{\pi}{19}}=\frac{\sin\frac{\pi}{19}}{2\sin\frac{\pi}{19}}=\frac{1}{2}.$$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ $\sin x = a$ і $\cos x = a$

$\sin x = a$
- $|a|>1$: Коренів немає
- $|a|\leqslant 1$: $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$

$\cos x = a$
- $|a|>1$: Коренів немає
- $|a|\leqslant 1$: $x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z$

ОКРЕМІ ВИПАДКИ

$\sin x = 0$	$x = \pi k,\ k \in Z$	$\cos x = 0$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$
$\sin x = 1$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$	$\cos x = 1$	$x = 2\pi k,\ k \in Z$
$\sin x = -1$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$	$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ $\mathrm{tg}\, x = a$ і $\mathrm{ctg}\, x = a$

$\mathrm{tg}\, x = a$ $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{ctg}\, x = a$ $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi n,\ n \in Z$
Окремий випадок: $\mathrm{tg}\, x = 0$ $x = \pi n,\ n \in Z$	Окремий випадок: $\mathrm{ctg}\, x = 0$ $x=\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z$

СХЕМА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ БІЛЬШ СКЛАДНИХ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ РІВНЯНЬ

1. Пробуємо всі тригонометричні функції ***звести до одного аргументу.***
2. Якщо вдалося звести до одного аргументу, то пробуємо всі тригонометричні вирази ***звести до однієї функції.***
3. Якщо до одного аргументу вдалося звести, а до однієї функції — ні, то пробуємо рівняння ***звести до однорідного.***
4. ***В інших випадках переносимо всі члени рівняння в одну частину і пробуємо одержати добуток** або використовуємо спеціальні прийоми розв'язування.*

1. Розв'яжіть рівняння $\cos(-2x) = \text{tg}\,\frac{\pi}{4}$. [Т. 2008.]

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{8}$	$-2\pi n,\ n \in Z$	$2\pi n,\ n \in Z$	$\pi n,\ n \in Z$	$-\pi + 2\pi n,\ n \in Z$

Розв'язання

Оскільки $\cos(-2x) = \cos 2x$, а $\text{tg}\,\frac{\pi}{4} = 1$, то маємо $\cos 2x = 1$. Звідси $2x = \pm\arccos 1 + 2\pi n,\ n \in Z$; $2x = \pm 0 + 2\pi n,\ n \in Z$; $2x = 2\pi n,\ n \in Z$; $x = \pi n,\ n \in Z$.

Відповідь: Г.

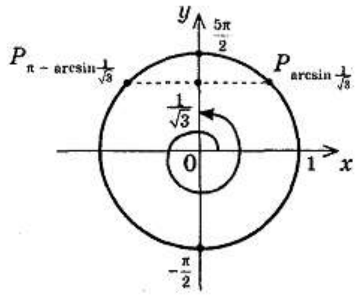
II. ЗАВДАННЯ ВІДКРИТОЇ ФОРМИ З КОРОТКОЮ ВІДПОВІДДЮ

Укажіть кількість коренів рівняння $(\sin x - \text{tg}\,\frac{\pi}{6})(\sin x - \text{tg}\,\frac{\pi}{3}) = 0$ на відрізку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$. [Т. 2005.]

Розв'язання

Оскільки $(\sin x - \text{tg}\,\frac{\pi}{6})(\sin x - \text{tg}\,\frac{\pi}{3}) = 0$, то $\sin x - \text{tg}\,\frac{\pi}{6} = 0$ або $\sin x - \text{tg}\,\frac{\pi}{3} = 0$; $\sin x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ або $\sin x - \sqrt{3} = 0$; $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ або $\sin x = \sqrt{3}$. (Останнє рівняння коренів не має, оскільки $\sin x < 1$.)

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}};\ x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n,\ n \in Z.$$



Нанесемо розв'язки на одиничне коло. Проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}\right]$ належать три корені рівняння, а саме: $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\pi - \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}} + 2\pi$.

Відповідь: 3.

Домашнє завдання

1. Обчисліть $\sin\frac{7\pi}{2} + \cos 3\pi$. [Т. 2008.]

А	Б	В	Г	Д
−2	−1	0	1	2

2. Знайдіть значення виразу $5\cos^2 x - 1$, якщо $\sin^2 x = 0{,}4$. [Т. 2006.]

А	Б	В	Г	Д
2	−0,2	−2	1	Інша відповідь

7. Розв'яжіть рівняння $\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. [Т. 2005.]

А	Б	В	Г	Д
$(-1)^k\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$	$\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$	$(-1)^k\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z$	$\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$	$\frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$

8. Розв'яжіть рівняння $\cos x = \text{tg}\,\frac{\pi}{4}$. [Т. 2003.]

А	Б	В	Г	Д
$-\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$\pi + 2\pi n,\ n \in Z$	$\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$	$\pi n,\ n \in Z$	$2\pi n,\ n \in Z$