Fernando Alva Gallegos

GEOMETRÍA

Teoría y práctica

- Exámenes UNI desarrollados por temas y con claves
- Actualizado según últimos prospectos
- Desarrollo completo de todo el curso
- Nuevos problemas resueltos y propuestos tipo UNI
- Claves para todos los problemas propuestos

COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS

Editorial San Marcos

GEOMETRÍA

Teoría y práctica

Fernando Alva Gallegos

GEOMETRÍA

Teoría y práctica

COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS

Editorial San Marcos

GEOMETRÍA: TEORÍA Y PRÁCTICA
COLECCIÓN UNICIENCIA SAPIENS
FERNANDO ALVA GALLEGOS

Asesoría académica: Salvador Timoteo V.

© Editorial San Marcos E. I. R. L., editor
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima, Lima, Lima
Teléfono: 331-1522
RUC: 20260100808
E-mail: informes@editorialsanmarcos.com

Diseño de portada: Gustavo Tuppia
Composición de interiores: Blanca Llanos
Responsable de edición: Alex Cubas

Primera edición: 2007
Segunda edición: 2014
Tercera edición: diciembre 2015
Tiraje: 2000 ejemplares

Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2015-17917
ISBN: 978-612-315-277-2
Registro de proyecto editorial N.° 31501001501403

Impreso en el Perú / *Printed in Peru*

Pedidos:
Jr. Dávalos Lissón 135, Lima
Teléfono: 433-7611
E-mail: ventas@editorialsanmarcos.com
www.editorialsanmarcos.com

Impresión:
Editorial San Marcos de Aníbal Jesús Paredes Galván
Av. Las Lomas 1600, Urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344
Marzo 2016

ÍNDICE

CAPÍTULO 11: RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

CAPÍTULO 12: RELACIONES MÉTRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA - POTENCIA

CAPÍTULO 13: POLÍGONOS REGULARES - LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

CAPÍTULO 14: ÁREA DE REGIONES PLANAS

CAPÍTULO 15: GEOMETRÍA DEL ESPACIO

CAPÍTULO 16: ÁNGULOS DIEDROS Y TRIEDROS

CAPÍTULO 17: POLIEDROS

CAPÍTULO 18: PRISMA Y TRONCO DE PRISMA

CAPÍTULO 19: PIRÁMIDE Y TRONCO DE PIRÁMIDE

CAPÍTULO 20: CILINDRO Y TRONCO DE CILINDRO

CAPÍTULO 21: CONO Y TRONCO DE CONO

CAPÍTULO 22: ESFERA Y TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIM

CAPÍTULO 23: TEMAS SELECTOS

PRESENTACIÓN

Los tiempos actuales exigen, de los estudiantes, aprendizajes que permitan el desarrollo de capacidades útiles para ser aplicadas en su desempeño profesional, a fin de realizar transformaciones en su entorno, desarrollando mejoras en la calidad de vida, con pleno conocimiento de la protección de su medioambiente.

La Geometría, aquella ciencia matemática pionera en el desarrollo formal del conocimiento y entendimiento de las formas, tiene mucho que aportar en dichas transformaciones, exigiendo a los diseñadores, arquitectos e ingenieros, aplicaciones cada vez más creativas, desafiando muchas veces las leyes físicas.

Llegar a entender la distribución de objetos en el espacio, aprovechando el máximo de sus virtudes pasa por un aprendizaje amplio de las propiedades y características especiales de las figuras geométricas, hecho que se logra cuando se han trabajado muchas actividades que permitan desarrollar el razonamiento, la demostración, la comunicación matemática y la resolución de problemas, etc.

El presente libro de *Geometría* de la Colección Uniciencia Sapiens, tiene la particularidad de mostrar con sencillez la rigurosidad del curso, mediante cuantiosos ejemplos y problemas resueltos y propuestos por capítulo, que sirven a su vez de modelos para enfrentar con éxito otros. Los procedimientos aplicados se comunican siguiendo la secuencia lógica común en cualquier rama de la matemática, demostrándose gran cantidad de teoremas y propiedades. Además cuenta con problemas de examen de admisión a la UNI con respuestas y claves.

Por lo expuesto anteriormente, esperamos gran acogida de parte de alumnos y profesores, estando la presente edición a la altura de cumplir con las exigencias de acuciosos lectores.

El Editor

Introducción Intersección de figuras planas

01 capítulo

Jules Henri Poincaré, más conocido como Henri Poincaré, nació en Nancy (Francia) el 29 de abril de 1854 y murió en París el 17 de julio de 1912. Fue un prestigioso polímata: matemático, físico, científico teórico y filósofo de la ciencia, primo del presidente de Francia Raymond Poincaré. Poincaré es descrito a menudo como el último «universalista», capaz de entender y contribuir en todos los ámbitos de la disciplina matemática. Ingresó en la prestigiosa École Polytechnique en 1873. Allí estudió matemáticas bajo la tutela de Charles Hermite, continuando su formación y llegando a publicar su primer artículo científico «Démonstration nouvelle des propriétés de l'indicatrice d'une Surface» en 1874. Tras graduarse en 1875 o 1876, continuó su formación en la École des Mines. Allí siguió estudiando matemáticas en forma adicional a los contenidos de ingeniería en minas y recibió su título de ingeniero en marzo de 1879.

Poincaré es reconocido por su formulación de uno de los problemas más famosos en la historia de las matemáticas. La conjetura de Poincaré, propuesto en 1904, es un problema en el ámbito de la Topología que finalmente fue resuelto por el matemático ruso Grigori Perelmán en el año 2002. Por este trabajo, Perelmán recibió el Premio del Milenio instituido por el Clay Mathematics Institute el 18 de marzo de 2010.

Fuente: Wikipedia

INTRODUCCIÓN

Términos matemáticos

1. **Proposición.** Enuncia una verdad demostrada o por demostrar.
2. **Axioma.** Es una proposición evidente que no necesita demostrarse. Por ejemplo: El todo es igual a la suma de sus partes.
3. **Postulado.** Es la proposición que sin tener la evidencia del axioma, se admite sin demostración. Por ejemplo: Por dos puntos distintos pasa una y solo una recta.
4. **Teorema.** Es una proposición que, para su aceptación, necesita demostrarse. Consta de hipótesis y tesis. La primera indica los datos y no se supone como cierta, la segunda indica lo que se va a demostrar. Luego, viene el proceso de la demostración. Por ejemplo: La suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es de 180°.
5. **Lema.** Es un teorema previo que sirve de base para la demostración de otras proposiciones.
6. **Corolario.** Es una consecuencia deducida de un teorema demostrado.
7. **Escolio.** Llamada de atención hecha a un teorema con objeto de aclaración o restricción.
8. **Problema.** Enunciado en el cual se plantea hallar una cantidad o construir alguna figura, según las condiciones dadas.

Objetivos y división de la Geometría

La Geometría tiene por objeto el estudio de las figuras geométricas, atendiendo a su forma, tamaño y relación entre ellas.

Para un mejor tratamiento se divide en:

1. **Geometría plana (planimetría).** Estudia a las figuras planas. Por ejemplo: el triángulo, el círculo, etc.
2. **Geometría del espacio (estereometría).** Estudia a las figuras cuyos puntos no están en un mismo plano, están en el espacio. Por ejemplo: la pirámide, el prisma, la esfera, etc.

Figuras geométricas

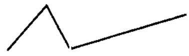
Se llaman figuras geométricas a la representación de líneas, superficies y sólidos, adoptando cierta forma y teniendo una determinada extensión. A excepción del punto, el cual representa al conjunto unitario, toda figura se distingue de otra por su tamaño y forma. Un punto queda perfectamente determinado por su posición en el espacio.

Las figuras geométricas se distinguen en: líneas, superficies y sólidos.

Líneas

Línea recta. Todos sus puntos siguen una misma dirección.

Línea quebrada. Formada por un conjunto de dos o más líneas rectas consecutivas, en diferente dirección.

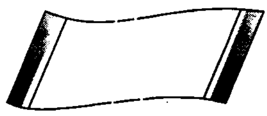


Línea curva. Si no tiene tres puntos que sigan la misma dirección.

Línea mixta. Es la combinación de alguna línea recta y alguna curva consecutiva.

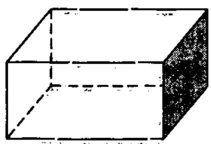
Superficies

plana o plano



curva

Sólidos



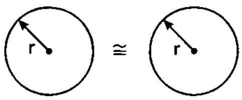
Mediciones

- La medida de una línea limitada es un número positivo único, llamada longitud (son unidades de longitud: m, cm, etc.).
- El área es un número positivo único que indica la medida de una superficie (son unidades de área: m^2, cm^2, etc.).
- La medida del espacio que encierra un sólido, se expresa por un número llamado volumen (son unidades de volumen: m^3, cm^3, etc.).

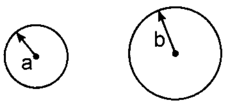
Clasificación

Dos figuras, de la misma naturaleza, pueden ser:

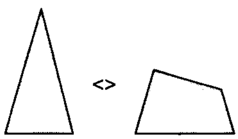
1. **Congruentes.** Cuando tienen igual forma y tamaño. Por ejemplo, dos cuadrados con igual longitud de lado.
2. **Semejantes.** Cuando tienen igual forma y tamaños diferentes. Por ejemplo, un cuadrado cuyo lado mide 10 unidades y otro cuyo lado mide 7 unidades.
3. **Equivalentes.** Tienen igual área o volumen, sin importar su forma. Dos superficies equivalentes tienen igual área y dos sólidos equivalentes, igual volumen.



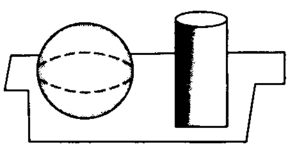
Congruentes



Semejantes



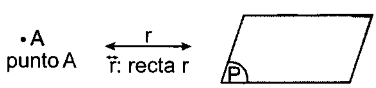
(igual área)
Equivalentes


(igual volumen)
Equivalentes

≅, se lee: es congruente con...
~, se lee: es semejante con...
< >, se lee: es equivalente a...

Conceptos primarios y nomenclatura

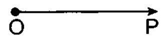
El punto, la recta y el plano, son entes geométricos no definidos, sobre los cuales se apoyan las definiciones de otras representaciones.



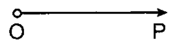
El punto es la misma representación en geometría. Una recta está conformada por un conjunto infinito de puntos que siguen una misma dirección e ilimitada en ambos sentidos. Se puede concebir al plano como una superficie llana, perfectamente lisa, sin espesor e ilimitada en todo sentido.

Rayo y semirrecta

La siguiente figura muestra un rayo. El punto O se llama origen o extremo y forma parte de la figura. Se denota como: $\overrightarrow{OP}$.



A diferencia del rayo una semirrecta no considera el origen. Así, para la siguiente figura, la semirrecta OP se denotará como: $\overrightarrow{OP}$.

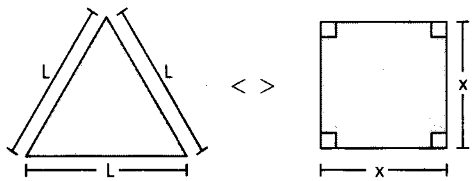


Ejemplos:

1. El perímetro de un triángulo equilátero es $18\sqrt[4]{3}$ m. Calcular cuánto mide el lado del cuadrado, equivalente a dicho triángulo.

   Resolución:

   El perímetro del triángulo es la suma de longitudes de los tres lados. Entonces:

   $$L + L + L = 18\sqrt[4]{3} \Rightarrow L = 6\sqrt[4]{3}$$

   Como deben ser equivalentes, según el enunciado:

   Área del cuadrado = Área del triángulo

   Por fórmula: $x^2 = L^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

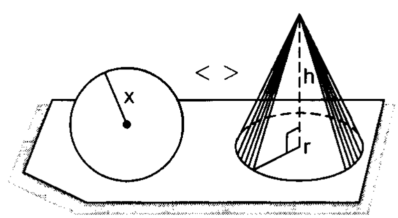
   $\Rightarrow x^2 = (6\sqrt[4]{3})^2(\dfrac{\sqrt{3}}{4}) \Rightarrow x^2 = 27$

   $\therefore\ x = 3\sqrt{3}$ m

2. Hallar la longitud "x" del radio de la esfera equivalente al cono de revolución adjunto, cuyo radio mide $r = 6\sqrt{2}$ cm y altura $h = 12$ cm.

   Resolución:

   Por ser equivalente:

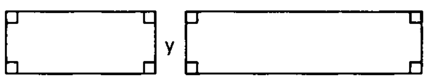
   Volumen de la esfera = Volumen del cono

Por fórmula: $\frac{4}{3}\pi x^3 = \frac{\pi r^2 h}{3}$

$\Rightarrow 4x^3 = (6\sqrt{2})^2(12) \quad \therefore\ x = 6\text{ cm}$

3. Indicar verdadero (V) o falso (F):
   I. Un cuadrado puede ser congruente a un triángulo.
   II. Dos figuras congruentes son siempre equivalentes.
   III. Dos figuras equivalentes son siempre congruentes.
   IV. Un cubo y un cuadrado pueden ser equivalentes.
   V. Si un cuadrado y un triángulo tienen igual perímetro, se llaman equivalentes
   VI. Dos rectángulos son siempre semejantes.

   Resolución:
   I. (F) Las figuras congruentes deben tener igual forma y tamaño.
   II. (V) Por definición.
   III. (F) No siempre. Dos figuras equivalentes solo requieren tener tamaños iguales, mas no la forma. Por ejemplo, un cuadrado y un triángulo pueden ser equivalentes.
   IV. (F) La comparación debe ser entre figuras de la misma naturaleza: figuras planas entre sí o sólidas entre sí.
   V. (F) Serán equivalentes, si sus áreas son iguales.
   VI. (F) Por ejemplo:



   No tienen la misma forma solo sus ángulos son congruentes. (Ángulos congruentes, tienen igual medida)

4. Con una cuerda de longitud L cm, ¿cuál de las dos figuras dadas a continuación debe tomarse, para tener mayor área?
   • Un cuadrado • Una circunferencia

   Resolución:

   Si se forma un cuadrado, cada lado tendrá una longitud $\frac{L}{4}$ y el área será: $\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{L^2}{16}$ ...(1)

   Si se forma una circunferencia de radio r: $2\pi r = L$

   $\Rightarrow r = \frac{L}{2\pi}$ y el área del círculo será: $\pi r^2 = \frac{L^2}{4\pi}$ ...(2)

   Como $\pi \cong 3{,}1416 \Rightarrow 4\pi = 12{,}5664$
   Entonces la expresión (2) es mayor que la (1). Por lo tanto, se debe elegir la circunferencia.

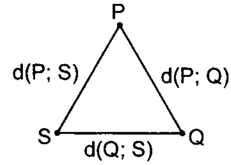
Conjuntos convexos y no convexos

Tenemos un conjunto no vacío E a cuyos elementos los llamaremos puntos. En E se distinguen dos familias de subconjuntos no vacíos, la familia de las rectas y la familia de los planos. No definimos lo que es un punto, una recta o un plano. Estos son nuestros conceptos primitivos a E, que es el conjunto formado por todos los puntos, lo llamamos espacio. Este es nuestro conjunto universal.

Distancia

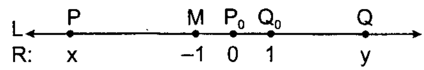
Postulado de la distancia. Si P y Q son dos puntos, entonces existe un número real denominado distancia entre P y Q y que se denota d(P; Q), tal que:

1. $d(P; Q) \geq 0,\ \forall\ P, Q \in E$
2. $d(P; Q) = 0 \Leftrightarrow P$ es Q
3. $d(P; Q) = d(Q; P),\ \forall\ P, Q \in E$
4. (Desigualdad triangular)
   $d(P; S) \leq d(P; Q) + d(Q; S),\ \forall\ P, Q, S \in E$



Postulado de la regla (Cantor-Dedekind). Si $\overleftrightarrow{L}$ es una recta y P_0 y Q_0 son dos puntos diferentes de $\overleftrightarrow{L}$, entonces existe una correspondencia biunívoca entre los puntos de $\overleftrightarrow{L}$ y los números reales, tal que:

1. Al punto P_0 le corresponde el número real 0 y a Q_0, el número real 1.
2. Si al punto P le corresponde el número real "x" y a Q, el número real "y", entonces: $d(P; Q) = |x - y|$



Toda recta tiene infinitos puntos.

Definiciones importantes

1. Un sistema de coordenadas unidimensional es una correspondencia, como la descrita en el postulado. El punto P_0 es el origen del sistema de coordenadas. La coordenada de un punto es el número real que le corresponde.
2. Sean P, Q y S tres puntos diferentes de $\overleftrightarrow{L}$. El punto Q está entre P y S cuando:
   $d(P; S) = d(P; Q) + d(Q; S)$. Esto se denota: $P - Q - S$
3. El segmento cerrado de la recta L de extremos P y Q es el conjunto: $\overline{PQ} = \overset{\circ\!-\!\circ}{PQ} \cup \{P; Q\}$
   La longitud de $\overline{PQ}$ y $\overset{\circ\!-\!\circ}{PQ}$ es el número $PQ = d(P; Q)$
   Si omitimos los extremos se denomina segmento abierto.
   Si una recta L es perpendicular en el punto medio de un segmento, entonces $\overleftrightarrow{L}$ es la mediatriz de dicho segmento.
4. Dos segmentos cualesquiera, PQ y P'Q' son congruentes $(\overline{PQ} \cong \overline{P'Q'}) \Leftrightarrow PQ = P'Q'$.

Teorema 1: Si P y Q son dos puntos diferentes de la recta L, entonces existe un punto C de la recta, tal que C está entre P y Q.

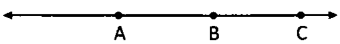
Corolario: Entre dos puntos diferentes de una recta, existen infinitos puntos de la recta.

Postulado: Dados P y Q, dos puntos diferentes cualesquiera de E, existe una única recta L, tal que P, Q en $\overleftrightarrow{L}$. En este caso denotaremos a $\overleftrightarrow{L}$ con $\overleftrightarrow{PQ}$ y diremos que $\overleftrightarrow{L}$ es la recta que pasa por P y Q o que $\overleftrightarrow{L}$ es la recta determinada por P y Q.

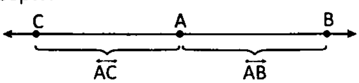
Teorema 2: Si dos rectas diferentes se intersecan, entonces su intersección es un punto.

Definición: Sean A y B dos puntos de una recta L, el rayo AB es el conjunto que resulta de la unión del segmento AB y de todos los puntos C, tales que B está entre A y C.

- La definición de rayo AB se escribirá:
  $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cup \{C \,/\, B \text{ está entre } A \text{ y } C\}$
- Las dos partes del rayo se representan así:



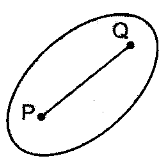
- Si un punto A está entre B y C se dice que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son rayos opuestos. La siguiente figura ilustra este concepto:



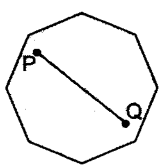
- Si a un rayo AB se le omite su origen, al conjunto de puntos restantes se le denomina semirrecta AB y se denota $\overset{\circ}{\overrightarrow{AB}}$.

Conjuntos convexos

Un conjunto A de puntos se denomina conjunto convexo, cuando todo segmento determinado por los puntos cualesquiera de A, está contenido en A.
A es conjunto convexo $\Leftrightarrow \forall$ P, Q $\in$ A, $\overline{PQ} \subset A$



C. convexo



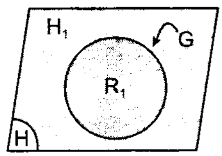
C. convexo

Ejemplos:

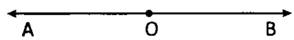
- Conjuntos convexos: una recta, un rayo, un segmento de recta, un círculo, el interior de un ángulo, una esfera, etc.
- Conjuntos no convexos: el exterior de un ángulo, un ángulo, una circunferencia, el exterior de un cuadrado, el exterior de una esfera, etc.

Partición de un conjunto. Se denomina partición de un conjunto A a cualquier colección de subconjuntos de A, ninguno de los cuales es vacío y tales que cada elemento de A pertenece a solo uno de estos subconjuntos de A.

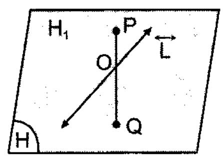
- Si una circunferencia G está contenida en un plano H, R_1 y R_2 son, respectivamente, el interior y el exterior de la circunferencia, una partición resultante del plano H es $\{R_1, G, R_2\}$.



- Si O es un punto de una recta L y $\overset{\circ}{\overrightarrow{OA}}$ y $\overset{\circ}{\overrightarrow{OB}}$ son, respectivamente, las dos semirrectas resultantes, entonces la correspondiente partición es $\{\overset{\circ}{\overrightarrow{OA}}, O, \overset{\circ}{\overrightarrow{OB}}\}$



Postulado de la separación de puntos de un plano. Si una recta L está contenida en un plano H, entonces los puntos del plano que no pertenecen a la recta constituyen dos conjuntos disjuntos denominados semiplanos H_1 y H_2.



Tales que:

a. H_1 y H_2 son conjuntos convexos.
b. Si $P \in H_1$ y $Q \in H_2 \Rightarrow \overline{PQ} \cap \overleftrightarrow{L} \neq \varnothing$
c. H_1; H_2 y $\overleftrightarrow{L}$ forman una partición del plano H.
$\{H_1;\ \overleftrightarrow{L};\ H_2\}$

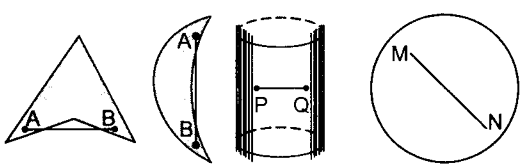
Se denomina a $\overleftrightarrow{L}$ como la arista de los dos semiplanos.

Teorema

Si dos conjuntos de puntos A y B son conjuntos convexos, entonces la intersección de estos conjuntos es un conjunto convexo.

Conjuntos no convexos

Un conjunto de puntos se llama no convexo, si existen al menos dos puntos distintos de dicho conjunto, que determinan un segmento con algunos puntos no comunes al conjunto. Son ejemplos de conjuntos no convexos:



superficie cilíndrica

superficie esférica

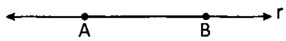
Ejemplo:

Indicar verdadero (V) o falso (F).

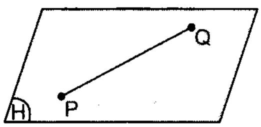
I. Una recta es un conjunto convexo.
II. Un plano es un conjunto convexo.
III Un triángulo es un conjunto convexo.
IV. Un segmento es un conjunto convexo.

Resolución:

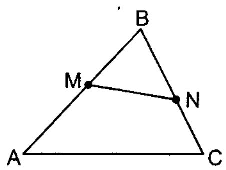
I. (V) $\forall$ A, B $\in \overleftrightarrow{r}$, (A $\neq$ B) $\Rightarrow \overline{AB} \subset \overleftrightarrow{r}$



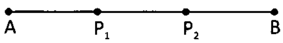
II. (V) $\forall$ P, Q $\in$ H, (P $\neq$ Q) $\Rightarrow \overline{PQ} \subset$ H



III. (F) $\exists$ M, N $\in \triangle$ABC / $\overline{MN} \not\subset \triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$

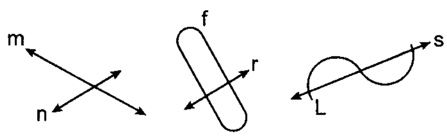


IV. (V) $\forall$ P_1, $P_2 \in \overline{AB}$, ($P_1 \neq P_2$) $\Rightarrow \overline{P_1P_2} \subset \overline{AB}$



INTERSECCIÓN DE FIGURAS PLANAS

Una figura plana tiene todos sus puntos sobre un mismo plano.



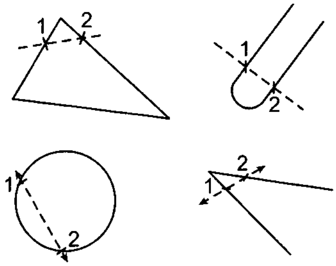
(a) (b) (c)

En la figura (a), las rectas $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ se intersecan en un punto. En (b), $\overleftrightarrow{r}$ interseca a la figura f en dos puntos y en (c), la intersección de $\overleftrightarrow{s}$ y la figura L es de tres puntos. En todos los casos anteriores diremos que las figuras son secantes, si se cortan en 1; 2 o 3 puntos, respectivamente.

Líneas convexas

Son aquellas que se intersecan con alguna recta en un máximo de dos puntos.

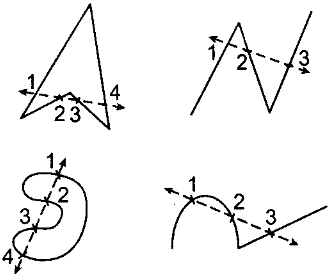
Ejemplos:



Líneas no convexas

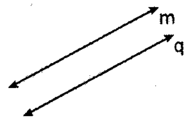
Si alguna recta secante determina sobre ellas, más de dos puntos de corte. La geometría clásica menciona estas figuras como cóncavas.

Ejemplos:



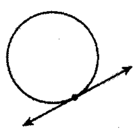
Observaciones

- Dos rectas contenidas en un mismo plano y que no se intersecan, reciben el nombre de paralelas. Por ejemplo, $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{q}$. En este caso, escribiremos $\overleftrightarrow{m} \,//\, \overleftrightarrow{q}$ ($\overleftrightarrow{m}$ es paralela a $\overleftrightarrow{q}$).

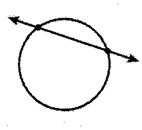


A veces, suele decirse que las rectas se intersecan, para este caso, en el infinito.

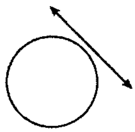
- Una recta y una circunferencia pueden ser.



Recta y circunferencia tangentes entre sí.
(1 punto de intersección)

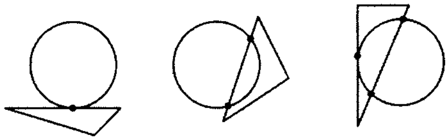


Recta y circunferencia secantes entre sí.
(2 puntos de intersección)

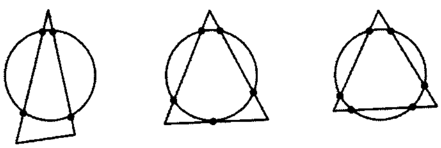


No se intersecan.
(cero puntos de intersección)

- Veamos algunos gráficos de intersección entre un triángulo y una circunferencia:



1 punto | 2 puntos | 3 puntos



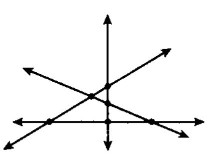
4 puntos | 5 puntos | 6 puntos

Por supuesto que, podrían hacerse otros gráficos para encontrar un número determinado de puntos: 1; 2; 3; 4; 5 o 6.

Notamos que, el mínimo número de puntos de intersección (diferente de cero), entre estas figuras, es uno y el máximo es seis.

Máximo número de puntos de corte (MNPC)

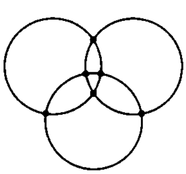
I. Para "n" rectas secantes:



$\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2} \text{ puntos}}$

Así, por ejemplo, 4 rectas se cortan como máximo en: $\dfrac{4(3)}{2} = 6$ puntos

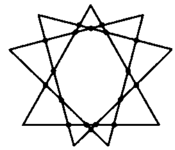
II. Para "n" circunferencias secantes:



$\boxed{n(n-1) \text{ puntos}}$

Tres circunferencias secantes se cortan como máximo en: 3(2) = 6 puntos

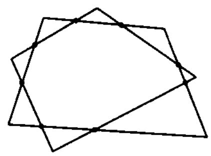
III. Para "n" triángulos:



$\boxed{3n(n-1) \text{ puntos}}$

Si se tienen 10 triángulos, encontraremos como máximo: $3 \times 10(9) = 270$ puntos de corte

IV. Para "n" cuadriláteros convexos:



$\boxed{4n(n-1) \text{ puntos}}$

V. Para "n" pentágonos convexos se cortan como máximo en:

$\boxed{5n(n-1) \text{ puntos}}$

VI. En general, "n" polígonos convexos de L lados cada uno, se cortan como máximo en:

$\boxed{L(n)(n-1) \text{ puntos}}$

Ejemplos:

1. n polígonos de 11 lados cada uno (convexos) tienen como fórmula para el máximo número de puntos de corte: 11n(n − 1). De modo que, 5 de estas figuras se cortarán en un máximo de $11 \times 5(4) = 220$ puntos.

2. ¿En cuántos puntos se cortan como máximo, 10 icoságonos convexos?

   Resolución:
   Un icoságono es el polígono de 20 lados. Luego, en la fórmula del punto (6), debemos reemplazar:
   L = 20 ⇒ número de lados.
   n = 10 ⇒ número de polígonos.
   ∴ N.° de puntos: L(n)(n − 1) = 20(10)(9) = 1800

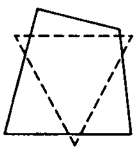
3. ¿En cuántos puntos se intersecan, como máximo, 5 octógonos convexos?

   Resolución:
   El octógono es un polígono de 8 lados. Entonces L = 8 y n = 5. En la fórmula del punto (6):
   ∴ L(n)(n − 1) = $8 \times 5(4)$ = 160 puntos

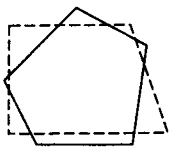
VII. Dos polígonos convexos de diferente número de lados, se intersecan como máximo en un número de puntos equivalente al doble del número de lados del menor.

Así, por ejemplo:

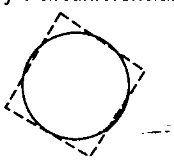
- 1 triángulo y 1 cuadrilátero:



- 1 cuadrilátero y 1 pentágono:



- 1 decágono (10 lados) y 1 octógono (8 lados) convexos, se cortan como máximo en: $2 \times 8 = 16$ puntos
- 1 cuadrilátero y 1 circunferencia:



(La circunferencia se considera como un polígono de infinitos lados)

VIII. Para "n" figuras cualesquiera (convexas o no convexas) del mismo tipo, el máximo número de puntos de corte es:

$$\boxed{\frac{kn(n-1)}{2}}$$

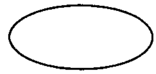
Siendo "k" el número máximo de puntos en que se cortan dos de dichas figuras.

Ejemplos:

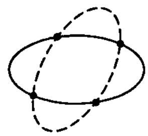
1. Encontrar la fórmula para calcular el máximo número de puntos de corte entre "n" elipses.

Resolución:

Una elipse, es de la forma:



Hallamos el valor de "k" graficando dos elipses, de modo que se tenga el número máximo de puntos de intersección entre ellas.

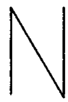


k = 4 puntos como máximo

Entonces, para "n" elipses, la fórmula se obtiene al reemplazar este valor de "k" en la expresión anterior:

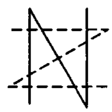
$$\frac{4n(n-1)}{2} \Rightarrow 2n(n-1) \text{ puntos}$$

2. Hallar una fórmula para calcular el máximo número de puntos de corte entre n figuras de la forma:



Resolución:

Graficamos dos de dichas figuras a fin de obtener el valor de k:



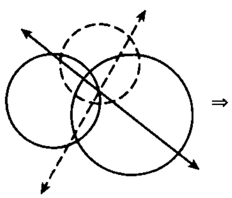
k = 9 puntos como máximo

Para n de estas figuras: $\frac{9n(n-1)}{2}$ puntos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el máximo número de puntos de corte entre 10 rectas y 5 circunferencias, al cortarse todas estas figuras entre sí.

Resolución:



$\Rightarrow$ 10 rectas
5 circunferencias

El método de resolución consiste en contar por separado los puntos de corte: rectas solas, circunferencias solas y al final la combinación.

El resultado se obtiene sumando los parciales. Así:

Las 10 rectas solas se cortan como máximo en

$\frac{10(9)}{2} = 45$ ...(1)

Las 5 circunferencias: $5(4) = 20$ puntos ...(2)

Para el número de puntos entre rectas y circunferencias:

Como cada recta corta a una circunferencia en 2 puntos y son 5 circunferencias, entonces una recta corta a las 5 circunferencias en $2 \times 5 = 10$ puntos.

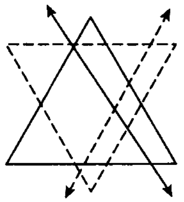
Pero son 10 rectas, entonces tendremos aquí:

$10 \times 10 = 100$ puntos ...(3)

Finalmente, sumando los resultados parciales de (1), (2) y (3): $45 + 20 + 100 = 165$ puntos

2. Hallar el máximo número de puntos de corte entre 11 rectas secantes y 5 triángulos, al cortarse todas estas figuras entre sí.

Resolución:

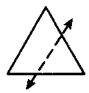


⇒ 11 rectas
5 triángulos

Las 11 rectas, por sí solas $\dfrac{11(10)}{2} = 55$ ...(1)

Los 5 triángulos entre sí: $3 \times 5(4) = 60$ ...(2)

Las 11 rectas a los 5 triángulos:



$2 \times 11 \times 5 = 110$ puntos ... (3)

N.° de puntos entre una recta y un triángulo

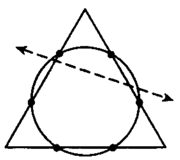
N.°de rectas

N.° de triángulos

Luego, sumando los resultados (1), (2) y (3):
$55 + 60 + 110 = 225$ puntos

3. Hallar el máximo número de puntos de corte entre 21 rectas secantes, 15 circunferencias y 12 triángulos, al intersecarse todas estas figuras entre sí.

Resolución:



⇒ 21 rectas
15 circunferencias
12 triángulos

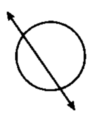
Evaluamos el máximo número de puntos de corte entre las rectas solas, las circunferencias entre sí, los triángulos por sí solos y luego hacemos las combinaciones en grupos de dos. Así:

Las 21 rectas: $\dfrac{21(20)}{2} = 210$ puntos ...(1)

Las 15 circunferencias: $15(14) = 210$ puntos ...(2)

Los 12 triángulos: $3 \times 12(11) = 396$ puntos ...(3)

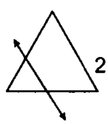
Las 21 rectas a las 15 circunferencias:



$2 \times 21 \times 15 = 630$ puntos ...(4)

2 ptos. / ⊙

Las 21 rectas a los 12 triángulos:



$2 \times 21 \times 12 = 504$ puntos ...(5)

2 ptos. / △

Las 15 circunferencias a los 12 triángulos:

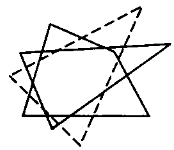
$6 \times 15 \times 12 = 1080$ puntos ...(6)

6 ptos. ⊙ △

El MNPC lo obtenemos sumando los resultados parciales del (1) al (6):
$210 + 210 + 396 + 630 + 504 + 1080 = 3030$ puntos

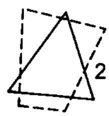
4. Hallar el máximo número de puntos de corte entre 21 triángulos y 10 cuadriláteros convexos, todos secantes entre sí.

Resolución:



⇒ 21 triángulos
10 cuadriláteros

Tenemos:
Los 21 triángulos se cortan como máximo en:
$3 \times 21(20) = 1260$ puntos ...(1)
Los 10 cuadriláteros convexos:
$4 \times 10(9) = 360$ puntos ...(2)
Los 21 triángulos a los 10 cuadriláteros:



$6 \times 21 \times 10 = 1260$ ...(3)

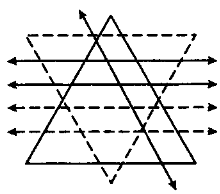
$2 \times 3 = 6$ △ □

Número de lados menor

El MNPC lo obtenemos sumando (1), (2) y (3):
$1260 + 360 + 1260 = 2880$ puntos

5. Hallar el máximo número de puntos de corte entre 10 rectas paralelas, 5 rectas secantes y 6 triángulos, al intersecarse todas estas figuras entre sí.

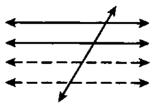
Resolución:



⇒ 10 rectas paralelas
5 rectas secantes
5 triángulos

Tenemos:
Las 10 rectas paralelas entre sí:
Cero puntos de corte ...(1)
Las 5 rectas secantes por sí solas:
$\dfrac{5(4)}{2} = 10$ puntos ...(2)
Los 6 triángulos: $3 \times 6(5) = 90$ puntos ...(3)

Las 10 rectas paralelas y 5 secantes:

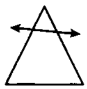


$1 \times 10 \times 5 = 50$ puntos ...(4)

N.° de puntos entre una paralela y una secante — N.° de paralelas — N.° de secantes

Las 10 rectas paralelas a los 6 triángulos:

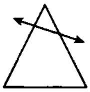
$2 \times 10 \times 6 = 120$ puntos ...(5)



2 puntos — paralelas — triángulos

Las 5 rectas secantes y 6 triángulos:

$2 \times 5 \times 6 = 60$ puntos ...(6)



2 puntos — secantes — triángulos

El MNPC lo obtenemos sumando todos los resultados parciales:
$0 + 10 + 90 + 50 + 120 + 60 = 330$ puntos

6. Si a un grupo de rectas de un plano se le agrega una, el máximo número de puntos de corte se duplicaría. Hallar el número de rectas inicialmente.

Resolución:

Sí inicialmente hubieran "n" rectas, el número máximo de puntos de corte sería: $\frac{n(n-1)}{2}$

Al agregar una al grupo anterior: (n + 1) rectas estas se cortan en: $\frac{(n+1)(n+1-1)}{2} \Rightarrow \frac{(n+1)n}{2}$ puntos.

Según enunciado, el segundo resultado debe ser el doble del primero. Luego, resolviendo tenemos: $n = 3$ rectas

7. Si a un grupo de "n" rectas secantes se agrega una recta, el máximo número de puntos de corte aumentaría en 12. Hallar el valor de "n".

Resolución:

Al agregar una recta al grupo existente de "n" rectas, la nueva recta debe cortar a cada una de las anteriores en un punto, entonces el MNPC se incrementará en "n". Por lo tanto: $n = 12$

8. Si a una grupo de "n" triángulos se le quita uno, el máximo número de puntos de corte disminuye en 18. Hallar "n".

Resolución:

Un triángulo corta a otro en 6 puntos como máximo. Al extraer un triángulo al grupo de "n", este cortará a cada uno de los (n − 1) restantes en 6 puntos.
Luego: $6(n-1) = 18 \quad \therefore n = 4$

9. Al duplicarse el número de rectas secantes, el máximo número de puntos de corte se quintuplica. Hallar el número inicial de rectas.

Resolución:

Sea "n" el número inicial de rectas. Ellas determinan: $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos

Si se duplica el número de rectas, ahora tendremos 2n rectas que se cortan en: $\frac{2n(2n-1)}{2}$ puntos

Según el enunciado, este último resultado debe ser cinco veces el anterior.

$\Rightarrow \frac{2n(2n-1)}{2} = 5\frac{n(n-1)}{2} \quad \therefore n = 3$

10. Si a un grupo de "n" polígonos convexos, de L lados cada uno, se agrega otro de la misma naturaleza y cantidad de lados, el máximo número de puntos de corte se duplica. Hallar "n".

Resolución:

Es fácil deducir que dos polígonos convexos de L lados cada uno se cortan como máximo en 2L puntos. Luego, el nuevo polígono corta al grupo de "n" en 2Ln puntos.

Como los "n" polígonos de L lados se cortan en L(n)(n − 1) puntos, según fórmula, y al colocar el nuevo polígono, esta cantidad se duplica, entonces:
$2L(n) = L(n)(n-1) \Rightarrow n = 3$

11. Encontrar la cantidad de decágonos que se intersecan, sabiendo que al hacerlo determinan como máximo 6250 puntos, en los cuales están también considerados los vértices.

Resolución:

Sea "n" el número de decágonos.
Número total de vértices: 10n
Número máximo de puntos de intersección: 10n(n − 1)
Por dato: $10n + 10n(n-1) = 6250$
$\Rightarrow n^2 = 625 \quad \therefore n = 25$

12. Si a un conjunto de rectas secantes, se le agregase una cantidad igual de rectas, su número máximo de puntos de corte aumentaría en 330. Calcular cuántas rectas tiene el conjunto.

Resolución:

Sí inicialmente hubieran "n" rectas, estas se cortarían en: $\frac{n(n-1)}{2}$ puntos

Al agregar otras "n" rectas al grupo anterior, habrán 2n rectas que se cortarían en: $\frac{2n(2n-1)}{2}$ puntos

Por dato: $\frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} + 330$

$\Rightarrow 3n^2 - n - 660 = 0 \Rightarrow (3n+44)(n-15) = 0$
$\therefore n = 15$

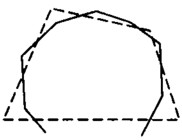
13. Se tiene "n" circunferencias secantes. Si se quitan dos circunferencias, el número máximo de puntos de corte disminuye en 30. Hallar "n".

Resolución:

Las "n" circunferencias secantes se cortarán en: $n(n-1)$ puntos
Al quitar 2, las $(n-2)$ circunferencias restantes, se cortarán en: $(n-2)[(n-2)-1]$ puntos
Por dato: $n(n-1)-30=(n-2)[(n-2)-1]$
Resolviendo: $n=9$

14. Encontrar el número máximo de puntos de corte que hay entre F decágonos convexos y F cuadriláteros convexos.

Resolución:



F decágonos convexos
F cuadriláteros convexos

Los F decágonos (10 lados cada uno): $10F(F-1)$
Los F cuadriláteros: $4F(F-1)$
Los F decágonos con los F cuadriláteros:

$$\begin{pmatrix}\text{n.° de puntos de}\\ \text{corte entre}\\ \text{1 decágono y}\\ \text{1 cuadrilátero}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{n.° de}\\ \text{decágonos}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\text{n.° de}\\ \text{cuadriláteros}\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{(2\times 4)}\times(F)(F)=8F^2$$

Doble número de lados menor

Finalmente, sumando los resultados parciales:
$10F(F-1)+4F(F-1)+8F^2=2F(11F-7)$ puntos

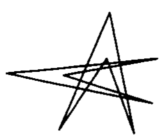
15. Hallar el máximo número de puntos de intersección de 10 cuadriláteros no convexos.

Resolución:

Debemos usar la fórmula vista en el punto VIII de la teoría, para encontrar el MNPC en los "n" cuadriláteros no convexos y aquí reemplazar el valor de n:

$$\boxed{\text{MNPC}=\frac{kn(n-1)}{2}\text{ puntos}}$$

"k" es el número máximo de puntos en que se cortan 2 cuadriláteros no convexos. Para ello, tenemos el siguiente gráfico:

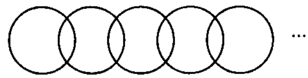
k = 16 puntos 

Entonces para "n" de estas figuras, la fórmula es:

$$\text{MNPC}=\frac{16n(n-1)}{2}=8n(n-1)\text{ puntos}$$

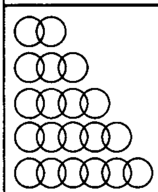
Si: $n=10\Rightarrow \text{MNPC}=8\times 10(9)=720$ puntos

16. Deducir una fórmula para encontrar el número total de puntos en que se cortan "n" circunferencias dispuestas como se indica:

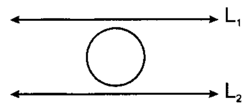


Resolución:

El análisis lo hacemos incrementando cada vez, en uno, el número de circunferencias. Debemos relacionar el número de puntos con el número de circunferencias.

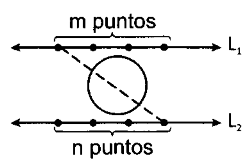
Número de circunferencias	Número de puntos
	2 puntos → 2(2 − 1) 4 puntos → 2(3 − 1) 6 puntos → 2(4 − 1) 8 puntos → 2(5 − 1) 10 puntos → 2(6 − 1)
⋮ n circunferencias	$\boxed{2(n-1)\text{ puntos}}$

17. En la figura, las rectas L_1 y L_2 son paralelas entre sí; sobre $\overleftrightarrow{L_1}$ se toman "m" puntos y sobre $\overleftrightarrow{L_2}$, "n" puntos. Hallar el máximo número de puntos de corte en que las rectas determinadas por los "m" puntos de $\overleftrightarrow{L_1}$ y "n" puntos de $\overleftrightarrow{L_2}$, cortan a la circunferencia.



Resolución:

Cada recta interseca a la circunferencia como máximo en 2 puntos. El número de rectas determinadas lo obtenemos así:



Un punto de $\overleftrightarrow{L_1}$, con los "n" puntos de $\overleftrightarrow{L_2}$ determinan "n" rectas. Luego los "m" puntos de $\overleftrightarrow{L_1}$ con los "n" puntos de $\overleftrightarrow{L_2}$, determinan "mn" rectas.
Entonces, el número de puntos en que esta cantidad (mn) de rectas corta a la circunferencia es 2mn, como máximo.

18. Al número máximo de puntos de corte entre "n" polígonos convexos, de L lados cada uno, se le suma el máximo número de puntos de corte entre "n" polígonos de 2L lados cada uno, obteniéndose en total 630 puntos. Hallar: L + n

Resolución:

MNPC entre "n" polígonos de L lados: L(n)(n − 1)
MNPC entre "n" polígonos de 2L lados: 2L(n)(n − 1)
Por dato: L(n)(n − 1) + 2L(n)(n − 1) = 630
$\Rightarrow$ 3L(n)(n − 1) = 630 $\Rightarrow$ L(n)(n − 1) = 210
En factores primos 210 es: $2 \times 3 \times 5 \times 7$

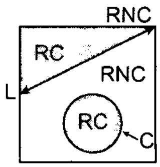
Escrito este producto en forma que contenga dos factores consecutivos, para luego comparar con el primer miembro, tenemos:
L(n)(n − 1) = $7 \times 6 \times 5$ $\Rightarrow$ L = 7 y n = 6
$\therefore$ L + n = 13

19. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.
Datos: L es una recta y C es una circunferencia
(Considerar a P como el plano que los contiene)

I. P − (L ∪ C) resulta ún máximo de dos regiones convexas y 2 regiones no convexas.
II. (L ∩ C) puede ser una región no vacía y convexa.
III. Existen 5 elementos en partición.

Resolución:

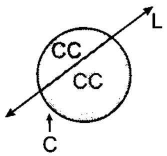
I.



(V)

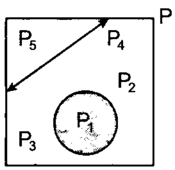
P − (L ∪ C): conjunto no convexo

II.



(V)

III.



Los subconjuntos: P_1, P_2, P_3, P_4 y P_5 determinan una partición {P_1, P_2, P_3, P_4, P_5} del conjunto P, o sea del plano. (V)

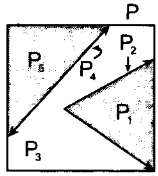
$\therefore$ VVV

20. Indicar el valor de verdad:

I. Una recta y un ángulo contenidos en un plano, pueden determinar una partición de 5 elementos.
II. Todo plano separa al espacio en dos semiespacios E_1 y E_2, tal que $E_1 \cup E_2$ es un conjunto convexo.
III. Sean C: conjunto de puntos de un cono sólido y T: conjunto de puntos de una de las generatrices. (C − T) es un conjunto convexo.

Resolución:

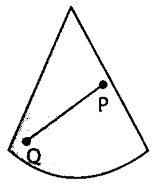
I.



Recordemos que una partición de un conjunto P es una colección de subconjuntos de P, ninguno de los cuales es vacío, tal que cada elemento de P pertenece solamente a uno de los subconjuntos de P. (V)

II. Sí. $P \in E_1$ y $Q \in E_2$
$\Rightarrow \overline{PQ}$ no está contenido en el conjunto respectivo.
Luego $E_1 \cup E_2$ no es un conjunto convexo. (F)

III. Como en el caso de una región triangular ABC, al excluir el lado $\overline{BC}$, por ejemplo, la región restante es un conjunto convexo.



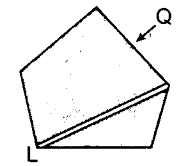
El segmento PQ está contenido en el conjunto respectivo. (V)

21. De las siguientes proposiciones, indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

I. Sea C: un polígono regular de **5** lados con su región interior.
L: una diagonal del polígono regular anterior entonces: C−L es un conjunto convexo.
II. La diagonal de un rombo divide a esta en **2** conjuntos convexos.
III. Sea Q: Un triángulo con su región interior.
T: 2 cevianas del triángulo anterior.
Entonces T divide a Q en un máximo de 3 regiones convexas).

Resolución:

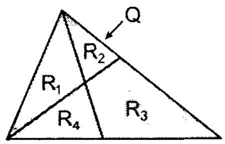
I.



C – L : es un conjunto no convexo. (F)

II. Un rombo no es un conjunto convexo. (F)

III.



T: divide a Q en un máximo de 4 regiones convexas. (F)

∴ FFF

22. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

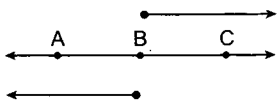
I. Sean A, B y C tres puntos consecutivos de una recta, entonces $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \varnothing$

II. La intersección de dos conjuntos convexos, es un conjunto convexo.

III. Sea C_1 una región cuadrada ABCD y C_2 una región triangular, entonces $C_1 + C_2$ siempre es un conjunto convexo.

Resolución:

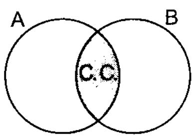
I.



$\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \{B\}$

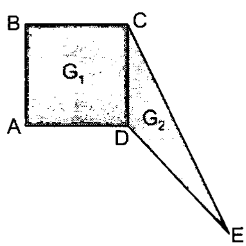
La proposición es falsa.

II.



A y B son conjuntos convexos.
Luego $A \cap B$ = conjunto convexo
La proposición es verdadera.

III.



ABCD ∪ DCE: no es un conjunto convexo.

La proposición es falsa.

∴ FVF

23. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un polígono convexo es un conjunto no convexo.

II. El exterior de un plano es un conjunto convexo.

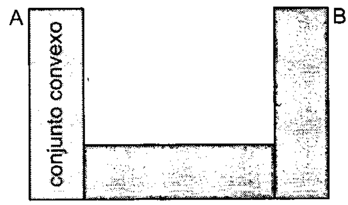
III. La diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto no convexo.

Resolución:

I. Un polígono es solamente una frontera, no tiene interior, es hueco como un aro o anillo.
La proposición es verdadera.

II. Por el postulado de la separación de los puntos del espacio, la proposición es falsa.

III.



A y B son dos conjuntos no convexos.
Pero: A – B = conjunto convexo

La proposición es falsa.

∴ VFF

24. Indicar el valor de la verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un círculo sin el borde es un conjunto convexo.

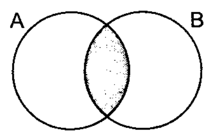
II. La intersección de 2 círculos es un conjunto convexo.

III. Un cuadrilátero siempre es un conjunto convexo.

Resolución:

I. En un círculo, al excluir su circunferencia, la región interior es un conjunto convexo (V)

II.



A: conjunto convexo (círculo)
B: conjunto convexo (círculo)
$A \cap B$: conjunto convexo (V)

III. Ningún polígono es un conjunto convexo. (F)

∴ VVF

25. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

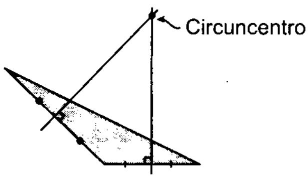
I. Una región poligonal limitada por un polígono convexo, donde se ha excluido su perímetro es un conjunto convexo.
II. Alguna región triangular donde se ha excluido el circuncentro es un conjunto convexo.
III. Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.

Resolución:

En una región poligonal.

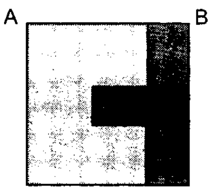
I. Convexa, al excluir su perímetro, contorno o al polígono que limita a dicha región poligonal convexa, sigue siendo un conjunto convexo. (V)

II.



La región triangular que muestra la figura es obtusángulo, su circuncentro es un punto exterior, al omitir, excluir o quitar, el conjunto es convexo. (V)

III.



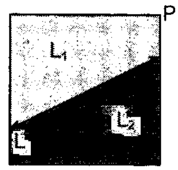
A: conjunto no convexo
B: conjunto no convexo
A ∪ B: conjunto convexo (F)

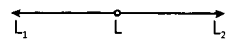
∴ VVF

26. Una recta L de un plano P, divide al plano en dos conjuntos de puntos L_1 y L_2. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. L_1 y L_2 no incluyen a L.
II. L_1 y L_2 son conjuntos convexos.
III. La recta L, determina una partición de tres elementos en el plano.

Resolución:



I. 

Si L_1 y L_2 son semirrectas, entonces estas no incluyen al origen L. (Algo parecido)
La proposición es verdadera.

II. Si L_1 y L_2 son conjuntos convexos ya que son semiplanos.
La proposición es verdadera.

III. $L_1 \cup L \cup L_2 = P$
Es una colección de 3 elementos.
La proposición es verdadera.

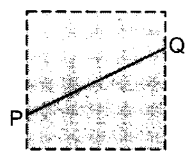
∴ VVV

27. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La región que se obtiene al quitar 2 lados a una región cuadrangular regular es un conjunto convexo.
II. La semirrecta es un conjunto convexo.
III. Una región triangular cuyos vértices se han omitido es un conjunto convexo.

Resolución:

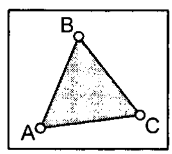
I.



Según la figura, el conjunto es convexo. (V)

II. El rayo sin su origen es la semirrecta, esta no incluye al punto de origen, la semirrecta es un conjunto convexo. (V)

III.



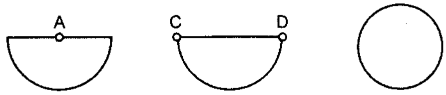
Se han omitido o excluido los vértices del triángulo, pero los puntos restantes forman un conjunto convexo. (V)

∴ VVV

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2005 - I)

A la región plana representada en (a) le falta el punto A; a la de (b) le faltan los puntos C y D y a la de (c) le falta su circunferencia frontera. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son correctas?



(a) (b) (c)

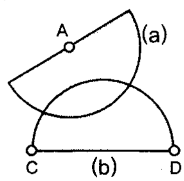
I. La intersección de los conjuntos en (a) y (b) es un conjunto no convexo.
II. La intersección de los conjuntos en (b) y (c) es un conjunto convexo.
III. La intersección de los conjuntos en (a), (b) y (c) es un conjunto convexo.

A) I y III B) II y III C) Solo III
D) Solo I E) Solo II

Resolución:

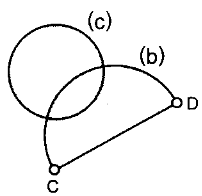
Analizando las proposiciones.

I. (a) es no convexo y (b) es convexo, entonces, la intersección puede ser convexa o no convexa.



$\Rightarrow$ falsa

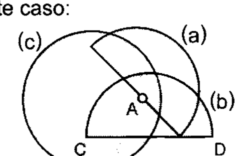
II. (b) y (c) son conjuntos convexos, entonces, la intersección es convexa.



$\Rightarrow$ verdadera

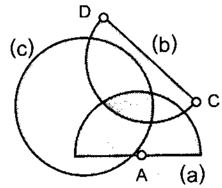
III. (a) es conjunto no convexo, (b) y (c) son conjuntos convexos; entonces, su intersección puede ser convexa y no convexa.

- En este caso:



La intersección es no convexa
$\Rightarrow$ falsa

- En este otro caso:



La intersección es convexa

Clave: E

PROBLEMAS 2 (UNI 2006 - II)

Dadas las siguientes proposiciones:

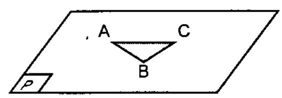
I. El conjunto convexo más pequeño que contiene a tres puntos no colineales del plano es la región triangular cuyos vértices son dichos puntos.
II. El conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} \,/\, |x| > 1\}$ es convexo.
III. Si al borde de un círculo se le quita un solo punto, el conjunto resultante ya no es convexo.

Es (son) correcta(s):

A) I y III B) Solo II C) I y II
D) II y III E) Solo I

Resolución:

Analizando cada proposición:

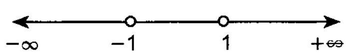
I. 

La región triangular con vértices que son los puntos no colineales del plano es el conjunto convexo más pequeño.
Es correcta.

II. S no es convexo, dado que sería un conjunto discontinuo, no puede ser convexo. Resolviendo la inecuación:

$$|x| > 1 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

Graficando:



Es incorrecta.

III. Analizando la proposición:
Aunque se quite un punto del borde de un círculo, este sigue siendo convexo; por consiguiente todos los puntos del conjunto siguen siendo continuos. El conjunto resultante sigue siendo convexo. Es incorrecta.

Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si la reunión de un región no convexa (cóncava) con una región convexa, de tal forma que no se intersequen, resulta una región cóncava; entonces dichas regiones son:

A) Una región cuadrangular y un círculo.
B) Una región cuadrangular y una región triangular.
C) Una región pentagonal y una región triangular.
D) A y B
E) B y C

2. Dadas las siguientes proposiciones, indicar el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. La unión de dos regiones convexas resulta una región convexa.
II. Una recta secante a una región convexa determina en ella dos regiones convexas.
III. La intersección de dos regiones no convexas puede ser una región convexa.

A) VFF B) FVV C) VVF
D) FFV E) FVF

3. Indicar el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. El círculo es un conjunto convexo.
II. En un triángulo ABC, se traza la mediana AM, si R es la región triangular ABC; entonces $R-\overline{AM}$ no es un conjunto convexo.
III. El intersección de dos conjuntos convexos siempre es convexo.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) VVF

4. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un círculo sin su borde es un conjunto convexo.
II. La intersección de dos rectas es un conjunto convexo.
III. Un cuadrilátero siempre es un conjunto convexo.

A) VVF B) VVV C) FFF
D) VFV E) FFV

5. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Las particiones de un conjunto, incluidas sus fronteras, siempre forman un conjunto convexo.
II. Si C_1 y C_2 son conjuntos convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es convexo.
III. Si C_1 y C_2 son conjuntos no convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es siempre un conjunto convexo.

A) FFV B) VFF C) FVF
D) FFV E) VVF

6. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El punto siempre es un conjunto convexo.
II. El interior de un triángulo siempre es un conjunto convexo.
III. El plano divide al espacio en una partición de tres elementos.

A) FFF B) FVF C) FVV
E) VFF E) VVV

7. Si a un conjunto de "n" rectas secantes se le quita 4 rectas, su máximo número de puntos de intersección disminuirá en 90, pero si se agregan 4 rectas al conjunto el máximo número de puntos de intersección aumentaría en:

A) 120 B) 96 C) 100
D) 106 E) 108

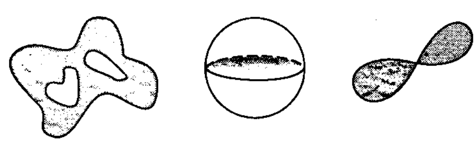
8. En un plano se dibujan "n" rectas secantes, si el máximo número de puntos de intersección que determinaron (n – 4) rectas secantes es 6n. Hallar el máximo número de puntos de intersección entre n triángulos secantes.

A) 2960 B) 1960 C) 3960
D) 3660 E) 1140

9. Hallar el máximo número de puntos de intersección entre n circunferencias, 2n rectas secantes y n triángulos al intersecarse todas esta figuras entre sí.

A) $5n(4n-1)$ B) $4n(5n-1)$ C) $5n(4n-1)$
D) $4n(5n+1)$ E) $n(6n+2)$

10. De los siguientes gráficos, seleccionar cuáles son conjuntos convexos.



(I) (II) (III)

A) Solo I B) Solo I y II C) Solo II
D) Solo III E) Todos

11. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si a una región triangular se le omite una mediana, se determina un conjunto inconexo.

II. Si a un círculo se le extrae la circunferencia que lo limita, se determina un conjunto inconexo.
III. Si el conjunto A es la unión de dos conjuntos no vacíos y separados, significa que es conexo.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FFF E) FVV

12. Indicar el valor de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. Las particiones de un conjunto, incluidas sus fronteras siempre son conjuntos convexos.
II. Si C_1 y C_2 son conjuntos convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es un conjunto convexo.
III. Si C_1 y C_2 son conjuntos no convexos, entonces $C_1 \cap C_2$ es siempre un conjunto no convexo.

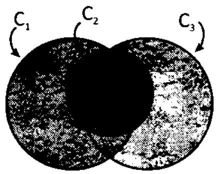
A) VVF B) VVV C) FVF
D) FFF E) FFV

13. De las siguientes proposiciones, cuáles son verdaderas:

I. El exterior de un plano es un conjunto no convexo.
II. Ninguna reunión de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.
III. Alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) Solo I y III E) II y III

14. En la figura, se muestran los círculos C_1, C_2 y C_3. Indicar verdadero o falso.



I. $(C_1 \cup C_2) - C_2$ resulta una región no convexa.
II. $(C_2 \cup C_3) - C_1$ resulta una región convexa.
III. $(C_2 \cap C_3) - C_1$ resulta una región no convexa.

A) FFV B) VVF C) VFV
D) FFF E) FVF

15. Si se tienen dos regiones cuadradas, ¿qué ocurre al intersecarse?

I. Se determina como mínimo cuatro regiones parciales convexas.
II. Se determina como máximo nueve regiones parciales convexas.
III. La unión de ellas puede determinar un conjunto convexo.

A) FVF B) FVV C) VVV
D) VFV E) FFV

16. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sean A, B y C tres puntos consecutivos de una recta, entonces $\overrightarrow{BA} \cap \overrightarrow{BC} = \varnothing$
II. La intersección de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.
III. Sea C_1 una región cuadrada ABCD y C_2 una región triangular entonces $C_1 \cup C_2$ siempre es un conjunto convexo.

A) VFF B) FVF C) VVV
D) FVV E) FFF

17. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Los polígonos convexos son conjuntos convexos.
II. En un plano se dibuja un ángulo, entonces el exterior del ángulo es un conjunto convexo.
III. La intersección de dos círculos es un conjunto convexo.

A) FVV B) FFV C) FFF
D) VFF E) VVF

18. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un círculo sin el borde es un conjunto convexo.
II. La intersección de 2 círculos es un conjunto convexo.
III. Un cuadrilátero siempre es un conjunto convexo.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) VFF E) FVV

19. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La región que se obtiene al quitar 2 lados a una región cuadrangular regular es un conjunto convexo.
II. La semirrecta es un conjunto convexo.
III. Una región triangular cuyos vértices se han omitido es un conjunto convexo.

A) VVV B) FVF C) FVV
D) VFV E) VFF

20. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Una región poligonal limitado por un polígono convexo, donde se ha excluido su perímetro es un conjunto convexo.
II. Alguna región triangular donde se ha excluido el circuncentro es un conjunto convexo.
III. Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.

A) VVV B) VVF C) VFF
D) FFF E) FFV

21. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Si A, B, son 2 conjuntos convexos, A ∩ B es un conjunto convexo.
II. Todo punto separa a la recta en dos conjuntos no vacíos llamados semirrectas.
III. Si la intersección de dos conjuntos no es un conjunto convexo, entonces ninguno de los dos conjuntos es convexo.

A) VVF B) VVV C) FVV D) FFV E) FFF

22. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Alguna diferencia y de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.
II. Si la intersección de dos conjuntos es convexa, entonces ninguno de los dos conjuntos es no convexo.
III. El conjunto de los puntos interiores de un polígono equilátero ($n \geq 3$) es siempre un conjunto convexo.

A) VFF B) VVF C) VVV D) FFF E) FFV

23. Si una recta L de un plano P, la cual separa a este plano en 2 conjuntos de puntos L_1 y L_2, indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. L_1 y L_2 no incluyen a L.
II. L_1 y L_2 son convexos.
III. L_1 y L_2 se llaman planos.

A) VVV B) VVF C) VFF D) FVF E) FVV

24. Se tienen "n" circunferencias secantes, si se quitan 2 circunferencias, el número máximo de puntos de intersección disminuye en 30. Hallar n.

A) 9 B) 8 C) 6 D) 10 E) 12

25. Calcular el máximo número de puntos de intersección que producen 2 polígonos convexos: uno de 2 y otro de 2^{n+2} lados ($n > 1$).

A) 2^{n+1} B) 2^{n-1} C) 2^{n^n}
D) 2^{n+2} E) 2^{2+n}

26. En un plano se dibujan k elipses secantes y 2k cuadriláteros cóncavos secantes. Si el máximo número de puntos de Intersección es 182k. Hallar k.

A) 4 B) 5 C) 7 D) 3 E) 6

27. En un plano el máximo número de puntos de intersección entre n elipses secantes, n triángulos secantes y n cuadriláteros secantes es 339n. Hallar n.

A) 12 B) 14 C) 16 D) 18 E) 26

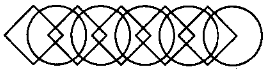
28. Calcular el máximo número de puntos de intersección de 8 rectas secantes con 11 paralelas y con 6 circunferencias secantes.

A) 380 B) 371 C) 372 D) 373 E) 374

29. Si el máximo número de puntos de intersección de N polígonos de 5 lados más el número de vértices es 500. Calcular N.

A) 8 B) 10 C) 12 D) 16 E) 24

30. Calcular el número total de puntos de intersección de 100 circunferencias con 100 cuadriláteros tal como los mostramos.



A) 746 B) 750 C) 784
D) 794 E) 840

31. Cuántas rectas se intersectan sabiendo que si se quitan 4, el número de puntos disminuye en 54.

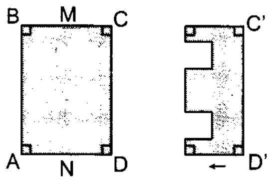
A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 35

32. Si dos regiones hexagonales, una convexa y otra no convexa, se intersecan, podemos deducir que:

I. Como máximo se determinan ocho regiones triangulares convexas.
II. Como máximo se determinan nueve regiones convexas entre triangulares y cuadrangulares.
III. La región común puede ser no convexa.

A) VFV B) FVV C) VVV D) VVF E) FFV

33. Del gráfico BM = MC = AN = a y AB = C'D'. Si la región no convexa se desplaza hacia la izquierda, podemos asumir.



I. Cuando $\overline{AB}$ coincide con $\overline{C'D'}$, la región resultante es convexa.
II. Cuando $\overline{MN}$ coincide con $\overline{C'D'}$, la región común entre ellas es no convexa.
III. Cuando $\overline{CD}$ coincide con $\overline{C'D'}$, las dos regiones determinadas son no convexas.

A) VVV B) VFV C) FVV D) FFF E) FFV

34. ¿En cuántas partes queda dividido el plano por 20 rectas secantes donde no hay 3 rectas concurrentes?

A) 200 B) 201 C) 213 D) 210 E) 211

35. Calcular el NPI máximo entre 12 rectas coplanares de las cuales son paralelas.

A) 50 B) 51 C) 52 D) 53 E) 54

36. Calcular el NPI máximo entre 20 circunferencias concéntricas y 20 rectas secantes de las cuales 10 pasan por el centro de la circunferencia.

A) 946 B) 947 C) 948 D) 949 E) 950

37. Hallar el NPI máximo entre 15 rectas secantes, si 8 de ellas son concurrentes.

A) 74 B) 75 C) 76 D) 77 E) 78

38. Calcular el NPI mínimo de 7 rectas secantes y 8 circunferencias secantes.

A) 43 B) 44 C) 45 D) 46 E) 47

39. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La unión de dos segmentos consecutivos es siempre un conjunto convexo.
II. La región triangular cuyo incentro se ha omitido es un conjunto convexo.
III. Si a una línea recta AB se le extrae el punto A, la resultante es conjunto convexo.

A) VVF B) FVF C) FVV D) FFF E) FFV

40. Señalar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos regiones triangulares determinan como máximo siete conjuntos convexos disjuntos, al superponerse entre sí.
II. Un cilindro puede ser un conjunto convexo.
III. Si a una región triangular se le extrae una altura, puede que sea un conjunto convexo.

A) FVV B) VFF C) FFV D) VVF E) VVV

41. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Ningún conjunto convexo resulta de la reunión de dos conjuntos no convexos.
II. Toda reunión de dos conos de revolución que tienen la misma base es un conjunto convexo.
III. Sea una región triangular R de ortocentro H, R − {H} es un conjunto no convexo.

A) VFF B) FVF C) VVV D) FVV E) FFF

42. Una recta L de un plano P, divide al plano en dos conjuntos de punto L_1 y L_2. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. L_1 y L_2 no incluyen a L.
II. L_1 y L_2 son conjuntos convexos.
III. La recta L determina una partición de tres elementos en el plano.

A) VVF B) VVV C) VFF D) FVV E) FVF

43. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La unión de dos conjuntos no convexos es siempre un conjunto no convexo.
II. Una recta interseca a un ángulo, entonces la intersección puede ser un conjunto convexo.
III. Una región triangular sin una altura nunca es un conjunto convexo.

A) FFF B) VVV C) FVF D) VFV E) VFF

44. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. En todo polígono, ningún par de lados se interseca excepto en sus extremos.
II. Toda recta que pasa por un punto inferior a un polígono convexo interseca al contorno en dos puntos, y solo en dos.
III. En todo polígono, ningún par de lados son colineales.

A) VVV B) VVF C) VFF D) FFF E) FFV

45. Hallar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

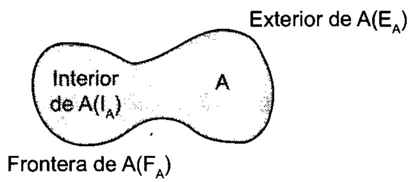
I. Sea P un polígono regular de seis lados con su región interior y D una diagonal del polígono anterior, entonces P−D es un conjunto convexo.
II. Una semirrecta es un conjunto convexo.
III. La superficie de una esfera es un conjunto convexo.

A) VFV B) FVF C) FFF D) VVF E) VFF

46. De las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

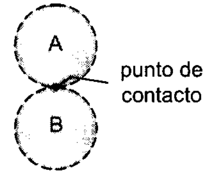
I. Un subconjunto de la recta euclidiana es convexo si y solo si es un segmento de esta.
De las siguientes proposiciones, indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

II.



$F_A = C(I_A \cup E_A)$; C: complemento

III.



Siendo A, conjunto A y B conjunto B.
Si $A \cup T \cup B = E$, E es un conjunto conexo.

A) VVV B) VFV C) VFF D) FVV E) FVF

47. De las siguientes proposiciones, señalar su condición verdadera o falsa:

I. El vacío es un conjunto convexo.
II. El punto es un conjunto convexo.
III. El punto es un conjunto conexo.
IV. Infinitos puntos consecutivos forman un conjunto conexo.

A) VVFF B) VFVF C) FVFV
D) FFVV E) FVVF

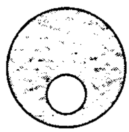
48. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Alguna diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto convexo.
II. Si la intersección de dos conjuntos es un conjunto convexo, entonces ninguno de los dos conjuntos es un conjunto no convexo.
III. El conjunto de los puntos interiores de un polígono equilátero es siempre un conjunto convexo.

A) VVF B) VFF C) VVV D) FFF E) FFV

49. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si se trazan dos rectas secantes a una región cuadrangular convexa, las regiones parciales determinadas por dichas rectas son convexas.
II. Al trazar dos tangentes a la circunferencia menor, estas rectas y la circunferencia menor determinan siempre dos conjuntos no convexos y un máximo de cuatro conjuntos convexos.



III. La circunferencia inscrita en una región triangular determina 3 regiones no convexas.

A) VVF B) FFV C) VVV D) FFF E) VFF

50. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Una región poligonal limitada por un polígono convexo, de la que se ha excluido su contorno, es un conjunto convexo.
II. Alguna región triangular donde se ha excluido el circuncentro es un conjunto convexo.
III. Ningún conjunto convexo resulta de la unión de dos conjuntos no convexos.

A) VVV B) VVF C) VFV D) FVV E) FVF

51. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La unión de una semirrecta con su origen es un conjunto convexo.
II. Una poligonal cerrada siempre divide al plano que lo contiene en un conjunto convexo y otro conjunto no convexo.
III. Sea R una región circular y T una región triangular tal que $R \cap T \neq \varnothing$.
Entonces, T determina en R un máximo de 4 conjuntos convexos.

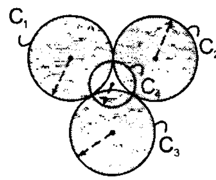
A) VVF B) VFF C) VFV
D) FFV E) FFF

52. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Un polígono convexo es un conjunto no convexo.
II. El exterior de un plano es un conjunto convexo.
III. La diferencia de dos conjuntos no convexos es un conjunto no convexo.

A) VVV B) VFF C) FFF
D) VVF E) FFV

53. En el gráfico se muestran cuatro círculos. Señalar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:



I. El conjunto $(C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4) - C_4$ es simplemente conexo.
II. El conjunto $C_3 - C_4$ es conexo.
III. El conjunto $C_4 - (C_1 \cup C_2 \cup C_3)$ es un conjunto no simplemente conexo.

A) FFV B) VVF C) FFF
D) VFF E) VFV

54. Hallar el máximo número de puntos de intersección para 2 triángulos, 6 circunferencias y 10 rectas, si conocemos que todas las figuras tienen un punto común.

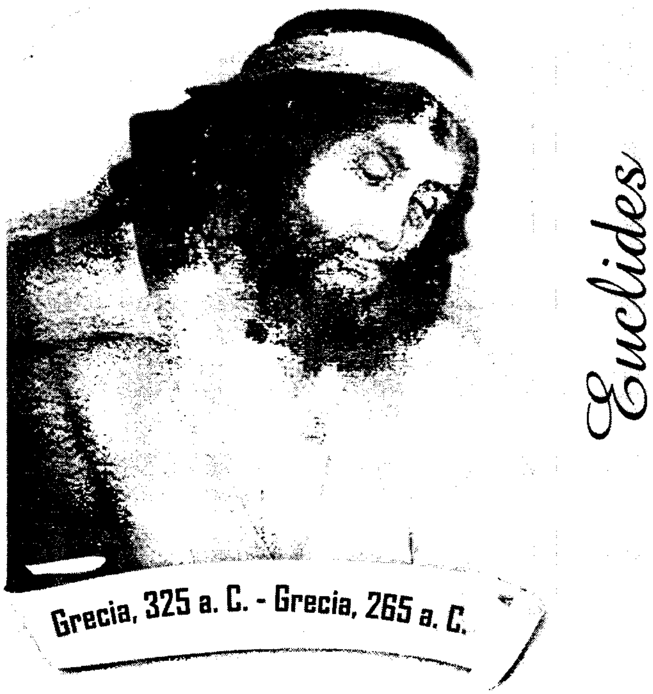
A) 139 B) 143 C) 156
D) 161 E) 179

CLAVES

1. A	8. E	15. B	22. A	29. B	36. A	43. C	50. B
2. B	9. A	16. B	23. B	30. D	37. E	44. B	51. C
3. E	10. E	17. B	24. A	31. A	38. B	45. B	52. B
4. A	11. C	18. B	25. D	32. E	39. D	46. A	53. B
5. E	12. C	19. A	26. A	33. C	40. E	47. A	54. D
6. E	13. D	20. B	27. A	34. E	41. E	48. B	
7. D	14. C	21. A	28. E	35. B	42. B	49. C	

Segmentos Ángulos | 02 capítulo

Euclides fue un matemático y geómetra griego (325 a. C.-265 a. C.). Se le conoce como el «padre de la Geometría». Su vida es poco conocida, salvo que vivió en Alejandría (ciudad situada al norte de Egipto) durante el reinado de Ptolomeo I. Su obra *Los elementos* es una de las obras científicas más conocidas del mundo y era una recopilación del conocimiento impartido en el centro académico. En ella se presenta de manera formal, partiendo únicamente de cinco postulados, el estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc., es decir, de las formas regulares.



La geometría de Euclides, además de ser un poderoso instrumento de razonamiento deductivo, ha sido extremadamente útil en muchos campos del conocimiento; por ejemplo, en la física, la astronomía, la química y diversas ingenierías. Desde luego, es muy útil en las matemáticas. Los teoremas de Euclides son los que generalmente se aprenden en la escuela moderna. Esta obra perduró sin variaciones hasta el siglo XIX.

Fuente: Wikipedia

SEGMENTOS

Es la porción de recta limitada por dos puntos llamados extremos. El segmento AB de la figura adjunta, se denota: $\overline{AB}$ o $\overline{BA}$. Los puntos A y B son los extremos.
Si la longitud o medida del segmento AB es 10 unidades, podemos escribir: AB = 10 o m AB = 10. En este último caso, la m se lee: medida.

A B

Segmentos congruentes

Son aquellos que tienen igual longitud.

B A C D

Así, si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes, escribiremos:
$\overline{AB} \cong \overline{CD}$ o simplemente: AB = CD

Punto medio de un segmento

Es aquel que lo divide en dos segmentos congruentes. Se dice que dicho punto biseca al segmento.

A M B $\Rightarrow$ M es punto medio $\overline{AB}$.

$\therefore\ \overline{AM} \cong \overline{MB}$ o $AM = MB = \dfrac{AB}{2}$

Puntos colineales

Son los que pertenecen a una misma recta. Por ejemplo, los puntos A, B, C, D, contenidos en la recta r. Además, si se marcan sobre la recta en el orden en que se mencionen, diremos que A, B, C, D son consecutivos.

A B C D r

Ejemplo:

¿Cuántos segmentos se pueden contar en la figura adjunta?

A B C D E

Se observan: $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AE}, \overline{BC}, \overline{BD}, \overline{BE}, \overline{CD}, \overline{CE}$ y $\overline{DE}$

En total: 10 segmentos.

Nota

En general, n puntos colineales y consecutivos determinan

$$\boxed{\frac{n(n-1)}{2} \text{ segmentos}}$$

Así, para el ejemplo anterior: n = 5 puntos.

El número de segmentos que se obtiene: $\dfrac{5(4)}{2} = 10$

Operaciones con segmentos

Basados en el postulado: El total es igual a la suma de sus partes, tenemos:

A B C $\Rightarrow AB + BC = AC$

P Q R S $\Rightarrow PQ + QR + RS = PS$

A B C D E F

$\Rightarrow AB + BC + CD + DE + EF = AF$

$AB + BE = AE;\ AC + CD + DE = AE$

$BD + DF = BF$; etc.

También, podemos efectuar diferencias entre las longitudes de dos segmentos para representar un tercero; por ejemplo:

M N T $\Rightarrow MN = MT - NT;\ NT = MT - MN$

Distancia entre dos puntos

Es la longitud del segmento que los une. Así, la distancia entre los puntos A y B es AB.

A B

Observación

En algunos gráficos, vamos a representar las longitudes de los segmentos con letras, usualmente, minúsculas. Por ejemplo:

x
A B

$\Rightarrow$ El segmento $\overline{AB}$ mide x unidades de longitud
$\therefore\ AB = x$

a b
P Q R

$\Rightarrow$ Para la longitud de $\overline{PR}$ como: $PR = PQ + QR$
$\therefore\ PR = a + b$

n
x
E F G

$\Rightarrow$ En este caso: $FG = EG - EF$
$\therefore\ FG = n - x$

2a a
A B C

$\Rightarrow$ Si se enunciara como dato: AB = 2BC (la longitud de AB es el doble de la longitud de BC), entonces, haciendo: BC = a; y tendremos: AB = 2a.

En aquellos casos de segmentos congruentes:

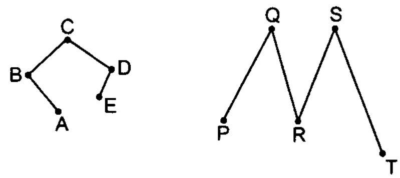
M N R — d d — J K L

$\overline{MN} \cong \overline{NR}$ o $MN = NR$ — $\overline{JK} \cong \overline{KL}$

POLIGONAL

Se da este nombre al conjunto de dos o más segmentos consecutivos trazados en diferentes direcciones, sin intersecarse dos no consecutivos.

Poligonal convexa ABCDE — Poligonal no convexa PQRST

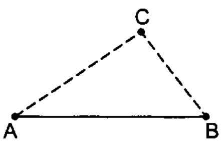


Cada segmento es un lado y cada punto es un vértice de la poligonal.

Una poligonal se llama convexa, si alguna recta la interseca, como máximo, en dos puntos. La poligonal es no convexa, si alguna recta determina sobre ella más de dos puntos (Esta última poligonal se menciona en algunos textos como cóncava).

Postulado de la mínima distancia

La mínima distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une. De modo que, en la figura, el menor camino para ir de A hacia B es $\overline{AB}$.



Entonces: $\boxed{AB < AC + CB}$

Ejemplo:

En el gráfico anterior: AC = 12 y CB = 8. Hallar el máximo valor entero de AB.

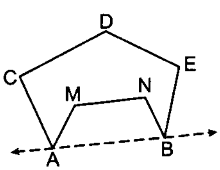
Resolución:

Tenemos: $AB < AC + CB \Rightarrow AB < 12 + 8 \Rightarrow AB < 20$

Entonces, el máximo valor entero de AB: 19

Poligonales envuelta y envolvente

Se determinan al trazar dos poligonales cuyos extremos coinciden hacia un mismo lado y sin intersecarse en algún otro punto. Para el gráfico:



ACDEB: envolvente

AMNB: envuelta

(A y B son los extremos comunes y las poligonales están a un mismo lado de $\overleftrightarrow{AB}$).

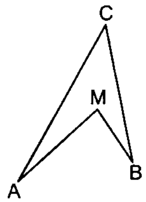
Teorema de poligonales

Toda poligonal envolvente es mayor que su respectiva envuelta, de la misma naturaleza.

Así, para el anterior gráfico:

$$AC + CD + DE + EB > AM + MN + NB$$

Vamos a demostrar este teorema para poligonales de dos lados, como en la siguiente figura:

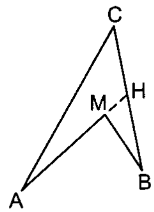


$\boxed{AC + CB > AM + MB}$

Demostración:

Prolongamos $\overline{AM}$ hasta su intersección en H, con $\overline{BC}$.

Luego, por el postulado de la mínima distancia:



$\triangle ACH \Rightarrow AC + CH > AM + MH$

$\triangle MHB \Rightarrow MH + HB > MB$

Sumando miembro a miembro:

$AC + MH + CH + HB > AM + MB + MH$

$\Rightarrow AC + CH + HB > AM + MB$

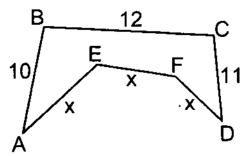
$\therefore AC + CB > AM + MB$

Ejemplo:

En la figura:

AB = 10; BC = 12; CD = 11 y AE = EF = FD = x

Hallar el máximo valor entero de x.



Resolución:

Observamos que: ABCD: envolvente AEFD; envuelta

Entonces, por el teorema de poligonales:

$AE + EF + FD < AB + BC + CD$

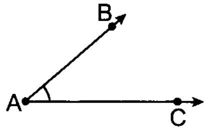
$\Rightarrow x + x + x < 10 + 12 + 11 \Rightarrow 3x < 33 \Rightarrow x < 11$

Por lo tanto el máximo valor entero de x es 10.

ÁNGULOS

Es la figura formada por dos rayos que tienen el mismo origen. Los dos rayos son los lados del ángulo y el origen común es el vértice.

Para el gráfico $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son los lados y A es el vértice del ángulo.

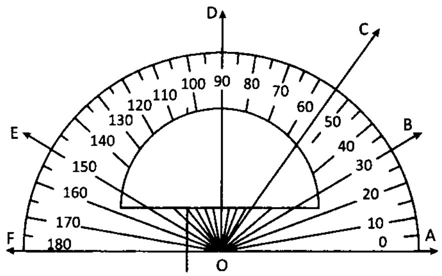


Notación de un ángulo

$\angle BAC$ o $\angle CAB$ (la letra del vértice al centro).
o también: $\angle A$
Si los lados de un ángulo son dos rayos opuestos, el ángulo se llama rectilíneo o llano.

Medida de un ángulo

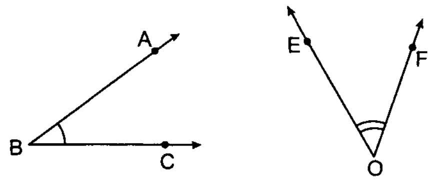
La medida de un ángulo se refiere a la abertura entre sus lados. En este curso usaremos el sistema sexagesimal, cuya unidad es el grado sexagesimal, expresado así: 1°. Este ángulo unidad está contenido 180 veces en un ángulo llano.
Las unidades inferiores a 1° son el minuto y el segundo sexagesimal, cuyas equivalencias y notaciones son: 1° = 60' y 1' = 60"
Por ejemplo, 40°10'32" representa la medida de un ángulo de 40 grados 10 minutos 32 segundos. Por otro lado, son equivalentes las cantidades: 20,5° y 20°30'.
La siguiente figura, muestra el uso de un transportador para medir ángulos.



$m\angle AOB = 30°$
$m\angle AOC = 55°$
$m\angle AOD = 90°$
$m\angle AOE = 150°$
$m\angle AOF = 180°$ (ángulo llano)
$m\angle BOC = 55° - 30° = 25°$
$m\angle BOD = 90° - 30° = 60°$
$m\angle BOE = 150° - 30° = 120°$
$m\angle BOF = 180° - 30° = 150°$

Ángulos congruentes

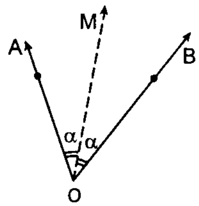
Dos ángulos son congruentes si tienen igual medida. Si el ángulo ABC es congruente con el ángulo EOF, escribiremos:
$\angle ABC \cong \angle EOF$



O por comodidad: $\angle ABC \cong \angle EOF$, si nos referimos a las medidas.

Bisectriz de un ángulo

La bisectriz de un ángulo es el rayo que lo divide en dos ángulos congruentes. Para la figura, diremos que $\overrightarrow{OM}$ biseca el ángulo AOB:



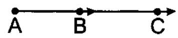
$\angle AOM \cong \angle MOB$ o $\angle AOM = \angle MOB = \dfrac{\angle AOB}{2}$

Clasificación de los ángulos

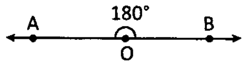
Los ángulos se clasifican de acuerdo a su medida o a su posición con relación a otros.

Por su medida. Pueden ser:

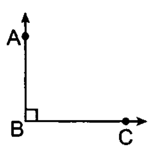
1. **Ángulo nulo:** mide 0°. Sus lados son dos rayos coincidentes. $\angle BAC = 0°$



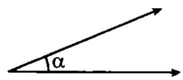
2. **Ángulo llano o rectilíneo:** mide 180°. Sus lados son dos rayos opuestos.



3. **Ángulo recto:** mide la mitad de un ángulo llano: (90°). Decimos que $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ son perpendiculares y escribimos $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$.

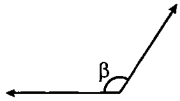


4. **Ángulo agudo:** todo aquel que mide más de 0° y menos de 90°.
$0° < \alpha < 90°$



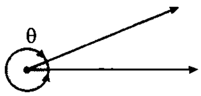
5. **Ángulo obtuso:** mide más de 90° y menos de 180°.

$90° < \beta < 180$

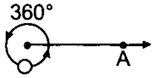


6. **Ángulo convexo:** cuya medida está comprendida entre 0° y 180°.

7. **Ángulo cóncavo:** si mide más de 180° y menos de 360°.
$180° < \theta < 360°$



8. **Ángulo de una vuelta:** se genera al girar un rayo, una vuelta completa alrededor de su origen. Mide 360°.



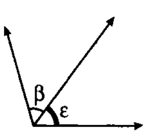
Por su posición. Pueden ser:

1. **Adyacentes:** cuando dos ángulos tienen el mismo vértice, un lado común y los otros lados, en regiones distintas a dicho lado común.

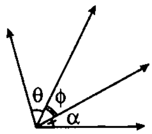
2. **Consecutivos:** si para tres o más ángulos, cada uno es adyacente con su inmediato.

3. **Par lineal:** está determinado por dos ángulos adyacentes cuyas medidas suman 180°.

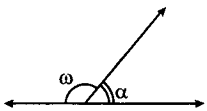
4. **Opuestos por el vértice:** cuando dos ángulos tienen sus lados que son pares de rayos opuestos. Se demuestra que miden igual.



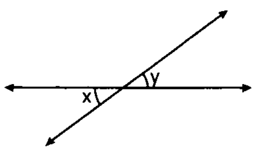
∠ Adyacentes



∠ Consecutivos



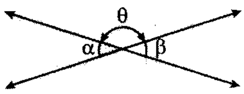
Par lineal $\boxed{\alpha + \omega = 180°}$



Ángulos opuestos por el vértice: $\boxed{x = y}$

Teorema

1. Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.
Demostración:

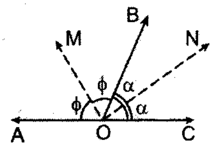


α y θ toman un par lineal, al igual que β y θ.
Luego:

$\left.\begin{array}{l}\alpha + \theta = 180° \\ \beta + \theta = 180°\end{array}\right\}$ Restando miembro y miembro: $\alpha - \beta = 0°$

De donde: $\alpha = \beta$

2. Las bisectrices de un par lineal son perpendiculares.
Demostración:



Sean $\angle AOB$ y $\angle BOC$ un par lineal.

$\overrightarrow{OM}$ biseca al $\angle AOB$, y $\overrightarrow{ON}$ biseca a $\angle BOC$.

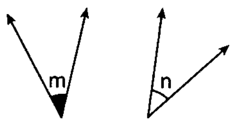
Como: $m\angle AOB + m\angle BOC = 180°$

Entonces: $2\phi + 2\alpha = 180° \Rightarrow \phi + \alpha = 90°$
Esto es: $m\angle MON = 90°$

$\therefore$ $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$ son perpendiculares.

Por su suma

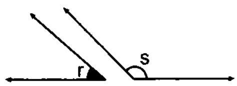
1. **Ángulos complementarios:** dos ángulos se llaman complementarios si sus medidas suman 90°.
Si m y n son complementarios:



$\boxed{m + n = 90°}$

Se dice que uno es complemento del otro.

2. **Ángulos suplementarios:** dos ángulos se llaman suplementarios, si sus medidas suman 180°.



$\boxed{r + s = 180°}$

Observación

- Todo ángulo agudo tiene complemento y suplemento.
- Los ángulos obtusos tienen solo suplemento.
- Si a es la medida de un ángulo agudo, entonces las medidas de su complemento y suplemento son respectivamente: (90° – a°) y (180° – a°).

- Los complementos de dos ángulos congruentes, son congruentes.
- Los suplementos de dos ángulos congruentes, son congruentes.
- Dos ángulos que tienen el mismo complemento (o el mismo suplemento), son congruentes.

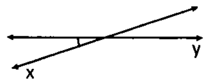
POSICIONES RELATIVAS DE DOS RECTAS

En un mismo plano, dos rectas distintas pueden ser secantes o paralelas.

Secantes

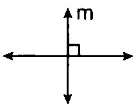
Si se intersecan. A su vez, se dividen en:

I. **Oblicuas:** si no determinan ángulo recto:



$\overleftrightarrow{x} \angle \overleftrightarrow{y}$ ($\angle$, se lee: es oblicuo con).

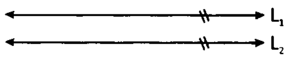
II. **Perpendiculares:** si determinan ángulo recto:



$\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$
($\perp$, se lee: es perpendicular con).

III. **Paralelas**

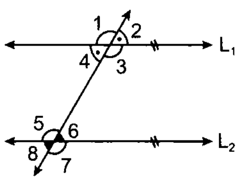
Si no se intersecan.



$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ (//, se lee: es paralelo con)

ÁNGULOS DETERMINADOS SOBRE DOS RECTAS PARALELAS Y UNA SECANTE

Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ determinan los siguientes ángulos:



Ángulos alternos: que pueden ser:

- Alternos internos: $\angle 3 = \angle 5$ y $\angle 4 = \angle 6$
- Alternos externos: $\angle 1 = \angle 7$ y $\angle 2 = \angle 8$

Ángulos correspondientes:

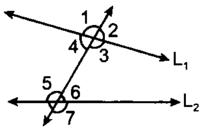
$\angle 1 = \angle 5$; $\angle 2 = \angle 6$; $\angle 3 = \angle 7$ y $\angle 4 = \angle 8$

Ángulos conjugados: que pueden ser:

- Conjugados internos:
  $\angle 3+\angle 6 = 180°$ y $\angle 4+\angle 5 = 180°$
- Conjugados externos:
  $\angle 1+\angle 8 = 180°$ y $\angle 2+\angle 7 = 180°$

Nota

En la figura siguiente, las rectas $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ no son paralelas.
Se definen los pares de ángulos con los mismos nombres, pero no se cumplen las propiedades.



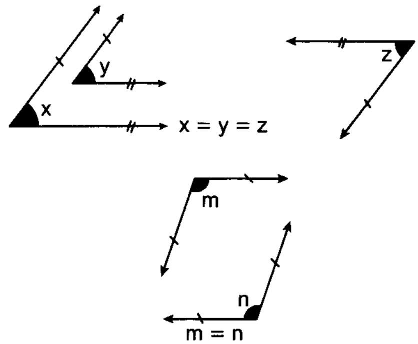
Por ejemplo: 4 y 6 son alternos internos, pero no son congruentes.

ÁNGULOS DE LADOS PARALELOS

Estos pueden ser congruentes o suplementarios.

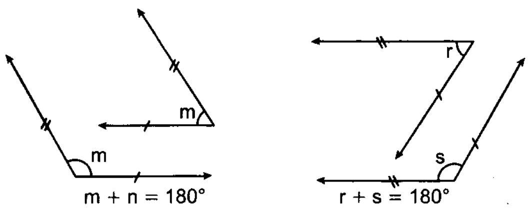
Congruentes

Si ambos son agudos o ambos obtusos.



Suplementarios

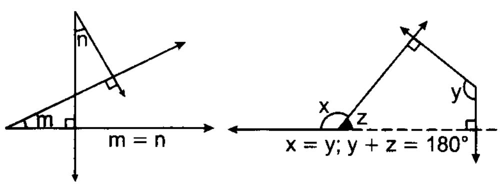
Si uno es agudo y el otro obtuso (sus medidas sumarán 180°).

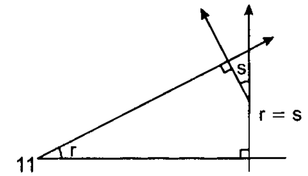


ÁNGULOS DE LADOS PERPENDICULARES

Estos ángulos resultan: **congruentes**, si ambos son agudos o los dos obtusos y **suplementarios**, si uno es agudo y el otro obtuso.

Por ejemplo:

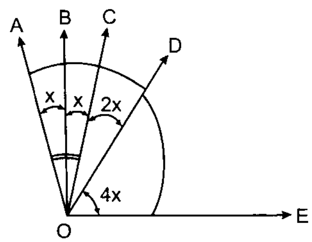




Ejemplos:

1. Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE; $\overrightarrow{OB}$ biseca $\angle$AOC; $\overrightarrow{OC}$, biseca $\angle$AOD y $\overrightarrow{OD}$, biseca $\angle$AOE.
   Si $2(\angle AOB) + 3(\angle BOC) + 4(\angle COD) + \angle AOE = 210°$, hallar la medida del $\angle$AOB.

   Resolución:

   Incógnita: $\angle AOB = x$

   Dadas las bisectrices: $\angle AOB = \angle BOC = x$

   $\angle AOC = \angle COD = 2x$ y $\angle AOD = \angle DOE = 4x$

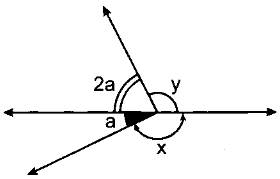
   Reemplazando en el dato:

   $2(\angle AOB) + 3(\angle BOC) + 4(\angle COD) + \angle AOE = 210°$

   $2(x) + 3(x) + 4(2x) + 8x = 210°$

   $\Rightarrow 21x = 210° \quad \therefore x = 10°$

2. En la figura, $x - y = 12°$. Hallar el valor de a.

   Resolución:

   Del gráfico, observamos que: $x = 180° - a$

   $y = 180° - 2a$

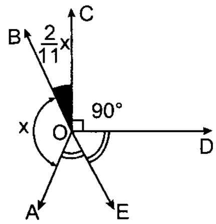
   Reemplazando en el dato: $x - y = 12°$

   Tenemos: $(180° - a) - (180° - 2a) = 12°$

   Efectuando queda: $a = 12°$.

3. Alrededor del punto O, en forma consecutiva, se trazan los rayos $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ y $\overrightarrow{OE}$, de modo que $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OB}$ son rayos opuestos y $\overrightarrow{OE}$ biseca el $\angle$AOD. Hallar la medida del $\angle$AOB, si $m\angle BOC = \frac{2}{11}(m\angle AOB)$.

   Resolución:

   Consideremos el gráfico:

   Sea x la medida del ángulo AOB, entonces:

   $m\angle BOC = \frac{2}{11}x$

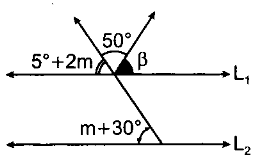
   Como: $m\angle AOE = 180° - x$; $m\angle EOD = 180° - 90° - \frac{2}{11}x$

   y $m\angle EOD = m\angle AOE$, entonces: $180° - 90° - \frac{2}{11}x$

   $m\angle EOD = 180° - x$

   Efectuando: $x - \frac{2}{11}x = 90°$, de donde: $x = 110°$

4. Hallar β, si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.

   Resolución:

   En $\overleftrightarrow{L_1}$: $\beta + 50° + 5° + 2m = 180°$

   $\Rightarrow \beta + 2m = 125°$ ...(1)

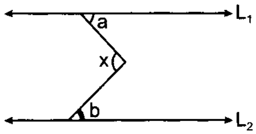
   Por ser correspondientes: $5° + 2m = m + 30°$

   $\Rightarrow m = 25°$

   Reemplazando m, en (1): $\beta + 2 \times 25° = 125°$

   $\therefore \beta = 75°$

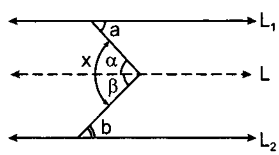
5. En la figura: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.

   Demostrar que: $x = a + b$

   Resolución:

   Trazando $\overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$

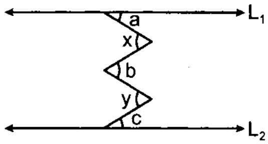
   Del gráfico: $\alpha = a \wedge \beta = b$

   Como: $x = \alpha + \beta$

   $\Rightarrow x = a + b$

Nota

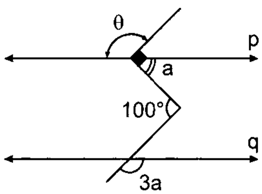
En general, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$:



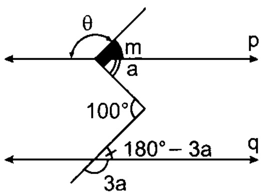
$\Sigma(\angle$ a la derecha$) = \Sigma(\angle$ a la izquierda$)$

$\therefore a + b + c = x + y$

6. Hallar θ, si $\overleftrightarrow{p} \parallel \overleftrightarrow{q}$:



Resolución:



Primero hallamos el valor de a, usando la propiedad:

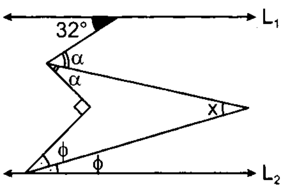
$100° = a + (180° - 3a)$

De donde: $a = 40°$

Luego: $m = 90° - a \Rightarrow m = 50°$

$\therefore \theta = 130°$

7. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar el valor de x.



Resolución:

Por propiedad, en el cuadrilátero no convexo:

$\alpha + \phi + x = 90°$ ...(1)

Además, para la línea quebrada:

$2\alpha + 2\phi = 32° + 90°$

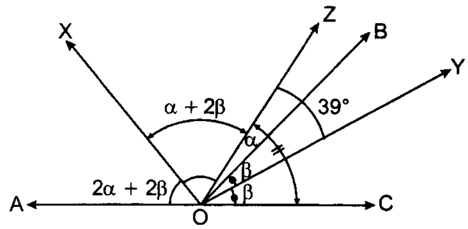
$\Rightarrow \alpha + \phi = 61°$

Reemplazando esto último en (1): $61° + x = 90°$.

De donde: $x = 29°$

8. $\angle AOB$ y $\angle BOC$ son consecutivos, $\angle AOC$ llano y $\angle AOB > \angle BOC$. Se trazan: $\overrightarrow{OX}$, bisectriz de $\angle AOB$, $\overrightarrow{OY}$, bisectriz de $\angle BOC$; $\overrightarrow{OZ}$, bisectriz de $\angle XOC$. Hallar la medida de $\angle AOB$, si $\angle ZOY$ mide 39°.

Resolución:



Incógnita: $m\angle AOB$

Sean: $m\angle ZOB = \alpha$ y $m\angle BOY = \beta$

Luego se determinan las medidas de los otros ángulos:

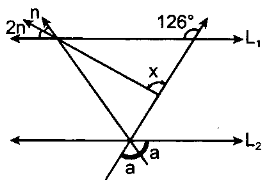
$\Rightarrow \alpha + \beta = 39°$

Se pide: $m\angle AOB = 4(\alpha + \beta)$ (obtenido del gráfico).

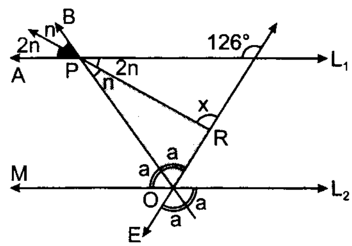
Entonces: $m\angle AOB = 4(39°)$

$\therefore m\angle AOB = 156°$

9. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar el valor de x.



Resolución:



En el $\triangle PRO$: $x = a + n$ ...(1)

Por ser alternos externos: $m\angle EOG = 126°$

$\Rightarrow 2a = 126° \Rightarrow a = 63°$

También: $m\angle APB = m\angle MOP$ ($\angle$ correspondientes).

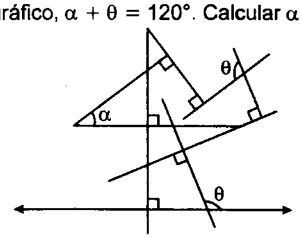
$\Rightarrow 3n = a$

$3n = 63° \Rightarrow n = 21°$

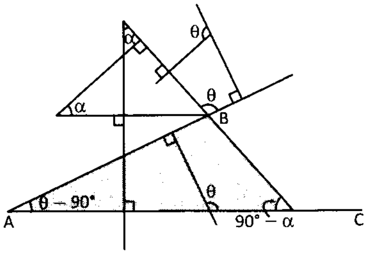
Finalmente, reemplazando los valores de a y n, en (1):

$x = 63° + 21°$ $\therefore x = 84°$

10. En el gráfico, $\alpha + \theta = 120°$. Calcular α.



Resolución:



Con las prolongaciones hechas se tiene: △ABC

Luego:

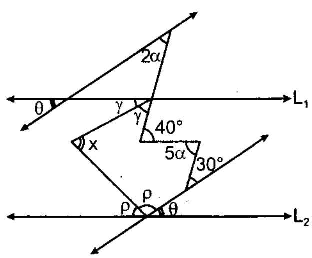
$\theta - 90° + \theta + 90° - \alpha = 180°$

$2\theta - \alpha = 180°$ ...(I)

Por dato: $\alpha + \theta = 120°$ ...(II)

(I) + (II): $3\theta = 300° \Rightarrow \theta = 100°$ $\therefore\ \alpha = 20°$

11. Calcular x, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.

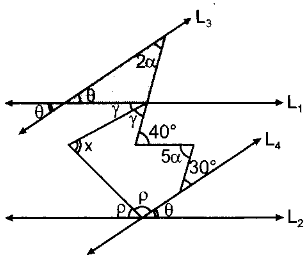


Resolución:

Como: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ con θ: $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$

Propiedad: $2\alpha + 5\alpha = 40° + 30° \Rightarrow \alpha = 10°$

$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow x = \gamma + \rho$ ...(I)



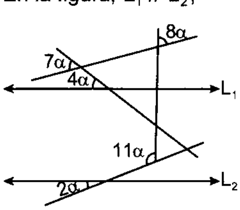
Pero: $2\gamma = \theta + 2\alpha$

$\gamma = \dfrac{\theta + 2\alpha}{2} = \dfrac{\theta + 20°}{2} = \dfrac{\theta}{2} + 10°$

$2\rho + \theta = 180° \Rightarrow \rho = 90° - \dfrac{\theta}{2}$

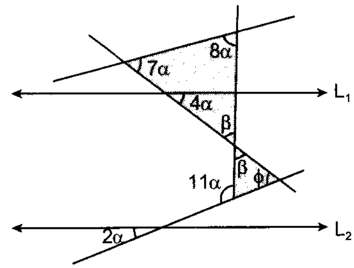
En (I): $x = \dfrac{\theta}{2} + 10° + 90° - \dfrac{\theta}{2}$ $\therefore\ x = 100°$

12. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$,



Hallar el valor de α:

Resolución:



Del gráfico: $\beta = 180° - (7\alpha + 8\alpha) \Rightarrow \beta = 180° - 15\alpha$

También: $\phi = 4\alpha + 2\alpha$

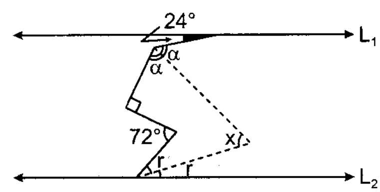
$\phi = 6\alpha$

Y, por último: $11\alpha = \beta + \phi$

Reemplazando lo anterior: $11\alpha = (180° - 15\alpha) + 6\alpha$

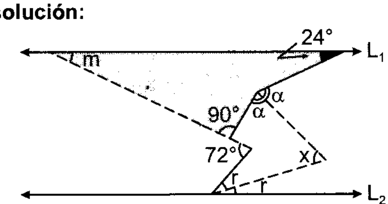
$\therefore\ \alpha = 9°$

13. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



Hallar el valor de x.

Resolución:



Con la prolongación hecha, tenemos:

$24° + x = \alpha + r$ ...(1)

Por la propiedad:

$m + 2r = 72° \Rightarrow m = 72° - 2r$ ...(2)

Y, en el cuadrilátero no convexo: $2\alpha = 90° + 24° + m$

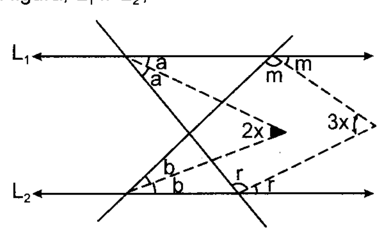
Reemplazando (2): $2\alpha = 114° + 72° - 2r$

$\Rightarrow \alpha + r = 93°$ ...(3)

Finalmente, reemplazando (3) en (1): $24° + x = 93°$

$\therefore\ x = 69$

14. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$,



Hallar el valor de x.

Resolución:

Por propiedad de la línea quebrada entre rectas paralelas:

$$\left.\begin{array}{l} a + b = 2x \\ m + r = 3x \end{array}\right\} \quad ...(1)$$

Además, por ser conjugados internos;

$$\left.\begin{array}{l} 2a + 2r = 180° \Rightarrow a + r = 90° \\ \text{y } 2b + 2m = 180° \Rightarrow b + m = 90° \end{array}\right\} \quad ...(2)$$

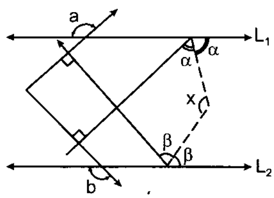
Sumando miembro a miembro, las expresiones encontradas en (2):

$$\underline{a + b} + \underline{m + r} = 180°$$

Con las de (1): $2x \;+\; 3x \;= 180°$

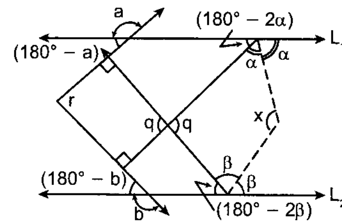
$\therefore x = 36°$

15. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$



y $a + b = 224°$. Hallar el valor de x.

Resolución:



Por la propiedad de la línea quebrada entre paralelas:

$x = \alpha + \beta$ ...(1)

También: $r = (180° - a) + (180° - b)$

$r = 360° - (a + b)$

Con el dato: $r = 360° - 224° \Rightarrow r = 136°$

Además, por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

$q + r = 180° \Rightarrow q + 136° = 180° \Rightarrow q = 44°$

De otro lado: $q = (180° - 2\alpha) + (180° - 2\beta)$

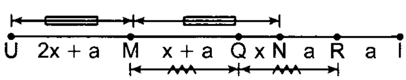
$44° = 360° - 2(\alpha + \beta)$

Con (1): $44° = 360° - 2x \quad \therefore x = 158°$.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. U, N, I son puntos colineales y consecutivos $UN - NI = 32$. M biseca a $\overline{UN}$; R biseca a $\overline{NI}$ y Q biseca a $\overline{MR}$. Hallar QN.

Resolución:



Incógnita: $QN = x$

Sea: $NR = a \Rightarrow RI = a$; $QR = x + a$;

$MQ = x + a$ y $UM = MN = 2x + a$

Usando el gráfico, para reemplazar en el dato:

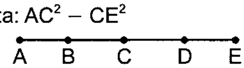
$UN - NI = 32$

$(4x + 2a) - 2a = 32 \Rightarrow 4x = 32 \quad \therefore x = 8$

2. En una línea se tienen los puntos consecutivos A, B, C, D, E; siendo: $AC(AD) = BE(CE)$; $BC(DE) = 9$ y $AB(CD) = 7$. Hallar $AC^2 - CE^2$

Resolución:

Incógnita: $AC^2 - CE^2$

Datos: 

$AC(AD) = BE(CE)$ ...(1)

$BC(DE) = 9$ ...(2)

$AB(CD) = 7$ ...(3)

De (1): $AC(AD) = BE(CE)$

Con el gráfico: $AC(AC + CD) = (BC + CE)CE$

Efectuando: $AC^2 + AC(CD) = BC(CE) + CE^2$

De donde: $AC^2 - CE^2 = BC(CE) - AC(CD)$

Ahora, tratamos de acomodar el segundo miembro de esta última expresión para usar los datos (2) y (3):

$AC^2 - CE^2 = BC(CD + DE) - (AB + BC)CD$

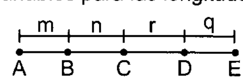
$AC^2 - CE^2 = BC(CD) + BC(DE) - AB(CD) - BC(CD)$

Es decir, $AC^2 - CE^2 = BC(DE) - AB(CD)$

Con (2) y (3): $\therefore AC^2 - CE^2 = 9 - 7 = 2$

Otra forma:

Usando variables para las longitudes:



Incógnitas: $AC^2 - CE^2 = (m + n)^2 - (r + q)^2$

Los datos: $BC(DE) = 9 \Rightarrow nq = 9$

$AB(CD) = 7 \Rightarrow mr = 7$

y de: $AC(AD) = BE(CE)$

$\Rightarrow (m + n)(m + n + r) = (n + r + q)(r + q)$

De esto último, se obtiene:

$(m + n)^2 + (m + n)r = n(r + q) + (r + q)^2$

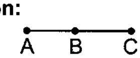
Es decir: $(m + n)^2 - (r + q)^2 = nq - mr$

o también: $AC^2 - CE^2 = 9 - 7$

$\therefore AC^2 - CE^2 = 2$

3. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos A, B y C, cumpliéndose $AB(BC) = \alpha AC^2$ y $\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} = \theta$. Calcular: $\alpha(2 + \theta)$.

Resolución:

Datos: 

$AB(BC) = \alpha AC^2$ ...(1)

$\dfrac{AB}{BC} + \dfrac{BC}{AB} = \theta$ ...(2)

De (1): $AB(BC) = \alpha(AB + BC)^2$

De donde: $AB(BC) = \alpha(AB^2 + BC^2) + 2\alpha\, AB(BC)$

Es decir: $AB(BC)(1 - 2\alpha) = \alpha(AB^2 + BC^2)$

o, mejor $\dfrac{1-2\alpha}{\alpha} = \dfrac{AB^2 + BC^2}{AB(BC)}$

Desdoblando el 2.° miembro:

$\dfrac{1-2\alpha}{\alpha} = \dfrac{AB^2}{AB(BC)} + \dfrac{BC^2}{AB(BC)}$

Esto es: $\dfrac{1-2\alpha}{\alpha} = \dfrac{AB}{BC} + \dfrac{BC}{AB}$ ...(3)

Ahora, reemplazando (2) en (3): $\dfrac{1-2\alpha}{\alpha} = \theta$

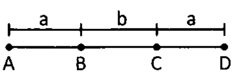
Se deduce: $1 - 2\alpha = \alpha\theta \Rightarrow 1 = \alpha\theta + 2\alpha$

$\therefore\ \alpha(\theta + 2) = 1$

4. Sobre una recta se marcan los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D, tal que $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Demostrar que $\dfrac{1}{AB(AC)} + \dfrac{1}{BC(BD)} = \dfrac{1}{AB(BC)}$

Demostración:
Considerando el gráfico adjunto, tenemos:

$$\frac{1}{AB(AC)} + \frac{1}{BC(BD)} = \frac{1}{a(a+b)} + \frac{1}{b(a+b)} = \frac{b+a}{ab(a+b)}$$



Es decir:

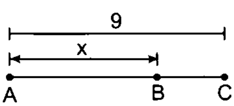
$$\frac{1}{AB(AC)} + \frac{1}{BC(BD)} = \frac{a+b}{ab(a+b)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{AB(AC)} + \frac{1}{BC(BD)} = \frac{1}{ab}$$

$$\therefore\ \frac{1}{AB(AC)} + \frac{1}{BC(BD)} = \frac{1}{AB(BC)}$$

5. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B y C. Hallar la longitud de $\overline{AB}$, si: $AB + BC^2 = 11$ y $AC = 9$.

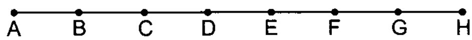
Resolución:



Incógnita: $AB = x$
Del gráfico: $BC = 9 - x$
En el dato: $AB + BC^2 = 11 \Rightarrow x + (9-x)^2 = 11$
De donde: $x^2 - 17x + 70 = 0 \Rightarrow (x-10)(x-7) = 0$
Resolviendo: $x = 10 \vee x = 7$
Como $x < 9 \quad \therefore\ x = 7$

6. A, B, C, D, E, F, G, y H son puntos colineales y consecutivos, tales que $2(AH) = 3(BG) = 5(CF)$ y $AD + BE + CF + DG + EH = 620$; hallar AH.

Resolución:



De: $2(AH) = 3(BG) = 5(CF)$

Se obtiene: $\left\{BG = \frac{2}{3}AH \text{ y } CF = \frac{2}{5}AH\right\}$ ...(α)

Por otro lado: $AD + BE + CF + DG + EH = 620$

Agrupando como se indica y haciendo uso del gráfico:

$AG + BH + CF = 620$

Ahora: $AG + (BG + GH) + CF = 620$

Es decir: $AH + BG + CF = 620$

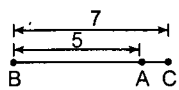
Usando (α): $AH + \frac{2}{3}AH + \frac{2}{5}AH = 620$

Efectuando: $\frac{31}{15}AH = 620 \quad \therefore\ AH = 300$

7. A, B y C son tres puntos distintos del plano, tales que $AB = 5$ y $BC = 7$. Hallar:
El mínimo valor de AC.
El máximo valor de AC.
La diferencia entre los valores enteros máximo y mínimo de AC, sabiendo que A, B y C no son colineales.

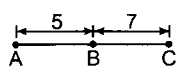
Resolución:

- El mínimo valor de AC corresponde al gráfico siguiente:



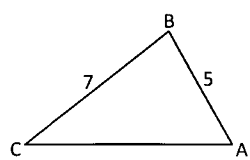
Entonces en este caso: $AC = 7 - 5 = 2$

- El máximo valor de AC se obtiene con el siguiente gráfico:



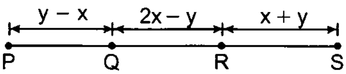
Luego: $AC = 5 + 7 = 12$.

- Si A, B y C no son colineales, determinan un triángulo.



Entonces: $AC < 5 + 7 \Rightarrow AC < 12$
También: $AC > 7 - 5 \Rightarrow AC > 2$
Máximo valor entero de $AC = 11$
Mínimo valor entero de $AC = 3$
Se pide: $11 - 3 = 8$

8. Para el gráfico $PS = 18$; hallar el valor de y, sabiendo que x es un número entero.



Resolución:

Para hallar x, usaremos el dato que es un número entero y el hecho de que las longitudes deben ser números positivos:

$PQ > 0 \Rightarrow y - x > 0$ ...(I)

$QR > 0 \Rightarrow 2x - y > 0$ ...(II)

Además, como:

$PS = 18 \Rightarrow (y - x) + (2x - y) + (x + y) = 18$

De donde: $2x + y = 18$

Despejando y: $y = 18 - 2x$ ...(III)

Sustituyendo ahora, (III) en (I):

$18 - 2x - x > 0 \Rightarrow 18 > 3x \Rightarrow 6 > x$ ...(α)

También de (III) en (II):

$2x - (18 - 2x) > 0 \Rightarrow 4x > 18 \Rightarrow x > 4{,}5$ ...(β)

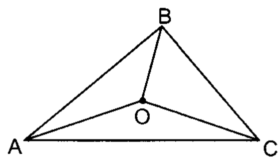
Luego, de (α) y (β): $6 > x > 4{,}5$

Siendo por dato, x entero: $x = 5$

Finalmente, para el valor de y reemplazamos en (III):

$y = 18 - 2(5) \quad \therefore\ y = 8$

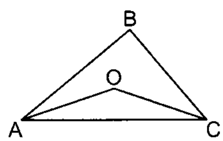
9. De la figura, el perímetro del triángulo ABC, es: $AB + BC + AC = 2p$.



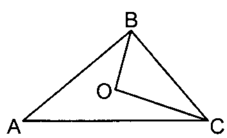
O, es un punto cualquiera, interior al triángulo. Demostrar que $p < OA + OB + OC < 2p$

Demostración:

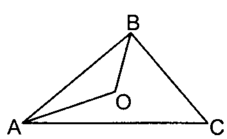
Usando el postulado de la mínima distancia entre dos puntos y el teorema de las poligonales envolvente y envuelta:



$\Rightarrow AC < OA + OC < AB + BC$ ...(1)



$\Rightarrow BC < OB + OC < AB + AC$ ...(2)



$\Rightarrow AB < OA + OB < AC + BC$ ...(3)

Sumando miembro a miembro las expresiones (1), (2) y (3):

$AB + BC + AC < 2(OA + OB + OC) < 2(AB + BC + AC)$

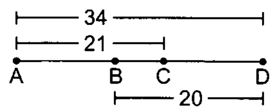
$\Rightarrow 2p < 2(OA + OB + OC) < 2(2p)$

De donde, efectivamente:

$p < OA + OB + OC < 2p$

10. A, B, C y D son puntos colineales y consecutivos; calcular BC, si AD = 34, AC = 21 y BD = 20.

Resolución:

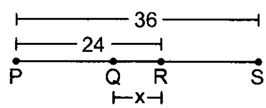


En la figura: $CD = 34 - 21 \Rightarrow CD = 13$

$\Rightarrow BC = BD - CD \Rightarrow BC = 20 - 13 \quad \therefore\ BC = 7$

11. Sean P, Q, R y S puntos colineales y consecutivos; calcular QR, sabiendo que PS = 36, PR = 24 y PQ(RS) = QR(PS).

Resolución:



En la figura: $RS = 36 - 24 = 12$

Incógnita: $QR = x \Rightarrow PQ = 24 - x$

En el dato: $PQ(RS) = QR(PS)$

$(24 - x)12 = x(36) \Rightarrow x = 6 \quad \therefore\ QR = 6$

12. Sean los puntos A, B, C y D, colineales y consecutivos. Calcular BC, sabiendo que $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{7}$ y $AC + BD = 76$.

Resolución:

El dato: $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{7}$, lo podemos igualar a una misma constante x. Así: $\frac{AB}{2} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{7} = x$

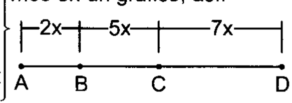
De donde:

$\frac{AB}{2} = x \Rightarrow AB = 2x$

$\frac{BC}{5} = x \Rightarrow BC = 5x$

$\frac{CD}{7} = x \Rightarrow CD = 7x$

Estas longitudes las colocamos en un gráfico, así:



La incógnita es: $BC = 5x$; el dato: $AC + BD = 76$.

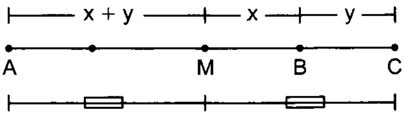
De la figura: $7x + 12x = 76 \Rightarrow x = 4$

Finalmente: $BC = 5(4) \quad \therefore\ BC = 20$

13. A, B, C son puntos colineales y consecutivos, tal que: AB − BC = 28. Calcular MB, sabiendo que M es punto medio del segmento AC.

Resolución:

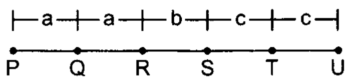
En este problema aparentemente faltan datos. Pero, tal dificultad se salva representando las longitudes como en la figura, donde MB = x es la incógnita. Además, si BC = y, tendremos que MC = x + y. También: AM = x + y, porque M es punto medio de $\overline{AC}$. Sustituyendo en el dato:



AB − BC = 28 ⇒ (x + y + x) − y = 28
2x = 28 ⇒ x = 14 ∴ MB = 14

14. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R, S, T y U. Calcular QT, sabiendo que Q y T son puntos medios de $\overline{PR}$ y $\overline{SU}$, respectivamente, y además PS + RU = 38.

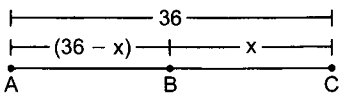
Resolución:



En la figura, las longitudes iguales están representadas por letras minúsculas iguales. La incógnita es: QT = a + b + c ...(1)
Del enunciado: PS + RU = 38
(2a + b) + (b + 2c) = 38
2a + 2b + 2c = 38 ⇒ 2(a + b + c) = 38
a + b + c = 19 ∴ QT = 19

15. Los puntos A, B y C son colineales y consecutivos. Calcular BC, si AC = 36 y 5AB + 3BC = 150.

Resolución:

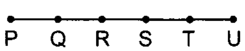


La incógnita BC = x, está indicada en la figura:
Del enunciado: 5AB + 3BC = 150
Sustituyendo: 5(36 − x) + 3x = 150
180 − 5x + 3x = 150 ⇒ x = 15 ∴ BC = 15

16. Dados los puntos colineales y consecutivos P, Q, R, S, T y U; calcular PU, sabiendo que:
PR + QS + RT + SU = 54 y QT = $\frac{4}{5}$PU

Resolución:

Como se indica que QT = $\frac{4}{5}$PU, debemos obtener otra relación entre PU y QT. Para ello vamos a agrupar convenientemente las longitudes en el otro dato.

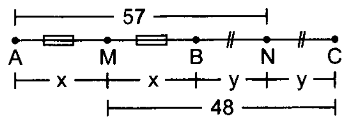


Tenemos: PR + QS + RT + SU = 54

Agrupando según lo indicado:
(PR + RT) + (QS + SU) = 54
De acuerdo con la figura: PT + QU = 54
Desdoblando QU: PT + (QT + TU) = 54
Ahora: PU + QT = 54
Sustituyendo el dato: PU + $\frac{4}{5}$PU= 54
⇒ $\frac{9}{5}$PU = 54 ∴ PU = 30

17. A, B y C son puntos colineales y consecutivos, M es punto medio de $\overline{AB}$ y N punto medio de $\overline{BC}$. Calcular AC, AN = 57 y MC = 48.

Resolución:



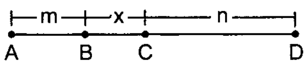
En la figura, la incógnita es: AC = 2(x + y) ...(1)

Se observa: $\begin{cases} 2x + y = 57 & \text{...(2)} \\ x + 2y = 48 & \text{...(3)} \end{cases}$

Sumando miembro a miembro las expresiones (2) y (3):
3x + 3y = 105 ⇒ 3(x + y) = 105 ⇒ x + y = 35
Sustituyendo en (1): AC = 2(35) ∴ AC = 70

18. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D, calcular BC, si: AB(CD) = 4,5 y además AB(BD) + AC(CD) = BC(AD)

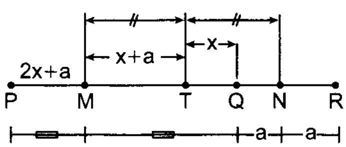
Resolución:



En la figura considerando las longitudes AB = m, CD = n y BC = x (incógnita), tenemos:
AB(CD) = 4,5 ⇒ m(n) = 4,5 ...(1)
AB(BD) + AC(CD) = BC(AD)
⇒ m(x + n) + (m + x)n = x(m + x + n)
Efectuando: mx + mn + mn + nx = mx + x^2 + nx
Cancelando: mn + mn = x^2
Sustituyendo lo de (1): 4,5 + 4,5 = x^2 ⇒ 9 = x^2
Luego: x = 3 ∴ BC = 3

19. P, Q y R son puntos colineales y consecutivos, tal que: PQ − QR = 24. Sabiendo que M, N y T bisecan a $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{MN}$, respectivamente, calcular QT.

Resolución:

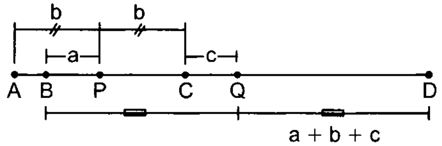


Si M biseca a $\overline{PQ}$, entonces M es punto medio de $\overline{PQ}$. Análogamente, N y T son puntos medios de

$\overline{QR}$ y $\overline{MN}$, respectivamente. En la figura, QT = x es la incógnita.
Además, si QN = a, también será NR = a.
Luego: TN = x + a = MT $\wedge$ MQ = 2x + a = PM
Sustituyendo en el dato:
PQ – QR = 24 $\Rightarrow$ (4x + 2a) – 2a = 24
4x = 24 $\Rightarrow$ x = 6 $\quad\therefore$ QT = 6

20. A, B, C, D son puntos colineales y consecutivos tal que AD – BC = 28. Si P y Q son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente, calcular PQ.

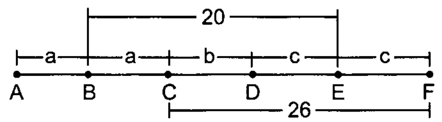
Resolución:



En la figura, hemos supuesto que AB < BC < CD.
La incógnita: PQ = b + c. Además, si BP = a, será:
BQ = a + b + c = QD
Sustituyendo en el dato: AD – BC = 28
(AP + PQ + QD) – (BP + PC) = 28
Tendremos:
(b + b+ c + a + b + c) – (a + b) = 28
2b + 2c = 28 $\Rightarrow$ b + c = 14 $\quad\therefore$ PQ = 14

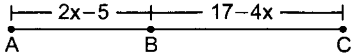
21. A, B, C, D, E y F son puntos colineales y consecutivos. B biseca a $\overline{AC}$ y E biseca a $\overline{DF}$. Calcular AD, si CF = 26 y BE = 20.

Resolución:



En la figura, la incógnita es: AD = 2a + b ...(1)
Además, se observa que: b + 2c = 26 ...(2)
a + b + c = 20 ...(3)
Para obtener 2a+ b, que es lo que nos interesa en (1), efectuamos lo siguiente:
Multiplicamos por 2, miembro a miembro, la expresión (3): 2a + 2b + 2c = 40
Lo de (2) es: b + 2c = 26
Restamos miembro a miembro estas dos últimas relaciones: 2a + b = 14
Finalmente, sustituyendo esto en (1): AD = 14

22. En la figura, x solo puede tomar valores enteros. Calcular la suma de dichos valores.

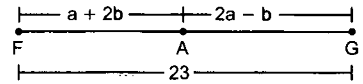


Resolución:

La longitud de todo segmento es un número positivo que depende de la unidad elegida. Esto quiere decir que en la figura se debe cumplir: AB > 0 y BC > 0. De estas dos desigualdades vamos a obtener inecuaciones que nos darán el conjunto de valores de x.
Como AB > 0 $\Rightarrow$ 2x – 5 > 0 $\Rightarrow$ x > $\frac{5}{2}$ $\Rightarrow$ x > 2,5 ...(1)
Además:
BC > 0 $\Rightarrow$ 17 – 4x > 0 $\Rightarrow$ 4x < 17 $\Rightarrow$ x < 4,25 ...(2)
Observando (1) y (2), concluimos que los únicos valores enteros de x son 3 y 4.
Por lo tanto la suma de estos valores: 3 + 4 = 7

23. Sean los puntos colineales y consecutivos F, A, G. Si FA = a + 2b; AG = 2a – b; FG = 23; calcular la suma de valores enteros que puede tomar a.

Resolución:



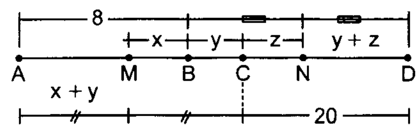
En la figura: (a + 2b) + (2a – b) = 23
3a + b = 23 $\Rightarrow$ b = 23 – 3a ...(1)
Se debe cumplir: AG > 0 $\Rightarrow$ 2a – b > 0
Con lo de (1): 2a – (23 – 3a) > 0
5a – 23 > 0 $\Rightarrow$ 5a > 23 $\Rightarrow$ a > $\frac{23}{5}$ $\Rightarrow$ a > 4,6 ...(2)
De (2), dando valores a la variable a y sustituyéndolos en (1), obtenemos los valores de b. Solo debemos cuidar que FA = a + 2b, sea positivo.
Veamos:

a	5	6	7	8	9
b	8	5	2	–1	–4
FA = a + 2b	21	16	11	6	1

$\therefore$ Suma de valores enteros de a:
5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 35

24. Sean los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D, tal que AB = 8 y CD = 20. Si M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente, calcular MN.

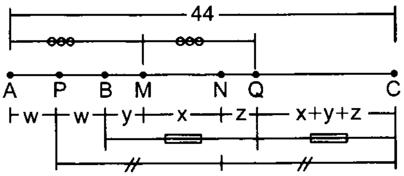
Resolución:



En la figura, MB = x; BC = y; CN = z, la incógnita será: MN = x + y + z ...(1)
Además: MC = x + y = AM; BN = y + z = ND
Como: AB = 8 $\Rightarrow$ 2x + y = 8 ...(2)
CD = 20 $\Rightarrow$ y + 2z = 20 ...(3)
De (2) + (3): 2(x + y + z) = 28 $\Rightarrow$ x + y + z = 14
Por lo tanto sustituyendo en (1): MN = 14

25. Dados los puntos colineales y consecutivos A,B y C se sabe que AC = 44; P, Q, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AQ}$ y $\overline{PC}$, respectivamente. Calcular MN.

Resolución:



En la figura, la incógnita es MN = x

Además BM = y; NQ = z; PB = w = AP

QC = BQ = x + y + z

De: AC = 44 $\Rightarrow$ 2x + 2y + 2z + 2w = 44

Luego: x + y + z + w = 22 ...(1)

De: AM = MQ $\Rightarrow$ y + 2w = x + z ...(2)

De: NC = PN $\Rightarrow$ x + y + 2z = x + y + w ...(3)

Sumando miembro a miembro (2) y (3):

x + 2y + 2z + 2w = 2x + y + z + w

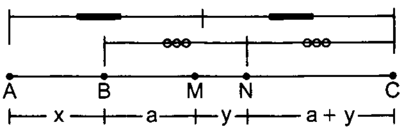
De donde: y + z + w = x ...(4)

Finalmente, (4) en (1): x + x = 22

x = 11 $\quad\therefore$ MN = 11

26. Se tienen los puntos colineales y consecutivos A, B y C. Además M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Calcular AB, si AB + MN = 18.

Resolución:



Incógnita: AB = x

Si BM = a, MN = y, entonces BN = a + y = NC

El dato es: x + y = 18 ...(1)

Como: AM = MC $\Rightarrow$ x + a = y + a + y

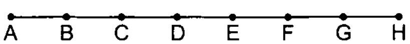
x = 2y ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): 2y + y = 18 $\Rightarrow$ y = 6

Luego, en (2): x = 2(6) = 12 $\quad\therefore$ AB = 12

27. Se tiene los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E, F, G, H, de modo que: AD + BE + CF + DG + EH = 84; BG = $\frac{3}{5}$AH y CF = $\frac{5}{6}$BG. Calcular AH.

Resolución:



Incógnita: AH

Datos: BG = $\frac{3}{5}$AH; CF = $\frac{5}{6}$BG = $\frac{5}{6}\left(\frac{3}{5}AH\right) = \frac{AH}{2}$

Además: AD + BE + CF + DG + EH = 84

Es decir: AG + CF + BH = 84

Desdoblando BH:

AG + CF + BG + GH = 84

Luego: AH + CF + BG = 84

Con los otros datos: AH + $\frac{AH}{2} + \frac{3}{5}$AH = 84

$\Rightarrow \dfrac{10AH + 5AH + 6AH}{10} = 84 \Rightarrow \dfrac{21AH}{10} = 84$

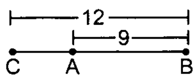
$\therefore$ AH = 40

28. Dados los puntos A, B y C, se sabe que AB = 9 y BC = 12. Calcular la suma de los posibles valores enteros de AC.

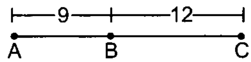
Resolución:

Como no se dice que A, B y C sean colineales o consecutivos, las posibilidades del gráfico son las indicadas en las siguientes figuras:

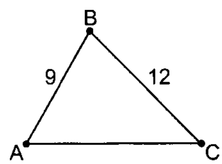
1.° caso



2.° caso



3.° caso



En el 1.° caso: AC = 12 − 9 $\Rightarrow$ AC = 3 ...(1)

En el 2.° caso: AC = 9 + 12 $\Rightarrow$ AC = 21 ...(2)

Para el 3.° caso, por el postulado de la mínima distancia:

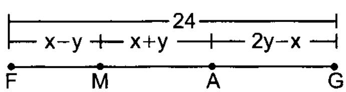
$\left.\begin{array}{l} AC < 9 + 12 \Rightarrow AC < 21 \\ AC + 9 > 12 \Rightarrow AC > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3 < AC < 21$ ...(3)

De (1), (2) y (3), los valores enteros que puede tomar AC son: (3; 4; 5; ...; 21)

Por lo tanto la suma: 3 + 4 + 5 + ... + 21 = 228

29. Los puntos F, M, A, G son colineales y consecutivos. FG = 24; FM = x − y; MA = x + y; AG = 2y − x. Calcular el valor de x, sabiendo que el valor de y es entero.

Resolución:



En la figura: FM + MA + AG = 24

(x − y) + (x + y) + (2y − x) = 24

$\Rightarrow$ x + 2y = 24 $\Rightarrow$ x = 24 − 2y ...(1)

Además, como sabemos, la longitud de un segmento es un número real positivo.

Luego: FM > 0 $\Rightarrow$ x − y > 0

Con (1): $(24 - 2y) - y > 0 \Rightarrow 24 - 3y > 0$

$24 > 3y \Rightarrow 8 > y \Rightarrow y < 8$ ...(2)

$AG > 0 \Rightarrow 2y - x > 0$

Con (1): $2y - (24 - 2y) > 0 \Rightarrow 4y - 24 > 0$

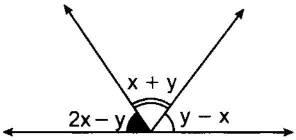
$4y > 24 \Rightarrow y > 6$ ...(3)

De (2) y (3), como el valor de y es entero: $y = 7$

Finalmente, sustituyendo esto último en (1):

$x = 24 - 2(7) \quad \therefore\ x = 10$

30. Del gráfico, hallar el valor de y, cuando x toma su mínimo valor entero.



Resolución:

Se debe cumplir: $y > x$, $y < 2x$, luego:

$x < y < 2x$ ...(1)

Además: $(2x - y) + (x + y) + (y - x) = 180°$

$\Rightarrow 2x + y = 180° \Rightarrow y = 180° - 2x$

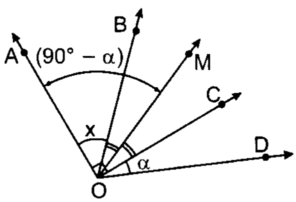
En (1): $x < 180° - 2x < 2x \Rightarrow x > 45°$

El mínimo valor entero de x es 46°; por lo tanto el valor correspondiente de y, será: $180° - 2x = 88°$

31. Los ángulos AOB, BOC y COD son consecutivos. Se traza $\overrightarrow{OM}$, bisectriz del ∠BOC. Calcular m∠AOB, sabiendo que los ángulos AOM y COD son complementarios, además:

m∠BOC + 2(m∠COD) = 122°

Resolución:



Consideremos el gráfico adjunto m∠AOB = x, es la incógnita. Si m∠COD = α, entonces su complemento AOM mide 90° – α

Además, m∠BOM = (90° – α) – x = m∠MOC

Luego: m∠BOC = 2[(90° – α) – x)]

Sustituyendo en el dato:

m∠BOC + 2(m∠COD) = 122°

Tenemos: $2[(90° - \alpha) - x] + 2\alpha = 122°$

Efectuando: $180° - 2\alpha - 2x + 2\alpha = 122°$

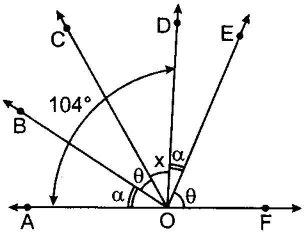
$\therefore\ x = 29°$

32. Se tiene a los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE, EOF, siendo opuestos los rayos OA y OF. Calcular m∠COD, si ∠AOB ≅ ∠DOE; ∠BOC ≅ ∠EOF y m∠AOD = 104°

Resolución:

Según el enunciado, tenemos el gráfico donde x es la medida del ángulo COD. Además:

m∠AOB = m∠DOE = α y m∠BOC = m∠EOF = θ



Se observa que: m∠DOF = m∠AOF – m∠AOD

$\alpha + \theta = 180° - 104° = 76°$

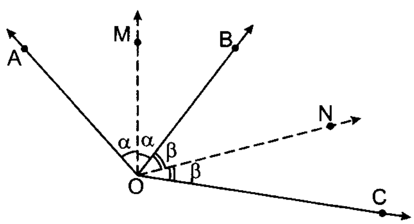
También: x = m∠AOD – m∠AOC

$x = 104° - (\alpha + \theta) \Rightarrow x = 104° - 76°$

$\therefore\ x = 28°$

33. Se tiene a los ángulos consecutivos AOB y BOC. Se trazan sus bisectrices $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{ON}$, respectivamente. Calcular m∠AOC, sabiendo que: m∠AON + m∠MOC = 96°.

Resolución:



Consideremos el gráfico. La incógnita es:

m∠AOC = 2(α + β) ...(1)

El dato: m∠AON + m∠MOC = 96°

Sustituyendo según la figura:

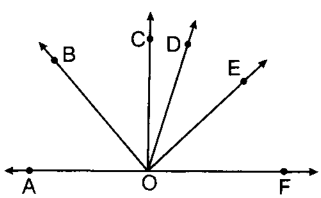
$(2\alpha + \beta) + (\alpha + 2\beta) = 96°$

Es decir: $3(\alpha + \beta) = 96° \Rightarrow \alpha + \beta = 32°$

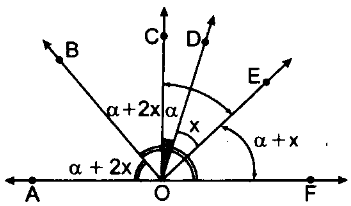
Luego en (1): m∠AOC = 2(32°) ∴ m∠AOC = 64°

34. En el gráfico, calcular m∠DOE; sabiendo que $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OE}$ bisecan a los ángulos AOC y COF, respectivamente. Además:

∠DOF ≅ ∠BOC y 3(m∠AOB) = 5(m∠EOF).



Resolución:



Haciendo marcas iguales en ángulos congruentes y llamando m∠DOE = x (incógnita); m∠COD = α; se obtiene:

m∠COE = α + x = m∠EOF,

m∠DOF = α + 2x = m∠BOC = m∠AOB

Como m∠AOF = 180° ⇒ 4α + 6x = 180°

⇒ 2α + 3x = 90° ...(1)

También, por dato:

3(m∠AOB) = 5(m∠EOF) ⇒ 3(α + 2x) = 5(α + x)

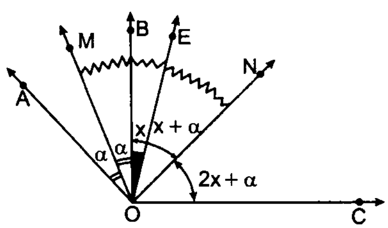
3α + 6x = 5α + 5x ⇒ 2α = x ...(2)

Sustituyendo lo de (2) en (1):

x + 3x = 90° ∴ x = 22,5° ∨ x = 22° 30'

35. Dados los ángulos consecutivos AOB y BOC, se sabe que m∠BOC − m∠AOB = 76°. Se trazan $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OE}$, bisectrices de los ángulos AOB, BOC y MON, respectivamente. Calcular: m∠BOE.

Resolución:



En el gráfico, la incógnita es m∠BOE = x.

Además, llamando m∠AOM = α, se obtiene luego:

m∠MOB = α; m∠MOE = x + α = m∠EON

y m∠BON = 2x + α = m∠NOC.

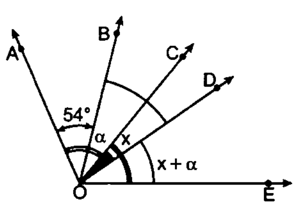
Ahora, sustituimos en el dato:

m∠BOC − m∠AOB = 76°

⇒ (4x + 2α) − 2α = 76° ⇒ 4x = 76° ∴ x = 19°

36. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD y DOE, donde $\overrightarrow{OC}$ biseca al ∠AOE y $\overrightarrow{OD}$ biseca al ∠BOE. Calcular la m∠COD, sabiendo que m∠AOB = 54°.

Resolución:



Consideremos el gráfico, donde la incógnita es m∠COD = x. Si m∠BOC = α, entonces:

m∠BOD = x + α = m∠DOE.

Como $\overrightarrow{OC}$ biseca el ∠AOE; m∠COE = m∠AOC.

⇒ 2x + α = 54° + α ∴ x = 27°

37. Los ángulos AOB y BOC constituyen un par lineal y el ∠AOB es mayor que el ∠BOC. Se trazan: $\overrightarrow{OM}$ bisectriz del ∠AOB; $\overrightarrow{ON}$ bisectriz del ∠BOC; $\overrightarrow{OF}$ bisectriz del ∠AON y $\overrightarrow{OP}$ bisectriz del ∠MOC. Calcular la m∠FOP.

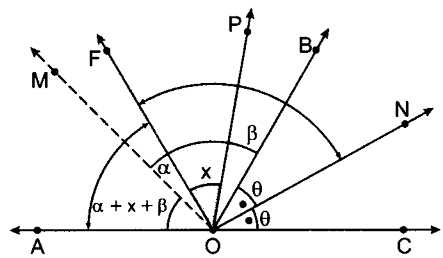
Resolución:

Incógnita: m∠FOP = x

Colocamos adicionalmente:

m∠MOF = α; m∠POB = β y m∠BON= θ. Luego:

m∠NOC = θ y m∠AOM = α + x + β = m∠MOB.



De m∠AOC = 180° ⇒ 2α + 2β + 2θ + 2x = 180°

∴ α + β + θ + x = 90 ...(1)

m∠POC = m∠MOP ⇒ β + 2θ = α + x ...(2)

m∠AOF = m∠FON ⇒ 2α + x + β = x + β + θ ...(3)

Sumando (2) y (3) miembro a miembro:

2α + 2β + 2θ + x ≐ α + β + θ + 2x

⇒ α + β + θ = x ...(4)

Sustituyendo (4) en (1): x + x = 90° ∴ x = 45°

38. La medida de un ángulo, menos la mitad de su complemento es igual a un tercio de la diferencia entre el suplemento y complemento del mismo ángulo. Calcular la medida de dicho ángulo.

Resolución:

Llamemos x a la medida del ángulo. Según el enunciado, planteamos:

$$x - \left(\frac{90° - x}{2}\right) = \frac{1}{3}[(180° - x) - (90° - x)]$$

$$x - \left(45° - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{3}[90°]$$

$$x - 45° + \frac{x}{2} = 30° \Rightarrow \frac{3x}{2} = 75° \quad \therefore\ x = 50°$$

39. Si a la medida de un ángulo se le quita 5° más que la mitad de su complemento, resulta la medida del complemento de dicho ángulo. Dicho ángulo mide:

Resolución:

Sea x la medida del ángulo. Entonces, planteamos:

$$x - \left(\frac{90° - x}{2} + 5°\right) = 90° - x$$

$x - \left(45° - \frac{x}{2} + 5°\right) = 90° - x$

$\frac{5x}{2} = 140° \quad \therefore\ x = 56°$

40. Los $\frac{2}{3}$ del complemento de un ángulo, más los $\frac{3}{5}$ del suplemento del mismo ángulo, excede en 10° al suplemento del complemento de tal ángulo. Calcular la medida de dicho ángulo.

Resolución:

Llamemos x la medida del ángulo. Según el enunciado:

$\frac{2}{3}(90° - x) + \frac{3}{5}(180° - x) = 180° - (90° - x) + 10°$

$60° - \frac{2x}{3} + 108° - \frac{3x}{5} = 180° - 90° + x + 10°$

$68° = \frac{2x}{3} + \frac{3x}{5} + x = \frac{34x}{15} \quad \therefore\ x = 30°$

41. El doble del complemento de la medida de un ángulo, más la quinceava parte de la medida del ángulo, equivale a lo que le falta al complemento de la mitad de la medida de dicho ángulo para ser igual a los 5/6 del suplemento del ángulo. Calcular la medida de tal ángulo.

Resolución:

Sea x la medida de dicho ángulo.

Planteamos:

$2(90° - x) + \frac{x}{15} = \frac{5}{6}(180° - x) - \left(90° - \frac{x}{2}\right)$

$180° - 2x + \frac{x}{15} = 150° - \frac{5x}{6} - 90° + \frac{x}{2}$

$\frac{8x}{5} = 120° \quad \therefore\ x = 75°$

42. El suplemento del complemento de la mitad de la medida de un ángulo excede en 15° al suplemento del doble de la medida del mismo ángulo. ¿Cuánto mide dicho ángulo?

Resolución:

Suponiendo que la medida del ángulo es x, planteamos:

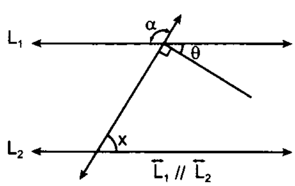
$180° - \left(90° - \frac{x}{2}\right) = (180° - 2x) + 15°$

De donde: $180° - 90° + \frac{x}{2} = 195° - 2x$

$\Rightarrow 2x + \frac{x}{2} = 105° \Rightarrow \frac{5x}{2} = 105°$

$\therefore\ x = 42°$

43. En la figura, $\alpha + \theta = 154°$, calcular el valor de x.



Resolución:

Del gráfico, se observa que:

$\alpha = 90° + \theta$ ...(opuestos por el vértice)

$\Rightarrow \alpha - \theta = 90°$ ...(1)

Además, por dato: $\alpha + \theta = 154$ ...(2)

De (1) y (2): $\alpha = 122°$ y $\theta = 32°$

Luego, por tener lados paralelos:

$x + \alpha = 180°$

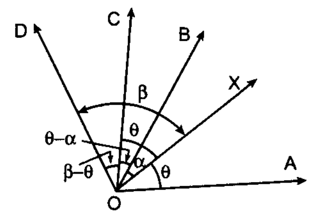
$x + 122° = 180° \quad \therefore\ x = 58°$

44. Se dan los ángulos consecutivos AOX, XOB, BOC y COD, tal que:

$\frac{m\angle AOB}{m\angle BOC} = \frac{m\angle AOD}{m\angle COD}$, $m\angle AOX = m\angle XOC \ \wedge$

$(m\angle XOB)(m\angle XOD) = (20°)^2$. Hallar: $m\angle AOC$

Resolución:



- $\frac{m\angle AOB}{m\angle BOC} = \frac{m\angle AOD}{m\angle COD} \Rightarrow \frac{\theta + \alpha}{\theta - \alpha} = \frac{\beta + \theta}{\beta - \theta}$

  Luego: $\frac{(\theta + \alpha) + (\theta - \alpha)}{(\theta + \alpha) - (\theta - \alpha)} = \frac{(\beta + \theta) + (\beta - \theta)}{(\beta + \theta) - (\beta - \theta)}$

  $\frac{2\theta}{2\alpha} = \frac{2\beta}{2\theta}$

  $\Rightarrow \theta^2 = \alpha \times \beta$ ...(1)

- $m\angle XOB \times m\angle XOD = (20°)^2$

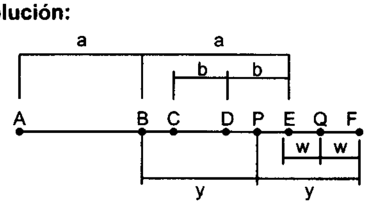
  $\alpha \times \beta = (20°)^2$ ...(2)

  De (1) y (2): $\theta^2 = (20°)^2 \Rightarrow \theta = 20°$

  $\therefore\ m\angle AOC = 40°$

45. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F: tal que B y D son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{CE}$ respectivamente. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BF}$ y $\overline{EF}$ si AC = 26 cm.

Resolución:



Se sabe: AC = 26

$2a - 2b = 26 \Rightarrow a - b = 13$ ...(1)

Pero: $BD = a - b \Rightarrow BD = 13$ ...(2)

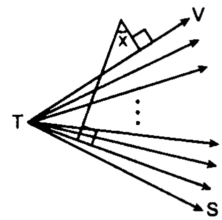
Se pide: $PQ = y - w$ ...(3)

Pero: $2y - 2w = BD$

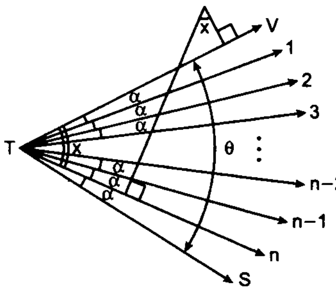
$\Rightarrow y - w = 6{,}5$

$\therefore\ PQ = 6{,}5$

46. Si $m\angle STV = \theta$, calcular "x", si el $\angle STV$ se a dividido en partes de medidas iguales por "n" rayos interiores.



Resolución:



De la figura:

- $x + \alpha = \theta \Rightarrow x = \theta - \alpha$ ...(1)
- $\theta = \underbrace{\alpha + \alpha + \alpha + \alpha + \ldots + \alpha}_{\text{"n + 1" veces}}$

$$\theta = (n + 1) \Rightarrow \frac{\theta}{n+1} = \alpha \quad ...(2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$x = \theta - \frac{\theta}{n+1} \quad \therefore\ x = \frac{n\theta}{n+1}$$

47. Dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común están situados a una misma región del lado común. Si el valor de su razón aritmética es un ángulo agudo, calcular el máximo valor entero que forman sus bisectrices.

Resolución:

Sean los ángulos PEU y PER de lado común $\overline{EP}$

Dato: $m\angle PEE - m\angle PER = y$

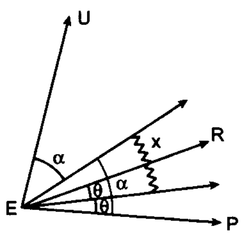
($y \to \angle$ agudo)

$2\alpha - 2\theta = y \Rightarrow \alpha - \theta = \frac{y}{2}$

Como: $y \to$ agudo

Se cumple: $0° < y < 90°$

Luego: $0° < \frac{y}{2} < 45° \Rightarrow 0° < \alpha - \theta < 45°$ ... (1)



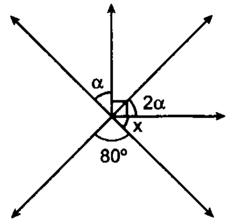
De la figura "x" es medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos PEU y PER

Luego se tiene: $x = \alpha - \theta$

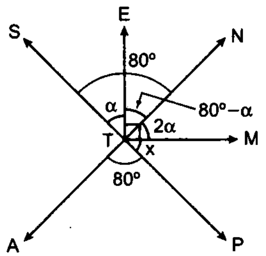
En (1): $x < 45° \Rightarrow x_{máx} = 44°$

$\therefore\ x_{máx} = 44°$

48. Del gráfico, calcular "x"



Resolución:



Por ángulo opuesto por el vértice $m\angle STV = 80°$

Entonces: $m\angle ETV = 80° - \alpha$

Luego: $80° - \alpha + 2\alpha = 90°$

$\alpha = 10°$

Además en el ángulo llano ATV se tiene

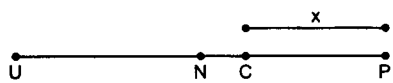
$80° + x + 2\alpha = 180° \Rightarrow x + 100° = 180°$

$\therefore\ x = 80°$

49. Sobre una recta se dan los puntos consecutivos U, N, C, P tal que: $\frac{UN}{UP} = \frac{3NC}{4CP}$.

Hallar la longitud del $\overline{CP}$, si: $1 = \frac{12}{NC} - \frac{21}{UC}$

Resolución:



Datos:

- $\frac{UN}{UP} = \frac{3NC}{4CP} \Rightarrow \frac{UN}{NC} = \frac{3}{4}\left(\frac{UP}{x}\right)$ ...(1)
- $1 = \frac{12}{NC} - \frac{21}{UC} \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{4}{NC} - \frac{7}{UC}$ ...(2)

De la figura:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ UN = UC - NC \\ \bullet\ UP = UC + x \end{array}\right\} \ ...(3)$$

Luego (3) en (1):

$$\frac{UC - NC}{NC} = \frac{3(UC + x)}{4x} \Rightarrow \frac{UC}{NC} - 1 = \frac{3}{4}\left(\frac{UC}{x}\right) + \frac{3}{4}$$

$$\frac{UC}{NC} - 1 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \frac{UC}{x} \Rightarrow \frac{UC}{NC} - \frac{7}{4} = \frac{3}{4}\left(\frac{UC}{x}\right)$$

$\frac{4}{UC}\left(\frac{UC}{NC}-\frac{7}{4}\right)=\frac{3}{x} \Rightarrow \frac{4}{NC}-\frac{7}{UC}=\frac{3}{x}$ ...(4)

Igualando (2) y (4): $\frac{1}{3}=\frac{3}{x}$ $\therefore x = 9$

50. N, I, L, O son puntos colineales y consecutivos, si NL es la media proporcional entre NO y IO, hallar:

$$T=\frac{8(NO)}{NL}\left(\frac{NI}{LO}-1\right)$$

Resolución:

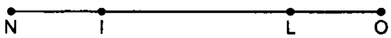
Dato: $NL^2 = NO(IO)$

Piden: $T=\frac{8(NO)}{NL}\left(\frac{NI}{LO}-1\right)$

De (I): $NL(NL) = NO(IO)$

$\frac{NL}{NO}=\frac{IO}{NL}$ ...(1)

De la figura: $\left.\begin{array}{l} NL = NO - LO \\ IO = NL + LO - NI \end{array}\right\}$ ...(2)



Luego (2) en (1):

$\frac{NO-LO}{NO}=\frac{NL+LO-NI}{NL}$

$1-\frac{LO}{NO}=1+\frac{LO-NI}{NL} \Rightarrow -\frac{LO}{NO}=-\frac{(NI-LO)}{NL}$

$\frac{LO}{NO}=\frac{NI-LO}{NL} \Rightarrow \frac{NL}{NO}=\frac{NI-LO}{LO}$

$\Rightarrow \frac{NL}{NO}=\frac{NI}{LO}-1$

Luego: $1=\frac{NO}{NL}\left(\frac{NI}{LO}-1\right)$

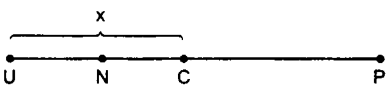
Reemplazando: $T = 8 \times 1$ $\therefore T = 8$

51. En una línea recta se consideran los puntos consecutivos U, N, C, P, tal que:

$\frac{UN}{NC}=\frac{UP}{CP}$, $NC(CP) = 36 \wedge UP(UN) = 100$

Hallar UC

Resolución:



- $\frac{UN}{NC}=\frac{UP}{CP} \Rightarrow UN(CP) = NC(UP) = a$
- $NC(CP) = 36$ ...(1)
- $UP(UN) = 100$ ...(2)

Según el gráfico: $\left.\begin{array}{l} NC = x - UN \\ UN = x - NC \end{array}\right\}$ ...(3)

Reemplazando (3) en (1) y (2) se tiene:

- $(x - UN)CP = 36$
  $x(CP) - UN(CP) = 36$ ... (4)
- $(x - NC)UP = 100$
  $x(UP) - NC(UP) = 100$ ... (5)

Luego: (5) – (4):

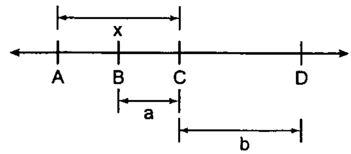
$x(UP) - a - x(CP) + a = 100 - 36$

$x(UP - CP) = 64$ $\therefore x = 8$

52. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D tales que

$\frac{BC(CD)}{CD-BC}=10 \wedge \frac{AC}{AB}-\frac{CD}{AC}=1$. Calcular AC.

Resolución:



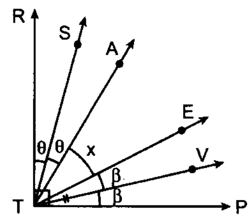
- $\frac{BC(CD)}{CD-BC}=10 \Rightarrow \frac{ab}{b-a}=10$ ...(I)
- $\frac{AC}{AB}-\frac{CD}{AC}=1 \Rightarrow \frac{x}{x-a}-\frac{b}{x}=1$

  $\Rightarrow \frac{x^2-b(x-a)}{x(x-a)}=1 \Rightarrow x^2-bx+ba=x^2-ax$

  $\Rightarrow x=\frac{ab}{b-a}$ ...(II)
- Por lo tanto de (I) y (II) se tiene que: $x = 10$

53. SI: $m\angle STV = 3m\angle ATE$

Calcular "x"



Dato:

$m\angle STV = 3 \times m\angle ATE$

$\theta + \beta + x = 3 \cdot x$

$\beta + \theta = 2x$

Según el gráfico:

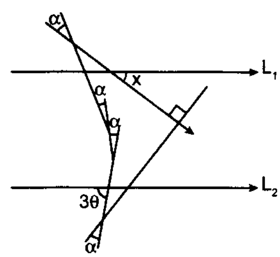
$2\beta + 2\theta + x = 90°$

$2(\beta + \theta) + x = 90°$

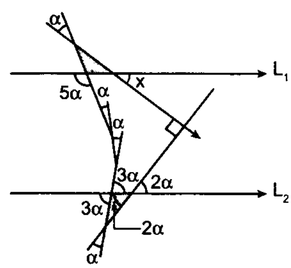
Reemplazando: $2(2x) + x = 90° \Rightarrow 5x = 90°$

$\therefore x = 18°$

54. Calcule x en la figura. si $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2}$

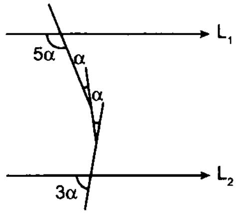


Resolución:

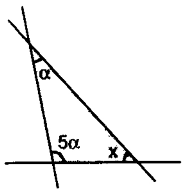


Por propiedad:

$2\alpha + x = 90°$ ...(I)



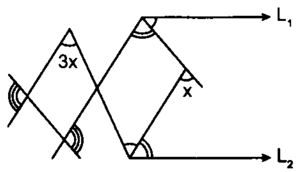
En el triángulo:



$6\alpha + x = 180°$ ...(II)

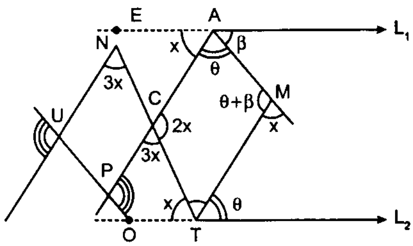
Por lo tanto de (I) y (II) resolviendo: $x = 45°$

55. Hallar "x"



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

Resolución:



Por propiedad: $m\angle AMT = \theta + \beta$

Luego: $\theta + \beta + x = 180°$

Entonces: $m\angle CAE = m\angle CTO = x$

Luego: $m\angle TCA = 2x$ (propiedad)

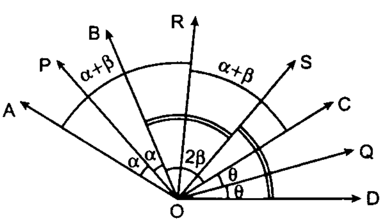
$m\angle PCT = 3x$

$\overline{UN} \parallel \overline{CP}$

$3x + 2x = 180°$ $\therefore x = 36°$

56. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD; tal que $m\angle POQ + m\angle ROS = 136°$. Siendo los rayos OP, OQ, OR y OS las bisectrices de los ángulos AOB, COD, AOC y BOD respectivamente. Hallar la $m\angle AOD$.

Resolución:



Dato: $m\angle POQ + m\angle ROS = 136°$ ... (1)

Nos piden: $m\angle AOD = 2(\alpha + \beta + \theta)$

Según el gráfico: $m\angle POQ = \alpha + 2\beta + \theta$

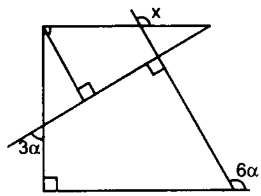
$m\angle ROS = \beta + \theta + 2\alpha - (\alpha + b)$

$\Rightarrow m\angle ROS = \theta + \alpha$

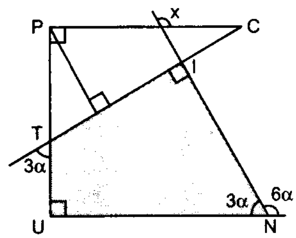
Luego en (1): $(\alpha + 2\beta + \theta) + (\theta + \alpha) = 136°$

$\Rightarrow 2(\alpha + \beta + \theta) = 136°$ $\therefore m\angle AOD = 136°$

57. Hallar "x"



Resolución:



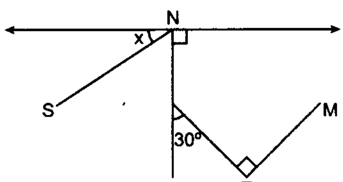
En el △TUNI: $m\angle UNI = 3a$

Luego: $3a + 6a = 180° \Rightarrow 9a = 180° \Rightarrow a = 20$

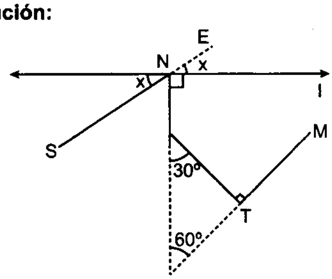
Como $\overline{UN} \parallel \overline{CP}$ se tiene: $x = 6a$

Por lo tanto reemplazando: $x = 120°$

58. Si: $\overline{SN} \parallel \overline{TM}$, calcular "x"



Resolución:

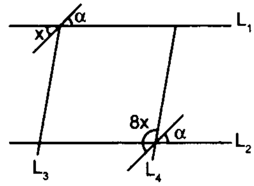


Como: $m\angle ENI = x$

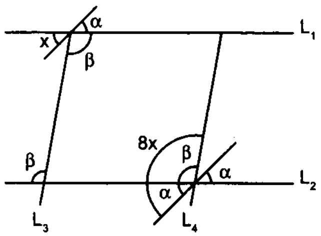
Luego como $\overline{SN} \parallel \overline{TM} \Rightarrow 90° + x + 60° = 180°$

$\therefore x = 30°$

59. En la figura se pide "x" si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$

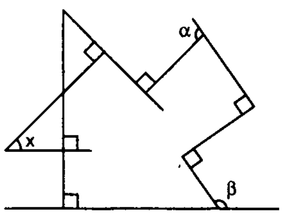


Resolución:

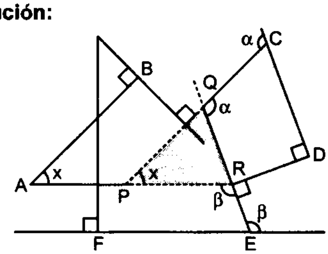


De la figura se obtiene:
$x + \beta + \alpha = 180°$ ... (1)
$8x = \beta + \alpha$ ... (2)
Reemplazando (2) en (1):
$x + 8x = 180°$ $\therefore x = 20$

60. En la figura se pide "x", si $\alpha + \beta = 230°$



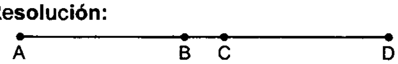
Resolución:



En la figura se observa que:
$\overline{PC} // \overline{AB} \Rightarrow \angle CPR = x$
$\overline{AR} // \overline{FE} \Rightarrow \angle PRE = \beta$
$\overline{QR} // \overline{CD} \Rightarrow \angle RQC = \alpha$
ΔPQR:
$x + 180° - \alpha + 180° - \beta = 180°$
$x = \alpha + \beta - 180°$ ... (1)
Pero: $\alpha + \beta = 230°$ ... (2)
(2) en (1): $\therefore x = 50°$

61. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D tal que: $\frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0$. Calcular la longitud del segmento que debe reemplazar a "x" para que se cumpla la siguiente relación: $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{n}$.

Resolución:

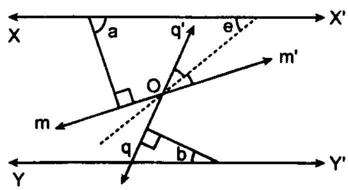


Datos:

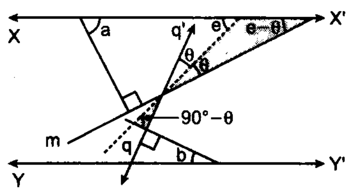
- $\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{n}$ ... (1)
- $\frac{AC}{BC} + \frac{AD}{BD} = 0$ ...(I)

De (I): $\frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD} \Rightarrow \frac{BD}{AD} = -\frac{BC}{AC}$ ...(II)
Como: $BD = AD - AB$ y $BC = AC - AB$
Luego en (II):
$\frac{AD - AB}{AD} = -\frac{(AC - AB)}{AC} \Rightarrow 1 - \frac{AB}{AD} = -1 + \frac{AB}{AC}$
$2 = \frac{AB}{AC} + \frac{AB}{AD} \Rightarrow 2 = AB\left(\frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}\right)$
$\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$ ...(2)
Luego: $(1) = (2) \frac{2}{n} = \frac{2}{AB}$ $\therefore n = AB$

62. En la figura mostrada las rectas XX' e YY' son paralelas. Si la suma de los ángulos a y b es de 76°, halle la medida del ángulo e formado por xx' con la bisectriz del ángulo que determinan las rectas mm' y qq'



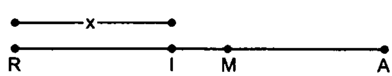
Resolución:



Piden e
Dato $a + b = 76°$
En el gráfico se observa
$e + b = 90° - \theta$ (I)
$a + e - \theta = 90°$ (II)
Sumando (I) y (II):
$2e + \underbrace{a + b}_{76°} - \theta = 180° - \theta$
$\therefore e = 52$

63. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos R, I, M, A tal que:
$\frac{1}{RI} - \frac{1}{RA} = \frac{1}{RM}$ y $IA \times IM = 18$
Hallar RI

Resolución:



Datos: • $IA \times IM = 18$

• $\dfrac{1}{RI} - \dfrac{1}{RA} = \dfrac{1}{RM}$ $\Bigg\}$ ... (1)

De (1): $\dfrac{1}{RI} - \dfrac{1}{RM} = \dfrac{1}{RA} \Rightarrow \dfrac{RM - RI}{RI(RM)} = \dfrac{1}{RA}$

Pero: $RM - RI = IM$

Luego: $\dfrac{IM}{RI(RM)} = \dfrac{1}{RA}$

$IM(RA) = RI(RM)$ ... (2)

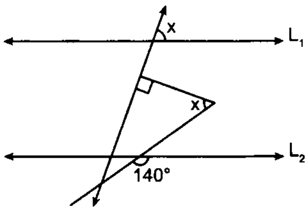
Pero: $RA = x + IA$; $RM = x + IM$

Luego en (2): $IM(x + IA) = x(x + IM)$

$IM(x) + IM(IA) = x^2 + x(IM)$

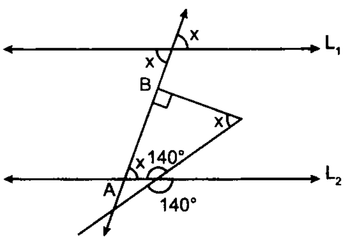
$18 = x^2 \quad \therefore\ x = 3\sqrt{2}$

64. En la figura $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ hallar x



Resolución:

$\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



En cuadrilátero ABCD

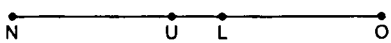
$90 + x + x + 140 = 360$

$2x = 130 \ \therefore\ x = 65$

65. Sobre una recta se tienen los puntos consecutivos N, U, L, O de tal manera que: $NL^2 = NO(UO)$.

Calcular: $y = \dfrac{NU}{LO} - \dfrac{UO}{NL} + 6$

Resolución:



Como: $(NL)^2 = NO(UO)$

Luego: $\dfrac{NL}{NO} = \dfrac{UO}{NL}$ ...(1)

Según el gráfico:

• $NL = NO - LO$

• $UO = NL + LO - NU$ $\Bigg\}$ ... (2)

Luego (2) en (1):

$\dfrac{NO - LO}{NO} = \dfrac{NL + LO - NU}{NL} \Rightarrow 1 - \dfrac{LO}{NO} = 1 + \dfrac{LO - NU}{NL}$

Luego: $-\dfrac{LO}{NO} = \dfrac{LO}{NL} - \dfrac{NU}{NL} \Rightarrow \dfrac{NU}{NL} = \dfrac{LO}{NO} + \dfrac{LO}{NL}$

$\dfrac{NU}{NL} = LO\left(\dfrac{1}{NO} + \dfrac{1}{NL}\right) \Rightarrow \dfrac{NU}{LO} = NL\left(\dfrac{1}{NO} + \dfrac{1}{NL}\right)$

$\dfrac{NU}{LO} = 1 + \dfrac{NL}{NO} \Rightarrow \dfrac{NL}{NO} = \dfrac{NU}{LO} - 1$ ... (3)

Como: (1) = (3)

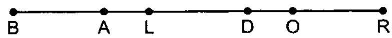
$\dfrac{NU}{LO} - 1 = \dfrac{UO}{NL} \Rightarrow \dfrac{NU}{NO} - \dfrac{UO}{NL} = 1$

En lo que piden: $y = 1 + 6 \quad \therefore\ y = 7$

66. Sobre una recta se dan los puntos consecutivos B, A, L, D, O, R tal que: $\dfrac{BL}{BO} + \dfrac{AD}{AR} = 1$

Hallar: $y = \dfrac{LO}{BO} + \dfrac{DR}{AR} + 9$

Resolución:



Dato: $1 = \dfrac{BL}{BO} + \dfrac{AD}{AR}$ ... (I)

De la figura:

• $OL = BO - LO$

• $AD = AR - DR$ $\Bigg\}$ ... (II)

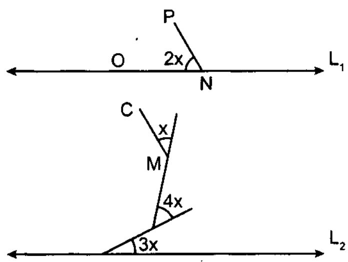
Luego (II) en (I):

$1 = \dfrac{BO - LO}{BO} + \dfrac{AR - DR}{AR} \Rightarrow 1 = 1 - \dfrac{LO}{BO} + 1 - \dfrac{DR}{AR}$

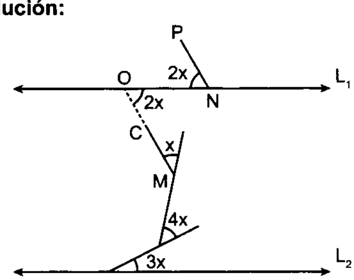
$1 = \dfrac{LO}{BO} + \dfrac{DR}{AR}$

Nos piden: $y = 1 + 9 \quad \therefore\ y = 10$

67. Calcular el valor de "y", si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overline{PN} \parallel \overline{CM}$



Resolución:



Como: $\overline{CM} \parallel \overline{PN} \Rightarrow m\angle CON = 2x$

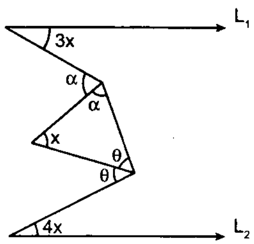
Luego: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

Por propiedad:

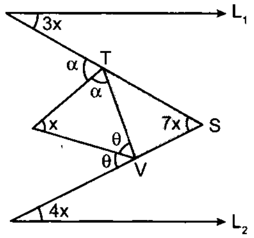
$3x + 4x + 4x + x + 2x = 180°$

$10x = 180° \quad \therefore\ x = 18°$

68. Hallar "x" si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



Resolución:

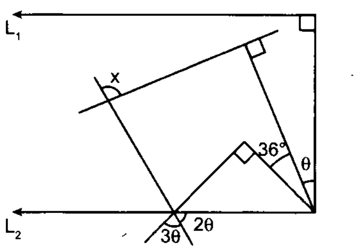


- m∠TSV = 7x
- Luego en el ΔSTV, por propiedad se tiene:

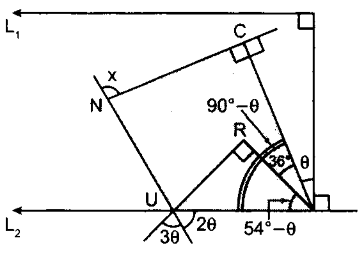
$x = 90° - \dfrac{7x}{2}$

Por lo tanto: x = 20°

69. si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar "x"



Resolución:



En el ⊾PRU:

$5\theta = 90° + 54° - \theta$ (∠ exterior)

$6\theta = 144° \Rightarrow \theta = 24°$

En el ⏢UNCP:

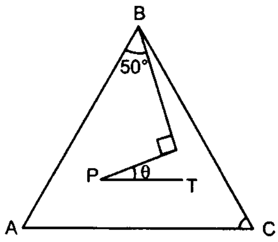
$x + 2\theta = 90° + 90° - \theta$ (propiedad Δ_s)

$x = 180° - 3\theta$

Reemplazando: $x = 180° - 3(24°)$

$\therefore x = 108°$

70. Si ΔABC es equilátero y $\overline{PT} \parallel \overline{AC}$. Hallar θ



Resolución:

Dato: $\overline{PT} \parallel \overline{AC}$

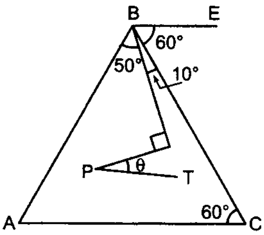
Según el gráfico:

$\overline{BE} \parallel \overline{AC}$

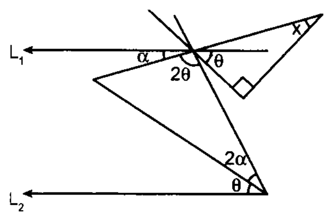
$\overline{PT} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{AC}$

Luego: $\theta + 70° = 90°$

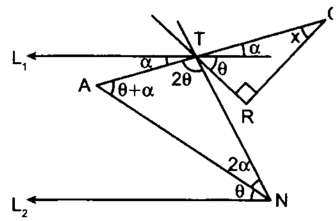
$\therefore \theta = 20°$



73. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar "x"



Resolución:



Dato ($\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$): m∠TAN = θ + α (propiedad)

Luego en el ΔTAN: $2\theta + \theta + \alpha + 2\alpha = 180°$

$3(\theta + \alpha) = 180°$

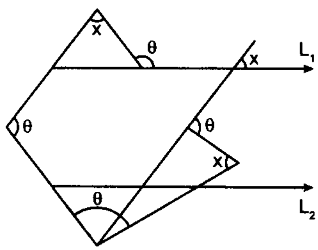
$\Rightarrow \theta + \alpha = 60°$

Finalmente en el ΔTRO: $\theta + \alpha + x = 90°$

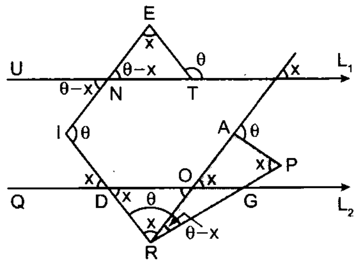
$60° + x = 90°$

$\therefore x = 30°$

72. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular "x"



Resolución:



En el $\triangle$TEN: m$\angle$UNI = θ − x (propiedad $\triangle_s$)

Como $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$: m$\angle$QDI + θ − x = θ (propiedad $//_s$)

m$\angle$QDI = x

En el $\triangle$RAP: m$\angle$PRA = θ − x (propiedad $\triangle_s$)

Luego: m$\angle$GOA = x ($\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$)

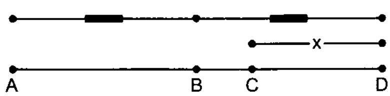
$\triangle$DRO: 3x = 180° $\therefore$ x = 60°

73. Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D tal que:

$AD = 2AB,\ AC = \sqrt{AB(AD)}$ y $\dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{1}{4}$

Calcular: CD

Resolución:



Datos: $AC = \sqrt{AB(AD)} \Rightarrow AC^2 = AB(AD)$ ... (1)

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{BC}$$

De (1): AC(AC) = AB(AD)

$$\frac{AC}{AD}=\frac{AB}{AC} \quad ...(2)$$

Según el gráfico: $\left.\begin{array}{l} AC = AD - x \\ AB = AC - BC \end{array}\right\}$ ... (3)

Reemplazando (3) en (2): $\dfrac{AD-x}{AD}=\dfrac{AC-BC}{AC}$

$$\Rightarrow 1-\frac{x}{AD}=1-\frac{BC}{AC};\ -\frac{x}{AD}=-\frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{x}{AD}=\frac{BC}{AC}$$

Pero: AD = 2AB

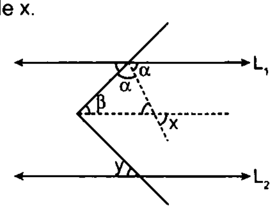
Reemplazando: $\dfrac{x}{2(AB)}=\dfrac{BC}{AC} \Rightarrow \dfrac{AC}{AB(BC)}=\dfrac{2}{x}$

Pero: AC = AB + BC

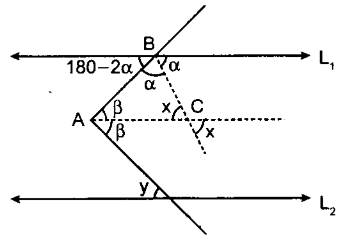
Reemplazando: $\dfrac{AB+BC}{AB(BC)}=\dfrac{2}{x} \Rightarrow \dfrac{1}{AB}+\dfrac{1}{BC}=\dfrac{2}{x}$

$\dfrac{1}{4}=\dfrac{2}{x} \quad \therefore x = 8$

74. En la figura $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, si y <90°, hallar el menor valor entero de x.



Resolución:



I. En $\triangle$ABC (por Σ ángulos internos)

α + β + x = 180°

⇒ α + β = 180° − x ... (1)

II. Además como $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

⇒ (180° − 2α) + y = 2β

y = 2α + 2β − 180°

y = 2(α + β) − 180°

De (1): y = 2(180° − x) − 180°

y = 180° − 2x

Por dato: y < 90°

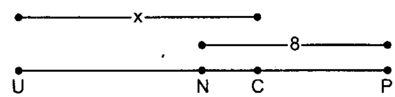
180° − 2x < 90°

2x > 90°

x > 45° $\therefore$ $x_{min.}$ = 46°

75. Sobre una recta se toman los puntos consecutivos U, N, C, P. Donde NP = 8 y (UN − CP)(UP + NC) = 36, hallar "UC".

Resolución:

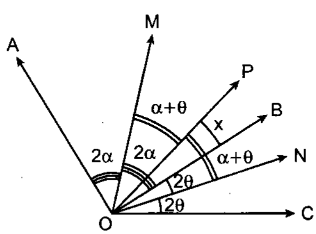


Dato: (UN − CP)(UP + NC) = 36 ... (1)

- UN − CP = UN + NC − CP − NC
  UN − CP = (UN + NC) − (NC + CP)
  UN − CP = x − 8
- UP + NC = UC + CP + NC
  UP + NC = UC + (NC + CP)
  UP + NC = x + 8

En (1): (x − 8)(x + 8) = 36 $\therefore$ x = 10

76. Dado los ángulos consecutivos AOB y BOC tal que m$\angle$AOB − $\angle$BOC = 48°. Si se trazan $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$ y $\overrightarrow{OP}$ bisectrices de $\angle$AOB, $\angle$BOC y $\angle$MON respectivamente, hallar m$\angle$POB.



Resolución:

I. Del dato: $m\angle AOB - m\angle BOC = 48°$

$4\alpha - 4\theta = 48°$

$\Rightarrow \alpha - \theta = 12° \quad ...(1)$

II. $x = m\angle PON - m\angle BON$

$x = (\alpha + \theta) - 2\theta$

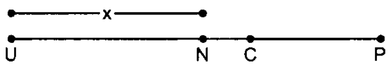
$x = \alpha - \theta$

De (1): $\therefore x = 12$

77. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos U, N, C, P tal que:

$\frac{UC}{NC} + \frac{UP}{NP} = 1$ y $UC(UP) = 400$ calcular: UN

Resolución:



- $UC(UP) = 400$
- $\frac{UC}{NC} + \frac{UP}{NP} = 1$ $\Bigg\}$ ...(1)

Según el gráfico:

- $NC = UC - x$
- $NP = UP - x$ $\Bigg\}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{UC}{UC-x} + \frac{UP}{UP-x} = 1 \Rightarrow \frac{UC}{UC-x} = 1 - \frac{UP}{UP-x}$$

$$\frac{UC}{UC-x} = \frac{UP-x-UP}{UP-x} \Rightarrow \frac{UC}{UC-x} = \frac{-x}{UP-x}$$

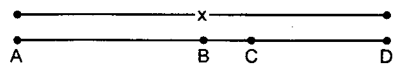
Luego: $\frac{UC-x}{UC} = \frac{UP-x}{-x} \Rightarrow 1 - \frac{x}{UC} = \frac{UP}{x} + 1$

$-\frac{x}{UC} = -\frac{UP}{x} \Rightarrow x^2 = UC(UP)$

Reemplazando: $x^2 = 400 \therefore x = 20$

78. Sobre una línea recta se consideran los puntos consecutivos A, B, C, D tal que AB es media aritmética entre AC y CD. Hallar AD, si: $BD^2 + 1 = 2(BD)$.

Resolución:



Datos: $BD^2 + 1 = 2(BD) \quad ...(1)$

$AB = \overline{ma}(AC; CD) \quad ...(2)$

De (1): $BD^2 - 2BD + 1 = 0 \Rightarrow (BD - 1)^2 = 0$

$BD = 1$

De (2): $AB = \frac{AC + CD}{2} \Rightarrow AD = 2(AB)$

Luego se tiene que "B" es punto medio de $\overline{AD}$ lo cual implica:

$AB = BD = \frac{AD}{2}$, pero $BD = 1$

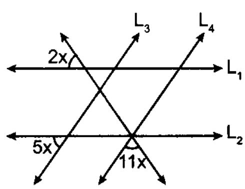
Entonces: $\frac{AD}{2} = 1 \quad \therefore x = 2$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

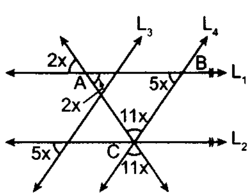
PROBLEMA 1 (UNI 2001 - I)

En la figura $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$, el valor numérico de $3x - 12°$ es:

A) 15°
B) 16°
C) 17°
D) 18°
E) 19°



Resolución:



En el $\triangle ABC$: $18x = 180° \Rightarrow x = 10°$

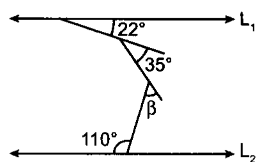
Por lo tanto nos piden: $3x - 12° = 18°$

Clave: D

PROBLEMAS 2 (UNI 2010 - I)

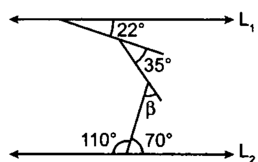
Halle la medida del ángulo β indicado en la figura mostrada, donde las rectas L_1 y L_2 son paralelas.

A) 51°
B) 53°
C) 55°
D) 57°
E) 59°

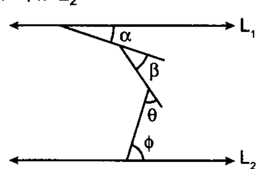


Resolución:

Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



Propiedad: Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$



$\alpha + \beta + \theta + \phi = 180°$

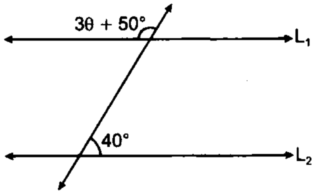
Aplicando la propiedad en el problema:

$22° + 35° + \beta + 70° = 180° \quad \therefore \beta = 53°$

Clave: C

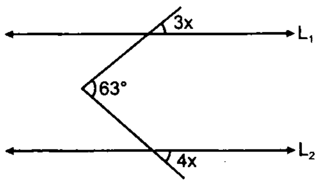
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular θ.



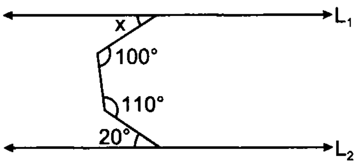
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

2. $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular x.



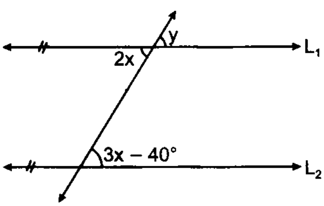
A) 7° B) 8° C) 9°
D) 10° E) 11°

3. $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Calcular x.



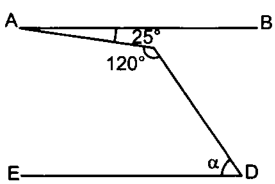
A) 25° B) 20° C) 15°
D) 5° E) 10°

4. $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular y.



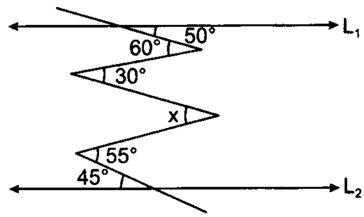
A) 70° B) 75° C) 80°
D) 85° E) 65°

5. En la figura, $\overline{AB} \parallel \overline{DE}$, calcular α.



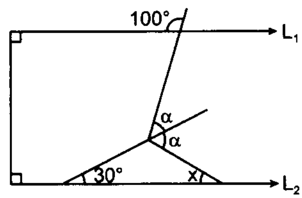
A) 95° B) 85° C) 75°
D) 65° E) 45°

6. $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular x.



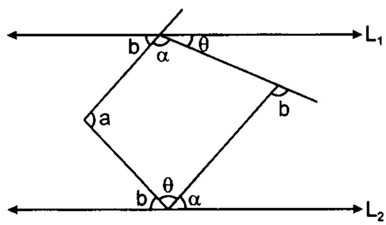
A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

7. En el gráfico, calcular x.



A) 10° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 40°

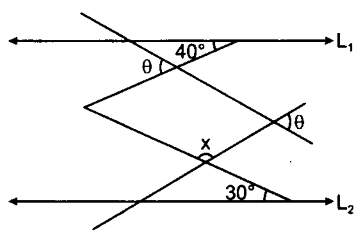
8. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$; calcular $\frac{a}{b}$



A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$

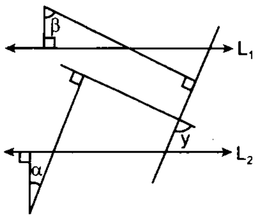
D) 2 E) $\frac{5}{2}$

9. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular x.



A) 34° B) 48° C) 98° D) 110° E) 125°

10. Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$ y $\alpha + \beta = 66°$, calcular el valor de y.



A) 133° B) 114° C) 166°
D) 111° E) 100°

11. Sobre una recta se consideran los puntos consecutivos A, B y C, tales que AC = 6 y $AC(AB) = 2(AB^2 - BC^2)$. Calcular AB

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

12. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, tal que AC + BD = 5(AB + CD). Calcular $\frac{AD}{BC}$

A) 1,5 B) 2,5 C) 2
D) 3,5 E) 3

13. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D, de modo que AB = 8; CD = 18; MN = 17. Siendo M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Calcular BC, si BC < CD.

A) 1 B) 7 C) 4
D) 10 E) 8

14. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E, tal que AB = 3BE; AC = 80
Calcular BD, si BC + 3DE = 20

A) 16 B) 20 C) 40
D) 10 E) 15

15. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, tal que AC = BC; CE = DF; AB + EF = 96. Calcular CD

A) 96 B) 24 C) 68
D) 64 E) 48

16. Se tiene los puntos colineales A, B, C y D, siendo E y F puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Calcular EF si AC + BD = 20.

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 30

17. Se tienen los puntos colineales A, B, C y D, dispuestos de modo que AD = 10; CD = AB + BC, $\frac{BC}{CD} = \frac{2}{5}$. Calcular BD

A) 3 B) 5 C) 7
D) 9 E) 8

18. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E, tal que AD + BE = 70; $\frac{AB}{3} = \frac{BC}{5} = \frac{CD}{7} = \frac{DE}{8}$. Calcular BC.

A) 6 B) 12 C) 18
D) 10 E) 28

19. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, de modo que 3AF = 7BE = 10CD, AC + BD + CE + DF = 50. Calcular CD.

A) 4,5 B) 9,5 C) 12,5
D) 10,5 E) 7,5

20. A, B, C, D y E son puntos colineales y consecutivos, tales que $BD = \frac{3AE}{5}$ y AC + BD + CE = 40. Calcular AE.

A) 20 B) 24 C) 16
D) 25 E) 15

21. A, B, C, D y E son puntos colineales y consecutivos, tal que: AB + CD = 40 y AD = 6BC. Calcular AD.

A) 42 B) 46 C) 48
D) 52 E) 56

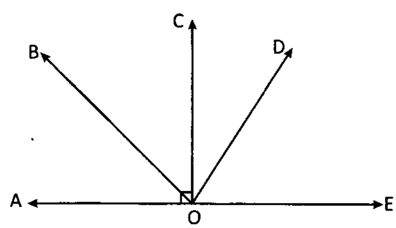
22. En una recta se ubican los puntos A, B, C, D, E y F, de modo que (AB)(CD) = (BC)(AD);
(CD)(EF) = (DE)(CF) y $\frac{m}{BD} + \frac{n}{AD} = \frac{1}{CE} + \frac{t}{CF}$,
calcular $m^3 + n^3 + l^3 + t^3$

A) 12 B) −14 C) 10
D) 14 E) 18

23. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F, G, ... y así sucesivamente, tal que $AB = \frac{1}{3}, BC = \frac{1}{15}, CD = \frac{1}{35}, DE = \frac{1}{63}, EF = \frac{1}{99}, \ldots$
Calcular la suma límite de las longitudes de los segmentos dados.

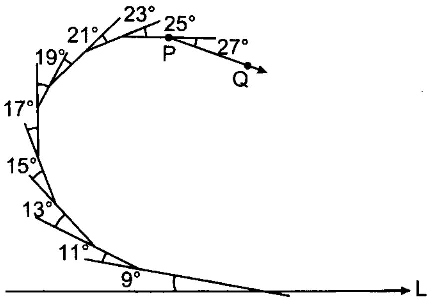
A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{1}{10}$
D) $\frac{1}{5}$ E) 1

24. Calcular m∠BOC. Si: m∠AOB = 2(m∠COD) y 2(m∠AOB) + m∠DOE = 150°



A) 25° B) 75° C) 60°
D) 65° E) 50°

25. En la figura mostrada, hallar la medida del ángulo que forman el rayo $\overrightarrow{PQ}$ con la recta $\overleftrightarrow{L}$.

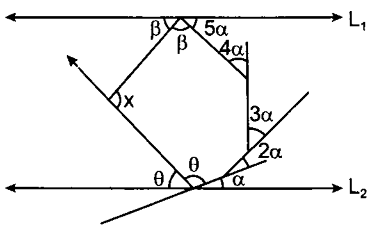


A) 16° B) 9° C) 0°
D) 2° E) 10°

26. Dados los rayos: $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$, tal que $m\angle AOD = m\angle BOE = m\angle COF$ y $m\angle AOF + m\angle COD = 114°$. Calcular la $m\angle BOE$

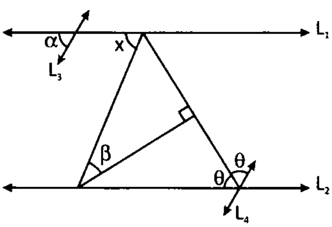
A) 62° B) 58° C) 66°
D) 72° E) 57°

27. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular x.



A) 154° B) 115° C) 130°
D) 144° E) 120°

28. Si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$, $\beta = \frac{\theta}{2} = \frac{\alpha}{4}$; calcular x.



A) 45° B) 60° C) 75°
D) 80° E) 67,5°

29. El doble del complemento de un ángulo sumando con el suplemento de otro ángulo es igual al suplemento del primer ángulo. Calcular la suma de las medidas de dichos ángulos.

A) 100° B) 45° C) 90°
D) 180° E) 120°

30. Se tiene ios ángulos consecutivos $\angle AOB$; $\angle BOC$ y $\angle COD$, tal que: $m\angle AOD = 148°$ y $m\angle BOC = 36°$. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$.

A) 108° B) 36° C) 92° D) 56° E) 74°

31. Se tiene los ángulos consecutivos $\angle POQ$, $\angle QOR$ y $\angle ROS$, de tal manera que $m\angle POR = 32° + k$ y $m\angle QOS = 88° - k$. Calcular $m\angle QOR$, si el ángulo POS es recto.

A) $22° + k$ B) 30° C) $68° - k$
D) 40° E) $16° + \frac{k}{2}$

32. Se tiene los ángulos consecutivos $\angle POQ$, $\angle QOR$ y ROS, de modo que el rayo $\overrightarrow{OR}$ es bisectriz del ángulo $\angle QOS$. Calcular $\angle POQ + m\angle POS = 140°$.

A) 70° B) 100° C) 35°
D) 150° E) 110°

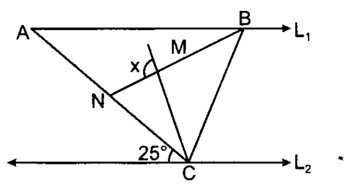
33. Se divide la medida de un ángulo x en k partes iguales, por un punto de uno de los lados se trazan m perpendiculares a los rayos que dividen a x. Calcular la medida del ángulo que forma la primera y la última perpendicular.

A) $\frac{x(m+1)}{k}$ B) $\frac{xm}{k}$ C) $\frac{x(m-1)}{k}$
D) $\frac{x(k-1)}{m}$ E) $\frac{x(k+1)}{m}$

34. El doble de un ángulo es mayor que otro en 30°. Si los ángulos son conjugados internos comprendidos entre rectas paralelas. ¿En cuánto se diferencian estos ángulos?

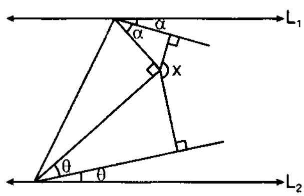
A) 40° B) 45° C) 50° D) 30° E) 35°

35. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ son rectas paralelas, $m\angle ABC = 3m\angle BAC$, AN = BN y $\overrightarrow{CM}$ es bisectriz de BCN. Calcular el valor de x.



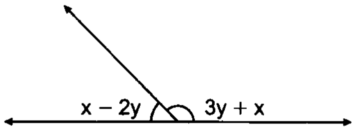
A) 65° B) 95° C) 85°
D) 90° E) 80°

36. Calcular x, siendo $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



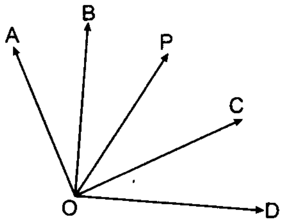
A) 60° B) 75° C) 105°
D) 135° E) 140°

37. En el gráfico, hallar el máximo valor entero de y.



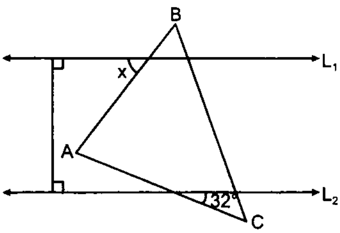
A) 50° B) 35° C) 41°
D) 40° E) 52°

38. En la figura, el rayo $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz del ángulo AOD, siendo m∠POC – m∠BOP = 20°. Calcular m∠AOB – m∠COD.



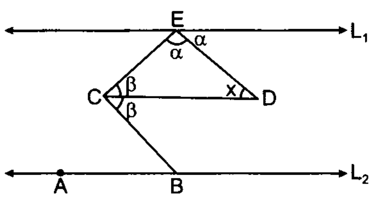
A) 22° B) 40° C) 25°
D) 10° E) 20°

39. Del gráfico, calcular el mayor valor entero de x, si el triángulo ABC es acutángulo.



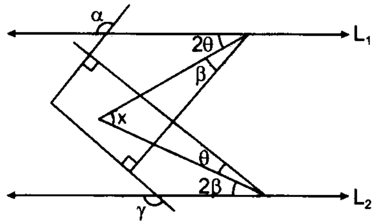
A) 50° B) 44° C) 56°
D) 57° E) 58°

40. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y la medida del ángulo ∠ABC es agudo, calcular el menor valor entero impar de x.



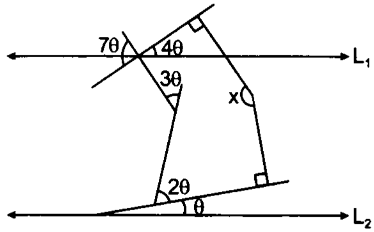
A) 46° B) 47° C) 45°
D) 43° E) 44°

41. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y $\alpha + \gamma = 252°$. Calcular x.



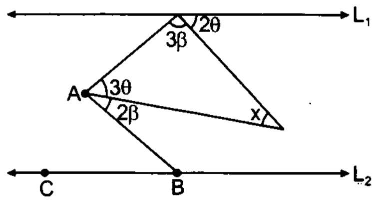
A) 52° B) 45° C) 82° D) 48° E) 62°

42. Según el gráfico, calcular x si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



A) 100° B) 120° C) 140°
D) 150° E) 135°

43. En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y el ángulo ABC es agudo, calcular el mínimo valor entero de x.



A) 20° B) 21° C) 22° D) 18° E) 19°

44. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D, E, F, G y H, de modo que B, E y F son los puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$ respectivamente y $\frac{BE}{EF} = k$, calcular $\frac{AC + DG}{CD + GH}$.

A) k B) $\frac{k}{2}$ C) $\frac{1}{k}$

D) $\frac{k}{3}$ E) $\frac{2}{k}$

45. En una recta están situados en forma consecutiva los puntos P, Q, R y S, de modo que $\frac{PQ}{PS} = \frac{QR}{RS}$. Luego se ubica en los puntos medios M y N de $\overline{PR}$ y $\overline{QS}$ respectivamente. Calcular MN si PM = a y NS = b.

A) $\sqrt{ab}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\sqrt{a^2+b^2}$

D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $\frac{a+b}{2}$

46. Sean los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, tal que m∠AOC – m∠BOD = 10°; luego se traza las bisectrices OM y ON de los ángulos AOB y COD respectivamente. Calcular la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos AOM y CON si m∠MON = 100°.

A) 112°30' B) 100°30' C) 106°30'
D) 105° E) 102°30'

47. Se tienen los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD, de modo que la m∠BOC excede a la m∠AOB en 40° y la m∠COD excede a la m∠AOB en 20°. Luego se trazan las bisectrices OM, ON, OQ, OE y OF de los ángulos AOB, BOC, COD, MON y NOQ respectivamente. Calcular la m∠BOE – m∠COF

A) 10° B) 15° C) 5° D) 18° E) 25°

48. Dados, en un plano, los rayos consecutivos OP_1, OP_2, OP_3, ... OP_{16}, de modo que se forme ángulos consecutivos y congruentes; si el ángulo P_1OP_{16} es agudo, calcular el máximo valor entero del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos P_2OP_3 y $P_{11}OP_{12}$.

A) 73° B) 53° C) 17° D) 36° E) 71°

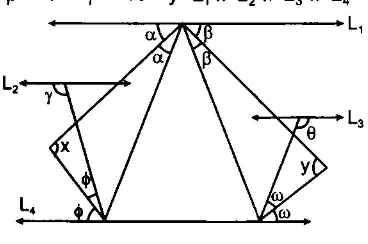
49. Por un punto se trazan rayos coplanares que forman n ángulos congruentes, además la medida del ángulo formado por el primer y último rayo es θ, ¿para qué valor de n, la medida del ángulo formado por el noveno rayo y la recta paralela a la bisectriz del ángulo formado por el cuarto y quinto rayo es 0,3θ?

A) 1 B) 15 C) 9
D) 18 E) 30

50. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E, de modo que $\frac{AC}{2} = \frac{BD}{3} = \frac{CE}{5}$, además la suma de las longitudes del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ con el segmento que une los puntos medios de $\overline{CE}$ y $\overline{CD}$ es k.
Calcular $\frac{k}{AE}$.

A) $\frac{3}{7}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{7}$

51. Según el gráfico, calcular x – y, si
$\alpha - \beta = \theta - \gamma = 10°$ y $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3} \parallel \overleftrightarrow{L_4}$



A) 20° B) 30° C) 25°
D) 15° E) 35°

52. En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C, D y E, de modo que BD + AC + BE + AD + CE = (AE)(BD).
Calcular $\frac{1}{AE} + \frac{1}{BD}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) 3 C) $\frac{1}{2}$ D) 2 E) $\frac{1}{6}$

53. Dados los puntos colineales y consecutivos A, B, C, D, E y F; si $\frac{AC}{BC} + \frac{BD}{CD} + \frac{CE}{DE} + \frac{DF}{EF} = m$, calcular $\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{CD} + \frac{CD}{DE} + \frac{DE}{EF}$.

A) m – 4 B) m C) m – 1
D) m + 2 E) m – 3

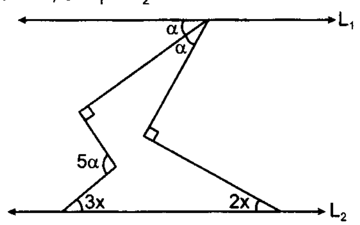
54. En una recta se ubica los puntos consecutivos A, B, C y D, de modo que B es punto medio de AD. Calcular CD, si se cumple que (AC)(AD) = 16 y $\frac{2}{AC} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{2(CD)}$.

A) 2 B) 3 C) 4,5 D) 5 E) 6

55. En una recta se ubican los puntos A, B, C, D, E y F tal que AC = CE = EF y 2(BC) = 3(DE), calcular $\frac{(BE)^2 - (AB)^2}{(DF)^2 - (CD)^2}$.

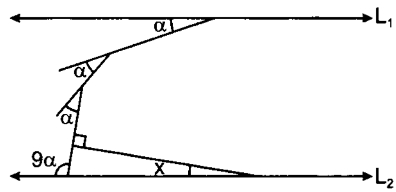
A) $\frac{3}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{9}{4}$
D) $\frac{4}{9}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

56. Calcular x, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



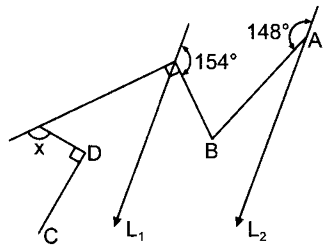
A) 30° B) 25° C) 10°
D) 15° E) 20°

57. Calcular x, si $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$.



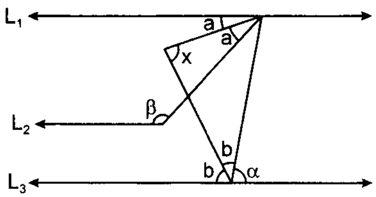
A) 30° B) 15° C) 20°
D) 45° E) 10°

58. En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overline{AB}$ //$\overline{CD}$. Calcular x.



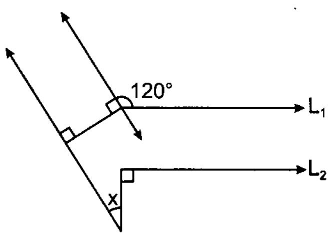
A) 120° B) 122° C) 124°
D) 125° E) 130°

59. Calcular x, si $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\alpha + \beta = 200°$



A) 100° B) 80° C) 60°
D) 40° E) 120°

60. Si $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$, calcular x.



A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 45°

61. Si la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo es igual al triple de la medida del ángulo, hallar el suplemento del complemento de dicho ángulo.

A) 120° B) 90° C) 135°
D) 150° E) 100°

62. Seis ángulos consecutivos tienen sus medidas en progresión aritmética y su suma es 180°, además la medida del ángulo mayor es el doble de la del menor. ¿En cuánto excede la medida del ángulo mayor a la medida del menor?

A) 30° B) 25° C) 20° D) 18° E) 24°

63. Dados los ángulos consecutivos AOB y BOC, se trazan las bisectrices $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$ de dichos ángulos, respectivamente. Si m∠AOB − m∠BOC = 60°, hallar m∠BOR donde $\overrightarrow{OR}$ es bisectriz de ∠POQ.

A) 30° B) 12° C) 21°
D) 18° E) 15°

64. Dados los ángulos consecutivos AOB, BOC, COD, DOE y EOF tales que m∠AOF = 152° y m∠AOD = m∠BOE = m∠COF; se traza $\overline{OP}$, bisectriz de ∠COD. Si además m∠EOP = 56°, hallar m∠BOC.

A) 15° B) 30° C) 18°
D) 20° E) 36°

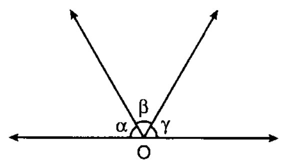
65. Alrededor de un punto se tienen n ángulos consecutivos. Si la suma de sus correspondientes suplementos es 1620°, n es igual a:

A) 9 B) 11 C) 13
D) 7 E) 15

66. Dados los ángulos consecutivos AOB, BOC y COD tales que m∠AOB = $\frac{1}{3}$ m∠BOD, $\frac{1}{2}$ m∠COD = $\frac{1}{3}$ m∠AOC y m∠AOD = 120°. Hallar m∠BOC.

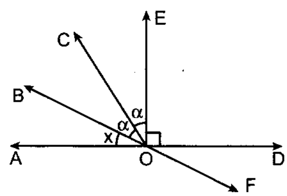
A) 32° B) 42° C) 45°
D) 53° E) 60°

67. En la figura α, β y γ son proporcionales a 3, 4 y 5 respectivamente. Calcular $\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{5}$.



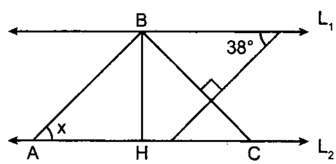
A) 45° B) 30° C) 37° D) 53° E) 60°

68. En la figura, $\frac{m\angle AOC}{m\angle COF} = \frac{11}{29}$. Calcular m∠AOB.



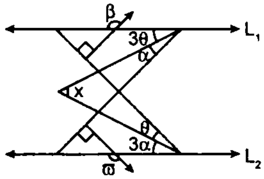
A) 30° B) 29° C) 20°
D) 11° E) 18°

69. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$ y m∠ABC = 80°. Hallar x.



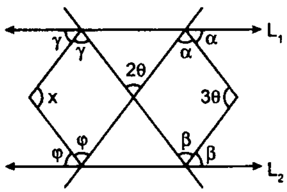
A) 36° B) 53° C) 38°
D) 45° E) 48°

70. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular "x". Si: $\beta + \omega = 220°$.



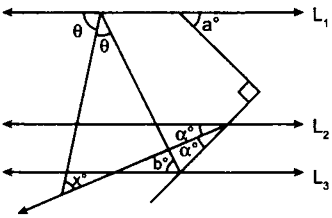
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

71. Si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$, calcular "x".



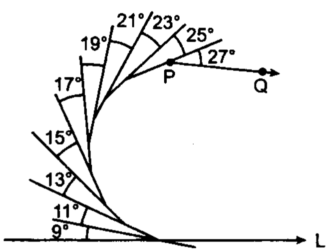
A) 143° B) 127° C) 150°
D) 135° E) 165°

72. Calcular "x", si: $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$ y $a° - b° = 36°$.



A) 54° B) 72° C) 36°
D) 63° E) 52°

73. En la figura mostrada, hallar la medida del ángulo que forman el rayo $\overrightarrow{PQ}$ con la recta $\overleftrightarrow{L}$.

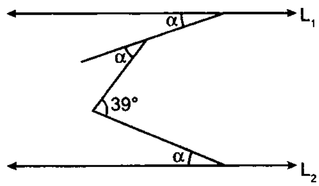


A) 16° B) 9° C) 0°
D) 2° E) 10°

74. Dados los rayos: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{OE}$ y $\overrightarrow{OF}$ tal que: $m\angle AOD = m\angle BOE = m\angle COF$ y $m\angle AOF + m\angle COD = 114°$.
Calcular la $m\angle BOE$.

A) 62° B) 58° C) 66°
D) 72° E) 57°

75. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar α.



A) 12° B) 13° C) 15°
D) 18° E) 9°

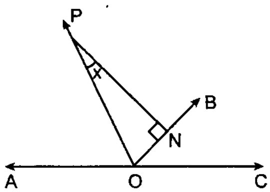
76. Un ángulo de medida "α" es dividido en n partes iguales por (n − 1) rayos. Por un punto de uno de los lados del ángulo se trazan perpendiculares a cada uno de los rayos que dividen al ángulo. Hallar la medida del ángulo cuyos lados son la primera y la última perpendicular trazada.

A) $\left(\frac{n+2}{n}\right)\alpha$ B) $\left(\frac{n-2}{n}\right)\alpha$

C) $\left(\frac{2n+1}{n}\right)\alpha$ D) $\left(\frac{2n-1}{n}\right)\alpha$

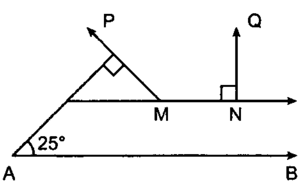
E) $\left(\frac{n-1}{n}\right)\alpha$

77. En la figura, $m\angle AOB = \frac{3}{4}\, m\angle BOC + 40°$ y $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz de $\angle AOB$. Hallar x.



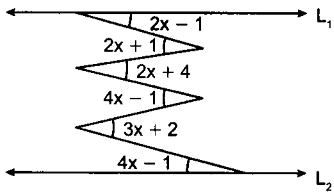
A) 30° B) 40° C) 45°
D) 53° E) 60°

78. En la figura, $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{MN}$. Hallar la suma de las medidas de los ángulos que forman los rayos $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{NQ}$ y los rayos $\overrightarrow{MP}$ y $\overrightarrow{MN}$.



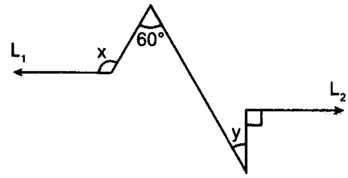
A) 140° B) 120° C) 150°
D) 115° E) 160°

79. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar el valor de x.



A) 2°40'   B) 2°30'   C) 2°45'
D) 2°15'   E) 2°20'

80. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$. Hallar x + y.



A) 120°   B) 135°   C) 150°
D) 160°   E) 180°

CLAVES

1. C	11. D	21. C	31. B	41. D	51. D	61. A	71. D
2. C	12. A	22. D	32. A	42. B	52. C	62. C	72. D
3. E	13. C	23. B	33. C	43. E	53. A	63. E	73. C
4. C	14. B	24. E	34. A	44. A	54. A	64. D	74. E
5. B	15. E	25. C	35. D	45. C	55. A	65. B	75. B
6. C	16. B	26. E	36. D	46. E	56. E	66. B	76. B
7. C	17. C	27. D	37. B	47. C	57. D	67. A	77. B
8. D	18. D	28. E	38. D	48. B	58. B	68. C	78. A
9. D	19. D	29. D	39. D	49. B	59. B	69. E	79. A
10. B	20. D	30. C	40. B	50. E	60. D	70. C	80. C

Triángulos

03 capítulo

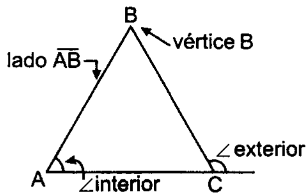
Menelao de Alejandría (70 d. C.-140 d. C.) fue un matemático y astrónomo griego que trabajó en Alejandría y en Roma a finales del siglo I. Fue el primero en reconocer a las geodésicas en una superficie curva como análogas naturales de las líneas rectas y en concebir y definir el triángulo esférico. Su nombre ha quedado ligado al teorema de geometría plana o esférica relativo a un triángulo cortado por una recta o un gran círculo, conocido como el teorema de Menelao, un teorema de una gran importancia en la trigonometría antigua. También fue un defensor entusiasta de la geometría clásica.

Sphaerica es la única obra de Menelao que ha sobrevivido en forma de traducción árabe. Está compuesta de tres libros y trata de la geometría de la esfera y de su aplicación a mediciones y cálculos astronómicos. El libro introduce el concepto de triángulo esférico (figuras formadas por arcos de tres círculos máximos) y prueba el teorema de Menelao (una extensión a triángulos esféricos de un resultado previo ya conocido). El libro fue traducido en el siglo XVII por el astrónomo y matemático Francesco Maurolico.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Se llama triángulo a la figura formada por la reunión de los segmentos determinados al unir tres puntos no colineales.



Notación: $\triangle ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$

Perímetro: $2p = AB + BC + AC$

Semiperímetro: $p = (AB + BC + AC)/2$

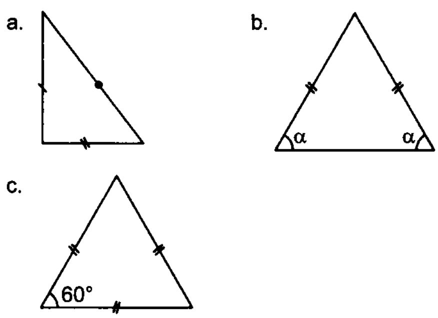
CLASIFICACIÓN DE LOS TRIÁNGULOS

Se clasifican por sus lados y por sus ángulos:

Por sus lados

Se clasifican en:

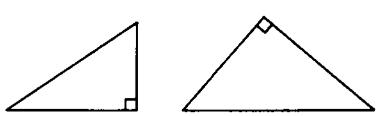
Escaleno. No tiene lados congruentes.
Isósceles. Tiene dos lados congruentes. El tercero es llamado base. Los ángulos en la base son congruentes.
Equilátero. Tiene sus tres lados congruentes. Cada ángulo interior mide 60°.



Por sus ángulos

Se clasifican en:

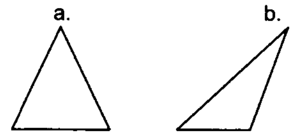
Triángulo rectángulo. Tiene un ángulo recto. Los lados que determinan dicho ángulo se llaman catetos y el tercero es la hipotenusa.



Triángulo oblicuángulo. No tiene ángulo recto.
Pueden ser:

I. **Acutángulo.** Si sus ángulos interiores son agudos.

II. **Obtusángulo.** Tiene un ángulo interior obtuso.

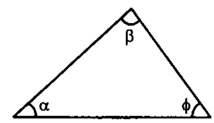


PROPIEDADES BÁSICAS

En todo triángulo:

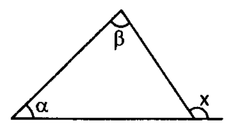
1. Las medidas de los ángulos interiores suman 180°.

$$\boxed{\alpha + \beta + \phi = 180°}$$



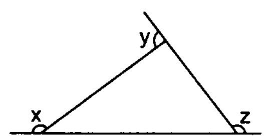
2. Cualquier ángulo exterior mide igual que la suma de dos ángulos interiores no adyacentes.

$$\boxed{x = \alpha + \beta}$$

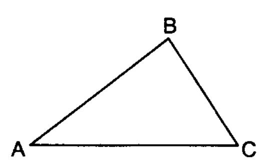


3. Las medidas de los ángulos exteriores, uno por vértice, suman 360°.

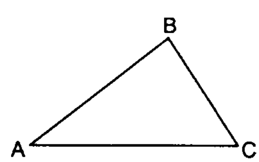
$$\boxed{x + y + z = 360°}$$



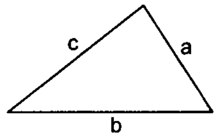
4. En un mismo triángulo, a mayor lado se opone mayor ángulo y viceversa. Si $AB > BC$, entonces: $m\angle C > m\angle A$



5. En un mismo triángulo, a lados congruentes se oponen ángulos congruentes y viceversa.
Si $AB \cong AC$, entonces: $m\angle B \cong m\angle C$



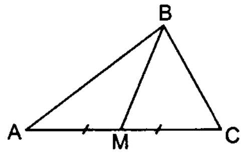
6. Cualquier lado es mayor que la diferencia de longitudes de los otros dos y menor que su suma.
Si: $c > b > a$, entonces: $c - a < b < c + a$



LÍNEAS NOTABLES DEL TRIÁNGULO

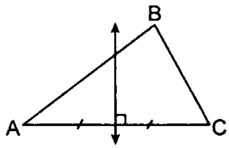
Mediana

Segmento que une un vértice con el punto medio del lado opuesto, por ejemplo: mediana $\overline{BM}$



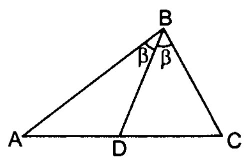
Mediatriz

Recta perpendicular a un lado, levantada desde su punto medio, ejemplo: mediatriz de $\overline{AC}$



Bisectriz interior

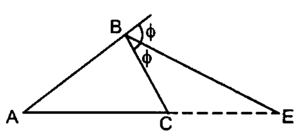
Segmento que biseca un ángulo interior, ejemplo: $\overline{BD}$



Bisectriz exterior

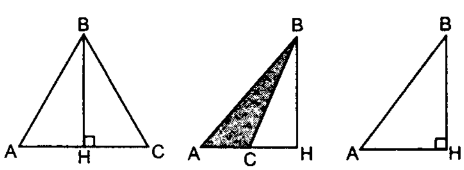
Segmento que biseca un ángulo exterior, por ejemplo: $\overline{BE}$

(AB > BC)



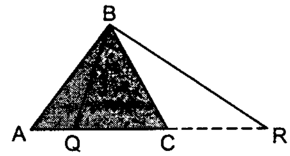
Altura

Segmento perpendicular a un lado, trazado desde el vértice opuesto, por ejemplo: $\overline{BH}$



Ceviana

Se llama ceviana de un triángulo, al segmento que une un vértice con un punto cualquiera del lado opuesto o de su prolongación.



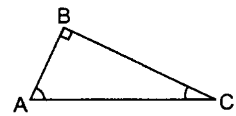
$\triangle ABC$:

- $\overline{BQ}$: ceviana interior
- $\overline{BR}$: ceviana exterior

EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

1. Los ángulos agudos son complementarios.

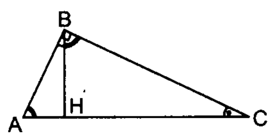
$\boxed{m\angle A + m\angle C = 90°}$



2. La altura relativa a la hipotenusa, divide al ángulo recto en dos ángulos congruentes a los ángulos agudos del triángulo.

   $\triangle ABC$: $\overline{BH}$ es altura relativa a la hipotenusa.

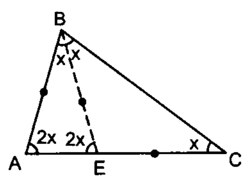
$\boxed{m\angle HBC \cong m\angle A \text{ y } m\angle ABH \cong m\angle C}$



Ejemplos:

1. En un triángulo ABC, $\overline{BE}$ es bisectriz interior. Hallar la medida de $\angle C$, si: AB = BE = EC

   Resolución:



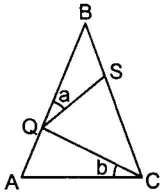
Incógnita: $m\angle C = x$
$\triangle BEC$, isósceles: $m\angle EBC = m\angle C = x$

Luego: $m\angle AEB = m\angle C + m\angle EBC$ ($\angle$ exterior)
$\Rightarrow m\angle AEB = 2x$

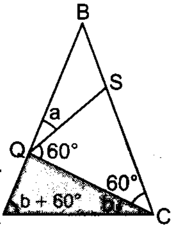
Además: $m\angle ABE = m\angle EBC = x$ ($\overline{BE}$ es bisectriz)

$\triangle ABE$, isósceles: $m\angle A = m\angle AEB = 2x$
$m\angle A + m\angle ABE + m\angle AEB = 180°$
$2x + x + 2x = 180° \Rightarrow x + 36°$
$\therefore\ m\angle C = 36°$

2. En la figura mostrada, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y el triángulo QSC es equilátero. Demostrar que a = 2b.



Resolución:



Como $\overline{AB} \cong \overline{BC}$

$\therefore$ $m\angle A = b + 60° = m\angle C$

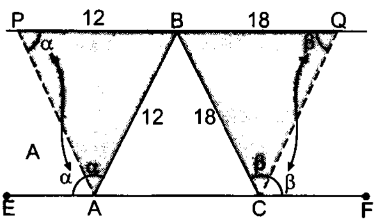
En el $\triangle AQC$:

$a + 60° = b + 60° + b$ ($\angle$ exterior).

$\therefore$ $a = 2b$

3. En un triángulo ABC, AB = 12 y BC = 18. Por B, se traza una recta paralela a $\overline{AC}$, cortando a las bisectrices de los ángulos externos A y C, en los puntos P y Q, respectivamente. Hallar PQ.

Resolución:



Incógnita: PQ

Sea el gráfico adjunto: $m\angle P = m\angle EAP = \alpha$

$m\angle Q = m\angle FCQ = \beta$ (ángulos alternos internos)

Luego: $\triangle APB$, isósceles $\Rightarrow$ PB = AB $\Rightarrow$ PB = 12

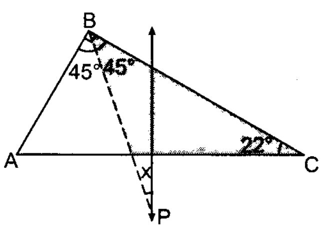
$\triangle CBQ$, isósceles $\Rightarrow$ BQ = BC $\Rightarrow$ BQ = 18

Entonces, PQ = PB + BQ = 12 + 18.

$\therefore$ PQ = 30

4. En un triángulo ABC, $m\angle B = 90°$, $m\angle C = 22°$, hallar la medida del ángulo llamado por la bisectriz del $\angle B$ y la mediatriz de $\overline{AC}$.

Resolución:



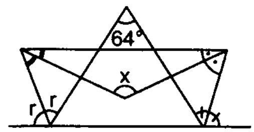
Sea P, el punto de corte de las líneas indicadas.

Incógnita: $m\angle P = x$

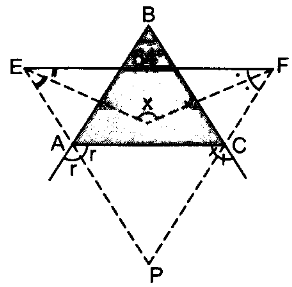
En el cuadrilátero no convexo sombreado:

$x + 45° + 22° = 90°$ $\quad\therefore$ $x = 23°$

5. Del gráfico, hallar x.



Resolución:



Prolongamos $\overline{EA}$ y $\overline{FC}$ hasta P.

Por propiedad:

$\triangle ABC \Rightarrow m\angle P = 90° - \dfrac{m\angle B}{2}$

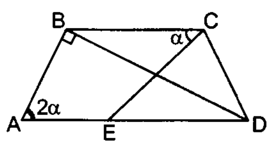
$m\angle P = 90° - \dfrac{64°}{2}$

$\Rightarrow m\angle P = 58° \Rightarrow x = 90° + \dfrac{m\angle P}{2}$

Del $\triangle EPF$: $x = 90° + \dfrac{58°}{2}$

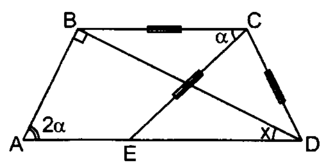
$\therefore$ $x = 119°$

6. En la figura: BC = CE = CD, hallar el valor de α.



Resolución:

Como CE = CB = CD, entonces, por la propiedad demostrada:



$m\angle EDB = \dfrac{m\angle BCE}{2} \Rightarrow x = \dfrac{\alpha}{2}$

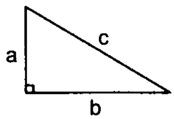
$2\alpha + x = 90°$

$\therefore$ En el $\triangle ABD$: $2\alpha + \dfrac{\alpha}{2} = 90° \Rightarrow \alpha = 36°$

7. El perímetro de un triángulo rectángulo es 18. Calcular el mínimo valor entero para la longitud de la hipotenusa.

Resolución:

Sea el triángulo rectángulo, con los lados mostrados.



Dato: $a + b + c = 18 \Rightarrow a + b = 18 - c$ ...(1)

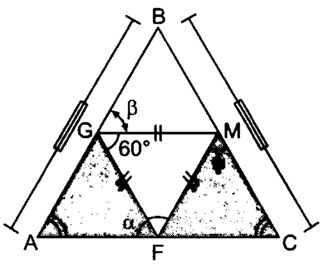
Se debe cumplir: $c > a \wedge c > b$ ...(2)

Sumando miembro a miembro las expresiones en (2):
$2c > a + b$
Con lo obtenido en (1):
$2c > 18 - c \Rightarrow 3c > 18 \Rightarrow c > 6$
Luego, el mínimo valor entero de $c = 7$

8. Se tiene el triángulo isósceles ABC (AB = BC). Se toman los puntos G, M y F en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, tal que el triángulo FMG es equilátero. Si: $m\angle GFA = \alpha$, $m\angle BGM = \beta$ y $m\angle FMC = \phi$,

Demostrar que: $\alpha = \dfrac{\beta + \phi}{2}$.

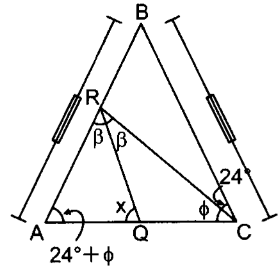
Resolución:



$\triangle ABC$: $AB = BC$ $\therefore m\angle A = m\angle C$
Con el teorema del ángulo externo:
$\triangle FAG \Rightarrow m\angle A + \alpha = \beta + 60°$ ...(1)
$\triangle FMC \Rightarrow m\angle C + \phi = \alpha + 60°$ ...(2)
Efectuando (1) − (2):
$(m\angle A + \alpha) - (m\angle C + \phi) = (\beta + 60°) - (\alpha + 60°)$
Siendo: $m\angle A = m\angle C \Rightarrow \alpha - \phi = \beta - \alpha$.
De donde: $\alpha = \dfrac{\beta + \phi}{2}$

9. En un triángulo ABC, AB = BC, $\overline{CR}$ es una ceviana interior, tal que $m\angle RCB = 24°$. La bisectriz del ángulo ARC corta a $\overline{AC}$ en el punto Q. Hallar la medida del ángulo AQR.

Resolución:

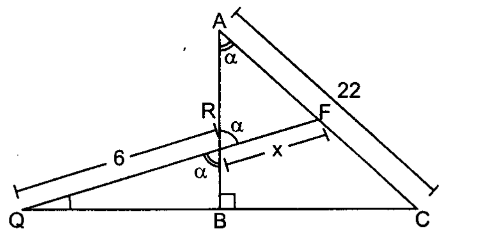


Incógnita: $m\angle AQR = x$
Sean: $m\angle QRC = m\angle ARQ = \beta$ y $m\angle QCR = \phi$
$\triangle ABC$, isósceles: $m\angle A = m\angle ACB = 24° + \phi$
En el $\triangle QRC$, por el teorema del ángulo externo:
$\beta + \phi = x$ ...(1)

Suma de las medidas de los ángulos del $\triangle ARQ$:
$\beta + (24° + \phi) + x = 180°$
$\beta + \phi + x = 156°$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1): $x + x = 156°$
$\therefore x = 78°$

10. En un triángulo ABC, recto en B, AC = 22; sobre $\overline{AC}$ se forma el punto F y en la prolongación de $\overline{CB}$, el punto Q, $\overline{FQ}$ corta a $\overline{AB}$ en R. Hallar RF, si $m\angle QRB = m\angle A$ y QR = 6.

Resolución:



Incógnita: $RF = x$
Del dato: $m\angle QRB = m\angle A = \alpha \Rightarrow \angle ARF = \angle QRB = \alpha$
El $\triangle ARF$ es isósceles.
Entonces: $AF = RF \Rightarrow AF = x$

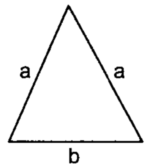
$$\left.\begin{array}{l}\text{En el } \triangle QBR\text{: } m\angle Q = 90° - \alpha \\ \text{y en } \triangle ABC\text{: } m\angle C = 90° - \alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} m\angle Q = m\angle C \\ \triangle QFC \text{ isósceles}\end{array}$$

Luego, $FC = FQ \Rightarrow FC = x + 6$
Finalmente, como: $AF + FC = AC$
$\Rightarrow x + (x + 6) = 22$
De donde: $x = 8$ $\therefore RF = 8$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos triángulos isósceles existen de perímetro 18 y lados enteros?

Resolución:



Por dato: $2a + b = 18 \Rightarrow 2a = 18 - b$ ...(1)

Por teorema: $b < 2a$ ...(2)

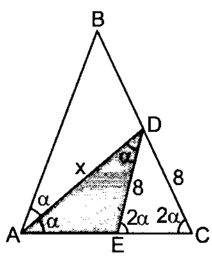
(1) en (2): $b < 18 - b \Rightarrow b < 9$

Para: $b = 8 \Rightarrow a = 5$
$b = 4 \Rightarrow a = 7$
$b = 2 \Rightarrow a = 8$

$\therefore$ Existen 3 triángulos isósceles.

2. En un triángulo isósceles ABC ($\overline{AB} \cong \overline{BC}$) se traza la bisectriz interior AD ($D \in \overline{BC}$). Si CD = 8, hallar la mayor longitud entera de $\overline{AD}$:

Resolución:

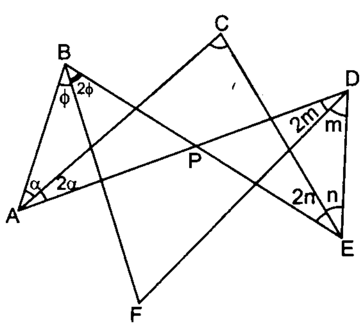


$\triangle EDC$ es isósceles: $DE = DC = 8$

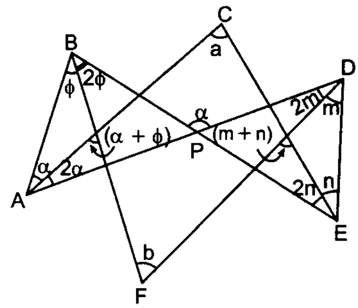
$\triangle AED$ es isósceles: $AE = ED = 8$

Por teorema: $x < 16 \Rightarrow x_{máx} = 15$

3. En la figura mostrada, se cumple que:
$m\angle ACE + m\angle BFD = w$, hallar la $m\angle BPD$:



Resolución:



Por dato: $a + b = w$

Por propiedad:
$a + b = \alpha + \phi + m + n$ ...(1)

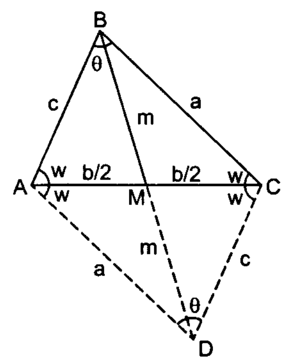
Por otro lado: $x = 3(\alpha + \phi) \wedge x = 3(m + n)$

Sumando:
$2x = 3(\alpha + \phi + m + n)$ ...(2)

De (1) en (2):
$2x = 3w \Rightarrow x = \dfrac{3w}{2}$

4. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$. Si $AC < 2BM$ y la medida del ángulo ABC es el mayor valor entero posible, calcular dicha medida.

Resolución:



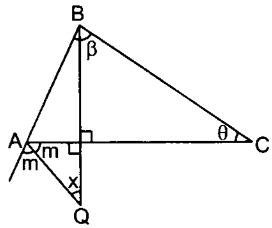
Si: $b < 2m \Rightarrow \dfrac{b}{2} < m \Rightarrow \theta < w$

El cuadrilátero ABCD es un romboide, donde los ángulos A y C son obtusos. Ahora, si θ toma el máximo valor posible, entonces w toma el mínimo valor entero posible, es decir, $w = 91°$.

Luego: $\theta + 91° = 180° \Rightarrow \theta = 89°$

5. En un triángulo ABC se cumple: $m\angle ABC + m\angle ACB = 100°$. Calcular la medida del ángulo agudo que determinan la altura y la bisectriz exterior trazadas desde el vértice A.

Resolución:



Dato: $\beta + \theta = 100°$ ...(1)

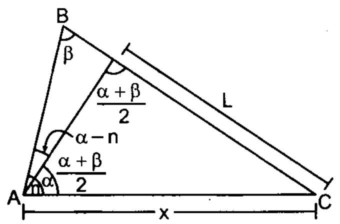
$\triangle ABC$: $2m = \beta + \theta$ ...(2)

(1) en (2): $2m = 100° \Rightarrow m = 50° \Rightarrow x = 40°$

6. En el lado BC de un triángulo ABC se tiene el punto D, tal que se verifica:

$m\angle CDA = \dfrac{m\angle BAC + m\angle ABC}{2}$ y CD = L. Calcular la longitud del lado AC.

Resolución:



$\triangle ABD$: $\alpha - n + \beta = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \Rightarrow n = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$

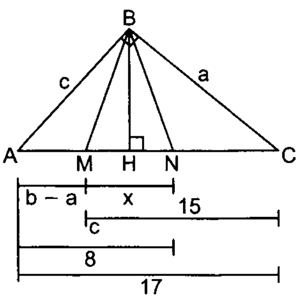
$\triangle ADC$ es isósceles: AC = DC

$\therefore\ x = L$

7. En un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura BH. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersecan a la hipotenusa en los puntos M y N.

Si AB + BC − AC = k; calcular MN.

Resolución:



Dato: $c + a - b = x$ ...(1)

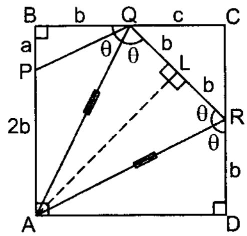
De la figura:

$b - a + x = c \Rightarrow x = c + a - b$ ...(2)

De (1) y (2): $x = k$

8. En un cuadrado ABCD, en los lados AB; BC y CD se ubican los puntos P, Q y R de modo que APQR es un trapecio isósceles. Si AQ = AR, calcular $\dfrac{PB + BQ}{QC}$

Resolución:



Piden: $\dfrac{a+b}{c}$

$\triangle ABD \cong \triangle ADR \Rightarrow BQ = RD = b$

$BQ = QL = b$, $LR = RD = b$ (T. de la bisectriz)

□ APQR: trapecio isósceles

$\Rightarrow AP = QR = 2b$

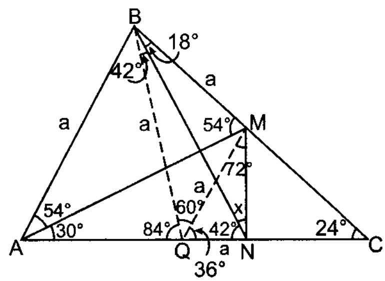
$AB = BC \Rightarrow 2b + a = b + c$

$\Rightarrow b + a = c$

$\therefore\ \dfrac{a+b}{c} = 1$

9. En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, tal que: $m\angle MAC = 30°$; $m\angle ACB = 24°$; $m\angle MAB = 54°$ y $m\angle MBN = 18°$. Hallar la $m\angle MNB$.

Resolución:



$\triangle ABQ$ isósceles: AB = BQ = a

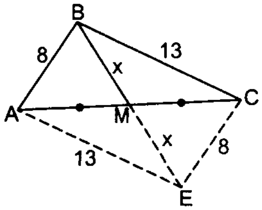
$\triangle QBM$ equilátero: QB = BM = QM = a

$\triangle QMN$ isósceles: QM = QN = a

$\Rightarrow x + 42° = 72° \Rightarrow x = 30°$

10. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$. Si AB = 8 y BC = 13, hallar la mayor longitud entera de la mediana $\overline{BM}$.

Resolución:



Si BM = ME = x ⇒ EC = AB = 8

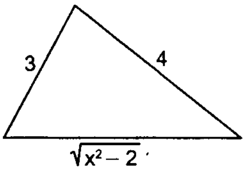
△BCE; por teorema de la desigualdad triangular:

$13 - 8 < 2x < 13 + 8 \Rightarrow 5 < 2x < 21$

$2,5 < x < 10,5 \Rightarrow x_{\text{máx. entero}} = 10$

11. En un triángulo escaleno sus lados miden 4; 3 y $\sqrt{x^2 - 2}$. ¿Cuántos valores enteros tiene x?

Resolución:



Por teorema: $1 < \sqrt{x^2 - 2} < 7$

$1 < x^2 - 2 \wedge x^2 - 2 < 49$

$\Rightarrow 3 < x^2 \wedge x^2 < 51$

$\Rightarrow \sqrt{3} < x \wedge x < \sqrt{51}$

$\Rightarrow 1,73 < x \wedge x < 7,14$

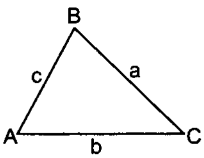
$\Rightarrow 1,73 < x < 7,14$

Valores enteros de x = {2; 3; 4; 5; 6; 7}

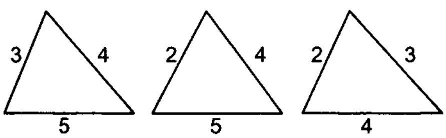
Por lo tanto, x tiene 6 valores enteros.

12. ¿Cuál es el número de triángulos escalenos, tal que las longitudes de sus lados son números enteros y su perímetro es menor que 13?

Resolución:



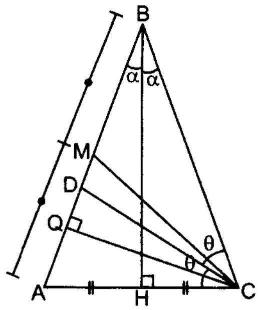
Por condición: a, b y c son números enteros. Además, a + b + c < 13. Se pide el número de triángulos escalenos. Los triángulos escalenos de perímetro menor que 13 son:



Cumplen con la condición solo 3 triángulos.

13. Hallar el número de rectas distintas que contienen a las alturas, medianas y bisectrices de los ángulos interiores de un triángulo isósceles no equilátero.

Resolución:



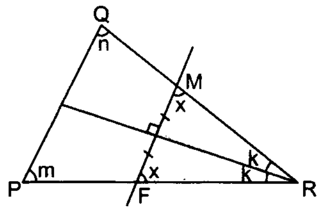
Por el vértice A y C pasan 6 líneas notables.

Por el vértice B pasan 3 lineas notables.

Luego, el número de líneas distintas son 6 + 3 = 9.

14. En un triángulo PQR, se traza la bisectriz interior RT, se ubica el punto M en $\overline{QR}$ y por dicho punto se traza una recta perpendicular a la bisectriz. La recta interseca al lado $\overline{RP}$ en el punto F. Si m∠RPQ + m∠RQP = θ; calcule la m∠RMF.

Resolución:



Por dato: m + n = θ

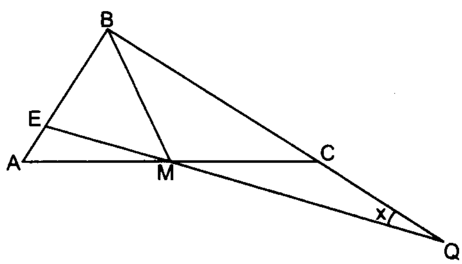
Del △FMR: 2x + 2k = 180° ...(1)

Del △PQR: m + n + 2k = 180° ...(2)

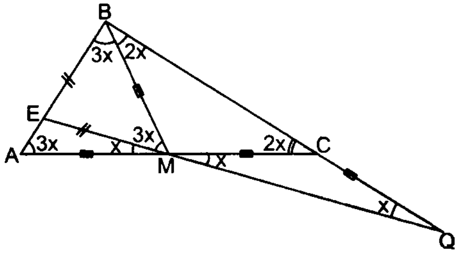
(1) = (2): 2x + 2k = m + n + 2k

$\therefore 2x = \theta \Rightarrow x = \dfrac{\theta}{2}$

15. Hallar el valor de x, si AM = BM = MC = CQ y BE = EM



Resolución:



Haciendo uso de los triángulos isósceles y el teorema del ángulo externo:

$\triangle MCQ \Rightarrow m\angle CMQ = m\angle Q = x$

y $m\angle MCB \Rightarrow x + x = 2x$ ($\angle$ externo)

Además: $m\angle AME = m\angle CMQ = x$ (opuestos por el vértice)

$\triangle MBC \Rightarrow m\angle MBC = m\angle MCB = 2x$ ($\triangle$ isósceles)

$\triangle MBQ \Rightarrow m\angle EMB = m\angle MBQ + m\angle Q$, ($\angle$ externo)

$m\angle EMB = 2x + x \Rightarrow m\angle EMB = 3x$

$\triangle BEM$, isósceles: $m\angle EBM = m\angle EMB = 3x$

Finalmente, en el $\triangle AMB$:

isósceles: $m\angle A = m\angle ABM = 3x$

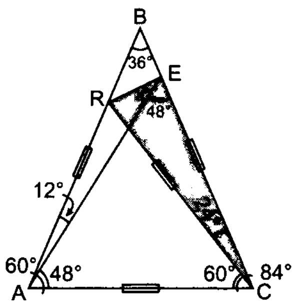
$\Rightarrow m\angle A + m\angle ABM + m\angle AMB = 180°$

$3x + 3x + 4x = 180°$

$\therefore\ x = 18°$

16. En un triángulo ABC, $m\angle B = 36°$ y $m\angle C = 84°$. $\overline{AE}$ y $\overline{CR}$ son cevianas internas, $AR = AC$ y $m\angle BAE = 12°$. Cuánto mide el ángulo AER.

Resolución:



Incógnita: $m\angle AER = x$

Del $\triangle ABC$: $m\angle A = 180° - (36° + 84°)$

$\Rightarrow m\angle A = 60°$

Como $AR = AC$, el $\triangle ARC$ es equilátero

$\Rightarrow RC = AR = AC$ y $m\angle ACR = 60° \Rightarrow m\angle RCE = 24°$

Entonces:

En el $\triangle AEC$, $m\angle CAE = 48°$ y $m\angle ACE = 84°$

Luego: $m\angle AEC = 180° - (48° + 84°) = 48°$

Resulta: $m\angle EAC = m\angle AEC \Rightarrow \triangle ACE$, isósceles: $EC = AC$.

Finalmente, $\triangle RCE$, isósceles:

$\Rightarrow m\angle ERC = m\angle REC = x + 48°$

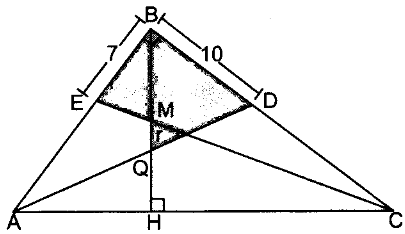
$m\angle ERC + m\angle REC + m\angle RCE = 180°$

$(x + 48°) + (x + 48°) + 24° = 180°$

$\therefore\ x = 30°$

17. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, la cual es cortada en los puntos Q y M por las bisectrices interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$, respectivamente. Hallar MQ, si $BE = 7$ y $BD = 10$.

Resolución:



Incógnita: MQ

Sabemos, por el problema n.° 7, que el $\triangle QBD$ es isósceles, entonces: $BQ = 10$.

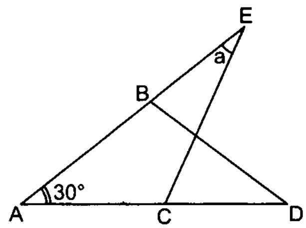
Análogamente, el $\triangle EBM$ también es isósceles

$\Rightarrow BM = 7$

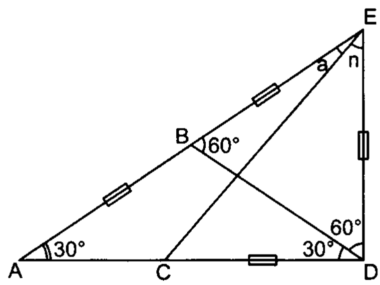
Entonces: $MQ = BQ - BM$

$MQ = 10 - 7 \quad \therefore\ MQ = 3$

18. Hallar "a", si: $AB = BE = BD = CD$



Resolución:



$\triangle ABD$, isósceles: $m\angle ADB = 30°$ y $m\angle DBE = 60°$

Trazamos $\overline{ED}$. Luego el $\triangle EBD$ es equilátero.

$\Rightarrow ED = BE = BD$ y $m\angle BDE = 60°$

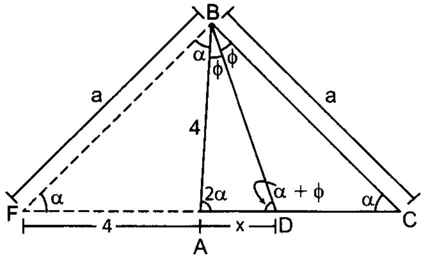
$\triangle CDE$, resulta isósceles y recto en D: $n = 45°$

Finalmente en E: $a + n = 60°$

$\Rightarrow a + 45° = 60° \quad \therefore\ a = 15°$

19. En un triángulo ABC, $AB = 4$ y $m\angle A = 2(m\angle C)$, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Hallar $\overline{AD}$, sabiendo que $\overline{BC}$ toma su máximo valor entero.

Resolución:



Si m∠C = α ⇒ m∠A = 2α

Sean las longitudes: BC = a y AD = x

Prolongamos $\overline{CA}$ hasta F, de modo que m∠F = m∠C

⇒ ΔFAB es isósceles: FA = AB = 4

ΔFBC es isósceles: FB = BC = a

En el ΔFAB ⇒ FB < AF + AB ⇒ a < 4 + 4

⇒ a < 8

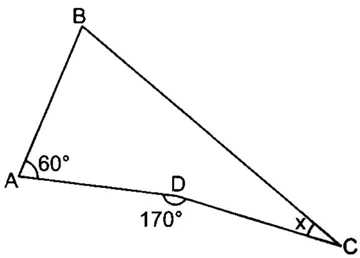
El máximo valor entero de "a" es 7.

Por ser ángulo externo del ΔBDC: m∠ADB = α + ϕ

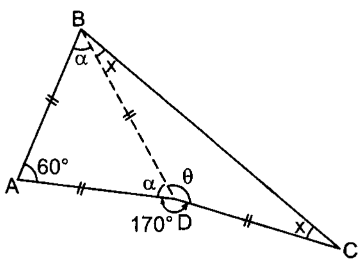
Finalmente, en el ΔFBD, isósceles, FD = FB

x + 4 = a ⇒ x + 4 = 7 ∴ x = 3

20. En la figura, AB = AD = DC, calcular el valor de x.



Resolución:



Como AB = AD y m∠A = 60°, se concluye que el ΔABD es equilátero.

Luego: BD = AB = AD ⇒ BD = DC y α = 60°

En D: α + θ + 170° = 360°

60° + θ + 170° = 360° ⇒ θ = 130°

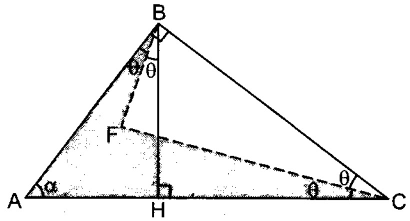
Finalmente, en el ΔBDC isósceles:

2x + θ = 180° ⇒ 2x + 130° = 180°

∴ x = 25°

21. En un ΔABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular la medida del ángulo determinado por las bisectrices de los ángulos ABH y C.

Resolución:



Debemos calcular la medida del ángulo BFC.

Sabemos, por teorema para los triángulos rectángulos, que m∠ABH = m∠ACB

En ∡: m∠BFC = θ + m∠A + θ

⇒ m∠BFC = m∠A + 2θ. ...(1)

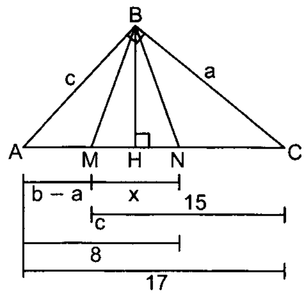
Pero, en el ΔABC: m∠A + m∠ACB = 90°

⇒ m∠A + 2θ = 90° ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): m∠BFC = 90°

22. En un ΔABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y luego las bisectrices de los ángulos ABH y HBC que intersecan en los puntos E y F a $\overline{AH}$ y $\overline{HC}$, respectivamente. Calcular EF, si AB = 8; BC = 15 y AC = 17.

Resolución:



Incógnita: EF = x

Por el problema anterior: ΔABF es isósceles.

Luego, AF = AB = 8.

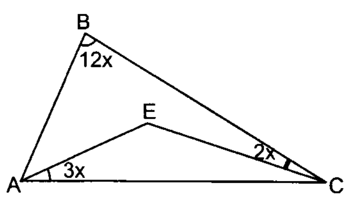
En forma análoga, se demuestra que el ΔEBC es isósceles, entonces EC = BC = 15

Como: AC = AE + EC

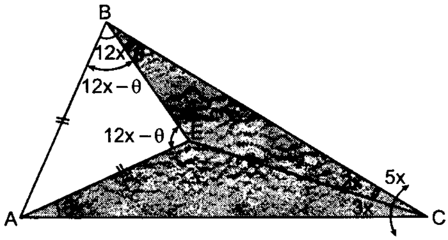
Tendremos: 17 = (8 − x) + 15 ⇒ x = 6

∴ EF = 6

23. En la figura: AB = AE = EC. Determinar el valor de x.



Resolución:



Llamemos θ a la medida del ∠EBC

Como los triángulos EAB y AEC son isósceles,

obtenemos: $\begin{cases} m\angle ABE = 12x - \theta = m\angle AEB \text{ y} \\ m\angle ACE = m\angle EAC = 3x \end{cases}$

En el ⦣ ACBE: $12x - \theta = 3x + 5x + \theta$

$\Rightarrow \theta = 2x$

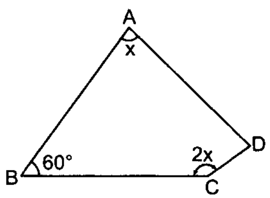
El hecho de que: $\theta = 2x$, implica que el △CEB sea isósceles.

$EB = EC \Rightarrow EB = AB = AE$

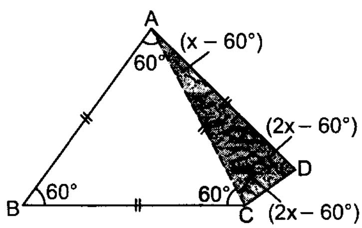
Entonces, el △AEB es equilátero

$\Rightarrow 12x - \theta = 60° \Rightarrow 10x = 60° \quad \therefore\ x = 6°$

24. En la figura, AB = AD = BC, calcular el valor de x.



Resolución:



Incógnita: x

Trazando $\overline{AC}$:

△ABC, equilátero ⇒ AC = AB = BC

y m∠BAC = m∠BCA = 60°

De lo anterior: AC = AD

m∠CAD = x − 60° y m∠ACD = 2x − 60°

△CAD ⇒ isósceles: m∠ADC = m∠ACD

⇒ m∠ADC = 2x − 60°

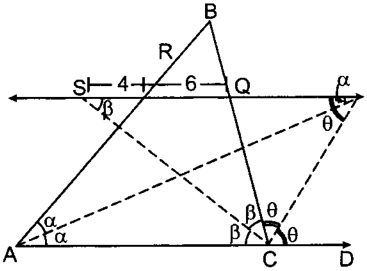
Luego:

$(x - 60°) + (2x - 60°) + (2x - 60°) = 180°$

$\therefore\ x = 72°$

25. En un △ABC, las bisectrices del ángulo interior A y exterior C se intersecan en el punto P, por el cual se traza una paralela a $\overline{AC}$ intersecando a $\overline{BC}$ en Q, a $\overline{AB}$ en R y a la bisectriz del ángulo ACB en el punto S. Calcular $\overline{AR}$, si SR = 4 y RQ = 6.

Resolución:



Incógnita: $\overline{AR}$

Del gráfico, por ser ángulos alternos internos entre paralelas:

∠S ≅ ∠ACS; ∠QPC ≅ ∠PCD y ∠QPA ≅ ∠PAC

△SAC es isósceles: CQ = SQ = 10

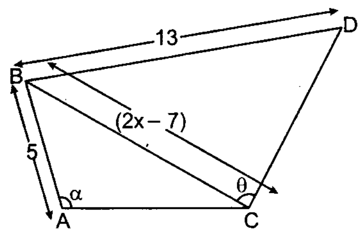
△CQP es isósceles: QP = CQ = 10 ...(1)

Entonces, △ARP es isósceles ⇒ AR = RP

Es decir: AR = RQ + QP

Del dato y de (1): AR = 6 + 10 ⇒ AR = 16

26. En la figura, α y θ son ángulos obtusos, calcular la suma de valores enteros que puede tomar x.



Resolución:

En todo triángulo no equilátero, a mayor ángulo se opone mayor lado y como un triángulo no puede tener más de un ángulo obtuso:

△ABC: BC > AB ⇒ 2x − 7 > 5 ⇒ x > 6

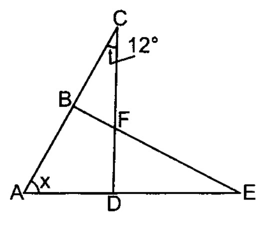
△BCD: BD > BC ⇒ 13 > 2x − 7 ⇒ 10 > x

Es decir, x debe ser mayor que 6 pero menor que 10.

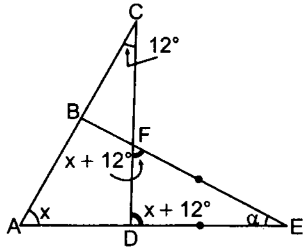
Entonces, x ∈ {7; 8; 9} son los valores enteros.

Por lo tanto, la suma: 7 + 8 + 9 = 24

27. En la figura AB < BE y EF = ED, determinar los valores enteros mínimo y máximo que puede tomar x. Dar como respuesta la suma de dichos valores.



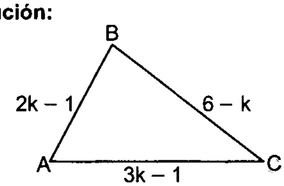
Resolución:



Del gráfico: $\triangle ACD$, teorema del ángulo externo:
$m\angle CDE = x + 12°$
$\triangle FED$, isósceles: $m\angle DFE = m\angle FDE = x + 12°$
Además, $\alpha + 2(x + 12°) = 180° \Rightarrow \alpha = 156° - 2x$ ...(I)
Por dato: $AB < BE$. Luego, en el $\triangle ABE$: a menor lado se opone menor ángulo.
Entonces, con lo de (I)
$\alpha < x$
$156° - 2x < x \Rightarrow 156° < 3x \Rightarrow 52° < x$ ...(II)
De otro lado, como el $\triangle FED$ es isósceles, cada uno de sus ángulos congruentes debe medir menos que 90°. Es decir, $x + 12° < 90°$, de donde
$x < 78°$ ...(III)
De (II) y (III), los valores enteros, mínimo y máximo, son: $x_{mínimo} = 53°$ y $x_{máximo} = 77°$
Se pide la suma $53° + 77° = 130°$

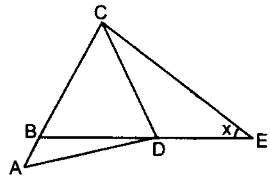
28. Las longitudes de los lados de un triángulo se expresan, en cm, por: $(2k - 1)$; $(3k - 1)$ y $(6 - k)$, donde k es un número entero. Calcular el perímetro de dicho triángulo.

Resolución:

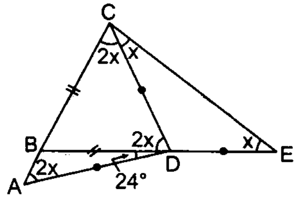


Consideremos el $\triangle ABC$. El perímetro P:
$P = AB + BC + AC \Rightarrow P = (2k - 1) + (3k - 1) + (6 - k)$
De donde: $P = 4k + 4$ ...(1)
Determinemos el valor de k que según el dato, debe ser entero.
Por el teorema de desigualdad entre los lados:
$BC - AB < AC < BC + AB$ ...(*)
Es decir, por una parte:
$BC - AB < AC \Rightarrow (6 - k) - (2k - 1) < (3k - 1)$
$\Rightarrow 7 - 3k < 3k - 1$
esto es: $8 < 6k \Rightarrow \frac{4}{3} < k$ ...(2)
También de (*): $AC < BC + AB$
$\Rightarrow (3k - 1) < (6 - k) + (2k - 1)$
Luego: $2k < 6 \Rightarrow k < 3$ ...(3)
Observando (2) y (3), como $4/3 = 1{,}3$ aproximadamente, concluimos que el único valor entero de k es 2.
Finalmente, con este valor en (1): $P = 4(2) + 4$
$\therefore P = 12$.

29. En la figura: $AD = CD = DE \wedge BC = BD$
Calcular el valor de x, si $m\angle ADB = 24°$.

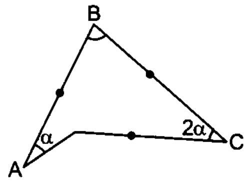


Resolución:

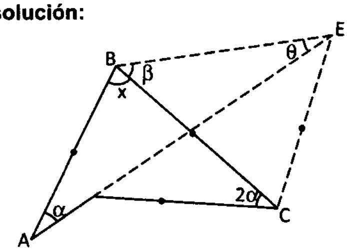


Tenemos: $\triangle CDE$, isósceles $\Rightarrow m\angle DCE = m\angle E = x$
Además, por ser ángulo externo:
$m\angle BDC = x + x = 2x$
Por otro lado, $\triangle CBD$ es isósceles
$\Rightarrow m\angle BCD = m\angle BDC = 2x$
El $\triangle ADC$, también isósceles; $m\angle A = m\angle ACD = 2x$
Finalmente, sumando las medidas de ángulos interiores del $\triangle ACD$:
$2x + 2x + (2x + 24°) = 180° \quad \therefore x = 26°$

30. En la figura, demostrar para el cuadrilátero no convexo ABCD, que si $AB = BC = CD$ y $m\angle C = 2(m\angle A) = 2\alpha$, entonces $x = 120° - 2\alpha$.



Resolución:

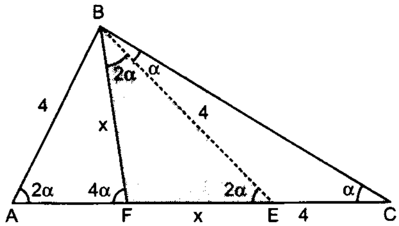


Prolongamos $\overline{AD}$ y trazamos $\overline{CE}$, de modo que: $CE = CD$, para obtener el $\triangle DCE$ es isósceles.
Por propiedad demostrada en el problema anterior, como $CD = CB = CE$, entonces $\theta = \frac{2\alpha}{2} \Rightarrow \theta = \alpha$.
Entonces, como $\theta = \alpha$, el $\triangle ABE$ es isósceles: $BE = AB$.
Esto último indica que $BE = BC = EC$, resultando equilátero el $\triangle BEC$. Luego, $\beta = 60°$.
Finalmente, en el $\triangle ABE$: $x + \beta + \alpha + \theta = 180°$
$\Rightarrow x + 60° + \alpha + \alpha = 180° \quad \therefore x = 120° - 2\alpha$

31. En un triángulo ABC se traza la ceviana BF, tal que $AB = 4(m\angle A) = 2(m\angle C)$; $m\angle FBC = 3m\angle C$. Halle la longitud de BF, si es un número entero.

Resolución:

Piden: x_{entero}:



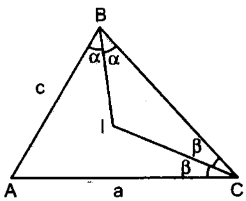
ΔABE: isósceles $\Rightarrow AB = BE = 4$
ΔBFE: isósceles $\Rightarrow FE = x$
ΔBFE: (existencia) $4 < x + x \Rightarrow 2 < x$ ...(1)
ΔABF: (correspondencia) $x < 4$ ...(2)
De (1) y (2): $2 < x < 4$ $\therefore x_{entero} = 3$

32. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

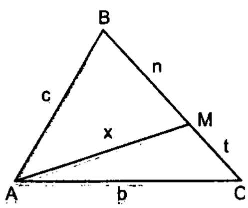
I. En un ΔABC se cumple que $AB > AC$, las bisectrices interiores de los ángulos B y C, se intersectan en el punto I. Entonces $IB > IC$.
II. M es un punto cualquiera del BC de un triángulo ABC, entonces $AM < p$; siendo p el semiperímetro del triángulo.
III. La suma de las longitudes de las tres medianas de un triángulo está comprendida entre el perímetro y el semiperímetro del triángulo.

Resolución:

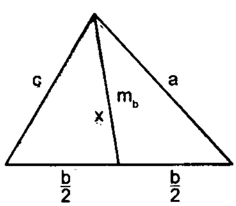
I) Como: $c > a$
$\Rightarrow 2\beta > 2\alpha$
Como: $\beta > \alpha$
$\Rightarrow IB > IC$
Verdadero



II) ΔABM:
$x < c + n$ ...(1)
ΔAMC:
$x < b + t$ ...(2)
(1) + (2): $2x < 2p$
$\Rightarrow x < p$
Verdadero



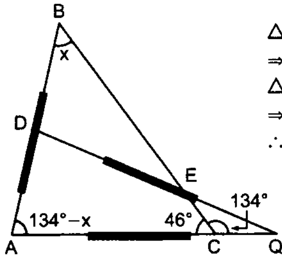
III) $m_b < a + b/2$
$m_b < c + b/2$
$\therefore m_b < p$
$m_a + m_b + m_c < 3p$
Falso



$\therefore$ VVF

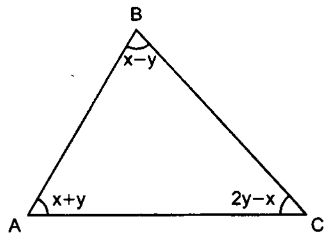
33. En un triángulo ABC, en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica un punto Q a partir del cual se traza el rayo secante que interseca a $\overline{BC}$ en E y $\overline{AB}$ en D. Halle la $m\angle ABC$, siendo entero y $m\angle BCQ = 134°$.
Dato: $AQ = AB = QD$.

Resolución:



ΔAQD: $134° - x < 90°$
$\Rightarrow 44° < x$
ΔABC: $x < 46°$
$\Rightarrow 44° < x < 46°$
$\therefore x_{entero} = 45°$

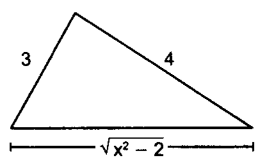
34. Los ángulos de un triángulo ABC miden:
$m\angle A = x + y$; $m\angle B = x - y$; $m\angle C = 2y - x$.
¿Cuál es el mínimo valor de y?



Resolución:

Piden: $y_{mín\ ent.}$
$x + y + x - y + 2y - x = 180°$
$x + 2y = 180°$ ...(1)
$2y - x > 0 \Rightarrow 2y > x$ ...(2)
(2) en (1): $2y > 180° - 2y$
$4y > 180° \Rightarrow y > 45°$
$\therefore y_{mín\ ent.} = 46°$

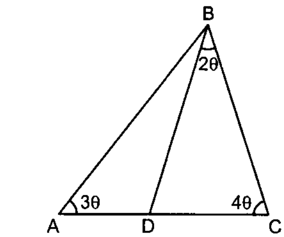
35. En un triángulo escaleno sus lados miden 4; 3 y $\sqrt{x^2 - 2}$ ¿cuántos valores enteros tiene x.



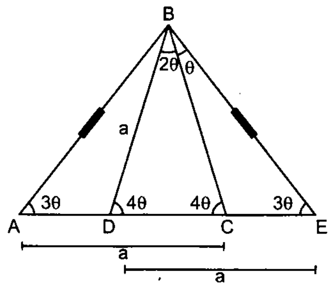
Resolución:

Por existencia: $4 - 3 < \sqrt{x^2 - 2} < 3 + 4$
$1 \sqrt{x^2 - 2} < 7$
$1 < x^2 - 2 < 49$
$3 < x^2 < 51 \Rightarrow \sqrt{3} < x < \sqrt{51}$
$\Rightarrow 1,73 < x < 7,14$
$\Rightarrow x = 2; 3; 4; 5; 6$ y 7
Por lo tanto, x puede tomar 6 valores enteros.

36. En la figura: BD = AC. Calcular: θ



Resolución:



Trazamos la ceviana exterior $\overline{BE}$ (E en la prolongación de $\overline{AC}$) con la condición:

$m\angle CBE = \theta \Rightarrow m\angle CEB = 3\theta$

En el triángulo isósceles ABE: AB = BE

En el triángulo isósceles BDE: BD = DE = a

$\triangle BAC \cong \triangle BED$ (LAL)

$\Rightarrow m\angle BDE = m\angle BCA = 4\theta$

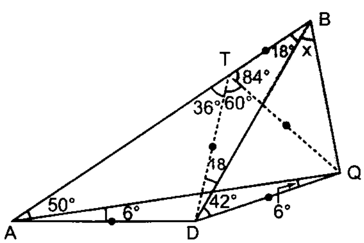
En el $\triangle DBE$: $4\theta + 3\theta + 3\theta = 180°$

$\therefore\ \theta = 18°$

37. En un triángulo ABD, se ubica un punto exterior Q relativo al lado $\overline{BD}$, tal que: AD = DQ; $m\angle BAQ = 30°$; $m\angle ABD = 18°$ y $m\angle BDQ = 42°$. Hallar $m\angle DBQ$.

Resolución:

Piden: x



$\triangle ADT$: isósceles $\Rightarrow$ AD = DT

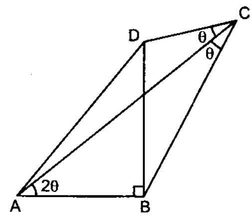
$\triangle BTD$: isósceles $\Rightarrow$ TB = TD

$\triangle DTQ$: equilátero $\Rightarrow$ DT – TQ = DQ

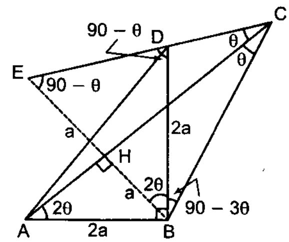
$\triangle QTB$: isósceles $\Rightarrow$ $18° + x = 48°$

$\therefore\ x = 30°$

38. Calcular θ, si BA = BD.



Resolución:



Trazamos $\overline{DE}$ perpendicular en H a $\overline{AC}$ (E en la prolongación de $\overline{CD}$), luego el triángulo ECD es isósceles, donde:

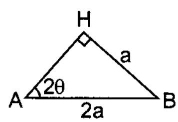
$m\angle CED = m\angle EDC = 90° - \theta$

Además: $m\angle EBD = 2\theta$ y EH = HB

En el $\triangle EBD$: $m\angle DEB = m\angle EDB = 90° - \theta$

$\Rightarrow$ EB = BD = 2a $\wedge$ BH = HE = a

En el ⊿AHB:



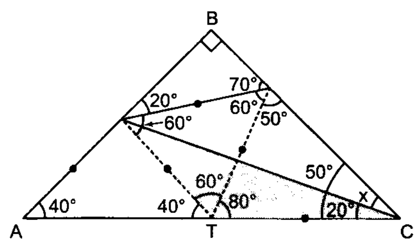
$2\theta = 30°$

$\therefore\ \theta = 15°$

39. En un triángulo rectángulo ABC ($m\angle B = 90°$) se trazan las cevianas $\overline{CP}$ y $\overline{PQ}$ ($Q \in \overline{BC}$). Si AP = PQ; $m\angle A = 40°$; $m\angle PQB = 70°$

Hallar: $m\angle PCB$

Resolución:



$\triangle APT$: isósceles $\Rightarrow$ AP = PT $\wedge$ $m\angle APT = 60°$

$\triangle PTQ$: equilátero $\Rightarrow$ PT = PQ = TQ

$\Rightarrow m\angle QTC = 80°$

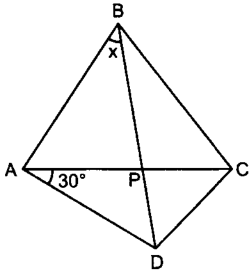
$\triangle QTC$: isósceles $\Rightarrow$ QT = TC

$\triangle PTC$: isósceles $\Rightarrow$ $m\angle TPC = m\angle PCT = 20°$

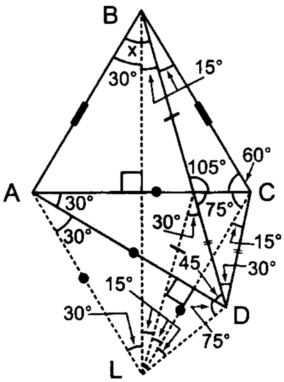
$\therefore\ m\angle PCB = x = 30°$

40. En la figura: AB = BC

AC = AD y PD = CD. Calcular: x



Resolución:



En el triángulo isósceles CAD: m∠C = m∠D = 75°
En el triángulo isósceles PDC:
m∠CPD = m∠PCD = 75° y m∠PDC = 30°, además: m∠ADP = 45°

Construimos el triángulo equilátero ALC, luego:
AC=AL=CL;m∠DAL=30°;m∠ACL=m∠ALC=60°.
Además, el triángulo CDL es isósceles, donde:
m∠LCD = m∠DLC = 15°

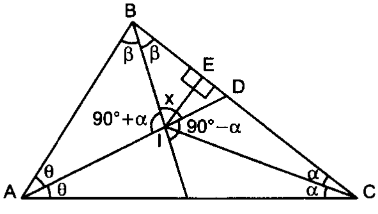
En el triángulo isósceles PDL:
m∠LPD = m∠PLD = 30° y m∠PLC = 15°

$\overline{BL}$ es mediatriz de $\overline{AC}$; ya que B y L equidistan de A y C, luego: m∠ALB = 30° y m∠BLP = 15°

ΔBCP ≅ ΔLPC (LAL) ⇒ BC = CL y en consecuencia AB = BC = AC, esto significa que el triángulo ABC es equilátero, donde:
m∠ABL = m∠LBC = 30° ∴ x = 45°

41. En un triángulo ABC, el punto I es el incentro, el punto D es el punto de intersección de la prolongación de $\overline{AI}$ con el lado BC, $\overline{IE}$ es la perpendicular trazada del punto I al lado BC. La medida del ángulo BID es igual a la:

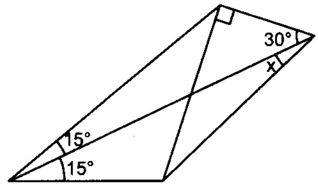
Resolución:



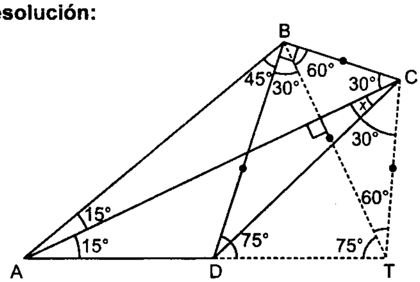
prop.: $m\angle BIA = 90° + \dfrac{2\alpha}{2} = 90° + \alpha$

$\Rightarrow x = 90° - \alpha, \quad \therefore x = m\angle EIC$

42. Calcular x.



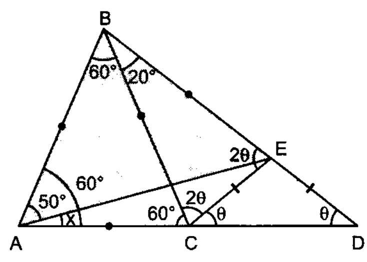
Resolución:



En el ΔABC: m∠ABD = 45°; trazamos $\overline{BT}$ Perpendicular a $\overline{AC}$ (T en la prolongación de $\overline{AD}$), luego: m∠ATB = m∠ABT = 75° y $\overline{AC}$ es mediatriz de BT de lo cual resulta que el ΔBCT es equilátero donde:
BC = TC = BT y m∠TBC = m∠BTC = 60°
El triángulo DBT es isósceles ⇒ DB = BT
El triángulo DBC es isósceles
⇒ m∠BCD = 30° + x = 45° ∴ x = 15°

43. En un triángulo ABD se trazan las cevianas $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$, tal que AB = BE = AC, CE = ED y m∠BAC = 60°. Hallar m∠EAC.

Resolución:

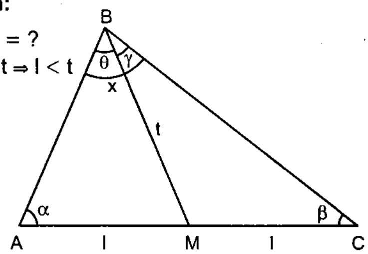


ΔABC: Δequilátero ⇒ AB = BC = AC
Se nota: 60° + 2θ + θ = 180° ⇒ θ = 40°
ΔCBE: m∠CBE = 20°
ΔABE: isósceles:
⇒ m∠BAE = m∠BEA = 50°
∴ x = 10°

44. En un triángulo ABC se traza la mediana BM. Si AC < 2BM y la medida del ángulo ABC es el mayor valor entero posible, calcule dicha medida.

Resolución:

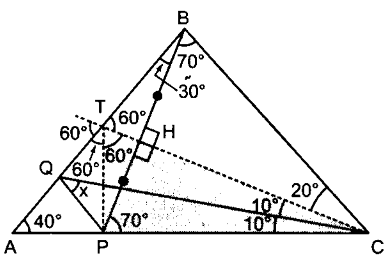
Pide $x_{máx.\ ent.}$ = ?
Dato: $2l < 2t \Rightarrow l < t$



$\triangle ABM$: (correspondencia) $\Rightarrow \theta < \alpha$ ...(1)
$\triangle BMC$: (correspondencia) $\Rightarrow \gamma < \beta$ ...(2)
(1) + (2): $x < \alpha + \beta \Rightarrow x < 180° - x$
$\Rightarrow x < 90° \quad \therefore x_{máx\ ent.} = 89°$

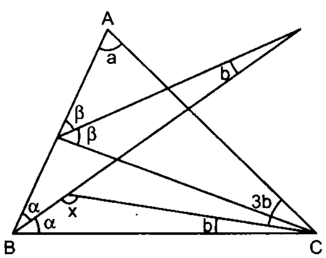
45. En un triángulo ABC isósceles, la m∠ABC = 100°, se traza las cevianas BP y CQ ($P \in \overline{AC}$ y $Q \in \overline{AB}$) tal que: m∠ABP = m∠BCQ = 30°. Calcule la m∠CQP

Resolución:



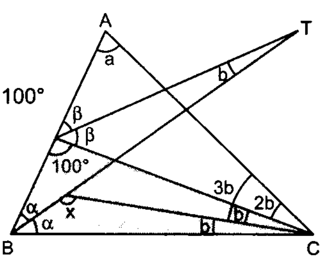
$\overline{CT} \perp \overline{PB} \Rightarrow BH = HP$
Q: excentro del $\triangle PTC$
$x = \frac{1}{2}(m\angle PTC) \quad \therefore x = 30°$

46. En la figura se cumple a + 2b = 100°, halle el valor de x.



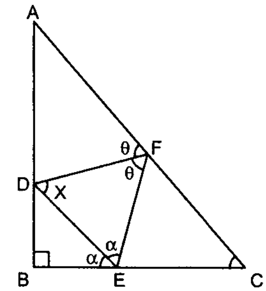
Resolución:

Piden x;
dato:
a + 2b = 100°

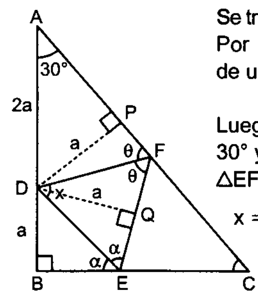


$\triangle BPC$(prop.:) $m\angle PTB = \frac{1}{2}(m\angle PCB)$
$\Rightarrow m\angle PCB = 2b$
$m\angle BPC = a + 2b = 100°$
$\triangle BPC$ (prop.): $x = 90° + \frac{100}{2} \quad \therefore x = 140°$

47. En la figura: AD = 2(DB). Calcular x



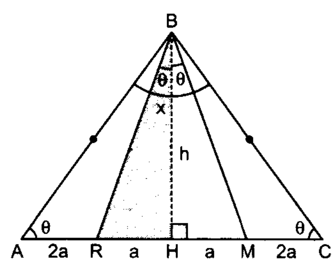
Resolución:



Se trazan $\overline{DQ} \perp \overline{EF} \wedge \overline{DP} \perp \overline{AC}$
Por teorema de la bisectriz de un ángulo: DB = DQ = a
DQ = DP = a
Luego: ⊾DPA es notable de 30° y 60°
$\triangle EFC$: por propiedad:
$x = 90 - \frac{60}{2} \Rightarrow x = 60°$

48. En el triángulo ABC isósceles (AB = BC) los puntos R y M pertenecen a $\overline{AC}$, tal que AR = RM = MC. Si la m∠RBM = 2(m∠A). Entonces la m∠ABC es:

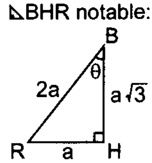
Resolución:



⊾AHB ~ ⊾BHR

$\frac{h}{a} = \frac{3a}{h} \Rightarrow h^2 = 3a^2 \Rightarrow h = a\sqrt{3}$

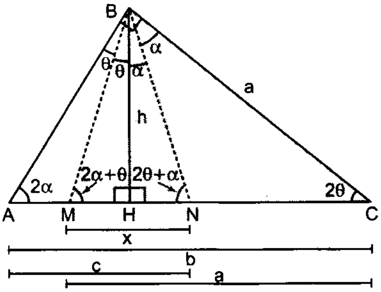
⊾BHR notable:



$\Rightarrow \theta = 30°$
Luego:
m∠ABC = x = 120°

49. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Las bisectrices de los ángulos ABH y HBC intersecan a la hipotenusa en los puntos M y N. Si AB + BC − AC = k; calcule MN.

Resolución:



Piden: MN = x

Dato: a + c − b = k

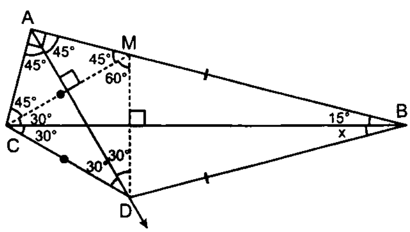
△BAN: isósceles ⇒ BA = AN = c

△BCM: isósceles ⇒ BC = MC = a

⇒ c − x + a = b ⇒ x = a + c − b ∴ x = k

50. Dado el triángulo rectángulo ABC, recto en A; m∠B = 15°, sobre la bisectriz del ángulo A se ubica el punto D, exterior al triángulo, de modo que m∠BCD = 30°. Calcular la m∠CBD.

Resolución:



⊾CAB: m∠ACB = 75° ∧ △ADC: m∠ADC = 30°

Trazamos $\overline{CM}$ perpendicular a $\overline{AD}$ (M en $\overline{AB}$), resultando el triángulo rectángulo isósceles CAM donde: $\overline{AD}$ es mediatriz de $\overline{CM}$.

Por el teorema de la mediatriz:

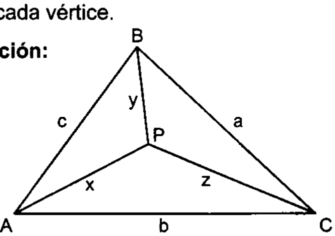
DC = DM ⇒ m∠MCD = 60°

△MCD es equilátero, donde: CM = CD = MD.

△CMB ≅ △CDB (LAL) ∴ x = 15°

51. El perímetro de un triángulo ABC es 2p, se ubica un punto interior P, entre que valores estará comprendido S, siendo S la suma de las distancias de P a cada vértice.

Resolución:



Por teorema: x + y < a + b ...(1)

x + z < a + c ...(2)

y + z < b + c ...(3)

Sumando: (1) + (2) + (3)

$$2(x + y + z) < 2\underbrace{(a + b + c)}_{2p}$$

⇒ x + y + z < 2p ...(α)

Por el postulado de mínima distancia:

a < y + z

b < x + z

c < x + y

Sumando: $\underbrace{a + b + c}_{2p} < 2(x + y + z)$

p < x + y + z ...(θ)

De (α) y (θ): $p < \underbrace{x + y + z}_{S} < 2p$

∴ p < S < 2p

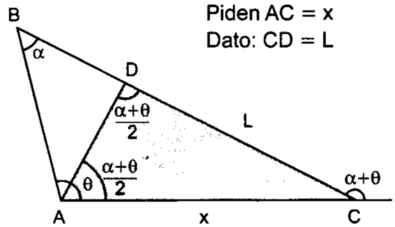
52. En el lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto D, tal que se verifica:

$m\angle CDA = \dfrac{m\angle BAC + m\angle ABC}{2}$ y CD = L. Calcule la longitud del lado AC.

Resolución:

Piden AC = x

Dato: CD = L

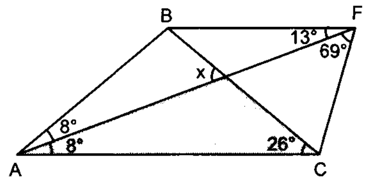


Por ángulo externo: $m\angle DAC = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$

⇒ △DCA: isósceles ∴ x = L

53. En un triángulo ABC, F es un punto exterior relativo a $\overline{BC}$, tal que $\overline{AF}$ es bisectriz, m∠BAC = 16°; m∠BFA = 13° y m∠AFC = 69°. Halle la medida del menor ángulo determinado por $\overline{BC}$ y $\overline{AF}$.

Resolución:



Como: $\overrightarrow{AF}$: bisectriz y $m\angle BFC = 82° = 90° - \dfrac{16}{2}$

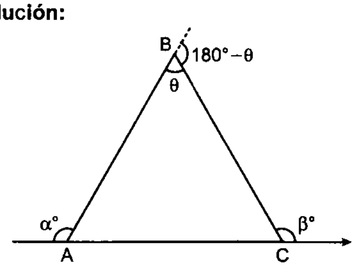
⇒ F: es el excentro del △ABC

⇒ $m\angle BFA = \dfrac{1}{2} m\angle BCA$

⇒ m∠BCA = 26° ∴ x = 26° + 8° = 34°

54. Si la diferencia de las medidas de dos ángulos exteriores de un triángulo es igual al complemento de la medida del ángulo interior ubicado en el tercer vértice. Calcular la medida de un ángulo interior del triángulo.

Resolución:



Dato: $\alpha - \beta = 90° - \theta$ ...(1)

Además: $\alpha + \beta + 180° - \theta = 360°$

De donde: $\alpha + \beta = 180° + \theta$ ...(2)

Sumando las expresiones (1) y (2):

$\alpha - \beta + \alpha + \beta = 270° - \theta + \theta$

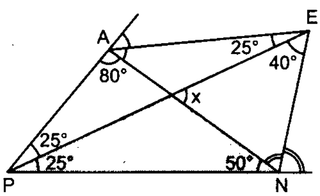
$2\alpha = 270° \Rightarrow \alpha = 135°$

Por lo tanto, un ángulo interior del triángulo ABC medirá: $m\angle A = 45°$

55. En un triángulo PAN, E es excentro relativo a $\overline{AN}$, $m\angle AEP = 25°$ y $m\angle PEN = 40°$

Halle la medida del ángulo que determina $\overline{AN}$ y $\overline{PE}$.

Resolución:



Prop.: $m\angle AEP = \frac{1}{2}(m\angle ANP) \Rightarrow m\angle ANP = 50°$

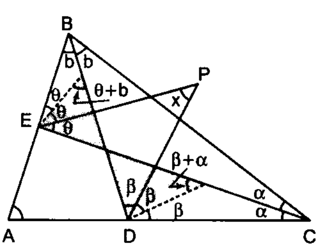
$m\angle PEN = \frac{1}{2}(m\angle PAN) \Rightarrow m\angle PAN = 80°$

$\Rightarrow m\angle APE = m\angle NPE = 25° \quad \therefore\ x = 75°$

56. En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{BD}$ y $\overline{CE}$, luego los rayos DP y EP, tal que: $m\angle BEP = 2(m\angle PEC)$; $m\angle CDP = 2(m\angle PDB)$.

Si $m\angle BAC = W°$, calcule la $m\angle EPD$.

Resolución:



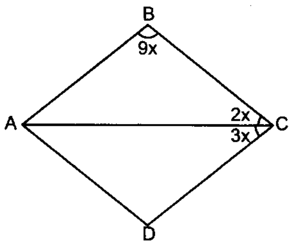
Propiedad: $x = \dfrac{\theta + b + \beta + \alpha}{2}$ ...(1)

$$\begin{array}{ll} \triangle EBC: & 3\theta + 2b + \alpha = 180° \\ \triangle DBC: & 3\beta + b + 2\alpha = 180° \\ \hline & 3(\theta + b + \beta + \alpha) = 360° \end{array} \Bigg\} (+)$$

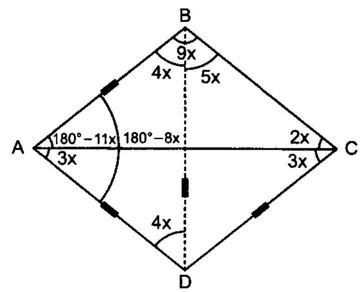
$\Rightarrow \theta + b + \beta + \alpha = 120°$

En (1): $x = 60°$

57. Calcular x, si AB = AD = DC.



Resolución:



En el triángulo isósceles ADC:

$m\angle CAD = m\angle ACD = 3x$

En el $\triangle ABC$: $m\angle BAC = 180 - 11x$

En el triángulo isósceles BAD:

$m\angle ABD = m\angle ADB = 4x \Rightarrow m\angle DBC = 5x$

En el triángulo isósceles BDC: BD = DC

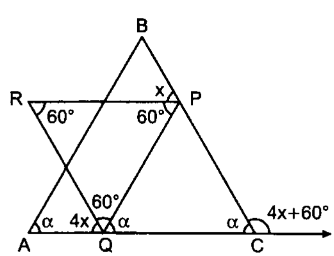
El triángulo ABD es equilátero entonces:

$\therefore\ 4x = 60° \Rightarrow x = 15°$

58. Sobre los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubican los puntos Q y P respectivamente y en el exterior relativo a $\overline{AB}$ se ubica el punto R, tal que $\overline{PQ}$ // $\overline{AB}$ y el triángulo QPR es equilátero.

Calcular la $m\angle BPR$, si $m\angle RQA = 4(m\angle RPB)$

Resolución:



En el triángulo isósceles ABC:
$m\angle A = m\angle C = \alpha$

Si $m\angle RPB = x \Rightarrow m\angle RQA = 4x$

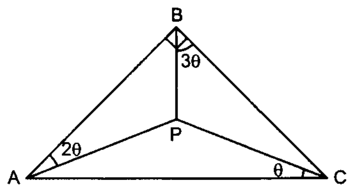
El triángulo PQR es equilátero, entonces:
$m\angle PQR = m\angle RPQ = 60$

Como $\overline{PQ} \parallel \overline{AB} \Rightarrow m\angle PQC = \alpha$

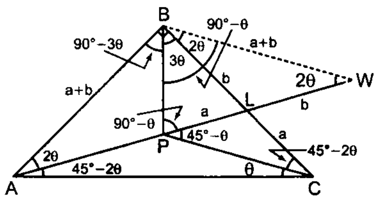
En el triángulo isósceles QPC;
el ángulo exterior PCM mide: $4x + 60°$

Luego:
$(4x + 60°) + (x + 60°) + (4x + 60°) = 360°$
$\therefore\ x = 20°$

59. En la figura: AB = BC. Calcular: θ



Resolución:



En el ⊾ABC: $m\angle A = m\angle C = 45°$

De donde:
$m\angle PAC = 45° - 2\theta$ y $m\angle PCB = 45° - \theta$

Además: $m\angle ABP = 90° - 3\theta$

Prolongamos $\overline{AP}$ hasta W de modo que:
$m\angle AQB = 2\theta$

Como: $m\angle LPC = 45° - \theta$,
entonces el triángulo PLC es isósceles.

Hacemos: PL = LC = a y BL = b

Entonces: AB = BC = a + b

En el triángulo isósceles ABW:
AB = BW = a + b

En el $\triangle$BWP: $m\angle PBW = 90° - \theta$,
Luego este es isósceles $\Rightarrow$ BW = PW = a + b

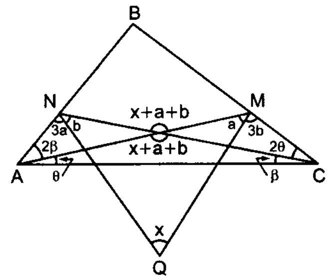
Por lo cual: LW = b

En $\triangle$BLW es isósceles $\Rightarrow m\angle LBW = 2\theta$

En el vértice B: $3\theta + 2\theta = 90° - \theta \Rightarrow \theta = 15°$

60. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, las prolongaciones de las cevianas trazadas desde M y N en los triángulos AMC y ANC se intersecan en Q, tal que $m\angle MCN = 2(m\angle MAC)$, $m\angle NAM = 2(m\angle ACN)$; $m\angle ANQ = 3(m\angle AMQ)$ y $m\angle QMC = 3(m\angle QNC)$. Calcule la $m\angle MQN$.

Resolución:



$x + a + b + \theta + \beta = 180°$

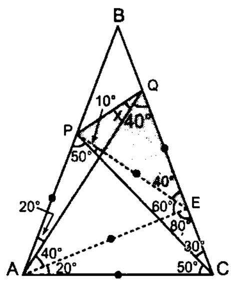
$$\left.\begin{array}{l}\triangle ANC:\ 3\beta + 3a + \theta + b = 180° \\ \triangle AMC:\ 3\theta + \beta + 3b + a = 180°\end{array}\right\}(+)$$

$$4(a + b + \theta + \beta) = 360°$$

$a + b + \theta + \beta = 90° \quad \therefore\ x = 90°$

61. Se tiene el triángulo ABC, sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, la $m\angle PCA = 50°$, la $m\angle BCP = 30°$, la $m\angle BAQ = 20°$, la $m\angle QAC = 60°$. Halle la $m\angle PQA$.

Resolución:



Se traza AE de modo que la $m\angle EAC = 20°$

$\triangle$AEC isósceles AE = AC

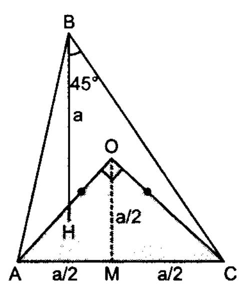
Pero como: $m\angle PAE = 60°$
$\Rightarrow$ $\triangle$APE es equilátero

Finalmente el $\triangle$PQE es isósceles.

En $\triangle$PQE: $x + 40° = 70°$
$\therefore\ x = 30°$

62. En un triángulo ABC, la $m\angle ABC = 45°$. La distancia del vértice B al ortocentro mide "a". Halle la longitud del lado $\overline{AC}$.

Resolución:



Se cumple la siguiente propiedad:

$OM = \frac{BH}{2} \Rightarrow OM = \frac{a}{2}$

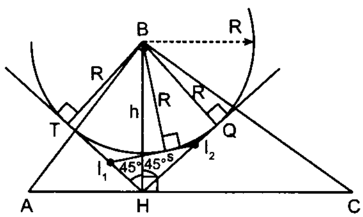
También:
$m\angle AOC = 2(m\angle B)$

Por dato: $m\angle B = 45°$
$\Rightarrow m\angle AOC = 90°$

⊾AOC isósceles:
OM = AM = MC = a/2
$\therefore$ AC = a

63. Dado un triángulo rectángulo ABC, recto en B; se traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa; sean I_1, I_2, los incentros de los ⊾BHA y ⊾BHC; BH = h. Halle el radio de la circunferencia exinscrita al triángulo I_1HI_2, relativa al lado $\overline{I_1I_2}$.

Resolución:



En la figura se cumple: BT = BS = BQ = R

⇒ B es centro de la circunferencia

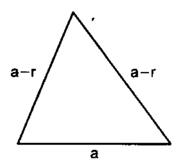
Ahora como la m∠THQ = 90°

⇒ TBQH es un cuadrado, donde:

$\therefore\ h = R\sqrt{2}\ \Rightarrow\ R = \dfrac{h\sqrt{2}}{2}$

64. Las medidas de los lados de un triángulo forman una progresión aritmética de razón "r" ($r \in \mathbb{Z}^+$). Calcular el mínimo valor entero que puede asumir el perímetro del triángulo.

Resolución:



Sean las medidas de los lados del triángulo:

$a - r;\ a;\ a + r$

Luego, su perímetro será: $2p = 3a$ ...(1)

Empleando el teorema de desigualdad triangular:

$(a + r) - (a - r) < a < a - r + a + r$

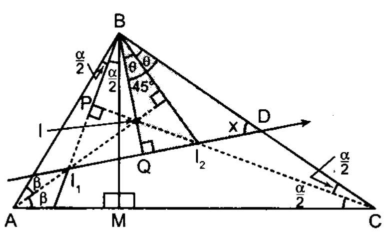
De donde: $2r < a \Rightarrow 6r < 3a$ ...(2)

De (1) y (2): $6r < 2p$

$\therefore\ 2p_{(mín)} = 6r + 1$

65. En un triángulo ABC, recto en B (AB < BC), se traza la altura BH. Los puntos I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos ABH y HBC. La recta que pasa por los incentros interseca al cateto BC en el punto D. Si m∠BCA = α, calcule la m∠BDI

Resolución:



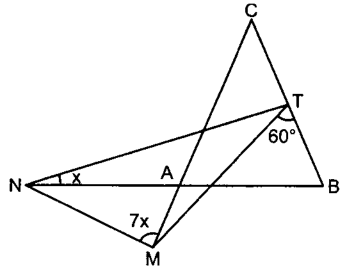
Como: $\alpha + 2\theta = 90° \Rightarrow$ m∠BMA = m∠BMC = 90°

I: incentro del △ABC ⇒ m∠IBC = 45°

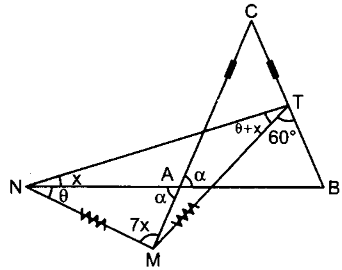
I: ortocentro del $\triangle I_1BI_2$ $\therefore\ x = 45°$

66. En la figura: AC = CB ∧ MN = MT

Calcular: x



Resolución:



En el triángulo isósceles ABC:

Sea: m∠CAB = m∠CBA = α

m∠ANM = θ

En el triángulo isósceles NMT:

m∠TNM = m∠NTM = θ + x

En el △NTB: $x + \theta + x + 60° + \alpha = 180°$

$\Rightarrow\ 2x + \alpha + \theta = 120°$ ...(1)

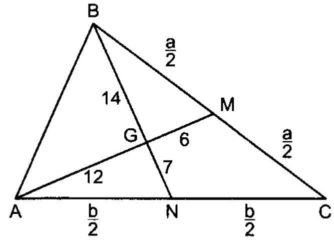
En el △NAM: $\alpha + \theta + 7x = 180°$ ...(2)

Restando las expresiones (2) − (1):

$5x = 60°\quad \therefore\ x = 12°$

67. En un triángulo ABC las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ miden 18 y 21. Calcule el mayor perímetro entero del triángulo ABC.

Resolución:



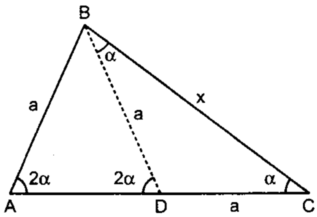
△BGM: (exist.) $\dfrac{a}{2} < 20 \Rightarrow a < 40$

△AGN (exist.) $\dfrac{b}{2} < 19 \Rightarrow b < 38$

△AGB (exist.) $\Rightarrow\ c < 26$

$\Rightarrow a + b + c < 104 \Rightarrow 2p < 104\quad \therefore\ 2p_{máx.} = 103$

68. En un triángulo ABC; m∠A = 2(m∠C). Si AB = a (a∈ℤ). Calcular la diferencia entre el máximo y mínimo valor entero de $\overline{BC}$.



Resolución:

Hacemos: m∠C = α ⇒ m∠A = 2α

Luego, en el △ABC, como

m∠C < m∠A ⇒ a < x ...(1)

Trazamos la ceviana interior $\overline{BD}$ con la condición:

m∠DBC = α

Luego: AB = BD = DC = a

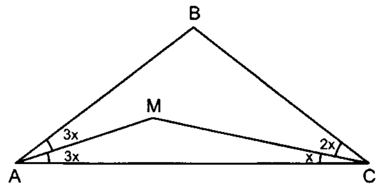
En el △BDC: x < 2a ...(2)

De (1) y (2): a < x < 2a

Como a ∈ ℤ ⇒ $x_{mín} = a + 1$ ∧ $x_{máx} = 2a - 1$

∴ $x_{máx.} - x_{mín} = 2a - 1 - a - 1 = a - 2$

69. En la figura, si MC = BC, halle x



Resolución:

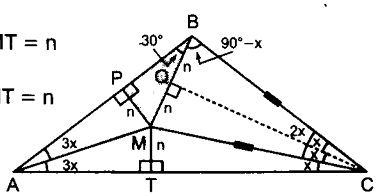
△BCM: isósceles ⇒ BQ = QM = n

T. bisectriz

⇒ QM = MT = n

T. bisectriz

⇒ MP = MT = n

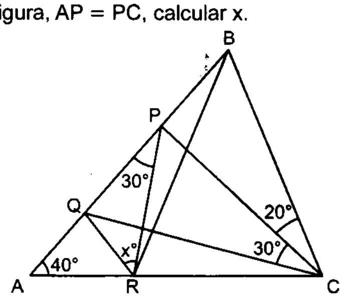


⊿MPB (30° y 60°) ⇒ m∠PBM = 30°

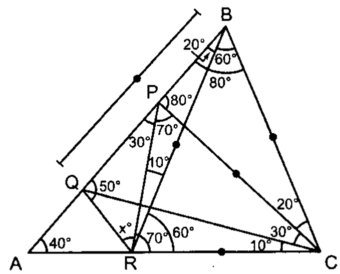
△ABC: 6x + 30° + 90° − x + 3x = 180°

8x = 60° ∴ x = 7,5°

70. En la figura, AP = PC, calcular x.



Resolución:



En el triángulo isósceles APC:

m∠PAC = m∠PCA = 40°

m∠ACQ = 10° y m∠PQC = 50°

Por ángulo exterior en el △APC: m∠BPC = 80°

En el △PCB:

m∠PBC = 80° ⇒ PC = BC

En el triángulo isósceles QBC: BQ = BC

En el vértice P: m∠RPC = 70°

En el △RCP:

m∠PRC = 70° ⇒ PC = RC

El triángulo BCR es equilátero, luego:

m∠RBC = m∠BRC = 60°; m∠QBR = 20°

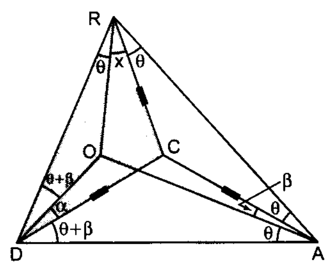
En el triángulo isósceles QBR

x + 10° = 80° ⇒ x = 70°

71. En un triángulo acutángulo DRA, O es ortocentro y C circuncentro. Halle la m∠ORC, si:

m∠ODC + m∠OAC = 38°

Resolución:



Dato: α + β = 38°

△RCA: isósceles

⇒ m∠CRA = m∠RAC = θ

Prop.: m∠DRQ = m∠CRA = θ

m∠OAR = m∠DAO = θ

△DCA: isósceles

⇒ m∠CDA = θ + β

Prop.: m∠RDO = θ + β

△RCD: isósceles

⇒ θ + x = θ + β + α

⇒ x = β + α ∴ x = 38°

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2010 - II)

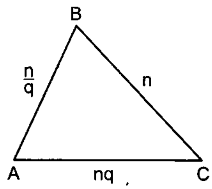
La longitud de los lados de un triángulo forman una progresión geométrica de razón q > 1. Entonces q toma los valores:

A) $q > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ B) $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

C) $1 < q < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ D) $\frac{1+\sqrt{5}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{6}}{2}$

E) $\frac{1+\sqrt{6}}{2} < q < \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

Resolución:



Las longitudes de los lados del △ABC están en progresión geométrica de razón q > 0. Por existencia de triángulos:

$n - \frac{n}{q} < nq < \frac{n}{q} + n$

De: $nq < \frac{n}{q} + n$

$\Rightarrow q^2 - q - 1 < 0 \Rightarrow \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0 \Rightarrow \left(q - \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{5}{4}$

$\Rightarrow -\sqrt{\frac{5}{4}} < q - \frac{1}{2} < \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

Clave: B

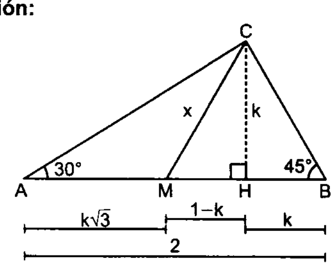
PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

En un triángulo ABC, el lado $\overline{AB}$ mide 2 cm, m∠A = 30° y m∠B = 45°. Calcule la longitud (en cm) de la mediana relativa al lado $\overline{AB}$.

A) $\sqrt{11-6\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{11-5\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{11-4\sqrt{3}}$

D) $\sqrt{11-3\sqrt{3}}$ E) $\sqrt{11-2\sqrt{3}}$

Resolución:



$k\sqrt{3} + k = 2 \Rightarrow k = \sqrt{3} - 1$

⊾MHC: T. Pitágoras

$x^2 = (1-k)^2 + k^2 \Rightarrow x = \sqrt{2k^2 - 2k + 1}$

$x = \sqrt{11 - 6\sqrt{3}}$

Clave: A

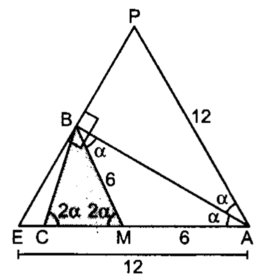
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

En un triángulo ABC se tiene que m∠C = 2(m∠A). Sobre el lado $\overline{AB}$ se traza el triángulo ABP recto en B (P exterior a $\overline{AB}$).

Si m∠PAB = $\frac{1}{2}$m∠C y AP = 12, determine el valor de $\overline{BC}$.

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 8

Resolución:



Piden: x

Se prolongan $\overline{PB}$ y $\overline{AC}$

△EAP isósceles: EA = AP = 12

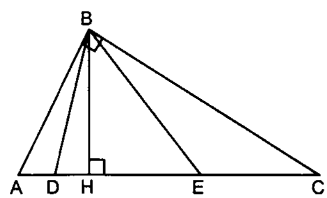
⊾EBA: mediana BM = 6 ⇒ △CBM isósceles

∴ x = 6

Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

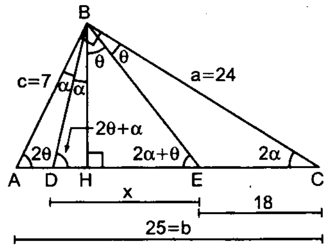
En la figura, el triángulo ABC recto en B, $\overline{BH}$ es la altura, $\overline{BD}$ es la bisectriz del ángulo ABH y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo HBC. Si AB = 7 y BC = 24, calcule el valor del segmento DE.



A) 4 B) 5 C) 6

D) 8 E) 9

Resolución:



Piden: x

$\triangle ABE$: isósceles:

$AB = AE = 7 \Rightarrow EC = 18$

$\triangle BCD$: isósceles:

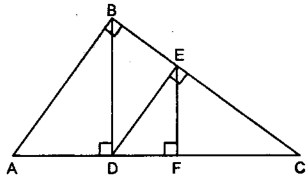
$BC = DC = 24 \Rightarrow x + 18 = 24$

$\therefore\ x = 6$

Clave: C

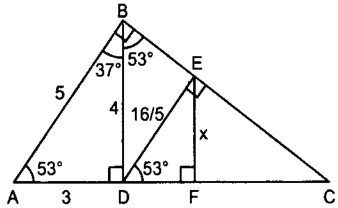
PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

En la figura se muestra el triángulo rectángulo ABC recto en B. Si AB = 5 cm y AD = 3 cm, entonces la medida (en cm) del segmento EF es:



A) 2,14 B) 2,16 C) 2,25
D) 2,56 E) 2,82

Resolución:



Piden: x

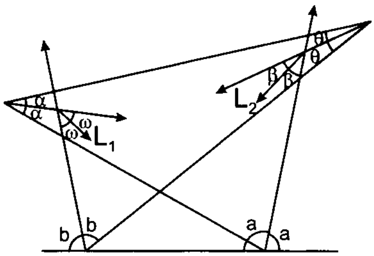
$\triangle$BED (53° y 37°) $\Rightarrow$ $DE = \dfrac{16}{5}$

$\triangle$DFE (53° y 37°) $\therefore\ x = \dfrac{64}{25} = 2,56$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Según el gráfico, calcular el ángulo formado por las rectas L_1 y L_2.

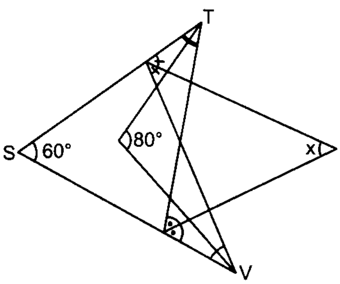


A) 80° B) 120° C) 90°
D) 45° E) 60°

2. ¿Cuántos triángulos existen con lados de longitudes enteras de 40 cm de perímetro?

A) 33 B) 22 C) 25
D) 24 E) 34

3. Según el gráfico, calcular x.



A) 60° B) 70° C) 40°
D) 20° E) 30°

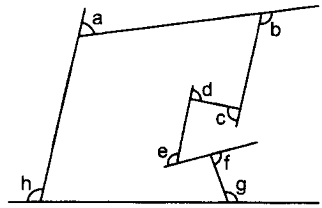
4. En un cuadrilátero convexo ABCD m∠BAD = 50°, m∠ADC = 140° y AD = DC = BC, si las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se intersecan en P, calcular la m∠BPA.

A) 60° o 30° B) 60° o 20° C) 40° o 20°
D) 60° o 40° E) 20° o 30°

5. En un triángulo isósceles ABC, de base AC, la m∠ABC = 80°; se ubica un punto P de su altura AH que equidista de A y B. Calcular la m∠PCA.

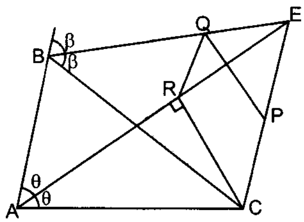
A) 25° B) 30° C) 20°
D) 16° E) 37°

6. Según la figura, calcular a + b + c − d − e + f + g + h



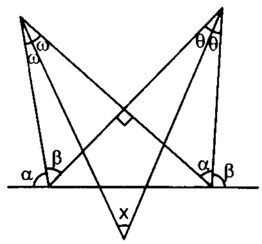
A) 540° B) 720° C) 360°
D) 180° E) 270°

7. En el gráfico, calcular el máximo valor entero de QR, si CP = PQ = PE; AB = 4 y AC = 5.



A) 3 B) 1 C) 2 D) 4 E) 6

8. Según el gráfico, calcular x.



A) 67°30' B) 60° C) 71°30'
D) 75° E) 30°

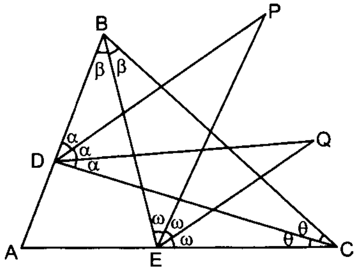
9. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se traza la ceviana interior AM, tal que AM = AC. Calcular la diferencia del valor máximo y mínimo, entero que puede tomar la medida del ángulo AMC.

A) 26° B) 28° C) 32° D) 61° E) 89°

10. En un triángulo acutángulo ABC se traza las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ que intersecan a $\overline{BC}$ en M y N respectivamente; calcular la medida del ángulo determinado por la bisectriz del ángulo ANM y la recta perpendicular a $\overline{AM}$, si m∠ABC + m∠ACB = 115° y m∠NAM + m∠AMN = 110°.

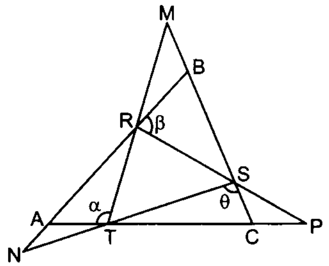
A) 10° B) 22°30' C) 5°30'
D) 5° E) 7°30'

11. Según el gráfico, $m\angle ABC + m\angle ACB = 100°$, calcular la suma de las medidas de los ángulos DPE y DQE.



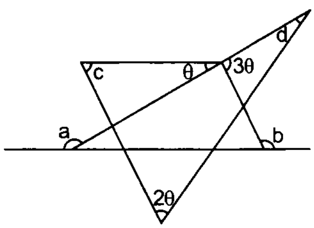
A) 75° B) 25° C) 15°
D) 30° E) 50°

12. Según el gráfico, AN = AT, BM = BR y CS = CP, calcular $\alpha + \beta + \theta$.



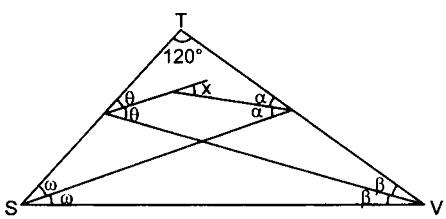
A) 360° B) 270° C) 135°
D) 180° E) 300°

13. Según el gráfico, $a + b + c + d = 420°$, calcular θ.



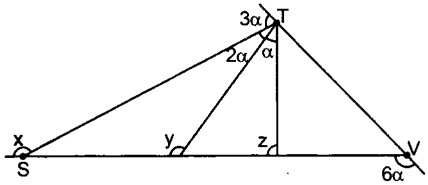
A) 25° B) 15° C) 10°
D) 18° E) 20°

14. Según el gráfico, calcular x.



A) 15° B) 6° C) 9°
D) 12° E) 18°

15. Calcular el máximo valor entero de α.
Si $x + y + z > 300°$.



A) 22° B) 23° C) 24°
D) 25° E) 26°

16. En un $\triangle ABC$ equilátero se ubica el punto D exterior al triángulo, tal que el segmento $\overline{BD}$ interseca al lado $\overline{AC}$. Si $m\angle ADC > 90°$, AD = 8 cm y CD = 15 cm.
Calcular el menor perímetro entero del $\triangle ABC$.

A) 52 cm B) 24 cm C) 22 cm
D) 46 cm E) 48 cm

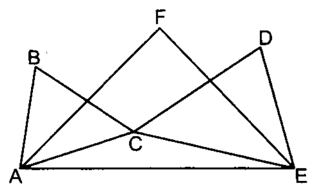
17. Sea el $\triangle ABC$, en el cual se cumple que $m\angle ABC = 64°$, $m\angle ACB = 72°$, $\overrightarrow{BM}$ y $\overrightarrow{CP}$ son bisectrices de los ángulos ABC y ACB respectivamente; dichas bisectrices se intersecan en el punto I (incentro). Además, se traza la altura $\overline{BH}$. Calcular la medida de los ángulos BIC y MBH.

A) 112° y 16° B) 120° y 12° C) 11° y 14°
D) 110° y 12° E) 112° y 14°

18. Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B. En $\overline{BC}$ se ubica el punto M, tal que BM = MC = 2 y $m\angle BCA = 2(m\angle BAM)$. Calcular AC.

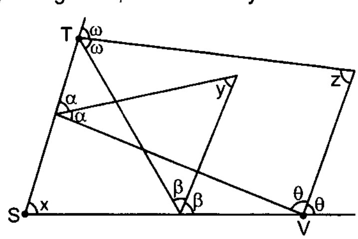
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

19. Según el gráfico, los triángulos ABC, AFE y CDE son equiláteros. Si AE = 12, calcular el menor valor entero de BF + FD.



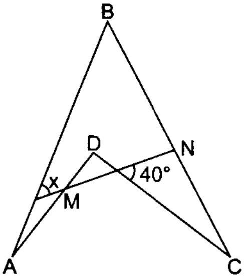
A) 12 B) 13 C) 18 D) 11 E) 15

20. Según el gráfico, calcular $x + y + z$.



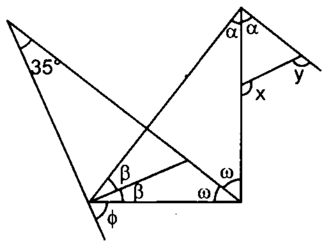
A) 180° B) 360° C) 270°
D) 135° E) 120°

21. Según el gráfico, AB = CD, AM = MD y BN = NC. Calcular x.



A) 50° B) 65° C) 80°
D) 40° E) 70°

22. Según la figura, $\beta + \phi = 90°$. Calcular x + y.

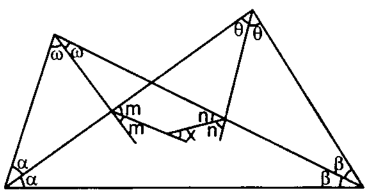


A) 220° B) 210° C) 250°
D) 200° E) 170°

23. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), la bisectriz exterior del ángulo A interseca a la prolongación de $\overline{BC}$ en P y la bisectriz del ∠APC interseca a $\overline{AC}$ en R. Si AP = 7 y PC = 5, calcular $\overline{RC}$.

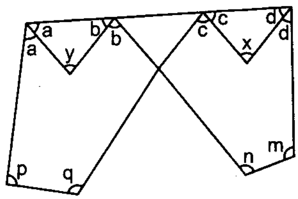
A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3,5

24. Según el gráfico, calcular x, si m + n = 105°



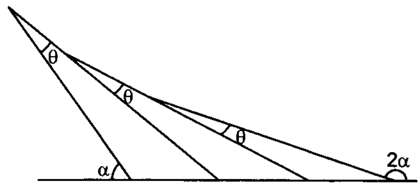
A) 45° B) 30° C) 50°
D) 20° E) 60°

25. Según el gráfico, m + n − p − q = 20°
Calcular x − y.



A) 10° B) 15° C) 20° D) 5° E) 25°

26. Según el gráfico, calcular $\alpha - \theta$.



A) 50° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 70°

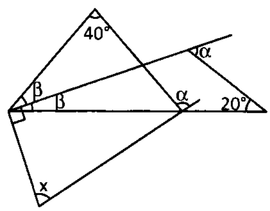
27. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, AB = 6; se traza la bisectriz interior BD. Calcular BD si toma su máximo valor entero.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

28. En un triángulo acutángulo ABC, se traza las alturas AH y CQ, tal que m∠ABC = 45°, si AC = 6. Calcular QH.

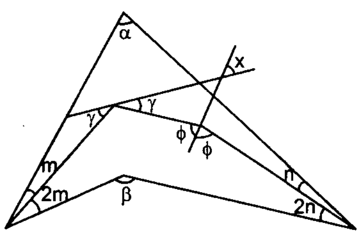
A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$
D) 4 E) $2\sqrt{3}$

29. En el gráfico, calcular x.



A) 50° B) 60° C) 70°
D) 80° E) 90°

30. Según el gráfico, calcular x en función de α y β.



A) $\dfrac{\beta+2\alpha}{2}$ B) $\dfrac{\beta+2\alpha}{6}$ C) $\dfrac{\beta+\alpha}{3}$
D) $\dfrac{2\beta+\alpha}{3}$ E) $\dfrac{2\beta+3\alpha}{6}$

31. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B y C. Si $(AB)^2 + b(AC) = (AC)^2 + (BC)^2$, calcular BC.

A) b B) 2b C) b/2
D) b/4 E) 4b

32. En una recta se ubican los puntos consecutivos P, Q, R y S, tal que PQ = 2(RS); QR = 2, además:
$\dfrac{PQ}{QR} = \dfrac{2(QR)+3(RS)}{RS}$. Calcular QS.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

33. Sobre una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C, D y E, tal que AB = CD = 4, AD = 14 y $(AB + DE)^2 = (AC + BD)CE$. Calcular DE.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 10 E) 6

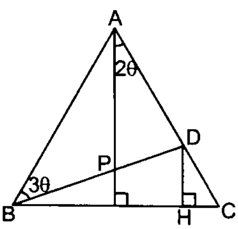
34. En una recta se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D. Si BC es la media geométrica de AB y CD; además AD = 3(BC), calcular AB/CD.

A) 1 B) 2 C) 1/2
D) 1/4 E) 3

35. En un triángulo isósceles ABC, de base $\overline{AC}$, se trazan las cevianas interiores $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$, tal que m∠MBC = 50° y m∠BCN = m∠ABM = 30°. Calcular m∠MNC.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 35° E) 40°

36. En el gráfico, CD = 3, AP = 7 y AB = BC; calcular HC.

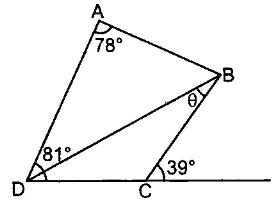


A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{5}/2$ E) $\sqrt{3}/2$

37. En un triángulo ABC se trazan las cevianas interiores AQ y BP, tal que m∠BCA = 48°; m∠CBP = 30°, m∠BAQ = 18° y m∠QAC = 6°; calcular la m∠AQP.

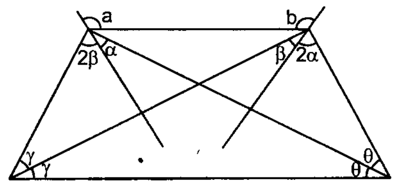
A) 28° B) 32° C) 30°
D) 24° E) 12°

38. Según el gráfico, calcular θ, si AB = BC.



A) 10° B) 9° C) 12° D) 18° E) 7°

39. Del gráfico mostrado, calcular a + b



A) 200° B) 250° C) 240°
D) 260° E) 270°

40. Interiormente a un triángulo ABC se ubica el punto O, tal que m∠ABO = 60° + θ; m∠BAO = 60° − 2θ; m∠OAC = m∠ACO = θ.
Calcular θ.

A) 20° B) 30° C) 12°
D) 35° E) 15°

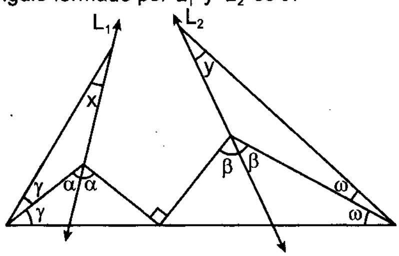
41. En un triángulo ABC se traza la bisectriz interior BP en cuya prolongación se ubica el punto D, de modo que m∠PAD = m∠PDA = 30° y m∠ACD = 15°; calcular la m∠BCA.

A) 15° B) 10° C) 30°
D) 20° E) 25°

42. En el triángulo ABC, los lados miden 2a − 1; 6 − a y 3a − 1. Calcular la medida del menor ángulo interior, si se sabe que "a" es un número entero.

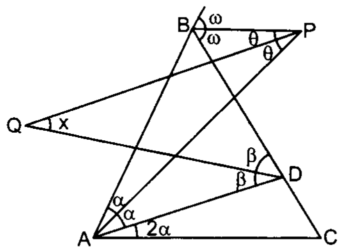
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

43. Según el gráfico, calcular x + y, si la medida del ángulo formado por $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ es θ.



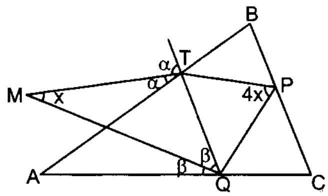
A) 3θ B) $\dfrac{3\theta}{2}$ C) $\dfrac{5\theta}{2}$
D) θ E) 2θ

44. Según el gráfico, AB = BC y AD = AC, calcular x.



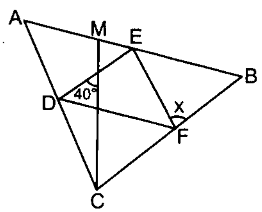
A) 40° B) 60° C) 42°
D) 45° E) 75°

45. Según el gráfico, BP = PT y QP = PC, calcular x.



A) 20° B) 25° C) 18°
D) 30° E) 22°30'

46. En la figura, los triángulos ABC y DEF son equiláteros, AM = MB. Calcular x.



A) 55° B) 40° C) 30°
D) 60° E) 50°

47. En un triángulo ABC, la suma de las medidas de los ángulos B y C es 105°. Si la medida del ángulo A excede a la medida del ángulo B en 4°, la medida del ángulo C es:

A) 34° B) 35° C) 75°
D) 30° E) 40°

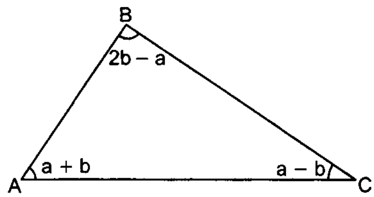
48. Se tiene dos rectas oblicuas (secantes) L_1 y L_2, las cuales se intersecan en el punto Q. Además, una tercera secante o transversal las intersecan en los puntos A y B, formando con ellas ángulos agudos correspondientes, cuyas medidas son 85° y 75° respectivamente. Sea X un punto de $\overline{AB}$, Y un punto de $\overline{AQ}$ y Z un punto de $\overline{BQ}$, tal que $\overline{AY} \cong \overline{AX}$ y $\overline{BZ} \cong \overline{BX}$. Calcular la medida del $\angle XYZ$.

A) 75° B) 80° C) 100°
D) 85° E) 95°

49. Dadas dos rectas paralelas, se toma en una de ellas un punto A y en la otra un punto B. Se toma otro punto C en el segmento AB; se consideran en las paralelas a un mismo lado de AB, un segmento AD = AC y otro BE = BC. Siendo α el ángulo CAD. Calcular el ángulo DCE.

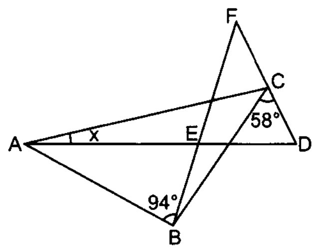
A) α/2 B) α/3 C) α/4
D) α/2 E) α/3

50. En la figura, las medidas de los ángulos interiores del triángulo ABC están dadas en grados sexagesimales. Hallar el menor valor entero (en grado sexagesimales) que puede tomar b.



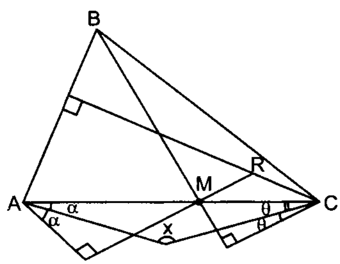
A) 45° B) 46° C) 40°
D) 35° E) 36°

51. Calcular x, si AB = BC; EF = FD.



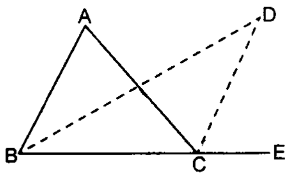
A) 20° B) 15° C) 30°
D) 18° E) 25°

52. En la figura, AB = AM, CM = CR, calcular x.



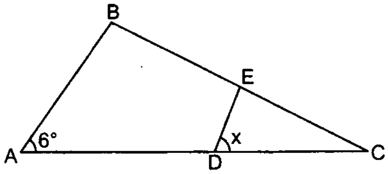
A) 157°30' B) 150° C) 170°
D) 140° E) 125°

53. ABC es un triángulo, tal que la medida del ángulo A es 40°. Si se traza la bisectriz interior del ángulo ABC y la bisectriz exterior del ángulo C, la medida del ángulo formado por las dos bisectrices es:



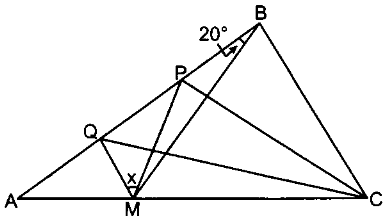
A) 160° B) 35° C) 70°
D) 60° E) 20°

54. En la figura, AB = DC = CE. ¿Cuántos valores enteros puede tomar x?



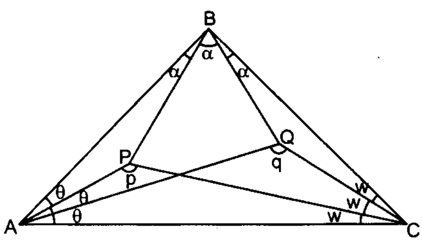
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

55. En la figura, AP = PC; BQ = MC, el triángulo MBC es equilátero. Calcular x.



A) 40° B) 50° C) 60°
D) 70° E) 80°

56. Del gráfico, calcular α, si: $p + q = 216°$.

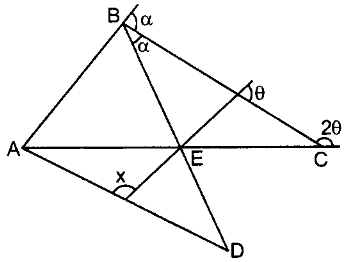


A) 8° B) 10° C) 12°
D) 14° E) 16°

57. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. La bisectriz interior del m∠A interseca a $\overline{BH}$ en M y a $\overline{BC}$ en P. La bisectriz interior del m∠C interseca a $\overline{BH}$ en N y a $\overline{AB}$ en Q. Calcular MN, si BP − BQ = 6.

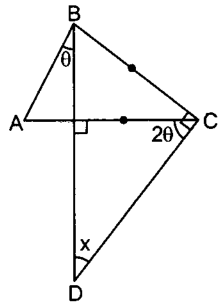
A) 6 B) 3 C) 4
D) 1,5 E) 2

58. En la figura, AB = BC y AE = ED, calcular **x**.



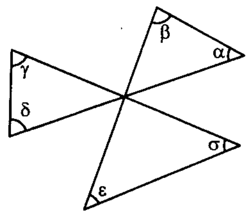
A) 135° B) 60° C) 125°
D) 90° E) 120°

59. Calcular **x**, si BC = AC.



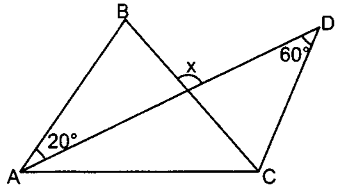
A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

60. En la siguiente figura, ¿cuál es la suma de las medidas de los ángulos señalados?



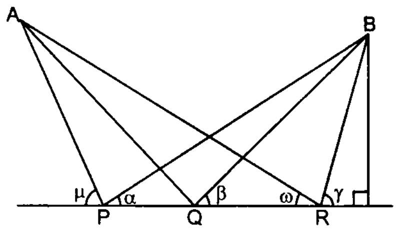
A) 405° B) 180° C) 390°
D) 450° E) 360°

61. En la figura, calcular el valor del ángulo x, si $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son bisectrices de los ángulos A y C respectivamente.



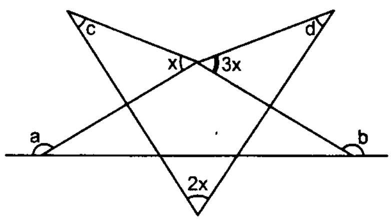
A) 130° B) 100° C) 120°
D) 70° E) 110°

62. En la siguiente figura, si $\alpha < \mu$; $\beta = \mu$; $\gamma < \omega$; indicar cuál de las siguientes desigualdades es verdadera:



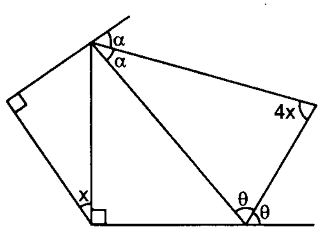
A) AP + PB < AQ + QB
B) AP + PB = AQ + QB
C) AP + PB > AQ + QB > AR + RB
D) AP + RB < AQ + QB < AR + PB
E) AQ + QB < AR + RB ∧ AQ + QB < AP + PB

63. Calcular x, si a + b + c + d = 420°



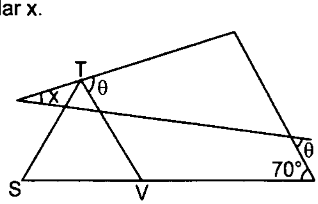
A) 10° B) 15° C) 12°
D) 20° E) 25°

64. En la figura, calcular x.



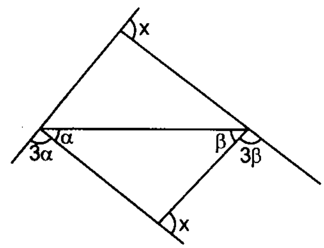
A) 18° B) 20° C) 22°
D) 25° E) 30°

65. Según el gráfico, el triángulo STV es equilátero. Calcular x.



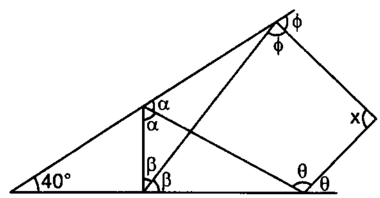
A) 10° B) 45° C) 36°
D) 72° E) 30°

66. En la figura, calcular x.



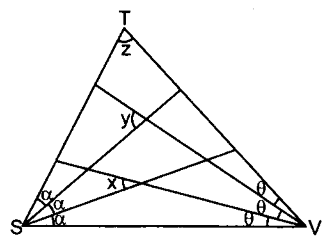
A) 60° B) 45° C) 36°
D) 72° E) 30°

67. En la figura, calcular x.



A) 115° B) 125° C) 135°
D) 114° E) 140°

68. Del gráfico, calcular x + y + z.



A) 120° B) 160° C) 150°
D) 90° E) 180°

69. Sobre el lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, se ubica el punto D, tal que la m∠ADC es igual a la semisuma de los ángulos interiores de A y B. Calcular BD, si además AC = 12 cm y BC = 16 cm.

A) 14 cm B) 10 cm C) 8 cm
D) 4 cm E) 6 cm

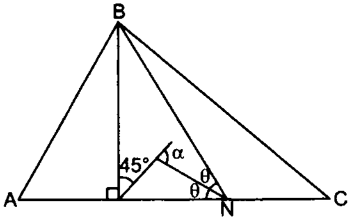
70. En un triángulo ABC (m∠B > 90°), se sabe que BC = 2 cm y AC = 5 cm. Hallar el valor o valores enteros que puede adoptar AB.

A) 4 cm B) 5 cm C) 6 cm
D) 4,5 cm E) 4,5 cm y 6 cm

71. En un triángulo ABC, la m∠BAC = 80°, m∠BCA = 40°. En $\overline{AC}$ se ubica un punto M, tal que m∠ABM = 50°. Calcular la m∠BME, siendo E un punto de $\overline{BC}$, tal que BE = AB.

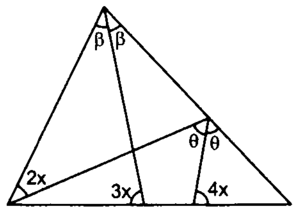
A) 50° B) 80° C) 40°
D) 20° E) 30°

72. Según el gráfico, calcular α si $m\angle ABN = m\angle NBC$ y $m\angle BAC - m\angle BCA = 40°$.



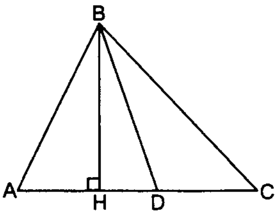
A) 160° B) 40° C) 70°
D) 100° E) 80°

73. Según el gráfico, calcular x.



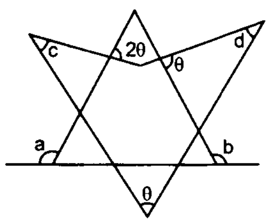
A) 8°30' B) 20°30' C) 15°
D) 30° E) 22°30'

74. En el gráfico, $\overline{BH}$ es altura y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC. Si, además $m\angle BAC - m\angle BCA = 60°$. Calcular la $m\angle HBD$.



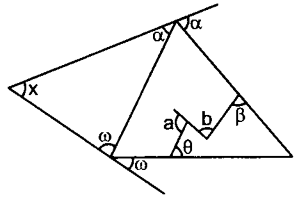
A) 30° B) 45° C) 15°
D) 20° E) 25°

75. Según el gráfico, calcular el valor de θ, siendo: $a + b + c + d = 360°$.



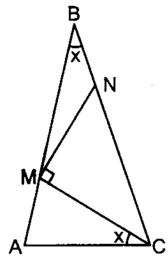
A) 45° B) 30° C) 60°
D) 36° E) 22°30'

76. Según el gráfico, calcular x, si $a + b = \beta + \theta + 50°$.



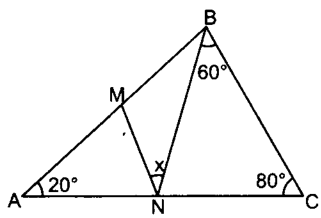
A) 62° B) 66° C) 63°
D) 64° E) 65°

77. Del gráfico, AB = BC y MN = AC, calcular x.



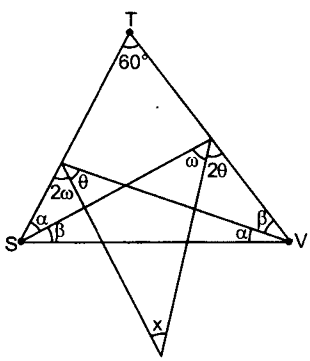
A) 15° B) 30° C) 5°
D) 20° E) 40°

78. Calcular x, si AM = NC.



A) 40° B) 60° C) 80°
D) 90° E) 70°

79. En la figura mostrada, calcular el valor de x.



A) 45° B) 60° C) 30°
D) 90° E) 75°

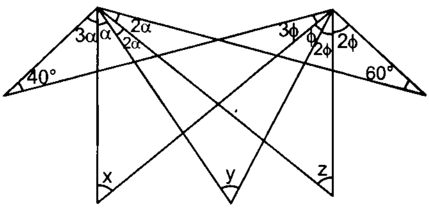
80. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz exterior $\overline{BM}$ (M en la prolongación de $\overline{AC}$), en $\overline{AB}$ se ubica el punto N (AN = NC) y en la prolongación de $\overline{CN}$ se ubica el punto Q, tal que CQ = QB. Calcular m∠CQB, si: m∠BQC + m∠AMB = 60°.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 40°

81. La bisectriz de uno de los ángulos de un triángulo escaleno forma, con el lado opuesto, dos ángulos que son entre sí como 7 es a 13. Determinar el menor de los ángulos del triángulo asumiendo que la medida en grados de cada uno de los tres ángulos es un número entero menor que 80°.

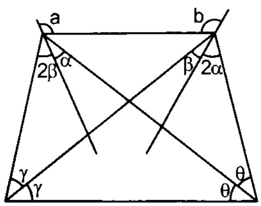
A) 24° B) 25° C) 26°
D) 27° E) 28°

82. En el gráfico, calcular: x + y + z



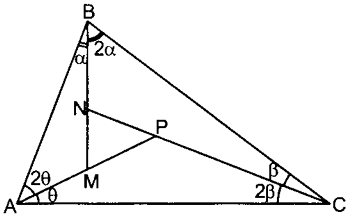
A) 150°30' B) 152°30' C) 150°
D) 120° E) 200°

83. Del gráfico mostrado, calcular a + b.



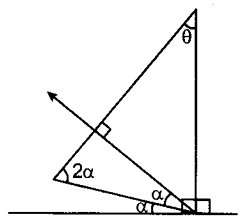
A) 200° B) 250° C) 240°
D) 260° E) 270°

84. Según el gráfico, calcular el valor de θ, si MP = NP.



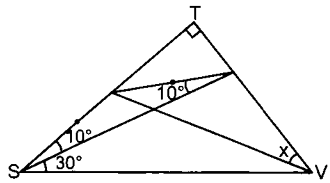
A) 10° B) 15° C) 25°
D) 35° E) 20°

85. En el gráfico mostrado, calcular el valor de θ.



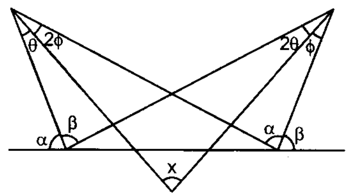
A) 36° B) 45° C) 24°
D) 32° E) 30°

86. Calcular x.



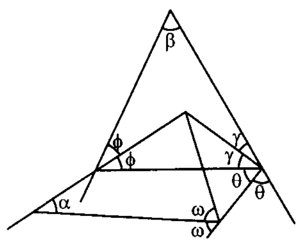
A) 10° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 35°

87. Calcular x.



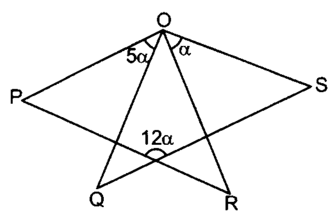
A) 40° B) 50° C) 60°
D) 75° E) 65°

88. En el gráfico, si β − α = 45°, calcular (α + β).



A) 88° B) 90° C) 92°
D) 99° E) 100°

89. Calcular α, si OP = OR y OQ = OS.



A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 9°

90. En un triángulo ABC, se traza la ceviana BT, si AB = AT; BC = AC. Calcular el máximo valor entero de la m∠CBT.

A) 36° B) 35° C) 30°
D) 45° E) 44°

91. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BM}$, si m∠ACB = β, m∠CAB = α + β y la medida del ángulo exterior del ∠A es α, donde AB = 8 cm, MC = 3 cm. Calcular BC.

A) 10 cm B) 11 cm C) 12 cm
D) 13 cm E) 14 cm

92. En un triángulo ABC, sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q respectivamente, donde:
m∠PAQ = m∠PQA = 16°; m∠AQC = 97°;
m∠QAC = 30°. Calcular m∠PCA.

A) 18° B) 20° C) 30°
D) 25° E) 23°

93. ¿Cuál es el número de triángulos escalenos que tienen todos los lados enteros y de perímetro 22 cm?

A) 5 B) 6 C) 4 D) 7 E) 8

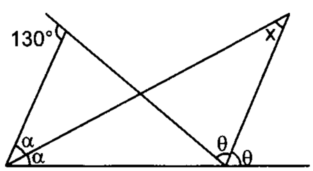
94. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BT}$, si BC = AT; m∠BAC = 60°− 2x; m∠CBT = x; m∠BCA = 2x. Calcular m∠CBT.

A) 5° B) 8° C) 10° D) 12° E) 15°

95. Dado un triángulo isósceles ABC (AB = BC), sobre la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto P y sobre la prolongación de $\overline{BA}$, el punto Q. Calcular el máximo valor entero del ángulo ABC, si las medidas de los ángulos CAP y CAQ están en la razón de 2 a 5.

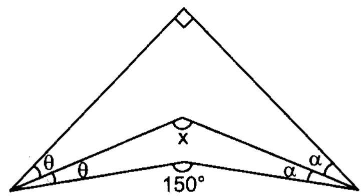
A) 84° B) 77° C) 53°
D) 36° E) 30°

96. Calcular x.



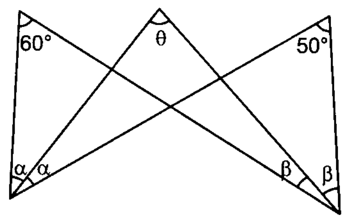
A) 15° B) 20° C) 25°
D) 30° E) 50°

97. Calcular x.



A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

98. Calcular θ.



A) 110° B) 120° C) 90°
D) 55° E) 60°

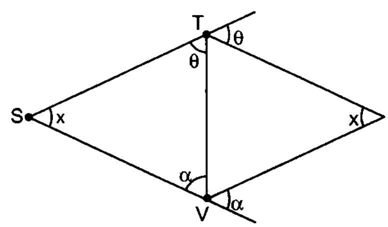
99. Los catetos de un triángulo rectángulo ABC miden AB = 16, BC = 30, se traza la altura BH y las bisectrices BP y $\overline{BQ}$ de los ángulos ABH y HBC respectivamente. Calcular PQ.

A) 12 B) 18 C) 24
D) 36 E) 30

100. En un triángulo ABC, la medida del ángulo formado por la bisectriz interior del ángulo A y la bisectriz exterior del ángulo C es siete veces la medida del ángulo B. Calcular la medida del ángulo B.

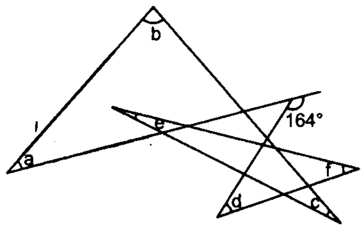
A) 12° B) 18° C) 24°
D) 36° E) 30°

101. Del gráfico, calcular x.



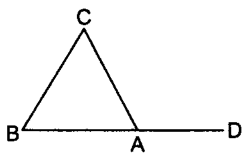
A) 12° B) 18° C) 24°
D) 36° E) 60°

102. Calcular la suma de los ángulos a, b, c, d, e, f.



A) 540°   B) 180°   C) 720°
D) 360°   E) 320°

103. El ángulo CAD es igual a tres veces el ángulo CAB y el ángulo BCA es mayor al ángulo CBA, Hallar el mayor lado del triángulo ABC.

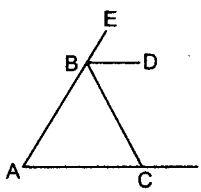


A) $\overline{BC}$
B) $\overline{AB}$
C) $\overline{AC}$
D) Puede ser $\overline{AC}$ o $\overline{BC}$ dependiendo de la forma del triángulo.
E) No se puede determinar los datos.

104. Si dos lados de un triángulo son 15 y 18, el tercer lado puede ser:

A) 1   B) 2   C) 12   D) 35   E) 3

105. El triángulo ABC es equilátero. Si $\overline{BD}$ es paralela a $\overline{AC}$. ¿Cuánto mide el ángulo EBD?

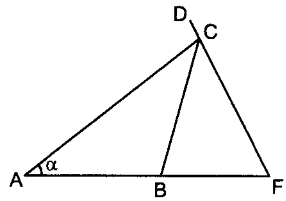


A) 40°   B) 45°   C) 60°
D) 65°   E) 70°

106. Los ángulos de un triángulo están en progresión aritmética cuya razón es 10. ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

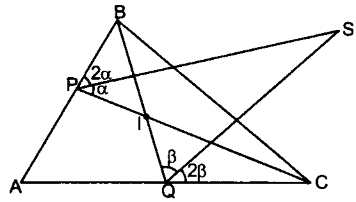
A) 20°; 50°; 70°   B) 60°; 40°; 110°
C) 60°; 70°; 80°   D) 50°; 60°; 70°
E) 60°; 45°; 75°

107. En la figura adjunta, AB = BC; $\overline{BC} \perp \overline{DE}$ y el ángulo BEC mide 35°. Hallar el ángulo α:



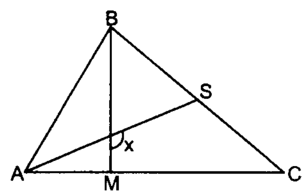
A) 32°31'   B) 30°30'   C) 27°30'
D) 20°15'   E) 20°5'

108. En la figura, el punto I es el incentro del $\triangle ABC$. Calcular la medida del ángulo PSQ.



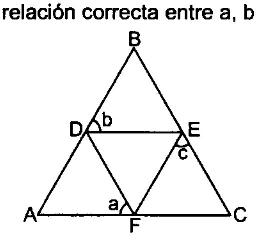
A) $90° - m\angle BAC$ B) $100° - \dfrac{m\angle BAC}{3}$
C) 45°   D) 60°
E) $90° - \dfrac{m\angle BAC}{2}$

109. En el triángulo ABC, $m\angle A = 80°$, $m\angle B = 60°$.
Si $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$ son alturas, entonces el ángulo x mide:



A) 40°   B) 140°   C) 120°
D) 50°   E) 60°

110. En la figura, se tiene el triángulo isósceles ABC, en el que se inscribe el triángulo equilátero DEF. Hallar la relación correcta entre a, b y c.



A) a = (b + c)/2   B) a – b – c = 0
C) b = (a – c)/2   D) a = (b – c)/2
E) b = (a – c)/2

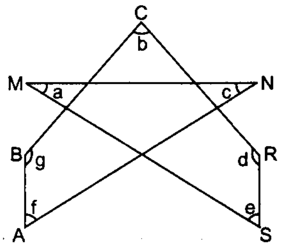
111. Los ángulos internos de un triángulo son proporcionales a los números 3; 4 y 5. ¿Cuál es el valor de cada ángulo?

A) 60°; 80° y 100° B) 40°; 60° y 80°
C) 30°; 40° y 50° D) 45°; 60° y 75°
E) 36°; 48° y 60°

112. Calcular el ángulo formado por la altura y la bisectriz que parten del vértice A de un triángulo ABC. Sabiendo que $m\angle A + 2(m\angle C) = 100°$.

A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

113. En la figura, calcular a + b + c + d + e + f + g.



A) 720° B) 900° C) 540°
D) 1800° E) 96°

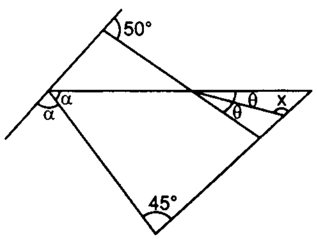
114. Dado el triángulo ABC; si por el vértice C se traza CH perpendicular a AB (interiormente), además de la bisectriz exterior del ángulo C y la diferencia de las medidas de los ángulos A y B es 26°. El ángulo que forma la bisectriz y la perpendicular es:

A) 110° B) 123° C) 103° D) 77° E) 96°

115. En el triángulo ABC, $\overline{AD}$ es la altura correspondiente al lado BC y $\overline{BE}$ es la bisectriz del ángulo B, las cuales se cortan en F. Si $m\angle A = 64°$ y $m\angle C = 42°$. Determinar el ángulo AFB.

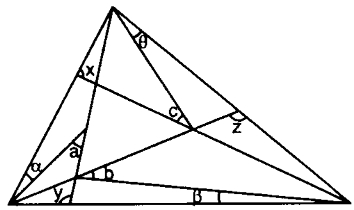
A) 127° B) 150° C) 170°
D) 132° E) 130°

116. Según el gráfico, calcular x.



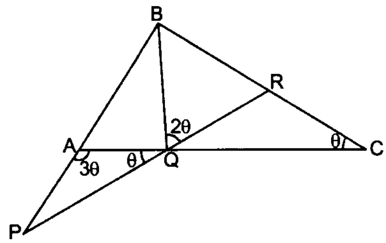
A) 135° B) 95° C) 150°
D) 100° E) 110°

117. Según el gráfico, x + y + z = 240° y a + b + c = 170°, calcular α + β + θ.



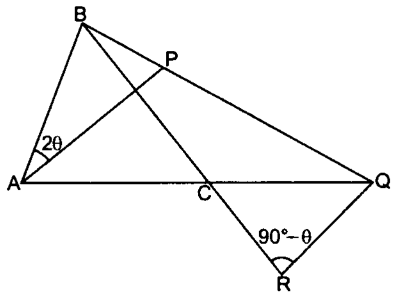
A) 60° B) 80° C) 100°
D) 140° E) 50°

118. En el gráfico, PA = 2 y BR − RC = 3, calcular $\overline{PQ}$.



A) 6 B) 5 C) 4
D) 3 E) 7

119. Según el gráfico: AB = BC; AP = PQ; BQ = AB + 3. Calcular CR.



A) 2 B) 6 C) 5
D) 4 E) 3

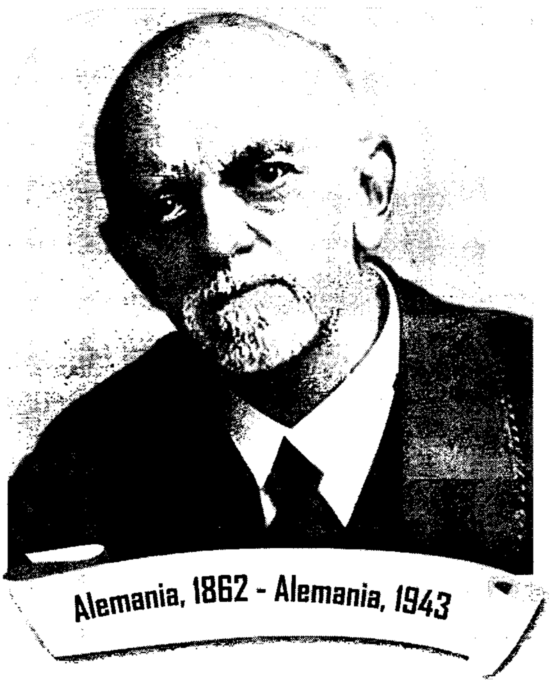
CLAVES

1. C	16. E	31. C	46. E	61. E	76. E	91. E	106. D
2. A	17. E	32. C	47. A	62. D	77. B	92. E	107. C
3. D	18. D	33. C	48. B	63. D	78. C	93. A	108. D
4. B	19. B	34. A	49. D	64. B	79. B	94. C	109. B
5. C	20. A	35. E	50. B	65. A	80. A	95. B	110. A
6. C	21. D	36. B	51. D	66. D	81. B	96. C	111. D
7. A	22. C	37. C	52. A	67. B	82. B	97. C	112. C
8. A	23. C	38. B	53. E	68. E	83. C	98. D	113. C
9. B	24. A	39. C	54. B	69. D	84. E	99. A	114. C
10. D	25. A	40. E	55. D	70. A	85. A	100. C	115. A
11. E	26. D	41. A	56. C	71. E	86. D	101. E	116. E
12. B	27. E	42. B	57. A	72. C	87. C	102. D	117. E
13. E	28. B	43. A	58. D	73. E	88. D	103. B	118. B
14. A	29. C	44. D	59. B	74. A	89. B	104. C	119. C
15. C	30. B	45. E	60. E	75. A	90. E	105. C	

Congruencia de triángulos

04 capítulo

David Hilbert



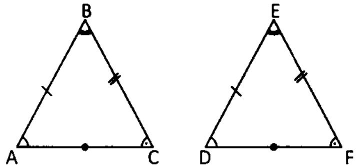
David Hilbert nació el 23 de enero de 1862 en Königsberg (Prusia Oriental) y murió el 14 de febrero de 1943 en Gotinga (Alemania). Fue un matemático alemán, reconocido como uno de los más influyentes del siglo XIX y principios del XX. Estableció su reputación como gran matemático y científico inventando o desarrollando un gran abanico de ideas, como la teoría de invariantes, la axiomatización de la geometría y la noción de espacio de Hilbert, uno de los fundamentos del análisis funcional. Adoptó y defendió vivamente la teoría de conjuntos y los números transfinitos de Cantor.

El texto *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos de la geometría) que Hilbert publicó en 1899, sustituye los tradicionales axiomas de Euclides por el sistema formal de 21 axiomas. Este sistema evita las debilidades identificadas en los axiomas de Euclides, cuya obra seguía siendo usada como libro de texto en aquel momento. El enfoque de Hilbert marcó el cambio al sistema axiomático moderno. Los axiomas no se toman como verdades evidentes. La geometría puede tratar de cosas sobre las que tenemos intuiciones poderosas, pero no es necesario asignar un significado explícito a los conceptos indefinidos. Como dice Hilbert, los elementos tales como el punto, la recta, el plano y otros, se pueden sustituir con mesas, sillas, jarras de cerveza y otros objetos. Lo que se discute y se desarrolla son sus relaciones definidas.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Dos triángulos son congruentes si sus lados correspondientes tienen la misma longitud y sus ángulos correspondientes tienen la misma medida.

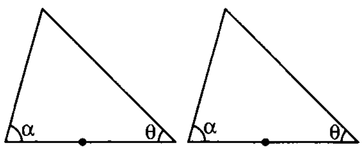


$\triangle ABC \cong \triangle DEF$

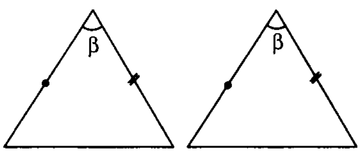
A lados congruentes, uno en cada triángulo, se oponen ángulos congruentes y viceversa. Para que dos triángulos sean congruentes, deben cumplir con alguno de los casos de congruencia. En ellos se menciona como requisito, que presenten tres pares de elementos congruentes, siendo por lo menos uno de ellos un lado.

CASOS DE CONGRUENCIA

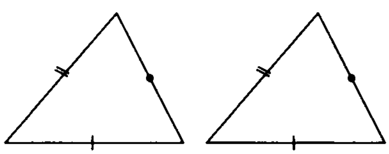
1.° caso. (Postulado ALA): Dos triángulos son congruentes, si tienen dos ángulos y el lado común a ellos, respectivamente, iguales.



2.° caso. (Postulado LAL): Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados y el ángulo determinado por ellos respectivamente iguales.

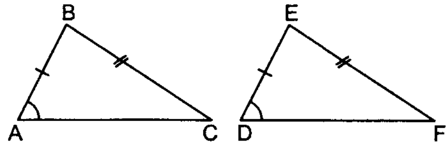


3.° caso. (Postulado LLL): Dos triángulos son congruentes si tienen sus tres lados respectivamente iguales.



Existe un cuarto caso que se demuestra teniendo en cuenta los anteriores:

4.° caso. (Postulado LLA): Dos triángulos son congruentes si tienen dos pares de lados y el ángulo opuesto a los mayores de dichos lados, respectivamente congruentes.



Si: $\overline{AB} \cong \overline{DE} \wedge \overline{BC} \cong \overline{EF}$, donde $BC > AB$; $\angle A \cong \angle D$, entonces: $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

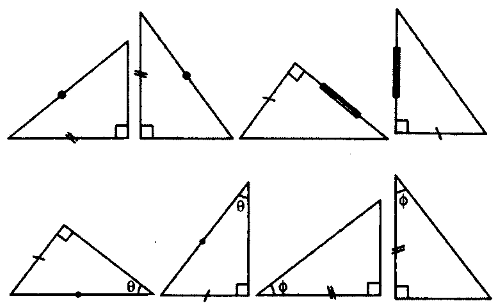
Observación

Dos triángulos rectángulos serán congruentes si tienen dos pares de elementos congruentes (aparte del ángulo recto), los cuales pueden ser:

a) Dos lados (caso LL)

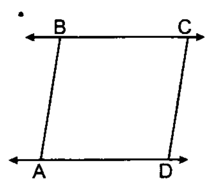
b) Un lado y un ángulo agudo (caso LA)

Ejemplos:



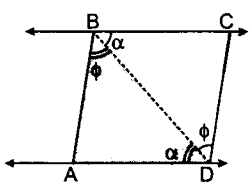
APLICACIONES DE CONGRUENCIA

1. **Teorema.** Los segmentos paralelos, comprendidos entre rectas paralelas, son congruentes.



Si: $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$;
Entonces: $AB = DC \wedge BC = AD$

Demostración:



Al trazar $\overline{BD}$:

$\left.\begin{array}{l}\angle ABD \cong \angle BDC \\ \angle CBD \cong \angle ADB\end{array}\right\}$ alternos internos entre paralelas.

Además, por tener $\overline{BD}$ común:

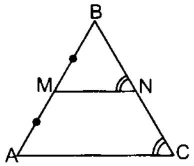
$\triangle ABD \cong \triangle CDB$ (ALA)

Luego: $AB = DC$ y $BC = AD$

Nota

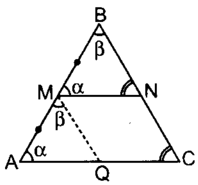
El cuadrilátero ABCD es un paralelogramo

2. **Teorema de los puntos medios (base media).** La paralela a un lado de un triángulo, trazada por el punto medio de otro, corta al tercero en su punto medio. El segmento determinado se llama base media o paralela media y mide la mitad de la longitud del lado al cual es paralelo.



Si AM = MB y $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$, entonces BN = NC y MN = $\frac{AC}{2}$; $\overline{MN}$, es base media relativa a $\overline{AC}$.

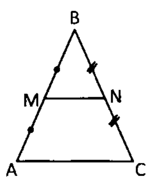
Demostración:



Sea $\overline{MQ}$ // $\overline{BC}$. Luego ∠AMQ ≅ ∠MBN y ∠A ≅ ∠BMN (tienen sus lados paralelos)
ΔAMQ ≅ ΔMBN (ALA) ⇒ BN = MQ
Pero: NC = MQ, entonces BN = NC
También: MN = AQ, siendo QC = MN
∴ MN = AQ = QC = $\frac{AC}{2}$

$\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$

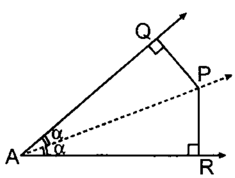
Corolario. En todo triángulo, el segmento que une los puntos medios de dos lados es paralelo al tercero y mide la mitad de él.



Si: AM = BM y BN = NC;

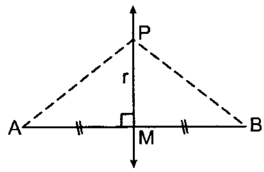
entonces $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$ y $\boxed{MN = \frac{AC}{2}}$

3. **Teorema de la bisectriz.** Todo punto situado sobre la bisectriz de un ángulo, equidista de sus lados.



Sea P, cualquier punto de la bisectriz del ∠A, $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$, son perpendiculares a los lados del ángulo. Como: ΔAQP ≅ ΔARP (LA)
⇒ $\boxed{PQ = PR}$, siendo: AQ = AR

4. **Teorema de la mediatriz.** Todo punto situado en la mediatriz de un segmento, equidista de sus extremos.



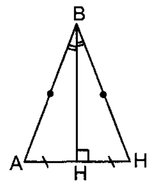
$\overleftrightarrow{r}$ es mediatriz de $\overline{AB}$ y P es cualquier punto de $\overleftrightarrow{r}$. Como: ΔAMP ≅ ΔBMP (LL)

⇒ $\boxed{PA = PB}$; el ΔAPB resulta isósceles: ∠A ≅ ∠B

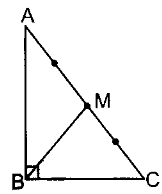
Caso del triángulo isósceles. La altura relativa a la base es también mediana, bisectriz y porción de mediatriz.

Si: AB = BC.

$\overline{BH}$ es
- altura
- mediana
- bisectriz
- porción de mediatriz.



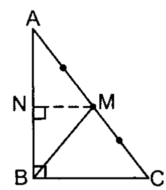
5. **Teorema:** En todo triángulo rectángulo, la mediana relativa a la hipotenusa mide la mitad de ella.



BM = $\frac{AC}{2}$

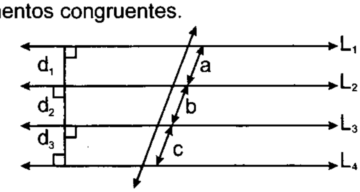
o $\boxed{BM = AM = MC}$

Demostración:



Trazamos $\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ ⇒ $\overline{MN}$ ⊥ $\overline{AB}$
Por el teorema n.° 2: AN = NB
En el ΔAMB: $\overline{MN}$ es altura y mediana.
∴ Según el ítem n.° 5: BM = AM

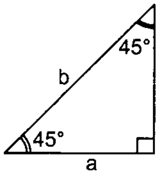
6. **Teorema.** Tres o más rectas paralelas equidistantes, determinan sobre cualquier recta secante, segmentos congruentes.



Si $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overleftrightarrow{L_2}$ // $\overleftrightarrow{L_3}$ // $\overleftrightarrow{L_4}$ y $d_1 = d_2 = d_3$

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS NOTABLES

Triángulos rectángulo isósceles



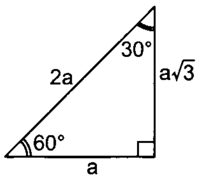
$\boxed{b = a\sqrt{2}}$

$\boxed{a = \dfrac{b}{\sqrt{2}}}$

⇒ longitud de la hipotenusa = (longitud de un cateto) x $\sqrt{2}$

$$\text{longitud de un cateto} = \frac{\text{longitud de hipotenusa}}{\sqrt{2}}$$

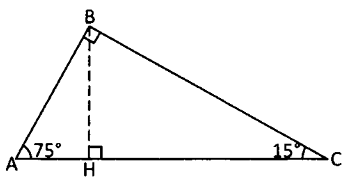
Triángulo rectángulo de 30° y 60°



$$\text{Cateto opuesto a } 30° = \frac{\text{longitud de hipotenusa}}{2}$$

$$\text{Cateto opuesto a } 60° = \left(\frac{\text{longitud de hipotenusa}}{2}\right) \times \sqrt{3}$$

Triángulo rectángulo de 15° y 75°



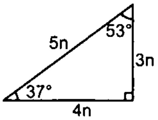
$\overline{BH}$: altura hacia la hipotenusa $\overline{AC}$

⇒ $\boxed{BH = \dfrac{AC}{4}}$

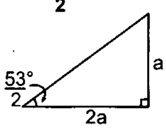
Nota

Existen otros aproximados, cuya relación de longitudes de lados indicamos a continuación:

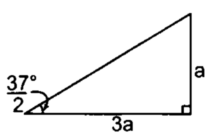
4. De 37° y 53°:



5. De $\frac{53°}{2}$ o 26°30':



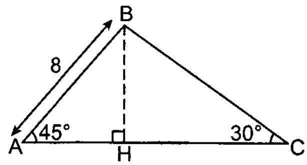
6. De $\frac{37°}{2}$ o 18°30':



Ejemplo:

En un △ABC, AB = 8, m∠A = 45° y m∠C = 30°. Hallar BC.

Resolución:



Trazamos la altura $\overline{BH}$. Luego:

△AHB: $BH = \dfrac{8}{\sqrt{2}} \Rightarrow BH = 4\sqrt{2}$

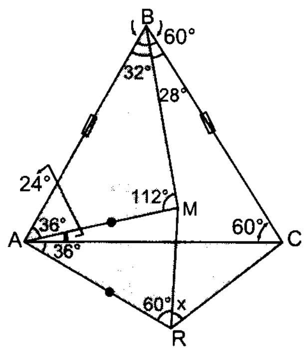
△BHC: $\overline{BH}$ se opone a 30° ⇒ $\dfrac{BC}{2} = BH \Rightarrow \dfrac{BC}{2} = 4\sqrt{2}$

∴ $BC = 8\sqrt{2}$

Ejemplos:

1. M es punto interior del △ABC, equilátero, tal que m∠MAC = 24° y m∠MBC = 28°. Exteriormente y relativo a $\overline{AC}$, se toma un punto R, de modo que, el △ARM, sea equilátero. Hallar la medida del ángulo MRC.

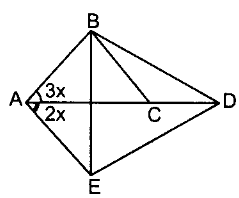
Resolución:



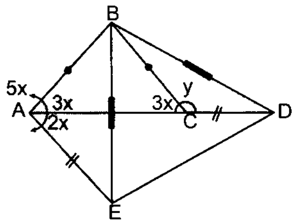
Completando los ángulos:
m∠ABM = 60° − 28° = 32° y
m∠MAB = 60° − 24° = 36°,
además, m∠AMB = 112°.

También, como el △ARM es equilátero, según dato: m∠MAR = 60° y m∠RAC = 60° − 24° = 36°, entonces: △RAC ≅ △MAB
(postulado LAL: ═, 36°, —•—)
Luego, ∠ARC = ∠AMB, (se oponen a lados congruentes de triángulos congruentes)
⇒ x + 60°= 112°   ∴ x = 52°

2. En la figura: AB = BC; AE = CD y m∠BED ≅ m∠BDE. Hallar el valor de x.

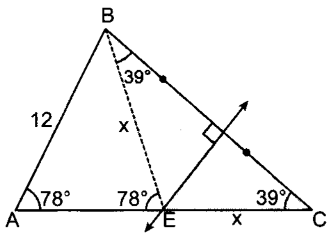


Resolución:



Colocando marcas iguales a los segmentos congruentes, se observa:
$\triangle ABC$ es isósceles
$\Rightarrow m\angle ACB = m\angle BAC = 3x$
$\triangle BCD \cong \triangle ABE$ (LLL)
$\Rightarrow m\angle BCD = m\angle BAE \Rightarrow y = 5x$
En C: $3x + y = 180°$
$3x + 5x = 180°$
$\therefore\ x = 22{,}5°$

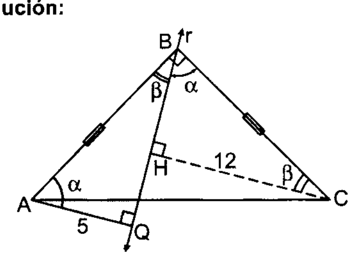
3. En un $\triangle ABC$, $AB = 12$, $m\angle A = 78°$ y $m\angle C = 39°$; la mediatriz de $\overline{BC}$ corta a $\overline{AC}$ en el punto E. Hallar EC.



Resolución:
Incógnita: $EC = x$
Por propiedad de la mediatriz
$EB = EC \Rightarrow EB = x$
Luego, $\triangle BEC$ es isósceles: $m\angle EBC = m\angle C = 39°$
y $m\angle AEB = m\angle EBC + m\angle C$ ...($\angle$exterior)
$\Rightarrow m\angle AEB = 78°$
Finalmente, $\triangle ABE$ es isósceles $\Rightarrow BE = BA$
$\therefore\ x = 12$

4. En un triángulo ABC, isósceles, recto en B, hallar la distancia entre los pies de las perpendiculares trazadas desde A y C, a una recta que pasa por B y corta a la hipotenusa, sabiendo que A y C distan de dicha recta 5 y 12 unidades, respectivamente.

Resolución:



Sean: $AQ = 5$ y $CH = 12$
($\overline{AQ} \perp \overleftrightarrow{r}$ y $\overline{CH} \perp \overleftrightarrow{r}$)

Incógnita: HQ
Si: $m\angle BAQ = \alpha$ y $m\angle ABQ = \beta$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 90°$
Luego: $m\angle HBC = \alpha$ (complemento de β, en la $m\angle ABC = 90°$)

y $m\angle BCH = \beta$ (complemento de α, en el $\triangle BHC$).

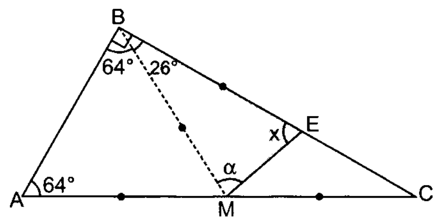
Entonces:
$\triangle AQB \cong \triangle BHC$ (hipotenusa - ángulo agudo)

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow BH = AQ \Rightarrow BH = 5 \\ &\quad BQ = CH \Rightarrow BQ = 12 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} HQ &= BQ - BH \\ HQ &= 12 - 5 \end{aligned}$$

$\therefore\ HQ = 7$

5. En un $\triangle ABC$, recto en B, el ángulo A mide 64°, M es punto medio de $\overline{AC}$ y E un punto de BC, tal que $BE = MC$. Hallar la medida del ángulo MEB.

Resolución:

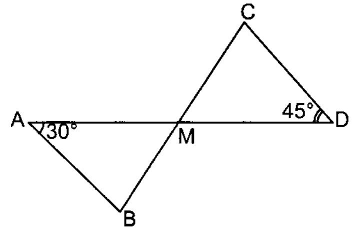


Dato: $BE = MC$ y $AM = MC$
$\Rightarrow BE = MC = AM$
Incógnita: $m\angle BEM = x$

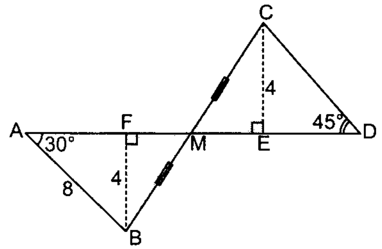
Como, al trazar $\overline{BM}$, es mediante hacia la hipotenusa del $\triangle ABC$.
$BM = AM = MC$
$\triangle AMB$ es isósceles: $m\angle ABM = m\angle A = 64°$
$\Rightarrow m\angle MBE = 26°$

$\triangle MBE$ es isósceles: $\alpha = x \wedge \alpha + x + 26° = 180°$
$2x + 26° = 180°$ $\quad\therefore\ x = 77°$

6. En la figura, $CM = MB$ y $AB = 8$. Hallar CD.



Resolución:
Trazamos $\overline{BF}$ y $\overline{CE}$, perpendiculares a $\overline{AD}$. Luego:



$\triangle AFB(30° \text{ y } 60°)$: $BF = \frac{AB}{2} \Rightarrow BF = 4$

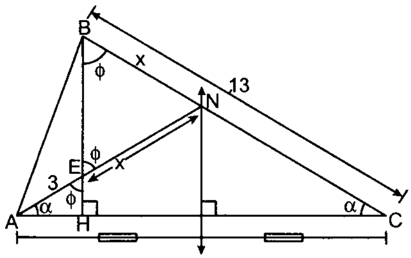
$\triangle CEM \cong \triangle BFM \Rightarrow CE = BF \Rightarrow CE = 4$

$\triangle CED(45° \text{ y } 45°)$: $CD = (CE)\sqrt{2}$

$\therefore\ CD = 4\sqrt{2}$

7. En un triángulo ABC, la mediatriz de $\overline{AC}$ corta a $\overline{BC}$ en el punto N. Luego, la altura $\overline{BH}$ corta a $\overline{AN}$ en el punto E. Si AE = 3 y BC = 13; hallar BN

Resolución:



BN = x (incógnita)
Analicemos los ángulos:

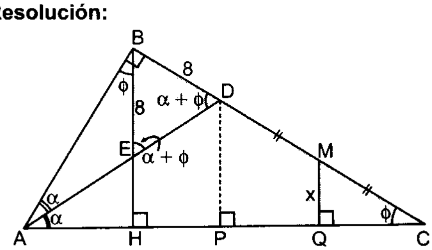
Por propiedad de la mediatriz: NC = NA
$\Rightarrow \triangle ANC$ es isósceles: $m\angle NAC = m\angle C = \alpha$

Si en el $\triangle AER$: $\angle AEH = \phi$ ...($\alpha + \phi = 90°$), entonces, para el $\triangle BHC$:
$m\angle HBC = 90° - m\angle C = 90° - \alpha \Rightarrow m\angle HBC = \phi$

Luego, el $\triangle BNE$ es isósceles: $EN = BN \Rightarrow EN = x$
Por último, tenemos:
$BN + NC = BC$; $BN + NA = BC$
$\Rightarrow x + (3 + x) = 13 \quad \therefore\ x = 5$

8. En un triángulo ABC, recto en B, la altura $\overline{BH}$ corta a la bisectriz interior $\overline{AD}$ en el punto E. Si BE = 8, hallar la distancia del punto medio de $\overline{DC}$ a $\overline{AC}$.

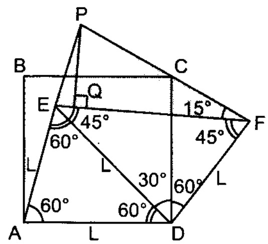
Resolución:



Sea M, punto medio de $\overline{DC}$ y $\overline{MQ} \perp \overline{AC}$
$\Rightarrow$ incógnita: MQ = x
Sabemos que, para todo triángulo rectángulo:
$m\angle ABH = m\angle C$
Se observa que: $\triangle BED$, isósceles BD = BE
$\Rightarrow BD = 8$
Trazamos: $\overline{DP} \perp \overline{AC}$
Por propiedad de la bisectriz: $DP = DB \Rightarrow DP = 8$
En el $\triangle DPC$ por ser base media: $MQ = \frac{DP}{2}$
$\Rightarrow MQ = \frac{8}{2} \quad \therefore\ MQ = 4$

9. Dado el cuadrado ABCD, de lado L, se dibujan los triángulos equiláteros: $\triangle AED$ (interior) y $\triangle CFD$ (exterior). Las prolongaciones de $\overline{AE}$ y $\overline{FC}$ se intersectan en el punto P. Hallar la distancia de P a $\overline{EF}$.

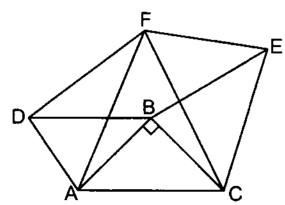
Resolución:



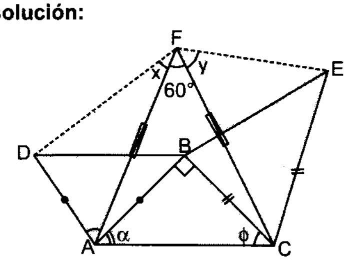
Del gráfico, el $\triangle EDF$ es rectángulo e isósceles, por lo que $EF = L\sqrt{2}$
Además en el $\triangle EPF$, donde $m\angle EFP = 15°$ y $m\angle PEF = 75°$, recto en P, $\overline{PQ}$ es altura relativa a la hipotenusa: $PQ = \frac{EF}{4}$

$\therefore\ PQ = \frac{L\sqrt{2}}{4}$

10. En la figura, $\triangle ADB$, $\triangle AFC$ y $\triangle BEC$ son triángulos equiláteros; calcular $m\angle DFE$, si el ángulo ABC es recto.



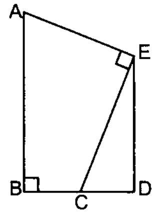
Resolución:



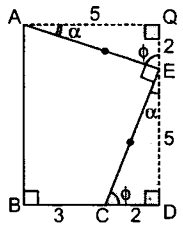
Incógnita: $m\angle DFE = 60° + x + y \quad ...(1)$

Como: m∠DAF = 60° − m∠FAB y
α = 60° − m∠FAB
(ya que los triángulos ADB y AFC son equiláteros:
m∠DAB = 60° = m∠FAC)
⇒ m∠DAF = α ⇒ ΔDAF ≅ ΔBAC(LAL)
⇒ x = ϕ
Análogamente: m∠FCE = 60° − m∠BCF y
ϕ = 60° − m∠BCF
⇒ m∠FCE = ϕ ⇒ ΔFEC ≅ ΔABC (LAL)
⇒ y = α
Además, en el ΔABC: $\phi + \alpha = 90°$
Finalmente, en (1): m∠DFE = 60° + x + y
∴ m∠DFE = 60° + ϕ + α = 60° + 90° = 150°

11. En la figura, AE = EC ; $\overline{AE} \perp \overline{EC}$; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; $\overline{ED} \perp \overline{DC}$ Si BC = 3 y ED = 5, hallar AB.

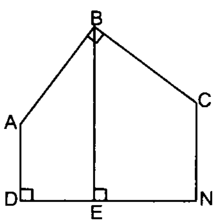


Resolución:

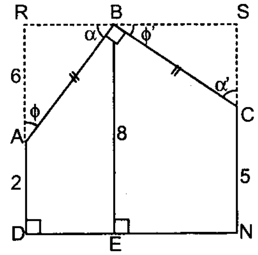


Trazamos $\overline{AQ}$, perpendicular a la prolongación de $\overline{DE}$. Entonces, si m∠ECD = ϕ y m∠CED = α; ($\alpha + \phi = 90°$), se obtienen:
m∠AEQ = ϕ ...(complemento de α) y
m∠QAE = α ...(complemento de ϕ)
ΔAQE ≅ ΔEDC (ALA)
⇒ AQ = ED ⇒ AQ = 5
Además, CD = BD − BC, pero BD = AQ = 5
⇒ CD = 5 − 3 ⇒ CD = 2
y luego: QE = CD ⇒ QE = 2
Finalmente, AB = QD ⇒ AB = QE + ED
AB = 2 + 5 ∴ AB = 7

12. Hallar DN, si AB = BC, AD = 2 cm, CN = 5 cm y BE = 8 cm.



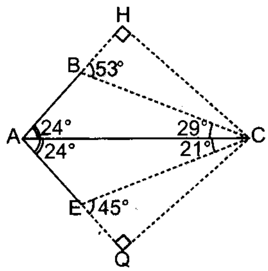
Resolución:



Por B, trazamos paralela a $\overline{DN}$.
⇒ $\alpha = \alpha'$, $\phi = \phi'$ (lados perpendiculares).
ΔARB ≅ ΔBSC: RB = 3, BS= 6
Luego: DN = DE + EN
DN = RB + BS ∴ DN = 9

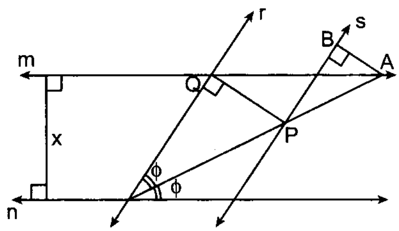
13. ABC, es un triángulo tal que m∠A = 24° y m∠C = 29°. Exteriormente, relativo a $\overline{AC}$ se toma el punto E siendo: m∠EAC = 24° y m∠ECA = 21°. Si BC = 5; hallar EC.

Resolución:

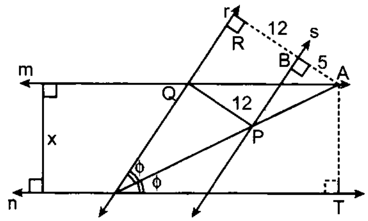


Observando los ángulos exteriores en B y E de los triángulos ABC y AEC, concluimos que son notables y para usarlos en triángulos rectángulos, trazamos: $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{CQ} \perp \overline{AE}$
Así: ΔBHC(53° y 37°) ⇒ HC = 4
Por propiedad de la bisectriz, para el ángulo A:
CQ = CH
⇒ CQ = 4
Finalmente, en el ΔEQC(45° y 45°): EC = CQ$\sqrt{2}$
∴ EC = 4$\sqrt{2}$

14. En la figura, $\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{r} // \overleftrightarrow{s}$. Hallar x, si PQ = 12 y AB = 5.



Resolución:



Prologamos $\overline{AB}$, hasta cortar a $\overleftrightarrow{r}$ en R entonces $BR = PQ \Rightarrow BR = 12$.

Trazamos $\overline{AT} \perp \overleftrightarrow{n}$. Por propiedad de la bisectriz: $AT = AR$

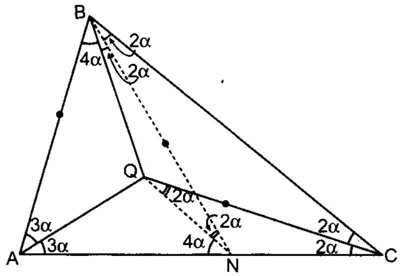
$\Rightarrow x = 5 + 12$

$\therefore\ x = 17$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un triángulo ABC, las bisectrices interiores se intersecan en Q; tal que AB = QC, $m\angle BAQ = m\angle QAC = 3\alpha$; $m\angle BCQ = m\angle ACQ = 2\alpha$. Hallar $m\angle ABC$.

Resolución:



Se traza $\overline{BN}$, de manera que $m\angle NBC = 2\alpha$.

NQBC es un trapecio isósceles.

$\Rightarrow m\angle QBN = m\angle QCN = 2\alpha$

Como $\overline{BQ}$ es bisectriz:

$\Rightarrow m\angle ABQ = m\angle QBC = 4\alpha$

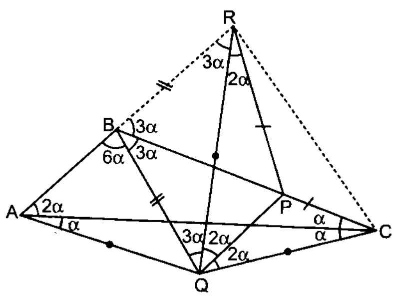
$\triangle ABC$: $6\alpha + 8\alpha + 4\alpha = 180°$

$\Rightarrow 18\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 10°$

$\therefore\ m\angle ABC = 80°$

2. En un triángulo ABC se ubica el punto externo Q tal que el segmento BQ interseca al lado $\overline{AC}$. Si $m\angle ABQ = 6\alpha$; $m\angle BAC = 2\alpha$, $m\angle BCA = \alpha$; $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$ y $m\angle BCA = m\angle ACQ$, hallar α.

Resolución:



Se prolonga $\overline{AB}$ hasta R, de manera que BR = BQ.

$\Rightarrow m\angle BRQ = m\angle RQB = 3\alpha$.

$\triangle AQR$ es isósceles: AQ = QR

Q: circuncentro del $\triangle ARC$

$\Rightarrow m\angle RQC = 4\alpha$

$\Rightarrow$ P es circuncentro del $\triangle QRC$.

$\triangle BRP \cong \triangle BQP$ (LLL)

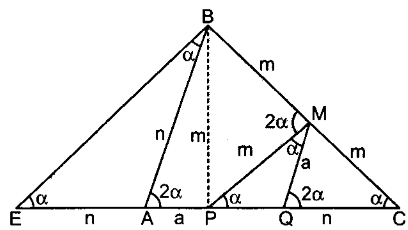
$\Rightarrow m\angle QBC = m\angle RBC = 3\alpha$

Luego: $6\alpha + 3\alpha + 3\alpha = 180°$

$\Rightarrow 12\alpha = 180° \quad \therefore\ \alpha = 15°$

3. En un triángulo ABC se ubican los puntos M en $\overline{BC}$, P y Q en $\overline{AC}$, tal que $\overline{AP} \cong \overline{PQ}$ y $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si M es punto medio de $\overline{BC}$ y $m\angle BAC = 2m\angle PMQ = 2m\angle MCQ$, hallar la $m\angle PMQ$.

Resolución:



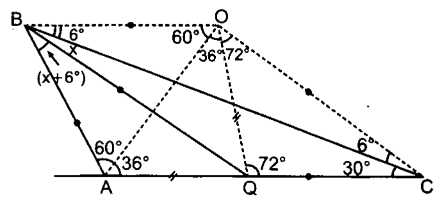
$\triangle BAP \cong \triangle CQM$ (LAL) $\Rightarrow BP = MC = m$

$\triangle PMC$ es isósceles: PM = MC = m.

$\Rightarrow 2\alpha = 60° \quad \therefore\ \alpha = 30°$

4. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BQ}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{QC}$. Si $m\angle A = 96°$ y $m\angle C = 30°$, hallar la $m\angle QBC$.

Resolución:



O: circuncentro del $\triangle ABC$.

$\Rightarrow$ $\triangle ABO$ equilátero; $\triangle BOC$ isósceles

$\triangle AOQ$ isósceles; $\triangle BOQ$ isósceles

$\triangle BOQ \cong \triangle BAQ$ (LLL)

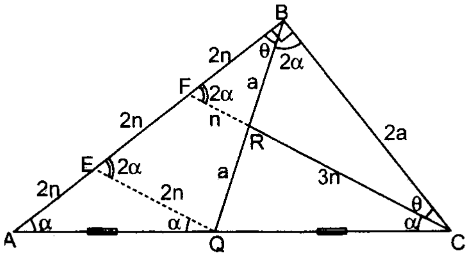
$\Rightarrow m\angle OBQ = m\angle ABQ = x + 6°$

$\triangle ABC$: $96° + x + 6 + x + 30° = 180°$

$2x = 180° - 132° \Rightarrow 2x = 48° \quad \therefore\ x = 24°$

5. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BQ}$ y en el triángulo BQC se traza la mediana $\overline{CR}$. Si $m\angle BAQ = m\angle RCQ = \alpha$ y $m\angle RBC = 2\alpha$, hallar α.

Resolución:



Si $\overleftrightarrow{CR} \cap \overline{AB} = \{F\}$

Se traza $\overline{QE} \parallel \overline{CF}$

Por teorema. de los puntos medios: AE = EF = FB = 2n

$\triangle AEQ$ es isósceles: AE = EQ = 2n

Por teorema de la base media: $\triangle EBQ$: FR = n

$\triangle AFC$: FC = 4n $\Rightarrow$ RC = 3n

$\triangle FBC \cong \triangle EQB$ (LAL) $\Rightarrow m\angle EBQ = m\angle FCB = \theta$

QB = BC = 2a

$\triangle ABC$: $2\theta + 4\alpha = 180°\ \theta + 2\alpha = 90°$

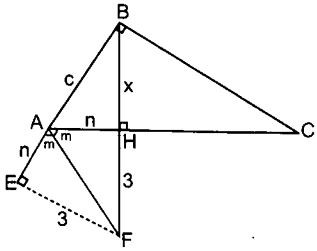
$\triangle ABC$: AQ = BQ = QC = 2a

Luego, $\alpha = \theta \Rightarrow \alpha + \alpha + \alpha = 90° \Rightarrow 3\alpha = 90°$

$\therefore\ \alpha = 30°$

6. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la bisectriz del ángulo exterior A interseca a la prolongación de la altura BH en F. Si AB + AH = 4 y HF = 3. Hallar BH.

Resolución:

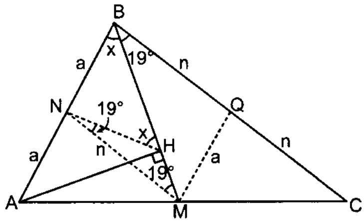


Dato: c + n = 4

$\triangle$BEF: $x + 3 = 5 \quad \therefore\ x = 2$

7. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$, luego se traza $\overline{AH} \perp \overline{BM}$ ($H \in \overline{BM}$). Si AB = 2(HM) y $m\angle MBC = 19$. Hallar la $m\angle ABM$

Resolución:



MNBQ es romboide: $m\angle BMN = 19°$

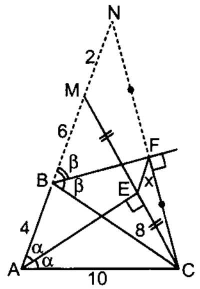
$\triangle NHM$ es isósceles:

$m\angle HNM = m\angle HMN = 19°$

Luego: $x = 19° + 19° \quad \therefore\ x = 38°$

8. En un triángulo ABC, AB = 4, BC = 8 y AC = 10 por el vértice C se trazan $\overline{CE}$ y $\overline{CF}$ perpendiculares a las bisectrices interior de A y exterior de B, respectivamente. Hallar EF.

Resolución:



$\triangle AMC$ es isósceles:

$4 + BM = 10 \Rightarrow BM = 6.$

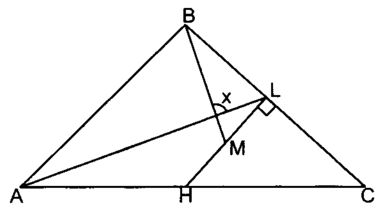
$\triangle CBN$ isósceles:

$6 + MN = 8 \Rightarrow MN = 2$

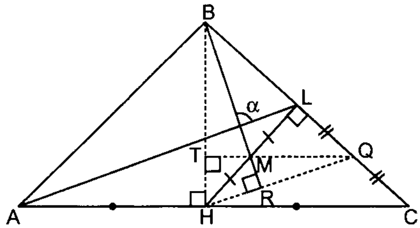
$\triangle CMN$; por teorema de los puntos medios:

$x = \dfrac{2}{2} \quad \therefore\ x = 1$

9. En la figura AB = BC, AH = HC, y HM = ML; hallar x



Resolución:



$\triangle ALC$: se traza $\overline{HQ} \parallel \overline{AL}$

$\Rightarrow$ LQ = QC (teorema de los puntos medios)

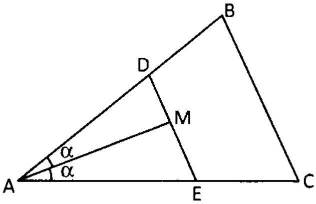
$\triangle$HLC: $\overleftrightarrow{QM} \cap \overline{BH} = \{T\}$

Como: $\overleftrightarrow{QM} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \overline{QT} \perp \overline{BH}$

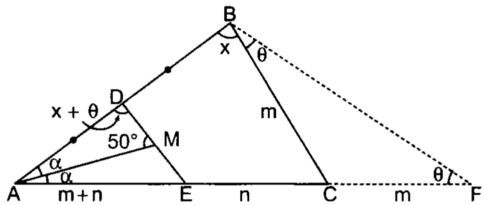
M: ortocentro del $\triangle HBQ$

Como: $\overline{HQ} \parallel \overline{AL} \quad \therefore\ x = 90°$

10. En la figura: DA = BD, m∠AMD = 50° y AE = BC + EC, Hallar la m∠ABC.



Resolución:



$\triangle$ABF: $\overline{DE}$ es base media

$\Rightarrow$ m∠ADM = m∠ABF = x + θ

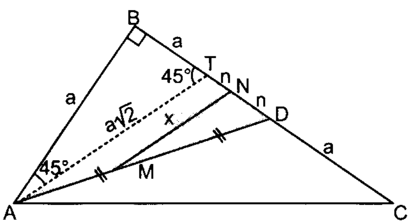
$\triangle$ADM: α + θ + x = 130° ...(1)

$\triangle$ABF: 2α + 2θ + x = 180° ...(2)

De (1) y (2): x + 2(130° − x) = 180° ∴ x = 80°

11. En un triángulo rectángulo ABC (m∠B = 90°, AB < BC), D ∈ $\overline{BC}$ de modo que DC = AB. Si AB = a, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$.

Resolución:



Se traza $\overline{AT}$, de modo que m∠BAT = 45°

$\triangle$ABT es isósceles: AB = BT = a

En $\overline{BC}$: BN = NC = a + n

Luego: TN = ND = n

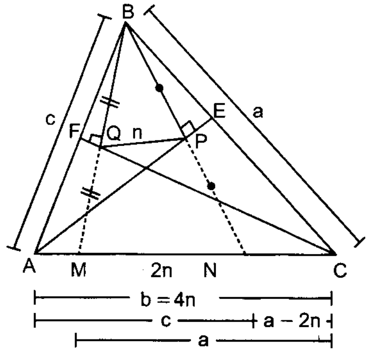
$\triangle$ATD: TN = ND y AM = MD

$\overline{MN}$ es base media.

$\therefore\ x = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

12. En un triángulo ABC acutángulo, se trazan las bisectrices interiores de los ángulos A y C. Desde B se trazan las perpendiculares a dichas bisectrices BP y BQ respectivamente. Si $\dfrac{PQ}{AC} = \dfrac{1}{4}$, hallar la razón entre el perímetro del triángulo ABC y la longitud del segmento PQ.

Resolución:



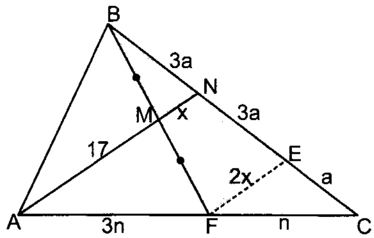
De la figura: c + a − 2n = 4n $\Rightarrow$ a + c = 6n

a + b + c = 6n + 4n $\Rightarrow$ a + b + c = 10n

Luego: $\dfrac{a+b+c}{PQ} = \dfrac{10n}{n}$ $\therefore\ \dfrac{a+b+c}{PQ} = 10$

13. Dado el triángulo ABC, sobre $\overline{AC}$ se tiene un punto F de modo que AF = 3FC. En el triángulo ABF se traza la mediana AM cuya prolongación interseca a $\overline{BC}$ en N. Si AM = 17, hallar MN.

Resolución:



Dato: AF = 3FC = 3n

Se traza $\overline{FE}$ // $\overline{AN}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{EC}{NE} = \dfrac{1}{3}$

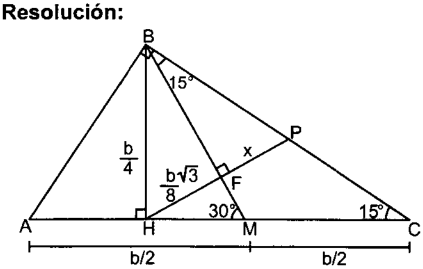
$\triangle$FBE: BN = NE = 32

$\overline{MN}$ es base media, por teorema: FE = 2x

Luego: $\dfrac{2x}{17+x} = \dfrac{n}{4n}$ $\Rightarrow$ 8x = x + 17 $\therefore\ x = \dfrac{17}{7}$

14. En un triángulo ABC (recto en B), la m∠C = 15°, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$ que al prolongarse interseca en P a $\overline{BC}$. Si AC = b, hallar FP.

Resolución:



$\triangle ABC$, por propiedad: $BH = \frac{b}{4}$

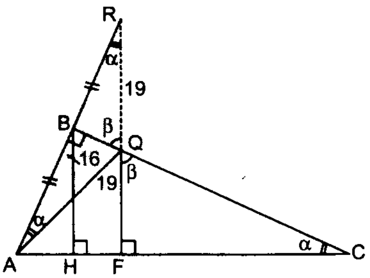
$\triangle HFM$ notable: $HF = \frac{b}{8}\sqrt{3}$

Pero: BH = HP

$$\frac{b}{4} = \frac{b\sqrt{3}}{8} + x \qquad \therefore\ x = \frac{b}{8}(2 - \sqrt{3})$$

15. En un triángulo ABC, recto en B, la altura $\overline{BH}$ mide 16 y Q es un punto de $\overline{BC}$, tal que AQ = 19 y $m\angle BAQ = m\angle ACB$. Hallar la distancia de Q a $\overline{AC}$.

Resolución:



$\overline{QF} \perp \overline{AC}$ (distancia de Q a $\overline{AC}$)

Incógnita: QF

Prolongamos $\overline{AB}$ y $\overline{FQ}$, hasta R.

Sea: $m\angle ACB = \alpha \Rightarrow m\angle BAQ = \alpha$

y sea β, complemento de α en $\triangle QFC$.

Luego, $m\angle BQR = \beta$ y $m\angle R = \alpha$

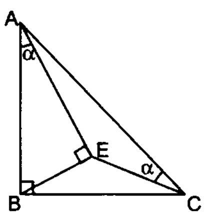
$\triangle AQR$ es isósceles.

entonces: QR = AQ = 19 y AB = BR

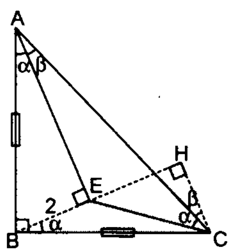
Finalmente, observamos que $\overline{BH}$ es base media relativa a $\overline{RF}$, en el $\triangle AFR$.

Así: $RF = 2(BH) \Rightarrow 19 + QF = 2(16) \qquad \therefore\ QF = 13$

16. En la figura, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; AB = BC
$\overline{AE} \perp \overline{EB}$; $\angle EAB \cong \angle ECA$. Hallar EC, si BE = 2



Resolución:



Se observa: $m\angle EBC = m\angle EAB = \alpha$

A fin de obtener un triángulo congruente al $\triangle AEB$, trazamos $\overline{CH} \perp \overline{BE}$.

Luego: $\triangle BHC \cong \triangle AEB$

$\Rightarrow CH = BE \Rightarrow CH = 2$

De otro lado: $m\angle ACH = m\angle EAB = \beta$

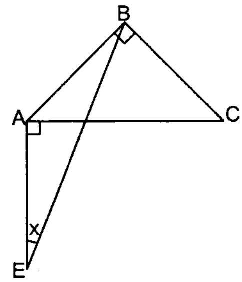
Siendo: $m\angle BAC = \alpha + \beta = 45°$;

Entonces: $m\angle ECH = \alpha + \beta = 45°$

Así, en el $\triangle EHC$, tendremos: $EC = CH\sqrt{2}$

$\therefore\ EC = 2\sqrt{2}$

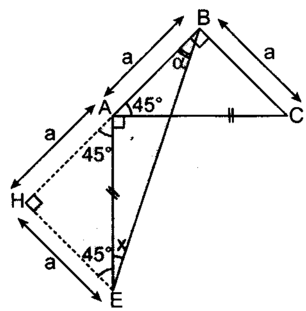
17. En la figura mostrada AB = BC; $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{AC} \perp \overline{AE}$ y AC = AE. Hallar el valor de x.



Resolución:

Sea AB = BC = a. Trazamos $\overline{EH} \perp \overline{AB}$

$\triangle AHE \cong \triangle ABC$: Luego: AH = HE = a

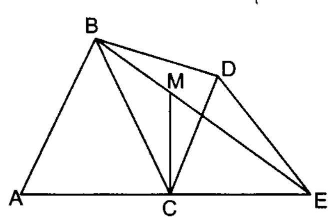


En el triángulo rectángulo BHE, los catetos son entre sí como 1 a 2 $\Rightarrow \alpha = \frac{53°}{2} = 26°30'$

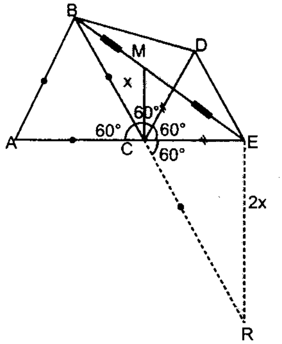
$45° + x = 90° - \alpha \Rightarrow 45° + x = 90° - 26°30'$

$\therefore\ x = 18°30'$

18. En la figura, $\triangle ABC$ y $\triangle CDE$ son equiláteros, BD = 18 y BM = EM. Hallar CM.



Resolución:



Por E trazamos $\overline{ER} \parallel \overline{CM}$, a fin de aprovechar el dato BM = EM.

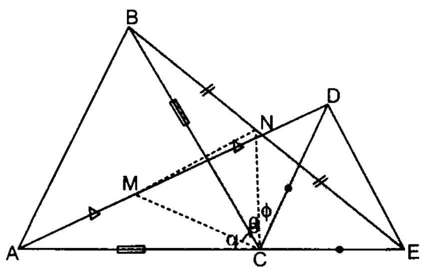
Luego, por el teorema de los puntos medios, en el $\triangle$BRE: CR = BC y ER = 2(CM) $\Rightarrow$ ER = 2x

Se observa que $\triangle ECR \cong \triangle DCB$ (LAL)

$\Rightarrow$ ER = BD $\Rightarrow$ 2x = 18 $\quad\therefore$ x = 9

19. En la figura, los triángulos ABC y CDE son equiláteros, M biseca $\overline{AD}$ y N biseca BE. Demostrar que el triángulo MCN es equilátero.

Resolución:



Bastará probar que: CM = CN y $\beta + \phi = 60°$

Así tenemos: m$\angle$BCE = m$\angle$ACD = 120°

$\triangle BCE \cong \triangle ACD$ (LAL)

Entonces BE = AD y CN = CM, por ser $\overline{CN}$ y $\overline{CM}$ medianas relativas a lados congruentes $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$.

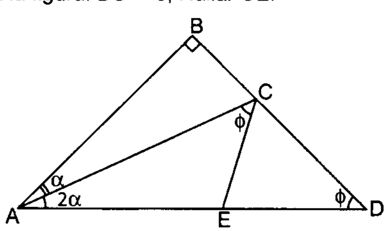
También: AM = BN $\Rightarrow$ $\triangle AMC \cong \triangle BNC$ (LLL)

$\therefore \alpha = \phi$

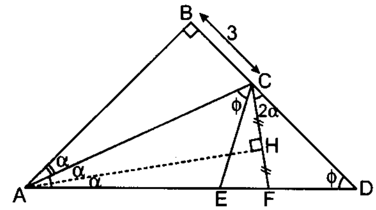
y como $\beta + \alpha = 60°$ $\Rightarrow$ $\beta + \phi = 60°$

y esto es suficiente, porque el $\triangle$MCN, isósceles, tiene m$\angle$MCN = 60°, resultando equilátero.

20. En la figura: BC = 3; Hallar CE.



Resolución:



Sea $\overline{CH}$, perpendicular a la bisectriz del m$\angle$CAD y que prolongada corta a $\overline{AD}$ en F.

Luego, por propiedad de la bisectriz: CH = BC = 3.

En el $\triangle$CAF, $\overline{AH}$ es altura y bisectriz.

$\Rightarrow$ HF = CH = 3 y CF = 6

Por tener lados perpendiculares:

m$\angle$FCD = m$\angle$BAH $\Rightarrow$ m$\angle$FCD = 2α

Por el teorema del ángulo externo:

$\triangle$AEC: m$\angle$CEF = 2α + ϕ .

$\triangle$CFD: m$\angle$EFC = 2α + ϕ

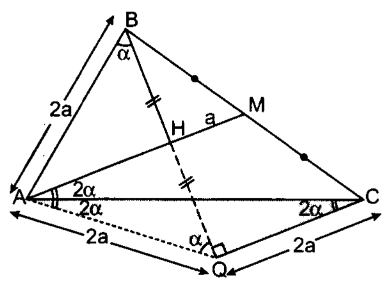
$\Rightarrow$ m$\angle$CEF = m$\angle$EFC $\Rightarrow$ el $\triangle$ECF es isósceles (CE = CF)

$\therefore$ CE = 6

21. En un $\triangle$ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$ y luego $\overline{BH} \perp \overline{AM}$ (H en $\overline{AM}$). Si: m$\angle$ABH = α, m$\angle$MAC = 2α y AB = 2HM.

Hallar el valor de α.

Resolución:



Sea HM = a $\Rightarrow$ AB = 2a

Para lograr que $\overline{HM}$ sea base media en algún triángulo, aprovechando que BM = MC, trazamos $\overline{CQ}$, perpendicular a $\overline{BH}$.

Luego, en el $\triangle$BQC: BH = HQ y QC = 2HM $\Rightarrow$ QC = 2a.

Al trazar $\overline{AQ}$, el $\triangle$BAQ resulta isósceles ya que $\overline{AH}$ es altura y mediana.

$\Rightarrow$ m$\angle$AQB = m$\angle$ABH = α y AQ = AB = 2a

Finalmente, el $\triangle$AQC es isósceles:

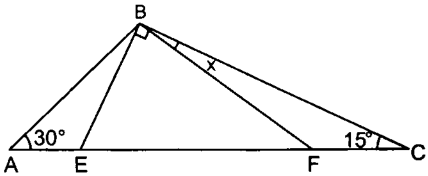
m$\angle$QAC = m$\angle$ACQ = 2α

$\Rightarrow$ 2α + (90°+ α) + 2α = 180°

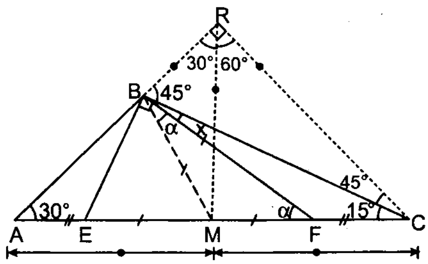
$\therefore \alpha$ = 18°

22. En la figura adjunta: AE = FC y m$\angle$EBF = 90°.

Hallar el valor de x.



Resolución:



Trazamos $\overline{CR} \perp \overline{AB}$

$m\angle CBR = m\angle BCR = 45°$

Entonces: BR = RC

Sea M punto medio de $\overline{AC}$.

Como AE = FC, por dato; entonces AM = MC.

Trazamos las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{RM}$ en los triángulos rectángulos EBF y ARC, respectivamente.

Luego: EM = BM = MF y AM = RM = MC (propiedad)

El $\triangle$MRC resulta equilátero ⇒ RC = RM = MC (propiedad).

$\triangle$BMF es isósceles $m\angle MBF = m\angle MFB = \alpha$.

Por ser ángulo externo en $\triangle$FBC:

$\alpha = x + 15°$ ...(1)

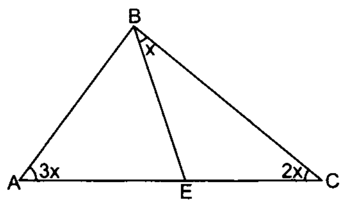
Finalmente, en el $\triangle$BRM es isósceles:

$m\angle MBR = m\angle BMR = 75° \Rightarrow \alpha + x + 45° = 75°$

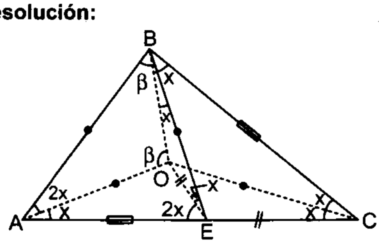
$\Rightarrow \alpha + x = 30°$

Con (1): $x + 15° + x = 30°$ $\therefore\ x = 7{,}5°$

23. En la figura, AE = BC; hallar x.



Resolución:



Tomamos el punto O, tal que $m\angle OAE = x$ y $m\angle OEA = \mathbf{2x}$, para obtener el $\triangle$AOE congruente al BEC (postulado ALA), entonces OE = EC y OA = BE

Además, como $m\angle BAE = 3x = m\angle BEA$.

En el $\triangle$ABE: AB = BE

Al trazar $\overline{OC}$, resulta al $\triangle$OEC isósceles.

También el $\triangle$AOC: OC = OA.

$\triangle BOE \cong \triangle OEC$ (LAL) ⇒ $m\angle OBE = x$

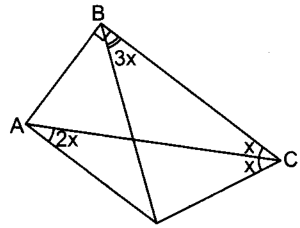
En el cuadrilátero no convexo AEBO:

$\beta = x + 3x + x \Rightarrow \beta = 5x$

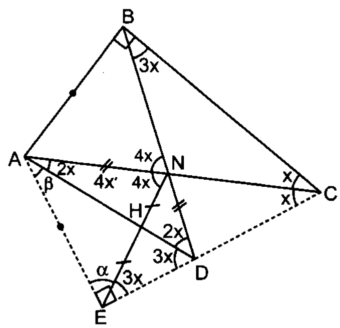
Finalmente, en el $\triangle$AOB.

$2\beta + 2x = 180°$ $\therefore\ x = 15°$

24. Del gráfico, hallar el valor de x.



Resolución:



$\triangle$AND es isósceles: AN = ND.

Trazamos $\overline{AE}$, perpendicular a $\overline{CD}$.

Propiedad de la bisectriz, para $\angle BCD$: AE = AB

También BN = EN, $m\angle NEC = m\angle NBC = 3x$ y $m\angle ANE = 4x$

Además, $\alpha = 90° - 3x = \beta$

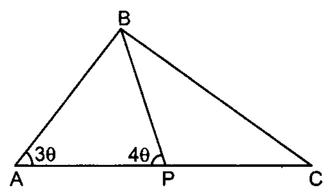
Luego, $\triangle$AHE es isósceles: AH = HE y como HE = HD

⇒ AH = HD

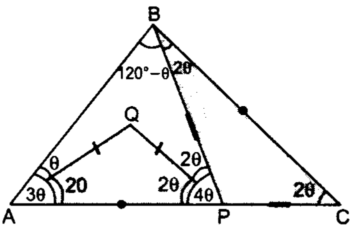
Entonces, el $\triangle$AND es isósceles: $\overline{NH} \perp \overline{AD}$

$\triangle$AHN: $2x + 4x = 90°$ $\therefore\ x = 15°$

25. Calcular: θ si AP = BC y BP = PC



Resolución:



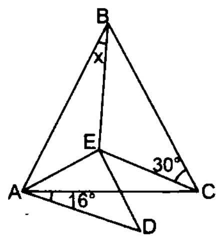
En el triángulo isósceles BPC:
$m\angle PBC = m\angle PCB = 2\theta$

Construimos el triángulo AQP congruente el triángulo BPC, luego: AQ = QP = BP = PC
$m\angle QAP = m\angle QPA = 2\theta$ y $m\angle BAQ = \theta$; $m\angle BPQ = 2\theta$

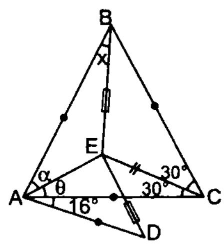
En el cuadrilátero no convexo ABPQ, por propiedad: $m\angle ABP = 120 - \theta$

Finalmente en el DABP:
$3\theta + 120° - \theta = 180° \quad \therefore\ \theta = 10°$

26. En el gráfico, el $\triangle ABC$ es equilátero, AD = BC y BE = ED. Calcular el valor de x.



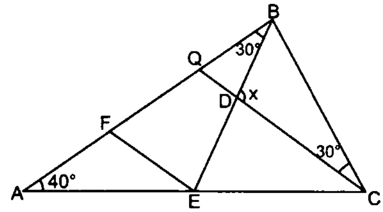
Resolución:



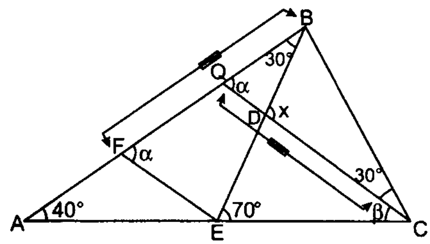
$\triangle BCE \cong \triangle ACE$ (LAL) $\Rightarrow$ AE = EB
$\triangle AEB$ es isósceles $\alpha = x$ ...(1)
$\triangle AEB \cong \triangle AED$ (LLL) $\Rightarrow \alpha = \theta + 16°$ ...(2)
Como: $\alpha + \theta = 60° \Rightarrow$ con (2): $\theta + 16° + \theta = 60°$
$\theta = 22°$

En (2): $\alpha = 22° + 16° = 38°$
$\therefore$ En (1): $x = 38°$

27. En la figura, QC = FB y EF // QD, Calcular el valor de x.



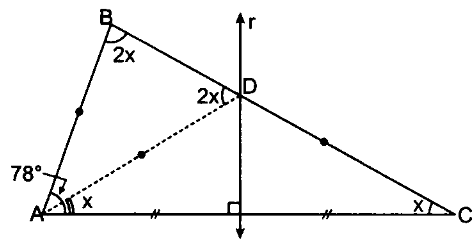
Resolución:



$\triangle FEB \cong \triangle QBC$ (ALA) $\Rightarrow$ EB = BC
$\triangle EBC$, isósceles $\Rightarrow \beta + 30° = 70° \Rightarrow \beta = 40°$
Ángulo exterior $\triangle ECD$: $x = 70° + \beta \Rightarrow x = 70° + 40°$
$\therefore\ x = 110°$

28. En un $\triangle ABC$ $m\angle A = 78°$. La mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en el punto D. Calcular la $m\angle C$, sabiendo que AB = DC.

Resolución:



Incógnita: $m\angle C = x$

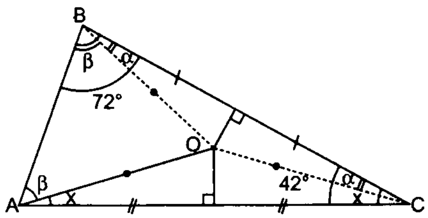
Como $\overleftrightarrow{r}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, entonces por el teorema para esta línea:
DC = DA
$\triangle ADC$ es isósceles $\Rightarrow m\angle DAC = m\angle C = x$
y por ángulo externo: $m\angle ADB = m\angle DAC + m\angle C$
$\Rightarrow m\angle ADB = 2x$

El $\triangle ABD$ también es isósceles: $m\angle B = m\angle ADB$
$\Rightarrow m\angle B = 2x$

Finalmente, en el $\triangle ABC$: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$
$78° + 2x + x = 180°$
$\Rightarrow x = 34°$
$\therefore\ m\angle C = 34°$

29. En un $\triangle ABC$, $m\angle B = 72°$ y $m\angle C = 42°$. Las mediatrices de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto O. Calcular la $m\angle OAC$.

Resolución:



En el gráfico, $m\angle OAC = x$ (incógnita).

Por el teorema de la mediatriz:

Para $\overline{AC} \Rightarrow OA = OC \Rightarrow m\angle OCA = m\angle OAC = x$

Para $\overline{BC} \Rightarrow OB = OC \Rightarrow m\angle OCB = m\angle OBC = \alpha$

Luego, el $\triangle AOB$ también es isósceles:

$m\angle ABO = m\angle OAB = \beta$

Escribiendo la suma de medidas de los tres ángulos en el $\triangle ABC$:

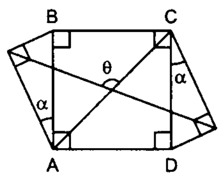
$2\alpha + 2\beta + 2x = 180° \Rightarrow \alpha + \beta + x = 90°$ ...(1)

Pero, en el vértice B: $\alpha + \beta = 72°$ ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): $72° + x = 90° \Rightarrow x = 18°$

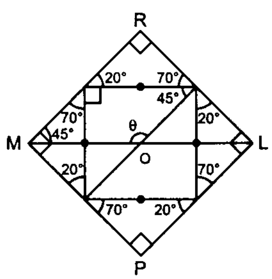
$\therefore\ m\angle OAC = 18°$

30. En la figura ABCD es un cuadrado y $\alpha = 20°$, hallar el valor de θ.



Resolución:

Piden θ.



Se forman triángulos congruentes.

$\triangle BMA \cong \triangle BRC \cong \triangle CLD \cong \triangle DPA$

$\Rightarrow$ MRLP es un cuadrado.

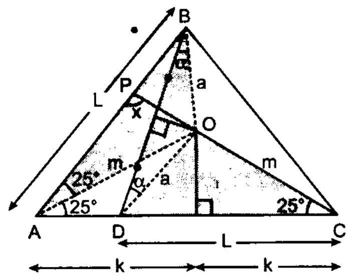
En el cuadrilátero MRCO se cumple:

$45° + \theta + 45° + 70° + 90° = 360°$

$\therefore\ \theta = 110°$

31. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BD}$, las rectas mediatrices de $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en O. Si: $AB = DC$ y $m\angle DCO = 25°$, calcular la $m\angle APC$ siendo P la intersección de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CO}$.

Resolución:



Incógnita: $m\angle APC = x$

Dato: $m\angle DCO = 25°$

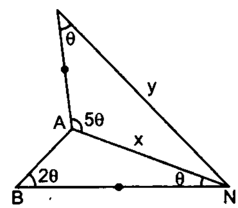
Se observa: $\triangle AOB \cong \triangle DOC$ (L.L.L.)

$\Rightarrow m + BAO = 25°$

Luego: $\triangle APC$: $x + 75° = 180°$

$\therefore\ x = 105°$

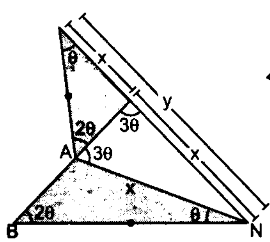
32. En la figura, halle $\frac{x}{y}$:

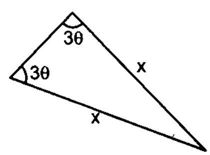


Resolución:

Al prolongar $\overline{BA}$ se forman triángulos congruentes caso (ALA)

Pero el triángulo formado en isósceles.

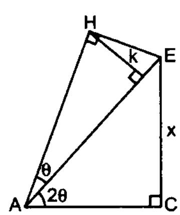




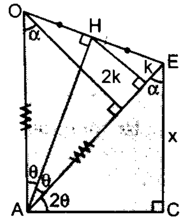
$\therefore\ 2x = y$

$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$

33. Calcule "x":



Resolución:

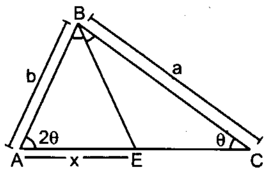


Se prolonga $\overline{EH}$ hasta O, tal que: HE = HO

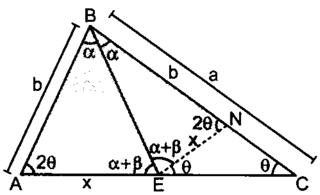
Los triángulos sombreados son congruentes debido a que $\overline{AH}$ es mediatriz de OE, caso ALA

$\therefore$ x = 2k

34. Si BE es bisectriz, calcule x:



Resolución:



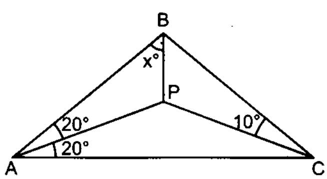
El $\triangle$ABE $\cong$ $\triangle$BEN

Caso ALA

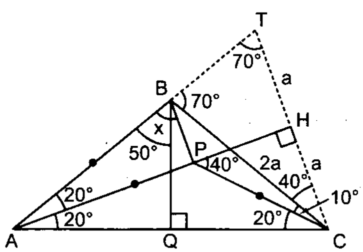
$\Rightarrow$ AB = BN = b

a = b + x $\quad\therefore$ x = a − b

35. Calcular x, si AP = PC



Resolución:



Trazamos $\overline{CT}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{AP}$ en H (T en la prolongación de AB) luego:

m$\angle$ATC = m$\angle$ACT = 70° y TH = HC = a

El triángulo BCT es isósceles $\Rightarrow$ BC = TC = 2a

Al trazar $\overline{BQ} \perp \overline{AC}$ se determina el:

$\triangle$BQC de 30° y 60° donde: BQ = a

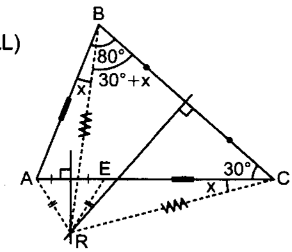
$\triangle$AQB $\cong$ $\triangle$PHC(ALA) $\Rightarrow$ AB = PC

En el triángulo BAP (isósceles)

$\therefore$ x = 80°

36. En un triángulo ABC, m$\angle$ABC = 80° y m$\angle$ACB = 30°, E $\in$ $\overline{AC}$ tal que AB $\cong$ EC. Las mediatrices de $\overline{AE}$ y $\overline{BC}$ se intersectan en R. Halle la m$\angle$ACR.

Resolución:



$\triangle$RAB $\cong$ $\triangle$REC (LLL)

$\Rightarrow$ m$\angle$ABR = x

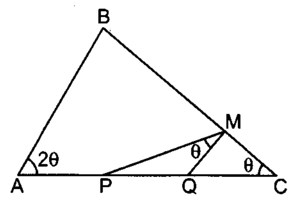
Luego:

x + 30° + x = 80°

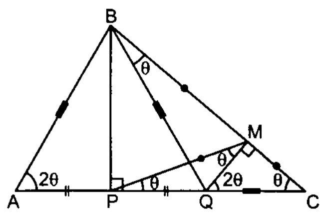
2x = 50°

$\therefore$ x = 25°

37. Calcular θ, si AB = QC, AP = PQ y BM = MC.



Resolución:



En el triángulo isósceles ABQ, $\overline{BP}$ es altura.

En el $\triangle$BPC: $\overline{PM}$ es mediana PM = BM = MC y m$\angle$MPC = m$\angle$MCP = θ

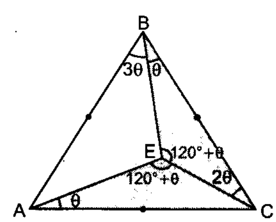
Por $\angle$ exterior en el $\triangle$PQM: m$\angle$MQC = θ + θ = 2θ

En el triángulo isósceles BQC: $\overline{QM} \perp \overline{BC}$

2θ + θ = 90° $\quad\therefore$ θ = 30°

38. E es un punto contenido en el interior del triángulo equilátero ABC. Si la m$\angle$EAC = θ, m$\angle$ABE = 3θ y m$\angle$ECB = 2θ. Calcular θ.

Resolución:



$\triangle$AEC $\cong$ $\triangle$BEC

$\Rightarrow$ m$\angle$EBC = θ

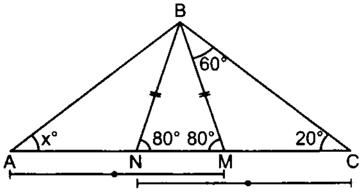
Luego:

4θ = 60°

$\therefore$ θ = 15°

39. Sea el triángulo ABC, obtuso en B, m∠C = 20°, M ∈ $\overline{AC}$ tal que $\overline{AM} \cong \overline{BC}$ y la m∠MBC = 60°. Halle la m∠BAC

Resolución:



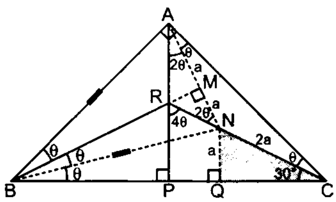
ΔNBC ≅ ΔMBA (L.A.L.) ∴ x = 20°

40. En un triángulo ABC recto en A, se ubica el punto R en su interior de manera que:

m∠ABR = m∠ACR = $\frac{1}{3}$m∠RAC = $\frac{1}{2}$m∠RBC,

calcule la m∠ABR

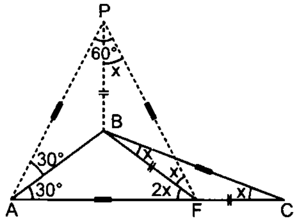
Resolución:



En primer lugar se traza $\overline{AN}$, de modo que:
m∠NAC = θ
El ΔRAN es isósceles:
m∠RAN = m∠RNA = 2θ
Ahora observa: m∠MRN = 90° − 4θ + 2θ
m∠MRN = 90° − 2θ ⇒ $\overline{BM} \perp \overline{AN}$
Luego el ΔBAN es isósceles.
Por teorema de la bisectriz de un ángulo:
MN = NQ = a
◺NQC es notable (30° y 60°)
m∠NCQ = 30°
◺APC: 3θ + θ + 30° = 90° ⇒ 4θ = 60° ∴ θ = 15°

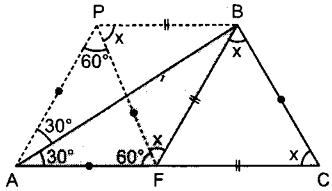
41. El ángulo A de un triángulo ABC mide 30°. Se traza la ceviana $\overline{BF}$ con la condición que:
AF = BC y BF = FC. Calcular la m∠FBC.

Resolución:
Consideremos dos casos:
1.° Caso



Si: m∠ABF > 90° ∧ m∠AFB = 2x < 60°
Y al construir el triángulo equilátero APF, el lado $\overline{PF}$ no interseca a $\overline{AB}$;
Luego: AP = PF = AF y m∠PAB = m∠BAF = 30°;
ΔPAB ≅ ΔBAF (LAL) ⇒ PB = BF
ΔPBF ≅ ΔBFC (LLL) ⇒ m∠BFP = m∠BCF = x
Finalmente: x + 2x = 60° ∴ x = 20°

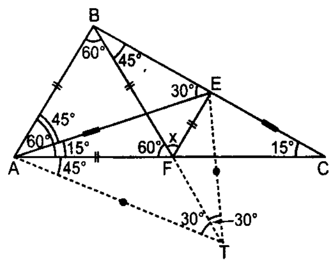
2.° Caso



Si m∠ABF < 90°
Construimos el triángulo equilátero APF con: AP = PF = AF,
m∠PAB = m∠BAF = 30°
ΔPAB ≅ ΔBAF (LAL) ⇒ PB = BF
ΔPBF ≅ ΔBCF (LLL) ⇒ m∠PFB = m∠BCF = x
En el ΔFBC: 60° + x = x + x
∴ x =60°

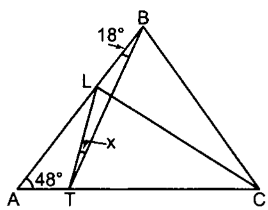
42. En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ de modo que:
AE = EC, AB = BF, m∠FBC = 45° m∠ACB = 15°.
Calcular la m∠BFE.

Resolución:

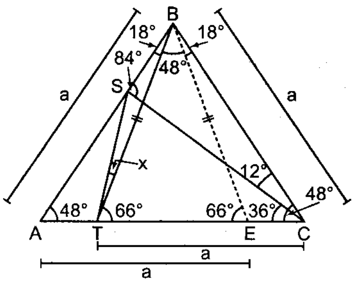


Construimos el triángulo equilátero ATE,
Luego: AE = AT = ET y m∠FAT = 45°
ΔAFT ≅ ΔABE (LAL)
⇒ m∠ATF = 30° y m∠FTE = 30°
ΔATF ≅ ΔFTE (LAL): AF = FE
En el ΔBFE: m∠E = m∠FBE = 45°
45° + 45° + x = 180° ∴ x = 90°

43. En la figura: AB = TC = SC. Calcular x

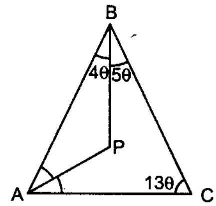


Resolución:

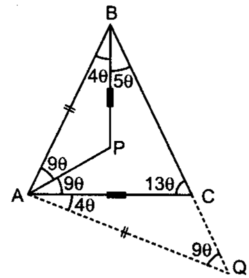


Trazamos la ceviana $\overline{BE}$ con la condición:
m∠TBE = 48°
Luego: el triángulo ABE resulta ser isósceles
m∠ABE = m∠AEB = 66°
Donde: AB = AE = a, también el ΔEBT es isósceles donde: BE = BT
ΔABE ≅ ΔTBC (LAL)
⇒ AB = BC = a;
además m∠ACB = 48° y m∠EBC = 18°
En el triángulo isósceles BCS:
m∠BSC = m∠SBC = 84° y m∠BCS = 12°
De donde: m∠SCT = 48° − 12° = 36°
Finalmente en el triángulo isósceles LCT
x + 66° = 72°
∴ x = 6°

44. Calcular θ, si BP =AC y ∠BAP ≅ ∠PAC



Resolución:



Trazamos la ceviana $\overline{AQ}$ (Q en la prolongación de $\overline{BC}$), con la condición que: m∠CAQ = 4θ
Luego: m∠CQA = 9θ y ΔBAQ isósceles: AB = AQ
Los triángulos ABP y CAQ son congruentes (LAL);
⇒ m∠BAP = m∠AQC = 9θ ⇒ m∠PAC = 9θ
ΔABC: 18θ + 9θ + 13θ = 180° ∴ θ = 4,5°

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

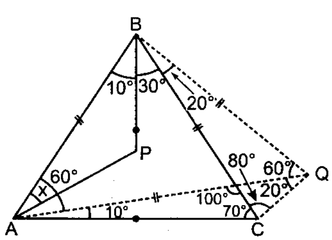
PROBLEMA 1 (UNI 2007 - I)

En el interior de un triángulo ABC (AB = BC), se toma el punto "P" tal que PB = AC, m∠PBA = 10° y m∠PBC = 30°. Halle m∠PAB.

A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

Resolución:

Sea:



m∠BAC = 70° m∠BCA = 70°

Hemos construido un triángulo equilátero (ΔABQ), además tenemos un triángulo isósceles (ΔBCQ) cuyos ángulos de igual medida son de 80°.
Del gráfico tenemos dos triángulos congruentes:

ΔABP ≅ ΔACQ (caso LAL)
∴ x = 20°

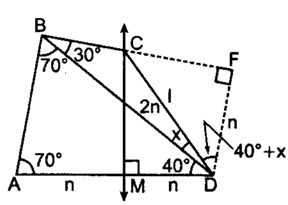
Clave C

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - II)

En un cuadrilátero convexo ABCD, la mediatriz de $\overline{AD}$ pasa por C.
Si: m∠CBD = 30°, m∠BDA = 40° y m∠DAB = 70°, calcule la m∠CDB

A) 8° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 17°

Resolución:



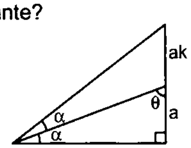
Piden: x
BD = AD = 2n
⊾BDF (NOT 30° y 60°) ⇒ DF = n

⊾CMD ≅ ⊾CFD ⇒ $x + 40° + x = 60°$
$\therefore\ x = 10°$

Clave: B

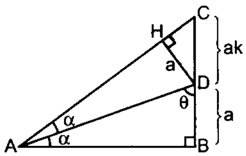
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

¿Cuál es el menor valor entero que puede tomar "k", siendo "a" constante?



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Resolución:



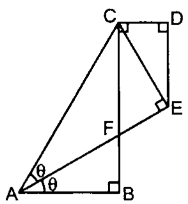
Piden: $K_{\text{mín ent}}$
DH = DB = a
⊾CHD $aK > a \Rightarrow K > 1$
$\therefore\ K_{\text{mín ent}} = 2$

Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

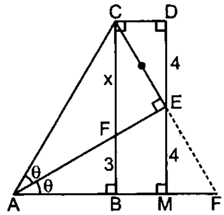
En la figura, BF = 3 y ED = 4.

Calcule el valor del segmento CF (en u).



A) 4,5 B) 5 C) 5,5
D) 6 E) 6,5

Resolución:



Piden: x
Se prolonga $\overline{CE} \Rightarrow CE = EF$
⊾CDE ≅ ⊾EMF ⇒ EM = 4
$x + 3 = 8$
$\therefore\ x = 5$

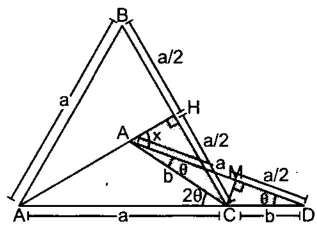
Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

En un triángulo equilátero ABC, sobre la altura $\overline{AH}$ ($H \in \overline{BC}$) se toma el punto E y en la prolongación de $\overline{AC}$ se toma el punto d ($C \in \overline{AD}$), tal que EC = CD y AC = ED. Halle m∠HED.

A) 40° B) 45° C) 48°
D) 50° E) 52°

Resolución:

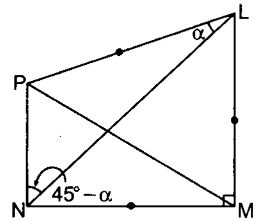


Piden: x
△EHC ≅ △MCD (LLL)
⇒ m∠ECH = θ
luego: $2\theta + \theta = 60°$
⇒ $\theta = 20°$ ⇒ $x + 20° + 20° = 90$
$\therefore\ x = 50°$

Clave D

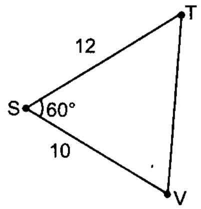
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura, calcular el ángulo α.



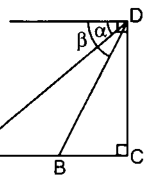
A) 20° B) 10° C) 12°
D) 30° E) 15°

2. En la figura, calcular el perímetro del triángulo.



A) $22 + \sqrt{8}$ B) $22 + \sqrt{47}$ C) $22 + \sqrt{63}$
D) $22 + 2\sqrt{31}$ E) $22 + \sqrt{7}$

3. En la siguiente figura, se tiene: $\alpha = 30°$, $\beta = 60°$, DC = 5 m. Calcular la longitud de AB.

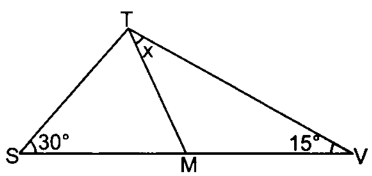


A) $\sqrt{3} + 5$ B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{5}{\sqrt{3}}$
D) $\frac{10}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. En un triángulo ABC, la medida del $\angle$ABC es igual a 128°. Las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ cortan a $\overline{AC}$ en los puntos R y S, respectivamente. Calcular, la suma de las medidas de los ángulos ABR y SBC.

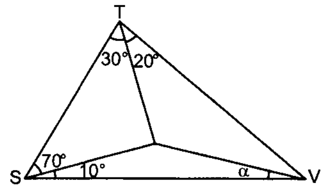
A) 40° B) 48° C) 50°
D) 52° E) 64°

5. Calcular el ángulo x, (donde $\overline{TM}$: mediana).



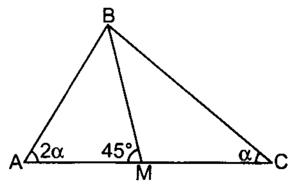
A) 45° B) 30° C) 60°
D) 75° E) 15°

6. En la siguiente figura, calcular α.



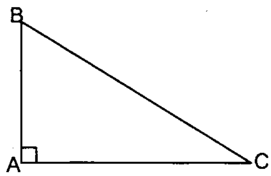
A) 9° B) 10° C) 15°
D) 22,5° E) 30°

7. En el triángulo ABC de la figura, $\overline{BM}$ es mediana. Hallar el valor del ángulo $\frac{\alpha}{3}$.



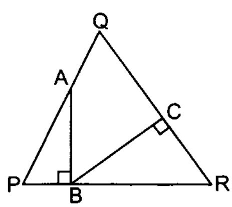
A) 10° B) 12° C) 5° D) 15° E) 18°

8. En la figura: AB = 1 y AB = BC/2, calcular el perímetro del triángulo ABC.



A) $2\sqrt{3} + 1$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3 + \sqrt{3}$
D) $\sqrt{3} + 1$ E) $4\sqrt{3}$

9. PQR es un triángulo equilátero de lado 16. Por A punto medio de $\overline{PQ}$, se traza $\overline{AB}$ perpendicular a $\overline{PR}$; por B se traza $\overline{BC}$ perpendicular a $\overline{QR}$. ¿Cuánto mide $\overline{BC}$?

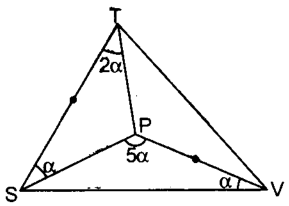


A) $3\sqrt{3}$ B) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{5}{2}\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

10. En un triángulo, dos ángulos consecutivos miden 60° y 45° y el lado adyacente a estos ángulos, mide 10 m. Calcular la medida del lado opuesto al ángulo de 60°.

A) $12 - 3\sqrt{6}$ B) $15\sqrt{2} - 5\sqrt{6}$
C) $12\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$ D) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$
E) $5\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$

11. En la figura, SV = 16 m, Calcular SP.

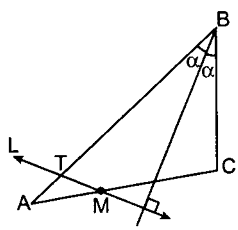


A) 9 m B) 12 m C) 4 m
D) 10 m E) 8 m

12. En un △ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$, tal que: $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y D está en el lado $\overline{AC}$. Además, m∠ABD = 60° y m∠BAC = 20°. Calcular la m∠BCA.

A) 15° B) 30° C) 25°
D) 22°30' E) 20°

13. En la figura, AT = 5, BC = 10; L es una recta ortogonal a la bisectriz del ángulo B. Si AM = MC, determinar la medida de TB.

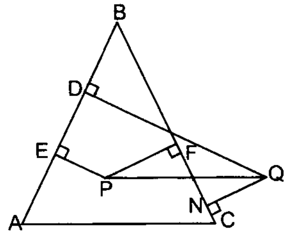


A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

14. El perímetro de un triángulo rectángulo es 20 m y uno de sus ángulos agudos mide 37°. Calcular la longitud de la altura relativa a la hipotenusa.

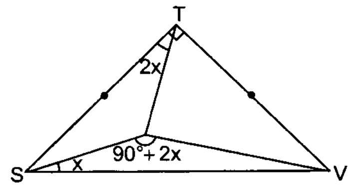
A) 8 m B) 3 m C) 4 m
D) 5 m E) 6 m

15. En el gráfico, ABC es un triángulo isósceles (AB = BC). $\overline{PQ}$ // $\overline{AC}$; PE = 3 cm; PF = 5 cm y NQ = 7 cm. Calcular QD.



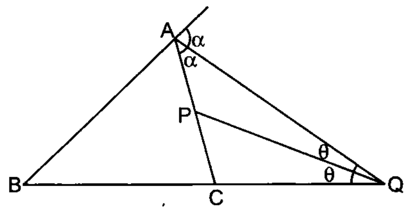
A) 12 cm B) 13 cm C) 14 cm
D) 15 cm E) 16 cm

16. Calcular x.



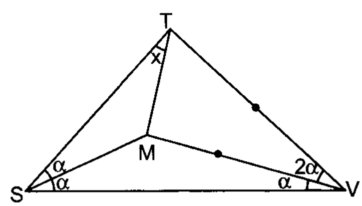
A) 22°30' B) 20°30' C) 18°20'
D) 18°30' E) 20°18'

17. En la figura, AB = BC; calcular QC, si AQ = 8; PC = 2



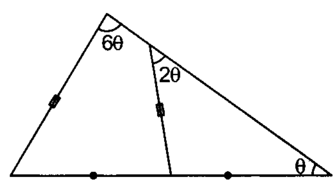
A) 4 B) 8 C) 3 D) 6 E) 12

18. En la figura mostrada; Calcula x, si TV = MV



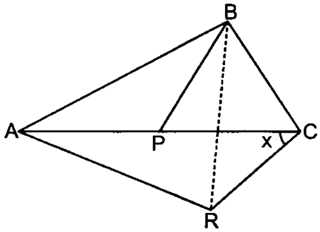
A) 20° B) 25° C) 30°
D) 45° E) 37°

19. Calcular θ.



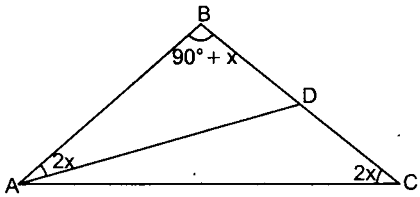
A) 10° B) 18° C) 20°
D) 30° E) 15°

20. Calcular x, si los triángulos ABR y PBC son equiláteros.



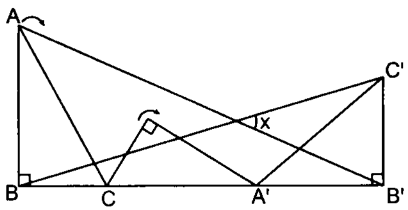
A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

21. En la figura mostrada, BD = DC, calcular x.



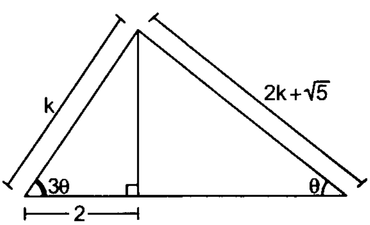
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

22. El triángulo ABC ha rotado, calcular x, si m∠A = 37°.



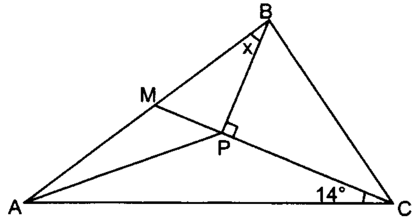
A) 45° B) 30° C) 31°
D) 65°/2 E) 28°

23. Del gráfico, calcular θ.



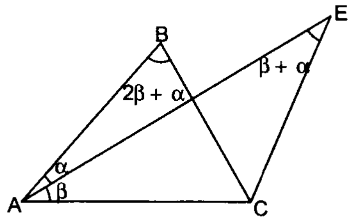
A) 15° B) 18°30' C) 26°30'
D) 22°30' E) 16°

24. Si AP = BC y AM = MB, calcular x.



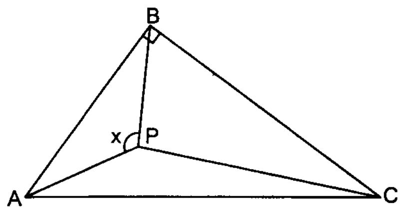
A) 14° B) 27°30' C) 18°30'
D) 37° E) 45°

25. Del gráfico, calcular AE, si: BC = 36 y EC = 24. Además, AB = AC.



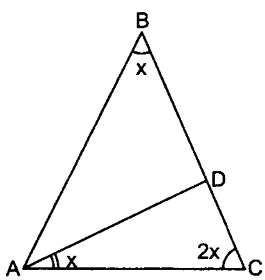
A) 60 B) 62 C) 64
D) 66 E) 60

26. Calcular x. Si: AP = 1; PB = 2; PC = 3 y AB = BC



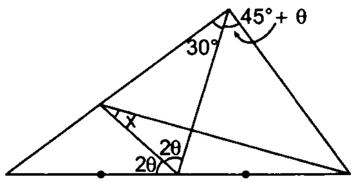
A) 100° B) 110° C) 120°
D) 135° E) 150°

27. Del gráfico, calcular x, si: AB = AD + DC.



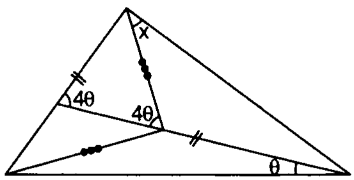
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 36°

28. Calcular **x**, en función de θ.



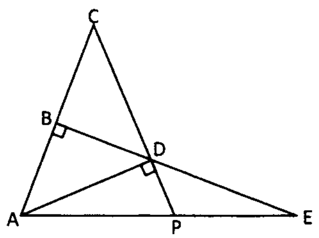
A) 2θ　　B) θ　　C) θ + 15°
D) θ + 30°　　E) 60° + θ

29. Calcular **x**.



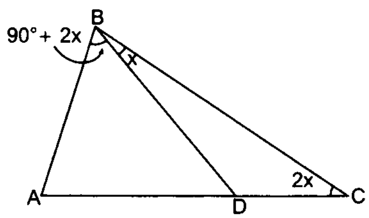
A) 9°　　B) 18°　　C) 30°
D) 36°　　E) 54°

30. Del gráfico, calcular DP, si: AB = 5, BC = 4 y AD = DE



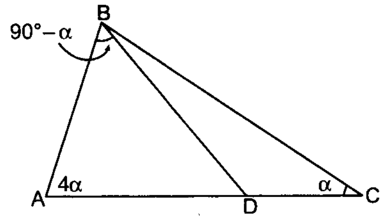
A) 1°　　B) 2°　　C) 4°
D) 3°　　E) 5°

31. En la figura mostrada, AB = CD calcular x.



A) 8°　　B) 10°　　C) 12°
D) 15°　　E) 18°

32. En la figura mostrada, AB = CD calcular α.

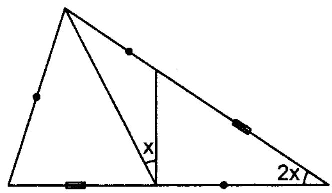


A) 10°　　B) 12°　　C) 15°
D) 20°　　E) 25°

33. Se ubica un punto P en el interior de un triángulo ABC, tal que: AP = AB = BC Si m∠ACP = 30° y m∠CAP = 10°, calcular la m∠BAP.

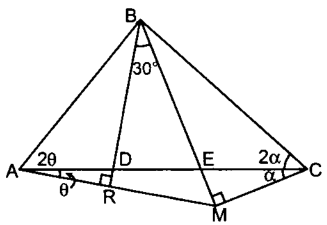
A) 20°　　B) 40°　　C) 30°
D) 10°　　E) 15°

34. Calcular x.



A) 5°　　B) 10°　　C) 12°
D) 15°　　E) 18°

35. Del gráfico, calcular RM, si $(BD)^2 + (BE)^2 = 100$.



A) 10　　B) 5　　C) 4
D) 8　　E) 6

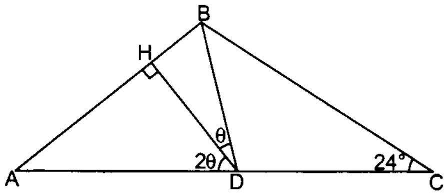
36. En un triángulo ABC se traza la altura BH en la cual se ubica el punto P, tal que m∠ABH = 18° y m∠PAB = 12°. Si BC = AB + AP, calcular la m∠ACB.

A) 18　　B) 15　　C) 32
D) 16　　E) 36

37. En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ (F en $\overline{BC}$) y la ceviana $\overline{BD}$ que son perpendiculares. Si el punto D pertenece a la mediatriz de $\overline{FC}$ y AF = FC, calcular la m∠FCD.

A) 18°　　B) 20°　　C) 30°
D) 36°　　E) 45°

38. Si DC = 2DH, calcular el valor de θ.



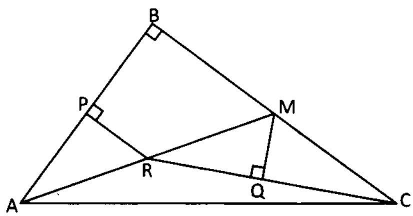
A) 36° B) 24° C) 16°
D) 18° E) 48°

39. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana $\overline{AP}$ que se intersecan en Q. Si m∠BAP = m∠BCA y la mediatriz de $\overline{HP}$ contiene al vértice B, calcular BQ/BC.

A) 1/2 B) 1/3 C) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

D) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{3}$

40. Según el gráfico, $\dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AB}{CR} = 1$, Calcular PB/RQ.



A) $\sqrt{3}$ B) 1/2 C) $\sqrt{2}$ D) 2 E) 1

41. En los lados BC y AC de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica P y Q, respectivamente de modo que m∠PAC = 2(m∠PAB), m∠APQ = m∠ACB y BP = 3 cm. Calcular PQ.

A) 3 cm B) $3\sqrt{2}$ cm C) $3\sqrt{3}$ cm
D) 1 cm E) 6 cm

42. En un △ABC se traza la mediana $\overline{AM}$ y en el △ABM se traza $\overline{BP} \perp \overline{AM}$ (P ∈ $\overline{AM}$), tal que m∠ABP = 3(m∠MAC). Calcular la m∠MAC, si AP = 2PM

A) 18° B) 20° C) 15°
D) 36° E) 24°

43. Exteriormente a un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B, y relativo a $\overline{AC}$ se ubica el punto P de modo que la m∠APC = 135°; luego las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ intersecan a $\overline{AC}$ en M y L, respectivamente calcular la m∠MBL.

A) 37° B) 53° C) 15°
D) 45° E) 35°

44. En un triángulo acutángulo ABC se ubica un punto interior P, tal que AP = BC, m∠BAC = m∠PCA y m∠BAP = m∠BCP. Calcular m∠BAC.

A) 15° B) 60° C) 37° D) 30° E) 45°

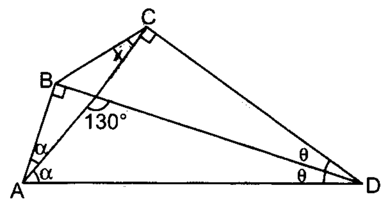
45. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{AF}$ y la ceviana interior $\overline{CN}$, tal que m∠NCB = m∠BAF. Si CN = 8, calcular la distancia de C a $\overline{AF}$.

A) 1 B) 5 C) 3 D) 6 E) 4

46. En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ y la ceviana $\overline{CD}$, tal que: BC = CD. Calcular la m∠CDH, si m∠BAC = 60° y m∠DCA = 15°.

A) 15° B) 45° C) 30°
D) 20° E) 60°

47. De la figura mostrada, calcular el valor de x.

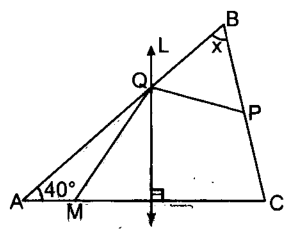


A) 20° B) 25° C) 30°
D) 40° E) 35°

48. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la mediatriz de $\overline{AC}$ y la bisectriz del ∠BAC se intersecan en P. Si $\overline{PH} \perp \overline{BC}$ (H en $\overline{BC}$) y 50(PH) = 11(AC), calcular m∠ACB.

A) 14° B) 37° C) 15°
D) 18° E) 16°

49. Si $\overleftrightarrow{L}$ es mediatriz de $\overline{AC}$, AM = PC y QM = PQ, calcular el valor de x.



A) 60° B) 80° C) 50°
D) 65° E) 70°

50. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en A, se traza $\overline{AH}$ perpendicular a la bisectriz interior del ángulo B (el punto H ubicado en dicha bisectriz). Si AC = 2(BH), calcular la m∠C.

A) 10° B) 25° C) 22,5°
D) 30° E) 36°

51. Se tiene los triángulos equiláteros ABC y PMQ, tal que $\overline{PQ} \subset \overline{AC}$ y M es punto de la región interior del triángulo ABC, además P pertenece a $\overline{AQ}$. Si AC = 2(PQ) = 4 L, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BQ}$.

A) 2 L B) L C) $\sqrt{3}$ L
D) $2\sqrt{3}$ L E) 3 L

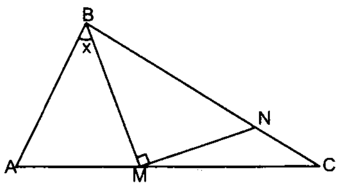
52. En el triángulo ABC, la distancia de B al excentro E relativo a $\overline{BC}$ es el doble de la distancia de B al lado $\overline{AC}$. Si BC = CE, calcular la m∠ACB.

A) 30° B) 40° C) 60°
D) 36° E) 37°

53. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior AD de modo que AB = DC, además:
$m\angle DAC = \dfrac{m\angle ACD}{2} = \dfrac{m\angle BAC}{5}$. Calcular la m∠DAC.

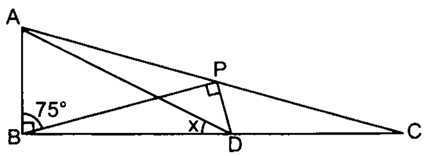
A) 12° B) 16° C) 18°
D) 10° E) 15°

54. Calcular el valor de x, si 4(BM) = 9(MN) y AB = AM = MC.



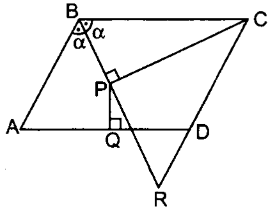
A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 75°

55. En la figura, AP = PB. Calcular el valor de x.



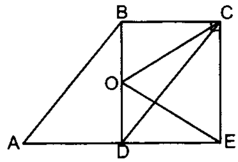
A) 26,5° B) 18,5° C) 15°
D) 30° E) 22,5°

56. En la figura, ABCD es un romboide, si R dista 3 y 10 de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, calcular PQ.



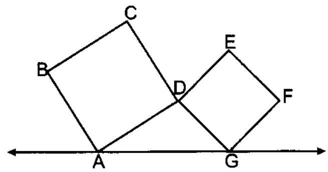
A) 3 B) 2 C) 2,5 D) 1,5 E) 1

57. En la figura, m∠BCO = m∠DCE = 37°, AB = 15; BO = OD, calcular OE (ABCD: paralelogramo).



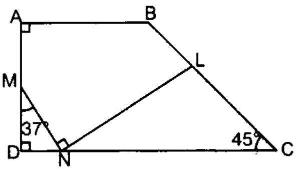
A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

58. En la figura, ABCD y DEFG son cuadrados, B y F distan de $\overleftrightarrow{AG}$ 7 cm y 2 cm respectivamente, calcular AG.



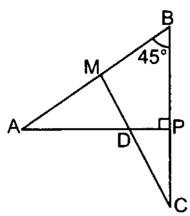
A) 5 cm B) 6 cm C) 7 cm
D) 8 cm E) 9 cm

59. En la figura, $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{BL}{LC} = 1$ y MN = 15, calcular AB.



A) 15 B) 12 C) 13
D) 14 E) 11

60. Según el gráfico, calcular BC, si AD = 2 y MD = DC



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

61. En un triángulo ABC, sobre $\overline{BC}$ se ubica el punto P. Si: BC = AP, 3m∠BAP = 15m∠PAC = 5m∠BCA, calcular. m∠PAC

A) 7°30' B) 8° C) 10° D) 12° E) 15°

62. En un triángulo isósceles ABC, AB = BC exteriormente y relativo al lado $\overline{AC}$, se ubica un punto D. Si: AC = CD y $\overline{AC}$ biseca a $\overline{BD}$ en el punto P, calcular: m∠CAD, donde 2m∠BAC = 3m∠ACD.

A) 45° B) 50° C) 60°
D) 75° E) 80°

63. En un triángulo ABC, se ubica un punto interior P. Si: m∠PBC = 6θ; m∠PCA = m∠PAC = 2θ, m∠BCP = 3θ; m∠BAP = 5θ, calcular θ.

A) 4° B) 5° C) 9°
D) 10° E) 6°

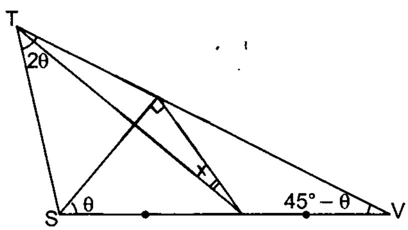
64. En un triángulo ABC, se traza la ceviana $\overline{BF}$. Si AB = FC, m∠BAC = 30°, m∠FBC = 45°; calcular m∠BCA.

A) 12° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 22°30'

65. Por el punto medio D del lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, se levanta una perpendicular a dicho lado, la cual interseca en E a $\overline{BC}$. Sobre $\overline{DC}$ se ubica el punto F, tal que: AB = FC, las prolongaciones de $\overline{FE}$ y $\overline{AB}$ se intersecan perpendicularmente en P. Si: EP = ED calcular m∠BFE.

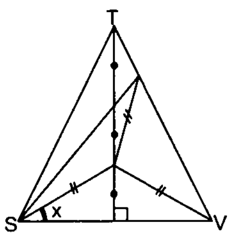
A) 10° B) 12° C) 15° D) 20° E) 18°

66. Calcular x.



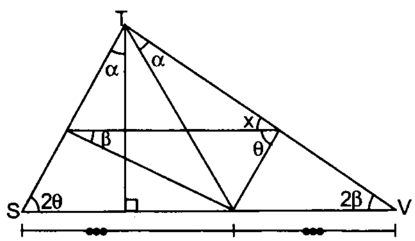
A) 30° B) 32°30' C) 31°
D) 26°30' E) 37°

67. Calcular x.



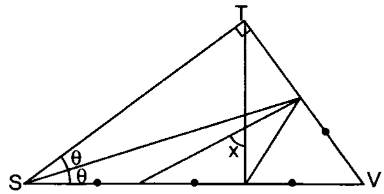
A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 37°

68. Calcular x.



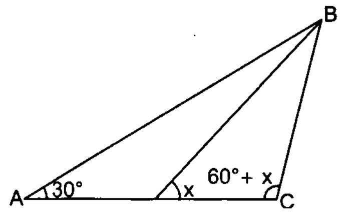
A) 30° B) 37° C) 45° D) 53° E) 60°

69. Calcular x.



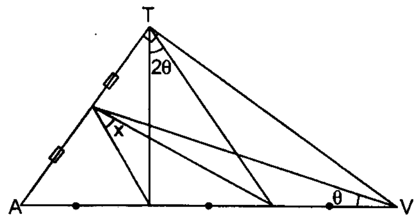
A) 63°30' B) 67°30' C) 71°30'
D) 60° E) 53°

70. Si AC = BD, calcular x.



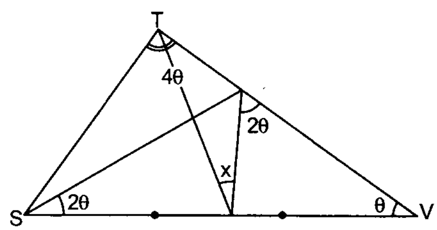
A) 50° B) 38° C) 40° D) 45° E) 53°

71. Calcular x.



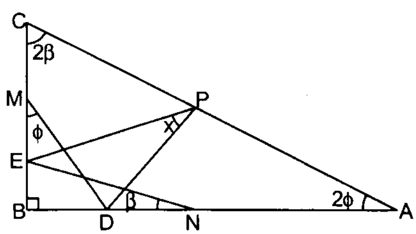
A) 31° B) 37° C) 40°30'
D) 45° E) 34°30'

72. Calcular x.



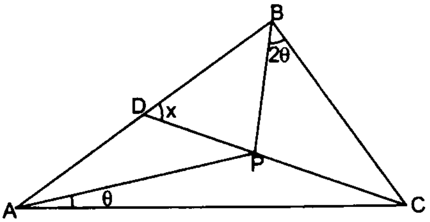
A) 18°30' B) 15° C) 26°30'
D) 30° E) 31°

73. Si M, N y P puntos medios de $\overline{BC}$, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente. Calcular x, si además BE = 2 y BD = 4.



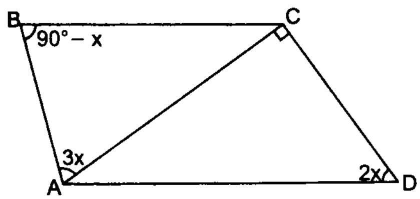
A) 30° B) 35° C) 31°
D) 36° E) 37°

74. De la figura, calcular x. Si BP = AC y AD = DP.



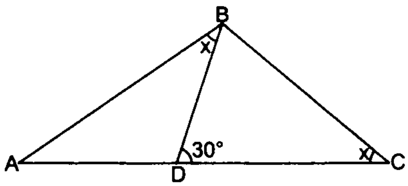
A) 90° B) 60° C) 45°
D) 120° E) 150°

75. Si BC = CD, calcular x.



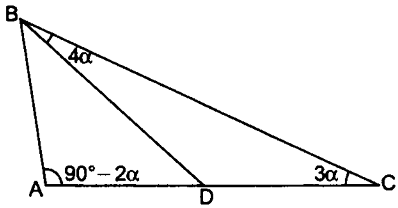
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 22°30' E) 18°

76. En el gráfico, calcular x, si: AB = CD.



A) 9° B) 10° C) 12°
D) 15° E) 18°

77. En la figura, calcular α, si AB = CD.

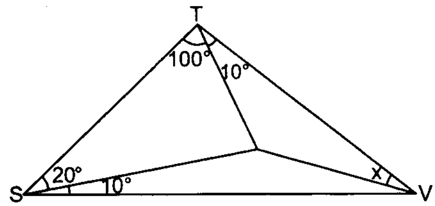


A) 6° B) 8° C) 10°
D) 12° E) 15°

78. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{AM}$, AB = BC y BM = AC – AM. Calcular m∠MAC.

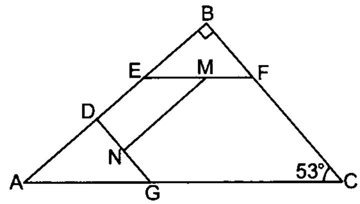
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 25° E) 30°

79. En la figura mostrada, calcular x.



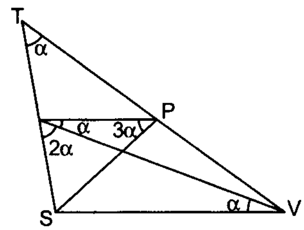
A) 5° B) 8° C) 10° D) 12° E) 15°

80. En la figura mostrada, DE = 18, FC = 24, GC = 16. Calcular MN, si M y N puntos medios de $\overline{EF}$ y $\overline{DG}$, respectivamente.



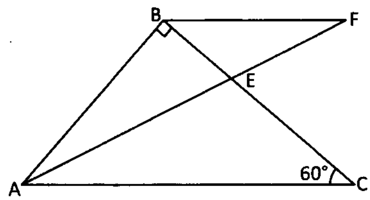
A) 16 B) 15 C) 12 D) 17 E) 18

81. En la figura mostrada, calcular α.



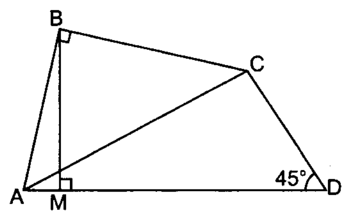
A) 8° B) 10° C) 15° D) 18° E) 20°

82. Si BE = 1 cm; EC = 2 cm; BF = 3 cm, calcular EF.



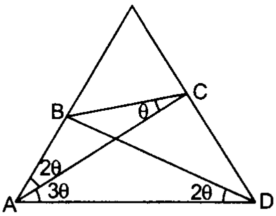
A) $2\sqrt{3}$ cm B) $2\sqrt{7}$ cm C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm
D) $\sqrt{7}$ cm E) $2\sqrt{5}$ cm

83. En la figura, AB = BC, BM = 1, calcular AD.



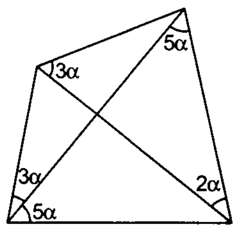
A) 1 B) 3/2 C) 2 D) 5/2 E) 3

84. En el gráfico, BC = AD, calcular θ.



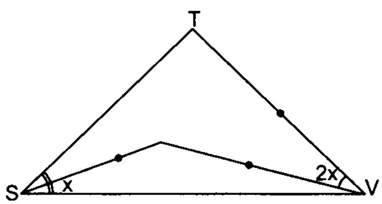
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

85. En la figura, calcular α.



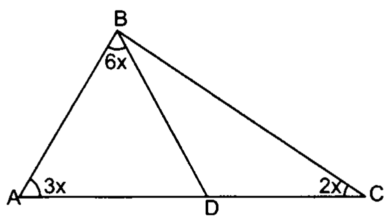
A) 9° B) 12° C) 10°
D) 15° E) 18°

86. En la figura, calcular x.



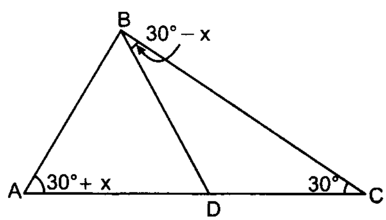
A) 10° B) 15° C) 18°
D) 30° E) 22°30'

87. En el gráfico, calcular x, si AD = BC.



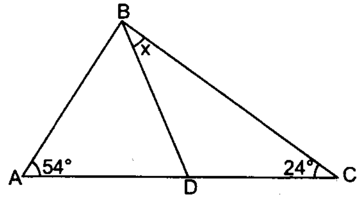
A) 10° B) 12° C) 20° D) 15° E) 18°

88. En el gráfico, calcular x, si AD = BC.



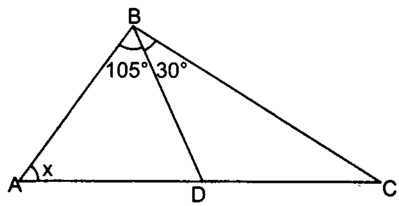
A) 12° B) 15° C) 10°
D) 18° E) 20°

89. En el gráfico, calcular x, si AD = BC.



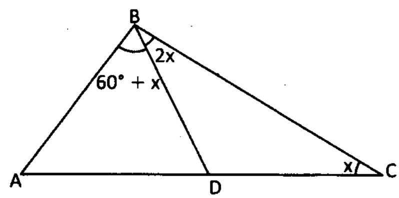
A) 6° B) 8° C) 10° D) 15° E) 18°

90. En el gráfico, calcular x, si AD = DC.



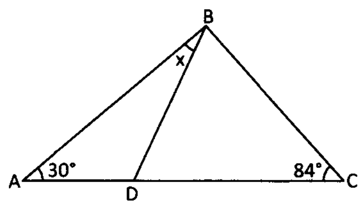
A) 10° B) 12° C) 15° D) 20° E) 30°

91. En el gráfico, calcular x, si: AB = DC.



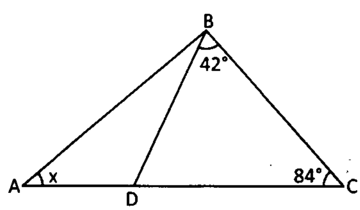
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 45°/2 E) 15°/2

92. En el gráfico, calcular x, si AD = BC.



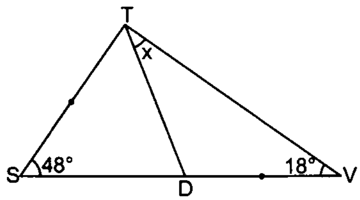
A) 18° B) 20° C) 30° D) 25° E) 24°

93. En el gráfico, calcular x, si AD = BC.



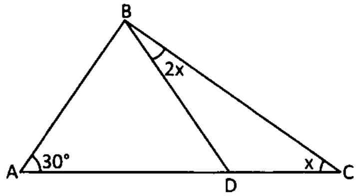
A) 25° B) 30° C) 36° D) 24° E) 35°

94. En el gráfico, calcular x, si ST = DV



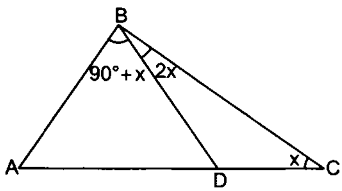
A) 10° B) 12° C) 15°
D) 18° E) 20°

95. En el gráfico, calcular x, si AD = DC.



A) 30° B) 10° C) 15°
D) 18° E) 20°

96. En el gráfico, calcular x, si AD = DC.



A) 10° B) 12° C) 18°
D) 15° E) 30°

97. Interiormente a un triángulo ABC se ubica el punto P, tal que m∠PAB = m∠PAC = 20°, m∠ABP = 30° y m∠PCA = 10°. Calcular la m∠PCB.

A) 10° B) 20° C) 30°
D) 45° E) 37°

98. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, AB = 6 cm, BC = 8 cm, se traza la altura $\overline{BH}$, las bisectrices exteriores de los ángulos A y C intersecan a la prolongación de $\overline{BH}$ en P y Q, respectivamente. Calcular PQ.

A) 6 cm B) 3 cm C) 24 cm
D) 12 cm E) 18 cm

99. En un triángulo ABC, se ubica un punto interior P, tal que la m∠PAB = 2(m∠PAC), AB = AP y $\overline{CP}$ es bisectriz del ∠BCA. Calcular la m∠APC.

A) 120° B) 100° C) 150°
D) 140° E) 135°

100. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B; en $\overline{BC}$ se ubica los puntos M y N tal que m∠BAM = m∠MAN = m∠NAC; luego se traza $\overline{NH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$) de modo que MC = 2(HC). Calcular la m∠BCA.

A) 36° B) 18° C) 54°
D) 72° E) 31°

101. En un triángulo isósceles ABC, la m∠ABC = 120°, en $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos M y N, respectivamente; si AM = b, CN = c, MN = a, calcular la medida del ángulo que determinan $\overline{AM}$ y $\overline{CM}$ si en el triángulo PQR (PQ = a; QR = b; PR =c) la m∠PRQ = 20°.

A) 20° B) 40° C) 30°
D) 60° E) 45°

102. En la región interior de un triángulo equilátero ABC se ubica el punto P, tal que m∠APC = 90°; luego se traza exteriormente al triángulo APC los triángulos equiláteros APE y PCF. Calcular la m∠EBF.

A) 90° B) 100° C) 120°
D) 150° E) 180°

103. En un triángulo ABC, la m∠ACB = 143°; exteriormente y relativo a $\overline{AB}$ se ubica el punto P, de modo que PA = AB y m∠PAB = 53°; luego se traza $\overline{PH}$ perpendicular a $\overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$). Si AH = 6 cm, calcular HC.

A) 4 cm B) 5 cm C) 3 cm
D) 2 cm E) 2,5 cm

104. En un triángulo ABC se trazan las bisectrices interiores $\overline{AN}$ y $\overline{BM}$, si AB + BN = AM + BM y la m∠BAC = 60°. Calcular la m∠BCA.

A) 30° B) 50° C) 40°
D) 80° E) 60°

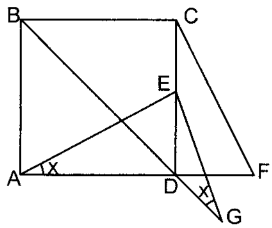
105. En un triángulo acutángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, las cuales se intersecan en H, en las prolongaciones de $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ se ubican los puntos A' y B', respectivamente, tal que AA' = BC; BB' = AC. si $\overline{A'B'}$ interseca a $\overline{HC}$ en P y PC = AB, calcular la m∠APB.

A) 60° B) 45° C) 53°
D) 37° E) 90°

106. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y $\overline{CH}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{BD}$ (H en dicha prolongación), si BD = HD, calcular la m∠HAC.

A) 22°30' B) 37° C) 53°
D) 53°/2 E) 37°/2

107. En el gráfico se muestra un cuadrado ABCD; si $\overline{EG}$ // $\overline{CF}$ y AE = CF, calcular el valor de x.



A) 15° B) 18° C) 22°30'
D) 26°30' E) 30'

108. Se tiene los triángulos equiláteros ABC y PMQ, tal que $\overline{PQ} \subset \overline{AC}$ y M es punto de la región interior del triángulo ABC, además P pertenece a $\overline{AQ}$. Si AC = 2(PQ) = 4 L, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BQ}$.

A) $L\sqrt{2}$ B) 2L C) $L\sqrt{5}$
D) L E) $L\sqrt{3}$

109. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz del ángulo ABH que interseca a $\overline{AH}$ en P, luego se traza la bisectriz del ángulo APB que interseca a la prolongación de $\overline{CB}$ en Q y además se traza la bisectriz del ángulo PQB que interseca a $\overline{PB}$ en R. Calcular BR si PQ = a y BQ = b.

A) $\frac{a-b}{2}$ B) a – b C) a + b
D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\sqrt{ab}$

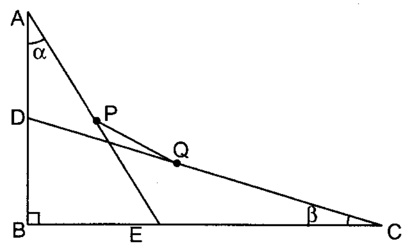
110. Exteriormente a un triángulo rectángulo isósceles ABC, recto en B y relativo a $\overline{AC}$, se ubica el punto P de modo que la m∠APC = 135°, luego las mediatrices de $\overline{AP}$ y $\overline{PC}$ intersecan a $\overline{AC}$ en M y L, respectivamente, calcular la m∠MBL.

A) 37° B) 53° C) 15°
D) 45° E) 35°

111. Interiormente a un triángulo isósceles ABC donde la m∠ABC = 100° se ubica el punto M; tal que m∠MCA = 20° y m∠MAC = 30°, calcular la m∠MBA.

A) 22° B) 30° C) 10° D) 20° E) 18°

112. En la figura $\alpha + \beta = 37°$; AE = 10 y PQ = $4\sqrt{2}$. P y Q son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Calcular DC.



A) 15 B) 16 C) 14
D) 17 E) 18

113. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente, de modo que AB = PC; m∠BAQ = m∠QCP y $\overline{PQ} \perp \overline{AC}$, calcular m∠QAP.

A) 40° B) 30° C) 25°
D) 27° E) 36°

CLAVES

1. E	16. A	31. B	46. C	61. C	76. E	91. D	106. B
2. D	17. D	32. D	47. D	62. D	77. A	92. E	107. C
3. D	18. C	33. B	48. E	63. E	78. E	93. B	108. E
4. D	19. E	34. B	49. A	64. E	79. C	94. B	109. B
5. B	20. E	35. B	50. D	65. E	80. D	95. C	110. D
6. B	21. C	36. E	51. C	66. C	81. C	96. D	111. D
7. C	22. D	37. D	52. D	67. B	82. D	97. B	112. C
8. C	23. C	38. B	53. D	68. C	83. C	98. B	113. B
9. D	24. E	39. A	54. D	69. A	84. C	99. C	
10. B	25. E	40. E	55. A	70. C	85. C	100. A	
11. E	26. D	41. E	56. B	71. C	86. D	101. B	
12. E	27. E	42. A	57. C	72. A	87. D	102. D	
13. E	28. C	43. D	58. E	73. C	88. B	103. A	
14. C	29. B	44. E	59. C	74. B	89. A	104. C	
15. D	30. D	45. E	60. D	75. D	90. E	105. E	

Polígonos | 05 capítulo

Francia, 1822 - Francia, 1901

Charles Hermite

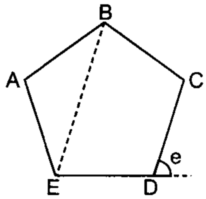
Charles Hermite nació en Dieuze el 24 de diciembre de 1822 y murió en París el 14 de enero de 1901. Fue un matemático francés que investigó en el campo de la teoría de números sobre las formas cuadráticas, polinomios ortogonales y funciones elípticas, y en el álgebra. También es conocido por la interpolación polinómica de Hermite. Además, fue el primero que demostró que «e» es un número trascendente y no la raíz de una ecuación algebraica o polinómica con coeficientes racionales. Varias entidades matemáticas se llaman hermitianas en su honor.

Fue titular de la cátedra de Álgebra superior en la Facultad de Ciencias de París, sucediendo a Jean-Marie Duhamel de 1871 a 1898, y profesor de Análisis en la École Polytechnique de 1869 a 1878. Charles Hermite entró a formar parte de la Academia de Ciencias Francesa en 1856 en sustitución de Jacques Binet y pasó a presidirla en 1890. Fue nombrado gran oficial de la Legión de Honor y recibió la Gran Cruz de la Estrella Polar de Suecia. Se casó con la hermana del matemático Joseph Bertrand y fue suegro del matemático Émile Picard y del ingeniero Georges Forestier. La mayor parte de sus obras fueron recopiladas y publicadas después de su muerte por Émile Picard.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

Polígono es la figura que resulta de unir tres o más puntos no colineales mediante segmentos de recta no secantes y además deben de estar unidos en forma consecutiva y en cada vértice solo deben de concurrir dos lados.

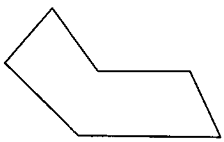


$\overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CD} \cup \overline{DE}$

Elementos:

- Vértices (A; B; C; ...)
- Lados ($\overline{AB}$; $\overline{BC}$)
- Ángulos interiores ($\angle A$; $\angle B$; ...)
- Ángulo exterior (e).
- Diagonal ($\overline{BE}$)

Un polígono convexo se origina de una poligonal convexa (como en el gráfico anterior). Su contorno no puede ser cortado más que en dos puntos, por una recta que no sea un lado. Un polígono no convexo o cóncavo se obtiene de una poligonal no convexa, su contorno puede ser cortado en más de dos puntos por una recta que no sea un lado.



Hexágono no convexo

Según el número de lados, un polígono se llama:

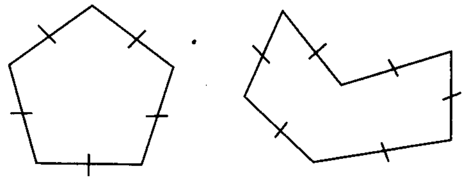
Triángulo	3 lados
Cuadrilátero	4 lados
Pentágono	5 lados
Hexágono	6 lados
Heptágono	7 lados
Octógono	8 lados
Nonágono	9 lados
Decágono	10 lados
Endecágono	11 lados
Dodecágono	12 lados
Icoságono	20 lados

- Otros se mencionan según su número de lados. Por ejemplo, polígono de 19 lados.

CLASIFICACIÓN DE LOS POLÍGONOS

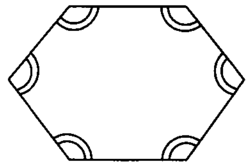
Equilátero

Tiene todos sus lados congruentes.



Equiángulo

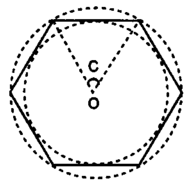
Tiene todos sus ángulos congruentes.



Regular

Sus lados y ángulos son, respectivamente, congruentes. Todo polígono regular puede ser inscrito y circunscrito a dos circunferencia que tienen el mismo centro. (Ver figura).

c: ángulo central



Si "n" es el número de lados del polígono:

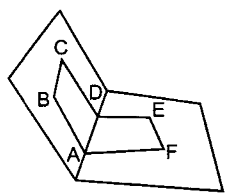
$$\boxed{c = \frac{360°}{n}}$$

Alabeado

Sus lados están contenidos en diferentes planos.

Ejemplo:

Hexágono alabeado ABCDEF: ($\overline{AD}$ es una diagonal)



Estrellado.

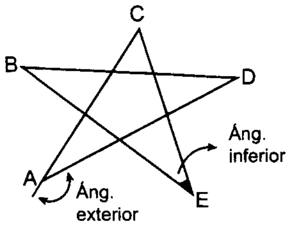
Se origina al prolongar los lados de un polígono convexo. El pentágono es el polígono estrellado de menor número de lados.

Ejemplo:

Pentágono estrellado ABCDE.

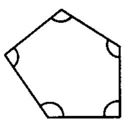
Lados: $\overline{AC}$; $\overline{CE}$; ...

Vértices o puntas: A; B; ...

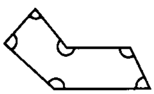


PROPIEDADES Y FÓRMULAS

1. En todo polígono el número de lados es igual al número de vértices e igual al número de ángulos interiores.
2. En todo polígono, de n lados, desde cada vértice, se pueden trazar (n – 3) diagonales.
   El número total de diagonales, es:
   $$\boxed{D = \frac{n(n-3)}{2}}$$
3. La suma de las medidas de los ángulos interiores es: $\boxed{S_i = 180°(n-2)}$
   (Válida para todo polígono convexo y no convexo, a excepción de los estrellados y alabeados).
   Ejemplos:
   - $S_i = 180°(5-2)$
     $S_i = 540°$

   - $S_i = 180°(6-2)$
     $S_i = 720°$

   
4. En todo polígono convexo, las medidas de los ángulos exteriores, uno por vértice, suman 360°.
5. La medida de un ángulo central en un polígono regular es: $\boxed{c = \frac{360°}{n}}$
6. En polígonos equiángulos, cada ángulo interior mide: $i = \frac{180°(n-2)}{n}$
   y cada ángulo exterior: $\boxed{e = \frac{360°}{n}}$
7. En un polígono estrellado, los ángulos interiores suman 180°(n – 4) y los exteriores 720°.
8. Número de diagonales medias: $\boxed{D_M = \frac{n(n-1)}{2}}$
9. Número de diagonales que se pueden trazar desde vértices consecutivos (v):
   $$\left\{v(n) - \frac{(v+1)(v+2)}{2}\right\}$$

Ejemplos:

1. ¿Cuántos lados tiene aquel polígono convexo en el cual, la suma de las medidas de los ángulos interiores es 5 veces la suma de las medidas de los ángulos exteriores

   Resolución:

   n: número de lados.
   Según el enunciado: $S_i = 5(S_e)$
   $\Rightarrow 180°(n-2) = 5(360°)$
   $\Rightarrow (n-2) = \frac{5(360°)}{180°} \Rightarrow n - 2 = 10 \quad \therefore n = 12$
2. El número de diagonales de un polígono regular es igual a la suma del número de vértices, número de lados y número de ángulos centrales. Hallar el número de lados de dicho polígono.

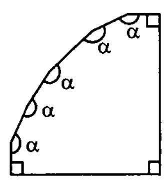
   Resolución:

   n: número de lados.
   Según el enunciado, planteamos la ecuación:
   n.° diagonales = n.° vértices + n.° lados + n.° ángulos centrales.
   $\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = n + n + n$
   $\Rightarrow \frac{n(n-3)}{2} = 3n \Rightarrow \frac{n-3}{2} = 3 \quad \therefore n = 9$
3. En un polígono regular se cumple que la suma de las medidas de un ángulo central, un ángulo exterior y un ángulo interior es 210°. Calcular el número total de diagonales.

   Resolución:

   Sea "n" el número de lados. Según el enunciado, planteamos la ecuación:
   $\frac{360°}{n} + \frac{360°}{n} + \frac{180°(n-2)}{n} = 210°$
   De donde: n = 12
   Entonces, el número de diagonales es $\frac{12(9)}{2} = 54$
4. Tres ángulos consecutivos de un octógono convexo mide 90° cada uno. Hallar la medida de cada uno de los restantes, sabiendo que son congruentes entre sí.

   Resolución:

   α: incógnita.
   La suma de medidas de los ángulos interiores:
   $\underbrace{5\alpha + 3 \times 90°}_{\text{Según gráfico}} = \underbrace{180°(8-2)}_{\text{Por fórmula}}$
   $\Rightarrow 5\alpha + 270° = 1080° \quad \therefore \alpha = 162°$

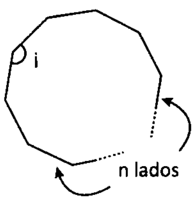
5. Calcular el número de diagonales de un polígono convexo equiángulo, en el cual la medida de un ángulo interno es la novena parte de la suma de medidas de los ángulos internos de un polígono estrellado, cuyo polígono base es un dodecágono.

Resolución:

Si "i" es la medida de un ángulo interno del polígono convexo de "n" lados, según enunciado:

$i = \frac{1}{9}[\underbrace{180°(12-4)}]$ suma de las medidas de los ángulos internos del polígono estrellado de 12 lados.

$\Rightarrow i = 160°$



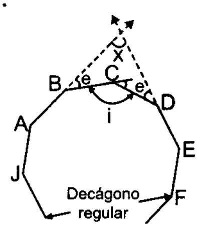
De otro lado, por fórmula para el polígono convexo equiángulo: $i = \frac{180°(n-2)}{n}$

Entonces: $\frac{180°(n-2)}{n} = 160° \quad \Rightarrow n = 18$

N.° de diagonales: $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{18(15)}{2} = 135$

6. Se tiene un decágono regular ABCDE...; hallar la medida del menor ángulo que forman las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$.

Resolución:



Incógnita:
i : medida de un ángulo interior
e: medida de un ángulo exterior

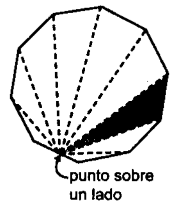
Se tiene: $e = \frac{360°}{n} \quad \Rightarrow e = \frac{360°}{10} = 36°$

Luego: $i = 180° - e$
$i = 180° - 36° = 144°$

Entonces, en el cuadrilátero no convexo BXDC:
$x + 2e = i$
$x + 2(36°) = 144° \quad \therefore x = 72°$

7. En cierto polígono convexo, el número de triángulos obtenidos al unir un punto de uno de sus lados con los vértices es 9. Hallar el número de diagonales de dicho polígono.

Resolución:



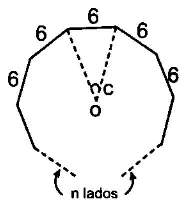
Si "n" es el número de lados; entonces, el número de triángulos obtenidos, según condición del problema, será: n – 1

Por dato: $n - 1 = 9 \Rightarrow n = 10$

Luego, el número de diagonales: $\frac{10(7)}{2} = 35$

8. Cada lado de un polígono regular mide 6 cm y el perímetro equivale al número que expresa el total de diagonales en cm. Hallar la medida de un ángulo central.

Resolución:



Según enunciado:

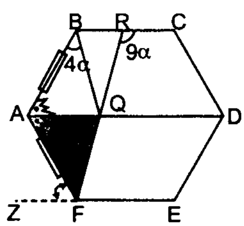
$\underbrace{6 + 6 + \ldots}_{n \text{ veces}} = \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow 6n = \frac{n(n-3)}{2}$

De donde: $n = 15$

Medida de un ángulo central: $c = \frac{360°}{15} = 24°$

9. ABCDEF es un hexágono regular. Sobre $\overline{BC}$ se toma un punto R, que al ser unido con F, determina un segmento secante a $\overline{AD}$ en el punto Q.
Si $\angle ABQ = 4\alpha$ y $\angle FRC = 9\alpha$, hallar el valor de α.

Resolución:

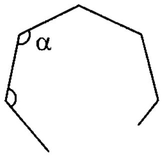


Vemos que $\Delta AQF \cong \Delta AQB$ (Postulado LAL)
$\Rightarrow m\angle AFQ = m\angle ABQ$
Es decir, $m\angle AFQ = 4\alpha$
Además, el $\angle ZFA$, exterior, mide $= \frac{360°}{6}$
$\Rightarrow m\angle ZFA = 60°$

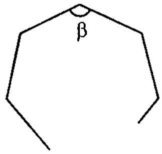
Luego, por ser alternos internos:
$m\angle QRC = m\angle QFZ \Rightarrow 9\alpha = m\angle QFA + m\angle AFZ$
$\Rightarrow 9\alpha = 4\alpha + 60° \quad \therefore \alpha = 12°$

10. Si el número de lados de un polígono regular aumenta en 10, cada ángulo del nuevo polígono es 3° mayor que cada ángulo del original. ¿Cuántos lados tiene el polígono original?

Resolución:



Polígono de "n" de lados
Incógnita: n
Polígono de n lados: $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$



Polígono de (n + 10 lados)

$$\beta = \frac{180°(n+10-2)}{n+10}$$

Por condición: $\beta - \alpha = 3°$

$$\Rightarrow \left[\frac{180°(n+8)}{n+10}\right] - \left[\frac{180°(n-2)}{n}\right] = 3°$$

$\Rightarrow n(n+10) = 1200 \quad \therefore n = 30$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si el ángulo interno de un polígono regular se le disminuye en 10°, resulta otro polígono cuyo número de lados es 2/3 del número de lados del polígono anterior. Calcular el número de lados de ambos polígonos.

Resolución:

Medida del ángulo interno del polígono de n lados.

$$\frac{180°(n-2)}{n} - 10° \qquad ...(1)$$

Medida del ángulo interno del polígono de 2n/3 lados.

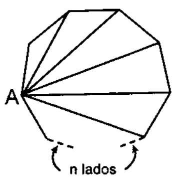
$$\frac{180°\left(\frac{2}{3}n - 2\right)}{\frac{2}{3}n} \qquad ...(2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene: n = 18 lados.

$\therefore$ El otro polígono tiene: $\dfrac{2}{3} \times 18 = 12$ lados

2. Si en un polígono convexo se trazan todas las diagonales de un vértice, dicho número de diagonales más el número de triángulos formados es igual a 5/18 del número total de diagonales. Hallar el número de lados del polígono.

Resolución:



Si "n" es el número de lados del polígono en mención: (n − 3) diagonales trazadas desde A.
(n − 2) triángulos formados.

Por tanto:

$$(n-3) + (n-2) = \frac{5}{18}\left[\frac{n(n-3)}{2}\right]$$

Efectuando: $5n^2 - 87n + 180 = 0$
$\Rightarrow (5n-12)(n-15) = 0 \quad \therefore n = 15$

3. Si el número de lados de un polígono convexo disminuye en 2, el número de diagonales del nuevo polígono es menor en 15. Calcular la suma de las medidas de ángulos internos original.

Resolución:

Polígono original $\begin{cases} n \text{ lados} \\ \dfrac{n(n-3)}{2} \text{ diagonales} \end{cases}$

Segundo polígono, $\begin{cases} (n-2) \text{ lados} \\ \dfrac{(n-2)(n-2-3)}{2} \text{ diagonales} \end{cases}$

Según enunciado, planteamos la ecuación:

$$\frac{(n-2)(n-2-3)}{2} = \frac{n(n-3)}{2} - 15 \Rightarrow n = 10$$

Se pide la suma de las medidas de ángulos internos: $180°(10-2) = 1440°$

4. Si un polígono de "n" lados tuviera (n − 3) lados, tendría (n + 3) diagonales menos. ¿Qué polígono es?

Resolución:

Según enunciado tenemos la ecuación:
N.° de diagonales del polígono de "n" lados

$$\frac{n(n-3)}{2} - (n+3) \qquad ...(1)$$

N.° de diagonales del polígono de (n − 3) lados

$$\frac{(n-3)(n-3-3)}{2} \qquad ...(2)$$

Igualando (1) y (2) se obtiene n = 6

5. Si a un polígono regular se le aumenta dos lados, su ángulo externo disminuye en 9°, ¿cuántos ángulos centrales tiene dicho polígono?

Resolución:

Polígono original $\begin{cases} n \text{ lados} \\ \dfrac{360°}{n} \text{ (medida del} \angle \text{ externo)} \end{cases}$

Segundo polígono $\begin{cases} (n+2) \text{ lados} \\ \dfrac{360°}{n+2} \text{ (medida del} \angle \text{ externo)} \end{cases}$

Según dato: $\dfrac{360°}{n+2} = \dfrac{360°}{n} - 9°$

Efectuando: $n(n + 2) = 80 \Rightarrow n = 8$

$\therefore$ Número de ángulos centrales: 8

6. Hallar el número de lados un polígono convexo, cuyo número de diagonales excede en 26 al de otro polígono. Además, el equivalente en ángulos rectos de la suma de ángulos internos del primero excede en 8, al número de ángulos rectos que contiene la suma de las medidas de ángulos internos del otro.

Resolución:

Sean: n: N.° de lados del primer polígono.

m: N.° de lados del segundo polígono.

Se plantean, según enunciado, las relaciones:

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{m(m-3)}{2} + 26 \qquad ...(1)$$

$$2(n-2) = 2(m-2) + 8 \qquad ...(2)$$

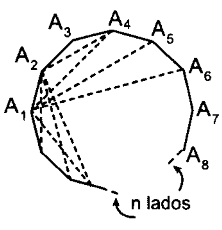
De (2), resulta: $m = n - 4$

Reemplazando esto último, en (1):

$$\frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-4)(n-7)}{2} + 8 \qquad \therefore n = 10$$

7. Calcular la medida del ángulo interno del polígono regular, en el cual se pueden trazar 51 diagonales desde 8 vértices consecutivos.

Resolución:



Considerando el gráfico del polígono de "n" lados:

Desde A_1 : $(n - 3)$ diagonales

Desde A_2 : $(n - 3)$ diagonales

Desde A_3 : $(n - 4)$ diagonales, porque $\overline{A_1A_3}$ ya se contó.

Desde A_4 : $(n - 5)$ diagonales, ya contamos $\overline{A_2A_4}$ y $\overline{A_1A_4}$

Desde A_5 : $(n - 6)$ diagonales, porque ya se contaron $\overline{A_1A_5}$; $\overline{A_2A_5}$ y $\overline{A_3A_5}$

Desde A_6 : $(n - 7)$ diagonales

Desde A_7 : $(n - 8)$ diagonales

Desde A_8 : $(n - 9)$ diagonales

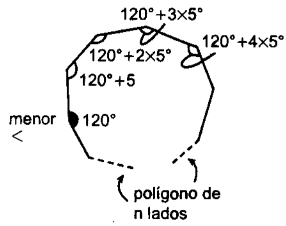
Por dato, la suma de estas cantidades parciales, es 51. Luego, $8n - 45 = 51 \Rightarrow n = 12$

Se pide la medida de un ángulo interno:

$$\frac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow \frac{180°(10)}{12} = 150°$$

8. Las medidas de los ángulos interiores de un polígono convexo están en progresión aritmética de razón 5°, siendo la medida del menor 120°. Hallar el número de lados del polígono.

Resolución:



n: N.° de lados.

Las medidas de los ángulos serán como se indica en la figura.

El mayor tendrá medida: $120° + (n - 1)5°$

La suma:

$$\underbrace{120° + (120° + 2\times5°) + (120° + 3\times5°) + ... + (120° + (n-1)\times5°)}_{\text{Según gráfico}}$$

$$= \underbrace{180°(n-2)}_{\text{Fórmula general}}$$

Escribiendo el primer miembro de modo conveniente:

$$120°(n) + [1 + 2 + 3 + ... +(n - 1)](5) = 180°(n - 2)$$

Es decir:

$$120°(n) + \left[\frac{(n-1)(n-1+1)}{2}\right](5°) = 180°(n-2)$$

$$\Rightarrow 120n + \frac{5}{2}(n)(n-1) = 180(n-2)$$

De donde:

$$n(25 - n) = 144 \Rightarrow n(25 - n) = 16 \times 9$$

$\therefore n = 9$

9. ¿Cuántos lados tiene aquel polígono en el cual el número de diagonales es igual al doble de la suma del número de lados, vértices y ángulos interiores?

Resolución:

n: número de lados

Tenemos: $\dfrac{n(n-3)}{2} = 2(n+n+n)$

$\Rightarrow n(n-3) = 12n \qquad \therefore n = 15$

10. Calcular el número de diagonales de un polígono convexo, sabiendo que la suma de las medidas de los ángulos interiores excede a la suma de las medidas de los ángulos exteriores en 1800°.

Resolución:

Del enunciado:

$180°(n-2) - 360° = 1800° \Rightarrow n = 14$ lados

Luego, el número de diagonales:

$$D = \frac{14(14-3)}{2} = 77$$

11. En un polígono regular, las medidas de un ángulo central y un ángulo interior son entre sí como 1 es a 11. Calcular el número de lados.

Resolución:

Si "n" es el número de lados:

Medida de un ángulo central: $\frac{360°}{n}$

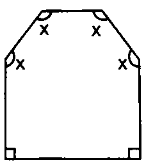
Medida de un ángulo interior: $\frac{180°(n-2)}{n}$

Del enunciado $\dfrac{\frac{360°}{n}}{\frac{180°(n-2)}{n}} = \dfrac{1}{11}$

De donde: $\dfrac{2}{n-2} = \dfrac{1}{11} \quad \therefore\ n = 24$

12. Dos ángulos consecutivos de un hexágono convexo miden 90° cada uno y el resto son congruentes entre sí. Hallar uno de estos ángulos.

Resolución:



Tenemos: $S_i = 180°(n-2) = 180°(6-2)$

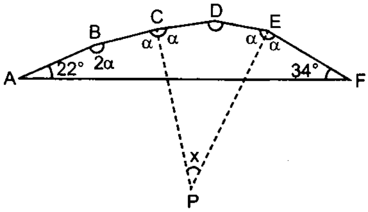
$\Rightarrow S_i = 720°$

Luego, con el gráfico:

$x + x + x + x + 90° + 90° = 720° \quad \therefore x = 135°$

13. ABCDEF es un hexágono convexo, $m\angle A = 22°$ y $m\angle F = 34°$. Si los otros ángulos interiores son congruentes entre sí, calcular la medida del menor ángulo que determinan las bisectrices de los ángulos C y E.

Resolución:



En el hexágono ABCDEF:

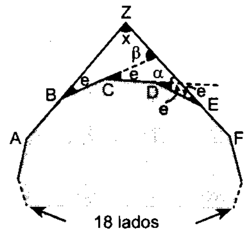
$22° + 34° + 8\alpha = 180°(6-2) \Rightarrow \alpha = 83°$

En el cuadrilátero CDEP: $x + 4\alpha = 360°$

$\therefore\ x = 28°$

14. En un polígono regular de 18 lados, ABCDEF... las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{FE}$ se intersecan en el punto Z. Calcular $m\angle AZE$

Resolución:



Cada ángulo exterior del polígono regular de 18 lados, mide:

$$e = \frac{360°}{18} = 20°$$

Luego, por el teorema del ángulo externo en un triángulo:

$\alpha = 2e \Rightarrow \alpha = 40°$ y $\beta = e + \alpha \Rightarrow \beta = 60°$

$x + e + \beta = 180° \Rightarrow x + 20° + 60° = 180°$

$\therefore\ x = 100°$

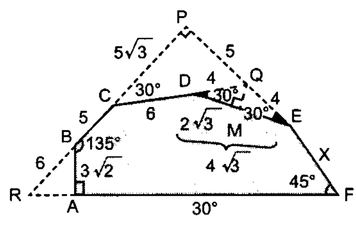
15. ABCDEF es un hexágono convexo.

$\frac{m\angle A}{2} = \frac{m\angle B}{3} = m\angle F = 45°$; $m\angle D = m\angle E = 150°$;

$AB = 3\sqrt{2}$; $BC = 5$; $CD = 6$ y $DE = 4\sqrt{3}$.

Calcular EF.

Resolución:



Prolongamos los lados como indica la figura y, además, trazamos por Q, perpendicular a $\overline{DE}$.

Para el hexágono, las medidas de los ángulos suman: $S_i = 180°(6-2) = 720°$

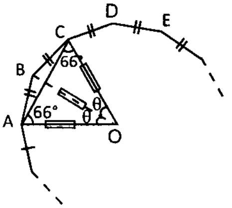
Luego: $m\angle BCD = 150°$

Se observa: $PF = PR$

$x + 4 + 5 = 6 + 5 + 5\sqrt{3} \quad \therefore\ x = 2 + 5\sqrt{3}$

16. ABCDE... es un polígono regular de "n" lados y de centro O. Calcular "n", si $m\angle ACO = 66°$

Resolución:

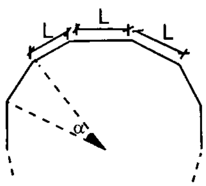


Por ser O, centro del polígono regular:
OA = OB = OC
ΔAOC es isósceles: m$\angle$OAC = 66°
θ es la medida del ángulo central
En el ΔAOC: $2\theta + 2(66°) = 180° \Rightarrow \theta = 24°$

Luego, de: $\theta = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow 24° = \dfrac{360°}{n} \quad \therefore\ n = 15$

17. El perímetro de un polígono regular equivale al número total de diagonales, expresado en centímetros. Además, el número de grados que expresa la medida del ángulo central es cuatro veces el número que indica la longitud de cada lado (en cm). Calcular el número de lados.

Resolución:



Sea "n" el número de lados.

$\text{Perímetro} = \begin{array}{c}\text{Número de}\\ \text{diagonales}\end{array} \Rightarrow nL = \dfrac{n(n-3)}{2}$

$\Rightarrow L = \dfrac{n-3}{2} \qquad ...(1)$

Además: $\alpha = 4L \qquad ...(2)$

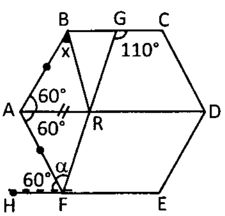
Sustituyendo en (2) lo de (1) y $\alpha = \dfrac{360°}{n}$:

$\dfrac{360°}{n} = 4\left(\dfrac{n-3}{2}\right)$

De donde: $n(n-3) = 180 \Rightarrow n(n-3) = 15(12)$
$\therefore\ n = 15$

18. ABCDEF es un hexágono regular y G un punto de $\overline{BC}$. Se trazan $\overline{FG}$ y $\overline{AD}$, cortándose en el punto R. Calcular m$\angle$ABR, si m$\angle$FGC = 110°

Resolución:



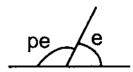
Incógnita: m$\angle$ABR = x
El ángulo exterior HFA mide:
m$\angle$HFA = $\dfrac{360°}{6} = 60°$
Por ser alternos internos:
m$\angle$HFG = m$\angle$FGC.
$60° + \alpha = 110° \Rightarrow \alpha = 50°$
Los triángulos ABR y AFR son congruentes (LAL); luego: $x = \alpha \quad \therefore\ x = 50°$

19. Se tiene un polígono regular cuyo perímetro es p y en el cual el número que expresa su número de diagonales es igual al perímetro. Además, su ángulo interior es p veces su ángulo exterior. ¿Cuánto mide el lado del polígono regular?

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono regular.
Por condición del problema:

$\dfrac{n(n-3)}{2} = p \Rightarrow n(n-3) = 2p \qquad ...(1)$



$e(p+1) = 180°$

$\Rightarrow \dfrac{360°}{n}(p+1) = 180° \Rightarrow n = 2(p+1) \quad ...(2)$

(2) en (1): $2(p+1)(2p+2-3) = 2p$
$(p+1)(2p-1) = p$

$2p^2 - 1 = 0 \Rightarrow p^2 = \dfrac{1}{2} \Rightarrow p = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

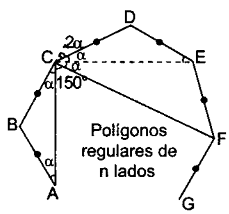
Pero: $nL = p \Rightarrow L = \dfrac{p}{n}$

$\Rightarrow L = \dfrac{p}{2(p+1)} \qquad \Rightarrow L = \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1\right)}$

$\therefore\ L = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$

20. En un polígono regular ABCDEFG... de "n" lados m$\angle$ACF = 150°. Hallar el número de diagonales medias.

Resolución:



De la figura: $5\alpha + 150° = 180° \Rightarrow 5\alpha = 30°$
$\Rightarrow \alpha = 6°$

Pero: $2\alpha = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = \dfrac{360°}{12°} \Rightarrow n = 30$

El número de diagonales medias es:

$D_M = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{30(30-1)}{2} \Rightarrow D_M = 435$

21. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencian en 27 y cuyos ángulos centrales están en la relación de 3 a 4. Calcular la diferencia de las medidas de sus ángulos centrales.

Resolución:

Sean: polígono 1: m lados
polígono 2: n lados

Por condición del problema:

$$\frac{m(m-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=27 \qquad ...(1)$$

$$\frac{\frac{360}{m}}{\frac{360}{n}}=\frac{3}{4} \Rightarrow \frac{n}{m}=\frac{3}{4}$$

De donde: $(m = 4k \wedge n = 3k)$ ...(2)

Se pide hallar:

$$x=\frac{360}{n}-\frac{360}{m}=360\frac{(m-n)}{mn} \qquad ...(3)$$

(2) en (1): $\frac{4k(4k-3)}{2}-\frac{3k(3k-3)}{2}=27.$

Simplificando: $7k^2-3k-54=0$

$$\begin{matrix} 7k & +18 \\ k & -3 \end{matrix}$$

De donde: $k = 3$

En (3): $x=360\frac{(12-9)}{9\times 12}$ $\therefore x = 10$

22. Hallar el número de lados de un polígono de "m" diagonales

Resolución:

Sea n el número de lados de un polígono de m diagonales.

Por teoría: $\frac{n(n-3)}{2}=m \Rightarrow n^2-3n-2m=0$

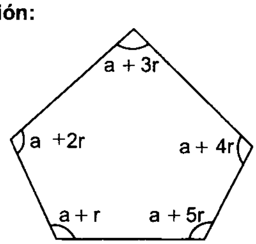
Por fórmula:

$$n=\frac{3+\sqrt{(-3)^2-4(1)(-2m)}}{2}$$

$$\therefore n=\frac{1}{2}(3+\sqrt{9+8m})$$

23. Los ángulos de un pentágono convexo se encuentran en progresión aritmética. Hallar el máximo valor entero de la razón.

Resolución:



De la figura: $5a + 15r = 540°$

$a + 3r = 108° \Rightarrow 3r = 108° - a$

$\Rightarrow r = 36 - \frac{a}{3}$

Por lo tanto, el máximo valor entero de la razón se obtiene cuando $a = 3$ y $r = 35$

24. ¿Cuánto debe medir uno de los ángulos obligatoriamente de un nonágono conociendo que todos sus ángulos interiores se encuentran en progresión aritmética?

Resolución:

La suma de las medidas de los ángulos interiores de un nonágono, cuyos ángulos interiores se encuentran en progresión aritmética es:

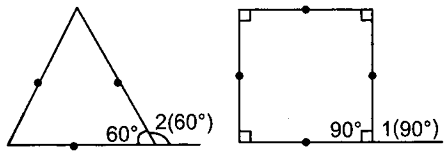
$$9a+\left[\frac{(r+9r)}{2}\right](9)=180°(7)$$

$9a + (5r)(9) = 180°(7) \Rightarrow a + 5r = 140°$

Por lo tanto, este valor es la medida del quinto ángulo del nonágono.

25. Si el ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular mide α y $k\alpha$. Cuáles son los valores enteros que puede tener k para que el polígono exista.

Resolución:



Si $k = 1$ y $k = 2 \Rightarrow k \leq 2$

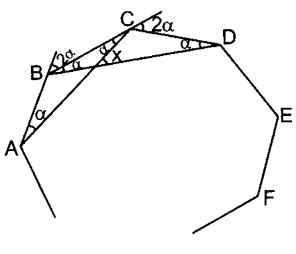
26. Cuál es máximo número de ángulos obtusos que se pueden tener en un polígono convexo de "n" lados, cuyo número es mayor a 4.

Resolución:

Cuando el polígono convexo es equiángulo o regular, cuyo número de lados es mayor a 4, es decir, a partir del pentágono convexo, las medidas de sus ángulos internos es mayor que 90° y menor que 180°, es decir, sus ángulos son obtusos; entonces el máximo número de ángulos obtusos que se pueden tener en un polígono convexo de "n" lados cuyo número mayor a 4 es "n".

27. Calcular el valor del ángulo agudo que hacen las diagonales AC y BD de un polígono regular ABCDE... de "n" lados.

Resolución:



Si el polígono de "n" lados es regular, se cumple:

$$e = \frac{360}{n} \Rightarrow 2\alpha = \frac{360}{n}$$

De la figura: $x = \alpha + \alpha = 2\alpha \Rightarrow x = \dfrac{360}{n}$

28. Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 21 diagonales desde 4 vértices consecutivos.

Resolución:

Desde cuatro vértices consecutivos, el número de diagonales que se pueden trazar es:

$n - 3 + n - 3 + n - 4 + n - 5 = 4n - 15$

Por dato: $4n - 15 = 21 \Rightarrow 4n = 36 \Rightarrow n = 9$

Por lo tanto, el polígono es el nonágono.

29. En un polígono regular, el número de diagonales que se pueden trazar de los 6 últimos vértices, es al número de diagonales que se pueden trazar de los 4 primeros vértices como 2 es a 5. Determinar la medida del ángulo del vértice de la estrella que se forma al intersecarse las prolongaciones de sus lados de dicho polígono.

Resolución:

En un polígono regular de "n" lados, el número de diagonales que se pueden trazar de los 6 últimos vértices es:

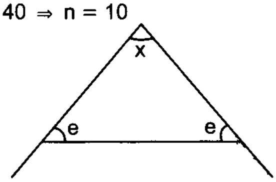
$d = 0 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

De los cuatro primeros vértices: $D = 4n - 15$

Por condición del problema: $\dfrac{d}{D} = \dfrac{2}{5}$

$\Rightarrow \dfrac{10}{4n - 15} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow 4n - 15 = 25$

$\Rightarrow 4n = 40 \Rightarrow n = 10$

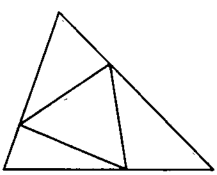


$e = \dfrac{360°}{10} \Rightarrow e = 36° \Rightarrow x = 180° - 72° = 108°$

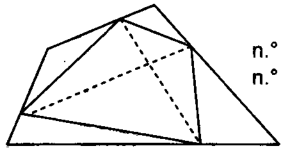
30. En un polígono convexo de "n" lados, sobre cada lado se ubica un punto. Si se unen entre si todos los puntos ubicados, hallar el número de segmentos que se obtienen.

Resolución:

Analizando

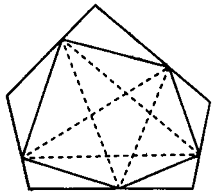


n.° s = 3



n.° s = n.° d + n

n.° s = 2 + 4 = 6



n.° s = n.° d + n

n.° s = 5 + 5 = 10

Generalizando: $n.° s = \dfrac{n(n-3)}{2} + n = \dfrac{n(n-1)}{2}$

31. Treinta veces la medida del ángulo interior de un polígono equiángulo es igual al cuadrado de la medida de su ángulo exterior. Calcular el número de diagonales de dicho polígono.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono equiángulo

Dato: $30 \times 180° \dfrac{(n-2)}{n} = \left(\dfrac{360°}{n}\right)^2$

$n(n - 2) = 6(6 - 2) \Rightarrow n = 6$

Piden: $x = 6\dfrac{(6-3)}{2} \Rightarrow x = 9$

32. Los ángulos de un pentágono convexo se encuentran un progresión aritmética. Halle el máximo valor entero de la razón.

Resolución:

Suma de ángulos internos:

$5\alpha + 10r = 540°$

$\Rightarrow \alpha + 2r = 108°$ ...(1)

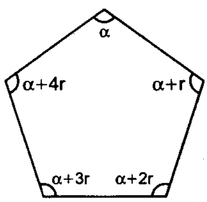
Por ser convexo:

$\alpha + 4r < 180°$ ...(2)

(1) en (2): $108 - 2r + 4r < 180°$

$2r < 72 \Rightarrow r < 36°$

$r_{\text{máx. entero}} = 35°$



33. Cuál es el polígono en el que se pueden trazar 21 diagonales desde 4 vértices consecutivos.

Resolución:

$\begin{pmatrix}\text{N.° diagonales trazadas} \\ \text{desde k vértices}\end{pmatrix} = nk - \dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

$\Rightarrow 21 = n(4) - \dfrac{(4+1)(4+2)}{2} \Rightarrow n = 9$

Por lo tanto, es el nonágono

34. En un polígono equiángulo se conoce que la suma entre el número de diagonales trazadas desde un vértice, el número de diagonales medias que determinan al trazarlas desde un lado y el número de triángulos que se obtienen al trazar diagonales desde 1 vértice es 48. ¿Cuánto mide el ángulo exterior de este polígono.

Resolución:

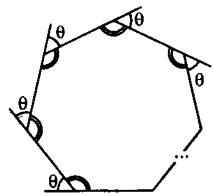
Dato:

$n - 3 + n - 1 + n - 2 = 48$

$\Rightarrow n = 18$

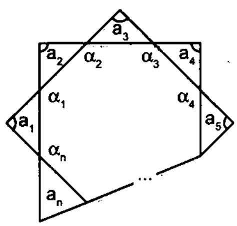
Piden ángulo exterior:

$\therefore \theta = \dfrac{360°}{18} = 20°$



35. En una estrella la suma de las medidas de sus ángulos internos convexos es 1980°. Hallar la suma de las medidas de los ángulos internos del polígono convexo que da origen a la estrella.

Resolución:



$a_1; a_2; a_3; ...a_n \rightarrow$ Medidas de los ángulos interiores convexos de la estrella.

$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; ..., \alpha_n \rightarrow$ Medidas de los ángulos interiores del polígono convexo

Dato: $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = 1980°$

$\Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1980°$

Por teoría: $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 180°(n - 4)$

$\Rightarrow 180°(n - 4) = 1980° \Rightarrow n = 15$

Si "x" es la suma de las medidas de los ángulos interiores del polígono convexo, entonces:

$x = \alpha_1; \alpha_2; \alpha_3; ...; \alpha_n \Rightarrow x = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$

Pero: $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = 180°(n - 2)$

Luego: $x = 180°(n - 2) \Rightarrow x = 180°(15 - 2)$

$\therefore x = 2340°$

36. En un polígono el número de diagonales excede al número de lados en la mitad del número de vértices. Halle el número de diagonales medias.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono.

Por condición: $\dfrac{n(n-3)}{2} = n + \dfrac{1}{2}(\text{N.° V})$

Donde: N.° L = N.° V = N.° $\angle$i = N.° $\angle$e = n

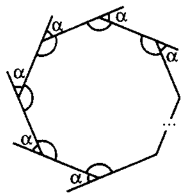
Luego: $\dfrac{n(n-3)}{2} = n + \dfrac{n}{2} \Rightarrow \dfrac{n-3}{2} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow n = 6$

Se pide: N.° dm $= \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{6(6-1)}{2} = 15$

37. De 4 lados consecutivos de un polígono equiángulo se han trazado 50 diagonales medias. ¿Cuánto mide un ángulo exterior del polígono?

Resolución:



Dato: N.° dm(n,4) = 50

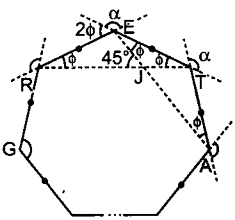
$4n - \dfrac{4(4+1)}{2} = 50$

Luego: $n = 15$

Piden: $\alpha = \dfrac{360°}{15} \Rightarrow \alpha = 24°$

38. En un polígono regular GRETA ... se sabe que el menor ángulo formado por las diagonales $\overline{RT}$ y $\overline{EA}$ es 45°. Calcular el número de lados.

Resolución:



$\triangle RET \cong \triangle ETA$ (L.A.L)

Es decir: (• - a - •)

Entonces: m$\angle$RTE = m$\angle$TEA = ϕ

Luego, en el $\triangle$JET: $2\phi = 45°$

Como $2\phi \Rightarrow$ medida del $\angle$ exterior del polígono regular, se tiene: $2\phi = \dfrac{360°}{n}$

Por lo tanto: $45° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 8$

39. En un polígono se sabe que el cociente de dividir la suma de las medidas de los ángulos interiores y la suma de las medidas de los ángulos exteriores es 8. Hallar el mínimo número de ángulos obtusos que puede tener dicho polígono.

Resolución:

Sea "n" el número de lados de polígono y "x" el mínimo número de ángulos obtusos que puede tener dicho polígono.

Entonces: $x = n - 3$

Dato: $\dfrac{180°(n-2)}{360°} = 8 \Rightarrow n = 18$

$\therefore x = 18 - 3 = 15$

40. En un polígono convexo, la suma de las medidas de sus ángulos interiores y exteriores es 3960°. Calcular el mínimo número de ángulos interiores obtusos que puede tener dicho polígono.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono y "x" la incógnita.

Entonces: $x = n - 3$

Dato: $180°(n-2) + 360° = 3960°$

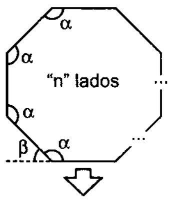
$n = 22$

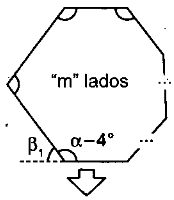
Finalmente: $x = 22 - 3$

$\therefore\ x = 19$

41. Hallar la suma de los números de lados de dos polígonos equiángulos, sabiendo que las medidas de sus ángulos internos difieren en 4.° y la suma de sus exteriores es 76°.

Resolución:





$\alpha + \beta = 180°$ ...(I) $\qquad \alpha - 4° + \beta_1 = 180°$ ...(II)

(I) = (II): $\alpha + \beta = \alpha - 4° + \beta_1$

Dato: $\left.\begin{matrix}\beta_1 - \beta = 4° \\ \beta_1 + \beta = 76°\end{matrix}\right\}\ \beta_1 = 40° \wedge \beta = 36°$

Si: $\beta_1 = 40° = \dfrac{360°}{m} \Rightarrow m = 9$

Si: $\beta = 36° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 10$

Luego: $m + n = 19$

42. ¿Cuál es el polígono convexo cuyo número de diagonales excede al número de vértices en 18?

Resolución:

N.° diagonales − N.° de vértices = 18

$$\frac{n(n-3)}{2} - n = 18$$

$n^2 - 3n - 2n = 36$

$n \quad -9 \Rightarrow n = 9$ (cumple)

$n \quad +4 \Rightarrow n = -4$ (no cumple)

$\therefore$ El polígono es el nonágono

43. Calcule la cantidad de ángulos externos de dos polígonos convexos, sabiendo que la suma de los números de sus vértices es 30 y la suma de los números totales de sus diagonales es 205.

Resolución:

Sean n y m, números de lados de los polígonos.

$m + n = 30$ ...(1)

N.° D_1 + N.° D_2 = 205

$$\frac{n(n-3)}{2} + \frac{m(m-3)}{2} = 205$$

Desarrollando:

$m^2 + n^2 - 3(m+n) = 410$

$m^2 + n^2 - 3(30) = 410$

$m^2 + n^2 = 500$ ...(2)

De (1) y (2): $m = 20 \wedge n = 10$

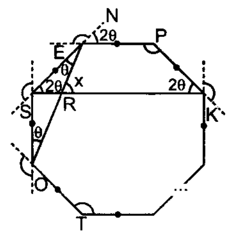
44. En un polígono regular de "n" lados TOSEPK ... Calcular la medida del menor ángulo que forman las diagonales $\overline{OE}$ y $\overline{SK}$

Resolución:

m∠PEN = 2θ y m∠SKP = 2θ (propiedad)

En el △SER:

$x = 3\theta \Rightarrow \theta = \dfrac{x}{3}$ ...(1)



Se sabe que: $2\theta = \dfrac{360°}{n}$

$\Rightarrow \theta = \dfrac{180°}{n}$ ...(2)

(1) = (2): $\dfrac{x}{3} = \dfrac{180°}{n}$

$\therefore\ x = \dfrac{540°}{n}$

45. Calcule el ángulo interno de un polígono equiángulo, sabiendo que la diferencia que existe entre el número total de sus diagonales y el número de ángulos rectos a que equivalen la suma de sus ángulos internos es igual 19.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono.

N.° diag. − N.° ∠s rectos = Suma ∠s int. = 19

$$\frac{n(n-3)}{2} - 2(n-2) = 19$$

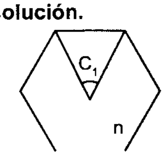
$n^2 - 7n - 30 = 0 \Rightarrow (n-10)(n+3) = 0$

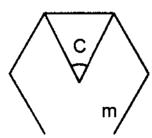
$n = 10$

$$m\angle i = \frac{180°(n-2)}{n} = \frac{180°(10-2)}{10} = 144°$$

46. Dados dos polígonos regulares cuya diferencia de ángulos centrales es 6° y la suma de sus ángulos interiores es 4140°, ¿cuántos lados tiene el polígono mayor.

Resolución.





$C_2 - C_1 = 6°$ ...(1)

$S_1 + S_2 = 4140°$ ...(2)

De (1): $\dfrac{360°}{m} - \dfrac{360°}{n} = 6° \Rightarrow \dfrac{mn}{n-m} = 60$ ...(3)

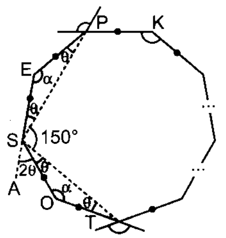
De (2): $180°(n-2) + 180°(m-2) = 4140°$

$m + n = 27$ ...(4)

De (3) y (4): $n = 15$

47. En un polígono regular TOSEPK... de "n" lados, hallar el número de diagonales medias, si m∠TSP = 150°

Resolución:



Sea "x" el número de diagonales medias.

Entonces: $x = \dfrac{n(n-1)}{2}$

$\triangle TOS \cong \triangle SEP$ (L.A.L.)

Es decir: (• – a – •)

m∠ASO = 2θ (propiedad)

Luego se tiene: $4\theta + 150° = 180°$

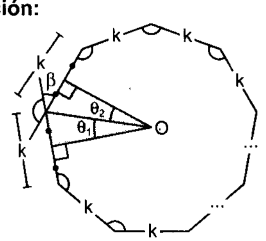
$\Rightarrow 2\theta = 15°$ (2θ ⇒ medida del ∠ exterior)

Por lo tanto: $15° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 24$

Finalmente: $x = 24\dfrac{(24-1)}{2} \Rightarrow x = 276$

48. En un polígono regular las mediatrices de dos lados consecutivos forman un ángulo que mide 22,5°. Determinar la medida de su ángulo externo.

Resolución:



En el ▷ sombreado:

$\theta_1 + \theta_2 = \beta$ (propiedad ∠s)

Dato: $\theta_1 + \theta_2 = 22,5°$ $\therefore \beta = 22,5°$

49. En un polígono convexo de "n" lados, desde (n – 10) vértices consecutivos se pueden trazar 3n + 9 diagonales. Entonces el número total de diagonales del polígono, es:

Resolución:

$$N.^\circ d_{(n;\,v)} = n(v) - \frac{(v+1)(v+2)}{2}$$

Expresión, que nos permite hallar el número de diagonales trazadas desde "v" vértices consecutivos de un polígono convexo de "n" lados.

Por condición del problema:

$$3n + 9 = n(n-10) - \frac{(n-10+1)(n-10+2)}{2}$$

De donde: n = 15

Luego: $N.^\circ D = \dfrac{15(15-3)}{2}$ $\therefore N.^\circ D = 90$

50. En un polígono, hallar la relación entre el máximo número de ángulo internos agudos y el mínimo número de ángulos internos obtusos, si el número de diagonales trazadas desde 5 vértices consecutivos es 69.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono y "x" la incógnita, entonces: $x = \dfrac{3}{n-3}$

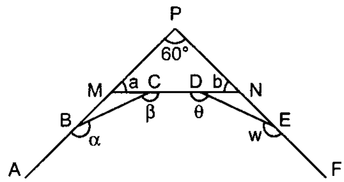
Dato: $N.^\circ d_{(n;\,5)} = 69 \Rightarrow 5n - \dfrac{(5+1)(5+2)}{2} = 69$

Luego: n = 18

Finalmente: $x = \dfrac{3}{18-3}$ $\therefore x = \dfrac{1}{5}$

51. En un polígono convexo ABCDEF ..., las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{EF}$ se intersecan en P, si m∠APF = 60, halle: m∠B + m∠C + m∠D + m∠E.

Resolución:



Piden: $\alpha + \beta + \theta = w = ?$

$\triangle BMC$: $a + \alpha + \beta = 360°$ ...(1)

$\triangle DNE$: $b + \theta + w = 360°$ ...(2)

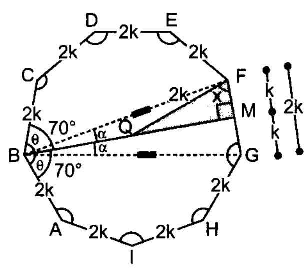
(1) + (2): $a + b + \alpha + \theta + \beta + w = 720°$

$\triangle MNP$: $a + b = 120°$

$\therefore \alpha + \theta + \beta + w = 600°$

52. En un nonágono ABCDEFGHI regular se traza la bisectriz interior $\overline{BJ}$ (J en $\overline{FG}$) de ella se toma el punto Q. Hallar m∠QFG, si: QF = AB

Resolución:



Sea "2k" la longitud del lado del nonágono ABCDEFGHI regular.

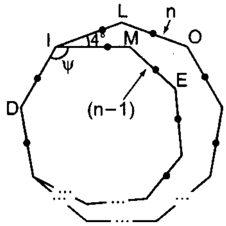
Luego: m∠CBF = m∠ABG = θ y BF = BG = ••••

Además: m∠QBF = m∠QBG = α por simple inspección.

En el $\triangle GBF$ isósceles $\overline{BM} \Rightarrow$ mediana y altura (propiedad $\triangle_s$)
Finalmente en el ⊾QMF notable: $x = 60°$

53. Se tiene un polígono regular DILO ..., de "n" lados y otro polígono regular DIME ..., de "n – 1" lados. Interior al primero, calcular "n" si: $m\angle LIM = 4°$

Resolución:



Para el polígono regular de "n" lados, la medida de sus ángulo interior será:

$$\psi + 4° = \frac{180°(n-2)}{n} \quad ...(I)$$

Para el polígono regular de "n – 1" lados la medida de su ángulo interior será:

$$\psi = \frac{180°(n-3)}{n-1} \quad ...(II)$$

Luego: (II) – (I)

$$4° = \frac{180°(n-2)}{n} - \frac{180°(n-3)}{n-1}$$

$$\Rightarrow 4° = 180°\left[\frac{(n-1)(n-2)-n(n-3)}{n(n-1)}\right]$$

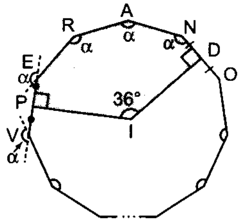
$$n(n-1) = 45(n^2 - 3n + 2 - n^2 + 3n) = 45 \times 2$$

$$n(n-1) = 10(10-1)$$

$$\therefore n = 10$$

54. Calcular el número de lados de un polígono equiángulo VERANO ..., si las mediatrices de $\overline{VE}$ y $\overline{NO}$ forman un ángulo de medida 36°.

Resolución:



En el polígono PERANDI

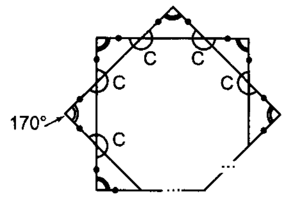
$4\alpha + 180° + 36° = 180°(7-2) \Rightarrow \alpha = 171°$

Pero: $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{n}$

Luego: $\dfrac{180°(n-2)}{n} = 171° \quad \therefore n = 40$

55. Hallar la suma de las medidas de los ángulos internos cóncavos de una estrella regular, si el ángulo interno en las puntas es 170°.

Resolución:



Entonces: $x = \underbrace{C + C + C + ... + C}_{\text{"n" veces}} = Cn$

Pero: $C = 180°\dfrac{(n+2)}{n} \Rightarrow Cn = 180°(n+2)$

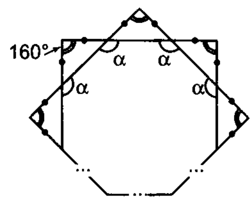
Luego: $x = 180°(n+2)$

Dato: $170° = \dfrac{180°(n+4)}{n} \Rightarrow n = 72$

Finalmente: $x = 180°(72+2) \quad \therefore x = 13\,320°$

56. El ángulo interno convexo de una estrella regular es 160°. Hallar el ángulo interno del polígono que da origen a la estrella.

Resolución:



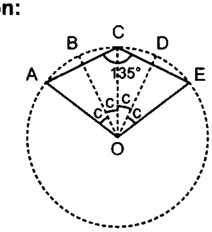
Se sabe: $\alpha = \dfrac{180°(n-2)}{2}$

Dato: $160° = 180°\dfrac{(n-4)}{n} \Rightarrow n = 36$

Finalmente: $\alpha = 180°\dfrac{(36-2)}{36} \quad \therefore \alpha = 170°$

57. En un polígono regular ABCDEF ..., de "n" lados, la medida del ángulo ACE mide 135°. Calcular el número de diagonales medias.

Resolución:



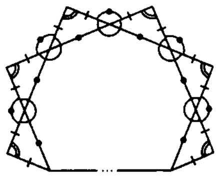
De la figura: $4c = 90° \Rightarrow c = 22{,}5°$

$\Rightarrow c = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow \dfrac{45}{2} = \dfrac{360}{n} \Rightarrow n = 16$

$N.° \, dm = \dfrac{n(n-1)}{2} = \dfrac{16(16-1)}{2} \quad \therefore N.° \, dm = 120$

58. Calcular la suma de todos los ángulos internos de un polígono estrella que se forma al prolongar los lados de un polígono regular cuyo número de diagonales es 170.

Resolución:



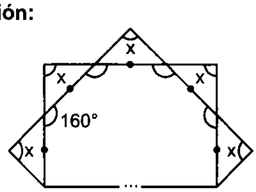
Dato: $\dfrac{n(n-3)}{2} = 170 \Rightarrow n(n-3) = 20(20-3)$

Por analogía: n = 20

Nos piden: $x = 360°(20-1)$ $\quad \therefore x = 6840°$

59. En un polígono regular su ángulo interior es 160°. Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos convexos de la estrella formada al prolongar en ambos sentidos.

Resolución:



Sea **R** la suma de las medidas de los ángulos internos convexos de la estrella, entonces:

$R = \underbrace{x+x+x+\ldots+x}_{\text{"n" veces}} = nx;\ x = \dfrac{180°(n-4)}{n}$

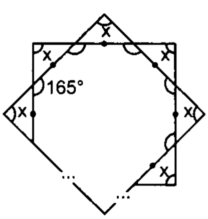
$xn = 180°(n-4) \Rightarrow R = 180°(n-4)$

Dato: $160° = \dfrac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow n = 18$

$\therefore R = 180°(18-4) = 2520°$

60. En un polígono regular su ángulo interno es 165° al prolongar en ambos sentidos los lados del polígono se forma una estrella cuyo ángulo en las puntas es x. Hallar x.

Resolución:



Se sabe: $x = \dfrac{180°(n-4)}{n}$

Dato: $165° = \dfrac{180°(n-2)}{n} \Rightarrow n = 24$

Finalmente:

$x = 180°\dfrac{(24-4)}{24}$ $\quad \therefore x = 150°$

61. Cuántos polígonos cumplen que al aumentar el número de lados en 2a su número total de diagonales medias aumentan en 13a.

Resolución:

$\dfrac{(n+2a)(n+2a-1)}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} + 13a$

$(n+2a)^2 - (n+2a) = n(n-1) + 26a$

Simplificando: $n = 7 - a$

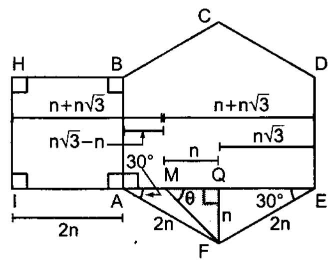
Valores de a = {1; 2; 3; 4}

Si	$a = 1 \Rightarrow n = 6$	hexágno
	$a = 2 \Rightarrow n = 5$	pentágono
	$a = 3 \Rightarrow n = 4$	cuadrilátero
	$a = 4 \Rightarrow n = 3$	triángulo

Por lo tanto, cumplen 4 polígonos

62. Sobre el lado $\overline{AB}$ de un hexágono regular ABCDEF se construye el cuadrado ABHI. Calcular m∠FME. Si M es punto medio del $\overline{EI}$

Resolución:



Sean "2n" la longitud del lado del hexágono ABCDEF, entonces la longitud del cuadrado también es "2n"

En el segmento IE, se tiene IA < AE. Entonces "M" punto medio del $\overline{IE}$ se ubica en el $\overline{AE}$ (propiedad)

En el △AFE isósceles se traza la altura $\overline{FQ}$

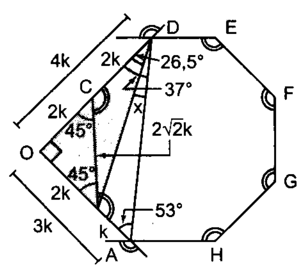
Donde: $AQ = QE = n\sqrt{3}$; $AM = n\sqrt{3} - n$; $MQ = n$

En el ⊾AQF de 30° y 60°: FQ = n

Finalmente el ⊾MQF es isósceles: $\theta = 45°$

63. En un octógono equiángulo ABCDEFGH. Calcular m∠BDA, si: $4AB = 2CD = \sqrt{2}BC$

Resolución:



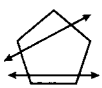
Dato: $4AB = 2CD = \sqrt{2}BC$.
Si: $AB = k$, entonces: $BC = 2\sqrt{2}k$ y $CD = 2k$.
Al prolongar $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se tiene el ⊾BOC isósceles ($BO = OC = 2k$),
Luego, se tiene el ⊾BOD. Donde la relación de sus catetos es de 1 a 2.
Entonces: $m\angle ODB = 26{,}5°$
En el ⊾AOD de catetos 3k y 4k
se tiene $m\angle ODA = 37°$
Luego: $x = 37° - 26{,}5°$ $\quad\therefore\ x = 10{,}5°$

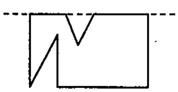
64. De las siguientes proposiciones, cuales son verdaderos y falsas:

I. En todo polígono, ningún par de segmentos de la poligonal se intersecan excepto en sus extremos.
II. Toda recta que pase por un punto interior a un polígono convexo intersecta al contorno o en dos puntos, y solo en dos.
III. En todo polígono, ningún par de segmentos son colineales.

Resolución:

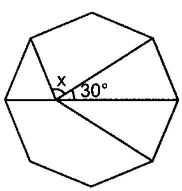
I. Verdadero (por definición)

II.  verdadero

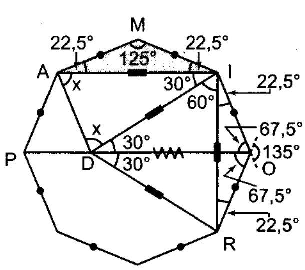
III.  Falso

$\therefore$ VVF

65. Si el octógono mostrado es regular. Calcular "x"



Resolución:

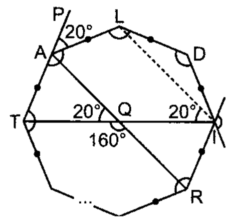


$m\angle POI = m\angle POR = 67{,}5°$ (propiedad)
Luego se tiene: $\triangle DRO \cong \triangle DIO$ (L.A.L).
Es decir (•••••• – 67,5° – •)

Entonces: $m\angle ODI = m\angle RDO = 30°$ y $DI = DR$
Luego el $\triangle DIR$ es equilátero $DI = IR = DR$
$\triangle AMI \cong \triangle ROI$ (L.A.L.) $\Rightarrow$ ($AI = IR$)
Finalmente en el $\triangle ADI$, Isósceles: $x = 75°$

66. Hallar el número de diagonales en un polígono regular TALDIR ... de "n" lados, si $\overline{TI}$ y $\overline{AR}$ forman un ángulo de 160°.

Resolución:



Sea "x" el número de diagonales: $x = \dfrac{n(n-3)}{2}$
$m\angle TQA = m\angle QIL = 20°$ ($\overline{AR} \,//\, \overline{LI}$ propiedad)
Luego: $m\angle PAL = m\angle TIL = 20°$ (propiedad)
Por ángulo exterior: $20° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 18°$
Finalmente: $x = \dfrac{18(18-3)}{2}$ $\quad\therefore\ x = 135$

67. Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno es (x + 11) veces el ángulo exterior y además se sabe que el número de diagonales es 110x

Resolución:
Sea "n" el número de lados del polígono:

$$\frac{180°(n-2)}{n} = (x+11)\left(\frac{360°}{n}\right) \Rightarrow \frac{n-24}{2} = x \quad ...(I)$$

$$\frac{n(n-3)}{2} = 110x \Rightarrow \frac{n(n-3)}{220} = x \quad ...(II)$$

$$(I) = (II):\ \frac{n-24}{2} = \frac{n(n-3)}{220}$$

$\Rightarrow 110(n-24) = n^2 - 3n$
$0 = n^2 - 113n + 2640$
n $\quad -80 \Rightarrow n = 80$
n $\quad -33 \Rightarrow n = 33$
$\therefore\ n = 80 \ \vee\ 33$

68. Al multiplicar por "k" al número de lados de un polígono convexo, su número de diagonales queda multiplicada por 7k. Hallar el número de diagonales de dicho polígono.

Resolución:

N.° de lados	Número de diagonales
n	$\dfrac{n(n-3)}{2}$
nk	$\dfrac{nk(nk-3)}{2}$

Dato: $\dfrac{nk(nk-3)}{2} = 7k\left[\dfrac{n(n-3)}{2}\right]$

$\Rightarrow nk - 3 = 7(n-3)$

$18 = n(7-k)$

$\left.\begin{array}{l} 1\times 18 \\ 2\times 9 \\ 3\times 6 \end{array}\right\}$ no cumplen ($n \geq 4$) Si: $n = 3$ no tiene diagonales

$\left.\begin{array}{l} 6\times 3 \\ 9\times 2 \\ 18\times 1 \end{array}\right\}$ si cumplen

Pero cuando: $n = 9 \vee 7 - k = 2 \Rightarrow k = 5$

Nos piden: N.° D $= \dfrac{9(9-3)}{2} = 27$

69. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales se diferencian en 27, y cuyos ángulos centrales están en la relación de 3/4. Calcule la diferencia de las medidas de sus ángulos centrales.

Resolución.

Dato: N.° D_1 − N.° D_2 = 2F

$\Rightarrow \dfrac{n_1(n_1-3)}{2} - \dfrac{n_2(n_2-3)}{2} = 27$

$\Rightarrow n_1(n_1-3) - n_2(n_2-3) = 54 \qquad ...(1)$

Dato: $\dfrac{m\angle c_1}{m\angle c_2} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \dfrac{\frac{360°}{n_1}}{\frac{360°}{n_2}} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{3k}{4k} \qquad ...(2)$

(2) en (1): $4k(4k-3) - 3k(3k-3) = 54$

$\Rightarrow 7k^2 - 3k - 54 = 0$

$\begin{array}{ll} 7k & 18 \\ k & -3 \end{array} \Rightarrow k = 3 \begin{cases} n_1 = 12 \\ n_2 = 9 \end{cases}$

$\angle c_2 = 40° \wedge \angle c_1 = 30°$

$\Rightarrow \angle c_2 - \angle c_1 = 10°$

70. En un polígono regular cuyo número de lados es impar. Si el máximo número de diagonales que se pueden trazar de todos los vértices no consecutivos es 18, calcular la medida de un ángulo central de dicho polígono.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono

Dato: $18 = \dfrac{3(n-1)(n-3)}{8} \Rightarrow 6\times 8 = (n-1)(n-3)$

$(9-1)(9-3) = (n-1)(n-3) \Rightarrow n = 9$

Luego, ángulo central: $\theta = \dfrac{360°}{9}$

$\therefore \theta = 40°$

71. Se tienen dos polígonos regulares cuyos números de diagonales difieren en 342 y cuyas medidas de sus ángulos centrales están en la relación como 2 es a 3. Hallar la diferencia de efectuar la sustracción de sus ángulos centrales.

Resolución:

N.° lados	N.° diagonales	∠s centrales
n	$\dfrac{n(n-3)}{2}$	$n > m$ $y = \dfrac{360°}{n}$
m	$\dfrac{m(m-3)}{2}$	$x = \dfrac{360°}{n}$

Dato: $\dfrac{\frac{360°}{n}}{\frac{360°}{n}} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{m}{2} = \dfrac{n}{3} = k \left\}\begin{array}{l} m = 2k \\ n = 3k \end{array}\right.$

Dato: $\dfrac{n(n-3)}{2} - \dfrac{m(m-3)}{2} = 342$

$\Rightarrow n^2 - m^2 - 3(n-m) = 2\times 342$

$(n-m)[(n+m)-3] = 2\times 342$

Reemplazando: $k(5k-3) = 12(5\times 12 - 3)$

$\Rightarrow k = 12$

Luego: $m = 24 \wedge n = 36$

Nos piden: $x - y = \dfrac{360°}{24} - \dfrac{360°}{36} \qquad \therefore x - y = 5°$

72. El número de lados de un polígono regular excede en 2 al número de lados de otro polígono regular, y la medida del ángulo externo de uno de ellos excede en 15° a la medida del ángulo externo del otro polígono. Hallar la suma del número de diagonales de dichos polígonos.

Resolución:

N.° lados	∠ exterior	N.° diagonales
n	$\dfrac{360°}{n}$	$\dfrac{n(n-3)}{2} = x$
n − 2	$\dfrac{360°}{n-2}$	$\dfrac{(n-2)(n-5)}{2} = y$

Nos piden: $x + y$

Dato: $\dfrac{360°}{n-2} - \dfrac{360°}{n} = 15°$

$\Rightarrow 24[n - (n-2)] = n(n-2)$

$(8)(8-2) = n(n-2)$; por analogía: $n = 8$

Luego: $x + y = \dfrac{8(8-3)}{2} + \dfrac{(8-2)(8-5)}{2}$

$\therefore x + y = 29$

73. Si el ángulo interior y el ángulo exterior de un polígono regular mide α y $k\alpha$. Cuáles son los valores enteros que puede tener "k" para que el polígono exista.

Resolución:

$i = k = 180°\dfrac{(n-2)}{n} \qquad ...(1)$

$e = k\alpha = \dfrac{360°}{n} \qquad ...(2)$

(1) ÷ (2): $\dfrac{1}{k} = \dfrac{n-2}{2} \Rightarrow n = \dfrac{2}{k} + 2$

Pero: $n \geq 3$

$\Rightarrow \frac{2}{k} + 2 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \quad \therefore k \leq 2$

74. En un polígono cuyo número de lados es par, si el máximo número de diagonales trazados desde todos los vértices no consecutivos es 39. Calcular el número de diagonales trazados desde los 3 primeros vértices no consecutivos.

Resolución:

Sea "n" el número de lados del polígono

Dato: $39 = \frac{n(3n-10)}{8} \Rightarrow 39 \times 8 = n(3n - 10)$

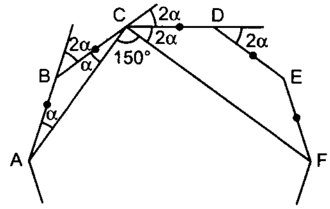
$12(3 \times 12 - 10) = n(3n - 10) \Rightarrow n = 12$

Se pide: $N_{d(12;\,3)} = 12 \times 3 - \frac{(3+5)}{2} \times 3$

$N_{d(12;\,3)} = 24$

75. En un polígono regular ABCDEFG ... de "n" lados, m∠ACF = 150°. Halle el número de diagonales medias.

Resolución:



Por ser polígono regular $\overline{DE} \parallel \overline{CF}$

$\Rightarrow m\angle DCF = 2\alpha$

Se nota:

$\alpha + 150° + 2\alpha + 2\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 6°$

$\Rightarrow m\angle e = 2\alpha = 12° = \frac{360°}{n} \Rightarrow n = 30$

$N.^\circ D_M = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{30(30-1)}{2}$

$\therefore N.^\circ D_M = 435$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

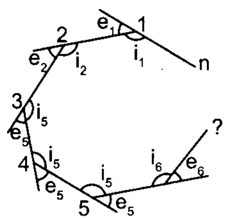
PROBLEMA 1 (UNI 2006 - II)

La suma de las medidas de cinco ángulos internos de un polígono convexo es 760°. Calcule la suma de las medidas de los ángulos externos correspondientes a los vértices restantes.

A) 190° B) 200° C) 210° D) 220° E) 230°

Resolución:

Graficando el polígono de "n" lados:



Con los datos del enunciado podemos concluir lo siguiente: $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 + i_5 = 760°$

De aquí deducimos que la suma de las medidas de los 5 ángulos exteriores correspondientes es 140°. Por consiguiente, la suma de las medidas de los ángulos externos restantes será:

$360° - 140° = 220°$,

Dado que: $\sum_{i=1}^{n} e_i = 360°$

$\sum_{i=1}^{5} e_i + \sum_{i=6}^{n} e_i = 360°$

$140° + \sum_{i=6}^{n} e_i = 360° \Rightarrow \sum_{i=6}^{n} e_i = 220°$

Clave D.

PROBLEMA 2 (UNI 2008 - I)

Dados dos polígonos regulares convexos, cuyos números de diagonales se diferencian en 4 y cuya medida de sus ángulos centrales están en relación 5 a 6. Determine la diferencia entre la medida del ángulo interior del polígono regular convexo que tiene menor número de lados y la medida del ángulo exterior del polígono de mayor número de lados.

A) 48° B) 70° C) 90°
D) 100° E) 114°

Resolución:

Sean: n y m los números de lados de los polígonos.

$\frac{n(n-3)}{2} - \frac{m(m-3)}{2} = 4 \qquad ...(I)$

$\frac{\frac{360°}{n}}{\frac{360°}{m}} = \frac{5}{6} \Rightarrow \begin{cases} n = 6k \\ m = 5k \end{cases}$

Reemplazando en (I): $k = 1$

$x = m\angle i_{\text{pentágono}} - m\angle e_{\text{hexágono}}$

$x = 108° - 60°$

$\therefore x = 48°$

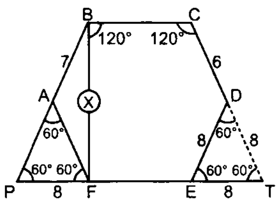
Clave A

PROBLEMA 3 (UNI 2009 - I)

En un polígono convexo equiángulo ABCDEF se tiene AB = 7; CD = 6 y DE = 8. Calcule BF.

A) $\frac{7}{2}\sqrt{3}$ B) 7 C) $5\sqrt{3}$
D) $7\sqrt{2}$ E) $7\sqrt{3}$

Resolución:



Dato:
ABCDEF hexágono equiángulo
Del gráfico: ΔPAF y ΔEDT: equiláteros
PA = AF = PF; DE = DT = ET = 8; PB = CT = 14
$\Rightarrow$ AP = AF = AB = 7
$\measuredangle$PFB notable de 30° y 60°: $x = 7\sqrt{3}$

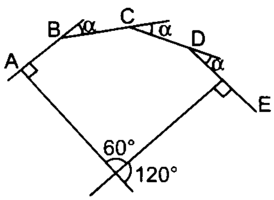
Clave E

PROBLEMA 4 (UNI 2011 - I)

Hallar el número de diagonales de un polígono regular ABCDE... sabiendo que las mediatrices de los lados AB y DE forman un ángulo de 60°.

A) 90 B) 105 C) 120
D) 135 E) 150

Resolución:



En el polígono sombreado: (suma de ángulos externos)
$\alpha + \alpha + \alpha + 90° + 90° + 120° = 360°$
$3\alpha + 300° = 360° \Rightarrow \alpha = 20°$
Por $m\angle ext = 20° = \dfrac{360°}{n} \Rightarrow n = 18$
$\therefore$ N.° diagonales $= \dfrac{n(n-3)}{2} = \dfrac{18(15)}{2} = 135$

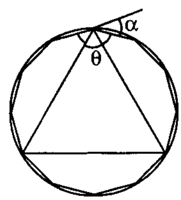
Clave D

PROBLEMA 5 (UNI 2013-I)

Tres de las diagonales de un polígono regular forman un triángulo equilátero. Determine la suma de los ángulos internos si se sabe que la medida de su ángulo interno es mayor que 140° pero menor que 156°.

A) 1440° B) 1620° C) 1800°
D) 1980° E) 2160°

Resolución:



El único que cumple las condiciones:
$\alpha = \dfrac{360°}{12} = 30°$
$140° < \theta < 156° \Rightarrow \theta = 150°$
El polígono es un dodecágono
Suma $_{\angle int.} = 180°(12 - 2) = 1800°$

Clave C

PROBLEMAS PROPUESTOS

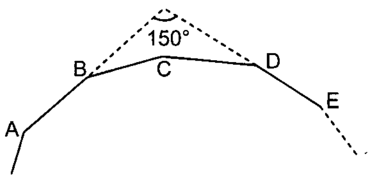
1. La suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono ABCD..., es el doble de la suma de las medidas de los ángulos interiores de otro polígono A'B'C'D'... Calcular la razón entre el número de diagonales medias de dichos polígonos, si el número de lados de ABCD... es mínimo y el número de lados de A'B'C'D'... es par.

   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 5/2 E) 7/2

2. En un polígono equiángulo ABCDE..., cuyo número de lados es n, las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en M, tal que el ángulo AME es obtuso, calcular el mínimo valor de "n".

   A) 10 B) 11 C) 12
   D) 13 E) 15

3. En la figura, el polígono ABCDE... es equiángulo. Calcular el número de lados de dicho polígono.

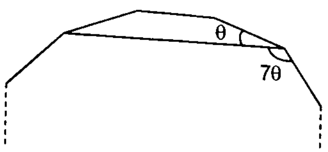


   A) 20 B) 28 C) 30
   D) 32 E) 36

4. En un polígono equiángulo, la diferencia entre el número de diagonales medias y el número de diagonales es 10. Calcular la medida del ángulo exterior.

   A) 32° B) 35° C) 36°
   D) 30° E) 45°

5. En la figura se muestra un polígono regular. Calcular el número de diagonales de dicho polígono.



   A) 125 B) 140 C) 142
   D) 135 E) 148

6. En un polígono, el número de diagonales es igual al número de ángulos rectos a que equivale la suma de medidas de ángulos exteriores aumentado en 1. Calcular el número de diagonales medias.

   A) 8 B) 9 C) 10
   D) 12 E) 14

7. En las siguientes proposiciones, indicar si es verdadero (V) o falso (F).
   I. En un polígono regular, las diagonales tienen igual longitud.
   II. En un pentágono, el número de diagonales es igual al número de lados.
   III. En un polígono, el número de diagonales medias siempre es mayor que el número de diagonales. IV. En un pentágono equilátero, la medida del ángulo exterior es 72°.

   A) VVVV B) VFFV C) FVVF
   D) FVFV E) VFVF

8. En las siguientes proposiciones, indicar si es verdadero (V) o falso (F).
   I. La diferencia entre el número de diagonales medias y el número de diagonales en un polígono es igual al número de lados de dicho polígono.
   II. Si el número de diagonales en un polígono es el doble del número de lados, entonces el número de diagonales medias es el triple del número de lados.
   III. En todo polígono equilátero, la suma de las medidas de los ángulos externos es igual 360°

   A) VVV B) VFF C) VVF
   D) FVV E) FFV

9. Si el número de lados de un polígono es igual al número de diagonales. Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos.

   A) 180° B) 360° C) 540°
   D) 720° E) 1080°

10. Si el número de lados de un polígono es disminuido en 2; el número de diagonales disminuye en 15. Calcular el número de lados de dicho polígono.

    A) 7 B) 8 C) 9
    D) 10 E) 12

11. En las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F).
    I. Todo polígono tiene diagonales.
    II. En un polígono regular las diagonales son de igual longitud.
    III. En todo polígono, la suma de las medidas de los ángulos externos es 360°.
    IV. El número de diagonales medias en un polígono siempre es mayor que el número de lados.

    A) VVVF B) VVFV C) VVFF
    D) FFFV E) FFFF

12. Los números de lados de dos polígonos convexos están representados por dos números consecuti-

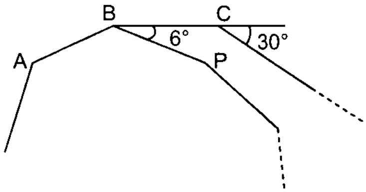
vos y sus números de diagonales se diferencian en 12. Calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de dichos polígonos.

A) 4000° B) 4120° C) 4140°
D) 4410° E) 4420°

13. En un polígono ABCDE, AE = ED = 5, m∠ABC = m∠BCD = m∠AED = 90° y BC = 7. Calcular la medida del ángulo determinado por $\overline{BC}$ y $\overline{ED}$.

A) 15° B) 30° C) 36°
D) 37° E) 45°

14. En la figura, ABC... y ABP... son polígonos regulares. Calcular la razón entre los perímetros de las regiones poligonales.



A) 2 B) 3 C) $\frac{6}{5}$
D) $\frac{6}{7}$ E) $\frac{5}{4}$

15. Si el número de lados de un polígono aumenta en 3, entonces la diferencia del número de diagonales es 15. Calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de dicho polígono.

A) 640° B) 720° C) 600°
D) 360° E) 540°

16. En un hexágono equiángulo ABCDEF, $\overleftrightarrow{BC}$ interseca a las prolongaciones de $\overline{ED}$ y $\overline{FA}$ en M y N respectivamente, $\overleftrightarrow{FE}$ interseca a las prolongaciones de $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ en P y Q, respectivamente, $\overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \{L\}$ y $\overleftrightarrow{AF} \cap \overleftrightarrow{DE} = \{R\}$.
Calcular la razón entre los perímetros de las regiones PLQ y NMR.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 3/2 E) 2/3

17. En un polígono equiángulo ABCDEFGH, ACEG es un cuadrado. Calcular la razón entre los perímetros de las regiones ACEG y BDFH.

A) 1 B) 1/2 C) 2
D) 3/2 E) 2/3

18. En un pentágono convexo ABCDE, m∠BAE = m∠BCD = 90°, AB = AE; BC = CD y AC = 10. Calcular la distancia del punto medio de $\overline{ED}$ hacia $\overline{AC}$.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

19. Si la medida de los ángulos externos de tres polígonos son proporcionales a 1, 2 y 3 y el número de diagonales del polígono de menor número de lados es 54. Calcular la diferencia entre el número de diagonales medias de los otros 2 polígonos.

A) 428 B) 477 C) 468
D) 460 E) 482

20. En un polígono regular ABCDEFG... las prolongaciones de $\overline{BC}$ y $\overline{GE}$ se intersecan en P, tal que la m∠CPE = 90°. Calcular el número de lados del polígono.

A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

21. En un octógono equiángulo ABCDEFGH, el perímetro de la región que limita dicho polígono es 40 m y ACEG es un cuadrado. Calcular AB + GF.

A) 5 m B) 8 m C) 10 m
D) 12 m E) 20 m

22. Se tiene un polígono regular de n lados ABCDE... y otro polígono regular de (n −2) lados ABPQR... interior al primero, si m∠CBP = 6°, calcular n.

A) 10 B) 12 C) 15 D) 18 E) 20

23. Se tiene los polígonos regulares ABCDEF... y ADMNP..., tal que C, D y M son colienales, calcular la razón entre los números de lados de dichos polígonos.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 2/3 E) 3/2

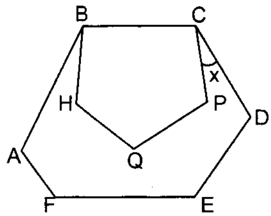
24. Se tiene el polígono regular ABCDEF..., el ángulo determinado por $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ mide 60°. Calcular el número de diagonales de dicho polígono.

A) 18 B) 21 C) 25 D) 27 E) 32

25. En un hexágono regular ABCDEF, se ubica el punto medio M de $\overline{EF}$; $\overline{AC} \cap \overline{BE} = \{N\}$ y AB = 4 m. Calcular MN.

A) $2\sqrt{3}$ m B) $2\sqrt{2}$ m C) $2\sqrt{7}$ m
D) $2\sqrt{5}$ m E) $2\sqrt{6}$ m

26. Según el gráfico, los polígonos ABCDEF y HBCPQ son equiángulos. Calcular x.



A) 15° B) 12° C) 18° D) 20° E) 30°

27. Calcular el número de diagonales de un polígono equiángulo, si al disminuir en 30°, la medida de su ángulo interior, se obtiene la medida del ángulo interior de otro polígono equiángulo; además, la medida del ángulo externo del segundo es a la medida de su ángulo interno como 1 es a 2.

A) 16 B) 20 C) 30
D) 40 E) 54

28. Si al número de diagonales de un polígono regular se le disminuye el número de ángulos rectos a que equivale la suma de medida de los ángulos internos se obtiene el número de lados aumentado en 9, calcular la medida del ángulo central de dicho polígono.

A) 20° B) 32° C) 40°
D) 36° E) 60°

29. En un polígono equiángulo, la suma de medida de 10 ángulos externos es igual a 200°. Calcular la diferencia entre el número de diagonales medias y el número de diagonales.

A) 20 B) 25 C) 30
D) 18 E) 17

30. Se tienen 3 polígonos equiángulos, tal que el número de diagonales del primer y tercer polígono están en la relación de 1 a 6, la suma de las medidas de los ángulos internos del segundo y primer polígono se diferencia en 360° y las medidas de los ángulos externos del tercer y segundo polígono están en relación de 2 a 3. Calcular la medida del ángulo interno del primer polígono.

A) 135° B) 150° C) 120°
D) 109° E) 144°

31. Si el número de lados de un polígono equiángulo aumenta, su número de diagonales totales aumenta en 19 y la medida de su ángulo interior aumenta en 6°. Calcular el número de diagonales medias que se puede trazar de 7 lados consecutivos.

A) 50 B) 48 C) 42
D) 60 E) 58

32. Se tiene un dodecágono equiángulo ABCDEFGHIJKL, si AB = 4 m, BC = $3\sqrt{3}$ m, CD = 7 m y la distancia de G a la recta que contiene a $\overline{AB}$ es $11\sqrt{3}$ m. Calcular la distancia del punto medio de $\overline{GD}$ a dicha recta.

A) $6\sqrt{3}$ m B) $7\sqrt{3}$ m C) $8\sqrt{3}$ m
D) $9\sqrt{3}$ m E) $10\sqrt{3}$ m

33. En un pentágono ABCDE; la m∠ABC = m∠CDE = 90° y la medida de sus otros ángulos son iguales; calcular la distancia de A a $\overline{DE}$, si BC = 4 cm, CD = 10 cm y la distancia de C a $\overline{AE}$ es 9 cm.

A) $6\sqrt{3}$ cm B) $5\sqrt{3}$ cm C) 5 cm
D) $5\sqrt{2}$ cm E) 6 cm

34. En un hexágono ABCDEF cuyo perímetro es 80 cm, se considera un punto O interior a dicho hexágono y se une dicho punto con los vértices del hexágono. Indicar cuál de los siguientes valores no puede ser el valor de:

OA + OB + OC + OD + OE + OF.

A) 200 cm B) 150 cm C) 100 cm
D) 56,5 cm E) 40,01 cm

35. En la región interior de un pentágono regular ABCDE, se ubica un punto P, tal que PD = DE y m∠PAB = 42°, calcular la m∠DPE.

A) 42° B) 45° C) 48°
D) 54° E) 60°

36. En un hexágono regular ABCDEF se ubican los puntos M, N y Q en su región interna, tal que AMNF es un cuadrado y AQF es un triángulo equilátero. Calcular la medida del ángulo formado por las rectas $\overleftrightarrow{CE}$ y $\overleftrightarrow{MQ}$.

A) 8° B) 10° C) 22°30'
D) 15° E) 30°

37. En un polígono equiángulo, la medida de su ángulo interior es (p + 15) veces la medida de su ángulo exterior y, además, se cumple que el número de diagonales es 135p. Calcular el número de lados de dicho polígono para p impar.

A) 48 B) 46 C) 135 D) 80 E) 90

38. En un polígono regular ABCDEFGHI... las prolongaciones de $\overline{AD}$ y $\overline{HE}$ se intersecan en P. Calcular su número de diagonales, si la m∠APH = 132°.

A) 405 B) 400 C) 375
D) 435 E) 370

39. En un polígono de "n" lados desde n − 9 vértices consecutivos, se puede trazar 9n + 22 diagonales. Calcular la suma de las medidas de los ángulos interiores de dicho polígono.

A) 4100° B) 1080° C) 720°
D) 4220° E) 4140°

40. En cierto polígono equiángulo ABCDE...; cuál es el mínimo número de lados para que las perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ determinen un ángulo agudo y dé como respuesta el número de diagonales trazadas desde cinco vértices consecutivos.

A) 23 B) 27 C) 24
D) 36 E) 9

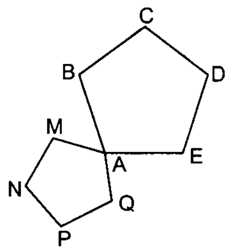
41. En un pentágono convexo ABCDE se ubica el punto medio M de $\overline{AE}$. Si los ángulos ABC y EDC son suplementarios, AB = CD y BC = ED, calcular la m∠BMD.

A) 60° B) 90° C) 45°
D) 120° E) 75

42. En un dodecágono regular ABCDEFGHIJKL, las diagonales CJ y AD se intersecan en p, luego por P se traza una recta L que interseca a $\overline{CD}$. Calcular la distancia de C a L, si las distancias de A y M a dicha recta son a y b respectivamente, siendo M la intersección $\overleftrightarrow{LA}$ y $\overleftrightarrow{BC}$.

A) b − a B) 2b − a C) a + b
D) $\frac{a+b}{2}$ E) $\frac{b-a}{2}$

43. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{BQ}$ y $\overline{ME}$, si ABCDE y AMNPQ son pentágonos regulares.



A) 72° B) 36° C) 12°
D) 75° E) 60°

44. Calcular el número de lados de un polígono convexo, si el número total de sus diagonales más el número de triángulos que se forman al unir un vértice con los restantes, más el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos interiores es igual a 14.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

45. A un polígono de n lados, se le aumenta k lados (k: impar), de tal modo que el número de diagonales aumenta en n + 2k. Calcular n.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

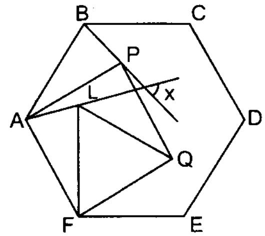
46. En un polígono equiángulo ABCDE..., en el cual $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$, calcular el número de diagonales medias del polígono.

A) 16 B) 11 C) 9
D) 10 E) 15

47. En un polígono convexo de número de lados par, al trazar diagonales desde un solo vértice se obtienen 21 cuadriláteros de tal forma que sus regiones interiores no tienen puntos en común. Calcular la cantidad de diagonales de dicho polígono.

A) 908 B) 900 C) 904
D) 906 E) 902

48. En la figura, los polígonos ABCDEF, APQF y FLQ son regulares. Calcular x.

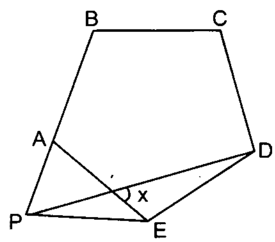


A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 75°

49. Calcular el número de diagonales de un polígono regular, si la razón entre las medidas de su ángulo interior y su ángulo exterior es 7/2.

A) 27 B) 35 C) 9
D) 14 E) 170

50. Sea ABCDE un pentágono regular, $\overline{PE} \cong \overline{BC}$, calcular x.

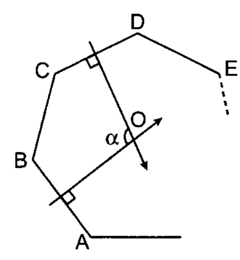


A) 36° B) 18° C) 60°
D) 54° E) 72°

51. Se tiene un polígono regular ABCDEFG..., m∠ABD = 7(m∠BCA). Calcular el número de diagonales medias de dicho polígono.

A) 45 B) 28 C) 66
D) 55 E) 36

52. Si α < 90° y ABCDE..., es un polígono equiángulo cuyo número de lados es mínimo, calcular el número de diagonales trazadas desde cinco vértices consecutivos.



A) 15 B) 24 C) 29
D) 23 E) 36

53. En un polígono equiángulo ABCDE..., cuyo número de lados es n, las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en L, de modo que el ángulo ALE es agudo. Calcular el máximo valor de n.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

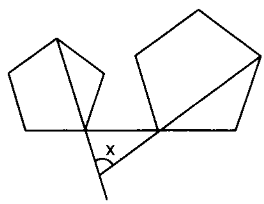
54. Se tiene un hexágono regular ABCDEF, cuyo lado mide 8 m. Calcular la longitud del segmento que tiene por extremos al punto medio de $\overline{EF}$ y al punto de intersección de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BE}$.

A) $4\sqrt{6}$ m B) $2\sqrt{6}$ m C) $4\sqrt{7}$ m
D) $3\sqrt{7}$ m E) $3\sqrt{6}$ m

55. ¿Cuántos lados tiene el polígono en el cual el número de diagonales es mayor en 133 al número de lados?

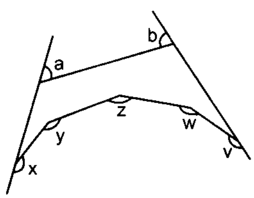
A) 16 B) 25 C) 23
D) 24 E) 19

56. En el gráfico se muestran dos pentágonos regulares. Calcular el valor de x.



A) 50° B) 75° C) 60°
D) 40° E) 72°

57. Si a + b = 130°, calcular: x + y + z + w + v.



A) 920° B) 630° C) 860°
D) 770° E) 550°

58. En un hexágono convexo ABCDEF:
m∠B= 140°; m∠E = 150°; m∠C + m∠D = 330°.
Hallar el ángulo que forman las rectas AB y FE al intersecarse.

A) 40° B) 80° C) 70°
D) 90° E) 120°

59. ¿Cuál es el polígono, en el que su número de lados es igual a su número de diagonales?

A) Pentágono B) Hexágono
C) Dodecágono D) Nonágono
E) Octógono

60. Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos convexos difieren en 720° y sus ángulos céntricos difieren en 7,5°.
Indicar si el cociente mayor que la unidad de los lados de los dos polígonos convexos es igual a:

A) 1,53 B) 1,23 C) 1,13
D) 1,43 E) 1,33

61. El número de diagonales de un polígono convexo excede en 16 a la diferencia entre el número de ángulos rectos a que equivale la suma de sus ángulos interiores y el número de vértices del polígono. ¿De qué polígono se trata?

A) Octógono B) Decágono
C) Pentágono D) Hexágono
E) N. A.

62. Los lados de un polígono reglar de "n" lados (n > 4), se prolongan para formar una estrella. El número de grados en cada vértice de la estrella, es:

A) $\frac{360}{n}$ B) $\frac{(n-4)180}{n}$ C) $\frac{(n-2)180}{n}$
D) $180-\frac{90}{n}$ E) $\frac{180}{n}$

63. ¿Cuántos lados tiene el polígono regular cuyo ángulo interno es (p + 15) veces el ángulo exterior, y además se sabe que el número de diagonales es 135p?

A) 80 B) 85 C) 90
D) 95 E) 100

64. Dadas las siguientes proposiciones:
I. Cada ángulo interior de un hexágono regular mide 120°.
II. En el decágono, se pueden trazar 36 diagonales.
III. El polígono regular cuyos ángulos exteriores miden 36° es un decágono.
Son verdaderas:

A) I y III B) solo II C) I y II
D) solo III E) II y III

65. En un hexágono convexo, los ángulos internos están en progresión aritmética y:
$\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5 > \alpha_6$
¿Cuánto medirá el cuarto ángulo α_4, dado en radianes, si el mayor es igual a 125°.

A) 750π B) 2π C) $\frac{119}{180}\pi$
D) $\frac{150}{180}\pi$ E) $\frac{121}{180}\pi$

66. Se tiene un polígono reglar cuyo semiperímetro es "p" y el número que expresa su número de diago-

nales es igual al perímetro. Además su ángulo interior es "p" veces su ángulo exterior.
¿Cuánto mide el lado del polígono regular?

A) 1/3 B) 1/5 C) 1/4
D) 1 E) 1/2

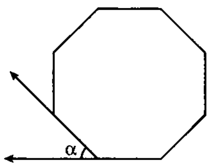
67. En un polígono, la suma de sus ángulos internos es 540°, el número de lados de dicho polígono es:

A) 3 B) 4 C) 9 D) 5 E) 6

68. Se tiene el hexágono regular ABCDEF, se traza una recta secante al hexágono que pasa por su centro e interseca a los lados AF y CD. Si las perpendiculares trazadas desde los vértices A y C tienen longitudes de 1 y 3 respectivamente, calcular la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice E a dicha recta.

A) 5 B) 4 C) 3 D) 6 E) 7

69. En el octógono adjunto, ¿cuál es el valor de α?



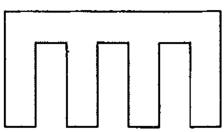
A) 30° B) 37,5° C) 39,5°
D) 45° E) 45,7°

70. En un hexágono regular de lado L, se unen los puntos medios de cuatro lados opuestos dos a dos. Luego, se unen los puntos medios de los lados del rectángulo que se formó, obteniéndose un cuadrilátero. Hallar el área de este cuadrilátero.

A) $\frac{\sqrt{3}}{3}L^2$ B) $\frac{3\sqrt{3}}{4}L^2$ C) $\frac{3\sqrt{3}}{8}L^2$

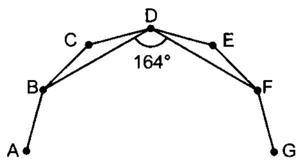
D) $\frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ E) $\frac{\sqrt{3}}{2}L^2$

71. Calcular la suma de los ángulos interiores en la figura.



A) 2520° B) 1440° C) 2880°
D) 900° E) 2440°

72. En la figura, se presenta parte de un polígono regular de "n" lados. ¿Cuánto vale "n"?



A) 40 B) 36 C) 45
D) 18 E) 24

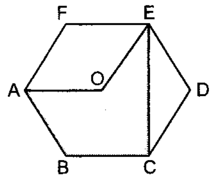
73. La medida del ángulo interior de un polígono regular es igual a la medida de su ángulo central. El polígono es un:

A) Triángulo. B) Cuadrado. C) Pentágono
D) Hexágono. E) Decágono.

74. Determinar el número de diagonales que se puede trazar en un polígono regular de vértices A_1; A_2; A_3; ...A_n, sabiendo que las mediatrices de $\overline{A_1A_2}$ y $\overline{A_3A_4}$ forman un ángulo de 30°.

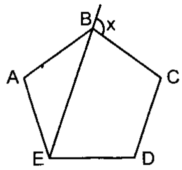
A) 189 B) 230 C) 170
D) 275 E) 252

75. La siguiente figura es un hexágono regular de centro O y lado "a". Hallar el perímetro de polígono AOECB.



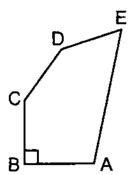
A) $4a + a\sqrt{2}$ B) $a(4 + \sqrt{3})$ C) 6a
D) $4a + a\sqrt{5}$ E) $a(4 + \sqrt{8})$

76. En la figura, ABCDE es un polígono regular. Hallar "x".



A) 108° B) 144° C) 72°
D) 36° E) 120°

77. En el polígono mostrado: AB = BC = CD = DE = a; AC ⊥ CD; AD ⊥ DE. Calcular el perímetro del polígono mostrado.



A) 4a B) 2a C) 6a D) 8a E) 10a

78. Si a un polígono se le incrementa el número de lados en 2, cada ángulo interno aumenta en 15°. ¿Cuál es el polígono?

A) Octógono B) Pentágono C) Hexágono
D) Nonágono E) N. A.

79. Si a un polígono se le aumenta un lado, su número de diagonales aumenta en 6. Si se le disminuye un lado, el número de diagonales disminuye en:

A) 6 B) 3 C) 5
D) 2 E) 4

80. Si a un polígono se le aumenta 2 lados, el número de diagonales aumenta en 15. Hallar el ángulo externo de dicho polígono.

A) 45° B) 60° C) 40°
D) 120° E) 90°

CLAVES

1. D	11. E	21. C	31. C	41. B	51. B	61. A	71. A
2. D	12. C	22. B	32. C	42. A	52. B	62. B	72. C
3. E	13. D	23. A	33. C	43. A	53. C	63. C	73. B
4. C	14. C	24. D	34. A	44. C	54. C	64. A	74. E
5. D	15. E	25. C	35. E	45. C	55. E	65. E	75. B
6. C	16. A	26. B	36. D	46. E	56. E	66. D	76. A
7. C	17. A	27. E	37. E	47. E	57. D	67. D	77. C
8. C	18. B	28. D	38. A	48. C	58. B	68. B	78. C
9. C	19. B	29. D	39. E	49. A	59. A	69. D	79. C
10. D	20. C	30. C	40. C	50. D	60. E	70. C	80. A

Cuadriláteros

06 capítulo

Brahmagupta (598 d. C.-668 d. C) nació en Ujjain. En esta ciudad de la zona central de la India se encontraba el más famoso y antiguo observatorio de astronomía en el que Brahmagupta sería director. Es considerado el más grande de los matemáticos de esta época. Es posible que Brahmagupta haya sido el idealizador del concepto del «cero», ya que en su obra *Brahmasphutasiddhanta* del año 628 aparece por primera vez esta idea. La obra trataba también sobre aritmética y números negativos en términos muy parecidos a los de la matemática moderna. Murió en el año 670.

En Geometría se le conoce por la fórmula que lleva su nombre (teorema de Brahmagupta) y que trata sobre una regla para la formación de ternas pitagóricas. En geometría euclidiana, el teorema de Brahmagupta da una condición necesaria sobre la perpendicularidad de las diagonales de un cuadrilátero cíclico (inscriptible en un círculo), cuyo enunciado dice: «Si las diagonales de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares, entonces toda recta perpendicular a un lado cualquiera del cuadrilátero y que pase por la intersección de las diagonales, divide al lado opuesto en dos partes iguales».

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

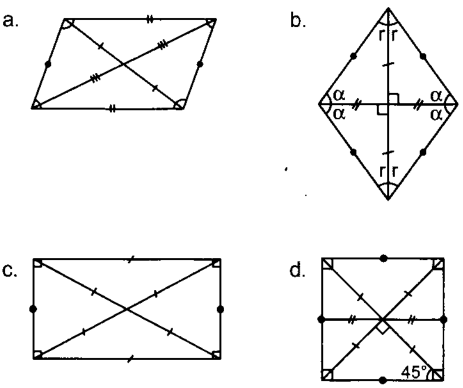
Son polígonos de cuatro lados. Estos polígonos pueden ser convexos, no convexos, equiláteros, equiángulos, etc.

CLASIFICACIÓN DE LOS CUADRILÁTEROS CONVEXOS

Paralelogramos

Tienen sus lados opuestos, respectivamente, paralelos. Se dividen en:

a. **Romboide.** Es el paralelogramo propiamente dicho.
b. **Rombo.** Tiene sus 4 lados congruentes.
c. **Rectángulo.** Tiene sus 4 ángulos congruentes.
d. **Cuadrado.** Tiene sus 4 lados y 4 ángulos, respectivamente, congruentes.



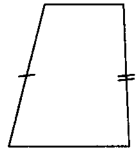
Propiedades

1. En todo paralelogramo, los ángulos y lados opuestos son, respectivamente, congruentes.
2. Las diagonales de todo paralelogramo se intersecan en su punto medio.
3. Las diagonales del rectángulo son congruentes.
4. Las diagonales del rombo son perpendiculares y bisectrices.
5. Las diagonales del cuadrado son congruentes, perpendiculares y bisectrices.

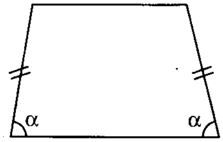
Trapecios

Tienen dos lados paralelos llamados bases. La altura del trapecio es la distancia entre las bases. Se dividen en:

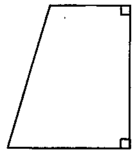
a. **Trapecio escaleno.** Sus lados no paralelos tienen diferente longitud.
b. **Trapecio isósceles.** Sus lados no paralelos son congruentes.
c. **Trapecio rectángulo.** Uno de sus lados es perpendicular a las bases.



Trapecio escaleno



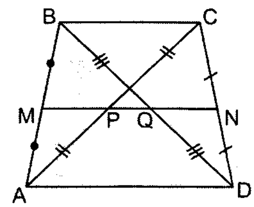
Trapecio isósceles



Trapecio rectángulo

Propiedades

1. El segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos se llama base media, mediana o paralela media, es paralelo a las bases y mide la semisuma de ellas.
2. El segmento que une los puntos medios de las diagonales se ubica sobre la mediana y mide la semidiferencia de las bases.

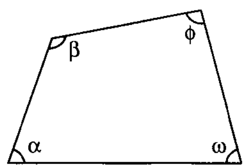


$$MN = \frac{AD + BC}{2}$$

$$PQ = \frac{AD - BC}{2}$$

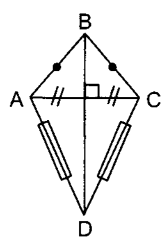
Trapezoides

No tienen lados paralelos.



$$\alpha + \beta + \phi + \omega = 360°$$

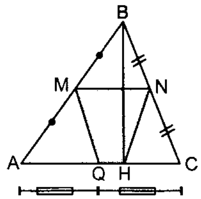
Existe un tipo especial de trapezoide llamado simétrico o contraparalelogramo. En este, una diagonal es porción de mediatriz de la otra.



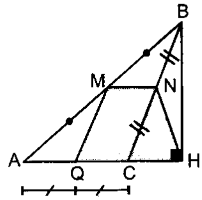
Ejemplos:

1. En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$. Si M, N y Q son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente; demostrar que el cuadrilátero MNHQ es un trapecio isósceles.

Demostración:



$\triangle ABC$: $\angle A$ y $\angle C$ agudos



$\triangle ABC$: $\angle ABC$ es obtuso

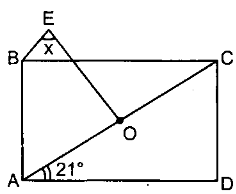
Sabemos que, por ser base media, en cada caso $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$; $MQ = \dfrac{BC}{2}$ ...(1)

Y, por ser medianas relativas a la respectivas hipotenusas: $HN = \dfrac{BC}{2}$ ...(2)

Luego, de (1) y (2): MQ = HN

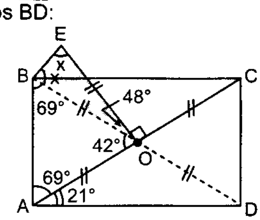
$\therefore$ MNHQ es un trapecio isósceles.

2. ABCD es un rectángulo, $\overline{EO} \perp \overline{AC}$ y AO = OC = OE. Hallar el valor de x.



Resolución:

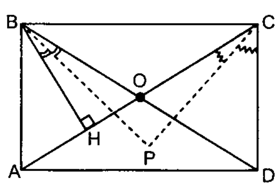
Trazamos $\overline{BD}$:



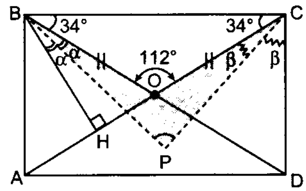
Como: AO = OC = BO = OD = OE; entonces el $\triangle OBE$ es isósceles: $x + x + 48° = 180°$

$\therefore$ $x = 66°$

3. La figura ABCD es un rectángulo, $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, $\angle OBC$ mide 34°, $\overline{BP}$ biseca el $\angle HBO$ y $\overline{CP}$ biseca el $\angle OCD$. Hallar la medida del ángulo BPC.



Resolución:



Por ser rectángulo OB = OC

$\Rightarrow$ $\triangle BOC$ es isósceles:

$m\angle OCB = m\angle OBC = 34°$

y $m\angle BOC = 180° - 2(34°) = 112°$

En el cuadrilátero no convexo BPCO:

$m\angle P + \alpha + \beta = 112°$ ...(1)

$\triangle BHO$: $2\alpha + 90° = 112°$ $\Rightarrow$ $\alpha = 11°$

$\angle BCD$: $34° + 2\beta = 90°$ $\Rightarrow$ $\beta = 28°$

Reemplazando en (1):

$m\angle P + 11° + 28° = 112°$

$\therefore$ $m\angle P = 73°$

4. En un rombo ABCD, $m\angle A < 90°$; se trazan $\overline{BH}$ y $\overline{CR}$, perpendiculares a $\overline{AD}$ (H en $\overline{AD}$ y R en su prolongación). Hallar HD, si AR = 17 y HR = 11.

Resolución:

Del gráfico:

$\triangle AHB \cong \triangle DRC$

$\Rightarrow$ AH = RD

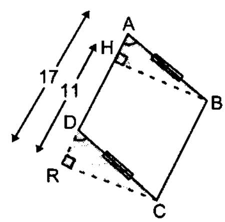
Siendo: AH = 17 − 11

$\Rightarrow$ AH = 6 $\Rightarrow$ RD = 6

Luego: ΔH = 11 − RD

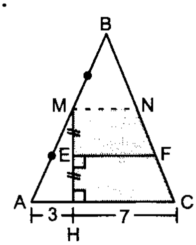
$\Rightarrow$ DH = 11 − 6

$\therefore$ DH = 5



5. En un triángulo ABC, M es punto medio de $\overline{AB}$. Se traza $\overline{MH} \perp \overline{AC}$ (H en $\overline{AC}$). Hallar la longitud de $\overline{EF}$, si F está sobre $\overline{BC}$, E es punto medio de $\overline{HM}$ y $\overline{EF} \perp \overline{HM}$, siendo AH = 3 y HC = 7.

Resolución:



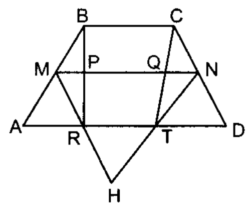
Trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$; entonces en el $\triangle ABC$, por ser base media: $MN = \dfrac{AC}{2}$ $\Rightarrow$ $MN = \dfrac{10}{2} = 5$

En el trapecio MNCH, $\overline{EF}$ es mediana

$\Rightarrow$ $EF = \dfrac{MN + HC}{2} = \dfrac{5+7}{2} = 6$

6. En la figura, $\overline{MN}$ es mediana del trapecio ABCD. MR = RH y HT = TN. Si BC = 36 y AD = 48, hallar PQ.

Resolución:



$\overline{MN}$ // $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, entonces: BP = PR y CQ = QT

En el trapecio RBCT: $PQ = \dfrac{BC + RT}{2}$ ...(1)

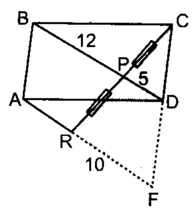
En ABCD: $MN = \dfrac{BC + AD}{2} = \dfrac{36 + 48}{2} = 42$

y en el $\triangle$MHN: $RT = \dfrac{MN}{2} = \dfrac{42}{2} = 21$

Reemplazando en (1): $PQ = \dfrac{36 + 21}{2} = 28{,}5$

7. En un paralelogramo ABCD, sobre la diagonal $\overline{BD}$ se toma el punto P. Por A, se traza una paralela a $\overline{BD}$, cortando a la prolongación de $\overline{CP}$ en el punto R. Si CP = RP, BP = 12 y PD = 5, hallar AR.

Resolución:



Se prolongan $\overline{AR}$ y $\overline{CD}$ hasta que se corten en F.

En el $\triangle$RCF, $\overline{PD}$ es base media: RF = 2(PD)

⇒ RF = 10

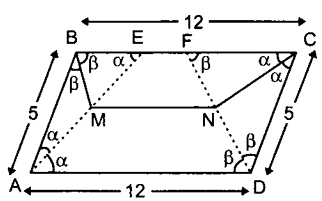
Luego, en el paralelogramo ABDF: AF = BD

⇒ AR + 10 = 12 + 5

∴ AR = 7

8. En un romboide ABCD, AB = 5 y BC = 12; las bisectrices de los ángulos A y B se cortan en el punto M y las de C y D en N. Hallar la longitud de $\overline{MN}$.

Resolución:



Prolongamos $\overline{AM}$ y $\overline{DN}$ hasta E y F, respectivamente. Luego:

$m\angle E = m\angle EAD = \alpha$ y $m\angle F = m\angle FDA = \beta$ (alternos internos)

$\triangle$ABE es isósceles: BE = AB ⇒ BE = 5 y AM = EM

$\triangle$FCD es Isósceles: FC = CD ⇒ FC = 5 y FN = ND

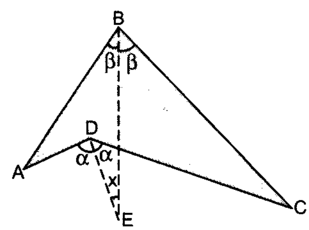
Por otro lado: EF = 12 − BE − FC ⇒ EF = 2

En el trapecio AEFD, $\overline{MN}$ es mediana:

$MN = \dfrac{AD + EF}{2} = \dfrac{12 + 2}{2} = 7$

9. ABCD es un cuadrilátero no convexo, siendo D el ángulo entrante. Si: $m\angle C - m\angle A = 32°$, hallar la medida del menor ángulo formado por las bisectrices de los ángulos B y D.

Resolución:



Dato: $m\angle C - m\angle A = 32°$

Incógnita: x

En el cuadrilátero no convexo:

ABED: $m\angle A + \beta + x = \alpha$ ...(1)

En ABCDA: $m\angle A + 2\beta + m\angle C = 2\alpha$ ...(2)

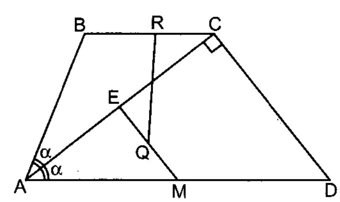
Reemplazando (1) en (2):

$m\angle A + 2\beta + m\angle C = 2(m\angle A + \beta + x)$

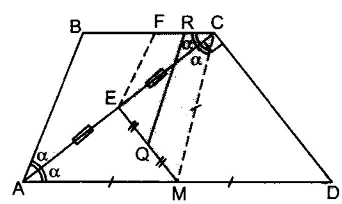
Efectuando: $x = \dfrac{m\angle C - m\angle A}{2}$ (propiedad)

∴ x = 16°

10. En la figura, ABCD es un trapecio, AM = MD, AE = EC, EQ = QM, $\overline{AB}$ // $\overline{QR}$ y BC = 18. Hallar QR.



Resolución:



Del gráfico:

$m\angle BCA = m\angle CAD = \alpha$ (alternos internos)

$\triangle$ABC es isósceles: AB = BC ⇒ AB = 18

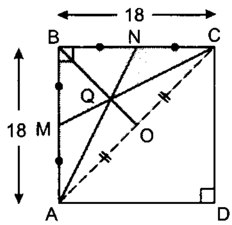
Trazamos $\overline{EF} // \overline{AB}$. Entonces: $EF = \frac{AB}{2} = \frac{18}{2} = 9$

$\overline{CM}$ es mediana relativa a la hipotenusa del $\triangle ACD$: $CM = AM = MD$. Resultando el $\triangle AMC$, isósceles: $m\angle ACM = \alpha$. Luego, $\overline{CM} // \overline{AB}$, ya que $\angle ACM$ y $\angle BAC$ son alternos internos congruentes. Por lo tanto: $CM = AB \Rightarrow CM = 18$. También, $\overline{EF} // \overline{CM}$.

Finalmente, en el trapecio EFCM:

$$QR = \frac{EF + CM}{2} = \frac{9 + 18}{2} = 13{,}5$$

11. En un cuadro ABCD, cuyo lado mide 18 cm, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ se cortan en el punto Q. Hallar QB.



Resolución:

Trazamos $\overline{AC}$ y prolongamos $\overline{BQ}$ hasta el punto O. Se observa que Q es el baricentro del $\triangle ABC$.

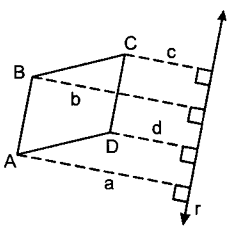
Entonces, $BQ = \frac{2}{3}(BO)$, siendo:

$$BO = \frac{AC}{2} = \frac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$$

Reemplazando en BQ: $BQ = \frac{2}{3}(9\sqrt{2})$

$\therefore\ BQ = 6\sqrt{2}$

12. En la figura, ABCD es un paralelogramo y $\overleftrightarrow{r}$ es una recta exterior. Demostrar que: $a + c = b + d$

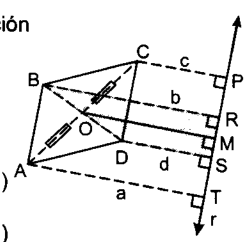


Demostración:

Sea el punto O intersección de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Tracemos $\overline{OM} \perp \overleftrightarrow{r}$

Por ser mediana en los trapecios:



ACPT: $OM = \frac{a + c}{2}$ ...(1)

BRSD: $OM = \frac{b + d}{2}$ ...(2)

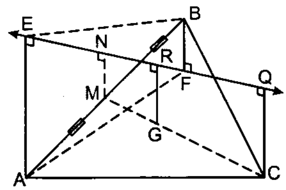
$\therefore$ Al igualar los segundos miembros: $a + c = b + d$

Nota

Además, es fácil demostrar, efectuando la suma de las expresiones (1) y (2), que $OM = \frac{a + b + c + d}{4}$

13. En un triángulo ABC, las distancias de los vértices A, B y C a una recta secante a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, son AE= 17, BF = 10 y CQ = 11. Hallar la distancia GR, del baricentro G del $\triangle ABC$, a la misma recta.

Resolución:



Datos: $AE = 17$, $BF = 10$, $CQ = 11$

Trazamos $\overline{MN} \perp \overline{EQ}$. Como $CG = 2(GM)$, por propiedad del baricentro; según propiedad demostrada en un problema anterior, para el trapecio MNQC.

$$GR = \frac{2MN + CQ}{3} \qquad ...(1)$$

Para hallar MN, trazamos $\overline{EB}$ y $\overline{AF}$. Luego:

$MN = \frac{AE - BF}{2}$, en el trapecio AEBF:

$2MN = AE - BF$

Reemplazando en (1):

$$GR = \frac{AE - BF + CQ}{3} \vee GR = \frac{AE + CQ - BF}{3}$$

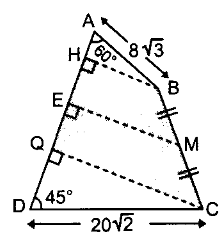
(Propiedad para todo triángulo)

Reemplazando valores:

$$GR = \frac{17 + 11 - 10}{3} = \frac{18}{3} = 6$$

14. En un trapezoide ABCD, $m\angle A = 60°$, $AB = 8\sqrt{3}$, $CD = 20\sqrt{2}$ y $m\angle D = 45°$. Hallar la distancia del punto medio M de $\overline{BC}$ a AD.

Resolución:



Sea $\overline{ME} \perp \overline{AD}$. Incógnita: ME

Trazamos $\overline{BH}$ y $\overline{CQ}$, perpendiculares a $\overline{AD}$.

Luego, en el trapecio HBCQ, $\overline{ME}$ es mediana:

$$ME = \frac{BH + CQ}{2} \qquad ...(1)$$

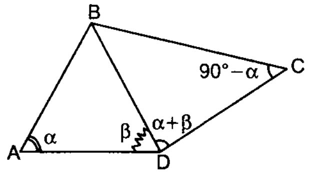
También: $BH = \frac{8\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} = 12$ (en el $\triangle AHB$)

y $CQ = \frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 20$ (en el $\triangle CQD$)

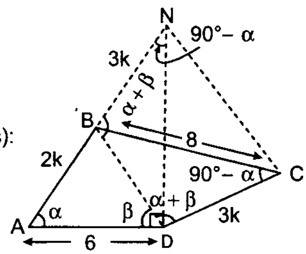
Reemplazando en (1): $ME = \frac{12+20}{2} = 16$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En el gráfico, $2CD = 3AB$, $BC = 8$ m y $AD = 6$ m, calcular AB.



Resolución:



Prolongamos $\overline{AB}$, tal que: $BN = 3k$

$\triangle$BNCD (trapecio isósceles):

$ND = BC = 8$

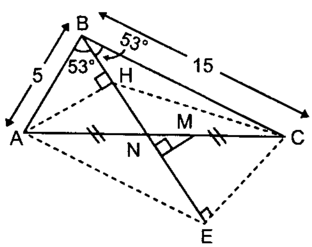
$\triangle ADN$: $5k = 10$

$\Rightarrow k = 2$

$\therefore AB = 4$ m

2. En un $\triangle ABC$, $AB = 5$, $m\angle B = 106°$ y $BC = 15$. Hallar la distancia del punto medio de $\overline{AC}$, a la bisectriz del $\angle B$.

Resolución:



Sea M el punto medio de $\overline{AC}$ y $\overline{MN}$ perpendicular a la bisectriz del $\angle B$. Incógnita: MN

Trazamos: $\overline{AH} \perp \overline{BN}$ y $\overline{CE} \perp \overline{BN}$.

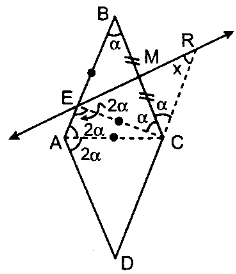
Luego, los triángulos AHB y BEC son notables (37° y 53°) $\Rightarrow AH = 4$ y $EC = 12$

El cuadrilátero AHCE es un trapecio y $\overline{MN}$ une los puntos medios de las diagonales $\overline{HE}$ y $\overline{AC}$.

$$MN = \frac{EC - AH}{2} \Rightarrow MN = \frac{12-4}{2} = 4$$

3. En el rombo ABCD, la mediatriz de $\overline{BC}$ interseca a $\overline{AB}$ en el punto E. Si $EB = AC$, calcular la medida del menor ángulo que determina la mediatriz trazada con la prolongación de $\overline{DC}$.

Resolución:



Si $m\angle B = \alpha$, entonces:

$m\angle BCR = m\angle B = \alpha$ (alternos internos)

$EC = EB$ (propiedad de la mediatriz)

$\Rightarrow m\angle ECB = \alpha$ y $m\angle AEC = m\angle B + m\angle ECB = 2\alpha$, por ser ángulo externo del $\triangle EBC$.

$\triangle AEC$ es isósceles: $m\angle EAC = 2\alpha$

Rombo: $m\angle CAD = 2\alpha$

$m\angle B + m\angle BAD = 180°$

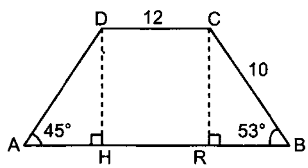
$\alpha + 4\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°$

Finalmente, en el $\triangle RMC$:

$x + \alpha = 90° \Rightarrow x + 36° = 90° \quad \therefore x = 54°$

4. En un trapecio ABCD, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $BC = 10$, $CD = 12$, $m\angle BAD = 45°$ y $m\angle BCD = 127°$, calcular AB.

Resolución:



Se trazan $\overline{DH}$ y $\overline{CR}$, perpendiculares a $\overline{AB}$.

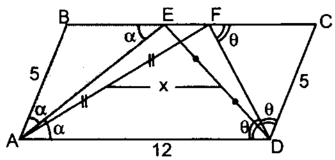
$\triangle CRB$: $CR = 8$ y $RB = 6$

$\triangle DHA$: $DH = CR = 8 \Rightarrow AH = 8$

Luego: $AB = AH + HR + RB = 8 + 12 + 6 = 26$

5. En un romboide ABCD, $AD = 12$ y $AB = 5$; las bisectrices de los ángulos A y D intersecan a $\overline{BC}$ en los puntos E y F, respectivamente. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AF}$ y $\overline{EQ}$.

Resolución:

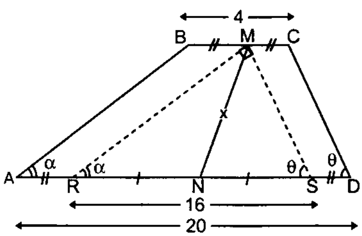


Por ser alternos internos entre rectas paralelas:
m∠AEB ≅ m∠EAD y m∠CFD ≅ m∠FDA
△ABE es isósceles: BE = AB = 5
△DCF es isósceles: CF = CD = 5
Entonces: EF = BC − (BE + CF)
EF = 12 − (5 + 5) ⇒ EF = 2

En el trapecio AEFD: $x = \dfrac{AD - EF}{2} = \dfrac{12-2}{2} = 5$

6. En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, BC = 4 cm, AD = 20 cm y m∠A + m∠D = 90°, calcular la distancia entre los puntos medios de las bases.

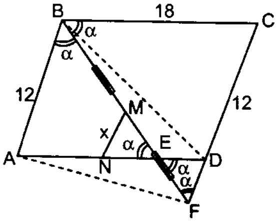
Resolución:



Incógnita: MN = x; dato: α + θ = 90°
Al trazar $\overline{MR}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{MS}$ // $\overline{CD}$: m∠RMS = 90°
$\overline{MN}$ es mediana en el ⊿RMS: $MN = \dfrac{RS}{2}$
$\Rightarrow x = \dfrac{16}{2} = 8$ cm

7. ABCD es un romboide, AB = 12 y BC = 18. La bisectriz del ángulo B corta en F a la prolongación de $\overline{CD}$. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{BF}$ y $\overline{AD}$.

Resolución:

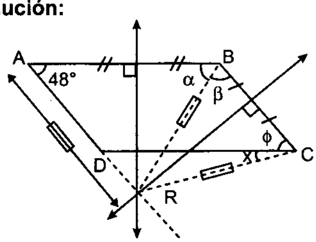


M: punto medio de $\overline{BF}$
N: punto medio de $\overline{AD}$
Incógnita: MN = x
Alternos internos entre paralelas:
m∠AEB ≅ m∠EBC
m∠BFC ≅ m∠ABF

△BAE es isósceles: AE = AB = 12 ⇒ ED = 6
△EDF es isósceles: FD = ED = 6
Trapecio ABDF: $x = \dfrac{AB - DF}{2} = \dfrac{12-6}{3} = 2$
∴ x = 2

8. En un romboide ABCD, AB > BC, las mediatrices de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en el punto R, ubicado en la prolongación de $\overline{AD}$. Calcular m∠RCD; si m∠BAD = 48°.

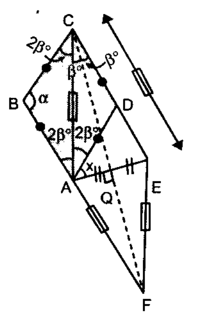
Resolución:



m∠RCD = x
Propiedad de la mediatriz: RA = RB = RC
Tenemos: α = 48°; ϕ = 48° ...(1)
β = ϕ + x ...(2)
α + β + ϕ = 180° ...(3)
(1) y (2) en (3): 48° + (48° + x) + 48° = 180°
∴ x = 36°

9. ABCD y ACEF son rombos, m∠ABC = α; α > 90° y los puntos F, A y B son colineales. Calcular la m∠EAD.

Resolución:

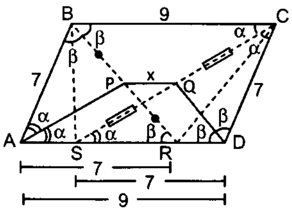


Rombo ACEF: m∠ACF = m∠FCE
Sea: m∠ACF = β = m∠FCE
⇒ m∠BCA = 2β = m∠BAC

△AQC: x + 3β = 90° ...(1)
△ABC: α + 4β = 180°
$\Rightarrow \beta = 45° - \dfrac{\alpha}{4}$ ...(2)
(2) en (1): $x + 3\left(45° - \dfrac{\alpha}{4}\right) = 90°$
$\therefore\ x = \dfrac{3}{4}\alpha - 45°$

10. ABCD es un paralogramo, AB = 7 y BC = 9. Las bisectrices de los ángulos A y B se intersecan en el punto P; las bisectrices de los ángulos C y D se intersecan en Q. Calcular PQ.

Resolución:



PQ = x

Del gráfico:

$\left.\begin{array}{l} m\angle R \cong m\angle RBC \\ m\angle S \cong m\angle SCB \end{array}\right\}$ alternos internos

$\triangle$RAB es isósceles AR = AB = 7 y BP = PR

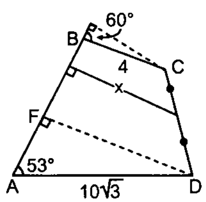
$\triangle$SDC es isósceles: SD = CD = 7 y SQ = QC

Luego, SR = AR – AS = 7 – 2 = 5

En el trapecio SBCR: $x = \dfrac{BC - SR}{2} = \dfrac{9-5}{2} = 2$

11. En un trapezoide ABCD, m$\angle$A = 53°, m$\angle$B = 120°, BC = 4 cm y AD = $10\sqrt{3}$ cm. Calcular la distancia del punto medio de $\overline{CD}$ a $\overline{AB}$.

Resolución:



Trazamos adicionalmente $\overline{CE}$ y $\overline{DF}$, perpendiculares a $\overline{AB}$.

En los triángulos rectángulos notables:

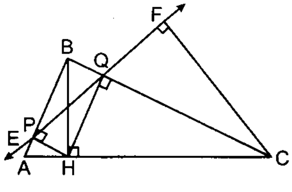
$\triangle$AFD (37°; 53°): FD = $8\sqrt{3}$

$\triangle$BEC (30°; 60°): EC = $\dfrac{4}{2}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

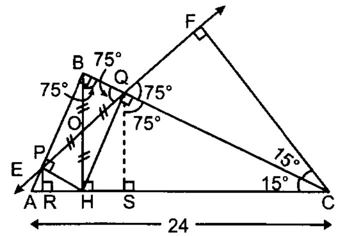
En el trapecio FECD:

$$x = \frac{FD + EC}{2} = \frac{8\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \text{ cm}$$

12. En la figura, m$\angle$ABC = 90°, m$\angle$ACB = 15° y AC = 24. Calcular EF.



Resolución:



Se observa: EF = EP + PQ + QF ...(1)

$\triangle$ABC (15°; 75°): BH = $\dfrac{AC}{4} = \dfrac{24}{4} = 6$

$\square$PBQH es rectángulo: PQ = BH $\Rightarrow$ PQ = 6 ...(2)

Al trazar $\overline{QS} \perp \overline{AC}$ y $\overline{PR} \perp \overline{AC}$:

$\triangle$QSC $\cong$ $\triangle$QFC $\Rightarrow$ QF = QS

$\triangle$PEA $\cong$ $\triangle$PRA $\Rightarrow$ EP = PR ...(3)

En el trapecio RPQS: OH = $\dfrac{PR + QS}{2}$

$\Rightarrow$ 2(OH) = PR + QS

BH = PR + QS $\Rightarrow$ con lo de (3):

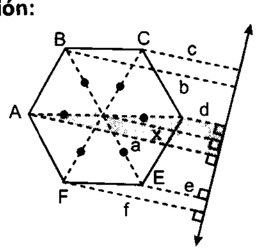
6 = EP + QF ...(4)

Finalmente, (2) y (4) en (1): EF = 6 + 6

$\therefore$ EF = 12

13. La suma de las distancias de los vértices de un hexágono regular a una recta exterior es 18 cm. Calcular la distancia del centro de la región hexagonal a dicha recta.

Resolución:



Sean a, b, c, d, e y f, distancias de los vértices a la recta; "x" es la distancia desde el centro a la recta.

Dato: a + b + c + d + e + f = 18 ...(1)

Incógnita: x

"x" es longitud de la mediana, común a los trapecios rectángulos.

$x = \dfrac{a+d}{2}$; $x = \dfrac{b+e}{2}$; $x = \dfrac{c+f}{2}$

Sumando miembro a miembro:

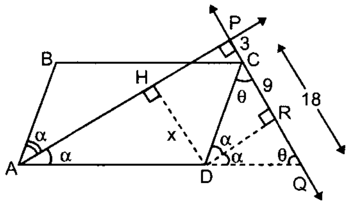
$3x = \dfrac{a+b+c+d+e+f}{2}$

$\Rightarrow x = \dfrac{a+b+c+d+e+f}{6}$ ...(2)

(1) en (2): $x = \dfrac{18}{6} = 3$ cm

14. ABCD es un romboide. Por C pasa una recta perpendicular a la bisectriz del ángulo A, en el punto P, que corta a la prolongación de $\overline{AD}$ en el punto Q. Calcular la distancia de D a AP, sabiendo que PC = 3 y CQ = 18.

Resolución:



DH = x

$\measuredangle$APQ = $\alpha + \theta = 90°$

Trazamos: $\overline{DR} \perp \overline{CQ} \Rightarrow m\angle RDQ = m\angle PAQ = \alpha$

También, $m\angle CDQ = m\angle BAD = 2\alpha \Rightarrow m\angle CDR = \alpha$

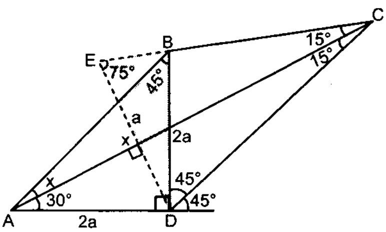
$\triangle$CDQ es isósceles: $CR = RQ = \frac{18}{2} = 9$

Finalmente, en el rectángulo HPRD: DH = RP

$x = 9 + 3 = 12$

15. En el cuadrilátero ABCD, $m\angle ADB = 90°$, $m\angle BCA = m\angle ACD = 15°$ y $m\angle CAD = 30°$. Hallar $m\angle BAC$.

Resolución:



Se traza $\overline{DE} \perp \overline{AC}$; $E \in \overrightarrow{CB}$

$\triangle$ECD es isósceles: $m\angle E = 75°$

$\triangle$DBC: $m\angle EBD = 45° + 30° = 75°$

$\triangle$DEB es isósceles: ED = BD = 2a

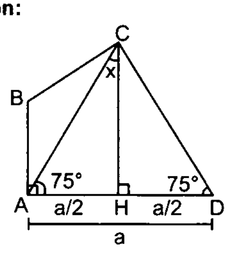
⊾AHD es notable: AD = 2a.

⊾ABD es isósceles: $x + 30° = 45°$

$\therefore\ x = 15°$

16. ABCD es un trapezoide. Se traza $\overline{CH} \perp \overline{AD}$ ($H \in \overline{AD}$) y $AH = \frac{AD}{2}$. Si $m\angle CDA = 75°$, $m\angle BAD = 90°$; hallar la $m\angle HCA$.

Resolución:



Si AD = a y AH = a/2 $\Rightarrow$ HD = a/2

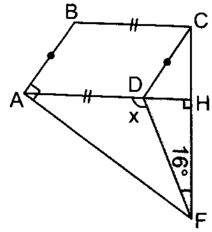
$\overline{CH}$ es mediatriz de $\overline{AD}$.

$\triangle$ACD es isósceles: $m\angle CAD = m\angle CAD = 75°$

$\therefore\ x = 15°$

17. En un paralelogramo ABCD, por las vértices A y C se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, las que se intersecan en F. Hallar la $m\angle ADF$; si $m\angle DFC = 16°$.

Resolución:

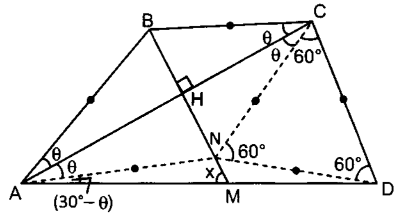


Como $\overline{BC} \parallel \overline{AD} \Rightarrow \overline{AH} \perp \overline{CF}$

⊾DHF: $x = 90° + 16° = 106°$

18. En un cuadrilátero convexo ABCD, AB = BC = CD y además $m\angle ACD - m\angle ACD = 60°$. Se traza la mediatriz de $\overline{AC}$ que interseca a $\overline{AD}$ en M. Hallar la medida del menor ángulo que determina la mediatriz y el lado $\overline{AD}$.

Resolución:



Se construye el rombo ABCN

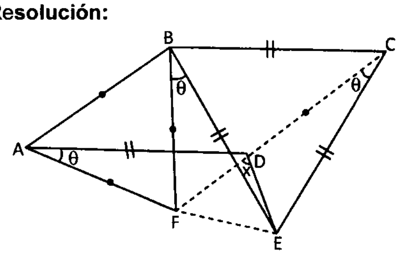
$\triangle$NCD es equilátero, N es circuncentro del $\triangle$ACD.

$\Rightarrow m\angle NAM = 30° - \theta$

⊾AHM: $x = 60°$

19. En un paralelogramo ABCD, AB < BC y $m\angle BAC$ es menor que 45°, exteriormente al lado $\overline{AD}$ se ubican F y E de modo que los triángulos ABF y BEC son equiláteros. Hallar la medida del ángulo FDE.

Resolución:



$\triangle FAD \cong \triangle ECD \cong \triangle EBF$ (LAL) $\Rightarrow$ FD = ED = EF

$\Rightarrow$ $\triangle$EDF es equilátero

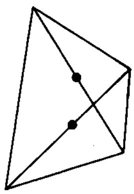
$\therefore\ x = 60°$

20. En las siguientes proposiciones, indicar si es verdadero (V) o falso (F):

I. Un cuadrilátero de diagonales congruentes es un rectángulo.
II. Un cuadrilátero de diagonales perpendiculares es un trapezoide simétrico.
III. Un cuadrilátero de lados congruentes es un rombo.

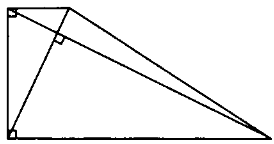
Resolución:

I.



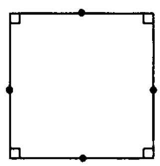
Este es un cuadrilátero de diagonales congruentes y no es un rectángulo. (F).

II.



Este es un trapecio rectángulo de diagonales perpendiculares y no es un trapezoide simétrico. (F).

III.

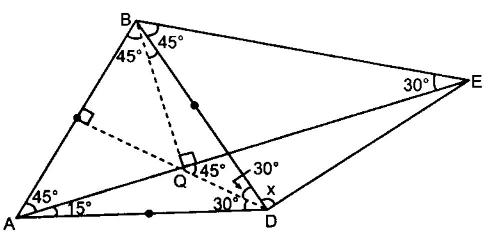


Este es un cuadrado, tiene lados congruentes y no es un rombo. (F).

$\therefore$ FFF

21. Si ABCD es un cuadrilátero, tal que:
$m\angle BAD = m\angle BDA = 60°$, $m\angle DBC = 45°$, $m\angle BCA = 30°$. Hallar la $m\angle BDC$.

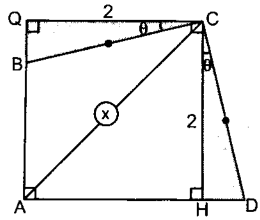
Resolución:



Se traza $\overline{DH} \perp \overline{AB} \Rightarrow m\angle BDQ = 30°$
En el cuadrilátero DQBC:
$m\angle QDB = m\angle BCQ = 30°$
$\Rightarrow m\angle CQD = m\angle DBC = 45°$
$\triangle AQD$: $m\angle QAD = 15° \Rightarrow m\angle BAQ = 45°$
$m\angle BQC = 45° + 45° \Rightarrow m\angle BQC = 90°$
En el cuadrilátero DQBC: $x = 90°$

22. En el cuadrilátero ABCD, $m\angle DAB = m\angle BCD = 90°$, $BC = CD$. Hallar AC sabiendo que la distancia de C a $\overline{AD}$ es 2.

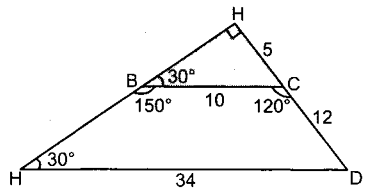
Resolución:



⊾BQC ≅ ⊾DHC (ALA) $\Rightarrow$ CH = QC = 2
ABCH es un cuadrado $\therefore x = 2\sqrt{2}$.

23. Se tiene un cuadrilátero ABCD en el cual $m\angle BAD = 30°$, $m\angle ABC = 150°$, $m\angle BCD = 120°$, $BC = 10$ y $CD = 12$. Hallar AD.

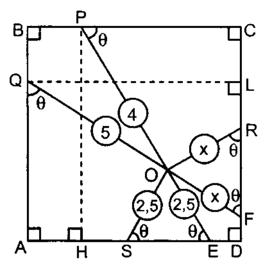
Resolución:



⊾BHC (30° y 60°): HC = 5
⊾AHD (30° y 60°): AD = 34

24. En un cuadro ABCD se ubican los puntos Q, P, S y R en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Luego, se ubica un punto interior O, tal que $m\angle OSD = m\angle AQO = m\angle CPO = m\angle ORD$ y además, OQ = 5, OP= 4, OS = 2,5. Hallar OR.

Resolución

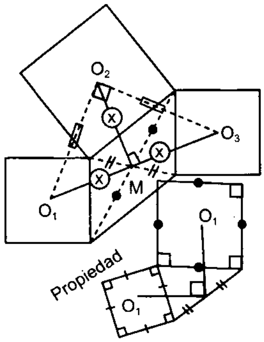


$\triangle SOE$ es isósceles: SO = OE = 2,5
$\triangle FOR$ es isósceles: OF = OR = x
⊾PHE ≅ ⊾QLP (ALA)
$\Rightarrow x + 5 = 4 + 2{,}5 \Rightarrow x = 6{,}5 - 5$
$\therefore x = 1{,}5$ cm

25. Exteriormente al paralelogramo ABCD y considerando ios lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, se construyen cuadrados cuyos centros son O_1, O_2 y O_3, respectivamente.

Si $O_1O_3 = a$. Hallar la distancia de O_2 a la recta que contiene a $O_1\,O_3$.

Resolución:



Por propiedad: $m\angle O_1MO_2 = m\angle O_2MO_3 = 90°$

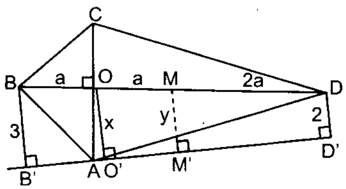
$⊾O_1O_2O_3$ es isósceles: $O_1O_2 = O_2O_3$

$\Rightarrow O_1M = MO_3 = MO_2 = x$

Por dato: $O_1O_3 = a = x + x \Rightarrow 2x = a \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

26. En un trapezoide simétrico ABCD ($\overline{BD} > \overline{AC}$), las diagonales se intersecan en O, tal que OD = 3(OB). Calcular la distancia de O a la recta que contiene al vértice A, si las distancias de los vértices B y D a dicha recta miden 3 y 2, respectivamente.

Resolución:



En el trapecio rectángulo B'BDD', por teorema:

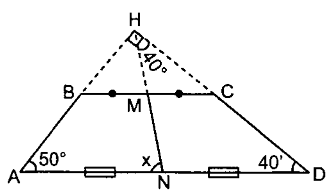
$y = \frac{3+2}{2} \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

En el trapecio rectángulo B'BMN', por teorema:

$x = \frac{3 + 5/2}{2} = \frac{11}{4} = 2{,}75$ cm

27. ABCD es un trapecio, tal que $m\angle A + m\angle D = 90°$ ($\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$, $\overline{BC} < \overline{AD}$). Si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, y $m\angle D = 40°$, hallar la $m\angle MNA$.

Resolución:



$⊾AHD$: $\overline{HMN}$ es mediana

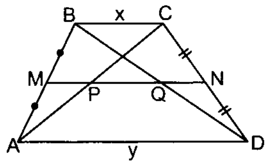
$\Rightarrow m\angle NHD = m\angle D = 40°$

$\triangle NHD$, por el teorema del ángulo exterior:

$x = 40° + 40° = 80°$

28. En un trapecio, la diferencia de la longitud de la mediana y del segmento que une los puntos medios de las diagonales es 12 cm. Hallar la longitud de la base menor.

Resolución:



Por dato: MN − PQ = 12 ...(1)

Por teorema: $MN = \frac{x+y}{2} \wedge PQ = \frac{y-x}{2}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

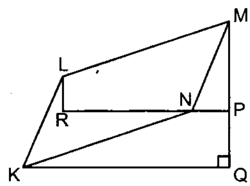
$\frac{x+y}{2} - \frac{y-x}{2} = 12 \Rightarrow \frac{x+y-y+x}{2} = 12$

$\Rightarrow \frac{2x}{2} = 12 \Rightarrow x = 12$ cm

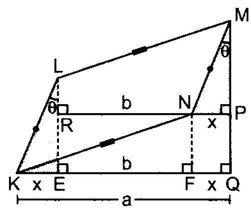
29. En el romboide KLMN, se cumple que:

$m\angle LRP = m\angle MPN = m\angle MQK = 90°$.

Si KQ = a; RN = b, hallar NP.



Resolución:



$⊾LEK \cong ⊾MPN$ (ALA)

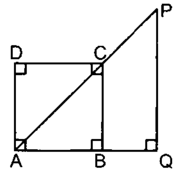
$\Rightarrow NP = KE = x$

Además: $NP = FQ = x \wedge RN = EF = b$

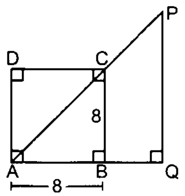
Luego: $x + b + x = a$

$2x = a - b \quad \therefore\ x = \frac{a-b}{2}$

30. En la figura, el lado del cuadrado ABCD mide 8 cm. Hallar BQ, si: $AP = 12\sqrt{2}$ cm

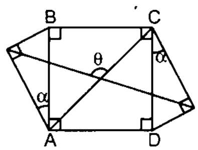


Resolución:

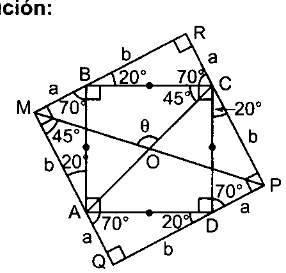


$\overline{AC}$ es diagonal del □ABCD; m∠ACB = 45°
$\overline{CB}$ // $\overline{PQ}$ ⇒ m∠APQ = 45°
⊿AQP notable: AP = $12\sqrt{2}$ ⇒ AQ = PQ = 12
Pero: AB + BQ = AQ ⇒ 8 + BQ = 12
∴ BQ = 4 cm

31. ABCD es un cuadrado y α = 20°, hallar el valor de θ.



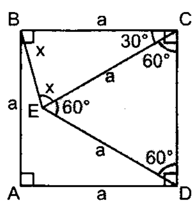
Resolución:



Se forma el cuadrado MRPQ.
Del gráfico, en el cuadrilátero MRCO se cumple:
45° + θ + 45° + 70° + 90° = 360°
⇒ θ = 360° − 250° ∴ θ = 110°

32. En el interior de un cuadrado ABCD se construye el triángulo equilátero EDC. Hallar el valor del ángulo EBC.

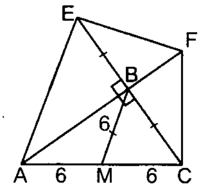
Resolución:



El △BCE es isósceles:
x + x + 30° = 180° ⇒ 2x = 150° ∴ x = 75°

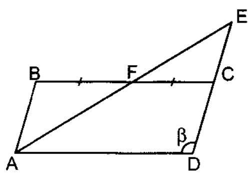
33. En un trapezoide AEFC, se considera B punto medio de $\overline{EC}$; m∠ABE = m∠FBC = 90° y la mediana $\overline{BM}$ del triángulo ABC mide 6 m. Halle EF.

Resolución:

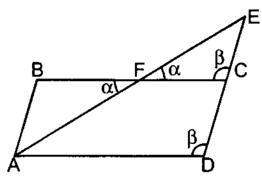


El triángulo ABC es recto en B ($\overline{BM}$: mediana)
BM = AM = MC = 6
Como: AC = AM + MC
⇒ AC = 6 + 6 ∴ AC = 12 m

34. En la figura, ABCD es un paralelogramo F punto medio del lado $\overline{BC}$, si los lados del paralelogramo miden 10 cm y 4 cm, respectivamente, y AE = 15 cm, hallar el perímetro del trapecio AFCD.



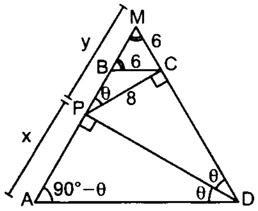
Resolución:



AB = 4, BC = 10, AE = 15
m∠AFB = m∠EFC= α
m∠ADC= m∠FCE = β
⇒ △ABF ≅ △ECF
BC = 10 ⇒ FC = 5
AF = FE ⇒ AF = $\frac{AE}{2} = \frac{15}{2}$
P_{AFCD} = AF + FC + CD + DA
$= \frac{15}{2} + 5 + 4 + 10 = \frac{53}{2} = 26{,}5$ cm

35. En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$; BC = 6, sobre $\overline{AB}$ se toma un punto P, tal que:
m∠BPC = m∠ADP = m∠PDC y PC = 8.
Halle AP, si m∠PCD = m∠APD = 90°.

Resolución:



$\triangle$AMD: isósceles, porque $\overline{PD}$ es mediatriz

m∠AMD = m∠MAD = 90° − θ

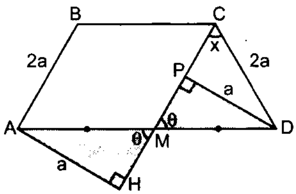
AP = PM = x

$\triangle$BMC: BC = MC = 6

⊾PCM (por Pitágoras): ∴ x = 10

36. Un trapecio isósceles ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$. Se toma M punto medio de $\overline{AD}$, luego se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{CM}$; si AB = 2AH, halle m∠MCD.

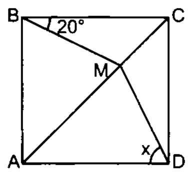
Resolución:



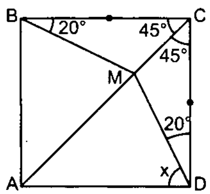
$\triangle$AHM ≅ $\triangle$MPD (ALA) ⇒ PD = AH = a

⊾CPD (30° y 60°): ∴ x = 30°

37. En el gráfico ABCD es un cuadrado, AC diagonal. Hallar x.



Resolución:



$\overrightarrow{AC}$ bisectriz

BC = CD = L

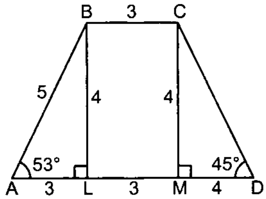
$\triangle$BCM ≅ $\triangle$MCD (LAL)

m∠CDM ≅ m∠CBM = 20°

x + 20° = 90° ∴ x = 70°

38. Halle la longitud de la mediana de un trapecio ABCD, si BC = 3; m∠A = 53°, AB = 5 y m∠D = 45°

Resolución:



Se traza $\overline{BL}$ y $\overline{CM}$ ⊥ $\overline{AD}$

⊾ALB (37° y 53°): AL = 3 ∧ BL = 4

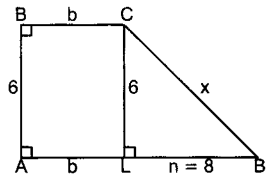
⊾DMC (45° y 45°): CM = MD = 4

Mediana = $\dfrac{10+3}{2}$ ∴ Mediana = 6,5

39. En un trapecio rectángulo ABCD, los ángulos A y D son rectos. Halle BC, si el segmento que une los puntos medios de las diagonales mide 4 y la altura del trapecio mide 6.

Resolución:

Se traza $\overline{CL}$ // $\overline{AD}$



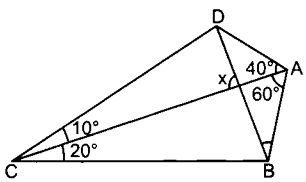
Dato: $4 = \dfrac{b+n-b}{2}$ ⇒ n = 8

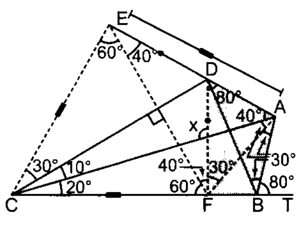
⊾CLB (por Pitágoras):

⇒ $x^2 = 6^2 + 8^2$ ∴ x = 10

40. En el cuadrilátero ABCD, la m∠BAC = 60°, m∠DAC = 40°, m∠BCA = 20° y m∠ACD = 10°, hallar la medida del ángulo que determinan las diagonales AC y BD.

Resolución:





Se prolonga $\overline{AD}$ y luego se traza $\overline{CE}$ (E en la prolongación) de modo que la m∠ECD = 30°

$\triangle CEA$ es isósceles: $CE = EA$

Luego, se traza $\overline{EF}$ de modo que la $m\angle CEF = 60°$

Entonces: $\triangle CEF$ es equilátero: $CE = CF = EF$

$\triangle FEA$ es isósceles: $EF = EA$

$\triangle EDF$ es isósceles: $ED = DF$

$\Rightarrow m\angle FDA = 40° + 40° = 80°$

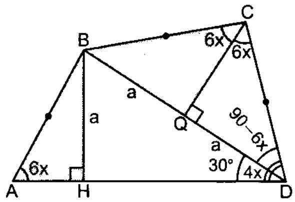
Con lo cual el cuadrilátero FDAB resulta inscriptible: $m\angle FDA = m\angle ABT = 80°$

Luego, se cumple que: $m\angle DFA = m\angle DBA = 30°$

$\therefore\ x = 90°$

41. En un cuadrilátero ABCD se tiene: $AB = BC = CD$; $m\angle A = 6x$; $m\angle C = 12x$; $m\angle D = 4x$. Halle "x".

Resolución:



Se traza $\overline{CQ} \perp \overline{BD} \wedge \overline{BH} \perp AD$

Luego: $⊿AHB \cong ⊿CQB$ (ALA) $\Rightarrow BH = BQ$

Pero: $BQ = QD = a$

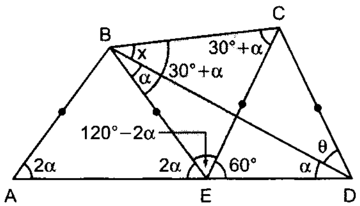
$⊿BHD$ notable (30° y 60°) $\Rightarrow m\angle BDA = 30°$

Finalmente: $4x = 30° + 90° - 6x \Rightarrow 10x = 120°$

$\therefore\ x = 12°$

42. En un cuadrilátero convexo ABCD se cumple que: $m\angle A = 2\, m\angle BDA$, $m\angle BDC + m\angle ADB = 60°$ y $AB = CD$. Halle $m\angle CBD$.

Resolución:



Se traza $\overline{BE}$ de modo que la $m\angle EBD = \alpha$

$\Rightarrow AB = BE = ED = CD$

Dato: $\alpha + \theta = 60° \Rightarrow \triangle ECD$ es equilátero.

En el $\triangle EBC$ isósceles; como la $m\angle BEC = 120° - 2\alpha$

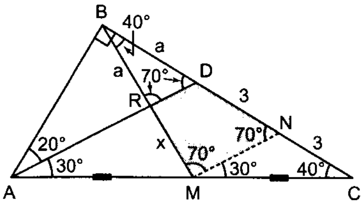
$\Rightarrow m\angle EBC = m\angle BCE = 30° + \alpha$

Luego: $x + \alpha = 30° + \alpha$

$\therefore\ x = 30°$

43. En un triángulo ABC, recto en B, M es punto medio de $\overline{AC}$, se ubica en $\overline{BC}$ el punto D, tal que, $m\angle BAD = 20°$, $m\angle DAC = 30°$, si $AD \cap BM = \{R\}$ y $DC = 6$ cm. Halle RM.

Resolución:



$⊿ABC$: $\overline{BM}$ mediana

$\Rightarrow m\angle MBC = m\angle C = 40°$

En el $\triangle ADC$, por el teorema del ángulo exterior: $m\angle ADB = 70°$

$\triangle RBD$ es isósceles $BR = BD = a$.

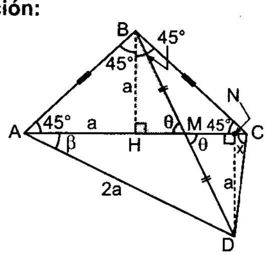
Ahora trazamos $\overline{MN} \parallel \overline{AD} \Rightarrow DN = NC = 3$

Pero, MRDN es un trapecio isósceles.

$\therefore\ x = 3$ cm

44. En un trapecio ABCD, las diagonales se intersecan en el punto M con la condición que $\overline{BM} \cong \overline{MD}$. Si $m\angle ABC = 90°$, $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ y $\overline{AC} \cong \overline{AD}$, hallar la $m\angle ACD$.

Resolución:



En el $\triangle ABC$ es isósceles, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, entonces: $BH = AH = HC = a$

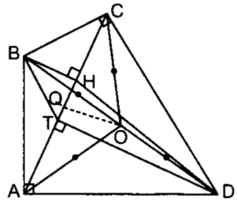
$\triangle BHM \cong \triangle DNM$ (ALA) $\Rightarrow BH = DN = a$

En el $\triangle AND$, recto en N, se deduce que: $\beta = 30°$

$\therefore\ x = 75°$

45. Sea el cuadrilátero convexo ABCD, se verifica que: $m\angle A = m\angle C = 90° = 2m\angle D$. Luego, se trazan las perpendiculares $\overline{DT}$ y $\overline{BH}$ a la diagonal $\overline{AC}$. Si: $DT - BH = 18$, hallar la longitud de AC.

Resolución:



En el $\triangle BCD$: $\overline{CO}$ es mediana $\Rightarrow CO = BO = OD$

En el $\triangle BAD$: $\overline{OA}$ es mediana $\Rightarrow AO = BO = OD$

$\Rightarrow m\angle COA = 90°$

En el trapecio BHDT ($\overline{BH} \parallel \overline{TD}$) $\overline{OQ}$ es el segmento que une los puntos medios de las diagonales $\overline{BD}$ y $\overline{HT}$, $\overline{OQ} \perp \overline{HT}$

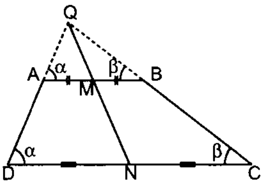
$OQ = \dfrac{DT - BH}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

⊾COA: $\overline{OQ}$ es mediana

$OQ = \dfrac{AC}{2} = 9 \quad \therefore AC = 18$

46. En un trapecio ABCD. ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$), los puntos M y N son los puntos medios de las bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Si m∠ADC + m∠BCD = 90°, hallar la longitud de $\overline{MN}$ es función de las longitudes de $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$.

Resolución:



Las prolongaciones de $\overline{DA}$ y $\overline{CB}$ se intersecan en el punto Q.
Como: α + β = 90° (dato) ⇒ m∠DQC = 90°
En el △DQC: $\overline{QN}$ es mediana

$\Rightarrow QN = \dfrac{CD}{2}$ ...(I)

En el △AQC: $\overline{QM}$ es mediana

$\Rightarrow QM = \dfrac{AB}{2}$ ...(II)

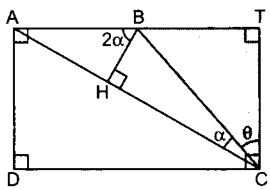
Finalmente, de la figura se deduce que:
MN = QN − QM ...(III)

Reemplazando (I) y (II) en (III): $MN = \dfrac{CD}{2} - \dfrac{AB}{2}$

$\therefore MN = \dfrac{CD - AB}{2}$

47. Se tiene un trapecio rectángulo ABCD, ($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$) y $\overline{AB} < \overline{CD}$. Luego, se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, si BH = 18, m∠A = m∠D = 90°, m∠ABH = 2m ∠ BCA, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Resolución:



Se traza la altura $\overline{CT}$ del triángulo ABC, entonces α = θ

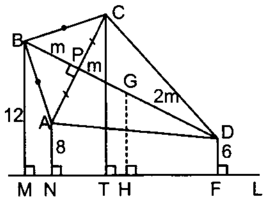
$\overrightarrow{CB}$ es bisectriz del ∠ACT ⇒ BH = BT = 18

Sea "x" la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales de trapecio ABCD.

$\Rightarrow x = \dfrac{CD - AB}{2} = \dfrac{(AB + 18) - AB}{2} \quad \therefore x = 9$

48. Dado el trapecio simétrico ABCD, cuyas diagonales se intersecan en el punto P, las distancias de los vértices A, B y D a una recta exterior que pasa a un mismo lado de $\overline{AB}$ miden 8, 12 y 6, respectivamente. Si AB = BC y 3BP = PD, hallar la distancia del vértice C a la recta.

Resolución:



Sea G el baricentro de la región triangular ACD, entonces: BG = GD = 2m

En el trapecio BMFD, $\overline{GH}$ es mediana, entonces:

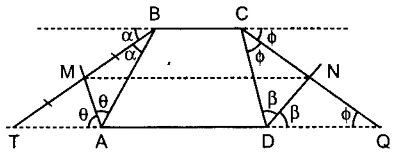
$GH = \dfrac{12 + 6}{2} = 9$

$\triangle ADC$: $GH = \dfrac{AN + CT + DF}{3}$

$\Rightarrow 9 = \dfrac{8 + CT + 6}{3} \quad \therefore CT = 13$

49. Sea el trapecio ABCD, ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), $\overline{BC} < \overline{AD}$ cuyo perímetro es 72 cm. De los vértices: A y B se trazan las bisectrices exteriores que se intersecan en M. Análogamente desde los vértices C y D se trazan las bisectrices exteriores que se intersecan en el punto N. Hallar la longitud de MN.

Resolución:



△BAT es isósceles
⇒ AB = AT ⇒ M es punto medio de $\overline{BT}$

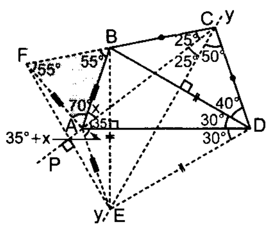
△CDQ es isósceles
⇒ CD = DQ ⇒ N es punto medio de $\overline{CQ}$

$MN = \dfrac{QT + BC}{2} = \dfrac{AT + AD + DQ + BC}{2}$

$\therefore MN = \dfrac{AB + AD + CD + BC}{2} = \dfrac{72}{2} = 36 \text{ cm}$

50. En un cuadrilátero convexo ABCD se cumple: $\overline{BC} \cong \overline{CD}$, m∠BCA = 25°, m∠ACD = 75° y m∠ADB = 30°. Halle m∠BAC.

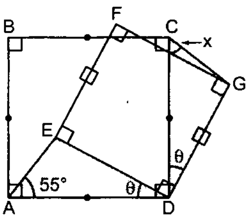
Resolución:



Se traza $\overleftrightarrow{yy'}$ mediatriz de $\overline{BD}$, luego se construye el $\triangle EBD$ equilátero y el $\triangle FCE$ isósceles.
Además como $\overline{AD}$ y $\overrightarrow{CP}$ son mediatrices de $\overline{BE}$ y $\overline{FE}$, respectivamente, entonces: $AB = AE = AF$.
Luego: $m\angle EAD = m\angle BAD = 35° + x$
Además: $m\angle FAC = m\angle CAE = 70° + x$
De donde: $x + 25° = 55°$
$\therefore\ x = 30°$

51. En un cuadrado ABCD, se ubica el punto interior E de manera que la $m\angle EAD = 55°$, se construye el cuadrado DEFG de manera que $\overline{FG} \cap \overline{CD} \neq \phi$. Calcular la $m\angle DCG$.

Resolución:

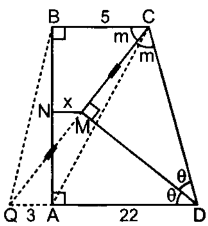


Si $m\angle ADC = m\angle EDG = 90°$
$\Rightarrow m\angle ADE = m\angle CDG = \theta$
$\therefore\ x = 55°$

52. En un trapecio rectángulo ABCD (ángulos rectos en A y B), $BC = 5$, $CD = 25$, $AD = 22$ y las bisectrices de los ángulos C y D se intersecan en M. Si $\overline{MN}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ ($N \in \overline{AB}$). Calcule MN.

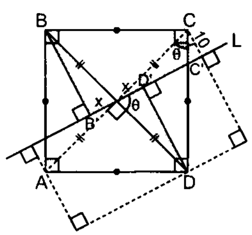
Resolución:

$\triangle QCD$ isósceles
$CD = QD = 25$
Pero: $AD = 22 \Rightarrow QA = 3$
Además, como: $CM = MQ$
En el trapecio se cumple:
$x = \dfrac{5-3}{2}$ $\quad\therefore\ x = 1$



53. En un cuadrado ABCD, se trazan las perpendiculares $\overline{DD'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{BB'}$ a una recta L que pasa por su centro. Si $CC' = 10$. Calcule la proyección de $\overline{DB}$ sobre L.

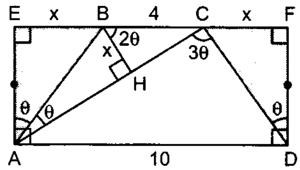
Resolución:



La proyección de $\overline{BD}$ sobre la recta L es $\overline{B'D'}$
$\triangle BB'O \cong \triangle DD'D$ (ALA) $\Rightarrow B'O = OD' = x$
$\triangle OD'D \cong \triangle OC'C$ (ALA) $\Rightarrow x = 10$
$\therefore\ B'D' = 20$

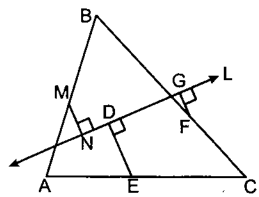
54. Se tiene el trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $BC = 4$ cm y $AD = 10$ cm. El punto $H \in \overline{AC}$, tal que $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, $m\angle ACD = 3m\angle BAC$ y $m\angle CBH = 2m\angle BAC$. Halle BH.

Resolución:

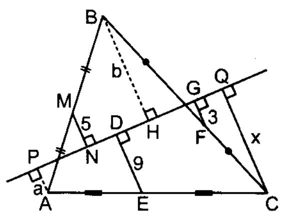


Construyendo el rectángulo AEFD. En AEBH, se cumple: $m\angle EAH = m\angle HBC = 2\theta \Rightarrow m\angle EAB = \theta$
Por teorema: $EB = BH = x$
$\triangle AEB \cong \triangle DFC$ (ALA) $\Rightarrow CF = EB = x$
En consecuencia: $x + 4 + x = 10 \Rightarrow 2x = 6$
$\therefore\ x = 3$ cm

55. En la figura, M, F y E son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. $MN = 5$; $FG = 3$ y $ED = 9$. Halle la distancia del vértice C a la recta L.



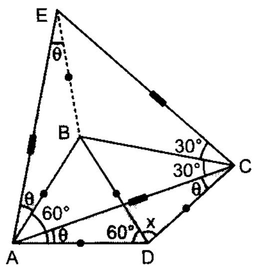
Resolución:



En el trapecio APBH, por teorema:
$b - a = 10$ ...(1)
En el trapecio APQC, por teorema:
$a + x = 18$ ...(2)
En el trapecio CHBQ, por teorema:
$x - b = 6$ ...(3)
Sumando (1), (2) y (3): $2x = 34$
$\therefore\ x = 17$

56. Se tiene un cuadrilátero ABCD, donde se cumple: $AB = AD$, $m\angle BAD = 60°$, $m\angle BCA = 30°$, $m\angle CAD = \theta$ ($0 < \theta < 60°$), hallar la $m\angle BDC$.

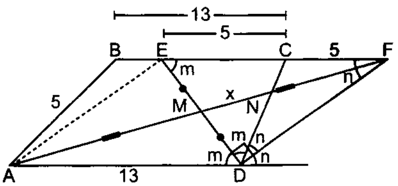
Resolución:



$\triangle ABD$ equilátero: $AB = BD = AD$
Se construye el $\triangle AEC$ equilátero
$\Rightarrow m\angle EAB = \theta \wedge AB = BE$
Luego: $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (LAL)
$\Rightarrow DC = BE$ y $m\angle ACD = m\angle AEB = \theta$
Finalmente en el $\triangle ACO$:
$\theta + \theta + 60° + x = 180° \quad \therefore x = 120° - 2\theta$

57. En un paralelogramo ABCD, $\overline{AD} > \overline{AB}$, las bisectrices interior y exterior del ángulo ADC intersecan a la recta BC en los puntos E y F. Si AB = 5 y BC = 13, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{DE}$.

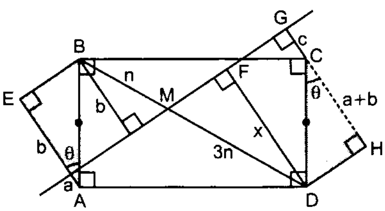
Resolución:



$\triangle ECD$ es isósceles: $EC = CD = 5$
$\triangle DCF$ es isósceles: $DC = CF = 5$
En el trapecio AEFD, por teorema:
$x = \dfrac{13-10}{2} \Rightarrow x = \dfrac{3}{2} \quad \therefore x = 1{,}5$

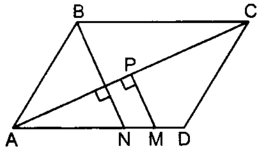
58. En la diagonal $\overline{BD}$ de un rectángulo ABCD se ubica un punto M por el cual se traza una recta que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Si la suma de las longitudes de las distancias trazadas de A, B y C a la recta es 16 y MD = 3MB. Halle la longitud de la distancia trazada de D a la recta.

Resolución:

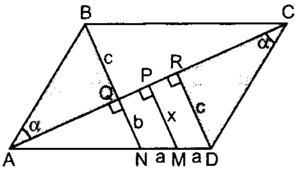


Dato: $a + b + c = 16$
$\triangle AEB \cong \triangle CHD$ (ALA) $\Rightarrow CH = AE = a + b$
Finalmente, en el rectángulo FGHD:
$x = a + b + c \quad \therefore x = 16$

59. Según la figura, ABCD es un romboide, NM = MD y BN = 10, calcular MP.



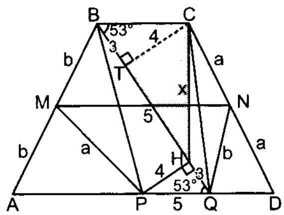
Resolución:



Piden: $MP = x$
Dato: $BN = b + c = 10$
Sea: $\overline{DR} \perp \overline{AC}$
$\triangle AQB \cong \triangle CRD$ (ALA) $\Rightarrow DR = BQ = c$
$\square NQRD$: $\overline{MP}$ (base media)
$\Rightarrow x = \dfrac{b+c}{2} \Rightarrow x = \dfrac{10}{2} = 5$
$\therefore x = 5$

60. En un trapecio ABCD ($\overline{AD} // \overline{BC}$) de base media $\overline{MN}$ (M en $\overline{AB}$ y N en $\overline{CD}$), en $\overline{AD}$ se ubican los puntos P y Q, tal que $MP = \dfrac{CD}{2}$ y $NQ = \dfrac{AB}{2}$, desde P se traza $\overline{PH} \perp \overline{BQ}$ (H en $\overline{BQ}$), tal que PH = 4, QH = 3 y BH = 8. Calcular CH.

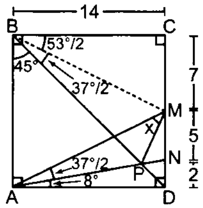
Resolución:



$\triangle AMP \cong \triangle QND \Rightarrow AP = QD$
$\triangle BMP \cong \triangle CNQ \Rightarrow BP = CQ$
$\Rightarrow$ PBCQ es un paralelogramo: $PQ = BC = 5$
$\triangle CTH$ (teorema de Pitágoras)
$\therefore x = \sqrt{41}$

61. En el lado $\overline{CD}$ de un cuadrado ABCD, se ubican los puntos M y N, tal que CM = MD = 7, ND = 2, $\overline{AN} \cap \overline{BD} = \{P\}$. Calcular $m\angle AMP$.

Resolución:



Se pide: $m\angle AMP = x$

Datos: ABCD: cuadrado, CM = MD = 7, ND = 2

⊾ADN: $m\angle NAD = 8°$

⊾ADM$\left(\frac{53°}{2}\ \text{y}\ \frac{127°}{2}\right) \Rightarrow m\angle MAN = \frac{37°}{2}$

⊾BCM$\left(\frac{53°}{2}\ \text{y}\ \frac{127°}{2}\right) \Rightarrow m\angle PBM = \frac{37°}{2}$

⏢ABMP es inscriptible

$\therefore\ x = 45°$

62. En un tetraedro PQRS el ángulo diedro correspondiente a la arista PQ es recto y los ángulos QPR y QPS miden 45°. Entonces, el ángulo RPS mide.

Resolución:

Se pide:

$m\angle RPS = x$

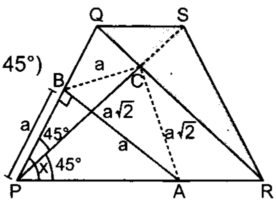
⊾PBA ∧ ⊾PBC (Not. 45°)

PB = BA = BC = a

PC = PA = $a\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ △APC: equilátero

$\therefore\ x = 60°$



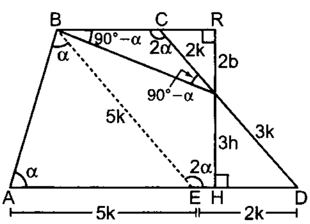
63. En un trapecio ABCD en su lado lateral $\overline{CD}$ se ubica el punto N, tal que 3(CN) = 2(ND). Calcular el área de la región trapecial ABCD, si el producto de la longitud de BC y la distancia de N a $\overline{AD}$ es 60 cm², además la $m\angle ABN = 90°$ y $m\angle BCD = 2m\angle BAD$

Resolución:

Piden: S_{ABCD}

Dato: $(2k)(3h) = 60\ cm^2$

$\Rightarrow kh = 10\ cm^2$



Se observa: ⊾CRN ~ ⊾DHN ⇒ NR = 2h y NH = 3h

Pero: △BCN (isósceles) ⇒ BC = 2k

se traza $\overline{BE} \parallel \overline{CD}$ ⇒ BE = 5k

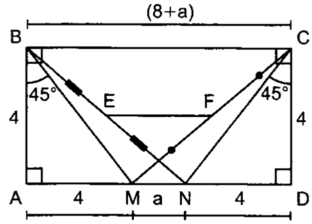
pero △AEB (isósceles) ⇒ AE = 5k

Trapecio: $S_{ABCD} = \left(\frac{7k + 2k}{2}\right)5h$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{45}{2}Kh \quad \therefore\ S_{ABCD} = 225\ cm^2$

64. Se tiene un rectángulo ABCD, en $\overline{AD}$ se ubican los puntos M y N (M ∈ $\overline{AN}$), tal que AB = 4 y $m\angle ABM = m\angle NCD = 45°$. Calcular la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{BN}$ y $\overline{CM}$.

Resolución:



Piden: EF

De la figura ⊾BAM y ⊾NDC: notable 45°

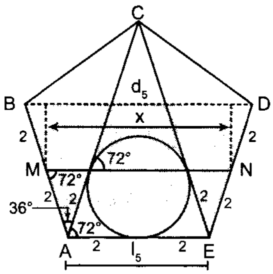
⇒ AB = AM = ND = CD = 4

⏢BMNC (por propiedad):

$EF = \frac{(8 + a) - a}{2} \quad \therefore\ EF = 4$

65. Se tiene un pentágono regular ABCDE cuyo lado mide 4. En el triángulo ACE se inscribe una circunferencia, de modo que la recta que contiene a los puntos de tangencia determinados en $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$, intersecan $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$ en los puntos M y N respectivamente, calcular MN.

Resolución:



Piden: MN = x

⏢BDEA: trapecio

$x = \frac{BD + AE}{2} \quad ...(1)$

$d_5 = l_5(\sqrt{5} + 1)/2 \Rightarrow BD = (\sqrt{5} + 1)2$

En (1): $x = \frac{(\sqrt{5} + 1)2 + 4}{2}$

$\therefore\ x = 3 + \sqrt{5}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2005 - I)

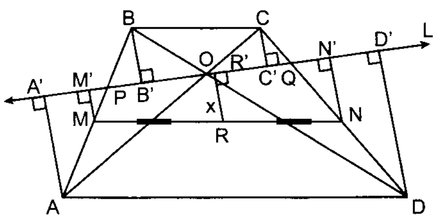
Sea el trapecio ABCD ($\overline{BC} \,//\, \overline{AD}$ y $\overline{BC} < \overline{AD}$).
Por el punto de intersección de las diagonales del trapecio se traza la recta L que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ en P y Q, respectivamente, que se encuentran en el mismo semiplano con respecto a la recta que contiene a la mediana del trapecio. Si $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son las distancias de los vértices a la recta L y AA' + DD' = a, BB' + CC' = b; calcule la distancia del punto medio de la mediana del trapecio a la recta L.

A) $\frac{a+b}{8}$ B) $\frac{a-b}{8}$ C) $\frac{a+b}{4}$

D) $\frac{a-b}{4}$ E) $\frac{a+b}{6}$

Resolución:

Datos: AA' + DD' = a
BB' + CC' = b



Por propiedad:

$$MM' = \frac{AA' - BB'}{2} \wedge NN' = \frac{DD' - CC'}{2}$$

En el trapecio rectángulo MM'N'N:

$$x = \frac{MM' + NN'}{2}$$

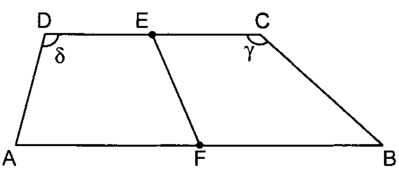
$$\Rightarrow x = \frac{\frac{AA' - BB'}{2} + \frac{DD' - CC'}{2}}{2} = \frac{(AA' + DD') - (BB' + CC')}{4}$$

$$\therefore x = \frac{a-b}{4}$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2006 - I)

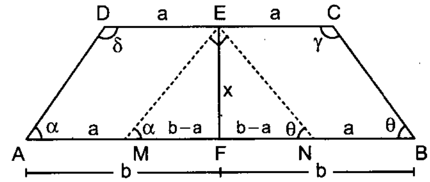
En el trapecio de la figura, los ángulos γ y δ son tales que $\gamma + \delta = \frac{3\pi}{2}$; determine la medida del segmento EF que une los puntos medios de las bases.



A) AD(BC)/2 B) (BC – AD)/2 C) (AB – DC)/2
D) (AB + DC)/2 E) (AD + BC)/2

Resolución:

Analizando el dato del enunciado, tenemos el siguiente desarrollo: $\gamma + \delta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$



Del gráfico, se traza: $\overline{EM} \,//\, \overline{DA}$ y $\overline{EN} \,//\, \overline{CB}$

En ⊾MEN: x = b – a ...(α)

Se observa que: $a = \frac{DC}{2} \wedge b = \frac{AB}{2}$

En (α): $x = \frac{AB}{2} - \frac{DC}{2}$

$\therefore$ x = (AB – DC)/2

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2010 - I)

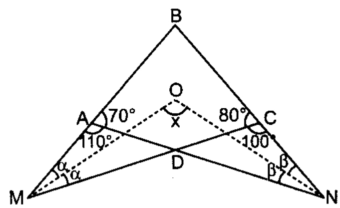
En un cuadrilátero ABCD, las prolongaciones de los lados $\overline{BA}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en M(A ∈ $\overline{BM}$) y las prolongaciones de los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ se intersecan en N (C ∈ $\overline{BN}$). Si los ángulos BAD y BCD miden 70° y 80°, respectivamente, determine el ángulo que forman las bisectrices interiores de los ángulos AMC y ANC.

A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 115°

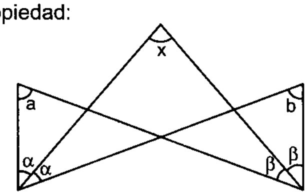
Resolución:

Nos piden: x

Datos: $\overline{MO}$ y $\overline{NO}$: bisectrices



Propiedad:



$$x = \frac{a+b}{2}$$

Por propiedad, tenemos: $x = \frac{100° + 110°}{2}$

$\therefore$ x = 105°

Clave: C

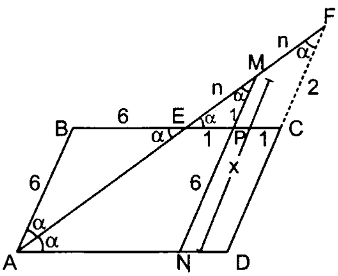
PROBLEMA 4 (UNI 2010 - II)

En el paralelogramo ABCD, se tiene que AB = 6 m y BC = 8 m. Se traza la bisectriz interior del ángulo A la cual interseca a $\overline{BC}$ en E y a la prolongación de $\overline{DC}$ en F; desde M, punto medio de $\overline{EF}$, se traza un rayo paralelo a $\overline{CD}$ que interseca al segmento AD en N. Determine MN (en m).

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución:

Nos piden: MN = x
AB = 6



Como $\overline{AE}$ es bisectriz ⇒ m∠BAE = m∠EAN = α
⇒ △ABE es isósceles.
Por lo que: BE = 6 y EC = 2
Se observa también que como $\overline{MP}$ // $\overline{FC}$
$\overline{MP}$ es base media del △EFC ⇒ EP = PC = 1

Además: △EPM es isósceles
⇒ EP = MP = 1
Finalmente como ABPN es un paralelogramo
⇒ AB = PN = 6
Luego, x = PN + MP ∴ x = 7 m

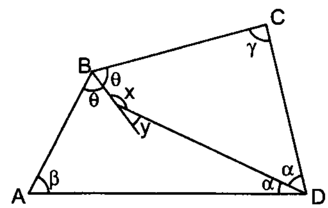
Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

En un trapezoide dos ángulos interiores opuestos se diferencian en 24°. Calcule el ángulo formado por las bisectrices interiores de los otros dos ángulos.

A) 196° B) 186° C) 175°
D) 168° E) 123°

Resolución:



Piden: x
Dato: $\gamma - \beta = 24°$
Por propiedad $y = \dfrac{\gamma - \beta}{2} = 12°$
∴ x = 168°

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un trapecio rectángulo, la altura mide $2\sqrt{3}$ y la base menor, 4. Si la base mayor determina con uno de los lados un ángulo que mide 30°, calcular la mediana.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

2. En un trapecio, los lados no paralelos tienen medidas que suman 16. Las bisectrices interiores de los ángulos adyacentes a la base menor se intersecan en un punto que pertenece a la base mayor. Calcular la base mayor.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

3. La mediana de un trapecio mide 10 y la distancia entre los puntos medios de sus diagonales es 4. Calcular la base menor.

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

4. En un trapecio ABCD, $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$, BC = 5 y CD = 6. Si la $m\angle A = 45°$ y $m\angle C = 127°$, calcular AB.

A) $24\sqrt{2}/5$ B) $11\sqrt{2}/2$ C) 12
D) 13 E) 15

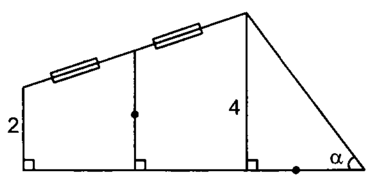
5. En un romboide ABCD se traza la bisectriz $\overline{DM}$ (M en $\overline{BC}$). Si AB = 6, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) $2\sqrt{3}$

6. Se tiene un trapecio ABCD de base mayor $\overline{AD}$. Las bases miden 6 y 8, luego en la prolongación de $\overline{DC}$ se ubica un punto M. Si $m\angle NMD = m\angle ADC$, calcular NM (N es punto medio de $\overline{AB}$).

A) 6 B) 8 C) 7 D) 9 E) 3

7. En la figura, calcular α.



A) 53° B) 37° C) 30°
D) 45° E) 60°

8. Se tiene un trapecio rectángulo ABCD; $\overline{BC}$ es la base menor y $\overline{CD}$ es la altura, $m\angle BAD = 45°$. Si BC = 6 y CD = 4, calcular la mediana del trapecio.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

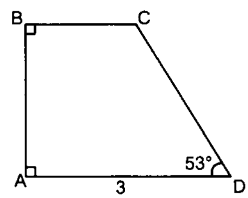
9. Se tiene un trapecio cuyas diagonales se intersecan perpendicularmente en O, siendo $\overline{MN}$ la mediana. Calcular el perímetro del triángulo MON, siendo el perímetro del trapecio 36.

A) 20 B) 16 C) 18
D) 22 E) 24

10. El perímetro de un trapecio isósceles mide 40, las medidas de sus bases están en relación de 4 a 5 y cada lado no paralelo mide la semidiferencia de las bases. Calcular la medida de la mediana.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

11. Si el segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ mide 3, calcular: AB + CD

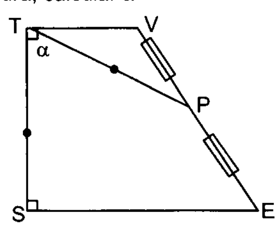


A) 10 B) 12 C) 14
D) 16 E) 18

12. Se tiene un trapecio rectángulo ABCD ($\overline{BC}$ es la base menor y $\overline{AB}$ es la altura), se traza $\overline{CH}$ perpendicular a $\overline{BD}$. Si $m\angle BCH = 2(m\angle CDB)$ y AD = 3(CH), calcular $m\angle CDB$.

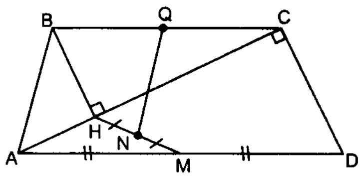
A) 15° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 37°

13. En la figura, calcular α



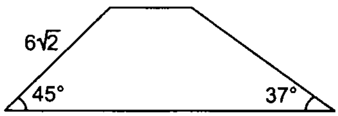
A) 45° B) 75° C) 53°
D) 60° E) 37°

14. En la figura, ABCD es un trapecio BQ = 6, OC = 2, AD = 12, N es punto medio de $\overline{HM}$ y AM = MD. Calcular NQ.



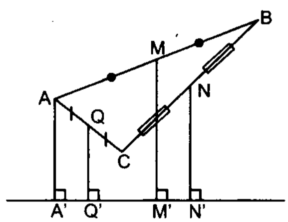
A) 5 B) 4 C) 6
D) 5,5 E) 6,5

15. Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de las diagonales del trapecio.



A) 6 B) 7 C) 8
D) 5 E) 4

16. Si M, N y Q son puntos medios, AA' = 5, QQ' = 4, MM' = 7, calcular MN.



A) 7,5 B) 6,5 C) 6
D) 7 E) 5

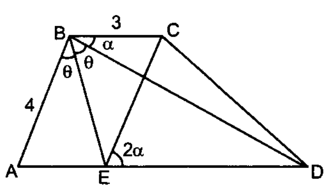
17. Se tiene un trapecio ABCD de mediana $\overline{MN}$, si P y Q pertenecen a $\overline{AD}$, MP = $\frac{CD}{2}$, NQ = $\frac{AB}{2}$ y PQ= 5. Calcular BC.

A) 2,5 B) 5 C) 7,5
D) 10 E) 2

18. En un romboide ABCD, se traza $\overline{AH}$ perpendicular a $\overline{BM}$, M es punto medio de $\overline{CD}$. Si BC = 8, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AH}$ y $\overline{AD}$.

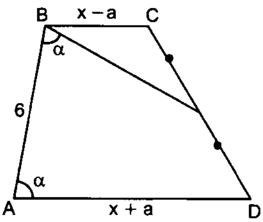
A) 2 B) 4 C) $4\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$ E) 8

19. En el trapecio ABCD, $\overline{AB}$ // $\overline{CE}$, calcular BD.



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

20. ABCD es un trapecio, calcular el menor valor entero de "x".



A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 2

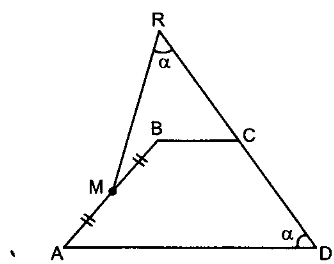
21. En un trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, las bisectrices interiores de B y C se intersecan en un punto que pertenece a su mediana. Si la mediana del trapecio mide 12, calcular su perímetro.

A) 24 B) 36 C) 48
D) 60 E) 72

22. En un trapecio ABCD ($\overline{BC}$ es la base menor), la mediatriz de $\overline{AB}$ corta a $\overline{AD}$ en P. Si BC + BP + PD = 20, calcular la mediana del trapecio.

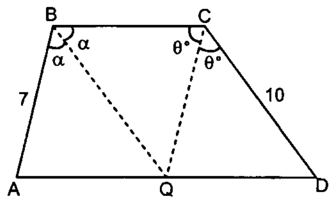
A) 10 B) 12 C) 15
D) 20 E) 22

23. Si $\overline{BC}$ // $\overline{AC}$, BC = 4 y AD = 10, calcular RM.



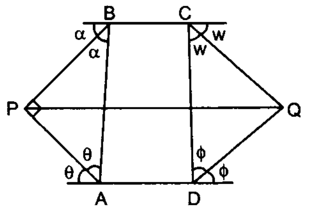
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

24. Del gráfico, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, calcular AD.



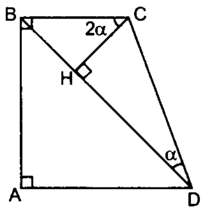
A) 8,5 B) 17 C) 14
D) 1 E) 15

25. Si el perímetro del cuadrilátero ABCD es 80, calcular PQ.



A) 40 B) 50 C) 60
D) 70 E) 80

26. En la figura, BC = 6 y AD = 9, calcular CH.

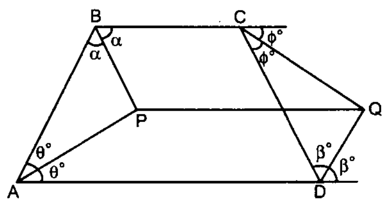


A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) $3\sqrt{2}$

27. Se tiene un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, cuyas medidas son 6 y 8, respectivamente. Calcular CD, si m∠ABC = 90° + θ; m∠ADC = 2θ.

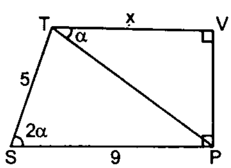
A) 6 B) 7 C) 8
D) 5 E) 2

28. $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, BC = CD = 5, AB = 6 y AD = 15, calcular PQ.



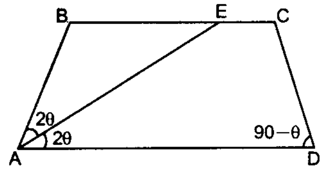
A) 9,5 B) 8,5 C) 7,5
D) 6,5 E) 5,5

29. Calcular "x".



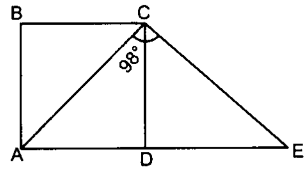
A) 5 B) 4 C) 7
D) 6,5 E) 2

30. Si AB = 5; EC = 1; $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, calcular el mayor valor entero que puede tomar la mediana del trapecio ABCD.



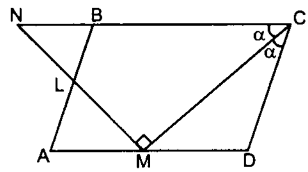
A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

31. Si ABCD es un cuadrado y CE = 15, calcular la diagonal.



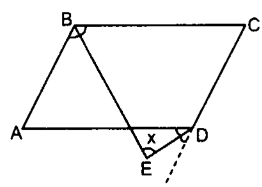
A) $15\sqrt{2}$ B) $9\sqrt{2}$ C) 36
D) $12\sqrt{2}$ E) 48

32. Si ABCD es un romboide, BC = 8 y CD = 5; calcular NB.



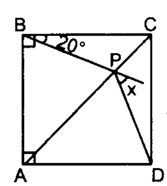
A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

33. En la figura, $\overline{BE}$ y $\overline{DE}$ son bisectrices interior y exterior, respectivamente. Si ABCD es un paralelogramo, calcular "x".



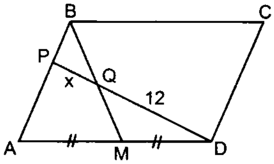
A) 75° B) 45° C) 90°
D) 60° E) 120°

34. La figura ABCD es un cuadrado, calcular "x".



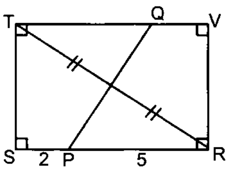
A) 45° B) 30° C) 40°
D) 60° E) 50°

35. Si ABCD es un romboide, AP = 2PB; AM = MD; QD = 12, calcular PQ.



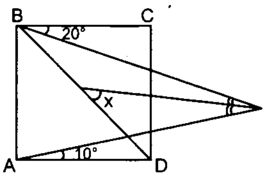
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

36. Si el perímetro del rectángulo es 22, calcular PQ.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

37. Si ABCD es un cuadrado, calcular "x".



A) 30° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 55°

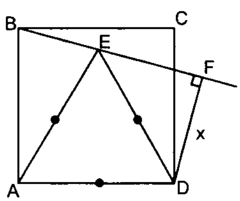
38. En un romboide ABCD se traza la bisectriz $\overline{DM}$ (M en $\overline{BC}$). Si AB = 6, calcular la medida del segmento que une los puntos medios de $\overline{AM}$ y $\overline{BD}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) $2\sqrt{3}$

39. Se tiene un paralelogramo ABCD, sobre $\overline{CD}$ se ubica el punto medio M, tal que m∠ABM = 90°. Calcular AD, si AB = 6 y MB = 4.

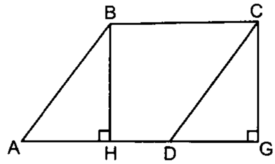
A) 4 B) 5 C) 6
D) 6,5 E) 7

40. En la figura, ABCD es un cuadrado de perímetro 16. Calcular x.



A) $2\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{2}$
D) 2 E) 3

41. En la figura, ABCD es un rombo, BC = 10 y AG = 16. Calcular BH.



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

42. En el paralelogramo ABCD, el punto Q pertenece a $\overline{AD}$ y $\overline{BQ}$ corta a $\overline{AC}$ en P. Si PC = 3AP y PQ = 5. Calcular BP.

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

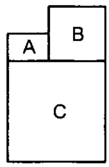
43. Calcular la medida del lado de un cuadrado que tiene el mismo perímetro que un triángulo equilátero cuyo lado mide 12.

A) 6 B) 10 C) 12
D) 9 E) 8

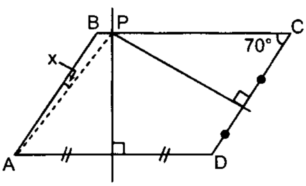
44. A, B y C son cuadrados, calcular:

$$E = \frac{\text{Perímetro}(A) + \text{Perímetro}(B)}{\text{Perímetro}(C)}$$

A) 1/2
B) 1
C) 2
E) 3/2
D) 4

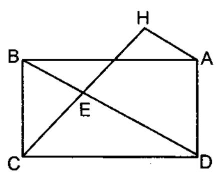


45. Si ABCD es un paralelogramo, calcular "x".



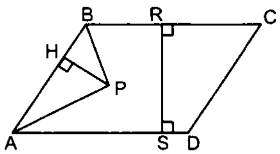
A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

46. Si ABCD es un rectángulo, HE = EC, BE = 7 y ED = 13, calcular AH.



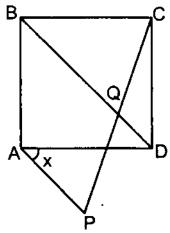
A) 3 B) 4 C) 4,5
D) 5 E) 6

47. Si ABCD es un paralelogramo, PH = 6, calcular RS.



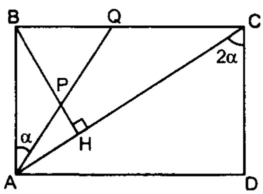
A) 18　B) 6　C) 12
D) 16　E) 10

48. En la figura, ABCD es un cuadrado , CQ = QP. Calcular x



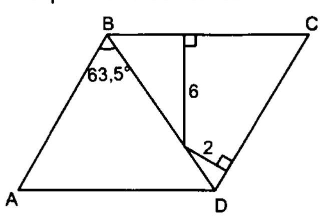
A) 60°　B) 30°　C) 75°
D) 37°　E) 45°

49. En el rectángulo ABCD, si BQ = 6, calcular el máximo valor entero de PQ.



A) 9　B) 10　C) 11
D) 12　E) 13

50. Calcular el perímetro del rombo.

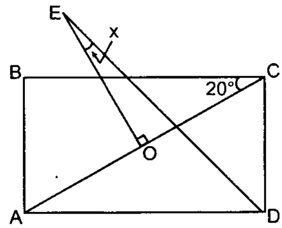


A) 30　B) 40　C) 32
D) 36　E) 50

51. En un rombo ABCD, se traza $\overline{BH} \perp \overline{AD}$, tal que AH = HD. Calcular la m∠C.

A) 30°　B) 45°　C) 40°
D) 60°　E) 75°

52. Si ABCD es un rectángulo, AO = OC = OE, calcular "x".

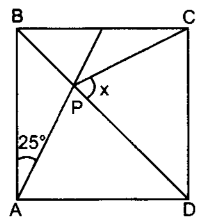


A) 20°　B) 25°　C) 30°
D) 35°　E) 40°

53. En un romboide ABCD, las bisectrices interiores de A y D se intersecan en un punto de $\overline{BC}$. Si AD = 18, calcular el perímetro del romboide.

A) 28　B) 45　C) 54
D) 56　E) 60

54. Si ABCD es un cuadrado, calcular "x".

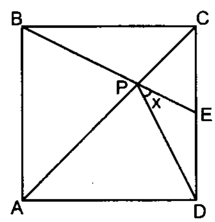


A) 50°　B) 55°　C) 60°
D) 65°　E) 70°

55. Calcular la medida de uno de los ángulos de un rombo, si una de sus diagonales mide igual que uno de sus lados.

A) 45°　B) 53°　C) 75°
D) 60°　E) 90°

56. Si ABCD es un cuadrado y DE = EP, calcular "x".



A) 22,5°　B) 15°　C) 37°
D) 30°　E) 26,5°

57. La diagonal de un cuadrado mide $6\sqrt{2}$, calcular el perímetro del cuadrado.

A) 18　B) 20　C) 24
D) 30　E) 36

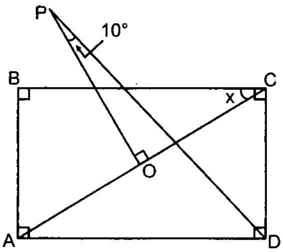
58. En un paralelogramo ABCD, m∠A = 3x + 20° y m∠B = 2x + 30°. Calcular x.

A) 13° B) 26° C) 18°
D) 36° E) 40°

59. Se tiene un romboide ABCD, BC = 5. M es punto medio de $\overline{CD}$ y m∠ABM = 90°. Si AB = 6, calcular la m∠A.

A) 37° B) 45° C) 53°
D) 30° E) 60°

60. En la figura, AO = OC = OP, calcular "x".



A) 30° B) 35° C) 40°
D) 45° E) 50°

61. En un trapecio rectángulo ABCD. m∠A = m∠B = 90°, m∠D = 75° y la base mayor $\overline{AD}$ es el doble del lado $\overline{AB}$. Hallar el ángulo BCA.

A) 15° B) 30° C) 45°
D) 90° E) 80°

62. Los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un trapecio ABCD son iguales. Si $\overline{AD}$ es paralela a $\overline{BC}$ y tiene el doble de la longitud de $\overline{BC}$, la diagonal $\overline{AC}$:

A) Es perpendicular a la diagonal $\overline{BD}$.
B) Es bisectriz del ángulo A.
C) Tiene por longitud, el promedio de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$.
D) Tiene como longitud, el promedio de las longitudes de $\overline{AB}$ y $\overline{BD}$.
E) Divide en partes iguales a la diagonal.

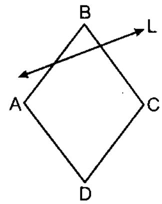
63. En un trapecio ABCD, la base menor $\overline{AB}$ es igual a la altura $\overline{AH}$; m∠A = 135° y m∠B = 150°. Hallar el perímetro del trapecio, si: AB = AH = 20 cm

A) 195,920 cm B) 200 cm
C) 182,920 cm D) 162,920 cm
E) 170,500 cm

64. En un cuadrilátero convexo ABCD, m∠A = 9° y m∠B = 4°. Calcular el valor del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos C y D.

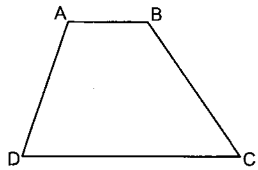
A) 6°30' B) 7°20' C) 7°50'
D) 9°00' E) 12°00'

65. Tenemos el romboide ABCD. Si las longitudes de las distancias de B, A y D a la recta son 2,4 m; 3,6 m; 7,9 m, respectivamente. Hallar la longitud de la distancia de C a la recta L.



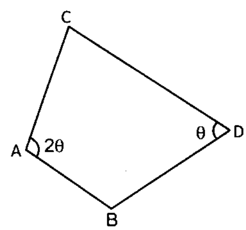
A) 1 m B) 1,5 m C) 1,9 m
D) 2 m E) 2,5 m

66. En un trapecio ABCD, de bases $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se trazan las bisectrices de los ángulos A y D que se cortan en R y las bisectrices de los ángulos B y C que se cortan en S. Hallar RS, si AB = 4, CD = 12, AD = 7 y BC = 9.



A) 0 B) 8 C) 19/2
D) 13/2 E) 3/2

67. En la figura, los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son paralelos. Si $\overline{AB}$ = 5 y AC = 12, hallar la longitud del segmento $\overline{CD}$.

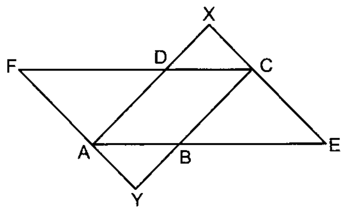


A) 15 B) 16 C) 18
D) 17 E) 10

68. Dado un cuadrado, al unir los puntos medios de sus lados se obtiene otro cuadrado. Si se efectúa este procedimiento cuatro veces más se tendrá un cuadrado más pequeño. Se pide la razón entre los lados del cuadrado inicial y el último que se obtuvo.

A) $\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

69. Si ABCD es un paralelogramo y DX = BY. El perímetro del triángulo BCE es a + 2b, el perímetro del triángulo CDX es b − 2a y el perímetro del triángulo CFY es p. Calcular: $p^2 + 6ab$



A) $a^2 + b^2$ B) $3a^2 + 2b^2$ C) $2a^2 + 3b^2$
D) $a^2 + 9b^2$ E) $9a^2 + b^2$

70. La figura 1 es un cuadrado de 4 m de lado, tomando los puntos medios de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se construye la figura 2. En el segundo paso, tomando los puntos medios de $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1Q_1}$, $\overline{Q_1R_1}$ y $\overline{R_1C}$ se construye la figura 3. Si se efectúa este procedimiento 10 veces, calcular la longitud de la escalera que se obtiene.

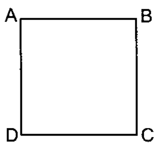


Fig. 1

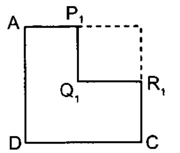


Fig. 2

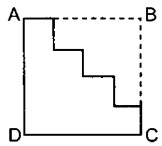
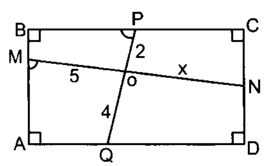


Fig. 3

A) $4\sqrt{2}$ m B) $10\sqrt{2}$ m C) $40\sqrt{2}$ m
D) $4\sqrt{10}$ m E) 8 m

71. En la figura, ABCD es un rectángulo, AD = 2CD y donde $m\angle OMA = m\angle BPO$. Si $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en O, de modo que PO = 2 cm; QO = 4 cm y MO = 5 cm, hallar NO.



A) 8 cm B) 10 cm C) 7 cm
D) 9 cm E) 6 cm

72. En un trapecio ABCD, la base mayor es $\overline{AD}$. Al trazarse las bisectrices del ángulo B y el ángulo exterior C, intersecan a la base $\overline{AD}$ y a su prolongación en P y Q, respectivamente. Si AB + BC = 24 m y CD + AD = 30 m, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{PC}$ y $\overline{BQ}$.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

73. Se tiene un paralelogramo ABCD. Se construyen exteriormente los triángulos equiláteros ABM y BCN. Por M se traza la perpendicular $\overline{MH}$ a $\overline{ND}$, calcular la medida del ángulo HMB, si el ángulo NDC mide 46°.

A) 16° B) 14° C) 18°
D) 11° E) 20°

74. En un trapecio ABCD($\overline{AB}$ // $\overline{CD}$). Si AB = 8 m; BC = 6 m; AD = 10 m y CD = 18 m; las bisectrices de los ángulos A y D se intersecan en el punto M y las bisectrices de los ángulos B y C se intersecan en el punto N. Hallar la longitud del segmento MN.

A) 4 m B) 5 m C) 6 m
D) 4,5 m E) 5,5 m

75. De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son verdaderas (V) o falsas (F)?

I. Si el trapecio tiene sus diagonales congruentes; entonces, es necesariamente inscriptible a una circunferencia.
II. En un trapecio escaleno, una diagonal puede ser también altura.
III. Si un polígono equiángulo está escrito en una circunferencia es necesariamente un polígono regular.

A) VVF B) FVF C) VFV
D) FFF E) VVV

76. En un romboide ABCD, con $\overline{AB} < \overline{BC}$, se trazan las bisectrices interiores de sus cuatro ángulos. Dichas bisectrices al intersecarse, forman un:

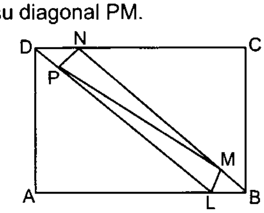
A) Rombo B) Cuadrado
C) Rectángulo D) Trapecio
E) Otros cuadriláteros

77. En un rombo ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$ y la diagonal $\overline{BD}$ corta a $\overline{AM}$ en punto R. Si RM = 5 cm y la medida del ángulo DRM es 53°, hallar BD.

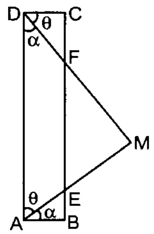
A) 18 cm B) 35 cm C) 30 cm
D) 36 cm E) 40 cm

78. En el rectángulo ABCD de lados 40 m y 30 m se tiene que DN = 10 m y el triángulo DPN es recto en P. Si la figura LMNP es un paralelogramo; hallar la longitud de su diagonal $\overline{PM}$.

A) 34 m
B) 35 m
C) 36 m
D) 37 m
E) 38 m

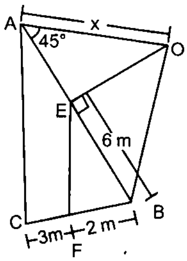


79. En el rectángulo ABCD de la figura, la longitud de los segmentos AB y FC son, respectivamente, 2 m y 4 m. Si los segmentos AE y EM son iguales, ¿cuál es el perímetro del rectángulo?



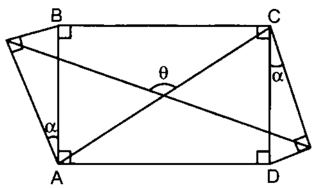
A) 48 m B) 30 m C) 36 m
D) 24 m E) 28 m

80. En el gráfico, $\overline{EF}$ // $\overline{AC}$, hallar "x".



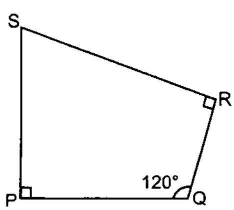
A) $8\sqrt{2}$ m B) $18\sqrt{2}$ m C) $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ m
D) $9\sqrt{2}$ m E) 18 m

81. En la figura, ABCD es un cuadrado y $\alpha = 20°$, hallar el valor de "θ".



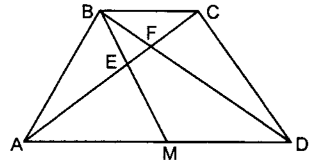
A) 120° B) 105° C) 115°
D) 100° E) 110°

82. En el cuadrilátero PQRS, $PQ = 12\sqrt{3}$ y $QR = 8\sqrt{3}$, hallar: PS + RS



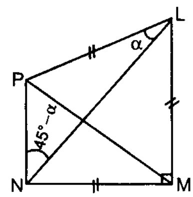
A) 60 B) 63 C) 64
D) 65 E) 66

83. En la figura, ABCD es un trapecio, $\overline{BM}$ // $\overline{CD}$; AF = 18 cm y FC = 12 cm. Hallar EF.



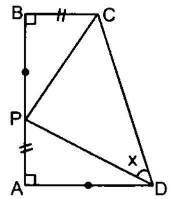
A) 6 cm B) 4 cm C) 10 cm
D) 8 cm E) 5 cm

84. En la figura, hallar el ángulo "α∀.



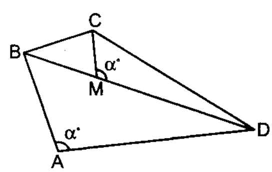
A) 20° B) 10° C) 12°
D) 30° E) 15°

85. En el cuadrilátero ABCD, hallar "x".



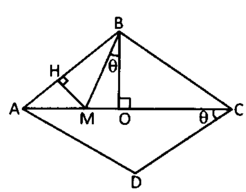
A) 53° B) 30° C) 60°
D) 45° E) 37°

86. En el trapecio mostrado, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, AB = BM = MD y CM = n. Hallar AD.



A) 2n B) 3n C) 4n
D) 5n E) 6n

87. Calcular "θ", si ABCD es un rombo. MH = 1 y D dista de $\overline{BC}$ 3 unidades.



A) 26°30' B) 15° C) 18°
D) 30° E) 10°

88. En un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y D, la base menor $\overline{AB}$ mide 4 y la mediana $\overline{ME}$ del trapecio mide 6 (M en $\overline{AD}$) se ubica sobre $\overline{AD}$ el punto P, tal que PB = PC y m∠BPC = 90°. Calcular MP.

A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) 3

89. En un cuadrado ABCD, sobre la recta AD, se ubican los puntos P y Q, tal que: P, A, D y Q están en ese orden. Calcular la medida del ángulo formado entre $\overline{PC}$ y $\overline{BQ}$, siendo el punto medio de $\overline{AD}$ punto medio de $\overline{PQ}$ y m∠PCQ = 90°.

A) 75° B) 60° C) 63,5°
D) 52,5° E) 67,6°

90. En un cuadrilátero ABCD, m∠B = m∠D = 90°, m∠BCD = 45°. Luego, se trazan $\overline{AP} \perp \overline{BD}$, $\overline{CQ} \perp \overline{BD}$. Hallar la longitud del segmento BD, si AP = 4 m, CQ = 20 m.

A) 16 m B) 24 m C) 30 m
D) 40 m E) 50 m

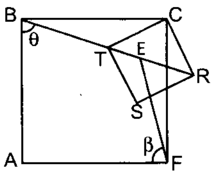
91. En un romboide ABCD, se trazan las bisectrices exteriores de los ángulos en C y D, que se intersecan en P. Además, $\overline{BP}$ y $\overline{CD}$ se intersecan en Q. Calcular AB, si BQ = 2 cm, QP = 3 cm y $\overline{BP} \perp \overline{CD}$.

A) 4 cm B) 5 cm C) 7,5 cm
D) 5,5 cm E) 6,5 cm

92. En un cuadrilátero ABCD, m∠BAC = m∠BDA = 40°, m∠BDC = 20°, AB + CD = AD. Calcular el mayor ángulo formado por sus diagonales.

A) 120° B) 100° C) 135°
D) 150° E) 130°

93. En el gráfico, ABCF y STCR son cuadrados, $\theta + \beta = 120°$. Si EF = 8, calcular BT.



A) 8
B) 4
C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$
E) $4\sqrt{3}$

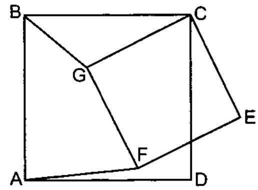
94. En un paralelogramo ABCD, se ubica el punto F en $\overline{AD}$, de modo que m∠ABF = m∠BCF, FC = 2DC. Calcular la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{BF}$ y $\overline{FC}$, si BF = 12.

A) 4 B) 8 C) 9
D) 12 E) 6

95. En un romboide ABCD, la altura $\overline{BH}$ interseca al segmento DM (M punto medio de $\overline{AB}$) en el punto R. Hallar RC, si MR = 4 cm y RD = 9 cm.

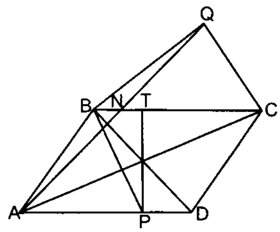
A) 6 cm B) 8 cm C) 10 cm
D) 17 cm E) 13 cm

96. En el gráfico ABCD y CEFG son cuadrados, BG + ED = 2. Calcular AF.



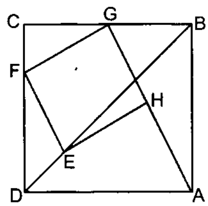
A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

97. Según el gráfico, ABCD y PBQC son romboides, calcular $\frac{BN}{NT}$.



A) 1 B) 2 C) 3/2
D) 2/3 E) 1/3

98. En el gráfico, el lado del cuadrado EFGH mide $\sqrt{10}$, ¿cuánto mide el lado del cuadrado ABCD?



A) 3 B) 4 C) $3\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) 5

99. En un cuadrilátero convexo ABCD, AB = BC = CD, m∠BCA = 31° y m∠ACD = 91°. Hallar la m∠CAD.

A) 28° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

100. En un trapezoide MNOP, m∠M = m∠O = 90°. Se trazan $\overline{NR}$ y $\overline{PL}$, perpendiculares a $\overline{MO}$. Si PL − NR = 3MO. Calcular la m∠P.

A) 10° B) 12° C) 18,5°
D) 22,5° E) 30°

101. En un trapecio MNOP ($\overline{MN}$ // $\overline{OP}$), NO = 4, OP = 6, m∠M = 30° y m∠O = 120°. Calcular MN.

A) 10 B) 12 C) 14
D) 7 E) 9

102. En el lado $\overline{CD}$ de un cuadrado ABCD, se ubica el punto P, tal que m∠BAP = 75°. Calcular la m∠BQC, siendo Q punto medio de $\overline{AP}$.

A) 53° B) 45° C) 75°
D) 60° E) 90°

103. En un cuadrilátero ABCD, cóncavo en C, m∠DAB + m∠ABC = 90° y $(AD)^2 + (BC)^2 = 100$. Calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A) 4 B) 5 C) 10
D) 12 E) 20

104. En un trapezoide MNOP, NO = OP = 1, m∠MON = 15°, m∠MOP = 45° y m∠OMP = 30°. Calcular su perímetro.

A) 3 B) $1 + \sqrt{2}$ C) $2 + \sqrt{2}$
D) $3 - \sqrt{2}$ E) $3 + \sqrt{2}$

105. En un trapezoide ABCD, de diagonales congruentes, se tiene que m∠ACB = 22°; m∠BDC = 30° y m∠DBC = 38°. Calcular m∠BAC.

A) 38° B) 22° C) 30°
D) 36° E) 32°

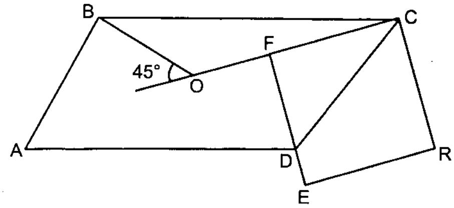
106. Dado el trapezoide ABCD, donde P y Q son los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente; también M y N son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Hallar MN, si m∠PNQ = 90° y AB = CD = $16\sqrt{6}$ cm.

A) $8\sqrt{3}$ cm B) $16\sqrt{3}$ cm C) $8\sqrt{6}$ cm
D) $8\sqrt{2}$ cm E) $16\sqrt{2}$ cm

107. Se tiene un paralelogramo ABCD, por C se traza la perpendicular a $\overline{CD}$, la cual interseca en E a la prolongación de $\overline{AD}$. Si AD = 8 cm y m∠CBD = 2(m∠CED), calcular ED.

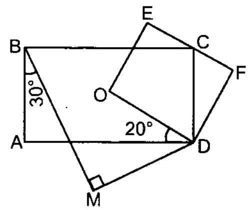
A) 16 cm B) 8 cm C) $2\sqrt{2}$ cm
D) $4\sqrt{2}$ cm E) 32 cm

108. En la figura mostrada, ABCD y EFCR son un paralelogramo y un cuadrado, respectivamente, BO = $\sqrt{2}$, DE = 1. (O: intersección de las diagonales de los paralelogramos). Calcular m∠FCD.



A) 53°/2 B) 60° C) 37°
D) 30° E) 37°/2

109. Si ABCD y EFDO son rectángulos. O es la intersección de las diagonales, EO = a. Calcular MD.



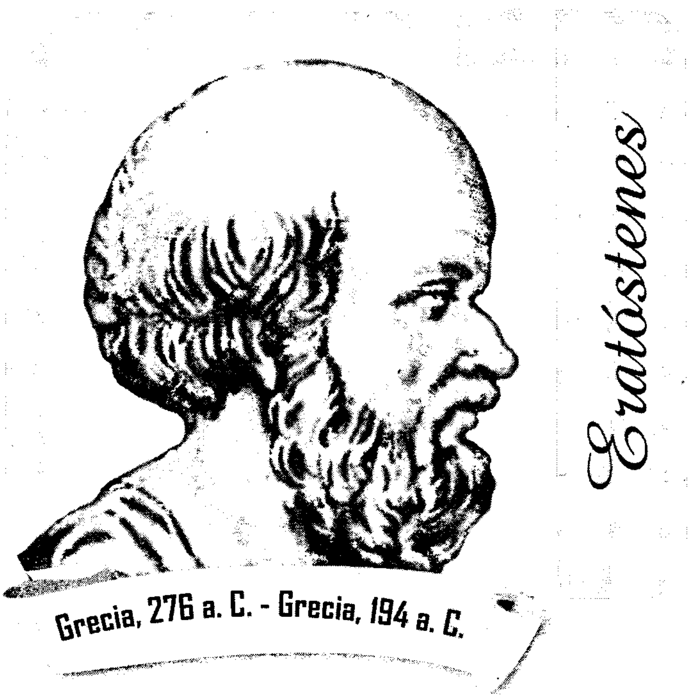
A) 2a B) $\frac{2a}{3}$ C) $\frac{4a}{3}$
D) $\frac{5a}{3}$ E) $\frac{4a}{5}$

CLAVES

1. D	15. B	29. C	43. D	57. C	71. C	85. D	99. B
2. E	16. C	30. D	44. B	58. B	72. C	86. B	100. C
3. C	17. B	31. B	45. C	59. C	73. A	87. D	101. C
4. A	18. B	32. C	46. E	60. B	74. B	88. C	102. D
5. B	19. C	33. C	47. C	61. B	75. C	89. C	103. B
6. C	20. E	34. E	48. E	62. B	76. C	90. A	104. E
7. A	21. C	35. D	49. C	63. D	77. D	91. C	105. B
8. C	22. A	36. B	50. B	64. A	78. A	92. A	106. B
9. C	23. B	37. B	51. D	65. C	79. D	93. B	107. A
10. D	24. B	38. B	52. B	66. A	80. D	94. D	108. A
11. E	25. A	39. B	53. C	67. D	81. E	95. D	109. A
12. C	26. B	40. A	54. E	68. B	82. A	96. C	
13. D	27. E	41. C	55. D	69. D	83. D	97. A	
14. A	28. A	42. C	56. D	70. E	84. E	98. D	

Circunferencia

07 capítulo



Eratóstenes nació en Cirene (276 a. C.) y murió en Alejandría (194 a. C.). Era hijo de Aglaos. Fue un matemático, astrónomo y geógrafo griego. Estudió en Alejandría y durante algún tiempo en Atenas. Fue discípulo de Aristón de Quíos, de Lisanias de Cirene y del poeta Calímaco y también gran amigo de Arquímedes. En el año 236 a. C., Ptolomeo III le llamó para que se hiciera cargo de la Biblioteca de Alejandría, puesto que ocupó hasta el fin de sus días. La Suda (enciclopedia bizantina) afirma que tras perder la vista se dejó morir de hambre a la edad de 80 años; sin embargo, Luciano dice que llegó a la edad de 82 años; también Censorino sostiene que falleció cuando tenía 82 años.

A Eratóstenes se le atribuye la invención, hacia el año 255 a. C., de la esfera armilar que aún se empleaba en el siglo XVII. Aunque debió de usar este instrumento para diversas observaciones astronómicas, solo queda constancia de la que le condujo a la determinación de la oblicuidad de la eclíptica. Determinó que el intervalo entre los trópicos (el doble de la oblicuidad de la eclíptica) equivalía a los 11/83 de la circunferencia terrestre completa, resultando para dicha oblicuidad 23°51'19", cifra que posteriormente adoptaría el astrónomo Claudio Ptolomeo. Tras quedarse ciego, murió en Alejandría por inanición voluntaria.

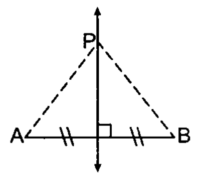
Fuente: Wikipedia

LUGAR GEOMÉTRICO (LG)

Se da este nombre a toda figura, cuyos puntos gozan de una misma propiedad.

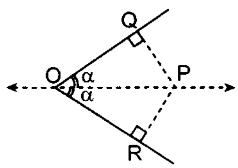
Ejemplos:

1. El lugar geométrico de todos los puntos de un plano, que equidistan de los extremos de un segmento dado, es una recta (mediatriz).



LG de los puntos P, que equidistan de A y B. (PA = PB).

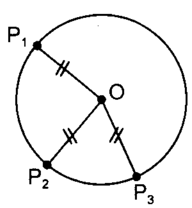
2. El lugar geométrico de los puntos de un piano, que equidistan de los lados de un ángulo, es una recta. (La bisectriz del ángulo y su rayo opuesto).



LG de los puntos P, tales que PQ = PR.

DEFINICIÓN DE CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico, de todos los puntos de un plano, que equidistan de otro punto llamado centro. La distancia del centro a cualquiera de los puntos del LG se llama radio.



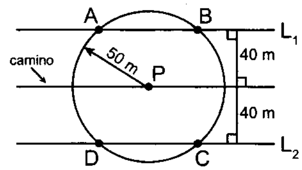
LG de los puntos que equidistan del punto O. ($P_1O = P_2O = P_3O = ... =$ radio).

Ejemplos:

1. En el centro de un camino recto se ubica un pino. Se sabe que a 40 m del camino y a 50 m del pino se encuentra un tesoro. ¿En cuántos lugares se debe buscar el tesoro?

Resolución:

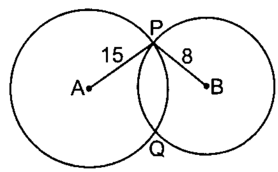
Considerando la figura, donde se indica el camino en cuestión y P es la posición del pino, notamos que el LG de los puntos situados a 40 m del camino, son dos rectas paralelas a él (L_1 y L_2). Además, como el tesoro se ubica a 50 m del pino, haciendo centro en P y con radio igual a 50 m, trazamos una circunferencia (LG de los puntos situados a esa distancia del punto P). Luego, donde corte esta circunferencia a las rectas L_1 y L_2, se debe buscar el tesoro puntos A, B, C y D, es decir, cuatro lugares.



2. Dos árboles A y B están distanciados 20 metros. Un tercer árbol se quiere plantar a 15 m de A y a 8 m de B. ¿En cuántos lugares es posible hacer esto?

Resolución:

Con centros en A y B, se trazan dos circunferencias de radios 15 m y 8 m, respectivamente. Estas se intersecan en los puntos P y Q. Luego, el tercer árbol puede ser plantado en P o Q.



Círculo. Es la porción del plano que comprende a una circunferencia y todos sus puntos interiores.

LÍNEAS NOTABLES EN LA CIRCUNFERENCIA

O: centro

R: radio

$\overline{AB}$: cuerda

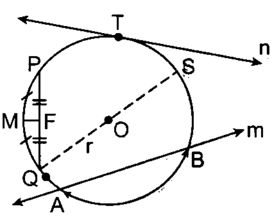
$\overline{QS}$: diámetro (cuerda máxima)

$\overset{\frown}{AB}$: arco

$\overleftrightarrow{n}$: recta tangente (T: punto de tangencia)

$\overleftrightarrow{m}$: recta secante

$\overline{MF}$: flecha o sagita de PQ.



Propiedad:

Por tres puntos no colineales, pasa una y solo una circunferencia, es decir, tres puntos no colineales determinan una circunferencia.

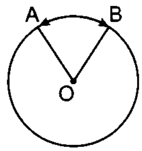
Así, los puntos no colineales A, B y C, determinan una circunferencia, la cual tendrá su centro en la intersección de las mediatrices de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ (o $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$), ya que por propiedad de la mediatriz:

Para $\overline{AB}$: OA = OB
Para $\overline{BC}$: OB = OC

O: centro de la circunferencia
$\therefore$ OA = OB = OC = radio

◀ ÁNGULOS EN LA CIRCUNFERENCIA

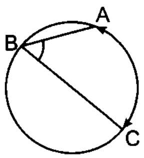
1. Ángulo central



$$\boxed{m\angle AOB = m\overset{\frown}{AB}}$$

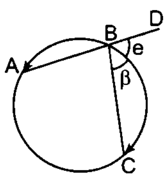
O → centro

2. Ángulo inscrito



$$\boxed{m\angle B = m\frac{\overset{\frown}{AC}}{2}}$$

3. Ángulo exinscrito

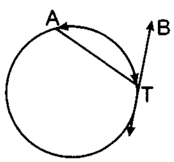


$$\boxed{m\angle e = m\frac{\overset{\frown}{ABC}}{2}}$$

Observación

$$\beta = \frac{m\overset{\frown}{AC}}{2} \wedge \beta + e = 180$$

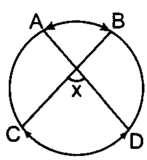
4. Ángulo semiinscrito



$$\boxed{m\angle ATB = m\frac{\overset{\frown}{AT}}{2}}$$

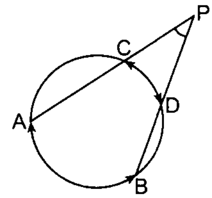
T: punto de tangencia.

5. Ángulo interior



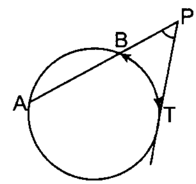
$$\boxed{x = \frac{m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CD}}{2}}$$

6. Ángulo exterior:
   - De dos secantes



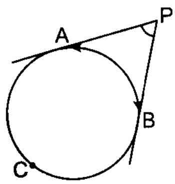
$$\boxed{m\angle P = \frac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}}{2}}$$

   - De secante y tangente



$$\boxed{m\angle P = \frac{m\overset{\frown}{AT} - m\overset{\frown}{TB}}{2}}$$

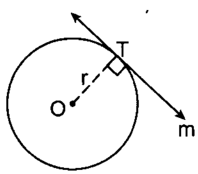
   - De dos tangentes

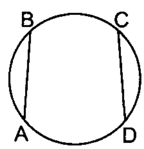


$$\boxed{m\angle P = \frac{m\overset{\frown}{ACB} - m\overset{\frown}{AB}}{2}}$$

Nota

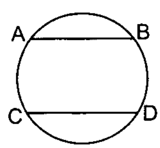
Para este caso particular: $\boxed{m\angle P + m\overset{\frown}{AB} = 180°}$





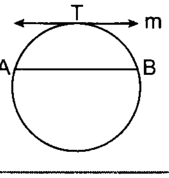
◀ PROPIEDADES BÁSICAS

1. Todo radio hacia el punto de tangencia es perpendicular a la tangente.
2. En una misma circunferencia o en dos circunferencias congruentes, a arcos congruentes corresponden cuerdas congruentes y víceversa.
   Si $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{CD}$, entonces $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.
3. Cuerdas paralelas intersecan arcos congruentes.
   Si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, entonces $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$

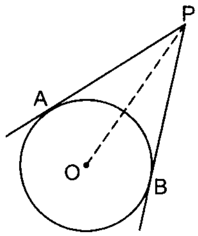


Nota

Si $\overleftrightarrow{m}$ es tangente y $\overleftrightarrow{m} \parallel \overline{AB}$, entonces: $m\overset{\frown}{AT} = m\overset{\frown}{TB}$

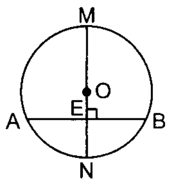


4. Las tangentes trazadas a la misma circunferencia, desde un punto común, son congruentes.



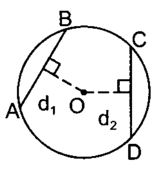
$\overline{PA} \cong \overline{PB}$. Además, $\overline{PO}$ biseca el $\angle P$.

5. Todo diámetro perpendicular a una cuerda biseca a la cuerda y a los arcos respectivos.



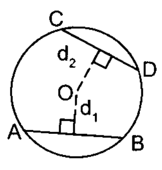
$\overline{MN}$ es diámetro. Si $\overline{MN} \perp \overline{AB}$, entonces $\overline{AE} \cong \overline{EB}$, $m\overset{\frown}{AN} = m\overset{\frown}{NB}$ y $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$

6. Las cuerdas equidistantes del centro son congruentes.



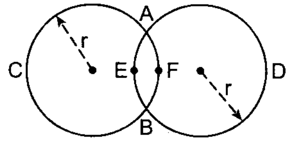
Si O es centro y $d_1 = d_2$, entonces AB = CD.

7. De dos cuerdas con diferente longitud, es mayor la más próxima al centro.



Si O es centro y $d_1 < d_2$, entonces $\overline{AB} > \overline{CD}$.

8. Dos circunferencias congruentes secantes, determinan sobre ellas dos pares de arcos congruentes. Así, para las circunferencias congruentes de la figura:

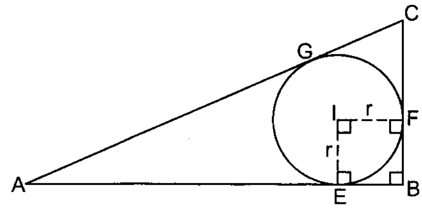


$m\overset{\frown}{AEB} \cong m\overset{\frown}{AFB}$ y $m\overset{\frown}{ACB} \cong m\overset{\frown}{ADB}$

TEOREMAS

Teorema de Poncelet

En todo triángulo rectángulo, la suma de longitudes de los catetos es igual a la suma de longitudes de la hipotenusa y el diámetro de la circunferencia inscrita. Así, para la figura:



$\boxed{AB + BC = AC + 2r}$

(r, se llama inradio del $\triangle ABC$)

Demostración:

Del gráfico:

$$\left.\begin{array}{l} AB = AE + EB \Rightarrow AB = AE + r \\ BC = CF + FB \Rightarrow BC = CF + r \end{array}\right\} (+)$$

$$AB + BC = AE + CF + 2r$$

Efectuando la suma indicada:

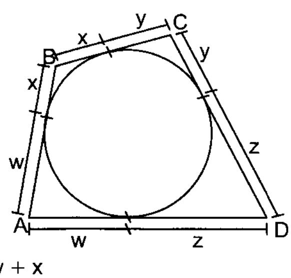
Siendo AE = AG y CF = CG:

$AB + BC = AG + CG + 2r$

$\therefore\ AB + BC = AC + 2r$

Teorema de Pitot

En todo cuadrilátero circunscrito a una circunferencia, la suma de longitudes de lados opuestos tiene un mismo valor. Para el gráfico, luego de colocar variables a las tangentes:



$AB = w + x$

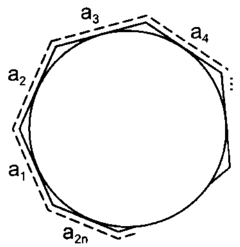
$CD = z + y$

Sumando miembro a miembro.

$AB + CD = \underline{w + z} + \underline{x + y}$

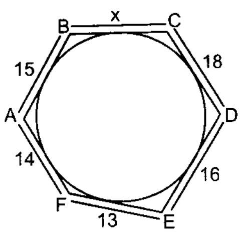
$\therefore\ \boxed{AB + CD = AD + BC}$

Generalización del teorema de Pitot. En todo polígono circunscrito a una circunferencia y cuyo número de lados sea par, la suma de longitudes de los lados que ocupan lugar impar, partiendo de un vértice cualquiera, es igual a la suma de los lados de lugar par.
Consideremos un polígono de 2n lados, como en la figura:



Luego $\boxed{a_1 + a_3 + ... + a_{2n-1} = a_2 + a_4 + ... + a_{2n}}$

Ejemplo:
Para el hexágono circunscrito de la figura, si partimos del vértice A, en sentido horario:

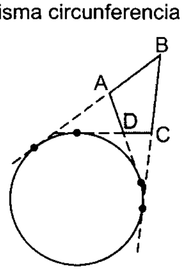


$15 + 18 + 13 = x + 16 + 14 \Rightarrow x = 16$
Si hubiéramos partido de B:
$x + 16 + 14 = 18 + 13 + 15 \Rightarrow x = 16$

Teorema de Steiner

En todo cuadrilátero exinscrito a una circunferencia, la diferencia de longitudes de lados opuestos tiene el mismo valor.

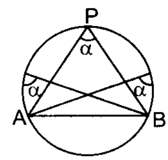
- Un cuadrilátero se llama exinscrito, si las prolongaciones de sus cuatro lados son tangentes a la misma circunferencia. Así, para el gráfico:



$\boxed{AB - CD = BC - AD}$

ARCO CAPAZ

Es un arco de circunferencia que contiene los vértices de los ángulos inscritos cuyos lados pasan por los extremos de una cuerda, llamada cuerda capaz. Así, para la figura:



$\overset{\frown}{APB}$: es el arco capaz de los ángulos de medida α.
$\overline{AB}$: cuerda capaz.

Se cumple: $\boxed{m\overset{\frown}{APB} = 360° - 2\alpha}$

Nota

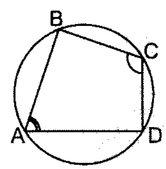
En el caso particular en que AB sea diámetro: $\alpha = 90°$

CUADRILÁTERO INSCRITO

También llamado cuadrilátero cíclico, es aquel que tiene sus cuatro vértices sobre la misma circunferencia.

Propiedades

1. Las medidas de dos ángulos opuestos suman 180°.



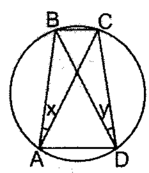
$\boxed{m\angle A + m\angle C = 180°}$

$\boxed{m\angle B + m\angle D = 180°}$

Demostración:

$m\angle A + m\angle C = \frac{m\overset{\frown}{BCD}}{2} + \frac{m\overset{\frown}{BAD}}{2} = \frac{m\overset{\frown}{BCD} + m\overset{\frown}{BAD}}{2} = \frac{360°}{2} = 180°$

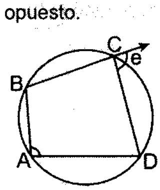
2. Las diagonales forman ángulos congruentes con lados opuestos.



$\boxed{x = y}$

Ya que, cada uno mide la mitad del arco BC.

3. Un ángulo exterior es congruente con el ángulo interior opuesto.



$\boxed{e \cong m\angle A}$

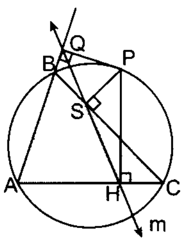
Nota

Cuadrilátero inscriptible es aquel que puede ser inscrito en una circunferencia. Si el cuadrilátero cumple con cualquiera de las propiedades del cuadrilátero inscrito, será inscriptible.

RECTA DE SIMPSON

Si P es un punto cualquiera de la circunferencia circunscrita al ABC y $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$; $\overline{PS} \perp \overline{BC}$; $\overline{PH} \perp \overline{AC}$; entonces, Q, S y H son colineales. $\overleftrightarrow{m}$ es la recta de Simpson del punto P, para el $\triangle ABC$.

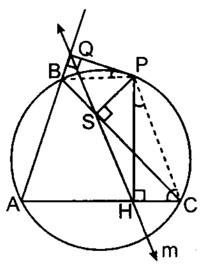
Se define así: Es la recta que une los pies de las perpendiculares trazadas a los lados de un triángulo inscrito en una circunferencia, desde un punto cualquiera de la circunferencia.



Demostración:

Bastará demostrar que $\angle BSQ = \angle HSC$, ya que como B, S y C son colineales, resultarán opuestos por el vértice $\angle BSQ$ y $\angle HSC$ con lo que concluimos que Q, S y H están en línea recta.

Veamos:



⏢ ABPC es inscrito: $m\angle QBP = m\angle PCA$

...(Propiedad del cuadrilátero inscrito)

Entonces, $m\angle QPB = m\angle HPC$ ...(1)
(son complementos de $m\angle QBP$ y $m\angle PCA$, en los triágulos BQP y PHC, respectivamente).

⏢ QBSP es inscriptible, ya que

$m\angle BQP + m\angle BSP = 180°$

$\Rightarrow m\angle QPB = m\angle BSQ$ ...(2)

⏢ PSHC es inscriptible, por ser

$m\angle PSC = m\angle PHC = 90°$

$\Rightarrow m\angle HPC = m\angle HSC$ ...(3)

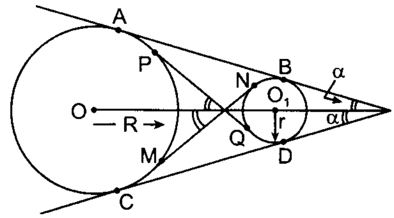
Finalmente, reemplazamos los equivalentes de $m\angle QPB$ y $m\angle HPC$ de (2) y (3), en (1):

$m\angle BSQ = m\angle HSC$

$\therefore$ Q; S; H están en línea recta

POSICIONES RELATIVAS DE DOS CIRCUNFERENCIAS

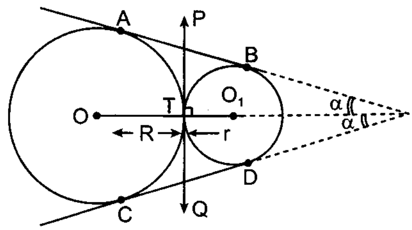
Exteriores



$\boxed{OO_1 > R + r}$

2 tangentes comunes exteriores: AB = CD
2 tangentes comunes interiores: PQ = MN

Tangentes exteriores

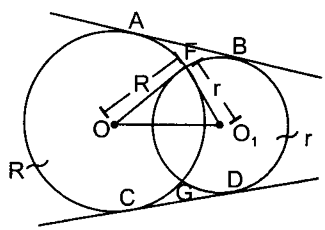


$\boxed{OO_1 = R + r}$

T: punto de tangencia

2 tangentes comunes exteriores: AB = CD
1 tangente común interior: $\overline{PQ} \perp \overline{OO_1}$

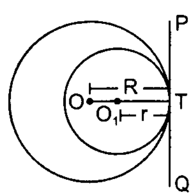
Secantes



$\boxed{R - r < OO_1 < R + r}$

2 tangentes comunes exteriores: AB = CD
Propiedad: $\overline{FG} \perp \overline{OO_1}$

Tangentes interiores

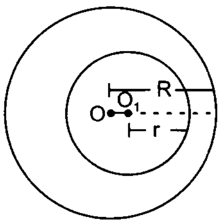


$\boxed{OO_1 = R - r}$

T: punto de tangencia

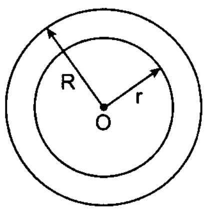
- 1 tangente común: $\overline{PQ} \perp \overline{OO_1}$

Interiores



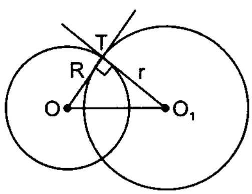
$\boxed{OO_1 < R - r}$

Concéntricas



O es el centro de ambas circunferencias.

Ortogonales



Si $\angle OTO_1 = 90°$
T: punto de tangencia

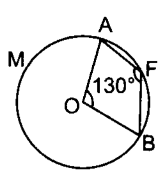
$\boxed{R - r < OO_1 < R + r}$ (Teorema de desigualdad triangular)

$\boxed{(OO_1)^2 = R^2 + r^2}$ (Teorema de Pitágoras)

Ejemplos:

1. $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de una circunferencia de centro O. Sobre el menor arco $\overset{\frown}{AB}$ se toma el punto F. Si el ángulo AFB mide 130°, hallar la medida del ángulo AOB.

   Resolución:



   Sabemos que por ser ángulo central:

   $m\angle AOB = m\overset{\frown}{AFB}$ ...(1)

   También, $m\angle AFB = m\dfrac{\overset{\frown}{AMB}}{2}$ ...($\angle$ inscrito)

   $$130° = \frac{\overset{\frown}{AMB}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{AMB} = 260°$$

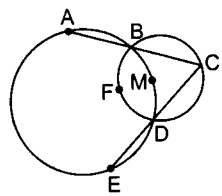
   Luego, $m\overset{\frown}{AFB} = 360° - m\overset{\frown}{AMB} \Rightarrow m\overset{\frown}{AFB} = 100°$.

   Reemplazando en (1): $m\angle AOB = 100°$

2. En la figura:

   $m\overset{\frown}{AE} = 192°$ y $m\overset{\frown}{BFD} = 140°$

   Hallar la medida del $\overset{\frown}{BMD}$.



   Resolución:

   En la menor circunferencia:

   $m\angle C = \dfrac{m\overset{\frown}{BFD}}{2}$ ($\angle$ inscrito)

   $\Rightarrow m\angle C = \dfrac{140°}{2} \Rightarrow m\angle C = 70°$

   En la mayor circunferencia:

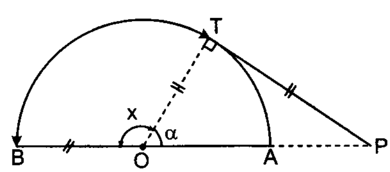
   $m\angle C = \dfrac{m\overset{\frown}{AE} - m\overset{\frown}{BMD}}{2}$ ($\angle$ exterior)

   $\Rightarrow 70° = \dfrac{192° - m\overset{\frown}{BMD}}{2}$ ($\angle$ inscrito)

   De donde: $m\overset{\frown}{BMD} = 52°$

3. Se prolonga el diámetro $\overline{BA}$ de una circunferencia de centro O, hasta el punto P y se traza la tangente $\overline{PT}$. Hallar la medida del arco TB, si $\overline{PT}$ mide igual que el radio.

   Resolución:



   La medida del arco TB es igual a la del ángulo central: x

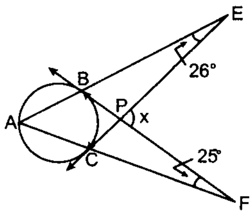
   $\overline{OT} \perp \overline{PT}$, como PT = radio $\Rightarrow$ PT = OT.

   En el $\triangle OTP$, isósceles: $\alpha = 45°$

   $\Rightarrow x = 180° - a \Rightarrow x = 180° - 45° = 135°$

   $\therefore\ \overset{\frown}{TB} = 135°$

4. En la figura: $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$ son tangentes



$m\angle E = 26°$ y $m\angle F = 25°$. Hallar el valor de x.

Resolución:

En el cuadrilátero EAFP: $x = m\angle E + m\angle A + m\angle F$

$x = 26° + m\angle A + 25° \Rightarrow x = 51° + m\angle A$ ...(1)

Por ser ángulo inscrito: $m\angle A = \dfrac{m\overset{\frown}{BC}}{2}$, pero según propiedad de ángulos en la circunferencia:

$m\overset{\frown}{BC} + m\angle BPC = 180°$

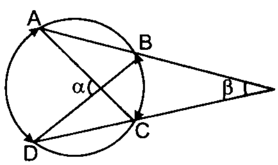
Es decir, $m\overset{\frown}{BC} + x = 180° \Rightarrow m\overset{\frown}{BC} = 180° - x$

Luego: $m\angle A = \dfrac{180° - x}{2}$

Reemplazando esto último en (1):

$x = 51° + \dfrac{180° - x}{2}$ $\quad \therefore\ x = 94°$

5. En la figura, $\alpha + \beta = 136°$, hallar la medida del arco AD.



Resolución:

Se tiene: $\dfrac{m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{BC}}{2} = \alpha$ ($\angle$ interior)

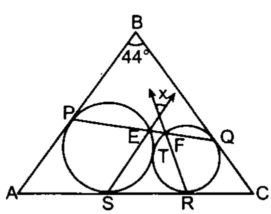
y $\dfrac{m\overset{\frown}{AD} - m\overset{\frown}{BC}}{2} = \beta$ ($\angle$ exterior)

Sumando miembro a miembro:

$$\frac{m\overset{\frown}{AD} + m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{AD} - m\overset{\frown}{BC}}{2} = \alpha + \beta$$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{AD} = \alpha + \beta$ $\quad \therefore\ m\overset{\frown}{AD} = 136°$

6. En la figura, P, Q, R, S y T son puntos de tangencia. Si $m\angle B$ mide 44°, hallar el valor de x.



Resolución:

En el ΔEFX:

$m\angle E + m\angle F + x = 180°$ ...(1)

En las circunferencias:

$m\angle E = \dfrac{m\overset{\frown}{PS}}{2}$ y $m\overset{\frown}{PS} = 180° - m\angle A$

$\Rightarrow m\angle E = \dfrac{180° - m\angle A}{2}$ ...(2)

$m\angle F = \dfrac{m\overset{\frown}{QS}}{2}$ y $m\overset{\frown}{QS} = 180° - m\angle C$

$\Rightarrow m\angle F = \dfrac{180° - m\angle C}{2}$ ...(3)

Sumando (2) y (3), miembro a miembro:

$m\angle E + m\angle F = 180° - \dfrac{m\angle A + m\angle C}{2}$

Reemplazando esto último en (1):

$180° - \dfrac{m\angle A + m\angle C}{2} + x = 180°$

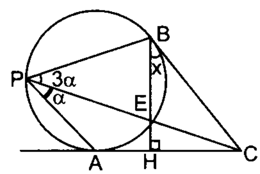
De donde: $x = \dfrac{m\angle A + m\angle C}{2}$

Pero, en el ΔABC:

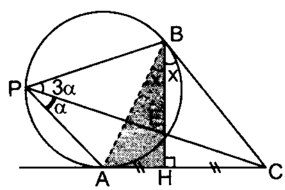
$m\angle A + m\angle C = 180° - m\angle B = 180° - 44° = 136°$.

$\therefore\ x = 68°$

7. En la figura, AH = HC y A es punto de tangencia. Hallar el valor de x.



Resolución:



Como AH = HC y $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, el ΔABC es isósceles.

$\Rightarrow m\angle ABH = x = m\angle HBC$

En la circunferencia:

$m\angle ABE = \dfrac{m\overset{\frown}{AE}}{2} = m\angle APE \Rightarrow x = \alpha$

También: $m\angle BAH = \dfrac{m\overset{\frown}{AEB}}{2} = m\angle APB$

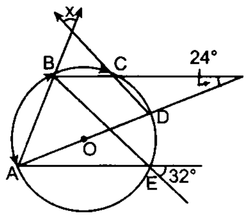
$\Rightarrow m\angle BAH = m\angle APB \Rightarrow m\angle BAH = 4\alpha$

Entonces, en el ΔAHB:

$m\angle BAH + x = 90° \Rightarrow 4\alpha + \alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 18°$

$\therefore\ x = 18°$

8. En la figura, O es el centro de la circunferencia. Hallar el valor de x.



Resolución:

Por ser ángulo exterior a la circunferencia:

$x = \dfrac{m\overset{\frown}{AED} - m\overset{\frown}{BC}}{2}$, donde $m\overset{\frown}{AED} = 180°$

Por ser $\overline{AD}$ diámetro

$\Rightarrow x = \dfrac{180° - m\overset{\frown}{BC}}{2}$ ... (1)

Como $m\angle AEB = 32°$ y $m\overset{\frown}{AB} = 2(m\angle AEB)$

($\angle AEB$ es inscrito) $\Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 64°$

De otro lado: $\dfrac{m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}}{2} = m\angle P \Rightarrow \dfrac{64° - m\overset{\frown}{CD}}{2} = 24°$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{CD} = 16°$

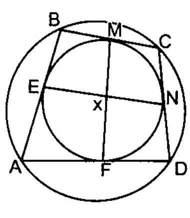
Entonces, $m\overset{\frown}{BC} = m\overset{\frown}{ABCD} - m\overset{\frown}{AB} - m\overset{\frown}{CD}$

$m\overset{\frown}{BC} = 180° - 64° - 16° \Rightarrow m\overset{\frown}{BC} = 100°$

Reemplazando esto último en (1):

$x = \dfrac{180° - 100°}{2}$ $\quad \therefore x = 40°$

9. El cuadrilátero ABCD, de la figura, se llama bicéntrico por ser inscrito y circunscrito. Demostrar que x = 90°.



Resolución:

En la circunferencia menor: $x = \dfrac{m\overset{\frown}{EF} - m\overset{\frown}{MN}}{2}$ ...(1)

Por propiedad vista en teoría: $m\overset{\frown}{EF} = 180° - m\angle A$

$\overset{\frown}{MN} = 180° - m\angle C$

Entonces: $m\overset{\frown}{EF} + m\overset{\frown}{MN} = 360° - (m\angle A + m\angle C)$

Pero, en el $\square ABCD$: $m\angle A + m\angle C = 180°$

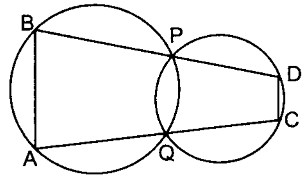
Entonces: $m\overset{\frown}{EF} + m\overset{\frown}{MN} = 360° - 180°$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{EF} + m\overset{\frown}{MN} = 180°$

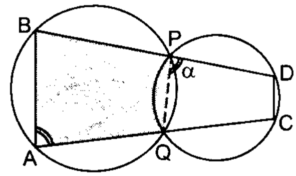
Reemplazando en (1): $x = \dfrac{180°}{2}$

$\therefore x = 90°$

10. Para el gráfico, demostrar que $\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$



Resolución:



Bastará demostrar que $m\angle A + m\angle C = 180°$

Trazamos $\overline{PQ}$. Luego, en los cuadriláteros inscritos:

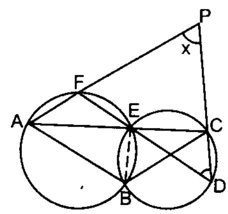
$\square ABPQ$: $\alpha = m\angle A$

$\square PQCD$: $\alpha + m\angle C = 180°$

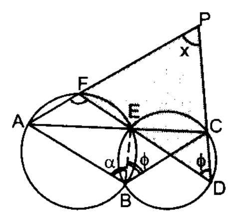
Con lo anterior: $m\angle A + m\angle C = 180°$

$\therefore \overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

11. En la figura, $\angle ABC$ mide 112°, hallar el valor de x.



Resolución:



Se traza $\overline{BE}$, entonces:

$m\angle ABC = \alpha + \phi \Rightarrow \alpha + \phi = 112°$ ...(1)

En la menor circunferencia:

$m\angle EBC = m\angle EDC = \dfrac{m\overset{\frown}{EC}}{2}$

Por ser ángulo exterior al $\triangle FPD$:

$m\angle AFD = m\angle P + m\angle D \Rightarrow m\angle AFD = x + \phi$ ...(2)

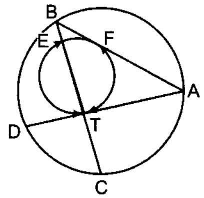
En el cuadrilátero inscrito AFEB:

$m\angle AFE + m\angle ABE = 180°$ o $m\angle AFD + m\angle ABE = 180°$

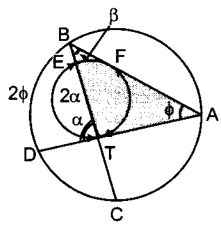
Con (2): $x + \phi + a = 180°$

De (1): $x + 112° = 180°$ $\quad \therefore x = 68°$

12. En la figura, T y F son puntos de tangencia. $\overset{\frown}{ET} - \overset{\frown}{AC} = 84°$. Hallar la medida del arco FT.



Resolución:



Dato: $m\overset{\frown}{ET} - m\overset{\frown}{AC} = 84°$

Si $\angle A = \phi$, entonces: $m\overset{\frown}{FT} = 180° - \phi$ ...(1)

También, $m\overset{\frown}{BD} = 2(m\angle A) = 2\phi$

Además, $m\angle ETD = \dfrac{m\overset{\frown}{ET}}{2}$ ($\angle$ semiinscrito)

Si $m\angle ETD = \alpha \Rightarrow m\overset{\frown}{ET} = 2\alpha$

Por otro lado, $m\overset{\frown}{AC} = 2(m\angle B)$

$\Rightarrow m\angle B = \beta$ y $m\overset{\frown}{AC} = 2\beta$

En $\triangle BTA$: $\beta + \phi = \alpha$ ($\angle$ exterior)

$\Rightarrow \phi = \alpha - \beta$ ...(2)

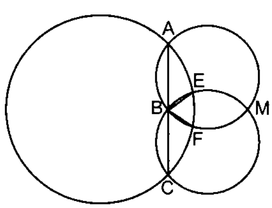
pero, por dato: $m\overset{\frown}{ET} - m\overset{\frown}{AC} = 84°$

$\Rightarrow 2\alpha - 2\beta = 84° \Rightarrow \alpha - \beta = 42°$

En (2): $\phi = 42°$

Reemplazando en (1): $m\overset{\frown}{FT} = 180° - 42° = 138°$

13. En la figura, A, B y C son colineales. Hallar la medida del ángulo EBF, si los arcos AMF y EMC miden 254° y 262°, respectivamente.



Resolución:

Datos: $m\overset{\frown}{AMF} = 254$, $m\overset{\frown}{EMC} = 262$

Del gráfico,

$m\angle ABE + m\angle EBF + m\angle FBC = 180°$ ...(1)

Por ser ángulo exinscrito: $m\angle ABE = \dfrac{m\overset{\frown}{EBC}}{2}$

$\Rightarrow m\angle ABE = \dfrac{360° - m\overset{\frown}{EMC}}{2}$

$\Rightarrow m\angle ABE = \dfrac{360 - 262}{2} \Rightarrow m\angle ABE = 49°$ ...(2)

También, $m\angle FBC = \dfrac{m\overset{\frown}{ABF}}{2} = \dfrac{360° - m\overset{\frown}{AMF}}{2}$

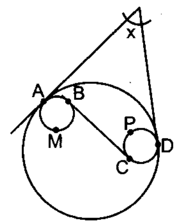
$\Rightarrow m\angle FBC = \dfrac{360° - 254°}{2} = 53°$ ...(3)

Finalmente, reemplazando (2) y (3) en (1):

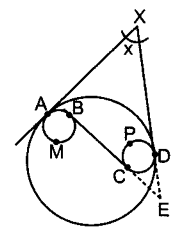
$49° + m\angle EBF + 53° = 180°$

De donde: $\angle EBF = 78°$

14. En la figura, A, B, C y D son puntos de tangencia. $m\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CPD} = 298°$. Hallar el valor de x.



Resolución:



Dato: $m\overset{\frown}{AB} + m\overset{\frown}{CPD} = 298°$

Con las prolongaciones hechas:

$\triangle HEX$: $x = m\angle E = m\angle AHB$ ...(1)

Pero, por propiedad:

$m\angle AHB = 180° - m\overset{\frown}{AB}$ y $m\angle E = 180° - m\overset{\frown}{CD}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$x = 180° - m\overset{\frown}{CD} = 180° - m\overset{\frown}{AB}$

$x = m\overset{\frown}{CD} - m\overset{\frown}{AB}$; además, $m\overset{\frown}{CD} = 360° - m\overset{\frown}{CPD}$

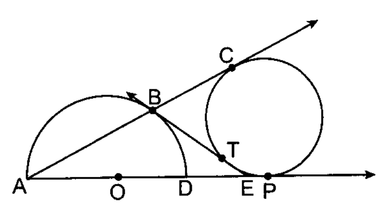
Luego, $x = 360° - m\overset{\frown}{CPD} - m\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow x = 360° - (m\overset{\frown}{CPD} + m\overset{\frown}{AB})$

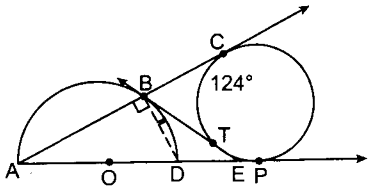
Usando el dato: $x = 360° - 298°$

$\therefore x = 62°$

15. En la figura, $\overline{AD}$ es diámetro; B, C, T y P son puntos de tangencia. Si $\overset{\frown}{CT}$ mide 124°, hallar la medida del $\overset{\frown}{TP}$.



Resolución:



Como $\overline{ET}$ y $\overline{EP}$ son tangentes:

$\widehat{TP} + m\angle TEP = 180°$ ...(1)

Además, $m\angle TBC + m\widehat{CT} = 180°$

$m\angle TBC + 124° = 180° \Rightarrow m\angle TBC = 56°$

Al trazar $\overline{DB}$, como $\overline{AD}$ es diámetro: $m\angle ABD = 90°$

$\Rightarrow m\angle TBD = 90° - m\angle TBC$

$m\angle TBD = 90° - 56° = 34°$

Luego, $m\widehat{BD} = 2(m\angle TBD)$

($m\angle TBD$ es $\angle$semiinscrito en la semicircunferencia)

$\Rightarrow m\widehat{BD} = 2(34°) = 68°$

Entonces, $m\angle A = \dfrac{m\widehat{BD}}{2} = \dfrac{68°}{2} \Rightarrow m\angle A = 34°$

Por ser ángulo exterior al $\triangle ABE$:

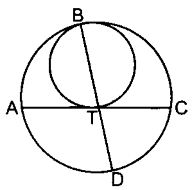
$m\angle TEP = m\angle A + m\angle ABE$

$m\angle TEP = 34° + (90° + 34°) = 158°$

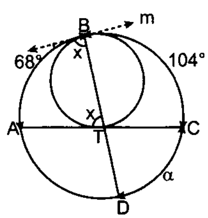
Finalmente, reemplazando en (1):

$m\widehat{TP} + 158° = 180° \Rightarrow m\widehat{TP} = 22°$

16. En la figura, T y B son puntos de tangencia. El arco AB mide 68° y el arco BC mide 104°. Hallar la medida del ángulo ATB.



Resolución:



Datos: $m\widehat{AB} = 68°$, $m\widehat{BC} = 104°$

$m\angle ATB = x$

Por ser $\angle$ interior a la mayor circunferencia:

$\angle T = \dfrac{m\widehat{AB} + m\widehat{CD}}{2}$

$x = \dfrac{68° + \alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2x = 68°$ ...(1)

Por B, trazamos la tangencia $\overleftrightarrow{m}$, común a ambas circunferencias.

$m\angle B = \dfrac{m\widehat{BT}}{2} = m\angle T \Rightarrow m\angle B = m\angle T = x$

Luego: $m\widehat{BAD} = 2(m\angle 2B) \Rightarrow m\widehat{BAD} = 2x$

(en la mayor circunferencia)

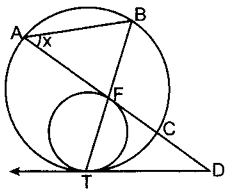
Finalmente, como $m\widehat{BAD} + m\widehat{DC} + m\widehat{CB} = 360°$.

Entonces, $2x + \alpha + 104° = 360°$

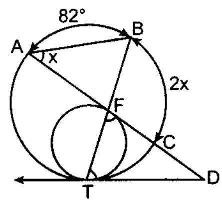
Con lo de (1): $2x + 2x - 68° + 104° = 360°$

$\therefore x = 81°$

17. En la figura, el arco AB mide 82°. T y F son puntos de tangencia. Hallar el valor de x.



Resolución:



Por ser $\overline{DF}$ y $\overline{DT}$, tangentes a la menor circunferencia: $DF = DT$ y $m\angle F = m\angle T$ ...(1)

En la mayor circunferencia: $\widehat{BC} = 2x$

También, $m\angle\widehat{BCT} = 2(m\angle T)$ ($\angle T$ es semiinscrito)

$m\widehat{CT} = m\widehat{BCT} - 2x$ ...(2)

Siendo $m\angle F$ interior: $m\angle F = \dfrac{82° + m\widehat{CT}}{2}$

Con lo de (2): $m\angle F = \dfrac{82° + m\widehat{BCT} - 2x}{2}$

$\Rightarrow 2(m\angle F) = 82° + m\widehat{BCT} - 2x$

$\downarrow$

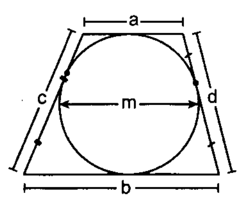
$2(m\angle F) = 82° + 2(m\angle T) - 2x$

Según (1): $m\angle F = m\angle T \Rightarrow 0 = 82° - 2x$

$\therefore x = 41°$

18. Hallar el perímetro de un trapecio circunscrito a una circunferencia. La mediana del trapecio tiene longitud "m".

Resolución:

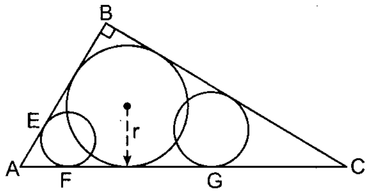


Por fórmula de la mediana: $\frac{a+b}{2} = m$

Según Pitot: $c + d = a + b \Rightarrow c + d = 2m$

Por lo tanto, $a + b + c + d = 4m$

19. En la figura, hallar el valor de r, si BE = FG y BH = 14.



Resolución:

Tangentes: $AF = AE \wedge HC = GC$.

Por el teorema de Poncelet: $AB + BC = AC + 2r$

Luego:

$(AE + EB) + (BH + HC) = (AF + FG + GC) + 2r$

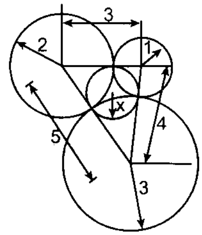
iguales

Cancelando las longitudes iguales a ambos miembros:

$BH = 2r \Rightarrow 14 = 2r \quad \therefore r = 7$

20. Se tiene tres circunferencias de radios 1; 2 y 3 unidades, tangentes exteriores entre sí, dos a dos. Hallar el radio de la circunferencia inscrita al triángulo formado al unir los centros de las primeras circunferencias.

Resolución:



Como los lados del triángulo obtenido tienen longitudes 3, 4 y 5, se trata de un triángulo rectángulo.

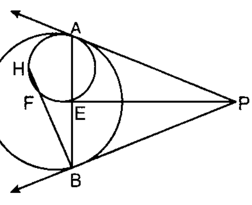
Luego, por el teorema de Poncelet:

$3 + 4 = 5 + 2x$

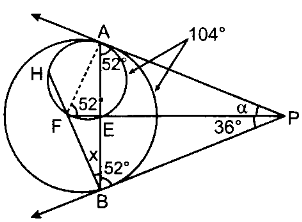
$\therefore x = 1$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En el gráfico adjunto: $m\overset{\frown}{AB} = 104°$ y $m\angle EPB = 36°$ (A y B son puntos de tangencia). Hallar la medida del ángulo FBA.



Resolución:



Como A es punto de tangencia: $m\overset{\frown}{AE} = m\overset{\frown}{AB}$

$\Rightarrow m\angle BAP = m\angle ABP = \frac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = \frac{104°}{2} = 52°$

($\angle$ semiinscrito en la circunferencia mayor).

De otro lado: $m\angle AFE = \frac{m\overset{\frown}{AE}}{2} = \frac{104°}{2} = 52°$

($\angle$ inscrito en la circunferencia menor).

Entonces, $m\angle AFP = m\angle ABP = 52°$

Esto indica que el cuadrilátero AFBP es inscriptible.

Por lo tanto, $m\angle FPA = m\angle FBA \Rightarrow \alpha = x$

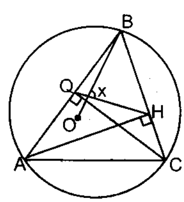
Pero, en el $\triangle APB$: $m\angle APB = 180° - 2(52°)$

$\Rightarrow m\angle APB = 76°$

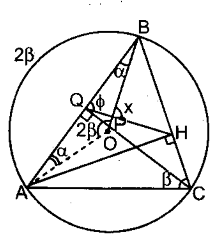
$\Rightarrow \alpha = m\angle APB - 36° \Rightarrow \alpha = 76° - 36°$

$\Rightarrow \alpha = 40° \quad \therefore x = 40°$

2. En la figura, O es el centro de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$. Hallar el valor de x.

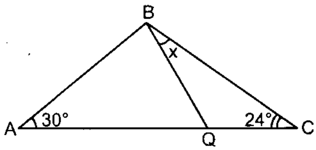


Resolución:

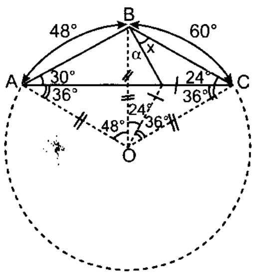


En el $\triangle QBP$: $x = \alpha + \phi$ ...(1)
El cuadrilátero AQHC es inscriptible,
ya que $m\angle AQC = m\angle AHC$
Entonces, $\phi = m\angle ACB \Rightarrow \phi = \beta$
$\triangle AOB$ es isósceles: $OA = OB$ = radio.
$\Rightarrow m\angle OAB = m\angle ABC = \alpha$ y $m\angle AOB = m\overset{\frown}{AB} = 2\beta$
Así, $\alpha + \alpha + 2\beta = 180°$
$\Rightarrow \alpha + \beta = 90° \vee \alpha + \phi = 90°$
Reemplazando en (1): $x = 90°$
Este problema demuestra el teorema de Nagel.

3. En la figura mostrada, AQ = BC, hallar el valor de x.



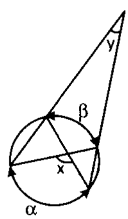
Resolución:



Se dibuja la circunferencia de centro O, circunscrita al $\triangle ABC$; entonces:
$OA = OB = OC$ = radio
$m\overset{\frown}{AB} = 2(m\angle ACB) \Rightarrow \overset{\frown}{AB} = 48°$
$m\overset{\frown}{BC} = 2(m\angle BAC) \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 60°$
$\triangle BOC$ es equilátero: BC = radio
$m\angle AOB = \overset{\frown}{AB} \Rightarrow m\angle AOB = 48°$ ($\angle$ central)
$\triangle AOC$ es isósceles:
$m\angle AOC = m\overset{\frown}{ABC} = 108° \wedge m\angle OAC = m\angle ACO = 36°$
$\triangle AOQ$ es isósceles:
$m\angle AOQ = m\angle AQO = 72° \Rightarrow m\angle BOQ = 24°$
$\Rightarrow m\angle QOC = m\angle BOC = m\angle BOQ = 60° - 24° = 36°$
$\triangle OQC$ es isósceles: $OQ = QC$
Finalmente, $\triangle BOQ \cong \triangle BCQ$ (L. L. L) $\Rightarrow \alpha = x$
siendo: $\alpha + x = 60°$ $\therefore \alpha = x = 30°$

4. Del gráfico, se cumple:

I. $x + y = 2\beta$
II. $2\beta + y = x$
III. $x + y = 2\alpha$
IV. $x + y = \alpha$
V. $\alpha + y = 2x$



Resolución:

Por ángulo interior: $x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ ...(1)

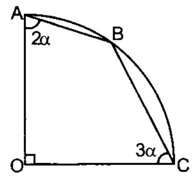
Por ángulo exterior: $y = \dfrac{\alpha - \beta}{2}$ ...(2)

Sumando miembro a miembro (1) y (2):
$x + y = \dfrac{\alpha + \beta}{2} + \dfrac{\alpha - \beta}{2}$
De donde: $x + y = \alpha$ (propiedad)
$\therefore$ Cumple IV

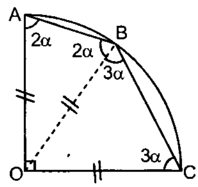
Nota

Además, si restamos miembro a miembro (1) y (2), se obtiene: $x - y + \beta$.

5. En la figura, O es centro del cuarto de circunferencia ABC. Calcular el valor de α.

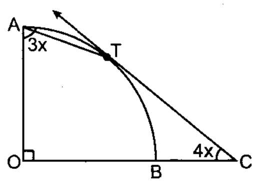


Resolución:

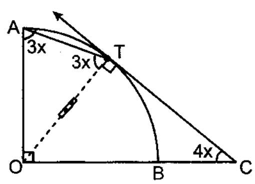


Al trazar $\overline{OB}$, los triángulos AOB y BOC resultan isósceles.
$\square$ABCD
$90° + 2\alpha + (2\alpha + 3\alpha) + 3\alpha = 360°$
$\therefore \alpha = 27°$

6. O es centro del $\overset{\frown}{ATB}$ y T punto de tangencia, calcular el valor de x.

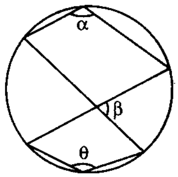


Resolución:

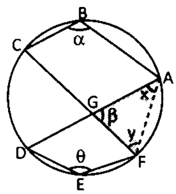


$\triangle AOT$ es isósceles.
En el ⏢ATCO:
$3x + (3x + 90°) + 4x + 90° = 360°$
$\therefore\ x = 18°$

7. Del gráfico, indicar lo correcto:
I. $\alpha + \theta = 2\beta$
II. $\alpha + \theta = 180° + \beta$
III. $\alpha + \theta = 3\beta$
IV. $\alpha + \theta + \beta = 270°$
V. $\alpha + \theta + \beta = 360°$

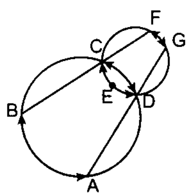


Resolución:

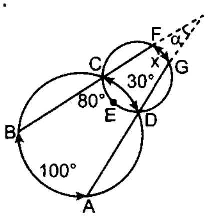


$\triangle FAG$: $x + y + \beta = 180°$ ...(1)
⏢AFED: $x + \theta = 180°$ ...(2)
⏢ABCF: $y + \alpha = 180°$ ...(3)
Sumando miembro a miembro (2) y (3):
$x + y + \alpha + \theta = 360°$
$x + y = 360° - (\alpha + \theta)$ ...(4)
Finalmente, (4) en (1):
$360° - (\alpha + \theta) + \beta = 180°$
De donde, $180° + \beta = \alpha + \theta$
$\therefore$ Lo correcto es II

8. En la figura, $m\overset{\frown}{AB} = 100$; $m\overset{\frown}{CD} = 30$ y $m\overset{\frown}{CED} = 80$.
Calcular $m\overset{\frown}{FG}$.



Resolución:

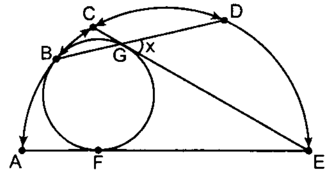


Por ángulo exterior: $\alpha = \dfrac{100° - 30°}{2} = 35°$ ...(1)

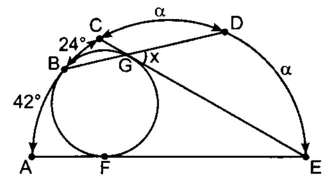
También: $\alpha = \dfrac{80 - x}{2}$ ...(2)

(1) en (2): $35° = \dfrac{80 - x}{2} \Rightarrow x = 10°$

9. En la figura, $\overline{AE}$ es diámetro; F, B y G son puntos de tangencia $m\overset{\frown}{AB} = 42°$ y $m\overset{\frown}{BC} = 24°$. Calcular el valor de x.

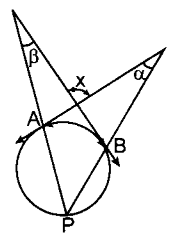


Resolución:



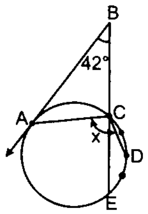
Por propiedad vista en el problema anterior:
$m\overset{\frown}{CD} = m\overset{\frown}{DE} = \alpha$
Ángulo interior:
$x = \dfrac{m\overset{\frown}{BC} + m\overset{\frown}{DE}}{2} \Rightarrow x = \dfrac{24° + \alpha}{2}$ ...(1)
Como $\overline{AE}$ es diámetro $42° + 24° + \alpha + \alpha = 180°$
$\Rightarrow \alpha = 57°$
En (1): $x = \dfrac{24° + 57°}{2}$ $\therefore\ x = 40,5°$

10. En la figura, A y B son puntos de tangencia.
$\alpha + \beta = 40°$. Calcular el valor de x.

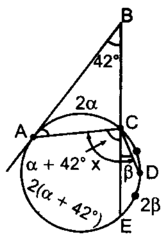


Resolución:
En el $\measuredangle$: $x = \alpha + \beta + m\angle P$ ...(1)
Por propiedad: $m\overset{\frown}{AB} = 180° - x$ y $m\angle P = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$
$\Rightarrow m\angle P = \dfrac{180° - x}{2}$ ...(2)
(2) en (1): $x = \alpha + \beta + \dfrac{180 - x}{2}$
Con el dato: $x = 40° + \dfrac{180 - x}{2}$
$x = \dfrac{260}{3}$ $\therefore\ x = 86°40'$

11. En la figura, A es punto de tangencia, calcular el valor de x.



Resolución:



Sea m∠BAC = α ⇒ m$\overset{\frown}{AC}$ = 2α

△ABC, ∠ exterior.

m∠ACE = m∠A + m∠B

m∠ACE = α + 42°

⇒ m$\overset{\frown}{AE}$ = 2(m∠ACE)

⇒ m$\overset{\frown}{AE}$ = 2(α + 42°)

Además, si m∠ECD = β,

será: m$\overset{\frown}{DE}$ = 2β y m$\overset{\frown}{CD}$ = 2β

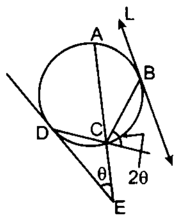
Para la ⊙: 2α + 2β + 2β + 2(α + 42°) = 360°

⇒ α + β = 69°

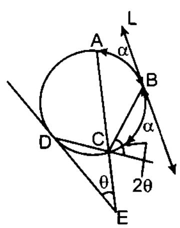
Finalmente: x = α + 42° + β

x = α + β + 42° = 69° + 42° ∴ x = 111°

12. En la figura, B y D son puntos de tangencia; $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AC}$. Calcular el valor de θ.



Resolución:



Como $\overleftrightarrow{L} \parallel \overline{AC}$, por propiedad:

m$\overset{\frown}{AB}$ = m$\overset{\frown}{BC}$ = α

Por ángulo exinscrito: $\dfrac{m\overset{\frown}{BCD}}{2} = 2\theta$

⇒ m$\overset{\frown}{BCD}$ = 4θ

Luego, m$\overset{\frown}{CD}$ = m$\overset{\frown}{BCD}$ = −α

m$\overset{\frown}{CD}$ = 4θ − α ...(1)

Además, m$\overset{\frown}{AD}$ = 360° − (m$\overset{\frown}{AB}$ + m$\overset{\frown}{BCD}$)

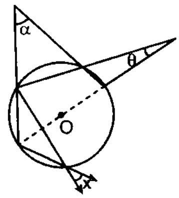
m$\overset{\frown}{AD}$ = 360° − (α + 4θ) ...(2)

Por ángulo exterior: m∠E = $\dfrac{m\overset{\frown}{AD} - m\overset{\frown}{CD}}{2}$

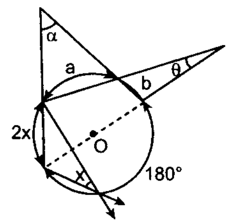
Con lo de (1) y (2): $\theta = \dfrac{360° - (\alpha - 4\theta) - (4\theta - \alpha)}{2}$

De donde: ∴ θ = 36°

13. En la figura, O es centro de la circunferencia y α + θ = 50°, calcular el valor de x.



Resolución:



Se observa: 2x + a + b = 180° ...(1)

Ángulo exterior: $\alpha = \dfrac{180° - a}{2}$

⇒ a = 180° − 2α ...(2)

También: $\theta = \dfrac{2x - b}{2}$

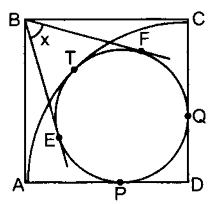
⇒ b = 2x − 2θ ...(3)

(2) y (3) en (1): 2x + (180° − 2α) + (2x − 2θ) = 180°

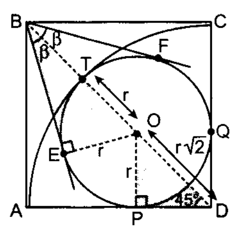
De donde: $x = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$

Con el dato: $x = \dfrac{50°}{2}$ ⇒ x = 25°

14. En la figura, ABCD es un cuadrado; D es centro del arco AC; E, T, F, P y Q son puntos de tangencia. Calcular el valor de x.



Resolución:



Llamando O al centro de la circunferencia, se deduce que B, T, O y D son colineales.

$DT = DO + OT \Rightarrow DT = r\sqrt{2} + r$

Luego, $AD = DT \Rightarrow AD = r\sqrt{2} + r$, es la longitud del lado del cuadrado.

Entonces, la diagonal:

$BD = (AD)\sqrt{2} \Rightarrow BD = (r\sqrt{2} + r)\sqrt{2} \Rightarrow BD = 2r + r\sqrt{2}$

Por lo tanto, $BO = BD - OD$

$BO = (2r + r\sqrt{2}) - r\sqrt{2}$

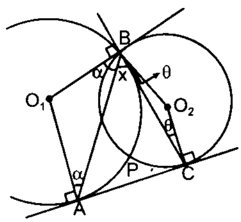
Es decir, $BO = 2(OE) \Rightarrow$ en el ⊾OEB: $\beta = 30°$

De donde: $x = 2(30°)$

$\therefore x = 60°$

15. Dadas dos circunferencias ortogonales de centros O_1 y O_2 que se intersecan en B y P, se trazan las tangentes común. AC más distante de B que de P. Hallar la $m\angle ABC$.

Resolución:



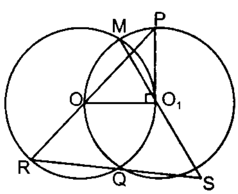
Cuando las circunferencias son ortogonales, se cumple:

$\alpha + x + \theta = 90°$ ...(1)

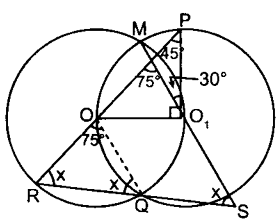
Como $\overline{O_1A} \parallel \overline{O_2C} \Rightarrow x = \alpha + \theta$ ...(2)

(2) en (1): $x + x = 90° \Rightarrow x = 45°$

16. En la figura mostrada, las circunferencias son congruentes, O y O_1 son los centros, $m\angle OO_1P = 90°$. Hallar la $m\angle RSM$.



Resolución:



$\overline{OQ} \parallel \overline{MS} \Rightarrow m\angle S = m\angle OQR = x$

ΔROQ es isósceles: $OR = OQ$

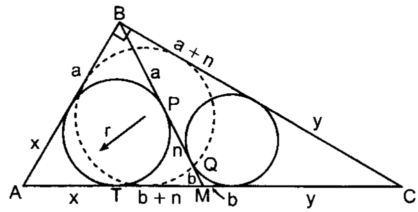
$\Rightarrow m\angle R = m\angle OQR = x$

Luego: $2x = 105°$ $\therefore x = 52,5°$

17. En un triángulo ABC recto B, se traza la ceviana $\overline{BM}$ ($M \in \overline{AC}$). La circunferencia inscrita al triángulo ABM es tangente al lado $\overline{BM}$ en el punto P y la circunferencia inscrita al triángulo BMC es tangente al segmento PM en el punto Q. Si $BP - QM = L$. Hallar la longitud del radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC:

Resolución:

Dato: $a - b = L$

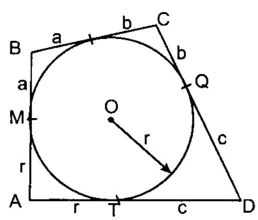


Por el teorema de Poncelet:

$$a + x + a + n + y = x + b + n + y + 2r + b$$
$$2a = 2b + 2r$$
$$\therefore r = a - b \Rightarrow r = L$$

18. La circunferencia inscrita en un cuadrilátero ABCD es tangente al lado $\overline{AB}$ en M. Si $m\angle BAD = 90°$, $BM + CD = 16$ y $BC + AD = 24$, hallar la longitud del radio de la circunferencia.

Resolución:



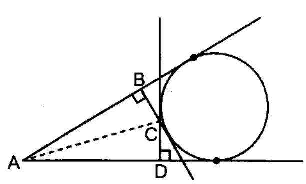
Por dato:

$BC + AD = 24 \Rightarrow AB + CD = 24$ ...(1)

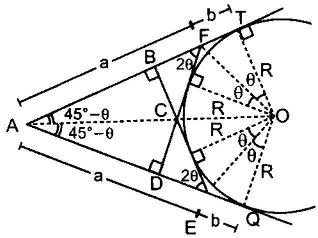
$BM + CD = 16 \Rightarrow AB - r + CD = 16$ ...(2)

(1) – (2): $r = 24 - 16 \Rightarrow r = 8$

19. Con respecto a los inradios de los triángulos ABC y ADC, r_1 y r_2, respectivamente, se puede afirmar que:



Resolución:



$\overrightarrow{AO}$ es bisectriz del ángulo TAQ.

$\Rightarrow m\angle TAO = m\angle OAQ$

⊾FTO ≅ ⊾EQO (A. L. A)

$\Rightarrow FT = EQ = b$

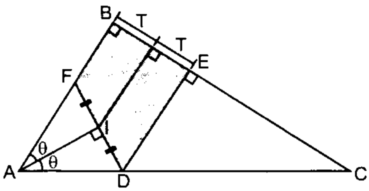
Pero: $AT = AQ \Rightarrow AF + b = AE + b \Rightarrow AF = AE$

⊾ABE ≅ ⊾ADF (A. L. A) $\Rightarrow AB = AD$

⊾ABC ≅ ⊾ADC (A. L. A) $\Rightarrow T_1 = T_2$

20. En un triángulo rectángulo ABC recto en B. I es el incentro, tal que $m\angle AID = 90°$ ($D \in \overline{AC}$) $\overline{DE} \perp \overline{BC}$. Si $AB + BC = 34$, $AC = 26$. Calcular $\overline{BE}$.

Resolución:



Por el teorema de Poncelet:

$AB + BC = AC + 2r$ ...(1)

Por dato: $AB + BC = 34$ y $AC = 26$ ...(2)

(2) en (1): $34 = 26 + 2r \Rightarrow 2r = 8 \Rightarrow r = 4$

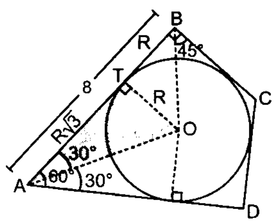
En la figura: $BT = TI = r = 4$

Pero: $FI = ID \Rightarrow BT = TE = r$

$\therefore BE = 4 + 4 = 8$

21. En un cuadrilátero ABCD, circunscrito a una circunferencia. Si $m\angle A = 60°$, $AD + BC = 14$, $CD = 6$. Calcular la medida del radio de la circunferencia ($m\angle B = 90°$).

Resolución:



Dato: $AD + BC = 14$ y $CD = 6$

Por el teorema de Pitot: $AB = 8$

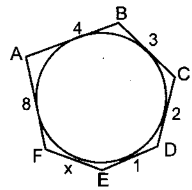
⊾ATO notable: $AT = R\sqrt{3}$; ⊾OTB notable: $TB = R$.

Luego: $R\sqrt{3} + R = 8$

$\therefore R = 4(\sqrt{3} - 1)$

22. Un hexágono ABCDEF circunscrito a una circunferencia, tal que $AB = 4$; $BC = 3$; $CD = 2$; $DE = 1$; $AF = 8$. Hallar: EF.

Resolución:



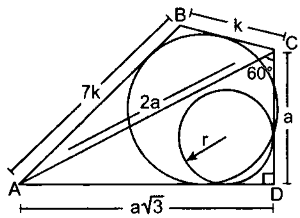
Por propiedad: $x + 4 + 2 = 8 + 3 + 1$

$x + 6 = 12 \Rightarrow x = 6$

$\therefore EF = 6$

23. En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia, si $AB = 7k$, $BC = k$, $m\angle ADC = 90°$, $m\angle ACD = 60°$. Calcular la medida el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ADC.

Resolución:



Por el teorema de Poncelet:

⊾ACD: $a + a\sqrt{3} = 2a + y$

$\Rightarrow 2r = a(\sqrt{3} - 1)$ ...(1)

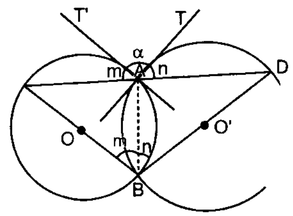
En el cuadrilátero circunscriptible, por el teorema de Pitot:

$7k + a = k + a\sqrt{3} \Rightarrow 6k = a(\sqrt{3} - 1)$ ...(2)

De (1) y (2): $2r = 6k \Rightarrow r = 3k$

24. Dos circunferencias O y O' se intersecan en A y B. Por A se traza una secante CAD y luego, las tangentes $\overline{AT}$ y $\overline{AT'}$, respectivamente, a las circunferencias O y O'. Calcular el valor del ángulo CBD sabiendo que el ángulo formado por las tangentes mide α.

Resolución:



Si $m\angle ABC = m \Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = 2m$

Luego, $m\angle CAT' = m$

Si $m\angle ABD = n \Rightarrow m\overset{\frown}{AD} = 2n$

Luego, $m\angle TAD = n$

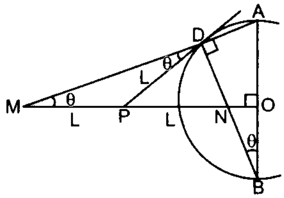
Se cumple: $m + \alpha + n = 180°$

$$\underbrace{m + n}_{} = 180° - \alpha$$

$$m\angle CBD = 180° - \alpha$$

25. Por un punto exterior P se traza una tangente $\overline{PD}$ a una circunferencia de centro O. El punto D se une a los extremos de un diámetro AB. Las rectas DA y DB intersecan a PO en M y N, respectivamente. Calcular MN sabiendo que PD = L y $\overline{PO}$ es perpendicular a AB.

Resolución:

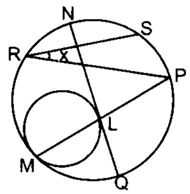


Si $m\angle DBO = \theta \Rightarrow m\angle M = \theta$ y $m\angle MDP = \theta$

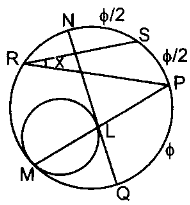
⊾MDN: $\overline{DP}$ es mediana

Luego, $MN = L + L \Rightarrow MN = 2L$

26. Las 2 circunferencias son tangentes interiormente, NQ es tangente a la circunferencia menor. Si $m\overset{\frown}{PQ} = \phi$, $\overset{\frown}{NS} \cong \overset{\frown}{SP}$. Hallar la $m\angle SRP$.



Resolución:

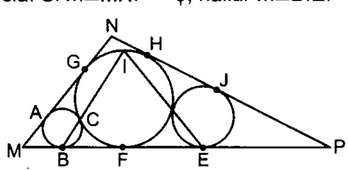


Por propiedad: $m\overset{\frown}{NP} = m\overset{\frown}{PQ} = \phi$

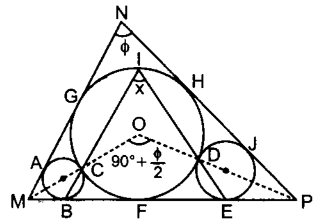
Pero por dato: $m\overset{\frown}{NS} = m\overset{\frown}{SP} = \dfrac{\phi}{2}$

Luego, $x = \dfrac{\phi}{4}$

27. En la figura A, B, F, E, J, H, G, C y D son puntos de tangencia. Si $m\angle MNP = \phi$, hallar $m\angle BIE$.



Resolución:

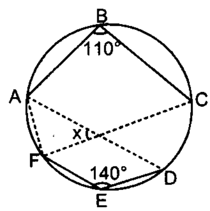


Por propiedad: $m\angle MOP = 90° + \dfrac{\phi}{2}$

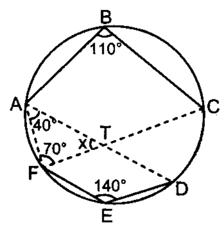
Pero: $m\overset{\frown}{CFD} = 2x \Rightarrow 90° + \dfrac{\phi}{2} = 2x$

$\therefore\ x = 45° + \dfrac{\phi}{4}$

28. De la figura, hallar x.



Resolución:



⏢ ABCF inscrito:

$m\angle AFC + 110° = 180° \Rightarrow m\angle AFC = 70°$

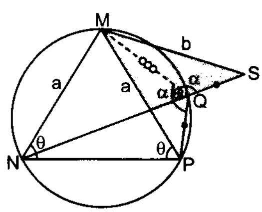
⏢ EFAD inscrito:

$m\angle FAD + 140° = 180° \Rightarrow m\angle FAD = 40°$

$\triangle FAT$: $70° + 40° + x = 180° \quad \therefore\ x = 70°$

29. En una circunferencia se inscribe un triángulo isósceles MNP ($MN = MP = \ell$) se toma un punto cualquiera, Q en el arco MP se prolonga $\overline{NQ}$ hasta S. Si QS = QP, calcular $\dfrac{MN}{MS}$.

Resolución:



$\triangle NMP$ isósceles: $MN = MP = a$

$m\angle MNP = m\angle MPN = \theta$

$\Rightarrow m\angle MQN = \theta$ y $m\angle MQS = \alpha$

$\alpha + \theta = 180°$

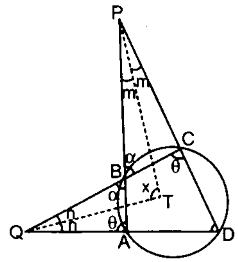
$\square$ NMQP inscrito: $\theta + \alpha = 180°$

Luego, $\Delta MQP \cong \Delta MQS$ (L. A. L)

$\Rightarrow MP = MS = a = b \quad \therefore \frac{a}{b} = 1$

30. Sea el cuadrilátero inscrito ABCD en una circunferencia de centro O, $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \{P\}$ y $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AD} = \{Q\}$. Las bisectrices de los ángulos APD y BQA se intersecan en T. Hallar la $m\angle PTQ$.

Resolución:



Por propiedad: $x = m + n + \alpha$ ...(1)

ΔAQB: $\alpha + \theta + 2n = 180°$

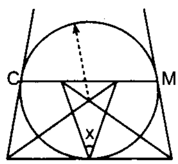
ΔBPC: $\alpha + 2m = \theta$

Sumando: $2(m + n + \alpha) = 180°$

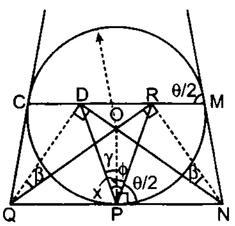
$m + n + \alpha = 90°$ ...(2)

De (1) y (2): $x = 90°$

31. Del gráfico, calcular x, si $m\overset{\frown}{CM} = \theta$



Resolución:



Se traza $\overline{QD}$; $\overline{NR}$ y $\overline{OP}$ respectivamente.

Entonces: $m\angle QDN = m\angle QRN = 90°$

$m\angle OPN = 90°$

$\square$QDRN $\rightarrow$ inscriptible: $m\angle DQR = m\angle DNR = \beta$

$\square$QDOP y $\square$ORNP $\rightarrow$ inscriptibles

Entonces: $\beta = \gamma \wedge \phi = \beta$

$\beta = \gamma = \phi$

Por lo tanto: $x = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{x}{2}$

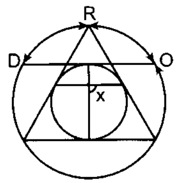
$m\angle RPN = \frac{\theta}{2}$

(Por propiedad $\square$PRMN $\rightarrow$ inscriptible)

Luego: $\phi + \frac{\theta}{2} = 90° \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{\theta}{2} = 90°$

$x = 180° - \theta$

32. Del gráfico, calcular x, si: $m\overset{\frown}{DR} = m\overset{\frown}{RO}$



Resolución:

Dato: $m\overset{\frown}{DR} = m\overset{\frown}{RO} = 2\theta$, sea: $m\overset{\frown}{ON} = 2\beta$

$m\angle RIN = \theta + \beta$

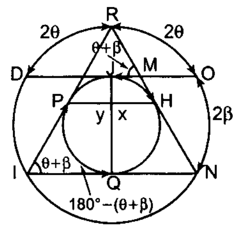
$m\overset{\frown}{PQ} = 180° - (\theta + \beta)$

$m\angle DMR = \theta + \beta$

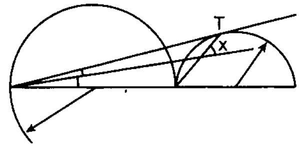
Luego: $m\overset{\frown}{JH} = \theta + \beta$

$\Rightarrow y = \dfrac{180° - (\theta + \beta) + \theta + \beta}{2}$

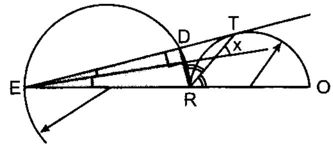
$y = 90° \quad \therefore x = 90°$



33. En la figura mostrada, calcular x
(T $\rightarrow$ punto de tangencia)



Resolución:



$m\angle DRT = m\angle TRO$ (propiedad $\odot$)

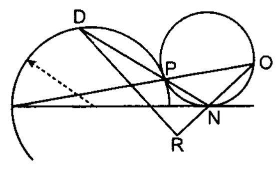
$m\angle EDR = 90°$ (arco capaz)

En el ΔEDR:

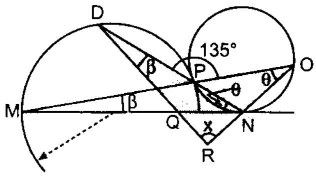
x : $\angle$formado por una bisectriz interior y exterior

Entonces: $x = \frac{90°}{2} = 45°$

34. Calcular $m\angle DRO$, si P y N son puntos de tangencia.



Resolución:



Por ángulo inscrito: m∠QMP = m∠QDP = b

Por propiedad: m∠QNP = m∠PON = θ

En el ΔMPN: m∠MPN = 135° (propiedad ⊙)

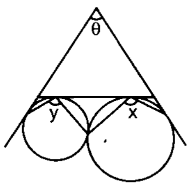
Entonces: β + θ = 45°,

Además se tiene: m∠DPO = 135° (Ángulo opuesto por el vértice)

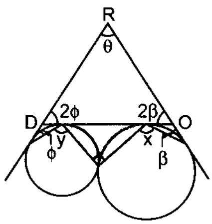
En el ΔDROP cóncavo

$x + \beta + \theta = 135° \Rightarrow x = 90°$

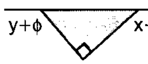
35. Del gráfico, calcular "x + y" en función de θ.



Resolución:



Aislando el triángulo sombreado:



$x + y + \phi + \beta = 180° + 90°$ (propiedad Δ)

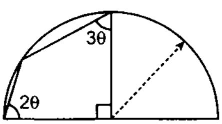
$\phi + \beta = 270° - (x + y)$

ΔDRO: $\theta + 2(\phi + \beta) = 180°$

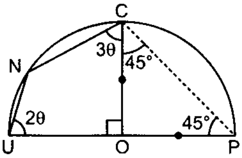
$\theta + 2[270° - (x + y)] = 180°$

$x + y = 180° + \frac{\theta}{2}$

36. Del gráfico, calcular θ.



Resolución:



⊾COP: rectángulo e isósceles

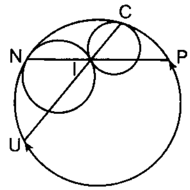
Entonces: m∠P = m∠C = 45°

⏢UNCP: inscrito

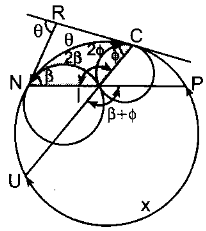
Entonces: $2\theta + (3\theta + 45°) = 180°$

$\theta = 27°$

37. Calcular $m\widehat{UP}$, si: C, I, N son puntos de tangencia.



Resolución:



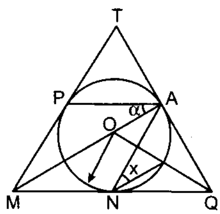
En el ⏢NRCI: $180° - \theta + 2\beta + 2\phi = 360°$

$2\beta + 2\phi - \theta = 180°$

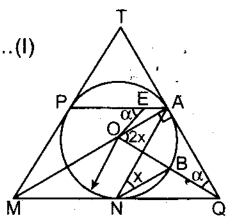
∠interior: $\beta + \phi = \frac{x + \theta}{2} \Rightarrow 2\beta + 2\phi - \theta = x$

Luego: x = 180°

38. Si P, A y N son puntos de tangencia, hallar x.



Resolución:



Propiedad n.° 5

m∠PEO = m∠OQA = α ...(I)

$m\widehat{AB} = 2x$ (∠ inscrito)

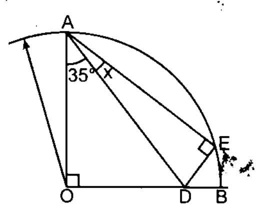
⇒ $m∠BOA = m\widehat{AB} = 2x$

(Ángulo central)

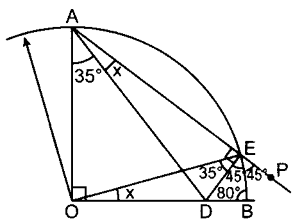
⊾OQA: $2x + \alpha = 90°$

$\therefore x = 45° - \frac{\alpha}{2}$

39. Del gráfico, calcular x



Resolución:



$m\angle PEB = \dfrac{m\widehat{AB}}{2} = \dfrac{90°}{2} = 45°$ (ángulo ex–inscrito)

Luego: $m\angle DEB = 45°$

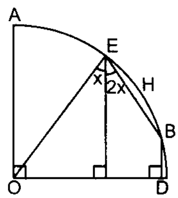
⏢AODE inscriptible: $m\angle DOE = m\angle DAE = x$ y $m\angle DEO = m\angle DAO = 35°$

$\triangle BOE$ isósceles:

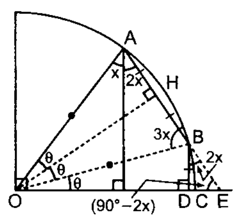
$m\angle OBE = m\angle BEO = 35° + 45° = 80°$

$\Rightarrow x + 2(80°) = 180° \quad \therefore x = 20°$

40. En la figura AB = 2BD. Halle x



Resolución:



Por teorema de la bisectriz de un ángulo:

$AH = HB = BD$

Como el $\triangle OAB$ es isósceles, tenemos:

$m\angle OAB = m\angle OBA = 3x$

En el $\triangle OBE$, por teorema del ángulo exterior:

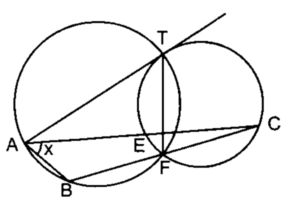
$3x = \theta + 90° - 2x$ ...(1)

Pero: $\theta = 90° - 3x$ ...(2)

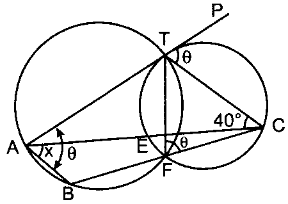
(2) en (1): $3x = 90° - 3x + 90° - 2x$

$\Rightarrow 2x = 45° \quad \therefore x = 22{,}5°$

41. En la figura, T es punto de tangencia y $m\widehat{TE} = 80°$. Calcular x.



Resolución:



Ángulo inscrito: $m\angle TCE = \dfrac{m\widehat{TE}}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$

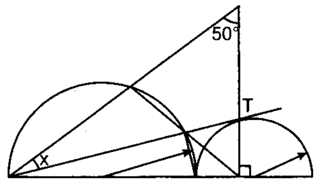
⏢ABFT inscrito: $m\angle TAB = m\angle TFC = \theta$

Prop. en circunferencias: $m\angle TFC = m\angle PTC = \theta$

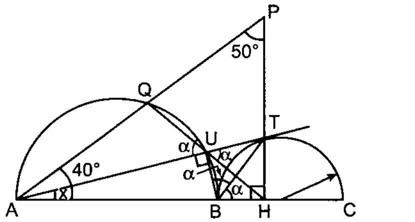
Luego: $m\angle TAB = m\angle PTC = \theta \Rightarrow \overline{AB} \parallel \overline{TC}$

$\therefore x = m\angle TCE = 40°$

42. Si T es punto de tangencia, calcular x.



Resolución:



En la figura: $m\angle PAB = 40°$ y $m\angle AUB = 90°$

Propiedad: $m\angle TBU = m\angle TBC = \alpha$

⏢TUBH inscriptible: $m\angle QUA = m\angle TBC = \alpha$

⏢AQUB inscrito: $40° + (90° + \alpha) = 180° \Rightarrow \alpha = 50°$

◺AUB: $x + 90° = 2\alpha = 100°$ (ángulo externo)

$\therefore x = 10°$

43. Las circunferencias de centros O y O_1 son tangentes interiores en C (O_1 de radio menor) y las cuerdas $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ ($B \in \widehat{AC}$) de la circunferencia O se interceptan en el punto E de O_1 (siendo E al punto de tangencia de $\overline{BD}$ con la circunferencia O_1).
Si $m\widehat{AB} = 52°$ y $m\widehat{BC} = 70°$, calcule $m\angle ACD$.

Resolución:

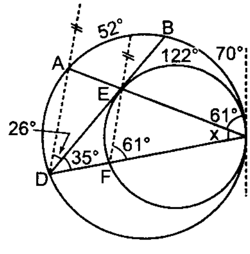
En la figura observamos que:

AD // EF

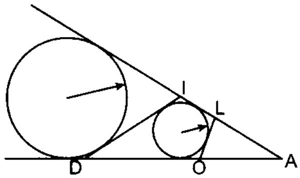
$\triangle DEF$:

$x + 35° = 61°$

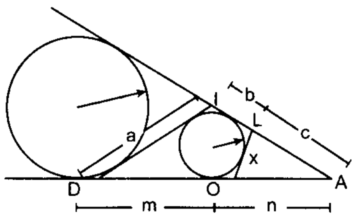
$\therefore x = 26°$



44. Si el valor de la razón aritmética entre los perímetros de los triángulos DIA y OLA es 12 y además el perímetro del cuadrilátero DILO es 18. Calcular $\overline{LO}$.



Resolución:



Dato 1: $a + b + x + m = 18$ ...(I)

En el $\triangle$DILO. Por Pitot: $a + x = b + m$

Luego en (I):

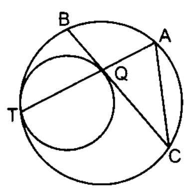
$a + x = b + m = 9 \Rightarrow a = 9 - x$ ...(II)

Dato 2: $(a + b + c + m + n) - (x + c + n) = 12$

$a + b + m - x = 12$ ...(III)

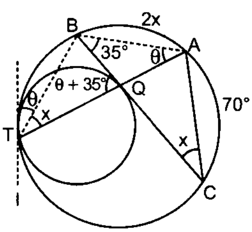
(II) en (III): $9 - x + 9 - x = 12$ $\therefore$ $x = 3$

45. En la figura mostrada los puntos T y Q son puntos de tangencia. Si $m\widehat{AC} = 70°$, entonces la $m\angle ACB$ es:



Resolución:

Se traza l tangente en T a la circunferencia.

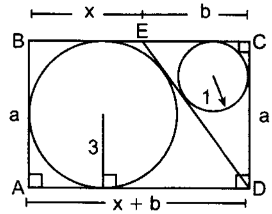


Luego, por teoría: $\theta + x = \theta + 35°$

$\therefore$ $x = 35°$

46. En el rectángulo ABCD, $E \in \overline{BC}$, tal que ABED es circunscriptible. Si los inradios de ABED y CDE miden 3 y 1, respectivamente, calcule $\overline{BE}$.

Resolución:



Por el teorema de Pitot en ABED:

$a + ED = x + x + b$ ...(I)

Por el teorema de Poncelet en $\triangle$ECD:

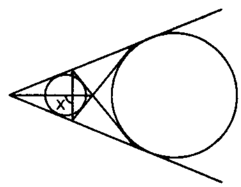
$a + b = 2(1) + ED$ ...(II)

Sumando (I) y (II): $2a = 2 + 2x$

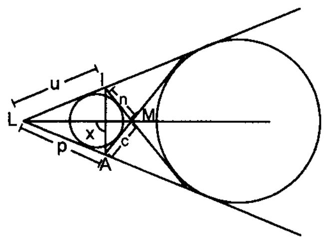
Pero: $a = 6$

$\Rightarrow$ $12 = 2 + 2x$ $\therefore$ $x = 5$

47. Del gráfico, calcular x.



Resolución:



En el $\triangle$LIMA circunscrito, por Pitot:

$u + c = p + n$ ...(I)

En el $\triangle$LIMA exinscrito, por Steiner:

$u - c = p - n$ ...(II)

Luego, (I) + (II):

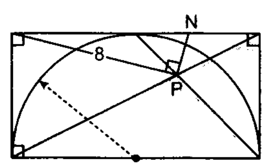
$2u = 2p \rightarrow u = p$ ...(III)

Reemplazando (III) en (I): $c = n$

Finalmente el $\triangle$LIMA es trapezoide simétrico

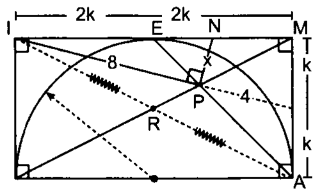
Entonces: $x = 90°$

48. Del gráfico, calcular: PN



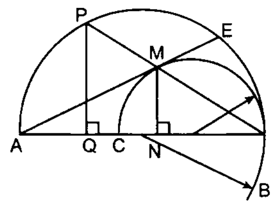
Resolución:

En el rectángulo LIMA, se traza $\overline{IA}$,
Luego IR = RA = ∧∧∧ (propiedad)
Ahora en el ⊾AMI, P es el baricentro

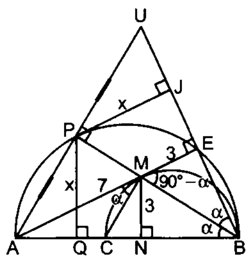


Entonces: MO = OA = k ∧ IP = 2(PO) = 8
Por ⊙: IE = EM = MA = 2k (propiedad)
Luego, en el ⊾IMO: m∠OIM = 14°
Finalmente, en el ⊾IPN: x = 2

49. En la figura, AM = 7 y MN = 3, hallar PQ, si M es punto de tangencia.

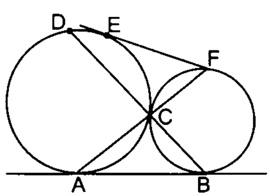


Resolución:

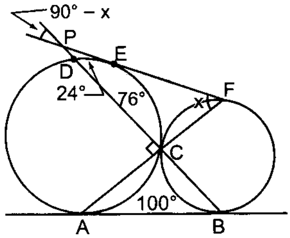


m∠MBC = m∠AMC = α
Prolongamos $\overline{AP}$ y $\overline{BE}$ cortándose en U
Luego: m∠AEB = 90° y m∠EBM = α
△AUB isósceles: AP = PU
Bisectriz $\overline{BP}$: PJ = PQ = x ∧ ME = MN = 3
⊾AEU: PJ = $\frac{7+3}{2}$ = 5 (base media)
∴ PQ = 5

50. Siendo A, B, C y E puntos de tangencia, m$\overset{\frown}{DE}$ = 24° y m$\overset{\frown}{BC}$ = 100°. Calcular m∠CFE.

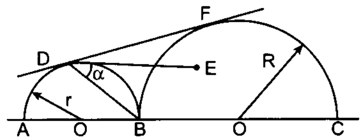


Resolución:

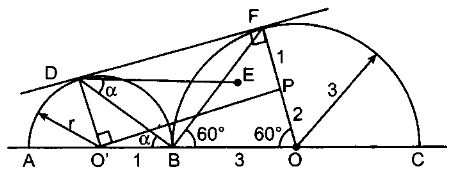


Propiedad: m∠ACB = 90° ⇒ m∠CPF = 90° − x
⇒ m$\overset{\frown}{BC}$ = m$\overset{\frown}{DC}$ = 100°
Luego: 24° + m$\overset{\frown}{EC}$ = 100° ⇒ m$\overset{\frown}{EC}$ = 76°
90° − x = $\frac{76° - 24°}{2}$ (ángulo exterior)
∴ m∠CFE = 64°

51. En la figura: r = 1; R = 3 y $\overline{DE}$ // $\overline{AC}$.
Hallar la medida del ángulo BDE.



Resolución:

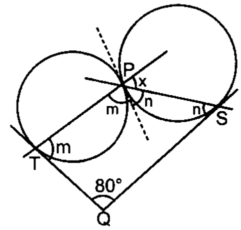


Trazamos $\overline{O'P}$ ⊥ OF,
Luego: ⊾OPO' es notable de 30° y 60°
⇒ △BOF es equilátero: m∠OBF = 60°
Además: m∠FBD = 90° (propiedad fundamental)
⇒ m∠DBA = 30°
Dato: $\overline{DE}$ // $\overline{AC}$ ∴ m∠BDE = 30°

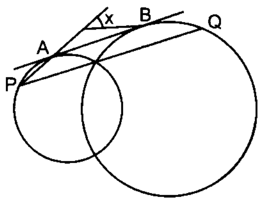
52. C_1 y C_2 son 2 circunferencias tangentes exteriores en P, desde un punto exterior Q se trazan una recta tangente a cada circunferencia en T y S (T ∈ C_1 y S ∈ C_2). Si m∠TQS = 80°, entonces la medida del ángulo agudo que forman las rectas $\overleftrightarrow{TP}$ y $\overleftrightarrow{PS}$ es:

Resolución:

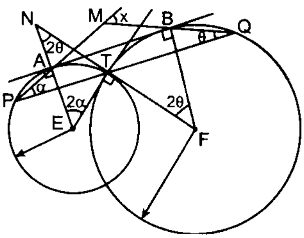
En el cuadrilátero QTPS:
80° + 2m + 2n = 360°
⇒ m + n = 140°
Luego:
m + n + x = 180°
140° + x = 180°
⇒ x = 40°



53. En la figura, calcular x si las circunferencias son ortogonales y los puntos A y B son de tangencia.



Resolución:



Por dato, las circunferencias son ortogonales

Luego: $m\angle ETF = 90°$

$m\overset{\frown}{AT} = 2\alpha$ (ángulo inscrito)

$m\angle TEA = m\overset{\frown}{AT} = 2\alpha$ (ángulo central)

Análogamente: $m\angle TFB = 2\theta$

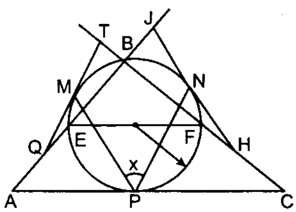
Además: $\overline{EA} \parallel \overline{FB} \Rightarrow m\angle ENT = m\angle BFT = 2\theta$

$\triangle$NET: $2\alpha + 2\theta = 90° \Rightarrow \alpha + \theta = 45°$

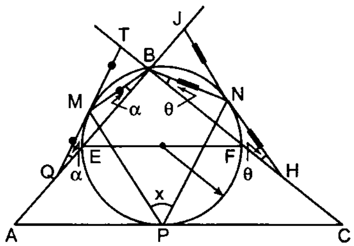
$\triangle$PMQ: $x = \alpha + \theta$ (ángulo externo)

$\therefore\ x = 45°$

54. Hallar x, si: $QM = MT \wedge HN = NJ$
(M, N, P: puntos de tangencia)



Resolución:



Trazamos la mediana $\overline{BM}$ en el triángulo rectángulo BTQ, luego:

$BM = TM = MQ \Rightarrow m\angle MBQ = m\angle MQB = \alpha$

$m\overset{\frown}{EM} = 2\alpha$ (ángulo inscrito)

$$\alpha = \frac{m\overset{\frown}{MB} - m\overset{\frown}{EM}}{2} \quad \text{(ángulo exterior)}$$

$\Rightarrow m\overset{\frown}{MB} = 4\alpha$

Análogamente: $m\overset{\frown}{FN} = 2\theta$ y $m\overset{\frown}{NB} = 4\theta$

$m\overset{\frown}{EB} + m\overset{\frown}{BF} = 180°$

$\Rightarrow 6\alpha + 6\theta = 180° \qquad \alpha + \theta = 30° \qquad \ldots(I)$

$x = \dfrac{m\overset{\frown}{MBN}}{2} = \dfrac{4(\alpha+\theta)}{2} \Rightarrow x = 2(\alpha+\theta) \qquad \ldots(II)$

(I) en (II): $\quad \therefore\ x = 60°$

55. De un punto exterior P se traza una tangente $\overline{PD}$ a una circunferencia de centro O. El punto D se une a los extremos de un diámetro $\overline{AB}$. Las rectas DA y DB intersectan a la recta PO en los puntos M y N respectivamente. Si $\overline{PO} \perp \overline{AB}$ y PD = l unidades, entonces la longitud de MN es:

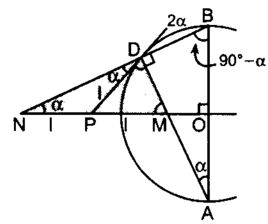
Resolución:

$\triangle$NDM:

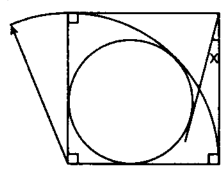
$\overline{DP}$ es mediana

$\Rightarrow NP = PM = l$

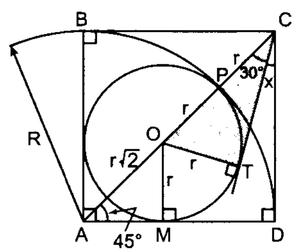
Luego: $MN = 2l$



56. En la figura, calcular x.



Resolución:



$AP = R = r(\sqrt{2} + 1)$

$AC = R\sqrt{2} \Rightarrow AC = r(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2})$

$AC = r(2 + \sqrt{2}) \qquad \ldots(I)$

De la figura: $AC = AP + PC$

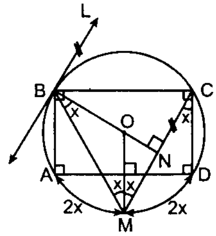
$r(2 + \sqrt{2}) = r(\sqrt{2} + 1) + PC \Rightarrow PC = r$

$\triangle$TOC es notable de 30° y 60°, ya que $OC = 2(OT)$

$\Rightarrow 30° + x = 45° \quad \therefore\ x = 15°$

57. Un rectángulo ABCD está inscrito en una circunferencia donde M es punto medio del arco $\overset{\frown}{AD}$ y la tangente trazada por B es paralela a $\overline{MC}$. Calcular $m\angle MCD$.

Resolución:



Dato: $m\widehat{AM} = m\widehat{MD} = 2x$

Luego: $\overline{OM} \perp \overline{AD}$

$\Rightarrow m\angle OMC = m\angle MCD = x$

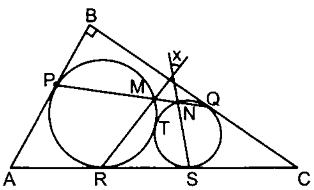
Además: $\overline{BO} \perp \overline{CM}$, ya que $\overline{MC} \parallel \overleftrightarrow{L}$

Por simetría: $m\angle OMB = m\angle OMC = x$

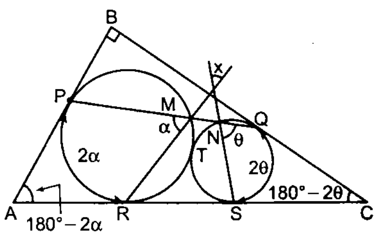
$\triangle BOM$ isósceles: $m\angle OBM = m\angle OMB = x$

⊾BMN: $3x = 90°$ $\quad \therefore m\angle MCD = 30°$

58. Hallar x, siendo P, Q, R, S y T puntos de tangencia



Resolución:



Sea: $m\angle PMR = \alpha$ y $m\angle QNS = \theta$

Luego: $m\widehat{PR} = 2\alpha$ (ángulo inscrito)

$m\angle PAR = 180° - 2\alpha$

Análogamente: $m\angle QCS = 180° - 2\theta$

⊾ABC: $180° - 2\alpha + 180° - 2\theta = 90°$

$\Rightarrow \alpha + \theta = 135°$ ...(I)

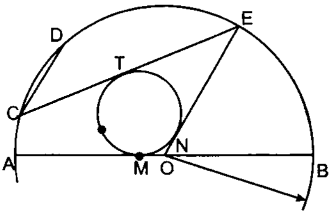
De la figura: $x = 180° - (\alpha + \theta)$ ...(II)

(I) en (II): $x = 180° - 135°$

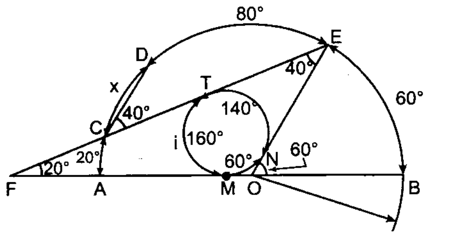
$\therefore x = 45°$

59. Sea: $m\widehat{MN} = 60°$, $m\widehat{TIM} = 160°$ y $\overline{CD} \parallel \overline{OE}$

Calcular $m\widehat{CD}$. (M, N, T: puntos de tangencia)



Resolución:



$m\widehat{TN} = 140° \Rightarrow m\angle TEN = 40°$

$m\widehat{MN} = m\angle NOB = m\widehat{EB} = 60°$ (ángulo central)

$\triangle FEO$: $m\angle EFO + 40° = 60°$ (ángulo externo)

$\Rightarrow m\angle EFO = 20°$

Dato: $\overline{CD} \parallel \overline{OE}$; se cumple que:

$m\angle DCE = m\angle TEN = 40°$

$\Rightarrow m\widehat{DE} = 80°$ (ángulo inscrito)

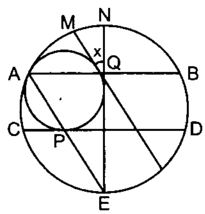
$m\angle EFO = \dfrac{m\widehat{EB} - m\widehat{AC}}{2}$ (ángulo exterior)

$\Rightarrow 20° = \dfrac{60° - m\widehat{AC}}{2} \Rightarrow m\widehat{AC} = 20°$

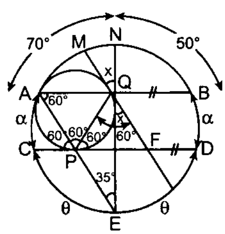
Luego: $20° + x + 80° + 60° = 180°$

$\therefore m\widehat{CD} = 20°$

60. En la figura, calcular x si A, P y Q son puntos de tangencia, $m\widehat{AN} = 70°$; $m\widehat{NB} = 50°$ y $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$.



Resolución:



$m\angle AEN = \dfrac{m\widehat{AN}}{2} = \dfrac{70°}{2} = 35°$ (ángulo inscrito)

Dato: $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$,

Luego: $m\widehat{AC} = m\widehat{BD} = \alpha$

Además: $m\widehat{CE} = m\widehat{ED} =$

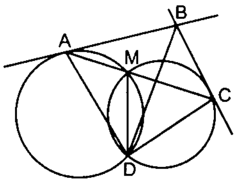
$\Rightarrow 70° + 50° + 2\alpha + 2\theta = 360°$

$\alpha + \theta = 120°$

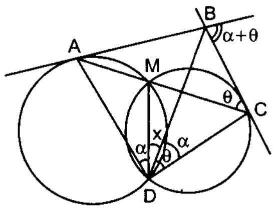
$m\angle BAE = \dfrac{m\widehat{BE}}{2} = \dfrac{\alpha + \theta}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$

$m\angle QPD = m\angle PQF = m\angle BAE = 60°$
$m\angle APC = m\angle BAE = 60°$
Ya que: $\overline{AB} \parallel \overline{CD} \Rightarrow m\angle APQ = 60°$
Luego: $\overline{MQ} \parallel \overline{AP} \quad \therefore\ x = 35°$

61. En la figura mostrada los puntos A, M y C son colineados, además $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ son tangentes.
Si $m\angle BCA - m\angle BAC = 21°$, Hallar la $m\angle BDM$.



Resolución:

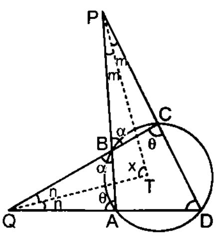


En la figura, observamos que el cuadrilátero ABCD tiene: $m\angle IBC = m\angle ADC = \alpha + \theta$, entonces es inscriptible.
Luego: $m\angle BDC = \alpha$
ahora: $x = \theta - \alpha$
Pero por dato: $\theta - \alpha = 21°$
$\therefore\ x = 21°$

62. Sea el cuadrilátero inscrito ABCD en una circunferencia de centro O, $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{DC} = \{P\}$ y $\overrightarrow{BC} \cap \overrightarrow{AD} = \{Q\}$. Las bisectrices de los ángulos APD y BQA se interceptan en T. Halle la $m\angle PTQ$.

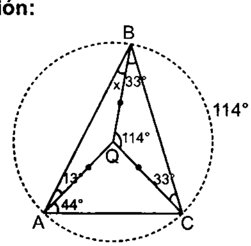
Resolución:

Por propiedad:
$x = m + n + \alpha \quad \ldots(I)$
ΔAQB: $\alpha + \theta + 2n = 180°$
ΔBPC: $\alpha + 2m = \theta$
Sumando:
$2(m + n + \alpha) = 180°$
$m + n + \alpha = 90° \quad \ldots(II)$
De (I) y (II): $x = 90°$



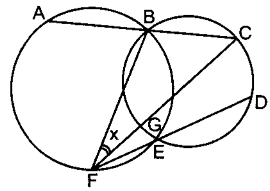
63. En el ΔABC, Q es un punto interior, tal que: $BQ = QC$. Si $m\angle QAB = 13°$, $m\angle QAC = 44°$ y $m\angle QCB = 33°$, entonces la $m\angle QBA$ es:

Resolución:

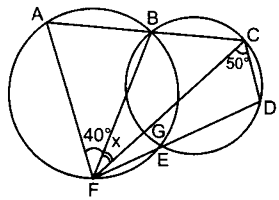


Al inscribir el ΔABC en una circunferencia:
Observamos que: $m\overset{\frown}{BC} = 114°$
ΔQBC: $m\angle BQC = 114°$
$\Rightarrow$ Q es el circuncentro del ΔABC
En consecuencia: $x = 13$

64. En la figura: $m\overset{\frown}{AB} = 80° \wedge m\overset{\frown}{DEG} = 100°$.
Halla la $m\angle BFC$.



Resolución:

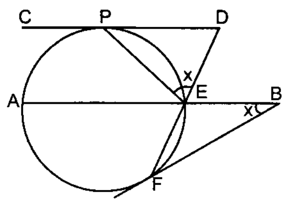


Ángulo inscrito: $m\angle AFB = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2} = \dfrac{80°}{2} = 40°$

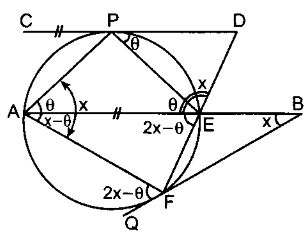
$m\angle DCG = \dfrac{m\overset{\frown}{DEG}}{2} = \dfrac{100°}{2} = 50°$

Propiedad general: $\overline{AF} \parallel \overline{CD}$
$\Rightarrow 40° + x = 50° \quad \therefore\ x = 10°$

65. Calcular x, siendo P y F puntos de tangencia y $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$



Resolución:

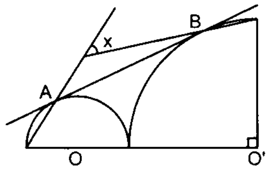


Propiedad: $m\angle EPD = m\angle PAE = \theta$
Por paralelas: $m\angle PEA = m\angle EPD = \theta$
⏢APEF inscrito: $m\angle PED = m\angle PAF = x$
$\Rightarrow m\angle FAE = x - \theta$
ΔFAB: $m\angle AFQ = 2x - \theta$ (ángulo externo)

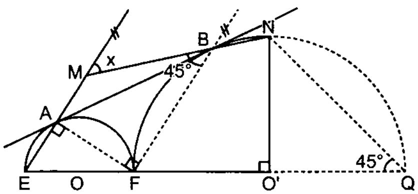
Propiedad: $m\angle FEA = m\angle AFQ = 2x - \theta$

$\Rightarrow x + \theta + (2x - \theta) = 180°$ $\quad \therefore x = 60°$

66. En la figura, O y O' son centros A y B son puntos de tangencia, luego la medida de x es:



Resolución:



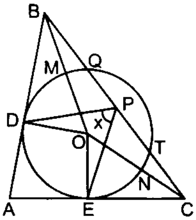
El cuadrilátero FBNQ es inscriptible

$\Rightarrow m\angle MBF = m\angle Q = 45°$

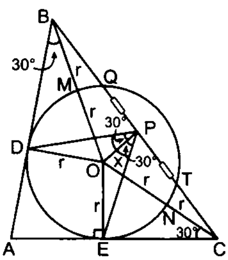
Por otro lado: $m\angle AFB = 90°$ y $\overline{FA} \perp \overline{EM} \Rightarrow \overline{AM} \parallel \overline{FB}$

Luego: $x = 45°$

67. En la figura, O es centro, OM = MB; ON = NC y PQ = PT. Calcular $m\angle DPE$, siendo D y E puntos de tangencia.



Resolución:



Por dato: PQ = PT; luego: $\overline{OP} \perp \overline{QT}$

Además: OM = MB = r y ON = NC = r

Trazamos OD = r y OE = r

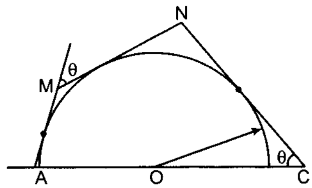
$\Rightarrow$ ⊾BDO y ⊾CEO son notables de 30° y 60°

⏢BDOP inscriptible: $m\angle DPO = m\angle OBD = 30°$

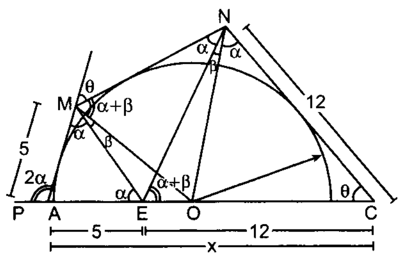
⏢CEOP inscriptible: $m\angle OPE = m\angle ECO = 30°$

$\therefore x = 60°$

68. Hallar AC, si: MA = 5 $\wedge$ NC = 12



Resolución:



Trazamos $\overline{ME}$, tal que: $m\angle MEA = m\angle AME = \alpha$

luego: AE = AM = 5 y $m\angle PAM = 2\alpha$

Por dato el ⏢AMNC es inscriptible,

Entonces: $m\angle MNC = m\angle PAM = 2\alpha$

Pero $\overline{ON}$ es bisectriz, por lo que:

$m\angle MNO = m\angle ONC = \alpha$

$\Rightarrow$ ⏢MEON es inscriptible:

$m\angle EMO = m\angle ENO = \beta$ y $m\angle AMO = m\angle OMN = \alpha + \beta$

↳ ($\overline{OM}$ es bisectriz)

Además: $m\angle NEO = m\angle OMN = \alpha + \beta$

Luego, el $\triangle NEC$ es isósceles ya que:

$m\angle NEC = m\angle ENC = \alpha + \beta$

$\Rightarrow$ EC = NC = 12

$\therefore$ AC = 17

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

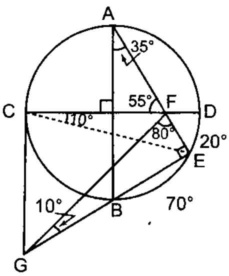
PROBLEMA 1 (UNI 2005 - II)

En una circunferencia se trazan los diámetros perpendiculares, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, por C se traza una recta L, tangente a la circunferencia, en el arco DB se elige el punto E de manera que E, B y G sean colineales ($G \in L$), la $m\widehat{EB} = 70°$, $\overline{AE} \cap \overline{DC} = \{F\}$. Determine la $m\angle AFG$

A) 85° B) 95° C) 100°
D) 125° E) 155°

Resolución:

Graficamos según el enunciado:



Dato: $m\widehat{EB} = 70° \Rightarrow m\widehat{ED} = 20°$

También: $m\angle EAB = 35° \Rightarrow m\angle AFC = 55°$

⏢CFEG: cuadrilátero inscriptible

$\Rightarrow m\angle FGE = m\angle ECF$

En la circunferencia: $m\angle ECF = 10°$

$\Rightarrow m\angle FGE = 10° \Rightarrow m\angle GFE = 80°$

$\Rightarrow m\angle CFG = 180° - (80° + 55°) = 45°$

Nos piden: $m\angle AFG = 55° + 45°$

$\therefore\ m\angle AFG = 100°$

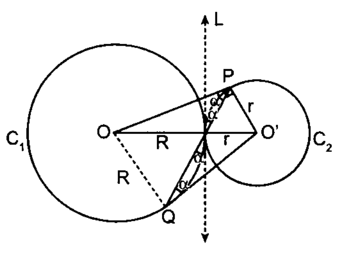
Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Dos circunferencias C_1 y C_2 de centro O y O' respectivamente, son tangentes exteriormente en T. Desde O se traza una tangente a C_2 en P y desde O' se traza una tangente a C_1 en Q ($\overline{OP}$ no se interseca con $\overline{O'Q}$). Si se tiene que $\overline{PQ}$ se interseca con $\overline{OO'}$ en T, entonces la relación de los radios de dichas circunferencias es:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1 D) 2 E) 3

Resolución:



Se traza la tangente común L

$m\angle OPT = m\angle TQO' = \alpha \Rightarrow \overline{OP} \parallel \overline{QO'}$

Luego: $m\angle OQO' = m\angle QOP = 90°$

$\angle OPO' = m\angle PO'Q = 90°$

$\Rightarrow$ QOPO' rectángulo

R = r

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

C es una circunferencia con diámetro $\overline{AB}$ y P es un punto exterior a C. Se trazan los segmentos $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, tal que la prolongación de $\overline{PB}$ corta a la circunferencia en C. Si el ángulo APC mide 25°, calcule la medida del ángulo CAP.

A) 53° B) 65° C) 45°
D) 37° E) 55°

Resolución:

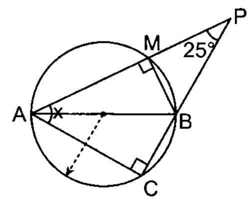
Por cuadrilátero inscrito:

⏢AMBC inscrito

$m\angle ACP = m\angle AMB = 90°$

◺ACP: $x + 25° = 90°$

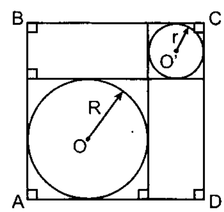
$x = 65°$



Clave: B

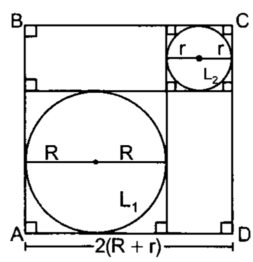
PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

En la figura mostrada, se tiene que el perímetro del cuadrado ABCD es igual al producto de las longitudes de las circunferencias de centro O y O'. Calcule $\frac{1}{R} + \frac{1}{r}$



A) $\frac{\pi^2}{3}$ B) $\frac{\pi^2}{2}$ C) $\frac{2\pi^2}{3}$ D) $\frac{3\pi^2}{4}$ E) π^2

Resolución:



Piden: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r}$

Dato: $2p_{ABCD} = (L_1)(L_2)$

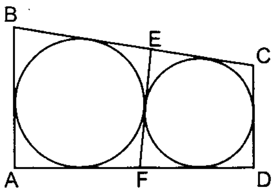
$8(R + r) = (2\pi R)(2\pi r)$

$\therefore\ \frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{\pi^2}{2}$

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

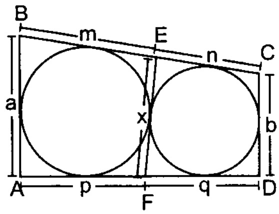
En la figura mostrada, se tiene que AB + CD = 30 m y BC + AD = 50 m, calcule EF.



A) 8 m B) 10 m C) 12 m
D) 14 m E) 16 m

Resolución:

Piden x



Por el teorema de Pitot:
$$\begin{aligned} a + x &= m + p \\ x + b &= n + q \\ \hline 30 + 2x &= 50 \end{aligned}\ (+)$$

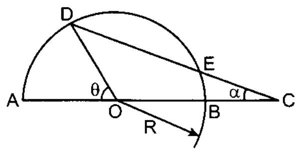
$\therefore\ x = 10$ m

Clave: B

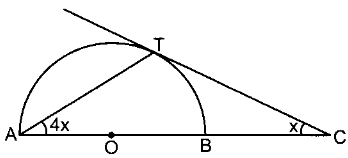
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si AO = EC, calcular θ.

A) 2α
B) α
C) 3α
D) 6α
E) 7α



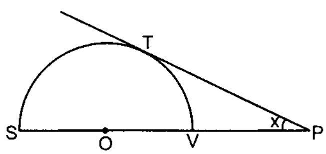
2. Hallar x, si O es centro.



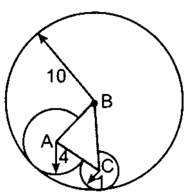
A) 18°   B) 15°   C) 12°
D) 10°   E) 9°

3. Hallar x, si T es punto de tangencia.
SO = OV = VP = 1

A) 60°
B) 53°
C) 45°
D) 30°
E) 37°



4. Calcular el perímetro del triángulo ABC.

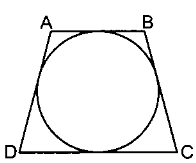


A) 10   B) 15   C) 20   D) 25   E) 18

5. En un triángulo ABC, se sabe que AB = 8, BC = 10 y AC = 12, la circunferencia inscrita determina sobre $\overline{AC}$ el punto M. Calcular AM.

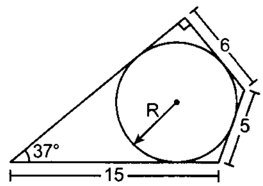
A) 6   B) 7   C) 5
D) 3   E) 4

6. En el trapecio isósceles, AD = BC = 8 cm, calcular la mediana del trapecio.



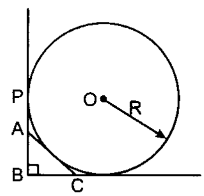
A) 6 cm   B) 8 cm   C) 10 cm
D) 12 cm   E) 14 cm

7. Del gráfico, calcular R.



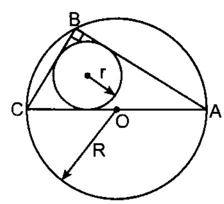
A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 8

8. Hallar R, si AB = 9 y BC = 12.



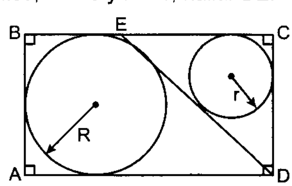
A) 15   B) 16   C) 18   D) 20   E) 22

9. En la figura, hallar R + r, si AB = 15 y BC = 8.



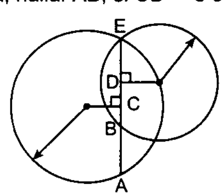
A) 23   B) 11,5   C) 10,5
D) 13,5   E) 14

10. Del gráfico, R = 3 y r = 1, hallar BE.



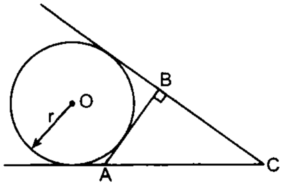
A) 3   B) 4   C) 5   D) 6   E) 7

11. En la figura, hallar $\overline{AB}$, si CD = 6 cm.



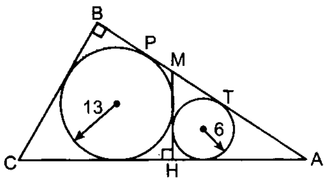
A) 6 cm   B) 8 cm   C) 10 cm
D) 12 cm   E) 9 cm

12. Calcular r, si AB = 5 y BC = 12.



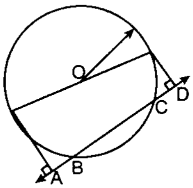
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 10

13. Hallar $\overline{PT}$, si P y T son puntos de tangencia.



A) 15 B) 17 C) 19
D) 21 E) 22

14. En el gráfico, AB = 3 y BC = 13, hallar AD.

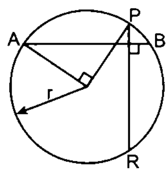


A) 16 B) 18 C) 19
D) 21 E) 22

15. En un cuarto de circunferencia de centro O y radios $\overline{OA}$, $\overline{OB}$; se toma el punto E y luego: $\overline{AH} \perp \overline{OE}$; $\overline{BP} \perp \overline{OE}$; (H y P sobre $\overline{OE}$). Hallar EP, si AH = 15 y BP = 8.

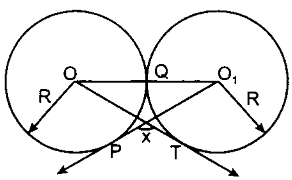
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

16. Calcular BR, siendo r = 4.



A) 8 B) 4 C) $4\sqrt{2}$ D) $8\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

17. Siendo P, Q y T, puntos de tangencia; calcular el valor de x.



A) 120° B) 125° C) 130°
D) 135° E) 140°

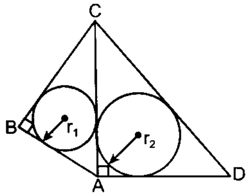
18. La circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa en un triángulo rectángulo tiene un radio de 9 cm. Calcular la cantidad de valores enteros que puede tomar la hipotenusa.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

19. Se tiene un octógono ABCDEFGH circunscrito a una circunferencia, donde AB = 1; BC = 1; CD = 1,5; DE = 0,5; EF = 2; FG = 2,7; HA = 0,8. Hallar GH.

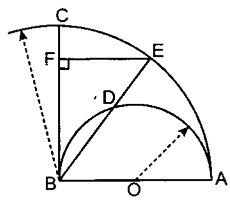
A) 0,5 B) 1 C) 0,8
D) 1,5 E) 2

20. En la figura, CD = AB + BC. Si AD = 18, calcular $r_1 + r_2$.



A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

21. Del gráfico, calcular AB, si EF = 3 y DE = 1.

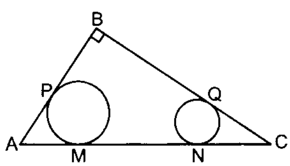


A) 2,5 B) 3,5 C) 4
D) 5 E) 7

22. En un triángulo rectángulo, el semiperímetro es igual a 16 y su inradio mide 4. Hallar la longitud de la hipotenusa.

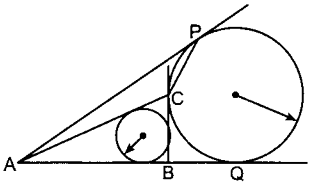
A) 10 B) 12 C) 16
D) 13 E) 5

23. Del gráfico, P, Q, M y N son puntos de tangencia. BP + BQ = 13, MN = 6. Calcular el inradio del △ABC.



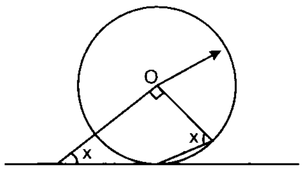
A) 2,5 B) 3,5 C) 4,5
D) 1,5 E) 5,5

24. Según el gráfico, P, C y Q son puntos de tangencia. Si PC = 10 cm., calcular el máximo valor entero que toma el diámetro de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



A) 8 cm B) 9 cm C) 7 cm
D) 10 cm E) 6 cm

25. Calcular x.



A) 30° B) 70° C) 40° D) 50° E) 60°

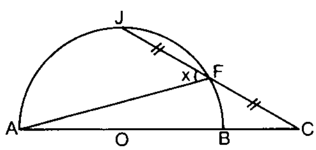
26. En un triángulo ABC acutángulo, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$ en N y la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AC}$ es tangente a la prolongación de $\overline{BA}$ en M. Hallar $\overline{AC}$, si AN = 3,5 y AM = 4,5.

A) 10,5 B) 8 C) 9
D) 9,5 E) 11,5

27. El punto de tangencia de la circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo divide al mayor de los lados no paralelos en segmentos que miden 1 y 9 cm. Hallar la longitud de la mediana del trapecio.

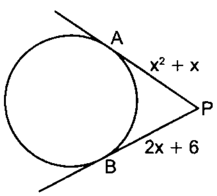
A) 12 B) 6 C) 8 D) 10 E) 9

28. En la figura, AO = OB = JF = FC; calcular x, si $\overline{AB}$ es diámetro.



A) 15° B) 30° C) 45° D) 60° E) 12°

29. En la figura, hallar PA, si A y B son puntos de tangencia.



A) 6 B) 8 C) 10 D) 12 E) 13

30. En una circunferencia de centro O, se ubica la cuerda $\overline{BC}$ de 80 m de longitud. Si el radio de la circunferencia mide 41 m, hallar la distancia de O hacia la cuerda.

A) 7 m B) 9 m C) 10 m
D) 11 m E) 12 m

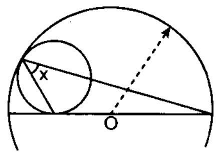
31. La prolongación de $\overline{CA}$ de un triángulo ABC interseca a la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AB}$ en el punto P. Siendo CP = 20 cm, hallar el perímetro de la región triangular ABC.

A) 20 cm B) 40 cm C) 30 cm
D) 60 cm E) 50 cm

32. Una circunferencia está inscrita en un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$). Si AB = 12 cm, calcular la medida de la mediana de dicho trapecio.

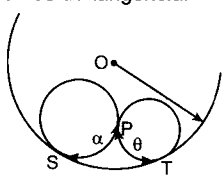
A) 24 cm B) 6 cm C) 12 cm
D) 8 cm E) 14 cm

33. En el gráfico, calcular x.



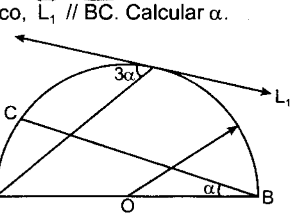
A) 15° B) 30° C) 45°
D) 25° E) 50°

34. Hallar la medida del arco ST, si $\alpha + \theta = 257°$ y si S, P y T son puntos de tangencia.



A) 77° B) 80° C) 103° D) 75° E) 90°

35. Del gráfico, $\overleftrightarrow{L_1}$ // $\overline{BC}$. Calcular α.



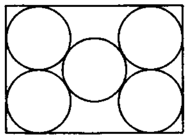
A) 15° B) 18° C) 20°
D) 22°30' E) 30°

36. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la circunferencia inscrita es tangente en P, Q y R a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Hallar la m∠PRQ.

A) 60° B) 90° C) 45° D) 75° E) 53°

37. Determinar el lado mayor del rectángulo mostrado, si los diámetros de los círculos iguales es 15.

A) $38 + \sqrt{5}$
B) 41
C) 35
D) 48
E) $15 + 15\sqrt{3}$



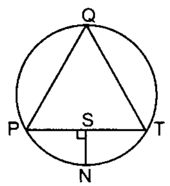
38. En una circunferencia de centro O, se trazan los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$. Sobre el menor arco $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto F, tal que el ángulo AFB mide 130°. Calcular la medida del ángulo AOB.

A) 80° B) 100° C) 130°
D) 50° E) 65°

39. El perímetro de un triángulo rectángulo es 24 m y su hipotenusa mide 10 m. Hallar el radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m D) 4 m E) 5 m

40. Dado el triángulo equilátero PQT, inscrito en una circunferencia. Hallar SN, en función del radio R, si PS = ST.



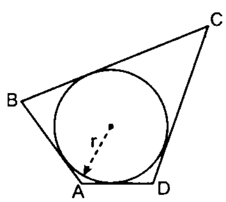
A) R/2 B) R/3 C) R/4
D) $R\sqrt{2}$ E) $R\sqrt{3}$

41. Marcar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones:

I. La recta que une los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular a la recta que une los puntos comunes a las dos circunferencias.
II. El ángulo central de una circunferencia mide 0° (cero grados).
III. La mediatriz de toda cuerda pasa por el centro del círculo.
IV. Ángulo inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia.

A) FFVV B) FVFV C) VFVF
D) VFVV E) VVFF

42. De la figura, AB = 7 cm; CD = 7,5 cm y AD = 4 cm. Calcular BC.



A) 10,6 cm B) 10,5 cm C) 10,3 cm
D) 10,7 cm E) 10,8 cm

43. Las longitudes de dos circunferencias coplanares están en relación de 7 a 3 y su suma es igual a 20π. Si la distancia entre sus centros es dos veces la diferencia de las longitudes de sus radios, podemos decir que las circunferencias son:

A) Exteriores B) Secantes
C) Interiores D) Tangentes exteriores
E) Tangentes interiores

44. Si el radio de un círculo se aumenta en 1, hallar la razón de la longitud de la nueva circunferencia al diámetro.

A) π B) $\frac{2\pi + 1}{2}$ C) $\frac{2\pi - 1}{2}$
D) $\pi - 2$ E) $2\pi - 1$

45. Calcular el lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 16 cm de diámetro.

A) $4\sqrt{3}$ cm B) $8\sqrt{3}$ cm C) $2\sqrt{3}$ cm
D) $3\sqrt{2}$ cm E) 8 cm

46. ¿En qué relación están los radios de las circunferencias Inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero?

A) 1 a 4 B) 1 a 2 C) 1 a 3
D) 2 a 3 E) 1 a $\sqrt{2}$

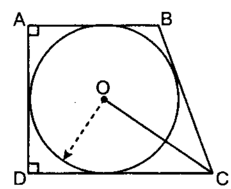
47. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano miden 10 m y 6 m. Si la distancia entre sus centros es 10 m, las circunferencias son:

A) Exteriores B) Interiores C) Tangentes
D) Secantes E) Concéntricas

48. En un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 48 cm, se inscribe una circunferencia de longitud 24π cm. ¿Cuál es el perímetro de dicho triángulo?

A) 120 cm B) 144 cm C) 96 cm
D) 72 cm E) 60 cm

49. La figura ABCD es un trapecio rectángulo BC = 10 m, OC = 8 m. Hallar la altura del trapecio.



A) 4,8 m B) 9,6 m C) 4 m D) 8 m E) 10 m

50. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 15 cm y la distancia del baricentro al ortocentro es 25/3 cm. Hallar la altura relativa a la hipotenusa en cm.

A) 13 B) 14 C) 16 D) 12 E) 15

51. Los diámetros de dos círculos coplanares y las distancias entre sus centros, están en la relación 13: 10: 1. Estos círculos son:

A) Secantes
B) Tangentes interiores
C) Interiores
D) Exteriores
E) Concéntricos

52. La distancia entre los centros de dos circunferencias coplanares es 5 cm. Si sus radios miden 2,5 cm y 1,5 cm, las circunferencias son:

A) Exteriores
B) Tangentes exteriores
C) Secantes
D) Tangentes interiores
E) Concéntricas

53. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano están en la relación de 10 a 6 y la distancia entre sus centros es como 5. Tales circunferencias son:

A) Tangentes interiormente.
B) Exteriores
C) Interiores
D) Tangentes exteriormente
E) Secantes

54. En dos circunferencias ortogonales de radios R y r, respectivamente, hallar la distancia d entre sus centros.

A) $4(R - r) < d < R + r$
B) $R + r < d$
C) $(R - r)/2 < d < (R + r)/2$
D) $d^2 = R^2 + r^2$
E) $R + r = d$

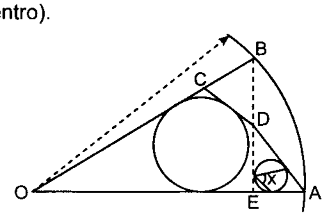
55. El radio de la circunferencia y el perímetro de un triángulo rectángulo circunscrito a dicha circunferencia miden 3 cm y 50 cm, respectivamente. Hallar el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo.

A) 44 cm
B) 22 cm
C) 11 cm
D) 12 cm
E) 13 cm

56. Sean O y O', los centros de dos circunferencias tangentes exteriormente cuyos diámetros son 2 cm y 6 cm respectivamente. Hallar el ángulo agudo formado por la recta que une los centros y la tangente común a las circunferencias.

A) 60°
B) 45°
C) 30°
D) 15°
E) 75°

57. En la figura, calcular x, si BC = 6; CD = 1 y EA = 3 (O centro).



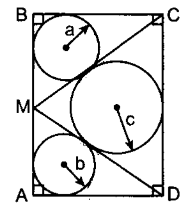
A) 45°
B) 53°
C) 55°
D) 60°
E) 63°30'

58. En un triángulo rectángulo, calcular la longitud de la hipotenusa, si el radio de la circunferencia inscrita mide 5 cm y el radio de la circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa mide 14 cm.

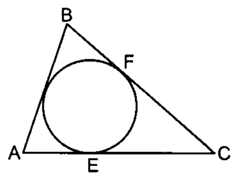
A) 5 cm
B) 7 cm
C) 6 cm
D) 8 cm
E) 9 cm

59. En la figura, hallar AD.

A) $a + b - c$
B) $b + c - a$
C) abc
D) $a + b + c$
E) $\dfrac{a + 2b + c}{3}$



60. En el gráfico, P es semiperímetro del triángulo ABC, hallar $R = \dfrac{(p - a)(p - b)}{2(AE)(BF)}$

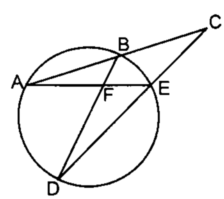


A) 2
B) 1
C) 1/2
D) 2/3
E) 4/3

61. Indicar cuál de las siguientes proposiciones es falsa.

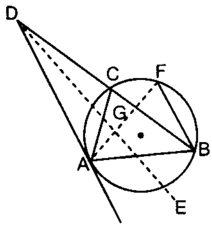
A) Todos los paralelogramos son inscriptibles en una circunferencia.
B) Todos los cuadriláteros con diagonales iguales y que se bisecan, son inscriptibles en una circunferencia.
C) Todos los cuadriláteros cuyos ángulos opuestos son suplementarios, son inscriptibles en una circunferencia.
D) Todos los trapecios isósceles son inscriptibles en una circunferencia.
E) Todos los rectángulos son inscriptibles.

62. En la figura, se tiene que $\overline{CA}$ y $\overline{CD}$ son secantes, $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ son cuerdas. Si $m\angle AFD = 100°$ y $m\angle ACD = 30°$. Hallar $m\overset{\frown}{ACD}$.



A) 55°
B) 60°
C) 65°
D) 70°
E) 75°

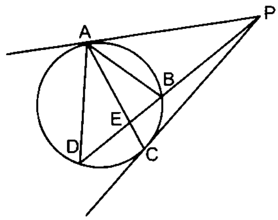
63. En la figura, se tiene que $m\angle DBF = 36°$ y $\overset{\frown}{AC} = 72$. Hallar la medida del ángulo AGD, sabiendo que $\overline{DE}$ y $\overline{AF}$ son bisectrices.



A) 75° B) 80° C) 85°
D) 90° E) 95°

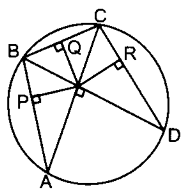
64. En la figura, se tiene que:

$m\overset{\frown}{BC} = \dfrac{m\overset{\frown}{CD}}{2} = \dfrac{m\overset{\frown}{AB}}{2}$ y $m\angle APC = 66°$. Hallar la medida del ángulo CAD.



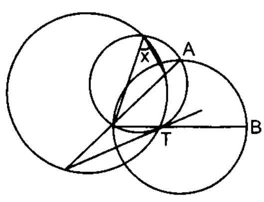
A) 38° B) 42° C) 28°30'
D) 32°15' E) 36°30'

65. Si $m\overset{\frown}{BC} = 40°$, hallar $m\angle PQR$.



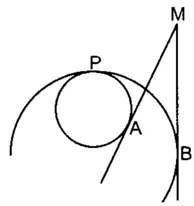
A) 120° B) 150° C) 140°
D) 160° E) 135°

66. En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 100°$, calcular x. (T es punto de tangencia).



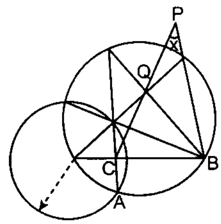
A) 25° B) 40° C) 45°
D) 50° E) 80°

67. En el gráfico, $m\overset{\frown}{AP} - m\overset{\frown}{BP} = 28°$. Calcular $m\angle AMB$, donde: A, P y B, son puntos de tangencia.



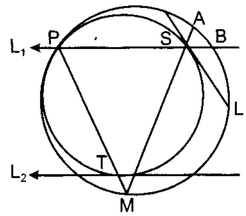
A) 28° B) 21° C) 14°
D) 7° E) 30°

68. En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 100°$, calcular x.



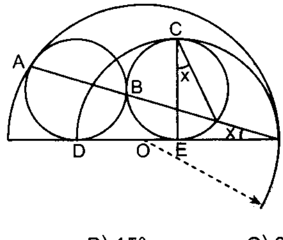
A) 50° B) 40° C) 60°
D) 70° E) 80°

69. En la figura, hallar la $m\angle MSL$. Si $m\overset{\frown}{AP} = 100°$; $m\overset{\frown}{AB} = 20°$; (P, S y T son puntos de tangencia). Además, $L_1 // L_2$



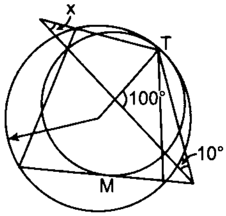
A) 60° B) 70° C) 80°
D) 85° E) 90°

70. Del gráfico, calcular x, si A, B, C, D y E son puntos de tangencia.



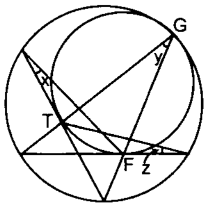
A) 30° B) 15° C) 22°30'
D) 20° E) 25°

71. En el gráfico, T y M son puntos de tangencia, calcular x.



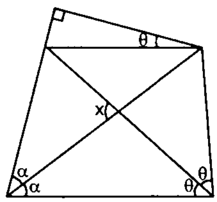
A) 20° B) 10° C) 15° D) 40° E) 35°

72. En el gráfico, G, T y F son puntos de tangencia. ¿Cuál es la relación que existe entre x, y, z?



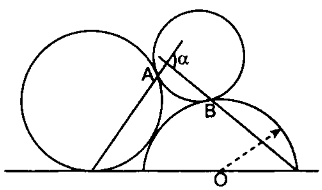
A) $2(x + z) = y$ B) $2x + 2y = 3z$
C) $x + y = 2z$ D) $x = y - z$
E) $3(x + z) = 2y$

73. Del gráfico, calcular x.



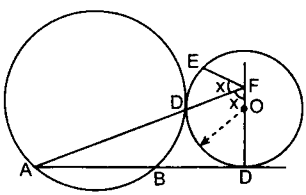
A) 30° B) 45° C) 60° D) 53° E) 90°

74. En la figura, calcular α, si $m\overset{\frown}{AB} = 50°$; A y B son puntos de tangencia.



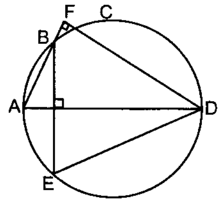
A) 85° B) 110° C) 80° D) 100° E) 90°

75. En la figura, calcular x, siendo C y D puntos de tangencia.



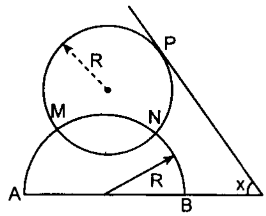
A) 50° B) 70° C) 60°
D) 65° E) 55°

76. En el gráfico, si BH = 4 y HE = 6, calcular BC.



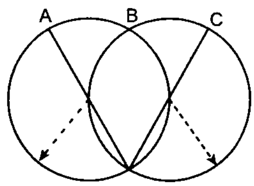
A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

77. En el gráfico, $m\overset{\frown}{MN} = m\overset{\frown}{NP}$; $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{NB} = 40°$, calcular x.



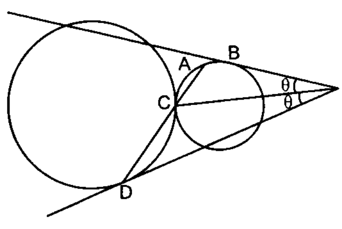
A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

78. En el gráfico, cuál es la relación correcta, si $m\overset{\frown}{AB} = \theta$ y $m\overset{\frown}{BC} = \alpha$.



A) $\theta = 2\alpha$ B) $2\sqrt{2}\alpha = \theta$
C) $\alpha + 2\theta = 90°$ D) $\theta + 2\alpha = 180°$
E) $2\theta + 3\alpha = 270°$

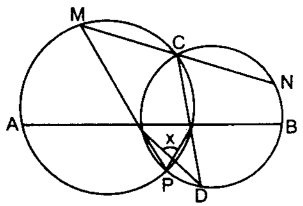
79. En el gráfico, B, C y D son puntos de tangencia; calcular $m\overset{\frown}{AB}$.



A) $\frac{3\theta}{2}$ B) 2θ C) θ

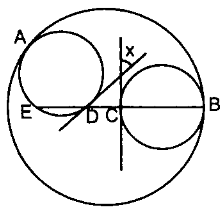
D) $90° + \frac{\theta}{2}$ E) $90° - \frac{\theta}{2}$

80. En el gráfico, $\overline{MP} \parallel \overline{CD}$ y $m\overset{\frown}{AMC} + m\overset{\frown}{NB} = 160°$. Calcular x.



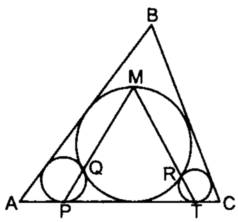
A) 80° B) 100° C) 50°
D) 65° E) 70°

81. Si A, B, C y D son puntos de tangencia, $m\overset{\frown}{AB} = 120°$ y $m\overset{\frown}{AE} = 110°$. Calcular x.



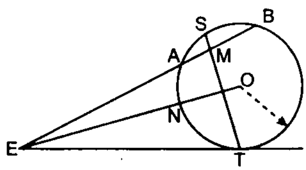
A) 50° B) 40° C) 30°
D) 25° E) 20°

82. Hallar la m∠ABC, si P, Q, R y T son puntos de tangencia; además, m∠PMT = m∠ABC.



A) 30° B) 45° C) 50°
D) 60° E) 80°

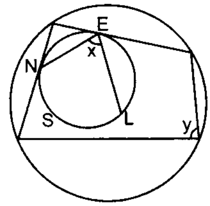
83. En el gráfico, hallar m∠SMB. Si AM = MB y EN = NO. T: punto de tangencia.



A) 60° B) 90° C) 30°
D) 45° E) 50°

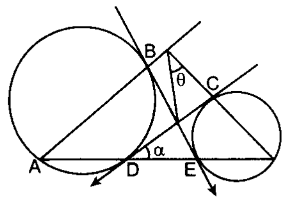
84. Del gráfico, $\dfrac{m\overset{\frown}{NE}}{m\overset{\frown}{EL}} = \dfrac{4}{3}$ y además: x + y = 190°.

Calcular la $m\overset{\frown}{NSL}$.



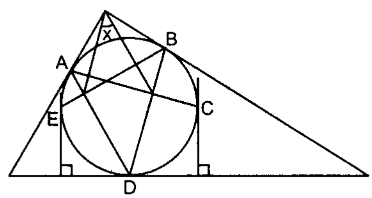
A) 220° B) 230° C) 240°
D) 250° E) 260°

85. En el gráfico, cuál es la relación correcta entre α y θ, si B, C, D y E son puntos de tangencia.



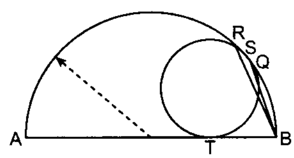
A) α = 2θ B) 3α = θ C) α = θ
D) α + θ = 30° E) α + θ = 90°

86. Calcular x, si A, B, C, D y E son puntos de tangencia.



A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 50°

87. En el gráfico, Q y T son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{RSQ} = 50°$. Calcular m∠RBA.



A) 50° B) 60° C) 65°
D) 70° E) 80°

88. En un cuadrilátero inscrito ABCD se ubica M en BC, mientras que las prolongaciones de $\overline{BM}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en N. Si $\overline{AB} \parallel \overline{DN}$ y m∠ADM = 50°, calcular m∠DNB.

A) 25° B) 40° C) 30°
D) 50° E) 60°

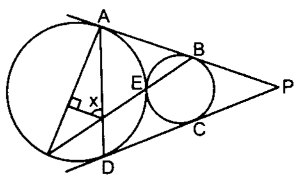
89. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se encuentra inscrita una circunferencia de centro O y que es tangente a $\overline{BC}$ en el punto N. Si AB = 8 y AC = 17, calcular el inradio del triángulo ONC.

A) $\frac{3}{2}(6-\sqrt{17})$ B) $\frac{3}{2}(5-\sqrt{17})$
C) $3(6-\sqrt{17})$ D) $2(5-\sqrt{17})$
E) $(5-\sqrt{17})$

90. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B) se inscribe una circunferencia cuyo radio mide 3; en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican M y N, respectivamente, tal que $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia. Si el inradio del triángulo MBN mide 1, calcular MB + BN.

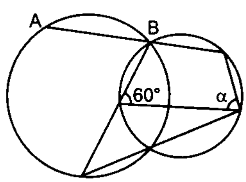
A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

91. En el gráfico, A, B, C, D y E son puntos de tangencia. Si m∠APD = 40°, calcular el valor de x.



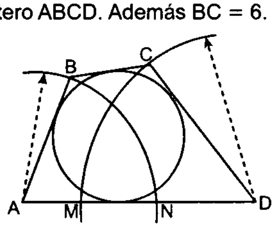
A) 50° B) 60° C) 40°
D) 70° E) 80°

92. En el gráfico, m$\widehat{AB}$ = α, calcular el valor de α.



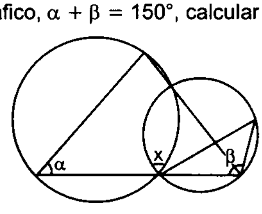
A) 60° B) 65° C) 70°
D) 80° E) 75°

93. En el gráfico, la circunferencia está inscrita en el cuadrilátero ABCD. Además BC = 6. Calcular MN.



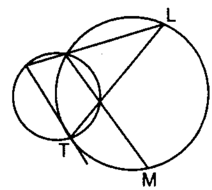
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

94. En el gráfico, α + β = 150°, calcular el valor de x.



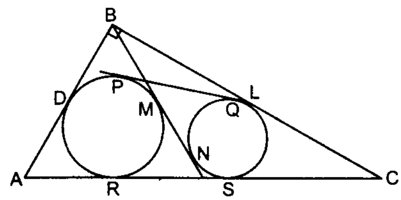
A) 130° B) 140° C) 150°
D) 160° E) 170°

95. En el gráfico, T es punto de tangencia, calcular m$\widehat{MT}$, si m$\widehat{ML}$ = 150°.



A) 50° B) 60° C) 40° D) 70° E) 80°

96. En el gráfico, D, P, Q, L, M, N, R y S son puntos de tangencia. Calcular el inradio del triángulo ABC, si PQ = 6 y 2(BD) + MN = 8.



A) 2 B) 3 C) 6 D) 4 E) 1

97. En un triángulo ABC de inradio r y exradios r_a, r_b, r_c; si $r + r_a + r_c = 10$ y BC − 2r = AC − AB, calcular r_b.

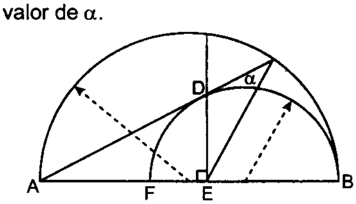
A) 5 B) 6 C) 8 D) 10 E) 12

98. En un triángulo ABC, recto en B, está inscrito una circunferencia de radio R. Si los radios de las circunferencias máximas inscritas en los segmentos circulares determinados por $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son r_1 y r_2, además el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC es r, hallar R.

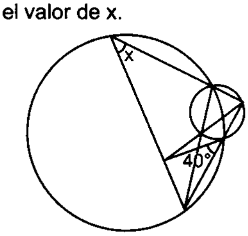
A) $r_1 + r_2 + r$ B) $2(r_1 + r_2 + r)$
C) $3r - (r_1 + r_2)$ D) $r + 2(r_1 + r_2)$
E) $r + 3(r_1 + r_2)$

99. En el gráfico, D es punto de tangencia y m$\widehat{BD}$ = 100°. Calcular el valor de α.

A) 50°
B) 40°
C) 30°
D) 27°
E) 20°



100. Calcular el valor de x.



A) 20° B) 30° C) 40° D) 50° E) 60°

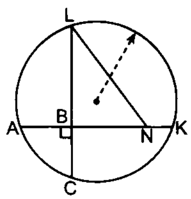
101. En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia se traza una semicircunferencia con diámetro $\overline{CD}$ en el cual se ubica el punto M en el arco CD, tal que MD = AB = 12 y BC + AD = 25. Calcular el inradio de la circunferencia inscrita en el triángulo CMD.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

102. Dado un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia de centro O. Si m∠ABC = 90°, AB + CD = 23 y AD + OC = 17, siendo P punto de tangencia con $\overline{BC}$, calcular el inradio del triángulo OPC.

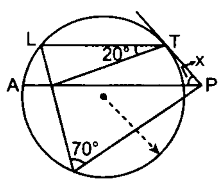
A) 2 B) 3 C) 4
D) 3,5 E) 2,5

103. En el gráfico, AB = BC y BN = 3(NK) = 3, calcular el inradio del triángulo LBN.



A) 0,5 B) 0,75 C) 1 D) 1,25 E) 1,5

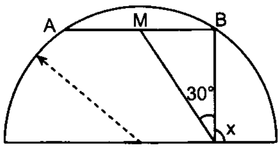
104. En el gráfico, $\overline{TL}$ // $\overline{PA}$. Si T es punto de tangencia, calcular el valor de x.



A) 30° B) 50° C) 45°
D) 35° E) 40°

105. Calcular el valor de x, si AB = R y AM = MB.

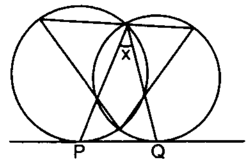
A) 80°
B) 60°
C) 70°
D) 90°
E) 100°



106. En una circunferencia de centro O y radio R, se traza el ángulo central AOB cuya medida es 60°, luego se ubica los puntos P y Q en $\overset{\frown}{AB}$ y en $\overline{AB}$ respectivamente, de modo que $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{OB}$. Calcular la distancia de Q a $\overline{OB}$, tal que PQ sea máximo.

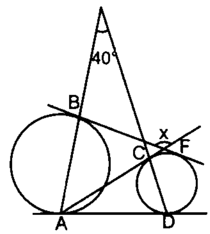
A) $\frac{R}{2}\sqrt{3}$ B) $R\sqrt{2}$ C) $\frac{R}{4}$
D) $\frac{R}{2}$ E) $\frac{R\sqrt{3}}{3}$

107. Según el gráfico, calcular x, siendo P y Q puntos de tangencia.



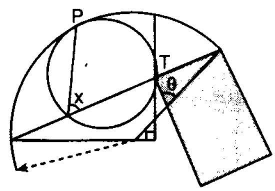
A) 30° B) 18° C) 36°
D) 54° E) 60°

108. Según la figura, hallar x, si A, B, C, D y F son puntos de tangencia.



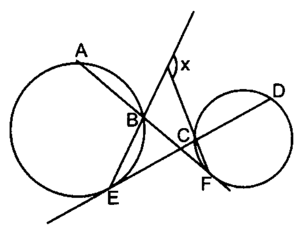
A) 100° B) 110° C) 120°
D) 130° E) 140°

109. En el gráfico, P y T son puntos de tangencia y la región sombreada es rectangular, calcular x en función de θ.



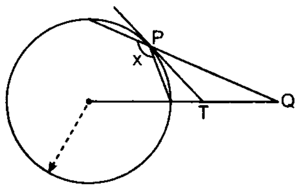
A) $\frac{3\theta}{2}$ B) θ C) $\frac{\theta}{2}$
D) $\frac{2\theta}{3}$ E) $\frac{\theta}{3}$

110. En el gráfico, E y F son puntos de tangencia. Si m$\overset{\frown}{AB}$ = 40° y m$\overset{\frown}{CD}$ = 32°, calcular x.



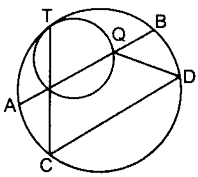
A) 144° B) 140° C) 134°
D) 154° E) 162°

111. Según el gráfico, PT = TQ. Siendo T punto de tangencia, calcular x.



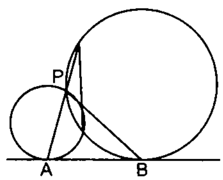
A) 150° B) 135° C) 120°
D) 127° E) 143°

112. Del gráfico, calcular la m∠AQD, si $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $m\overset{\frown}{TDC} = \theta$.



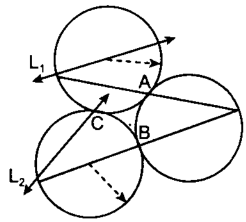
A) θ B) $\theta/2$ C) 2θ
D) $90° + \theta$ E) $90° - \theta$

113. En el gráfico, A y B son puntos de tangencia, calcular la m∠APB.



A) 45° B) 75° C) 30°
D) 53° E) 60°

114. En la figura, las circunferencias son congruentes; A, B y C son puntos de tangencia. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

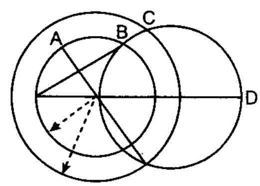


A) 30° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 120°

115. Interiormente a un cuadrado ABCD, se traza los cuadrantes BAD y ADC, los que se intersecan en P. Exteriormente a dicho cuadrado está el triángulo equilátero CRD; si T es punto medio del arco PD, calcular la medida del ángulo ART.

A) 8° B) 15° C) 27°
D) 20° E) 30°

116. Según el gráfico, calcular $m\overset{\frown}{CD}$, si $m\overset{\frown}{AB} = 50°$.



A) 25° B) 50° C) 100°
D) 150° E) 200°

CLAVES

1. C	16. C	31. B	46. B	61. A	76. A	91. D	106. D
2. D	17. A	32. C	47. D	62. B	77. C	92. D	107. C
3. D	18. B	33. C	48. A	63. D	78. D	93. D	108. A
4. C	19. A	34. A	49. B	64. A	79. B	94. C	109. B
5. C	20. C	35. B	50. D	65. C	80. A	95. B	110. E
6. B	21. C	36. C	51. C	66. D	81. A	96. E	111. B
7. B	22. B	37. E	52. A	67. A	82. D	97. D	112. B
8. C	23. B	38. B	53. E	68. A	83. A	98. D	113. E
9. B	24. B	39. B	54. D	69. C	84. A	99. B	114. A
10. C	25. E	40. A	55. C	70. C	85. C	100. C	115. B
11. D	26. B	41. D	56. C	71. A	86. B	101. B	116. C
12. B	27. C	42. B	57. E	72. D	87. C	102. B	
13. C	28. C	43. B	58. E	73. C	88. D	103. C	
14. C	29. D	44. A	59. D	74. B	89. B	104. B	
15. B	30. B	45. B	60. C	75. C	90. B	105. D	

Puntos notables del triángulo

08 capítulo

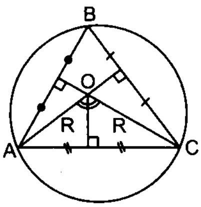
Leonhard Paul Euler nació en Basilea (Suiza) el 15 de abril de 1707 y murió en San Petersburgo (Rusia) el 18 de septiembre de 1783. Fue un matemático y físico suizo, reconocido como el principal matemático del siglo XVIII y uno de los más grandes y prolíficos de todos los tiempos. Vivió en Rusia y Alemania la mayor parte de su vida y realizó importantes descubrimientos en áreas tan diversas como el cálculo o la teoría de grafos. También introdujo gran parte de la moderna terminología y notación matemática, particularmente para el área del análisis matemático.

Euler demostró que en cualquier triángulo, el ortocentro, el circuncentro y el baricentro están alineados. Esta propiedad amplía su dominio de verdad para el centro de la circunferencia de los nueve puntos notables que Euler no había demostrado para ese tiempo. En los triángulos equiláteros estos cuatro puntos coinciden, pero en cualquier otro triángulo no lo hacen, y la recta de Euler está determinada por dos cualesquiera de ellos. El centro de la circunferencia de los nueve puntos notables se encuentra a mitad de camino a lo largo de la línea de Euler entre el ortocentro y el circuncentro, y la distancia desde el centroide del circuncentro es un medio que va desde el baricentro hasta el ortocentro.

Fuente: Wikipedia

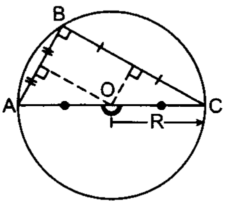
CIRCUNCENTRO (O)

Es el punto de intersección de las mediatrices del triángulo, equidista de sus vértices y es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.

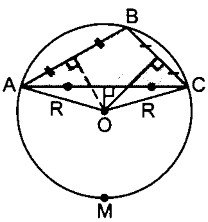


Triángulo acutángulo

$$\boxed{OA = OB = OC}$$



Triángulo rectángulo



Triángulo obtusángulo

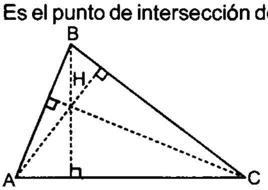
O: circuncentro
R: radio de la circunferencia. circunscrita (circunradio)

$$O\begin{cases}\text{Es un punto interior} \Rightarrow \text{acutángulo}\\ \text{Está sobre un lado} \Rightarrow \text{rectángulo}\\ \text{Es un punto exterior} \Rightarrow \text{obtusángulo}\end{cases}$$

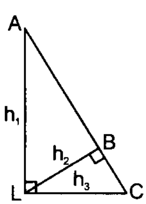
$$m\overset{\frown}{AMC} = 2m\angle B$$

ORTOCENTRO (H)

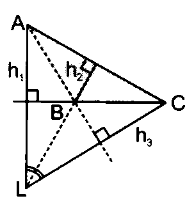
Es el punto de intersección de las alturas de un triángulo.



Triángulo acutángulo



Triángulo rectángulo

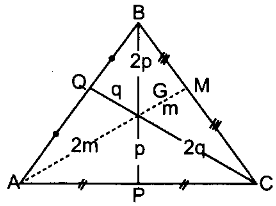


Triángulo obtusángulo

$$m\angle ALC = 180° - m\angle B$$

BARICENTRO (G)

Es el punto de intersección de las medianas de un triángulo. Divide a cada mediana en dos segmentos tales que uno es el doble del otro.



G: es el centro de gravedad de la región triangular ABC.

$AG = 2GM$ o $GM = \frac{1}{3}AM$; $AG = \frac{2}{3}AM$

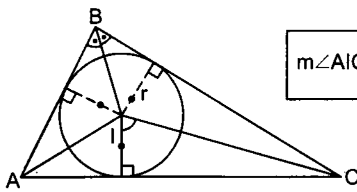
$BG = 2GP$ o $GP = \frac{1}{3}BP$; $BG = \frac{2}{3}BP$

$CG = 2GQ$ o $GQ = \frac{1}{3}CQ$; $CG = \frac{2}{3}CQ$

INCENTRO (I)

Es el punto de intersección de las bisectrices interiores de un triángulo, equidista de los lados y es el centro de la circunferencia inscrita al triángulo.

I: incentro
r: radio de la circunferencia inscrita (inradio)



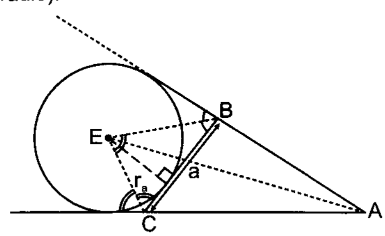
$$\boxed{m\angle AIC = 90° + \frac{m\angle B}{2}}$$

EXCENTRO (E)

Es el punto de intersección de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior. Cada triángulo tiene tres excentros los cuales son puntos exteriores al triángulo, equidistan de los lados y son los centros de las circunferencias exinscritas al triángulo.

E: excentro relativo a $\overline{BC}$.

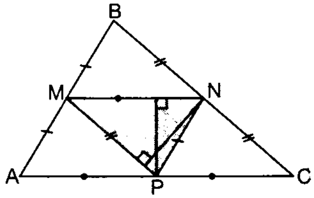
r_a: radio de la circunferencia exinscrita relativa al lado a (exinradio).



$$m\angle CEA = \frac{m\angle B}{2},\ m\angle CEB = 90° - \frac{m\angle A}{2}$$

TRIÁNGULO MEDIANO

Es el triángulo que se forma al unir los puntos medios de los lados de un triángulo MNP, es el triángulo mediano del △ABC.

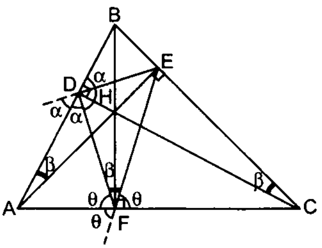


El circuncentro del triángulo total coincide con el ortocentro del triángulo mediano.

TRIÁNGULO ÓRTICO

Llamado también triángulo pedal, es el triángulo que tiene por vértices los pies de las alturas de un triángulo dado.

1. Si el △ABC es acutángulo.
   △DEF triángulo órtico o pedal del △ABC
   H: ortocentro del △ABC
   H: incentro del △DEF
   A, B y C son excentros del triángulo DEF

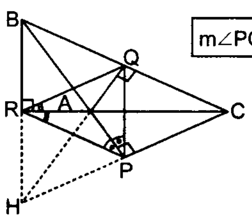


Fórmula: $\boxed{m\angle DEF = 180° - 2m\angle BAC}$

Se demuestra, por ejemplo, que $\overline{FH}$ es bisectriz; los cuadriláteros ADEC, ADHF y FHEC, son inscriptibles.

Entonces: $m\angle DAH = \beta = m\angle DFH = m\angle DCE$ $\Rightarrow m\angle HFE = m\angle HCE = \beta$. En forma análoga, para $\overline{DH}$ y $\overline{EH}$.

2. Si ABC es un triángulo obtusángulo, obtuso en A:
   △PQR: triángulo órtico o pedal del △ABC.
   H: ortocentro del △ABC
   A: incentro del △PQR
   H, B, C son excentros del △PQR.

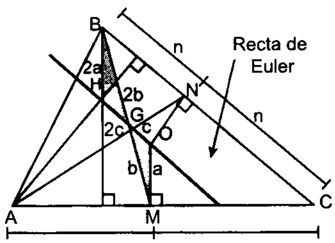


$\boxed{m\angle PQR = 2m\angle BAC = 180°}$

> **Nota:**
> Un triángulo rectángulo no tiene triángulo órtico.

RECTA DE EULER

En todo triángulo, el ortocentro, baricentro y circuncentro pertenecen a una misma recta llamada recta de Euler, para el triángulo:
H: ortocentro
G: baricentro
O: cincuncentro



$\boxed{HG = 2GO}$

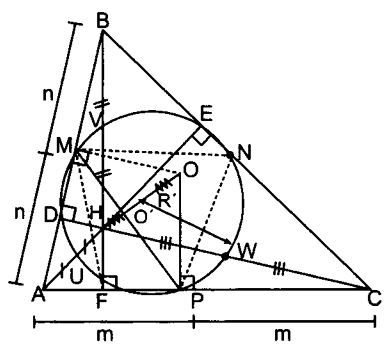
Además, se cumple que la distancia del ortocentro a un vértice, es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto: $\boxed{BH = 2OM}$

CIRCUNFERENCIA DE EULER

Llamada también circunferencia de los nueve puntos, es la circunferencia que pasa por los puntos medios de los lados de un triángulo, por los pies de las alturas y por los puntos medios de los segmentos que unen cada vértice con el ortocentro.

M, N, P: puntos medios de los lados.
U, V, W: puntos medios de $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$. (H es el ortocentro).
D, E, F: pies de alturas.
R' : Radio de la circunferencia de Euler.
$R' = \frac{R}{2}$ (R: circunradio).

$\overline{HO'} \cong \overline{O'O}$ $\begin{cases} \text{H: ortocentro} \\ \text{D: circuncentro} \end{cases}$



Es fácil demostrar que los puntos M, N, P, U, V, W, D, E y F, pertenecen a la misma circunferencia. En efecto: $\overline{MN} // \overline{AC}$ y $MF = \frac{AB}{2} = NP$

⇒ El trapecio MNPF, isósceles, será inscriptible.

$\triangle ALB \Rightarrow \overline{MV} // \overline{AH}$

$\triangle ABC \Rightarrow \overline{MP} // \overline{BC}$

⇒ $m\angle VMP = m\angle AEB = 90°$, por tener sus lados respectivamente perpendiculares.

Entonces, el ⏢MVPF será inscriptible, porque $m\angle VMP = m\angle VFP = 90°$. Es decir, V estará en la circunferencia que contiene a M, N, P y F.

En forma análoga, se prueba que D, U, W y E están en la misma circunferencia.

Observación

1. En todo triángulo isósceles, la recta de Euler es perpendicular a la base y, además, en ella están contenidas el incentro y un excentro.

   Por ejemplo, si AB = BC:

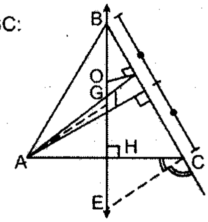
   O: circuncentro

   G: baricentro

   I: incentro

   H: ortocentro

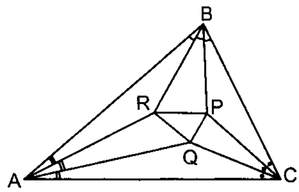
   E: excentro



2. En todo triángulo equilátero, el ortocentro, baricentro, circuncentro e incentro, coinciden. Cualquier recta que pase por este punto, representa una recta de Euler.

EL TEOREMA DE MORLEY

En 1899, F. Morley descubrió uno de los teoremas más sorprendentes de la geometría elemental: "Los tres puntos de intersección de las trisectrices adyacentes de los ángulos de un triángulo cualquiera, forman un triángulo equilátero".



Así, para el $\triangle ABC$, $\overline{AQ}$, $\overline{AR}$, $\overline{BR}$, $\overline{BP}$, $\overline{CP}$ y $\overline{CQ}$ trisecan los ángulos A, B y C, obteniéndose el $\triangle PQR$ equilátero.

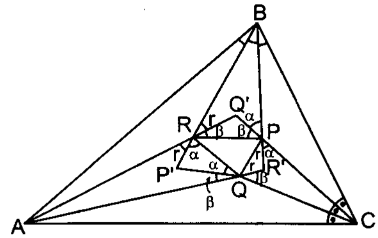
Es dificultoso intentar demostrar el teorema en forma directa. Veremos que es más sencillo empezar por el triángulo equilátero y construir un triángulo general que se puede identificar luego con el triángulo dado ABC.

Sobre los lados $\overline{QR}$, $\overline{RP}$, $\overline{PQ}$, de un $\triangle$ equilátero dado, se constituyen exteriormente triángulo isósceles P'QR, Q'RP y R'PQ en los que los ángulos de la base α, β, r, cumplan:

$\alpha + \beta + r = 120°$, siendo $\alpha < 60°$; $\beta < 60°$; $r < 60°$

En segunda se prolongan los lados por debajo de sus bases correspondientes, hasta cortarse en los puntos A, B y C.

Como $\alpha + \beta + r + 60° = 180°$, podemos deducir:



$\triangle AQR \Rightarrow m\angle QAR = 60° - \alpha$,

puesto que $m\angle RQA = \alpha + \beta$ y $m\angle ARQ = \alpha + r$

Para el $\triangle P'BC$, concluimos que P es su incentro, dado que $\overline{P'P}$ biseca el $\angle P'$, siendo la mitad del ángulo en P':

$\dfrac{180° - 2\alpha}{2} = 90° - \alpha$ y $m\angle BPC = 180° - \alpha = 90° + (90° - \alpha) = 90° + \dfrac{m\angle P'}{2}$

Análogamente, Q es el incentro del $\triangle Q'CA$ y R lo es del $\triangle R'AB$. Por lo tanto, los tres ángulos parciales en C son congruentes; sucediendo lo mismo con los que están en A y B. Es decir, se han trisecado los ángulos del $\triangle ABC$.

Los tres ángulos pequeños en A, mide cada uno:

$\frac{1}{3}(m\angle A) = 60° - \alpha$;

De modo que: $\alpha = 60° - \frac{1}{3}(m\angle A)$

También: $\beta = 60° - \frac{1}{3}(m\angle B)$

$r = 60° - \frac{1}{3}(m\angle C)$

Escogiendo los valores para los ángulos de la base de los triángulos isósceles, aseguramos que el procedimiento anterior concluye en un $\triangle ABC$, semejante al triángulo dado.

Ejemplos:

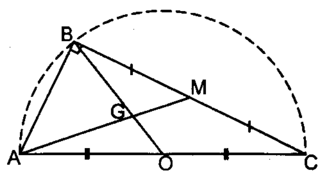
1. ¿Qué fracción de la longitud de la hipotenusa es la distancia del cincuncentro al baricentro de un triángulo rectángulo?

   Resolución:

   Sea ABC, el triángulo, recto en B.

   O: circuncentro; G: baricentro

   conociendo $\overline{AC}$

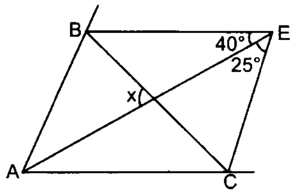


Sabemos que: $OG = \frac{1}{3}(OB)$

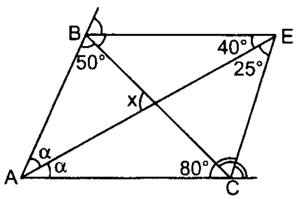
Además, por ser mediana hacia la hipotenusa:

$$OB = \frac{AC}{2} \Rightarrow OG = \frac{1}{3}\left(\frac{AC}{2}\right) \qquad \therefore OG = \frac{1}{6}(AC)$$

2. En el triángulo ABC, E es el excentro, hallar x.



Resolución:



Como E es un excentro, $\overline{BE}$ y $\overline{CE}$ son bisectrices de los ángulos externos B y C, además $\overline{AE}$ biseca el $\angle A$.

Por propiedad:

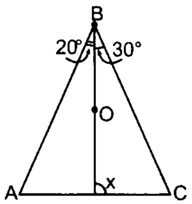
$$m\angle AEB = \frac{m\angle ACB}{2} = 40° \Rightarrow m\angle ACB = 80°$$

$$m\angle AEC = \frac{m\angle ABC}{2} = 25° \Rightarrow m\angle ABC = 50°$$

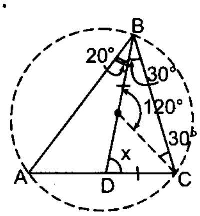
Luego, $m\angle BAC = 50°$ y $\alpha = 25°$

Finalmente: $x = 80° + \alpha \Rightarrow x = 105°$

3. En el triángulo ABC, O es el cincuncentro. Hallar x.



Resolución:



Como O es el circuncentro:

$OA = OB = OC$ (equidista de los vértices).

$\triangle BOC$ es isósceles: $m\angle OCB = 30°$ y $m\angle BOC = 120°$

Por propiedad de este punto notable:

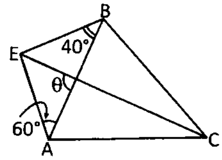
(O: centro). $m\overset{\frown}{BC} = m\angle BOC = 2m\angle A$

$\Rightarrow 120° = 2m\angle A \Rightarrow m\angle A = 60°$

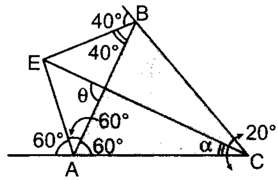
Finalmente, en el $\triangle ABD$: $x = m\angle A + 20°$,

($\angle$ externo): $x = 60° + 20° \quad \therefore x = 80°$

4. En el $\triangle ABC$, E es el excentro, hallar θ.



Resolución:

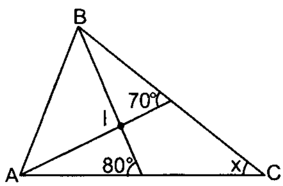


Como E es excentro, $\overline{BE}$ y $\overline{AE}$ son bisectrices de los ángulos externos y $\overline{CE}$ del $\angle C$.

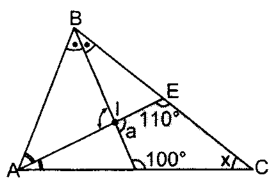
Luego, $\alpha = 10°$ y $\theta = 60° + \alpha$, en el $\triangle ACR$

$\therefore \theta = 70°$

5. En el $\triangle ABC$, I es el incentro, hallar x.



Resolución:



I: incentro $\Rightarrow$ $\overline{BD}$ y $\overline{AE}$ son bisectrices. Sabemos por propiedad que $m\angle AIB = 90° + \frac{m\angle C}{2}$

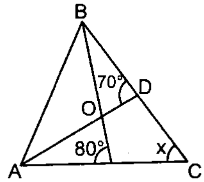
Luego, $a = 90° + \frac{x}{2}$

En el $\square$IECD: $a + 110° + x + 100° = 360°$

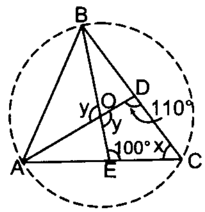
$\Rightarrow 90° + \frac{x}{2} + 110° + x + 100° = 360°$

De donde: $x = 40°$

6. En el triángulo ABC, O es el circuncentro, hallar x.

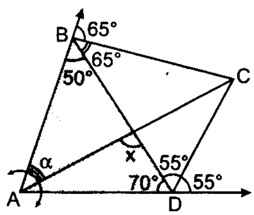


Resolución:



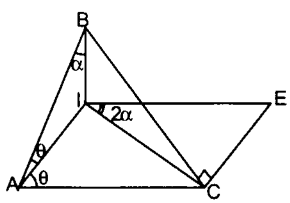
Como O es circuncentro, sabemos por propiedad, que: m∠AOB = 2m∠C
(OA = OB = radio)
$\Rightarrow$ y = 2x
En el ⏢ODCE: y + 110° + x + 100° = 360°
$\Rightarrow$ 2x + 110° + x + 100° = 360°
De donde: x = 50°

7. ABCD, es un cuadrilátero convexo. Hallar la medida del menor ángulo formado por $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, si: m∠BAD = 60°, m∠ABD= 50°, m∠ADB = 70° y m∠BDC = 55°

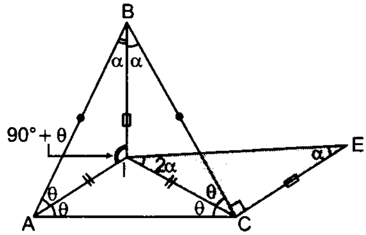


Resolución:
Del gráfico, se observa que C es un excentro del △ABD $\Rightarrow$ $\overline{AC}$ es bisectriz del ∠BAD: α = 30°;
x = 50° + α ∴ x = 80°

8. En la figura: AB = BC, BI = CE y $\overline{BC} \perp \overline{CE}$. hallar α si I es incentro del △ABC.

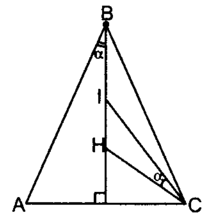


Resolución:

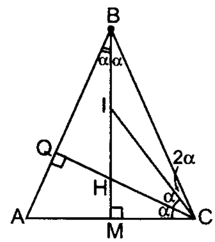


△ABC es isósceles: m∠ACB = m∠BAC = 2θ
△AIC es isósceles: AI = IC
△ICE ≅ △AIB (LAL) $\Rightarrow$ m∠E = m∠ABI $\Rightarrow$ m∠E = α
En el △ABC: 2α + 4θ = 180°
$\Rightarrow$ θ = 45° − α/2 ...(1)
En el △ICE: 2α + α + (90° + θ) = 180°
Con (1): 3α + 45° − α/2 = 90°, de donde: α = 18°

9. En la figura, H es ortocentro e I es incentro, hallar α.



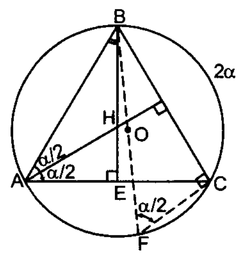
Resolución:



Como H es ortocentro: $\overline{CQ} \perp \overline{AB}$
$\Rightarrow$ m∠QCA = m∠ABM (∠ de lados perpendiculares).
m∠QCA = α
I es incentro. Entonces: ∠BCI = m∠ICM
∠BCI = 2α; m∠MBC = m∠MBA $\Rightarrow$ m∠MBC = α
En el △BMC: m∠MBC + m∠BCM = 90°
α + 4α = 90° ∴ α = 18°

10. Demostrar que en todo triángulo acutángulo ABC, de ortocentro H y circuncentro O:
m∠ABH = m∠OBC.

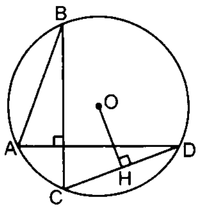
Resolución:



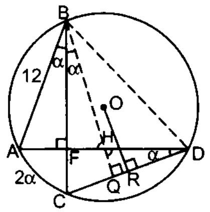
En efecto prolongamos al radio $\overline{BO}$ hasta F.
En el △AEB: si ∠BAE = α
$\Rightarrow$ ∠ABH = 90° − α ...(1)
Pero: m$\widehat{BC}$ = 2m∠BAC $\Rightarrow$ m$\widehat{BC}$ = 2α
y $m\angle F = \frac{\widehat{BC}}{2} = \frac{2\alpha}{2} = \alpha$
Entonces, en el △BCF: m∠OBC = 90° − α ...(2)
De (1) y (2): m∠ABH = m∠OBC

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura, O es centro. $\overline{BC} \perp \overline{AD}$, AB = 12 y $\overline{OH} \perp \overline{CD}$, hallar OH.



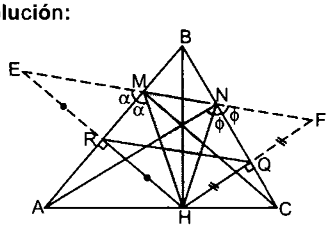
Resolución:



Se traza $\overline{BD}$ y luego $\overline{BQ} \perp \overline{CD}$.
Se observa, que si $m\angle ABC = \alpha$
$\Rightarrow m\overset{\frown}{AC} = 2\alpha$ y $m\angle ADC = \alpha$
$m\angle FBH = m\angle HDQ$ ($\angle$ de lados perpendiculares)
$\Rightarrow m\angle FBH = \alpha$
$\triangle ABH$: isósceles
$\Rightarrow BH = AB \Rightarrow BH = 12$
Para el $\triangle BCD$: H: ortocentro; O: circuncentro
Luego, por propiedad: $OR = \dfrac{HB}{2} \Rightarrow OR = \dfrac{12}{2}$
$\therefore CR = 6$

2. En un triángulo acutángulo ABC, $\overline{BH}$ es altura. Se trazan $\overline{HR} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HQ} \perp \overline{BC}$. Si RQ = 10, hallar el perímetro del triángulo pedal de ABC.

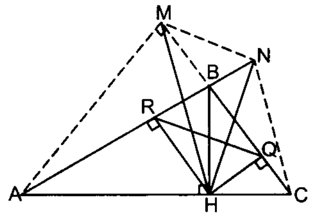
Resolución:



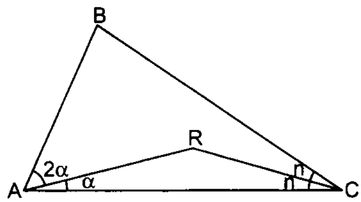
Sea MNH, el triángulo pedal. Se pide:
MH + MN + HN
Recordamos que A, B y C son excentros del MNH. Esto implica que $\overline{MA}$ y $\overline{NC}$ son bisectrices de los ángulos exteriores M y N, respectivamente.
Prolongado $\overline{HR}$ y $\overline{HQ}$ hasta cortar a $\overline{MN}$ en E y F:
$\triangle EMH$ es isósceles ($\overline{MR}$ es altura y bisectriz)
$\Rightarrow EM = MH$ y $ER = RH$ ...(1)
$\triangle HNF$ es isósceles ($\overline{NQ}$ es altura y bisectriz)
$\Rightarrow NF = HN$ y $HQ = QF$ ...(2)
Ahora, usando el teorema de los puntos medios (base media) en el $\triangle EHF$: EF = 2RQ.
EM + MN + NF = 2RQ (Por lo hallado en (1) y (2))
$\Rightarrow MH + MN + HN = 2RQ$
Es decir, perímetro del $\triangle MHN$ = 2RQ
(Propiedad, para todo triángulo acutángulo y obtusángulo)
En el problema, como: RQ = 10
$\therefore$ Perímetro del $\triangle MHN$ = 20.

Nota

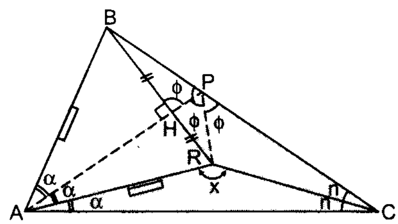
Si ABC fuera un triángulo obtusángulo obtuso en B, $\overline{BH}$ es altura. $\overline{HR} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HQ} \perp \overline{BC}$. $\triangle MHN$ es el triángulo pedal del $\triangle ABC$. Entonces, perímetro de $\triangle MHN$ = 2RQ.



3. En la figura, AB = AR; hallar la medida del ángulo ARC.



Resolución:



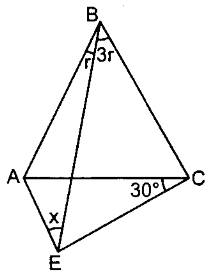
$m\angle ARC = x$
Trazamos $\overline{BR}$ y luego $\overline{AP} \perp \overline{BR}$ en H, como AB = AR, entonces: BH = HR y
$m\angle BAH = m\angle HAR = \alpha$
$\triangle BPR$ es isósceles, ya que $\overline{PH} \perp \overline{BR}$ en su punto medio $\Rightarrow m\angle HPR = m\angle HPB = \phi$.

En el $\triangle APC$, $\overline{AR}$ y $\overline{CR}$ son bisectrices.
$\Rightarrow$ R: incentro del $\triangle APC$.

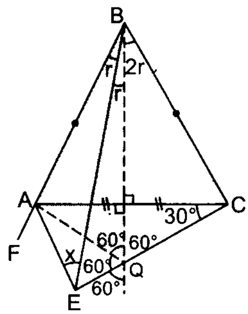
Luego, $\overline{PR}$ biseca el $m\angle APC$: $m\angle RPC = m\angle RPA = \phi$
En P: $3\phi = 180° \Rightarrow \phi = 60°$ y $m\angle APC = 120°$

Por propiedad: $x = 90° + \dfrac{m\angle APC}{2} = 90 + \dfrac{120}{2}$
$\therefore\ x = 150°$

4. En la figura AB = BC, hallar el valor de x.



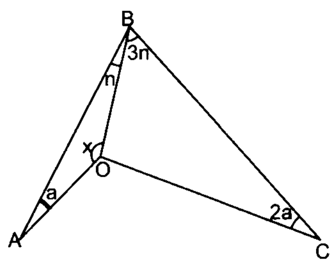
Resolución:



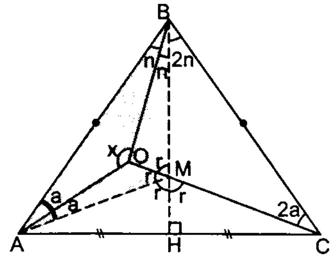
Sea $\overline{BQ} \perp \overline{AC} \Rightarrow \overline{BQ}$ biseca $\overline{AC}$ y
$m\angle ABQ = m\angle QBC = 2r$, ya que AB = BC.
Además, $m\angle ABE = r = m\angle EBQ$.
El $\triangle AQC$, resulta isósceles.
En el $\triangle ABQ$: E es un excentro ($\overline{BE}$ triseca un ángulo interior y $\overline{QE}$ biseca un ángulo exterior).
$\Rightarrow \overline{AE}$ biseca el ángulo externo A, de dicho triángulo ($m\angle FAE = m\angle EAQ$).

Por propiedad:
$x = \dfrac{m\angle AQB}{2} = \dfrac{60°}{2}$ $\therefore\ x = 30°$

5. En la figura: hallar x, si AB = BC.



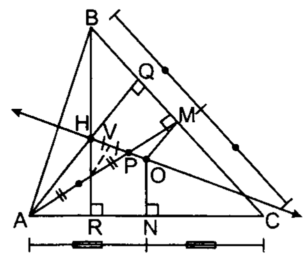
Resolución:



Se trazan $\overline{AC}$; $\overline{BH} \perp \overline{AC}$, cortando a $\overline{OC}$ en M y luego $\overline{MA}$.
Como el $\triangle ABC$ es isósceles: AM = HC; MA = MC; $m\angle ABH = m\angle HBC$ y $m\angle MAB = m\angle MCB$.
O es incentro del $\triangle ABM$ ya que $\overline{AO}$ y $\overline{BO}$ bisecan los ángulos MAB y ABM, respectivamente.
Entonces: $m\angle OMB = m\angle OMA = r \Rightarrow r = 60°$
Finalmente, por propiedad: $x = 90° + \dfrac{m\angle AMB}{2}$
$x = 90° + r$ $\therefore\ x = 150°$

6. Demostrar que en todo triángulo, el ortocentro, baricentro y circuncentro, son colineales. La distancia del ortocentro el baricentro es doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

Resolución:



Sea el $\triangle ABC$, donde L y O, son el ortocentro y circuncentro, respectivamente. Como $\overline{AM}$ es mediana, bastará probar que AP = 2PM, para concluir que P es el baricentro del triángulo.

Para ello, usaremos lo demostrado en el problema anterior. AH = 2(OM). Si T y V bisecan $\overline{AP}$ y $\overline{HP}$, respectivamente; entonces, en el $\triangle AHP$: $\overline{TV} \parallel \overline{AH}$ y $TV = \dfrac{AH}{2}$, por el teorema de los puntos medios. Además, por otro lado, $\overline{OM} \parallel \overline{TV}$ y que $\overline{OM} \parallel \overline{AH}$.
También recordemos que: $OM = \dfrac{AH}{2}$

Entonces, concluimos que el $\triangle MOP$ es congruente al $\triangle TVP$, ya que $OM = TV = \dfrac{AH}{2}$, $m\angle PMO = m\angle PTV$ y $m\angle TVP = m\angle MOP$. (Postulado ALA).

Luego, TP = PM y por lo tanto, AP = 2PM, con lo cual queda demostrado que P es el baricentro del $\triangle ABC$.

El ortocentro, baricentro y circuncentro de todo triángulo, son colineales. La recta que los contiene es llamada recta de Euler.

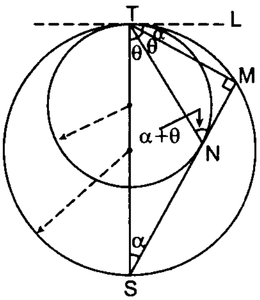
Asimismo, como VP = PO y LP = 2(VP), entonces: HP = 2(PO), con lo cual queda demostrado que la distancia del ortocentro al baricentro es el doble de la distancia del baricentro al circuncentro.

Nota

A pesar que, para la demostración de estas dos propiedades se ha usado un triángulo acutángulo, los resultados son válidos también para los triángulos obtusángulos y los rectángulos. El lector puede probar esto.

7. Dos circunferencias son tangentes interiores en el punto T. El segmento ST es diámetro de la circunferencia mayor. La cuerda $\overline{SM}$ de la circunferencia mayor es tangente a la circunferencia menor en el punto N. Entonces, para el triángulo STM, el segmento TN es:

Resolución:



Se traza la recta tangente L por el punto T.

Luego $\angle m\overset{\frown}{TM} = 2m\angle S = 2\alpha$

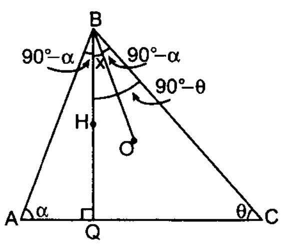
Si $m\angle NTM = \theta \Rightarrow m\angle TNM = \alpha + \theta$.

$\triangle STN$: $m\angle STN = \theta$.

$\therefore$ $\overline{TN}$ es la bisectriz.

8. En un $\triangle ABC$, H es el ortocentro y O es el circuncentro. Si $m\angle BAC - m\angle BCA = \phi$, hallar la $m\angle HBO$.

Resolución:



Recordemos que: $m\angle ABQ = m\angle OBC = 90° - \alpha$

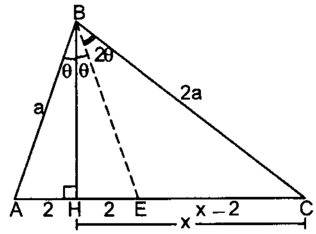
$\triangle BQC$: $m\angle QBC = 90° - \theta$

$\Rightarrow x + 90° - \alpha = 90° - \theta \Rightarrow x = \alpha - \theta = \phi$

$\therefore x = \phi$

9. En un triángulo ABC, donde BC = 2AB, se traza la altura $\overline{BH}$, tal que $m\angle HBC = 3m\angle ABH$. Si AH = 2, hallar HC.

Resolución:



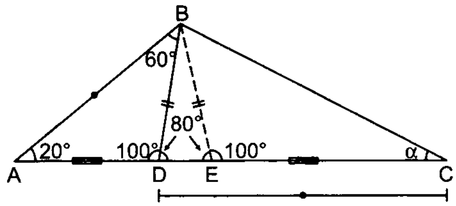
$\triangle ABE$ isósceles: AH = HE = 2

$\triangle ABC$; por teorema de la bisectriz

$\frac{1}{2} = \frac{4}{x-2} \Rightarrow x - 2 = 8 \quad \therefore x = 10$

10. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, de manera que $m\angle ABD = 3m\angle BAD = 60°$, AB = DC, calcular la $m\angle BCA$.

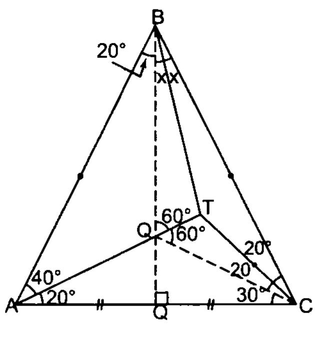
Resolución



$\triangle ABD \cong \triangle CBE$ (LAL) $\quad \therefore \alpha = 20°$

11. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se ubica el punto interior T, tal que la $m\angle BAT = 40°$, $m\angle TAC = 30°$, $m\angle BCT = 20°$. Calcular la $m\angle CBT$.

Resolución:



Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$.

$\overline{BH}$ es bisectriz del ángulo ABC:

$m\angle ABH = m\angle HBC = 20°$

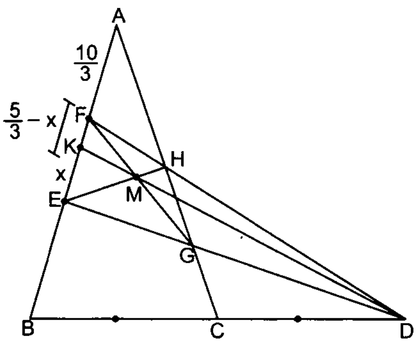
Pero: $m\angle BQT = m\angle TQC = 60°$

y $m\angle QCT = m\angle BCT = 20°$

Entonces, T es el incentro del triángulo QBC.
Luego, $m\angle QBT = m\angle TBC = \alpha$
$x + x = 20°$ $\quad \therefore\ x = 10°$

12. Sea el triángulo BAC isósceles ($\overline{BA} \cong \overline{AC}$), en la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica en el punto D, tal que CD = BC. En el lado $\overline{AB}$ se ubican los puntos E y F tal que EA = EB y FA = $\frac{AB}{3}$. Los segmentos ED y FD intersecan al lado $\overline{AC}$ en los puntos G y H; los segmentos EH y FG se intersecan en el punto M y la prolongación de $\overline{DM}$ intersecan al lado $\overline{AB}$ en el punto K. Si AB = 10, hallar la longitud de EK.

Resolución:

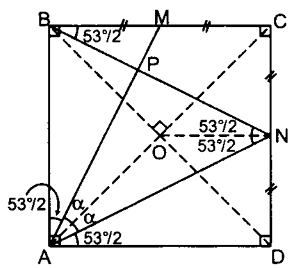


En el cuadrilátero completo EAHD, los puntos E, K, F, A son armónicos, se cumple:

$$\frac{x}{\frac{5}{3} - x} = \frac{5}{\frac{10}{3}} \qquad \therefore\ x = 1$$

13. En un cuadrado ABCD, M y N son puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, P es la intersección de $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$. El centro del cuadrado, ¿qué relación tiene con el triángulo APN?

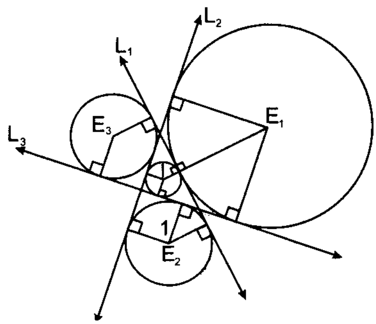
Resolución:



Se traza AN:
$m\angle OAD = m\angle OAB = 45°$
$m\angle PAC = m\angle NAO = \alpha$
$m\angle NAD = m\angle MAB = 53°/2$
$\overline{ON} \parallel \overline{BC} \parallel \overline{AD}$ $\quad m\angle BNO = m\angle ANO = 53°/2$
$\therefore$ $\triangle APN$: $\overline{AO}$ y $\overline{NO}$ son bisectrices interiores
O es el incentro del $\triangle APN$

14. Tres rectas secantes se intersecan dos a dos. Cuántos puntos del plano determinado por dichas rectas existen tal que equidisten de dichas rectas.

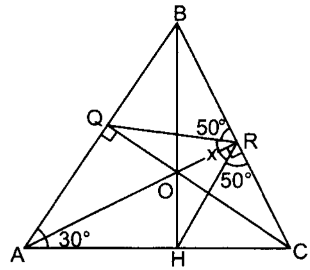
Resolución:



Se observa que: E_1; E_2; E_3 y I equidistan de $\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{L_3}$.
No existen otros puntos más, por lo tanto, son **4**.

15. Se tiene un triángulo acutángulo ABC: $\overline{BR}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{AR}$, son alturas. Si $m\angle A = 50°$. Hallar la $m\angle QRH$.

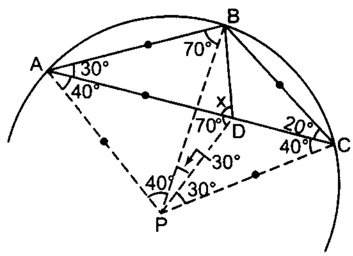
Resolución:



$\square$AQRC inscriptible $m\angle QRB = 50°$
$\Rightarrow m\angle QRA = 40°$ ...(1)
$\square$BRHA inscriptible $m\angle HRC = 50°$
$\Rightarrow m\angle ARH = 40°$ ...(2)
Se obtiene: $\overline{AR}$ bisectriz interior del $\triangle QRH$.
(1) + (2): $\quad \therefore\ x = 80°$

16. Se tiene un $\triangle ABC$, donde $m\angle A = 30°$ y $m\angle C = 20°$. Se traza la ceviana $\overline{BD}$ tal que AD = BC. Hallar la $m\angle ADB$.

Resolución:



P circuncentro del $\triangle ABC$

BPC es $\triangle$Equilátero ($m\angle BPC = m\angle BCP = 60°$)

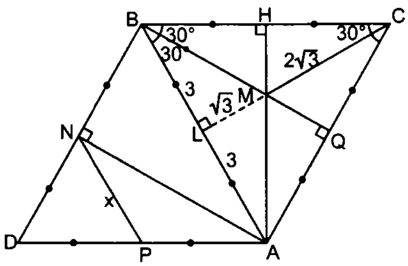
PAD es $\triangle$isósceles ($AP = AD$)

ABDP⏢ inscriptible ($m\angle ABP = m\angle ADP = 70°$)

$x = m\angle APB$ $\therefore$ $x = 40°$

17. Se tienen dos triángulos equiláteros ABC y ABD de lado común $\overline{AB}$. Por A se traza $\overline{AH}$ y $\overline{AN}$ perpendiculares a $\overline{CB}$ y $\overline{BD}$ respectivamente (H en $\overline{CB}$ y N en $\overline{BD}$). Se toma P punto medio de $\overline{AD}$. Se traza la mediana $\overline{BQ}$ que corta en M a $\overline{CL}$. Si $\overline{CM} = 2\sqrt{3}$. Calcular $\overline{NP}$.

Resolución:



$\triangle BDA \cong \triangle BCA$ (equiláteros)

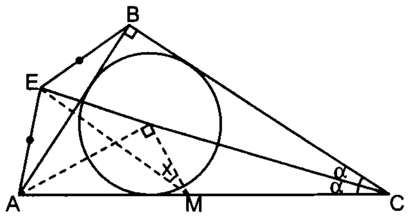
$ML = \dfrac{CL}{3} = \sqrt{3}$

⊿BLC (30° y 60°): $BL = 3$ $\wedge$ $BA = 6$

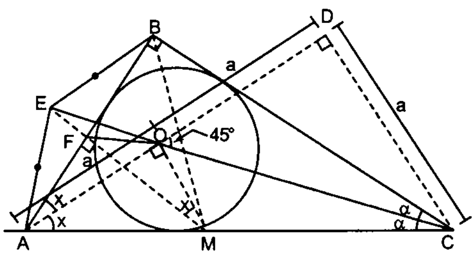
Pero $NP = \dfrac{BA}{2}$ (base media)

$\therefore$ $x = 3$

18. Si $AM = MC$, hallar x.



Resolución:



⏢AEBM: cuadrilátero simétrico: $\overline{AB} \perp \overline{EM}$

⏢AFOM: Cuadrilátero inscriptible $m\angle FAO = x$

Pero $\overline{AO}$: bisectriz de $\angle BAC$

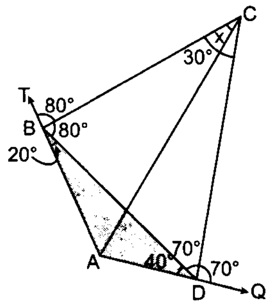
$m\angle FAD = m\angle OAM = x$

⊿ODC (45°): $OD = DC = a$

⊿ADC: $AD = 2DC = 2a$ $\therefore$ $x = 53°/2$

19. Con un cuadrilátero ABCD, la $m\angle DBA = 20°$, $m\angle CBD = 80°$, la $m\angle CDB = 70°$ y la $m\angle BDA = 40°$. Calcular la $m\angle ACB$.

Resolución:



$\overrightarrow{BC}$ es bisectriz del ángulo TBD

$\overrightarrow{DC}$ es bisectriz del ángulo BDQ.

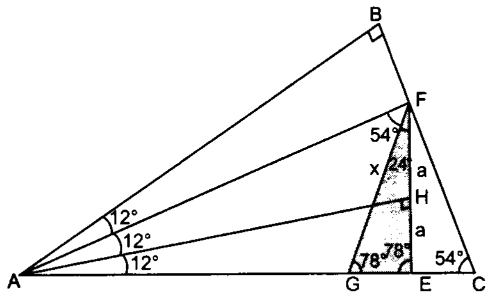
Entonces, C es el excentro del triángulo ABD, relativo al lado $\overline{BD}$.

Por propiedad:

$\therefore$ $x = \dfrac{40°}{2} = 20°$

20. En un triángulo ABC, $m\angle B = 90°$, se traza la ceviana AF, de manera que la $m\angle BAF = 12°$, $G \in \overline{AC}$ de modo que $m\angle AFG = m\angle C = 54°$. Si $BF = a$. Hallar FG.

Resolución:



Se traza $\overline{FE}$, de modo que $m\angle FEG = 78°$

AFE es isósceles: $m\angle AFE = m\angle AEF = 78°$

se traza $AH = EF$.

$\Rightarrow$ $m\angle BAF = m\angle FAH = m\angle HAE = 12°$.

Por teorema de la bisectriz de un ángulo:

$BF = FH = a$.

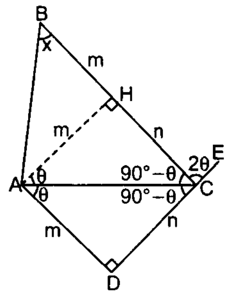
Pero, $FH = HE = a$

Como el triángulo GFE es isósceles: $FG = FE$.

$\therefore$ $x = 2a$

21. En el lado AC de un triángulo ABC se construye el triángulo rectángulo ACD (recto en D) de manera que m∠ECB = 2m∠CAD (E ∈ a la prolongación de $\overline{DC}$). Si AD + DC = CB. Hallar la m∠ABC.

Resolución:



Dato: BC = m + n

Pero, m∠ACD = m∠ACB = 90° − θ.

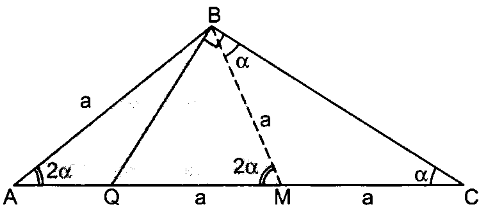
Se traza $\overline{AH} \perp \overline{BC}$, por teorema:

HC = BH = n ⇒ BH = AH = m

⊾AHB es isósceles: ∴ x = 45°

22. Dado un triángulo ABC obtuso en B por el punto B se traza una perpendicular al lado $\overline{BC}$, $\overline{QB} \perp \overline{BC}$; Q ∈ $\overline{AC}$. Si AB = a y m∠BAC = 2m∠BCA. Hallar QC.

Resolución:



⊾QBC: se traza la mediana $\overline{BM}$:

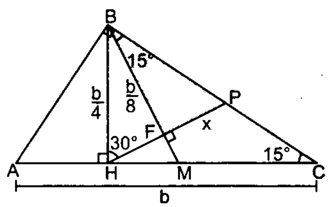
m∠C = m∠MBC = α

△ABM es isósceles: AB = BM = a.

Luego: QC = a + a ∴ QC = 2a

23. En un triángulo ABC (recto en B), la m∠C = 15°, se traza la altura $\overline{BH}$ y la mediana $\overline{BM}$. Por H se traza $\overline{HF} \perp \overline{BM}$ que al prolongarse interseca en P a $\overline{BC}$. Si AC = b. Hallar FP.

Resolución:



⊾BFP:

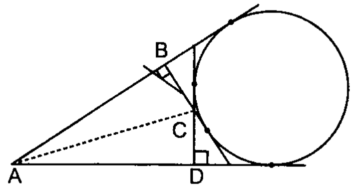
$$\tan 15° = \frac{x}{b/8} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$$

Despejando x y racionalizando: $x = \frac{b}{8}\left[\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1}\right]$

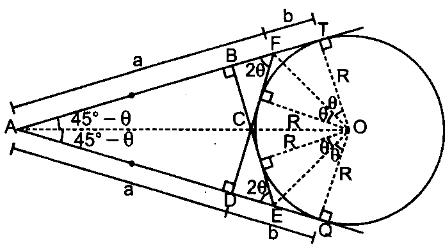
Simplificando:

$$\therefore\ x = \frac{b(2-\sqrt{3})}{8}$$

24. Con respecto a los exradios de los triángulos ABC y ADC, r_1 y r_2, respectivamente, se puede afirmar que:



Resolución:



$\overline{AO}$ es bisectriz del ángulo TAQ

⇒ m∠TAO = m∠OAQ

⊾FTO ≅ ⊾EQO (ALA): FT = EQ = b

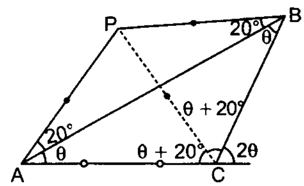
Pero: AT = AQ ⇒ AF + b = AE + b ⇒ AF = AE

⊾ABE ≅ ⊾ADF (ALA): AB = AD

⊾ABC ≅ ⊾ADC (ALA): $r_1 = r_2$

25. En un triángulo ABC, P es un punto en la mediatriz de $\overline{AC}$ (P es exterior al triángulo), tal que PA = PB. Si la m∠ABP = 20° y el ángulo exterior en C mide el doble que el ángulo BAC, hallar la medida del ángulo ABC.

Resolución:



Sea: m∠ABC = θ

Del gráfico:

$\overline{PQ}$: mediana y altura del △APC

Así, P es el circuncentro del △ABC

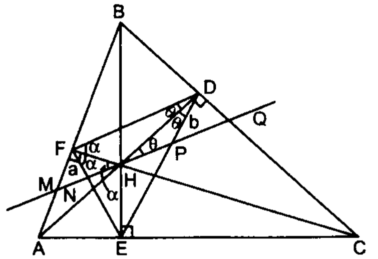
⇒ △APC (isósceles): AP = PC = PC

Luego: θ + 20° + θ + 20° + 2θ = 180°

⇒ 4θ = 140° ∴ θ = 35°

26. En un triángulo acutángulo ABC, las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren en H. Por este punto se traza la paralela a FD, que interseca a $\overline{AB}$, $\overline{FE}$, $\overline{DE}$ y $\overline{BC}$, en los puntos M, N, P y Q, respectivamente. Si FN = a y DP = b, hallar MQ.

Resolución:



$\triangle$FED: $\triangle$ órtico o pedal $\Rightarrow$ H: incentro del $\triangle$FED

$\Rightarrow m\angle EFH = m\angle HFD = m\angle FHM = \alpha$

$\Rightarrow m\angle FDH = m\angle HDE = m\angle DHQ = \theta$

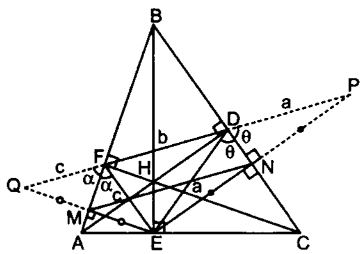
En ⊾MFH: MN = NH = FN = a $\Rightarrow$ MH = 2a

⊾HDQ: HP = PQ = PD = b $\Rightarrow$ HQ = 2b

$\therefore$ MQ = 2a + 2b

27. En un triángulo acutángulo ABC, las alturas $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ concurren en H. Se trazan las perpendiculares $\overline{EM}$ y $\overline{EN}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si MN = 10, hallar el perímetro del triángulo DEF.

Resolución:



Piden: $2p_{\triangle FDE} \Rightarrow 2p_{\triangle FDE} = a + b + c$

Dato: MN = 10

$\triangle$FED: $\triangle$ órtico o pedal $\Rightarrow$ A, B y C: excentros del $\triangle$FED

Construimos los triángulos QFE y EDP.

$\Rightarrow m\angle EDN = m\angle NDP = \theta$

$\Rightarrow m\angle QFM = m\angle MFE = \alpha$

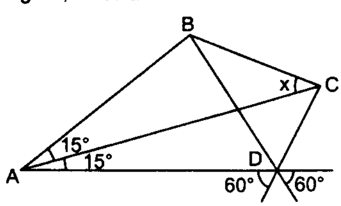
$\triangle$QFE (isósceles): QF = FE = c

$\triangle$EDP (isósceles): ED = DP = a

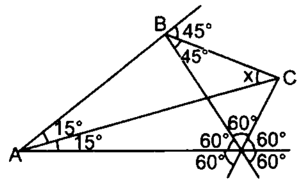
$\triangle$QEP (por base media): a + b + c = 2(10)

$\therefore 2p_{\triangle DEF} = 20$

28. En la figura, calcular x



Resolución:



$\triangle$ABD: $\overline{AC}$ es bisectriz interior y $\overline{DC}$ bisectriz exterior

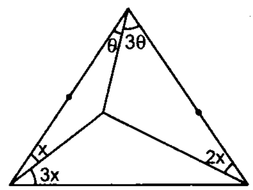
$\Rightarrow$ C es el excentro.

$\Rightarrow$ $\overline{BC}$ es bisectriz exterior

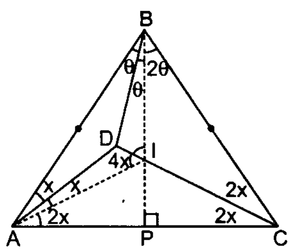
$\triangle$ABC: 15° + x = 45° (por ángulo exterior)

$\therefore$ x = 30°

29. Del gráfico, hallar x:



Resolución:



Trazamos $\overline{BP} \perp \overline{AC}$

$\triangle$ABC (isósceles) $m\angle ABP = m\angle PBC = 2\theta$

También: $m\angle BAC = m\angle BCA = 4x$

$\Rightarrow m\angle DCA = 2x$

⊾APB: $4x + 2\theta = 90°$ ...(1)

Trazamos: $\overline{AI} \Rightarrow m\angle BAI = m\angle IAP = 2x$

$\Rightarrow m\angle DIA = 4x$

$\triangle$ABI: D es el incentro

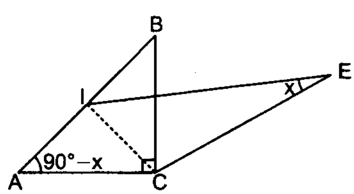
$\Rightarrow m\angle BID = m\angle DIA = 4x$

$\triangle$BIC: $2\theta + 2x = 4x \Rightarrow \theta = x$ ...(2)

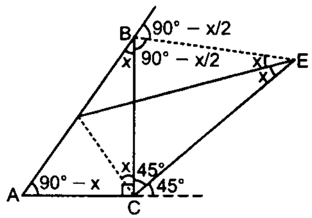
(2) en (1): $4x + 2x = 90° \Rightarrow 6x = 90°$

$\therefore$ x = 15°

30. En la figura E es el excentro de $\triangle$ABC. Calcular x si AI = IB



Resolución:



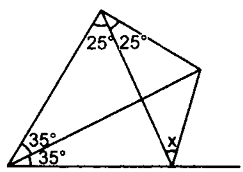
$\overline{IC}$ (mediana): AI = IB = IC

$\Rightarrow m\angle ICB = x$

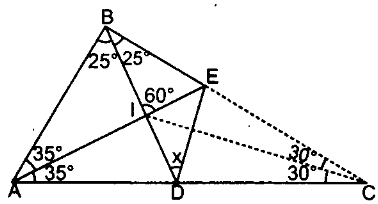
⏢ICEB (inscriptible): $m\angle IEB = m\angle ICB = x$

$\triangle BEC$: $\left(90° - \frac{x}{2}\right) + 2x + 45° = 180° \quad \therefore\ x = 30°$

31. Calcular x en la figura mostrada.



Resolución:



$\triangle ABC$; $m\angle C = 60°$

Prolongamos $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$ hasta C

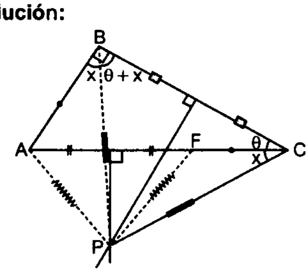
I es incentro del $\triangle ABC$

Como: $m\angle BIE = m\angle DCE \Rightarrow$ ⏢DIEC inscriptible

$\Rightarrow x = m\angle ICE \quad \therefore\ x = 30°$

32. Se tiene el triángulo rectángulo ABC, F ∈ $\overline{AC}$, AB = FC, las mediatrices de $\overline{BC}$ y $\overline{AF}$ se intersecan en P. Si la $m\angle BCA$ = q, hallar la $m\angle ACP$.

Resolución:



Por teorema de la mediatriz: PA = PF ∧ PB = PC

Por dato: AB = FC

Luego: $\triangle PFC \cong \triangle PAB$ (LLL)

$\Rightarrow m\angle ABP = x$

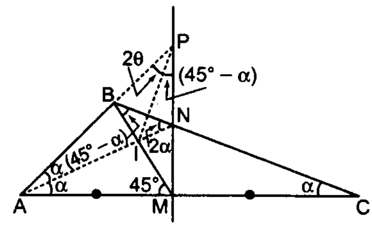
Como: $m\angle PBC = m\angle C = x + \theta$

$\Rightarrow x + x + \theta = 90° \Rightarrow 2x = 90° - \theta$

$\therefore\ x = 45° - \theta/2$

33. En un $\triangle ABC$ se traza la mediana $\overline{BM}$. Si $m\angle BMA = 45°$ y $2m\angle BCA = m\angle BAC$, hallar la $m\angle BCA$.

Resolución:



◺AMP: I es incentro según la figura

De la figura: $m\angle APM = 90° - 2\alpha$

$\Rightarrow m\angle API = m\angle MPI = 45° - \alpha$

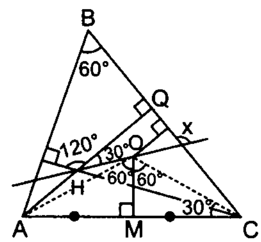
Pero: $m\angle MBC = 45° - \alpha$, entonces el cuadrilátero BPNI es inscriptible.

En consecuencia: $m\angle ANB = 2\alpha = m\angle BPI$

$\Rightarrow 2\alpha = 45° - a \quad \therefore\ \alpha = 15°$

34. En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 60°$. Hallar la medida del ángulo obtuso que determina la recta de Euler con el lado $\overline{BC}$.

Resolución:



Si: $m\angle B = 60° \Rightarrow m\angle AOM = m\angle MOC = 60°$

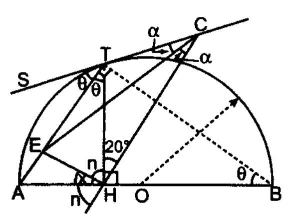
Pero: $m\angle AHC = 120°$, entonces el cuadrilátero AHOC es inscriptible.

$\Rightarrow m\angle QHO = m\angle ACO = 30°$

En consecuencia: $x = 90° + 30° \quad \therefore\ x = 120°$

35. Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$; H y T son puntos del diámetro y de la semicircunferencia respectivamente, tal que $\overline{HT} \perp \overline{AB}$, por T y H pasan una recta tangente y una recta secante que se intersecan en C. Si desde el ángulo TCH se traza una bisectriz que interseca a $\overline{AT}$ en E y $m\angle CHB = 70°$; hallar la $m\angle AHE$.

Resolución:



$\overline{TA}$ es bisectriz del ángulo STH

Por ángulo inscrito: m∠STA = m∠TBA = θ

⇒ $\overline{CE}$ es bisectriz del ángulo TCH.

Luego: E es excentro del triángulo HTC relativo al lado $\overline{TH}$.

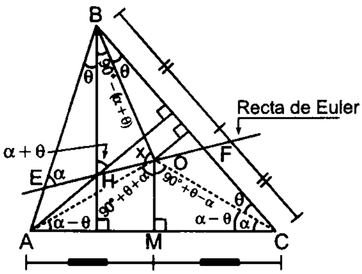
⇒ $\overline{HE}$ es bisectriz exterior.

$n + n + 20° = 180 \Rightarrow 2n = 160° \Rightarrow n = 80°$

Como: $\overline{TH} \perp \overline{AB} \Rightarrow x + 80° = 90° \quad \therefore x = 10°$

36. En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler determina con sus lados un cuadrilátero inscriptible. Calcular la medida del ángulo que forman dicha recta de Euler y el diámetro que pasa por el vértice de donde parten los lados que intersecan a la recta de Euler.

Resolución:



H: ortocentro; O: circuncentro

Sabemos que: m∠ABH = m∠OBC = θ

Por condición: m∠BEH = m∠C = α

⇒ m∠AOM = m∠MOC = 90° + θ − α

Luego: m∠HBO = 90° − (α + θ)

ΔEBH: m∠BHO = α + θ

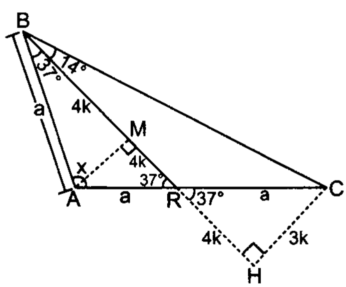
ΔHBO: x + (α + θ) + 90° − (α + θ) = 180°

∴ x = 90°

37. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BR}$; tal que AB = AR, m∠RBC = 14°. Hallar la m∠BAR.

Resolución:

Sea: m∠BAR = x



En el triángulo isósceles ABR trazamos la mediana $\overline{AM}$ que también es altura y bisectriz.

Trazamos: $\overline{CH} \perp \overline{BR}$

⊾AMR ≅ ⊾CHR ⇒ RM = RH

Sea: CH = 3k

En ⊾BHC (14° y 76°): BH: = 4(CH) = 12k

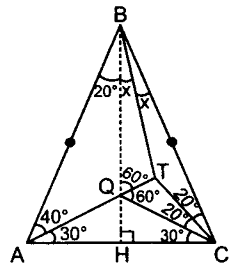
Luego: BM = MR = RH = 4k

⊾RHC (37° y 53°): m∠CRH = 37°

ΔABR (isósceles): x + 2(37°) = 180° ∴ x = 106°

38. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), se ubica el punto interior T tal que la m∠BAT = 40°, m∠TAC = 30°, m∠BCT = 20°. Calcular la m∠CBT.

Resolución:



Trazamos: $\overline{BH} \perp \overline{AC}$

$\overline{BH}$ es bisectriz del ángulo ABC

m∠ABH = m∠HBC = 20°

Pero: m∠BQT = m∠TQC = 60° y

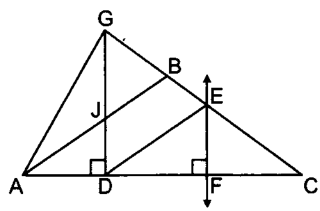
m∠QCT = m∠BCT = 20°

Entonces: T es el incentro del triángulo QBC

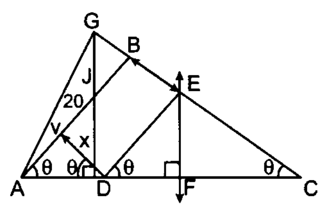
Luego: m∠QBT = m∠TBC = x

x + x = 20° ∴ x = 10°

39. En la figura, $\overline{EF}$ es la mediatriz de $\overline{DC}$, $\overline{AB}$ // $\overline{DE}$ y AJ = 20. Calcular BE.



Resolución:



Por teorema de la mediatriz:

m∠EDF = m∠ECF = θ

Como: $\overline{DE}$ // $\overline{AB}$ ⇒ m∠BAD = m∠EDC = θ

Trazamos: $\overline{DV}$ // $\overline{BE}$ ⇒ m∠VDA = θ

▱VDEB (paralelogramo): VD = x

⊾ADJ: m∠ADV = m∠VAD = θ

⇒ m∠VDJ = m∠DJV

Luego: ΔAVD ∧ ΔDVJ son isósceles

⇒ AV = VJ = VD ∴ x = 10

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

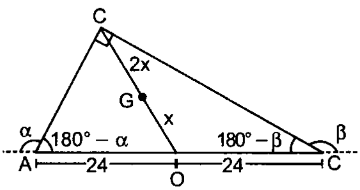
PROBLEMA 1 (UNI 2003 - I)

La suma de dos ángulos exteriores de un triángulo mide 270°, el lado mayor mide 48 m. Hallar la distancia del baricentro al circuncentro.

A) 6 m B) 8 m C) 12 m
D) 16 m E) 20 m

Resolución:

Por los datos del problema, sabemos que se trata de un triángulo rectángulo:

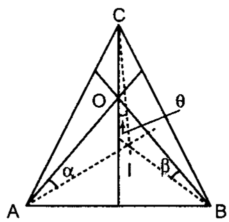


$\alpha + \beta = 270° \Rightarrow m\angle A + m\angle B + m\angle C = 180°$
$360° - (\alpha + \beta) + m\angle C = 180° \Rightarrow m\angle C = 90°$
Luego: $3x = 24 \quad \therefore x = 8$ m

Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - II)

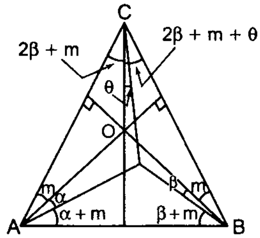
En la figura mostrada el punto O es el ortocentro e I es el incentro del $\triangle ABC$. Hallar la relación entre θ, α y β.



A) $\beta = 2\alpha - \theta$ B) $\beta = 2(\alpha - \theta)$ C) $\beta = \dfrac{\alpha + \theta}{2}$
D) $\beta = \dfrac{\alpha + \theta}{4}$ E) $\beta = \alpha - \theta$

Resolución:

Graficando:



Piden la relación entre α, β y θ.
Sea: $m\angle CBO = m \Rightarrow m\angle CAO = m$
Por incentro: $m\angle IAB = \alpha + m$; $m\angle IBA = \beta + m$
Por ortocentro: $m\angle ACO = 2\beta + m$
Por incentro: $m\angle ICB = 2\beta + m + \theta$
Se observa: $m\angle OAB = m\angle OCB$
$\Rightarrow 2\alpha + m = \theta + 2\beta + m + \theta \quad \therefore \beta = \alpha - \theta$

Clave: E

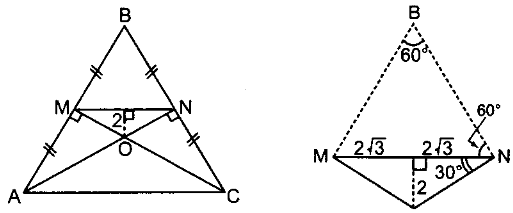
PROBLEMA 3 (UNI 2007 - I)

Se tiene un triángulo equilátero, donde la distancia del ortocentro a la recta que une los puntos medios de dos lados del triángulo es 2, calcule la longitud del lado del triángulo.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) $8\sqrt{2}$

Resolución:

Sea:



Del gráfico vemos que la base media mide $4\sqrt{3}$ luego cada lado medirá $8\sqrt{3}$ por ser un triángulo equilátero.

Clave: E

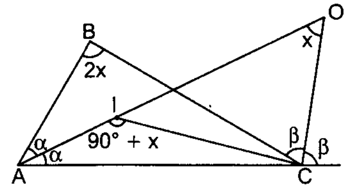
PROBLEMA 4 (UNI 2010 - I)

En un triángulo ABC, denote por I al incentro y por O a la intersección de la bisectriz interior del ángulo A con la bisectriz exterior del ángulo C.
Si: $m\angle AIC + m\angle COA = 150°$, halle $m\angle COA$.

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 35° E) 40°

Resolución:

Nos piden: $m\angle COA = x$
Dato: $m\angle AIC + m\angle COA = 150°$ ...(1)



Por propiedad: $m\angle ABC = 2m\angle AOC$
$\Rightarrow m\angle ABC = 2x$
Por propiedad: $M\angle AIC = 90° + \dfrac{m\angle ABC}{2}$
$m + AIC = 90° + x$
Luego, en (1): $m\angle AIC + m\angle COA = 150°$
$x + 90° + x = 150° \quad \therefore x = 30°$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

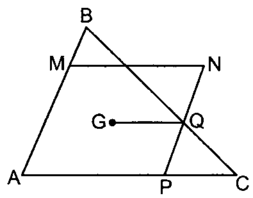
1. En un triángulo acutángulo ABC, la recta de Euler interseca a $\overline{BC}$ y $\overline{AB}$ en los puntos M y N respectivamente tal que BM = BN, calcular m∠ABC.

A) 45° B) 75° C) 72°
D) 53° E) 60°

2. En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H; sea M, P y L puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BH}$ respectivamente. Si m∠BAC = α, calcular m∠MLP.

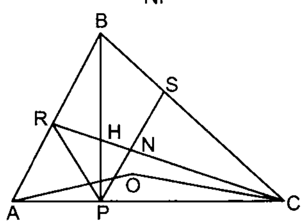
A) 3α B) $\alpha/2$ C) $3\alpha/2$
D) α E) 2α

3. En el gráfico, G es baricentro de la región triangular ABC y punto de intersección de las diagonales del paralelogramo AMNP. Calcular $\frac{GQ}{AC}$.



A) 1/2 B) 1/3 C) 2/5
D) 3/7 E) 4/7

4. En el gráfico, H y O son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, m∠PSC + m∠OAC = 90° y BC = 3(RP), calcular $\frac{PC}{NP}$.

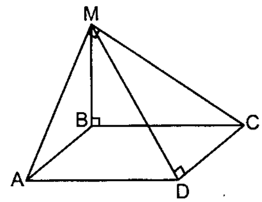


A) 1 B) 2 C) 1/3
D) 3 E) 3/2

5. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubican los puntos M, N y P, tal que M ∈ $\overset{\frown}{AN}$ y P ∈ $\overset{\frown}{NB}$. Desde P se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a $\overline{AB}$ (H ∈ $\overline{AB}$) si $\overline{NB}$ y $\overline{MB}$ intersecan a $\overline{PH}$ en S y Q. Luego, se ubica T en la región exterior relativa a $\overline{MN}$. Si NS = SQ; MT = TN, m∠MTN = m∠SQB y $\overleftrightarrow{MS} \cap \overleftrightarrow{NT} = \{O\}$ ¿qué punto notable es O del triángulo MNB?

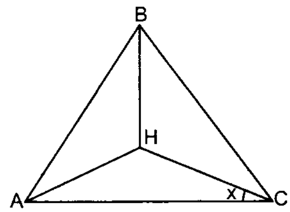
A) Circuncentro B) Incentro C) Ortocentro
D) Baricentro E) Excentro

6. El gráfico ABCD es un rombo, calcular $\frac{m\angle DMC}{m\angle MAB}$



A) 1 B) 1/2 C) 2 D) 1/3 E) 1/4

7. En la figura, H es el ortocentro del triángulo acutángulo ABC y BC = 2(AH), calcular x.

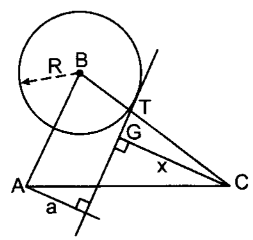


A) 37°/2 B) 14° C) 45°
D) 53°/2 E) 8°

8. Según la figura, O y G son el incentro y baricentro de las regiones triangulares ABC y DNC respectivamente, siendo DP = PC, calcular $\frac{DO}{NG}$.

A) 2/3 B) 3/2 C) $\sqrt{2}/2$
D) 1/2 E) 2

9. Según el gráfico, G es baricentro de la región ABC. Calcular x en función de a y R (T es punto de tangencia).



A) R + a B) 2R − a C) R + 2a
D) 3R − 2a E) $\frac{R+a}{2}$

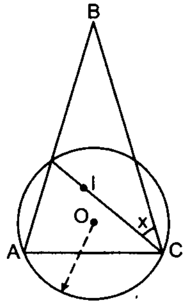
10. En un triángulo ABC, con diámetro $\overline{AC}$, se traza una semicircunferencia que contiene al baricentro G de la región ABC. Si AG = $2\sqrt{5}$ y m$\overset{\frown}{AG}$ = 53°. Calcular BC.

A) $5\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{85}$ C) $4\sqrt{34}$
D) $2\sqrt{34}$ E) $\sqrt{85}$

11. En un triángulo ABC de ortocentro H, la medida del ángulo ABC es θ, en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ se ubica el punto E, tal que $m\angle HAC = m\angle HEC$, calcular la $m\angle BEH$.

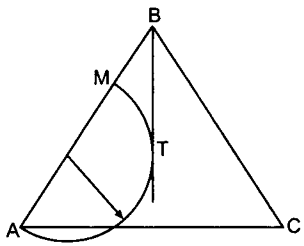
A) θ B) $\theta/2$ C) $90° - 2\theta$
D) $90° - \theta$ E) 2θ

12. En el gráfico I y O son incentro y ortocentro del triángulo respectivamente, calcular x.



A) 30° B) 36° C) 37°
D) 45° E) 53°

13. En el gráfico, T es punto de tangencia y ortocentro del triángulo ABC; $m\overset{\frown}{MT} = 60°$; calcular $\frac{MB}{AC}$.



A) 1/3 B) 1/2 C) 1/4
D) 1/5 E) 2/3

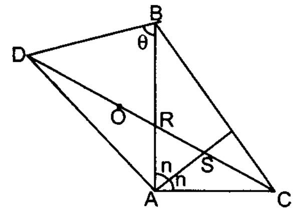
14. En un cuadrante AOB, en el arco AB se ubica el punto P trazándose el rectángulo PMOS ($M \in \overline{AO}$), luego se traza ($\overline{PQ} \perp \overline{AB}$). ¿Qué punto notable es Q en el triángulo MPS?

A) Circuncentro B) Baricentro C) Ortocentro
D) Incentro E) Excentro

15. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior BM. Luego, se ubican los ortocentros H_1 y H_2 en los triángulos ABM y BMC respectivamente. Si $m\angle ABC = 80°$. Calcular $m\angle H_1MH_2$.

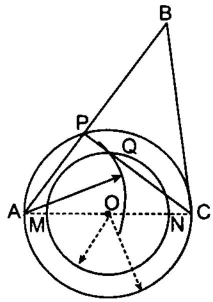
A) 70° B) 80° C) 75°
D) 85° E) 60°

16. En el gráfico:
O: circuncentro del $\triangle ABD$
D: excentro del $\triangle ABC$ relativo al lado AB.
Siendo DO = a y OR = b. Calcular RS.



A) $2a - \frac{b}{2}$ B) $a - b$ C) $a - 2b$
D) $a - \frac{b}{2}$ E) $2a - b$

17. En la figura, MN = AQ y AC = BC, ¿qué punto notable es Q del triángulo ACB?



A) Ortocentro B) Baricentro C) Incentro
D) Circuncentro E) Cevacentro

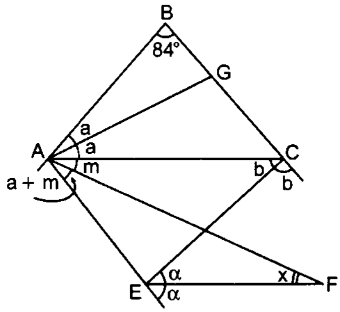
18. En un cuadrado ABCD con centro en B, se traza el arco AC, luego se ubica M y N en $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, siendo $\overline{MN}$ tangente a $\overset{\frown}{AC}$ en T, si $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ intersecan a $\overline{AC}$ en P y Q respectivamente, entonces el triángulo PTQ es:

A) Acutángulo B) Obtusángulo
C) Rectángulo D) Equilátero
E) Isósceles

19. En un triángulo acutángulo ABC, H es ortocentro y O es circuncentro. Calcular $m\angle ABC$, si: $m\angle AHC = m\angle AOC$

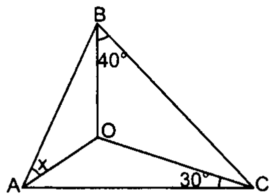
A) 120° B) 90° C) 60°
D) 45° E) 75°

20. Calcular x.



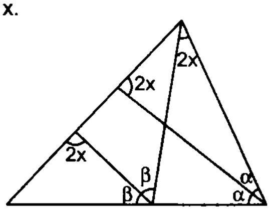
A) 20° B) 19° C) 21°
D) 22° E) 23°

21. Si O es el ortocentro del △ABC, calcular x



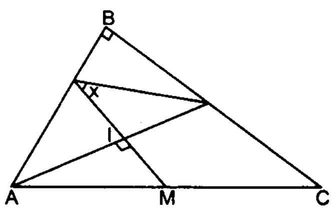
A) 20° B) 22° C) 18°
D) 24° E) 16°

22. Calcular x.



A) 30° B) 36° C) 45°
D) 40° E) 32°

23. Si I es incentro del triángulo ABC. Calcular x.

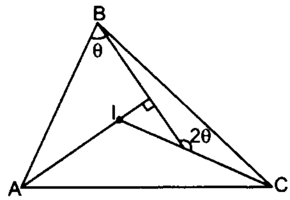


A) 60° B) 71°30' C) 45°
D) 26°30' E) 37°

24. Exteriormente a un rombo ABCD, se traza el cuadrado BCPQ. Calcular la medida del ángulo determinado por $\overline{AC}$ y $\overline{PD}$.

A) 90° B) 45° C) 37°
D) 30° E) 60°

25. En el gráfico, calcular θ, Si I es incentro del △ABC.



A) 46° B) 72° C) 36°
D) 60° E) 50°

26. En un △ABC de circuncentro K y excentro E relativo a $\overline{BC}$. Calcular la m∠A, siendo m∠BKC = 2(m∠BEC)

A) 30° B) 60° C) 45°
D) 90° E) 75°

27. De las siguientes afirmaciones, cuáles son correctas.

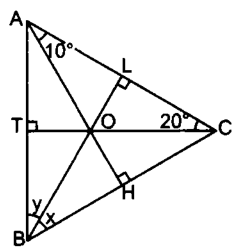
I. Todo triángulo tiene un triángulo órtico.
II. En un triángulo equilátero, todos los puntos notables coinciden en un mismo punto.
III. Si el perímetro de un triángulo es 26, entonces el perímetro de su triángulo mediano es 13.
IV. El ortocentro de un triángulo obtusángulo es un excentro de su triángulo pedal.

A) II y III B) II y IV C) III y IV
D) I y IV E) I y II

28. Sea H el ortocentro del triángulo acutángulo ABC, exterior y relativo al lado AC se ubica el punto P de modo que m∠CPH = m∠HBC y m∠BAC = 80°. Calcular la m∠APH.

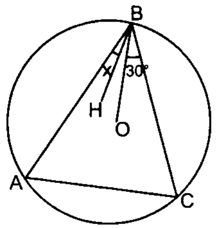
A) 10° B) 15° C) 20°
D) 30° E) 40°

29. Si O es ortocentro, calcular y − x.



A) 5° B) 8° C) 10°
D) 15° E) 20°

30. Si H es ortocentro y O es el circuncentro, calcular x.



A) 10° B) 20° C) 30° D) 40° E) 45°

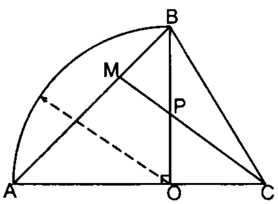
31. En un triángulo ABC se traza la altura $\overline{BH}$ (H en $\overline{AC}$) y se ubica N en $\overline{BH}$. Si $\frac{m\angle BAN}{3} = \frac{m\angle NAC}{2} = m\angle HBC$. Calcular $m\angle HCN$.

A) 45° B) 53° C) 60°
D) $\frac{127}{2}$ E) $\frac{143}{2}$

32. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior $\overline{BP}$, tal que $m\angle BAC = 2(m\angle ABP)$, AB = PC y $m\angle PBC = 90° + m\angle ABP$, calcular: $m\angle ABP$.

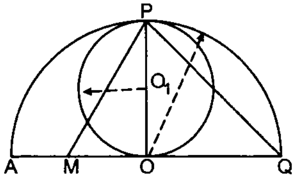
A) 15° B) 10° C) 12°
D) 16° E) 18°

33. En el gráfico, MB = MP = 6, calcular la distancia del circuncentro del triángulo ABC hacia $\overline{AC}$.



A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

34. En el gráfico, P y O son puntos de tangencia; además, AM = R/2 ¿Qué punto notable es O_1 del triángulo MPQ?

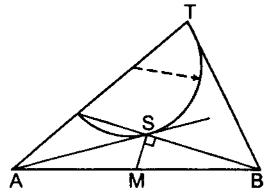


A) Baricentro B) Incentro C) Circuncentro
D) Excentro E) Ortocentro.

35. En una circunferencia se trazan las cuerdas perpendiculares $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ secantes en Q. Si AB = 5 y QH toma su máximo valor entero, siendo H ortocentro del triángulo BCD, calcular $m\overset{\frown}{BC}$.

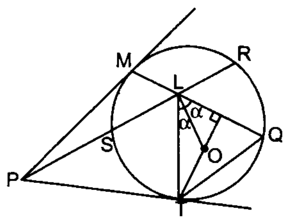
A) 37° B) 53° C) 30°
D) 60° E) 74°

36. En el gráfico AM = MB, T y S son puntos de tangencia. Si R = $\sqrt{2}$, calcular AS.



A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) $2\sqrt{2}$

37. En el gráfico, T y M son puntos de tangencia y $m\overset{\frown}{ST} = m\overset{\frown}{RQ}$. ¿Qué punto notable es O del triángulo TLQ?

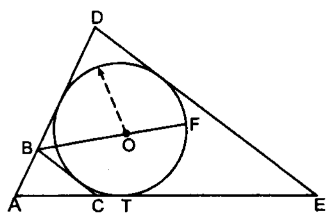


A) Ortocentro B) Incentro C) Baricentro
D) Circuncentro E) Cevacentro

38. En un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia, se traza una semicircunferencia con diámetro $\overline{CD}$ en el cual se ubica al punto M en el arco $\overset{\frown}{CD}$, tal que MD = AB = 12 y BC + AD = 25. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo CMD.

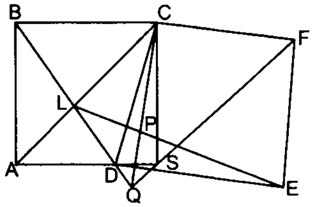
A) 4 B) 3 C) 2
D) 5 E) 1

39. En el gráfico, $m\angle DBF = 45°$, $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$.
AB = OT (T, punto de tangencia) y 2(AD) = CE.
Calcular $\frac{BO}{DE}$.



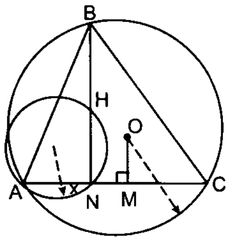
A) $2(\sqrt{2} + 1)$ B) $2\sqrt{2}$ C) $\sqrt{2} + 1$
D) $2(\sqrt{2} - 1)$ E) $2\sqrt{2} - 1$

40. En el gráfico, BCD y CDEF son cuadrados.
¿Qué punto notable es C para el triángulo LQS?



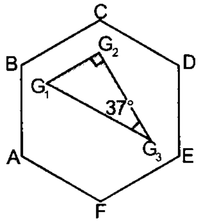
A) Excentro B) Baricentro
C) Ortocentro D) Circuncentro
E) Punto de Poncelet

41. En el gráfico, H es ortocentro del triángulo ABC, OM = AN = $\sqrt{2}$ y m$\widehat{BC}$ = 127°, calcular x.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) 1
D) 2 E) $\sqrt{2}$

42. En el gráfico, G_1, G_2 y G_3 son baricentros de los triángulos ABC, BCD y DEF. Si AD = 9, ¿en cuánto distan los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{EF}$?



A) 9 B) 10 C) 8
D) 6 E) 7,5

43. En un triángulo equilátero ABC se ubica en la región exterior relativo a $\overline{BC}$ el punto R, m∠ARB = 30° y m∠RAC = θ. Calcular m∠ARC en función de θ.

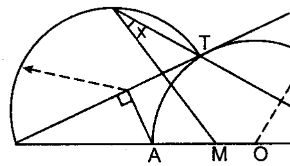
A) θ B) $\frac{\theta}{2}$ C) 2θ

D) 3θ E) $\frac{3\theta}{2}$

44. En la región interior y en la prolongación de $\overline{CB}$ de un triángulo isósceles ABC, cuya base es $\overline{AC}$, se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que m∠AQB = 90°, QB = BP y m∠ABC = m∠QBP. Si $\overline{PB}$ interseca a $\overline{AQ}$ en M y m∠QAC = α, calcular m∠MBC en función de α.

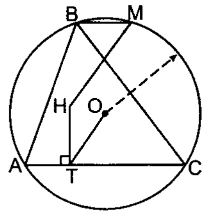
A) α + 45° B) 30° + α C) α + 15°
D) 2α E) $\frac{3\alpha}{2}$

45. Según el gráfico, AM = MO. Calcular x. (T es punto de tangencia).



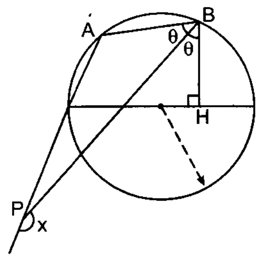
A) 30° B) 15° C) 25°
D) 20° E) 35°

46. Según el gráfico, H es el ortocentro del triángulo ABC, $\overline{BM}$ // $\overline{AC}$ y BM = TO. Calcular la m∠BMH.



A) 30° B) 45° C) 37°
D) 53° E) 60°

47. Según el gráfico, m$\widehat{AB}$ = 80°, calcular x.

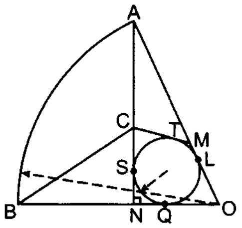


A) 170° B) 150° C) 160°
D) 140° E) 120°

48. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC) se traza las cevianas interiores $\overline{BD}$ y $\overline{CQ}$, tal que m∠ABD = m∠BCQ = 30°; m∠DBC = 50°. Calcular m∠DQC

A) 20° B) 30° C) 40°
D) 60° E) 35°

49. Según el gráfico, BN = 6, AM = 9 y MC = 5, calcular BC (S, T, L y Q son puntos de tangencia y r es el inradio del triángulo ONA).



A) 8 B) 10 C) 11
D) 15 E) 13

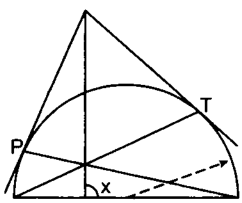
50. En un paralelogramo ABCD, AB = 12, M es punto medio de $\overline{CD}$, AM = BD y $\overline{AM} \cap \overline{BD}$ = {Q}. En la prolongación de $\overline{AD}$ se ubica el punto E, tal que BC = DE y m∠DQE = 37°. Calcular QE.

A) 16 B) 12 C) 14
D) 20 E) 15

51. En un triángulo acutángulo ABC, las prolongaciones de las alturas trazadas desde A, B y C son secantes a la circunferencia circunscrita a dicho triángulo en los puntos P, Q y R. Si la suma de las distancias del circuncentro del triángulo ABC a sus respectivos lados es d, calcular el perímetro de la región hexagonal ARBPCQ.

A) 2d B) 3d C) 4d
D) 6d E) 5d

52. Según la figura, P y T son puntos de tangencia, calcular x.



A) 85° B) 100° C) 78°
D) 90° E) 92°

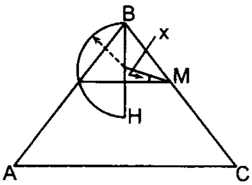
53. Desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan las secantes PMA y PQB. En $\overset{\frown}{MQ}$ se ubica el punto H que es ortocentro del triángulo APB. ¿Qué punto notable es H para el triángulo MPQ?

A) Circuncentro B) Ortocentro C) Baricentro
D) Excentro E) Incentro

54. En un triángulo acutángulo ABC, m∠ABC = 60°; la recta de Euler es secante a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente. Si AM = a y NC = b, calcular el perímetro de lo región triangular MBN.

A) 2(a + b) B) 3(a + b) C) 4(a+ b)
D) $\frac{5}{2}$(a + b) E) $\sqrt{3}$(a + b)

55. Según el gráfico, calcular x si m∠ABC = 80°; H es ortocentro y M es punto medio de $\overline{BC}$.

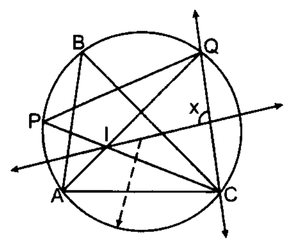


A) 20° B) 10° C) 50°
D) 60° E) 40°

56. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, de incentro I y excentro E relativo a $\overline{BC}$ y siendo T la proyección ortogonal de I sobre $\overline{AC}$ y la m∠ACB = 37°, calcular la medida del ángulo IET.

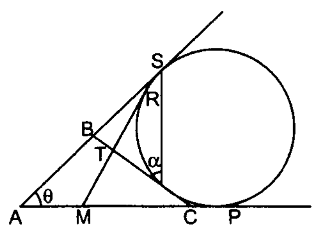
A) 10° B) 15° C) 21° 30'
D) 10°30' E) 7°30'

57. En el gráfico, I es el incentro del triángulo ABC y PQ = AC, calcular x.



A) 90° B) 80° C) 110°
D) 85° E) 95°

58. En la figura, P, Q, R y S son puntos de tangencia, TC = AM, TB = 3 y α + θ = 90°, calcular TM.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

59. En un triángulo ABC cuyo circuncentro es O y, además, A', B' y C' son puntos simétricos de O respecto a $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ respectivamente. ¿Qué punto notable es O para el triángulo A'B'C'?

A) Baricentro B) Ortocentro
C) Circuncentro D) Incentro
E) Excentro

60. En un triángulo equilátero ABC de circuncentro O, se trazan las cevianas interiores $\overline{CN}$ y $\overline{AM}$, las cuales se intersecan en P, tal que la m∠PBA = 10° y AN = BM. Calcular la m∠OMP.

A) 30° B) 10° C) 60°
D) 20° E) 50°

61. En un triángulo ABC acutángulo de ortocentro O, la recta de Euler corta en el punto F al lado $\overline{AC}$. Calcular la m∠FDC, si AF = 2FC = 2OB, (D es circuncentro del triángulo ABC).

A) 53°/2 B) 37°/2 C) 45°
D) 30° E) 60°

62. Dado el triángulo acutángulo ABC el ∠A mide 80° y sea $E_1E_2E_3$ su respectivo triángulo excentral (E_1 relativo a $\overline{AB}$ y E_2 relativo a $\overline{BC}$). Calcular la suma de los ángulos $E_2E_1E_3$ y $E_1E_3E_2$.

A) 50° B) 60° C) 100°
D) 120° E) 130°

63. Se tiene un cuadrilátero circunscrito a una circunferencia donde la m∠ABC = m∠ACD = 90°. Calcular la suma de las distancias de los incentros a los vértices de los ángulos rectos de los triángulos ABC y ACD, si BC = m.

A) $\frac{m}{3\sqrt{2}}$ B) $m\sqrt{2}$ C) $\frac{m\sqrt{2}}{2}$
D) m E) 2m

64. En la prolongación del lado $\overline{AB}$ de un cuadrilátero ABCD se marca el punto E, tal que m∠EBC = 48°, m∠CBD = 78°, m∠BDC = 30°, m∠ADB = 54°. Calcular la m∠BAC.

A) 9° B) 18° C) 36°
D) 30° E) 54°

65. Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B, de incentro I, se raza $\overline{IH} \perp \overline{AC}$. Calcular HC, si su exradio relativo a $\overline{BC}$ mide 4.

A) 3 B) 4 C) $4\sqrt{2}$
D) 2 E) $4\sqrt{3}$

66. La distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo y el punto de intersección de sus tres alturas es igual a:

A) dos tercios del cateto mayor
B) dos tercios del cateto menor
C) un tercio de la altura relativa a la hipotenusa
D) la semisuma de los catetos
E) la mitad de la hipotenusa

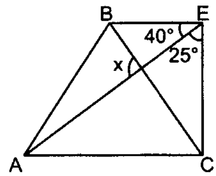
67. En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AM}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CN}$; desde M se trazan las perpendiculares $\overline{MP}$ y $\overline{MQ}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Si PQ = 12, calcular el perímetro del triángulo órtico MHN.

A) 8 B) 12 C) 16
D) 20 E) 24

68. En un triángulo ABC, se cumple que: m∠EIC – m∠IEC = 36°. Donde I es el incentro y E es el excentro relativo al lado $\overline{BC}$. Calcular la m∠ABC.

A) 46° B) 50° C) 54°
D) 62° E) 68°

69. En la figura, calcular x, si E es el excentro del triángulo ABC.

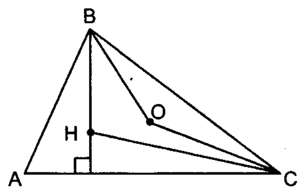


A) 95°
B) 98°
C) 100°
D) 105°
E) 110°

70. Sean O, B y C el ortocentro, baricentro y circuncentro de un triángulo, si M y N son puntos medios de los segmentos $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Hallar OC, siendo: MN = 8.

A) 12 B) 24 C) 32
D) 48 E) 18

71. En el gráfico, H es el ortocentro del triángulo ABC, O es el circuncentro y Calcular la suma de los ángulos HCO y OBC.



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

72. En un triángulo acutángulo ABC, m∠A = φ. Hallar uno de los ángulos internos de su triángulo pedal.

A) 90° – φ B) 90° – 2φ C) 180° – φ
D) 180° – 2φ E) 90° + φ/2

73. Se tiene un triángulo ABC, BC = 48 y la distancia del incentro al excentro relativo a $\overline{BC}$ es 50. Hallar la m∠BAC.

A) 16° B) 32° C) 64°
D) 74° E) 106°

74. Se tiene un triángulo ABC de incentro I, con radio $\overline{IB}$ se traza una circunferencia que interseca a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en P y R, respectivamente, y $\overline{BC}$, $\overline{RC}$ en M y N. Calcular la medida del ángulo formado por $\overline{NP}$ y $\overline{RM}$, respectivamente, siendo: m∠ABC = 70°.

A) 45° B) 60° C) 70°
D) 15° E) 30°

75. Indicar verdadero (V) o falso (F) en las siguientes proposiciones:

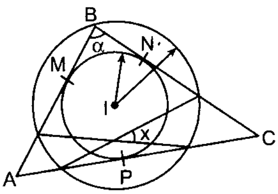
I. En todo triángulo, el perímetro de la región limitada por su respectivo triángulo mediano es la mitad del perímetro de la región triangular inicial.

II. En todo triángulo, el triángulo que tiene por vértice a los excentros, para el triángulo inicial, siempre es acutángulo.

III. Si en el triángulo, la recta de Euler es paralela a un lado, entonces la distancia hacia dicha recta, de un punto del lado al cual es paralela, es la mitad de la distancia del vértice opuesto a dicho lado a la recta de Euler.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFV E) VVF

76. En el gráfico hallar x, si $\alpha = 80°$ y M, N y P son puntos de tangencia.



A) 10° B) 20° C) 30°
D) 40° E) 50°

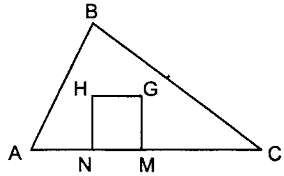
77. Calcular el circunradio de un triángulo acutángulo ABC, si la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BH}$ es 12. Siendo H el ortocentro del triángulo.

A) 6 B) 8 C) 16
D) 12 E) 14

78. En un paralelogramo ABCD, se traza la diagonal $\overline{BD}$ y se ubican O_1 y O_2 excentros de los triángulos BCD y ABD relativos a los lados $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Determinar que punto notable que representa D para el triángulo O_1BO_2.

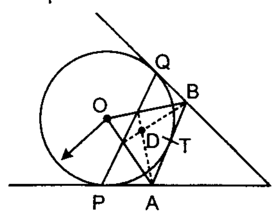
A) Incentro B) Ortocentro C) Baricentro
D) Circuncentro E) Cevacentro

79. Calcular el perímetro de la región cuadrada HGMN. H es ortocentro del $\triangle ABC$, G es baricentro del $\triangle ABC$ y $AC = 6\sqrt{21}$



A) 18 B) 20 C) 24
D) 26 E) 32

80. Siendo P, Q y T puntos de tangencia, ¿qué punto notable es D para el TOBA?



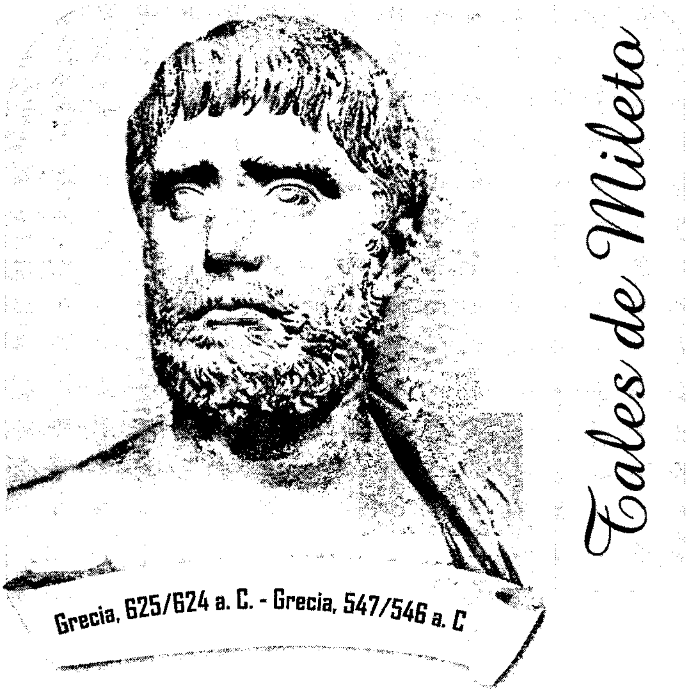
A) Ortocentro B) Baricentro C) Incentro
D) Circuncentro E) Jerabek

CLAVES

1. E	11. D	21. A	31. C	41. C	51. C	61. A	71. B
2. D	12. B	22. B	32. B	42. D	52. D	62. E	72. D
3. B	13. A	23. C	33. D	43. A	53. A	63. B	73. B
4. D	14. D	24. B	34. E	44. D	54. B	64. B	74. D
5. E	15. B	25. B	35. E	45. A	55. B	65. B	75. C
6. A	16. B	26. B	36. E	46. E	56. D	66. E	76. C
7. D	17. B	27. C	37. A	47. C	57. A	67. E	77. D
8. C	18. C	28. A	38. C	48. C	58. D	68. C	78. B
9. A	19. A	29. C	39. D	49. B	59. B	69. D	79. C
10. B	20. C	30. C	40. A	50. A	60. D	70. D	80. A

Líneas proporcionales Semejanza de triángulos

09 capítulo



Tales de Mileto nació en Mileto (625/624 a. C.) y murió en Mileto (547/546 a. C.). Fue un filósofo, matemático, geómetra, físico y legislador griego. Fue el iniciador de la Escuela de Mileto. En la antigüedad se le consideraba uno de los Siete Sabios de Grecia. Se suele aceptar que Tales comenzó a usar el pensamiento deductivo aplicado a la geometría y se le atribuye la enunciación de dos teoremas geométricos que llevan su nombre.

Además, se le atribuyen a Tales varios descubrimientos matemáticos registrados en *Los elementos* de Euclides. Asimismo, es muy conocida la leyenda acerca de un método de comparación de sombras que Tales habría utilizado para medir la altura de las pirámides egipcias: el milesio se percató de que se podría saber la altura exacta de las pirámides midiendo la sombra de estas en el momento del día en que su sombra era más o menos de igual tamaño que su cuerpo. Este método fue aplicado luego a otros fines prácticos de la navegación. Se supone, además, que Tales conocía ya muchas de las bases de la geometría, como el hecho de que cualquier diámetro de un círculo lo dividiría en partes idénticas, que un triángulo isósceles tiene por fuerza dos ángulos iguales en su base o las propiedades relacionales entre los ángulos que se forman al cortar dos paralelas por una línea recta perpendicular.

Fuente: Wikipedia

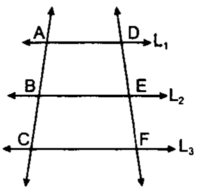
LÍNEAS PROPORCIONALES

Teorema de Tales

Tres o más rectas paralelas determinan sobre dos o más secantes a estas, segmentos proporcionales.

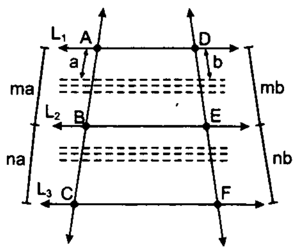
Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

Entonces: $\boxed{\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}}$



De aquí: $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{DE}{DF}$; $\dfrac{BC}{AC} = \dfrac{EF}{DF}$

Demostración:



Al dividir $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en m y n partes iguales de longitud "a", cada una, y trazar paralelas a las dadas, $\overline{DE}$ y $\overline{EF}$ quedarán divididos en m y n partes iguales de longitud "b", cada una.

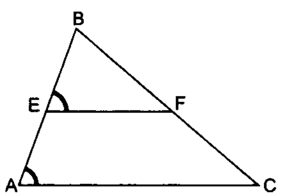
Luego: $\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{ma}{na} = \dfrac{m}{n}$ y $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{mb}{nb} = \dfrac{m}{n}$

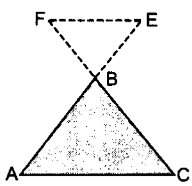
$\therefore \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}$

Corolario:

Toda paralela a uno de los lados de un triángulo, que interseca a los otros o a sus prolongaciones, determina sobre ellos segmentos proporcionales.

Si $\overline{EF} // \overline{AC}$, entonces:



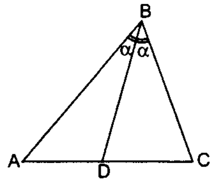


$\boxed{\dfrac{BE}{EA} = \dfrac{BF}{FC}}$

Primer teorema de la bisectriz

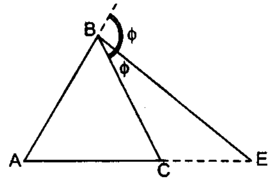
En todo triángulo, una bisectriz cualquiera determina sobre el lado opuesto, segmentos que son entre sí como los lados que concurren con dicha bisectriz.

1. Bisectriz interior



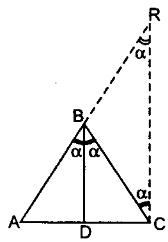
$\boxed{\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}}$

2. Bisectriz exterior



$\boxed{\dfrac{EA}{EC} = \dfrac{AB}{BC}}$

Demostración de (1):



Trazando $\overline{CR} // \overline{BD}$: $m\angle R = m\angle ABD = \alpha$ (correspondientes) y $\angle BCR = \angle DBC = \alpha$ (alternos).

$\therefore$ $\triangle CBR$ es isósceles: $BR = BC$ ...(I)

En el $\triangle ARC$, por el teorema de Tales: $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BR}$

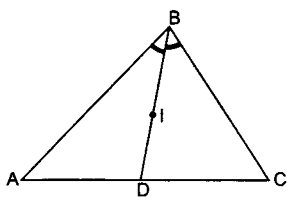
$\therefore$ Con lo de (I): $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$

Nota

Para demostrar (2), trace $\overline{CQ} // \overline{EB}$ (Q en $\overline{AB}$).

Teorema del incentro

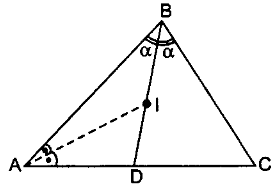
En todo triángulo, el incentro determina en cada bisectriz, segmentos que son entre sí, como la suma de las longitudes de los dos lados que concurren con dicha bisectriz, a la longitud del tercer lado.



$\triangle ABC$, I: incentro

$\boxed{\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{AB + BC}{AC}}$

Demostración:



Por el primer teorema de la bisectriz:

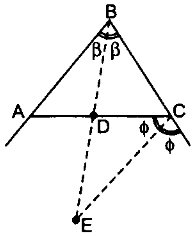
$\triangle ABD \Rightarrow \dfrac{BI}{ID} = \dfrac{AB}{AD}$ ...(1)

En el $\triangle ABC$: $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{AB}{BC}$ o $\dfrac{AD}{AC - AD} = \dfrac{AB}{BC}$

Efectuando: $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AB + BC}{AC}$

Reemplazando esto último, en (1): $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{AB + BC}{AC}$

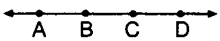
Teorema del excentro



En la figura, E es el excentro relativo al lado $\overline{AC}$ del $\triangle ABC$. Entonces: $\boxed{\dfrac{BE}{ED} = \dfrac{AB + BC}{AC}}$

DIVISIÓN ARMÓNICA

Se dice que los puntos colineales y consecutivos A, B, C y D, constituyen una cuaterna armónica, si se cumple que:



$\boxed{\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD}}$

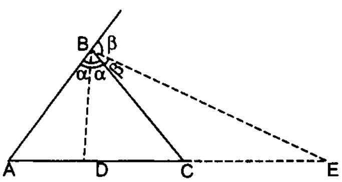
Cuando esto se cumple, se dice que B y D son los conjugados armónicos de A y C. También suele decirse que B y D dividen armónicamente al segmento AC.

Relación de Descartes

De la expresión exterior, se demuestra que:

$$\frac{1}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{2}{AC}$$

Propiedad. En todo triángulo, dos vértices y los pies de las bisectrices interior y exterior, que parten del tercero, constituyen una cuaterna armónica.



$\triangle ABC$: $\overline{BD}$: bisectriz interior; $\overline{BE}$: bisectriz exterior.

Demostración:

Por el primer teorema de la bisectriz, aplicado al $\triangle ABC$, para las bisectrices, interior $\overline{BD}$ y exterior $\overline{BE}$:

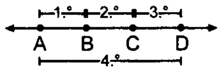
$$\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \wedge \frac{EA}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

Igualando los primeros miembros de ambas expresiones: $\boxed{\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{EA}{CE}}$

Nota

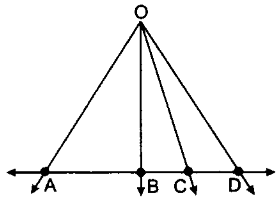
Para recordar la forma de la expresión que relaciona a los segmentos de una cuaterna armónica, tenemos:

$\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AD}{CD} \Rightarrow \dfrac{1.°}{2.°} = \dfrac{4.°}{3.°}$



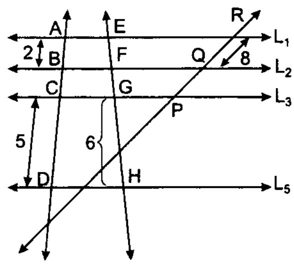
Haz armónico

Se da este nombre al conjunto de rayos OA, OB, OC y OD, tal que A, B, C y D constituyen una cuaterna armónica.



Ejemplos:

1. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_5}$; AB = 2; CD = 5; GH = 6; QR = 8 y PQ = FG + 2. Hallar FG.



Resolución:

PQ = FG + 2

Por el teorema de Tales:

$\dfrac{FG}{EF} = \dfrac{PQ}{QR} \Rightarrow \dfrac{FG}{EF} = \dfrac{FG + 2}{8}$ ...(1)

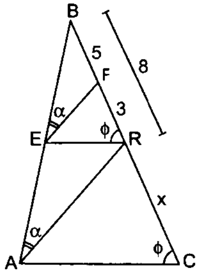
Cálculo de EF: $\dfrac{EF}{GH} = \dfrac{AB}{CD} \Rightarrow \dfrac{EF}{6} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow EF = \dfrac{12}{5}$

Reemplazando en (1): $\dfrac{FG}{\frac{12}{5}} = \dfrac{FG + 2}{8}$

$\therefore$ Efectuando: $FG = \dfrac{6}{7}$

2. En un triángulo ABC, se trazan la ceviana interior $\overline{AR}$ y, luego, $\overline{RE} // \overline{AC}$ y $\overline{EF} // \overline{AR}$. (E sobre $\overline{AB}$ y F en $\overline{BR}$). Si BF = 5 y FR = 3; hallar RC.

Resolución:



Por el teorema de Tales:

$\triangle ABC$: $\frac{x}{8} = \frac{AE}{EB}$ ...(1)

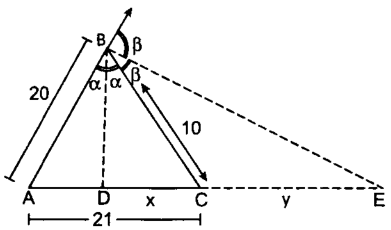
$\triangle ABR$: $\frac{AE}{EB} = \frac{3}{5}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $\frac{x}{8} = \frac{3}{5}$

$\therefore$ x = 4,8

3. En un $\triangle ABC$, AB = 20; BC = 10 y AC = 21, se trazan las bisectrices interior $\overline{BD}$ y exterior $\overline{BE}$. Hallar DE.

Resolución:



DE = x + y ...(1)

Por el primer teorema de la bisectriz:

Interior $\Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \Rightarrow \frac{21 - x}{x} = \frac{20}{10} \Rightarrow x = 7$

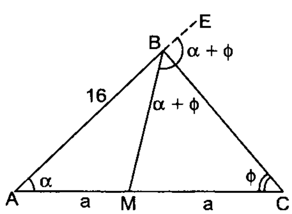
Exterior $\Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{y}{y + 21} = \frac{10}{20} \Rightarrow y = 21$

Reemplazando los valores de x e y en (1):

DE = 7 + 21 $\therefore$ DE = 28

4. En un $\triangle ABC$, AB = 16, se traza la mediana $\overline{BM}$. Hallar BM, si $m\angle MBC = m\angle A + m\angle C$

Resolución:



Por dato: $m\angle MBC = m\angle A + m\angle C$

Si: $m\angle A = \alpha$, $m\angle C = \phi \Rightarrow m\angle MBC = \alpha + \phi$

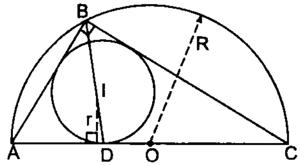
En el $\triangle ABC$, por ser ángulo exterior:

$m\angle EBC = m\angle A + m\angle C \Rightarrow m\angle EBC = \alpha + \phi$

Se observa que $\overline{BC}$ es bisectriz exterior en el $\triangle ABM$. Entonces, por el primer teorema de la bisectriz, aplicado en este triángulo.

$\frac{BM}{AB} = \frac{CM}{CA} \Rightarrow \frac{BM}{16} = \frac{a}{2a}$ $\therefore$ BM = 8

5. En la figura, O e I, son centros. Si R + 5r, hallar $\frac{BI}{ID}$



Resolución:

I es incentro del $\triangle ABC$ (teorema del Incentro):

$\frac{BI}{ID} = \frac{AB + BC}{AC}$ ...(1)

Siendo AC = 2**R**

Por el teorema de Poncelet: AB + BC = AC + 2r.

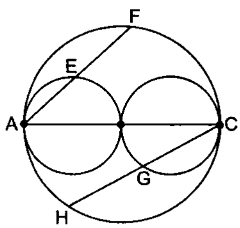
Colocando esto último en (1): $\frac{BI}{ID} = \frac{AC + 2r}{AC}$

$\Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{2R + 2r}{2R} \Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{R + r}{R}$

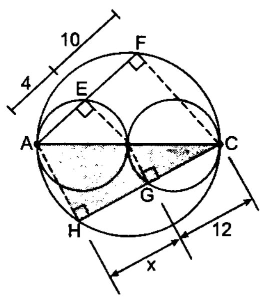
Y según el dato: R = 5r

Entonces: $\frac{BI}{ID} = \frac{5r + r}{5r}$ $\therefore$ $\frac{BI}{ID} = \frac{6}{5} = 1{,}2$

6. En la figura, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros, AE = 4, EF = 10 y CG = 12. Hallar GH.



Resolución:



$GH = x$

Como $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros:

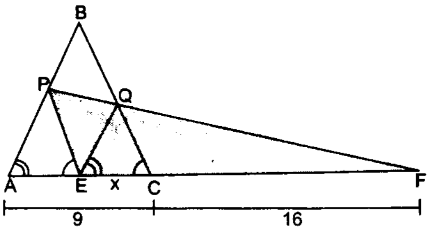
$m\angle AEB = m\angle AFC = m\angle AHC = m\angle BGC = 90°$

$\Rightarrow \overline{BE} \parallel \overline{CF}$ y $\overline{BG} \parallel \overline{AH}$

Por el teorema de Tales: $\frac{AB}{BC} = \frac{x}{12}$ y $\frac{AB}{BC} = \frac{4}{10}$

$\Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{4}{10} \quad \therefore x = 4{,}8$

7. En la figura: $\overline{EP} \parallel \overline{BC}$; $\overline{QE} \parallel \overline{AB}$; CF = 16 y AC = 9. Hallar EF.



Resolución:

$EF = x + 16$

Por el teorema de Tales:

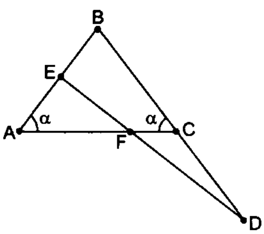
En el $\triangle PEF$: $\frac{EC}{CF} = \frac{PQ}{QF} \Rightarrow \frac{x}{16} = \frac{PQ}{QF}$ ...(1)

En el $\triangle APF$: $\frac{AE}{EF} = \frac{PQ}{QF} \Rightarrow \frac{9-x}{x+16} = \frac{PQ}{QF}$ ...(2)

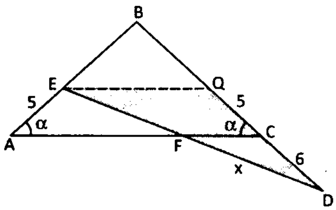
De (1) y (2): $\frac{x}{16} = \frac{9-x}{x+16} \Rightarrow x = 4$

Luego: $EF = 4 + 16 = 20$

8. En la figura, AE = 5; EF = 8 y CD = 6. Hallar DF.



Resolución:



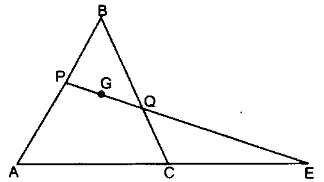
$DF = x$

Trazamos $\overline{EQ} \parallel \overline{AC}$: el trapecio AEQC es isósceles: $QC = AE \Rightarrow QC = 5$

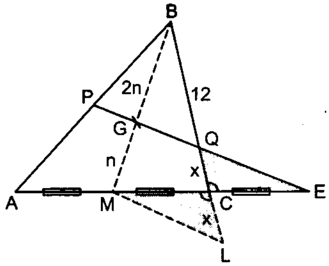
En el $\triangle EQD$, por el teorema de Tales:

$\frac{DF}{FE} = \frac{DC}{CQ} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{6}{5} \quad \therefore x = 9{,}6$

9. En la figura, G es baricentro del $\triangle ABC$ y $CE = \frac{AC}{2}$. Hallar QC, si BQ = 12



Resolución:



$QC = x$

Trazamos la mediana $\overline{BM}$. Por propiedad del baricentro: $BG = 2(GM)$; $GM = n$; $BG = 2n$

Como: $CE = \frac{AC}{2} \Rightarrow CE = AM = MC.$

Trazando $\overline{ML} \parallel \overline{QE}$: $m\angle LMC = m\angle QEC$ (alternos) y como $m\angle QCE = m\angle LCM$

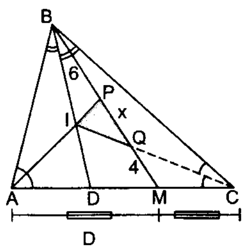
$\Rightarrow \triangle MCL \cong \triangle ECQ$ (ALA)

$\Rightarrow CL = CQ \Rightarrow CL = x$

En el $\triangle MBL$, por el teorema de Tales:

$\frac{BQ}{QL} = \frac{BG}{GM} \Rightarrow \frac{12}{2x} = \frac{2n}{n} \Rightarrow x = 3 \quad \therefore QC = 3$

10. I es incentro del $\triangle ABC$ y AM = MC. Si $\frac{BI}{ID} = \frac{3}{2}$; BP = 6 y QM = 4. Hallar PQ.



Resolución:

I es incentro del $\triangle ABC \Rightarrow \overline{AI}, \overline{BI}, \overline{CI}$ son bisectrices.

En el $\triangle ABC$, por el teorema del incentro:

$\frac{AB + BC}{AC} = \frac{BI}{ID} \Rightarrow \frac{AB + BC}{AC} = \frac{3}{2}$ ...(I)

Con el primer teorema de la bisectriz:

$\triangle ABM$:

$$\frac{AB}{AM}=\frac{BP}{PM}\Rightarrow\frac{AB}{\frac{AC}{2}}=\frac{6}{x+4}\Rightarrow\frac{2AB}{AC}=\frac{6}{x+4}\quad ...(II)$$

$\triangle MBC$:

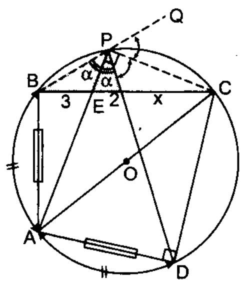
$$\frac{BC}{MC}=\frac{BQ}{QM}\Rightarrow\frac{BC}{\frac{AC}{2}}=\frac{6+x}{4}=\frac{2BC}{AC}=\frac{6+x}{4}\quad ...(III)$$

Sumando (II) y (III): $2\left(\frac{AB+BC}{AC}\right)=\frac{6}{x+4}+\frac{6+x}{4}$

De (I): $2\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{6}{x+4}+\frac{6+x}{4}\Rightarrow 3=\frac{6}{x+4}+\frac{6+x}{4}$

$\therefore\ x=2$

11. ABCD es un cuadrilátero inscrito en una circunferencia; $AB=AD$ y $\overline{AC}$ es diámetro. P es un punto del arco BC. $\overline{PA}$ y $\overline{PD}$ cortan a BC en los puntos E y F, respectivamente. Si $BE=3$ y $EF=2$, hallar FC.



Resolución:

$FC=x$

Como $AB=AD\Rightarrow m\overset{\frown}{AB}=m\overset{\frown}{AD}$

Trazando $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$:

$m\angle BPA=m\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$ y $m\angle APD=m\frac{\overset{\frown}{AD}}{2}$

$\Rightarrow m\angle BPA=m\angle APD=\alpha$

Además, por dato $\overline{AC}$ es diámetro.

Entonces, $m\angle APC=90°$

Luego, $m\angle FPC=90°-m\angle EPF=90°-a$

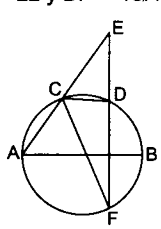
y $m\angle QPC=90°-m\angle BPE=90°-a$

Es decir, $m\angle FPC=m\angle QPC$.

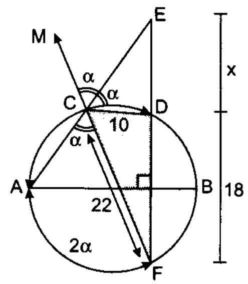
Por lo tanto, $\overline{PE}$ y $\overline{PC}$ son bisectrices interior y exterior del $\triangle BPF$. Por propiedad, B, E, F y C conforman una cuaterna armónica:

$$\frac{BE}{EF}=\frac{CB}{FC}\Rightarrow\frac{3}{2}=\frac{x+5}{x}\qquad\therefore\ x=10$$

12. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro, $\overline{DF}\perp\overline{AB}$. $CD=10$; $CF=22$ y $DF=18$. Hallar ED.



Resolución:



$ED=x$

Como AB es diámetro perpendicular a la cuerda $\overline{DF}$:

$m\overset{\frown}{AF}=2a=m\overset{\frown}{ACD}\qquad ...(1)$

$\Rightarrow m\angle ACF=m\frac{\overset{\frown}{AF}}{2}\qquad$ ($\angle$ inscrito)

$m\angle ACF=\alpha\Rightarrow m\angle MCE=\alpha$

También, $m\angle ECD=m\frac{\overset{\frown}{ACD}}{2}\qquad$ ($\angle$ exinscrito

Con (1): $m\angle ECD=\frac{2\alpha}{2}\Rightarrow m\angle ECD=\alpha$

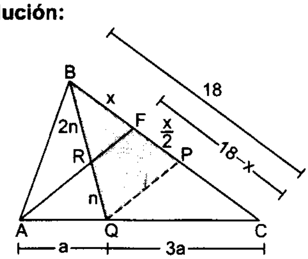
Entonces, $\overline{CE}$ es bisectriz exterior, en el $\triangle CDF$.

Luego, por el primer teorema de la bisectriz:

$$\Rightarrow\frac{10}{22}=\frac{x}{x+18}\qquad\therefore\ x=15$$

13. En un triángulo ABC, las cevianas Interiores $\overline{AF}$ y $\overline{BQ}$ se cortan en el punto R. Si $BC=18$, $OC=3AQ$ y $BR=2RQ$, hallar BF.

Resolución:



$BF=x$

Por dato: $QC=3AQ$; si $AQ=a\Rightarrow QC=3a$

Además, $BR=2RQ$; si $RQ=n$, entonces $BR=2n$.

Para hacer uno del teorema de Tales, trazamos $\overline{QP}\parallel\overline{AF}$.

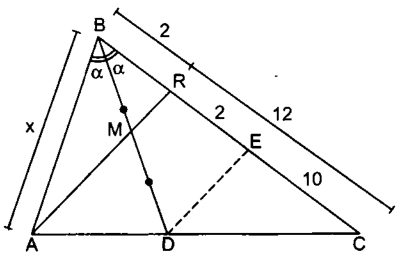
$$\triangle BQP\Rightarrow\frac{FP}{BF}=\frac{n}{2n}\Rightarrow FP=\frac{BF}{2}\Rightarrow FP=\frac{x}{2}$$

$$\triangle AFC\Rightarrow\frac{FP}{FC}=\frac{AQ}{AC}\Rightarrow\frac{\frac{x}{2}}{18-x}=\frac{a}{4a}$$

$\therefore$ Efectuando: $x=6$

14. En un $\triangle ABC$, la ceviana $\overline{AR}$ corta a la bisectriz interior BD en el punto M. Si $BR=2$; $RC=12$ y $BM=MD$, hallar AB.

Resolución:



En el $\triangle ABC$, por el primer teorema de la bisectriz:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{x}{14} = \frac{AD}{DC} \quad ...(1)$$

Tracemos $\overline{DE} \parallel \overline{MR}$.

Luego, $\overline{MR}$ es base media del $\triangle DBE$:

$ER = RB \Rightarrow ER = 2$; además, $EC = 10$.

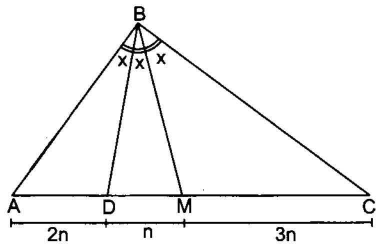
En el $\triangle ARC$, por el teorema de Tales:

$$\frac{AD}{DC} = \frac{RE}{EC} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{2}{10}$$

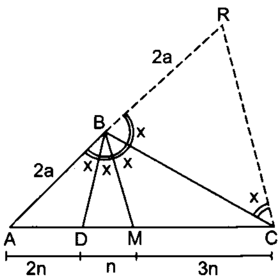
Reemplazando esto último en (1): $\frac{x}{14} = \frac{2}{10}$

$\therefore x = 2{,}8$

15. Del gráfico, hallar el valor de x.



Resolución:



Por el primer teorema de la bisectriz, en el $\triangle ABM$:

$$\frac{AB}{BM} = \frac{AD}{DM} \Rightarrow \frac{AB}{BM} = \frac{2n}{n} \Rightarrow AB = 2(BM)$$

Luego, si $BM = a \Rightarrow AB = 2a$

Tracemos $\overline{CR} \parallel \overline{BM}$. Entonces:

$m\angle BCR = m\angle MBC = x$ (alternos internos)

En el $\triangle ARC$, $\overline{BM}$ es base media, ya que $AM = MC$

$\Rightarrow RC = 2(BM)$

$RC = 2a$. También, $BR = AB \Rightarrow BR = 2a$

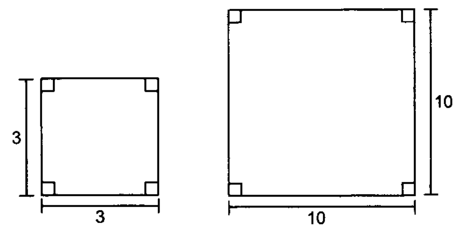
Luego, el $\triangle BRC$ es isósceles:

$m\angle CBR = m\angle BCR \Rightarrow m\angle CBR = x$

Finalmente, en B: $4x = 180°$ $\quad \therefore x = 45°$

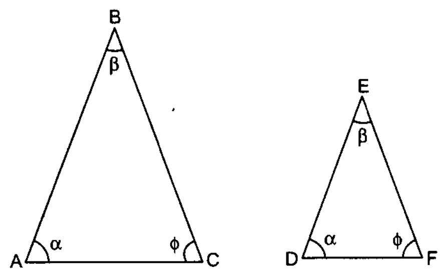
SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

En general, dos figuras semejantes tienen igual forma y tamaños diferentes. Por ejemplo, dos cuadrados, uno de 3 cm de longitud por cada lado y el otro de 10 cm de longitud por lado, son semejantes:



(El símbolo ~, se lee: es semejante a...)

Dos triángulos semejantes tienen sus ángulos congruentes, dos a dos, y sus lados homólogos, proporcionales. Se llaman lados homólogos, uno en cada triángulo, a aquellos opuestos a ángulos congruentes. Así:



Si: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, se cumplirá:

$$\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = k \text{ (constante)}$$

($\overline{DE}$ y $\overline{AB}$; $\overline{EF}$ y $\overline{BC}$; $\overline{DF}$ y $\overline{AC}$ son pares de lados homólogos).

k se llama razón de semejanza.

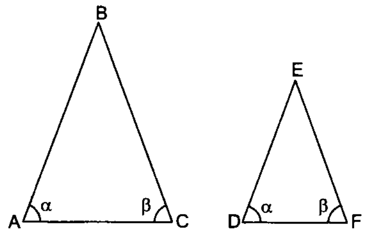
Por ejemplo, si $k = \frac{1}{2}$, significa que los lados del $\triangle DEF$ tienen la mitad de longitud de los lados del $\triangle ABC$.

Además, alturas homólogas, medianas homólogas, etc., son aquellas referidas a los lados homólogos y la relación de sus longitudes puede igualarse a la relación de longitudes de los lados.

Casos de semejanza

Dos triángulos serán semejantes si cumplen con cualquiera de los siguientes casos:

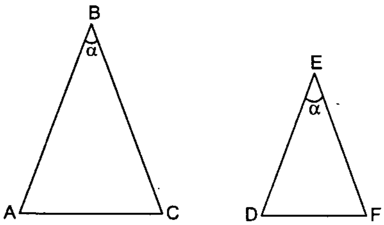
1.er caso. Si tienen dos pares de ángulos congruentes:



Si $m\angle A = m\angle D$ y $m\angle C = m\angle F$, entonces: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

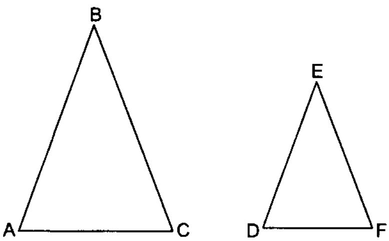
En consecuencia $m\angle B = m\angle E$ (los terceros ángulos resultan congruentes entre sí).

2.° caso. Si tienen un par de ángulos congruentes y los lados que los forman, respectivamente proporcionales.



Si: $m\angle B = m\angle E$ y $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF}$, entonces: $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

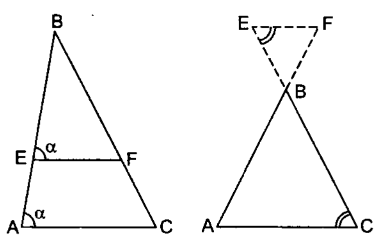
3.^{er} caso. Los tres pares de lados, respectivamente proporcionales.



Si: $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{BC}{EF} = \dfrac{AC}{DF}$, entonces, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$

Nota

a. En la resolución de los problemas, el caso que más se usa es el primero .
b. Toda paralela a uno de los lados de un triángulo, determina con los otros o sus prolongaciones, un triángulo semejante al original.
Si $\overline{EF} \,//\, \overline{AC} \Rightarrow \triangle EBF \sim \triangle ABC$, en ambos casos.

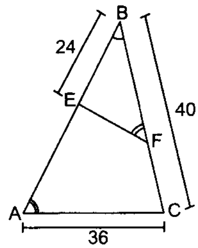


Ejemplos:

1. En un $\triangle ABC$, E es un punto de $\overline{AB}$ y F, un punto de $\overline{BC}$, tales que $m\angle EFB = m\angle A$; $AC = 36$; $EB = 24$ y $BC = 40$. Hallar EF.

Resolución:

Por tener en común la $m\angle B$ y el dato $m\angle EFB = m\angle A = \alpha$, los triángulos EBF y CBA son semejantes.



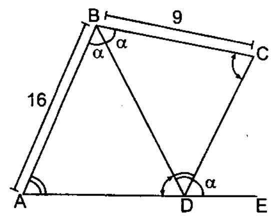
$$\frac{EF}{AC} = \frac{EB}{BC}$$

$$\Rightarrow \frac{EF}{36} = \frac{24}{40}$$

$$\therefore\ EF = 21{,}6$$

2. En un cuadrilátero ABCD, el ángulo externo D mide la mitad del ángulo interior B y la diagonal $\overline{BD}$, biseca el ángulo ABC. Hallar BD, si $AB = 16$ y $BC = 9$.

Resolución:



Dato: $m\angle CDE = \dfrac{m\angle ABC}{2}$

Si: $m\angle CDE = \alpha \Rightarrow m\angle ABC = 2\alpha$

$m\angle ABD = m\angle CBD = \alpha$

En el $\triangle ABD$:

$m\angle BDE = m\angle A + m\angle ABD$ ...($\angle$ externo)

$\Rightarrow m\angle BDC + m\angle CDE = m\angle A + m\angle ABD$

Es decir, $m\angle BDC + \alpha = m\angle A + \alpha$

$\Rightarrow m\angle BDC = m\angle A$

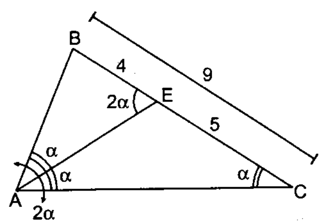
Luego, $\triangle ABD \sim \triangle DBC$

En consecuencia, $m\angle BDA = m\angle C$ y $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{BD}$

$\Rightarrow \dfrac{BD}{9} = \dfrac{16}{BD} \quad \therefore\ BD = 12$

3. En un $\triangle ABC$, $m\angle A = 2(m\angle C)$, se traza la bisectriz interior $\overline{AE}$. Hallar AB, si $BE = 4$ y $EC = 5$.

Resolución:



Del dato: $m\angle A = 2(m\angle C)$

Si: $m\angle C = \alpha \Rightarrow m\angle A = 2\alpha$

Luego: $m\angle BAE = m\angle EAC = \alpha$ y

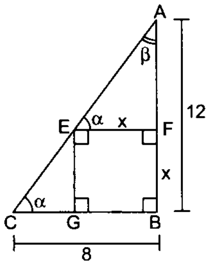
$\triangle AEC$: $m\angle AEB = m\angle EAC + m\angle C$

$\Rightarrow m\angle AEB = 2\alpha$

$\triangle ABE$ es semejante al $\triangle CBA$:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BE}{AB} \Rightarrow \frac{AB}{9} = \frac{4}{AB} \qquad \therefore AB = 6$$

4. En un $\triangle ABC$, $m\angle B = 90°$, de catetos $AB = 12$ y $BC = 8$, se inscribe un cuadrado con uno de sus vértices en B y el opuesto sobre la hipotenusa. Hallar la longitud del lado de dicho cuadrado.



Resolución:

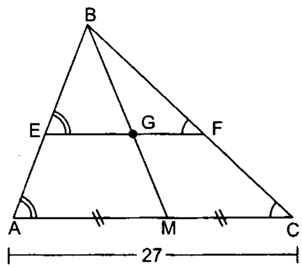
Sea BFEG un cuadrado y x la longitud de su lado, es fácil deducir que los triángulos AFE y ABC son semejantes.

Luego: $\frac{EF}{CB} = \frac{AF}{AB} \Rightarrow \frac{x}{8} = \frac{12-x}{12}$

De donde: $x = 4{,}8$

5. En un $\triangle ABC$, $AC = 27$, por el baricentro G, se traza $\overline{EF}$ paralelo a $\overline{AC}$ (E sobre $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$). Hallar EF.

Resolución:



Es evidente que $\triangle EBF \sim \triangle ABC$.

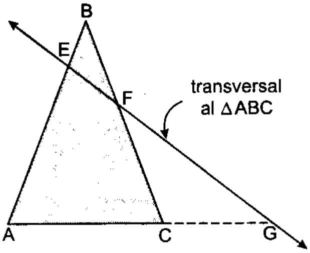
Sea M el punto medio de $\overline{AC}$. Luego, como G es baricentro, estará contenido en $\overline{BM}$. Además, por ser $\overline{EF}$ y $\overline{AC}$ lados homólogos paralelos y tener común el vértice B, $\overline{BG}$ será mediana homóloga de $\overline{BM}$.

$$\Rightarrow \frac{EF}{AC} = \frac{BG}{BM} \Rightarrow \frac{EF}{27} = \frac{2}{3}$$

$\therefore EF = 18$

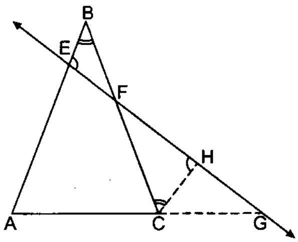
Teorema de Menelao

Sea el $\triangle ABC$ de la figura. Si una recta interseca a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y a la prolongación de $\overline{AC}$, en los puntos E, F y G, respectivamente. Se cumple que:



$$\boxed{\frac{AE}{EB} \times \frac{BF}{FC} \times \frac{CG}{GA} = 1}$$

Demostración:



Sea $\overline{CH} \parallel \overline{AE}$ (la demostración del teorema se hará con semejanza de triángulos).

$\triangle AEG \sim \triangle CHG$: $\frac{AE}{CH} = \frac{GA}{CG}$ ...(1)

$\triangle EBF \sim \triangle HCF$: $\frac{CH}{EB} = \frac{FC}{BF}$ ...(2)

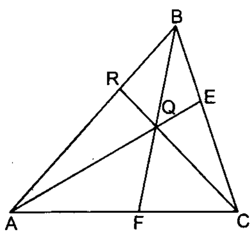
(Multiplicando miembro a miembro (1) y (2):

$$\left(\frac{AE}{CH}\right)\left(\frac{CH}{EB}\right) = \left(\frac{GA}{CG}\right)\left(\frac{FC}{BF}\right) \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \left(\frac{GA}{CG}\right)\left(\frac{FC}{BF}\right)$$

De donde: $\left(\frac{AE}{EB}\right)\left(\frac{BF}{FC}\right)\left(\frac{CG}{GA}\right) = 1$

Teorema de ceva

Sean $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CR}$, tres cevianas cualesquiera del $\triangle ABC$, concurrentes en el punto Q. Se cumple, que:



$$\left(\frac{AR}{RB}\right)\left(\frac{BE}{EC}\right)\left(\frac{CF}{FA}\right) = 1$$

Demostración:

Por el teorema de Menelao:

$\triangle ABF$ (transversal RQC): $\left(\frac{AR}{RB}\right)\left(\frac{BQ}{QF}\right)\left(\frac{FC}{CA}\right) = 1$

$\triangle FBC$ (transversal EQA): $\left(\frac{CE}{EB}\right)\left(\frac{BQ}{QF}\right)\left(\frac{FA}{AC}\right) = 1$

Dividiendo miembro a miembro estas dos expresiones:

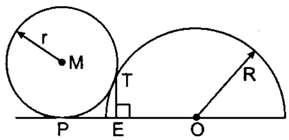
$$\frac{\left(\frac{AR}{RB}\right)\left(\frac{BQ}{QF}\right)\left(\frac{FC}{CA}\right)}{\left(\frac{CE}{EB}\right)\left(\frac{BQ}{QF}\right)\left(\frac{FA}{AC}\right)} = 1$$

Simplificando y efectuando con lo que queda:

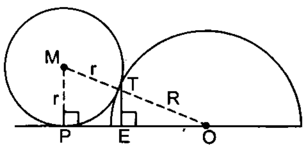
$$\left(\frac{AR}{RB}\right)\left(\frac{EB}{CE}\right)\left(\frac{FC}{FA}\right) = \left(\frac{AR}{RB}\right)\left(\frac{BE}{EC}\right)\left(\frac{CF}{FA}\right) = 1$$

Ejemplos:

1. En la figura, T es punto de tangencia, hallar ET, si $\frac{1}{R}+\frac{1}{r} = 0,2$



Resolución:



Dato: $\frac{1}{R}+\frac{1}{r} = \frac{2}{10} \Rightarrow \frac{r+R}{Rr} = \frac{1}{5}$ o $\frac{Rr}{R+r} = 5$

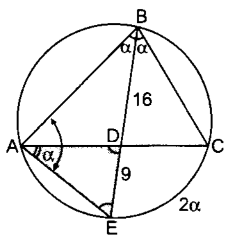
Uniendo los centros y trazando $\overline{MP}$:

$\triangle OET \sim \triangle OPM$

$\frac{ET}{PM} = \frac{OT}{OM} \Rightarrow \frac{ET}{r} = \frac{R}{R+r} \Rightarrow ET = \frac{Rr}{R+r}$

Con el dato: ET = 5

2. En un triángulo ABC, la prolongación de la bisectriz interior $\overline{BD}$, corta a la circunferencia circunscrita en el punto E. Hallar la longitud de $\overline{AE}$, si BD = 16 y DE = 9.



Resolución:

De gráfico, $m\angle EAC = m\frac{\overset{\frown}{EC}}{2} = m\angle EBC$

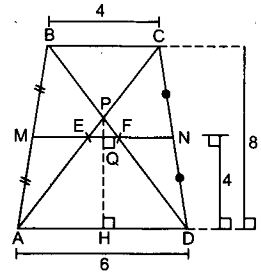
Por tener α y $\angle E$: $\triangle AED$ es semejante al $\triangle BEA$.

Entonces: $m\angle ADE = m\angle BAE$

Luego: $\frac{AE}{25} = \frac{9}{AE} \Rightarrow (AE)^2 = 25 \times 9 \quad \therefore AE = 15$

3. En un trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; BC = 4; AD = 6 y la altura mide 8. Hallar la distancia del punto de corte de las diagonales, a la mediana del trapecio.

Resolución:



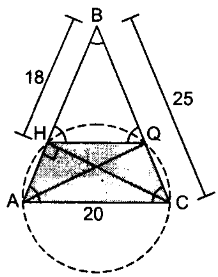
Se sabe: $EF = \frac{AD-BC}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$

$\triangle EPF \sim \triangle APD$: $\frac{PQ}{PH} = \frac{EF}{AD}$

$\Rightarrow \frac{PQ}{PQ+4} = \frac{1}{6} \quad \therefore PQ = \frac{4}{5}$

4. En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AQ}$ y $\overline{CH}$. Hallar HQ, si AC = 20, BC = 25 y BH = 18.

Resolución:



Del gráfico, ⏢AHQC es inscriptible, ya que $m\angle AHC = m\angle AQC$.

Entonces: $m\angle BHQ = m\angle ACB$ y $m\angle HQB = m\angle BAC$.

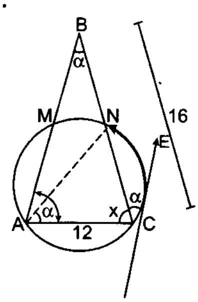
Luego: $\triangle QBH \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \frac{HQ}{AC} = \frac{HB}{CB} \Rightarrow \frac{HQ}{20} = \frac{18}{25}$

De donde: HQ = 14,4

5. En un $\triangle ABC$, por los vértices A y C pasa una circunferencia que corta a $\overline{AB}$ en M y $\overline{BC}$ en N. La tangente trazada por C es paralela a $\overline{AB}$. Si AC = 12 y BC = 16, hallar NC.

Resolución:



$NC = x$

Del gráfico, al trazar $\overline{AN}$:

$m\angle NAC = m\dfrac{\overset{\frown}{NC}}{2} = m\angle NCE$

$\Rightarrow m\angle NAC = m\angle NCE = \alpha$

También, como $\overline{CE} \parallel \overline{AB}$:

$m\angle B = m\angle NCE \Rightarrow m\angle B = \alpha$

Luego: $\triangle ANC \sim \triangle BAC$, por tener α y $m\angle C$

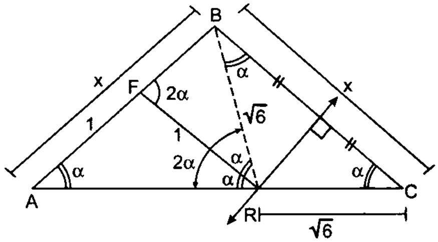
$\Rightarrow m\angle ANC = m\angle BAC$

$\dfrac{NC}{AC} = \dfrac{AC}{BC} \Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{12}{16}$

De donde: $x = 9$

6. En un triángulo ABC, isósceles, AB = BC; la mediatriz de $\overline{BC}$, corta a $\overline{AC}$ en el punto R. Luego, se traza $\overline{RF} \parallel \overline{BC}$ (F en $\overline{AB}$). Si RF = 1 y RC = $\sqrt{6}$, hallar AB.

Resolución:



Datos: $\overline{RF} \parallel \overline{BC}$; AB = BC; RF = 1; RC = $\sqrt{6}$

AB = x

Por propiedad de la mediatriz:

$RB = RC \Rightarrow RB = \sqrt{6} \Rightarrow m\angle RBC = m\angle C = \alpha$

$m\angle FRB = m\angle RBC = \alpha$ (alternos internos)

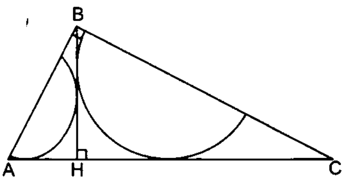
$m\angle ARF = m\angle C = \alpha$ (ángulos correspondientes)

$\triangle FBR \sim \triangle RBA$:

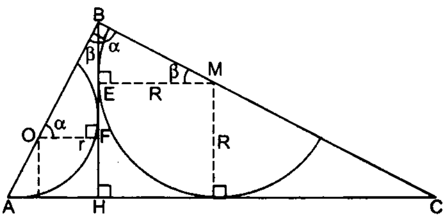
$\dfrac{BR}{AB} = \dfrac{FB}{BR} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{6}}{x} = \dfrac{x-1}{\sqrt{6}} \Rightarrow x(x-1) = 6$

De donde: $x = 3$

7. En la figura, $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; r y R son radios de las semicircunferencias tangentes a $\overline{AC}$ y a la altura $\overline{BH}$ (R > r). Hallar BH.



Resolución:



Con los trazos indicados:

BE = BH − R y BF = BH − r

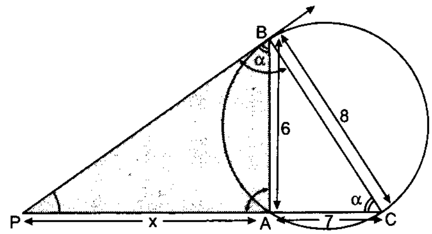
$\triangle BFO \sim \triangle MEB$: $\dfrac{BF}{EM} = \dfrac{OF}{BE}$

$\Rightarrow \dfrac{BH - r}{R} = \dfrac{r}{BH - R}$

De donde: $BH = R + r$

8. En un $\triangle ABC$, AB = 6, BC = 8 y AC = 7. Por B, se traza una tangente a la circunferencia circunscrita, cortando en P a la prolongación de $\overline{CA}$. Hallar PA.

Resolución:



Del gráfico: $m\angle C = m\dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2} = m\angle PBA$

Por tener $\angle P$ y α:

$\triangle PBA \sim \triangle PCB \Rightarrow m\angle PAB = m\angle PBC$,

$\dfrac{x}{PB} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{PB}{x+7}$

De las dos primeras: $PB = \dfrac{4x}{3}$ ...(1)

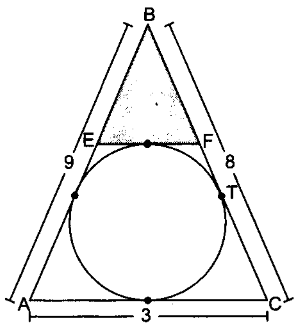
De las dos últimas: $\dfrac{6}{8} = \dfrac{PB}{x+7} \Rightarrow 6(x+7) = 8(PB)$

Con lo de (1): $6(x+7) = 8\left(\dfrac{4x}{3}\right)$

De donde: $x = 9$

9. En un $\triangle ABC$, AB = 9; BC = 8 y AC = 3. Sobre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se toman los puntos E y F, respectivamente; de modo que $\overline{EF}$ sea tangente a la circunferencia inscrita al $\triangle ABC$ y además $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$. Hallar la longitud EF.

Resolución:



Como: $\overline{EF} \parallel \overline{AC}$, entonces: $\triangle EBF \sim \triangle ABC$

Se puede escribir.

$\dfrac{EF}{AC} = \dfrac{\text{Semiperímetro del } \triangle EBF}{\text{Semiperímetro del } \triangle ABC}$ ...(1)

El semiperímetro del $\triangle ABC$ es:

$$p = \frac{9+8+3}{2} = 10 \qquad ...(2)$$

Por propiedad: $BT = p - AC \Rightarrow BT = 10 - 3 = 7$

Pero, para el $\triangle EBF$, $\overline{BT}$ mide igual que el semiperímetro.

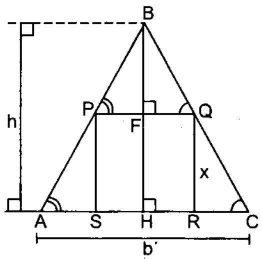
Semiperímetro del $\triangle EBF = 7 \qquad ...(3)$

Reemplazando (2) y (3) en (1): $\frac{EF}{3} = \frac{7}{10}$

$\therefore\ EF = 2{,}1$

10. Dado el $\triangle ABC$, de altura $BH = h$ y lado $AC = b$; hallar la longitud de x del cuadrado inscrito PQRS.

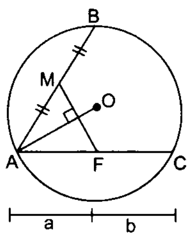
Resolución:



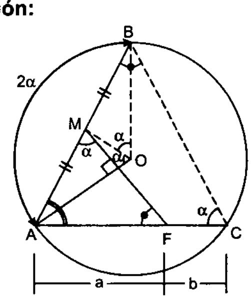
Se observa que: $\triangle PBQ \sim \triangle ABC$

$$\frac{PQ}{AC} = \frac{BF}{BH} \Rightarrow \frac{x}{b} = \frac{h-x}{h} \qquad \therefore\ x = \frac{bh}{b+h}$$

11. En la figura, O es centro de la circunferencia; $AM = MB$; $\overline{MF} \perp \overline{OA}$. Hallar la longitud de $\overline{AB}$.



Resolución:



Trazamos $\overline{OM}$ y $\overline{OB}$; $\overline{OM}$ será perpendicular a $\overline{AB}$, ya que $AM = MB$

Además: $m\angle AOM = m\angle MOB = \alpha \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 2\alpha$

$$m\angle C = m\frac{\overset{\frown}{AB}}{2} \Rightarrow m\angle C = \alpha$$

En el $\triangle AMO$: $m\angle AMH = m\angle AOM = \alpha$

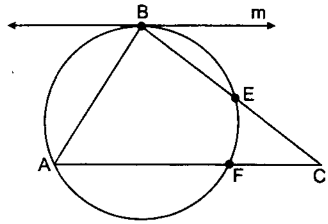
Por tanto, los triángulos ACB y AMF son semejantes, entonces: $m\angle AFM = m\angle B$

$$\frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AM} \Rightarrow (AB)(AM) = (AF)(AC)$$

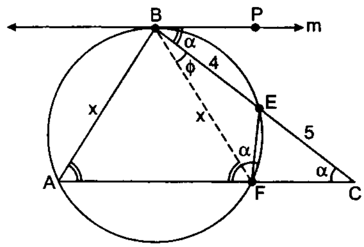
$$\Rightarrow (AB)\left(\frac{AB}{2}\right) = a(a+b)$$

$$\therefore\ AB = \sqrt{2a(a+b)}$$

12. En la figura, B es punto de tangencia y $\overleftrightarrow{m} \,//\, \overline{AC}$. Hallar AB, si $BE = 4$ y $EC = 5$.



Resolución:



$AB = x$

Por ser alternos internos entre las paralelas:

$m\angle C = m\angle PBC = \alpha$

También, por la misma razón, al trazar $\overline{BF}$:

$m\angle AFB = m\angle FBP$

De otro lado: $m\angle A = m\frac{\overset{\frown}{BEF}}{2} = m\angle FBP$

$\Rightarrow m\angle A = m\angle FBP$

En consecuencia: $m\angle AFB = m\angle A$

$\Rightarrow$ el $\triangle ABF$ es isósceles: $BF = AB = BF = x$

Además, al trazar $\overline{EF}$:

$$m\angle BFE = m\frac{\overset{\frown}{BE}}{2} = m\angle EBF$$

$\Rightarrow m\angle BFE = m\angle EBP = \alpha$

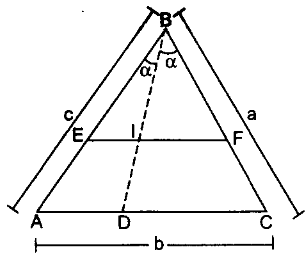
Entonces: $\triangle BEF \sim \triangle BFC$, donde: $m\angle BEF \cong m\angle BFC$

Luego: $\frac{BF}{BC} = \frac{BE}{BF} \Rightarrow \frac{x}{9} = \frac{4}{x} \Rightarrow x^2 = 36$

$\therefore\ x = 6$

13. En un $\triangle ABC$, de incentro I, por este punto se traza $\overline{EF} \,//\, \overline{AC}$, estando E sobre $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$. Si $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$, hallar EF.

Resolución:



Como I es incentro, $\overline{BD}$ es bisectriz

$\triangle EBF \sim \triangle ABC$: $\dfrac{EF}{AC} = \dfrac{BI}{BD}$

$\dfrac{EF}{b} = \dfrac{BI}{BD}$ ...(1)

Por el teorema del incentro: $\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{a+c}{b}$

Con propiedad de proporciones, a fin de obtener $\dfrac{BI}{BD}$:

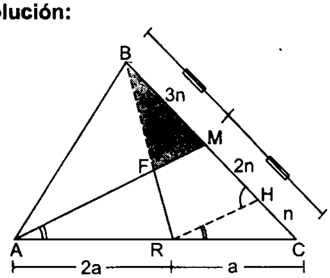
$\dfrac{BI}{BI+ID} = \dfrac{a+c}{a+b+c} \Rightarrow \dfrac{BI}{BD} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$\dfrac{EF}{b} = \dfrac{a+c}{a+b+c}$ $\therefore$ $EF = \dfrac{b(a+c)}{a+b+c}$

14. En un triángulo ABC, la mediana $\overline{AM}$ corta a la ceviana $\overline{BR}$ en el punto F. Si AR = 2RC y AM = 10, hallar $\overline{FM}$.

Resolución:



Dato: AM = 10

A fin de aprovechar la relación dada: AR = 2RC, trazamos $\overline{RH} \parallel \overline{AM}$, entonces: $\triangle RHC \sim \triangle AMC$

$\dfrac{RH}{AM} = \dfrac{a}{3a} \Rightarrow \dfrac{RF}{10} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow RF = \dfrac{10}{3}$ ...(1)

Además:

$\dfrac{RH}{AM} = \dfrac{a}{2a} \Rightarrow \dfrac{HC}{MH} = \dfrac{1}{2}$; si HC = n ⇒ MH = 2n

Entonces: BM = MC = 3n

Finalmente, como: $\triangle FBM \sim \triangle RBH \Rightarrow \dfrac{FM}{RH} = \dfrac{BM}{BH}$

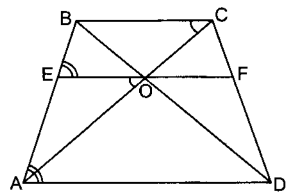
Con (1): $\dfrac{FM}{\frac{10}{3}} = \dfrac{3n}{5n}$ $\therefore$ FM = 2

15. En un trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, las diagonales se cortan en el punto O y por él se traza $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ (E sobre $\overline{AB}$ y F en $\overline{CD}$). Demostrar que:

I. EO = OF

II. $EF = \dfrac{2(BC)(AD)}{BC+AD}$

Resolución:



I. $\triangle EBO \sim \triangle ABD$: $\dfrac{EO}{AD} = \dfrac{EB}{AB}$ ...(1)

$\triangle EAO \sim \triangle BAC$: $\dfrac{EO}{BC} = \dfrac{AE}{AB}$ ...(2)

II. Sumando (1) y (2):

$\dfrac{EO}{AD} + \dfrac{EO}{BC} = \dfrac{EB+AE}{AB} \Rightarrow \dfrac{EO}{AD} + \dfrac{EO}{BC} = \dfrac{AB}{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{EO}{AD} + \dfrac{EO}{BC} = 1 \Rightarrow EO = \dfrac{(AD)(BC)}{AD+BC}$ ...(3)

En forma análoga, al hacer la relación de lados entre los triángulos semejantes OFD y BCD; OCF y ACD, se demuestra que:

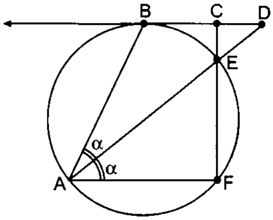
$OF = \dfrac{(AD)(BC)}{AD+BC}$ ...(4)

Luego, de (3) y (4): EO = OF

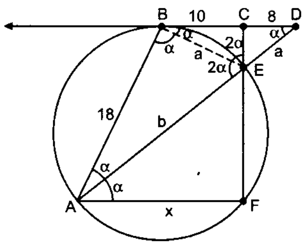
$EO + OF = EF = \dfrac{2(BC)(AD)}{BC+AD}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura, B es punto de tangencia y $\overline{BD} \parallel \overline{AF}$. Hallar la longitud de AF, si AB = 18 y BC = 10.



Resolución:



AF = x

Como $\overline{BD} \parallel \overline{AF}$, entonces, $m\angle D = m\angle DAF$

$\Rightarrow m\angle D = \alpha$; luego, el $\triangle ABD$ es isósceles:

$BD = AB \Rightarrow BD = 18$ y $CD = 8$

De otro lado, $m\angle CBE = m\angle\dfrac{\overset{\frown}{BE}}{2} = m\angle BAE$

$\Rightarrow m\angle CBE = \alpha$. Enseguida:

$m\angle AEB = m\angle EBD + m\angle D = \alpha + \alpha \Rightarrow m\angle AEB = 2\alpha$

También, en el cuadrilátero inscrito ABEF:

$m\angle BEC = m\angle BAF \Rightarrow m\angle BEC = 2\alpha$

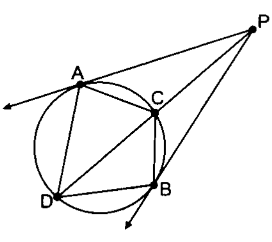
Se observa que $\triangle BED$ es isósceles: ED = BE = a

$\triangle AEF \sim \triangle DEC$: $\dfrac{x}{8} = \dfrac{b}{a}$

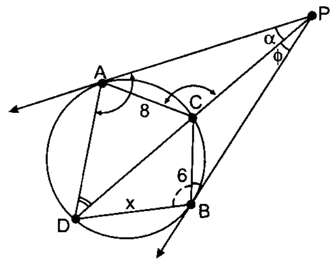
$\triangle ABE \sim \triangle BCE$: $\dfrac{b}{a} = \dfrac{18}{10}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{8} = \dfrac{18}{10} \quad \therefore\ x = 14{,}4$

2. En la figura, $\overline{PA}$ y $\overline{PB}$ son tangentes, AC = 8, BC = 6 y AD = 10. Hallar $\overline{BD}$.



Resolución:



Se observa: $m\angle ADC = m\dfrac{\overset{\frown}{AC}}{2} = m\angle CAP$ y

$m\angle CDB = m\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = m\angle CBP$

Entonces: $\triangle DBP \sim \triangle BCP$: $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{PB}{PC}$ ...(1)

$\triangle PAD \sim \triangle PCA$: $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{AD}{AC}$ ...(2)

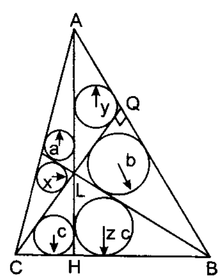
Reemplazando (2) en (1), ya que PB = PA:

$\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AD}{AC}$

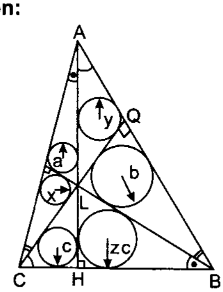
De donde: (BD)(AC) = (AD)(BC)

Con los datos $(BD)(8) = 10 \times 6 \quad \therefore\ BD = 7{,}5$

3. En la figura, L es ortocentro del $\triangle ABC$. Entonces, hallar la relación entre los radios de las circunferencias indicadas.



Resolución:



Se observa que:

$m\angle ACQ = m\angle FBA$; $m\angle QCB = m\angle HAB$,

$m\angle CAH = m\angle FBC$

Entonces: $\triangle AFL \sim \triangle BHL \Rightarrow \frac{a}{z} = \frac{AL}{LB}$

$\triangle AQL \sim \triangle CHL$: $\frac{c}{y} = \frac{CL}{AL}$

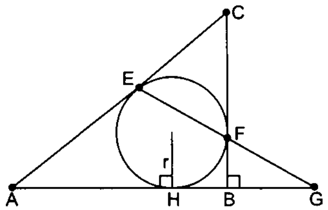
$\triangle LQB \sim \triangle CFL$: $\frac{b}{x} = \frac{BL}{CL}$

Multiplicando miembro a miembro estas tres relaciones y simplificando:

$$\left(\frac{a}{z}\right)\left(\frac{c}{y}\right)\left(\frac{b}{x}\right) = \left(\frac{AL}{LB}\right)\left(\frac{CL}{AL}\right)\left(\frac{LB}{CL}\right) \quad \therefore \ abc = xyz$$

4. En el $\triangle ABC$, recto en B, se sabe que AE = 7 y r = 3 (H, E y F son puntos de tangencia). Hallar BG.

Resolución:



Por el teorema de Menelao, en el $\triangle ABC$:

$$\left(\frac{AE}{EC}\right)\left(\frac{CF}{FB}\right)\left(\frac{BF}{GA}\right) = 1$$

Pero, EC = CF; de modo que lo anterior queda:

$$\left(\frac{AE}{FB}\right)\left(\frac{BG}{GA}\right) = 1 \qquad ...(\alpha)$$

De otro lado, es fácil probar que:

FB = r = HB y GA = GB + BA $\vee$ GA = GB + BH + AH

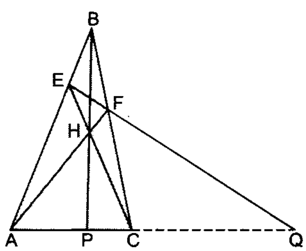
Siendo: AH = AE. Entonces: GA = GB + r + AE

Luego, en (α): $\left(\frac{AE}{r}\right)\left(\frac{BG}{BG + r + AE}\right) = 1$

Con los datos: $\left(\frac{7}{3}\right)\left(\frac{BG}{BG + 3 + 7}\right) = 1 \quad \therefore \ BG = 7{,}5$

5. En la figura, $\frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} = 0{,}25$. Hallar $\overline{AC}$.

Resolución:



Para el $\triangle ABC$.

Teorema de Menelao:

(AE)(BF)(CQ) = (EB)(FC)(QA) ...(1)

Teorema de Ceva:

(AE)(BF)(CP) = (EB)(FC)(PA) ...(2)

Dividiendo miembro a miembro (1) y (2):

$$\frac{(AE)(BF)(CQ)}{(AE)(BF)(CP)} = \frac{(EB)(FC)(QA)}{(EB)(FC)(PA)} \Rightarrow \frac{CQ}{CP} = \frac{QA}{PA}$$

O en forma equivalente:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{QA}{CQ}$$ Expresión que indica a los puntos A, P, C, Q, conformando una cuaterna armónica.

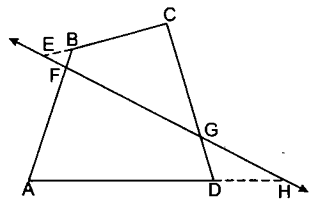
Entonces, por la relación de Descartes:

$$\frac{2}{AC} = \frac{1}{AP} + \frac{1}{AQ} \Rightarrow \frac{2}{AC} = 0{,}25$$

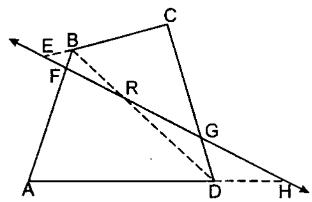
$\therefore$ AC = 8

6. La figura muestra un trapezoide ABCD y una recta que interseca a dos lados y a las prolongaciones de los otros. Demostrar que:

$$\left(\frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{BE}{EC}\right)\left(\frac{CG}{GD}\right)\left(\frac{DH}{HA}\right) = 1$$



Resolución:



Trazamos $\overline{BD}$, cortando en R a la recta.

Usando el teorema de Menelao:

$\triangle ABD$: $\left(\frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{BR}{RD}\right)\left(\frac{DH}{HA}\right) = 1 \qquad ...(\alpha)$

$\triangle BCD$: $\left(\frac{CG}{GD}\right)\left(\frac{DR}{RB}\right)\left(\frac{BE}{EC}\right) = 1 \qquad ...(\beta)$

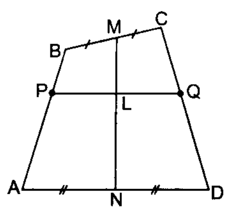
Multiplicando ahora las expresiones (α) y (β), miembro a miembro y cancelando las distancias iguales en numerador y denominador:

$$\left(\frac{AF}{FB}\right)\left(\frac{BE}{EC}\right)\left(\frac{CG}{GD}\right)\left(\frac{DH}{HA}\right) = 1$$

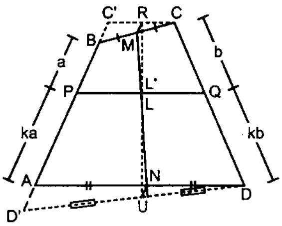
7. Dado el trapezoide ABCD; M y N bisecan $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Si $\frac{AP}{PB} = \frac{DQ}{QC} = k$, demostrar que:

I. $\frac{NL}{LM} = k$

II. LP = LQ



Resolución:



En efecto; sean: PB = a y QC = b

$\Rightarrow$ AP = ka y DQ = kb

Trazamos: $\overline{CC'} \,//\, \overline{PQ}$ y $\overline{DD'} \,//\, \overline{PQ}$

Teorema de Tales: $\dfrac{PD'}{PC'} = \dfrac{QD}{QC}$

$\dfrac{ka + AD'}{a + BC'} = \dfrac{kb}{b}$

De donde: AD' = k(BC')

Además, $\overline{RM} \,//\, \overline{UN}$, por ser paralelos a la misma recta $\overline{C'D'}$

Luego: m∠RML = m∠UNL y UN = k(RM)

Sea L', punto de intersección de $\overline{MN}$ y $\overline{RU}$, entonces: $\triangle RML' \sim \triangle UNL' \Rightarrow L'U = k(L'R)$. Pero, según Tales, $\overline{PQ}$ interseca a $\overline{RU}$ determinado sobre él, segmentos que son entre sí como k a 1. Por lo tanto, L' pertenece a $\overline{PQ}$. Así, concluimos que L y L' son un mismo punto. Es decir, R, L y U, son colineales.

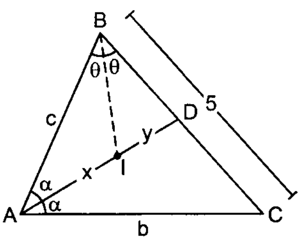
Además, de la semejanza anterior:

$\dfrac{NL}{LM} = k$, tal como se pidió probar.

Finalmente, es fácil demostrar que LP = LQ, el usar los trapecios D'C'RU y URCD.

8. El perímetro de un triángulo ABC es 25, la bisectriz interior AD = 10 y BC = 5. Hallar la distancia del incentro al vértice A.

Resolución:



Dato: a + b + c = 25

5 + b + c = 25 $\Rightarrow$ b + c = 20

También: x + y = 10

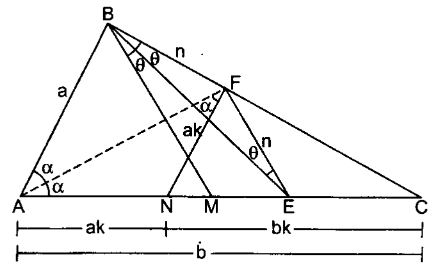
Por teorema del incentro:

$\dfrac{x}{y} = \dfrac{b+c}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = \dfrac{20}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 4$

$\Rightarrow \dfrac{x}{x+y} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow \dfrac{x}{10} = \dfrac{4}{5} \Rightarrow x = 8$

9. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$. La bisectriz del ángulo MBC interseca al lado $\overline{AC}$ en el punto E, luego se traza $\overline{EF}$ (F ∈ $\overline{BC}$) paralelo a la mediana $\overline{BM}$ y finalmente se traza $\overline{FN}$ (N ∈ $\overline{AM}$), paralelo al lado $\overline{AB}$. Hallar, la longitud de $\overline{FN}$ en función de AB y AC.

Resolución:

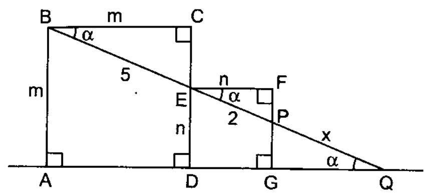


$ak + bk = b \Rightarrow k = \dfrac{b}{a+b}$

Luego, $FN = a\left(\dfrac{b}{a+b}\right) \quad \therefore\ FN = \dfrac{(AB)(AC)}{AB + AC}$

10. ABCD y DEFG son cuadrados, donde A, D y G pertenecen a la recta L, la prolongación de $\overline{BE}$ interseca a $\overline{FG}$ en P y L en Q. Si BE = 5 y EP = 2, hallar PQ.

Resolución:



$\triangle BAQ \sim \triangle EDQ$: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{x+7}{x+2}$ ...(1)

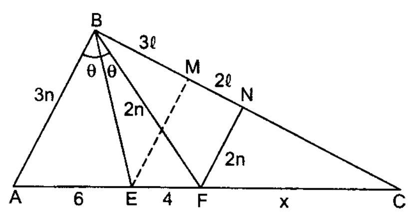
$\triangle BCE \sim \triangle EFP$: $\dfrac{m}{n} = \dfrac{5}{2}$ ...(2)

De (1) y (2): $\dfrac{x+7}{x+2} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow 2x + 14 = 5x + 10$

$\Rightarrow 3x = 4 \quad \therefore\ x = \dfrac{4}{3}$

11. En un triángulo ABC, se ubican los puntos E, F en $\overline{AC}$ y M, N en $\overline{BC}$, tal que $\overline{BE}$ es bisectriz del ∠ABF. Si $\dfrac{AB}{FB} = \dfrac{BM}{MN} = \dfrac{3}{2}$, FB = FN, y si AE = 6; hallar FC.

Resolución:

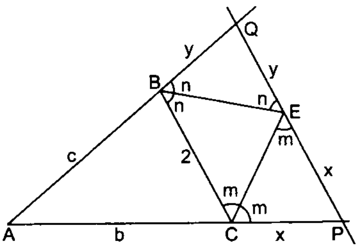


$\overline{AB} \,//\, \overline{ME} \,//\, \overline{NF}$

$\triangle FNC \sim \triangle ABC$: $\dfrac{x}{10+x} = \dfrac{2n}{3n} \Rightarrow x = 20$

12. En el triángulo ABC escaleno, BC = 2 y AB + AC = 10, siendo E el excentro relativo a $\overline{BC}$. Si por E se traza una paralela a $\overline{BC}$ de manera que interseque a las prolongaciones de $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ en P y Q, respectivamente. Hallar PQ.

Resolución:



Dato: b + c = 10

$\triangle ABC \sim \triangle AQP$: $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{b+c+2(x+y)}{b+c+2}$

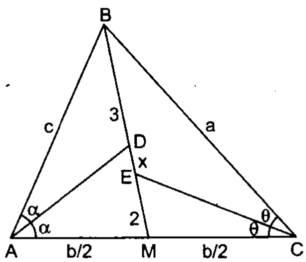
$\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{10+2(x+y)}{10+2}$

$6(x + y) = 10 + 2(x + y) \Rightarrow 4(x + y) = 10$

$\therefore\ x + y = 2{,}5$

13. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$; en los triángulos ABM y BMC se trazan las bisectrices $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ (D y E están en $\overline{BM}$). Si BD = 3; EM = 2 y $\dfrac{AB+BC}{AC} = \dfrac{3}{2}$. Hallar $\overline{DE}$.

Resolución:



Por dato: $\dfrac{a+c}{b} = \dfrac{3}{2}$ ...(1)

Por teorema: $\dfrac{2c}{b} = \dfrac{3}{x+2}$ ...(2)

$\dfrac{2a}{b} = \dfrac{x+3}{2}$ ...(3)

Sumando (2) y (3):

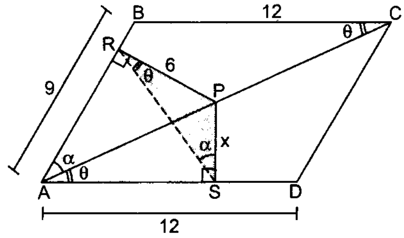
$\dfrac{2(a+c)}{b} = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{x+3}{2}$ ...(4)

(1) en (4): $2\left(\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{x+3}{2}$

Resolviendo: x = 1

14. En un paralelogramo ABCD, AB = 9 y AD = 12, se ubica el punto P en $\overline{AC}$ sobre su diagonal, de manera que la distancia de P a $\overline{AB}$ es 6, calcular la distancia de P al lado AD.

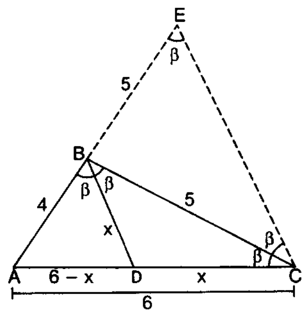
Resolución:



$\triangle RPS \sim \triangle CBA$: $\dfrac{x}{9} = \dfrac{6}{12} \Rightarrow x = 4{,}5$

15. Calcular la longitud de la bisectriz relativa al mayor lado del triángulo, donde sus lados son números enteros consecutivos y la medida del mayor ángulo interno es el doble del menor ángulo interno, si el lado de menor longitud es 4.

Resolución:

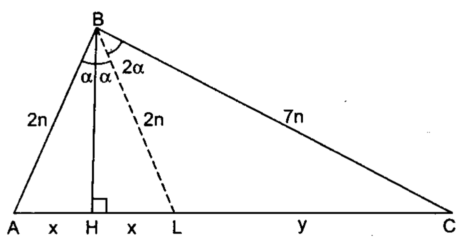


$\overline{BD} \,//\, \overline{EC} \Rightarrow \dfrac{6-x}{x} = \dfrac{4}{5}$

$\Rightarrow 30 - 5x = 4x \Rightarrow 9x = 30 \quad \therefore\ x = \dfrac{10}{3}$

16. En un triángulo ABC; 2BC = 7AB se traza la altura BH de manera que la m∠HBC = 3(m∠ABH), hallar AH/HC.

Resolución:



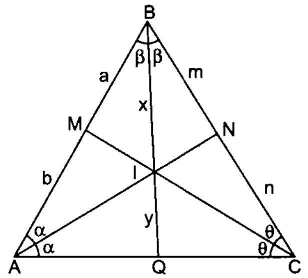
Por teorema: $\dfrac{2n}{2x} = \dfrac{7n}{y} \Rightarrow x = \dfrac{y}{7}$ ...(1)

Luego, AH/HC = $\dfrac{x}{x+y}$ ...(2)

(1) en (2): $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{\frac{y}{7}}{\frac{y}{7}+y} \quad \therefore\ \dfrac{AH}{HC} = \dfrac{1}{8}$

17. En un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AN}$, $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ ($N \in \overline{BC}$; $Q \in \overline{AC}$; $M \in \overline{AB}$) concurrente en I. Si $\frac{MB}{MA} + \frac{BN}{NC} = \frac{3}{4}$, hallar $\left(\frac{BI}{IQ}\right)$:

Resolución:



Dato: $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{3}{4}$

Por teorema de la bisectriz ($\triangle ABC$):

$\frac{a}{b} = \frac{m+n}{AC}$ ...(1)

$\frac{m}{n} = \frac{a+b}{AC}$ ...(2)

Sumando (1) y (2):

$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{a+b+m+n}{AC}$ ...(3)

$\triangle ABQ$: $\frac{x}{y} = \frac{a+b}{AQ} \Rightarrow a + b = \frac{x}{y}(AQ)$

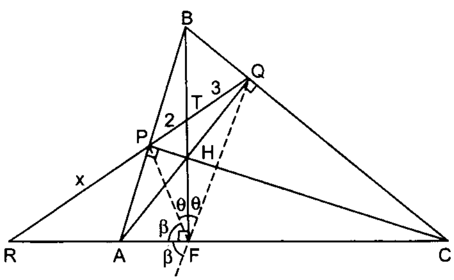
$\triangle QBC$: $\frac{x}{y} = \frac{m+n}{QC} \Rightarrow m + n = \frac{x}{y}(QC)$

Sumando: $\frac{a+b+m+n}{AC} = \frac{x}{y}$ ...(4)

De (3) y (4): $\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{x}{y}$ $\quad \therefore \frac{x}{y} = \frac{3}{4}$

18. En un triángulo ABC se trazan las alturas $\overline{AQ}$, $\overline{CP}$ y $\overline{BF}$. La recta PQ interseca a la altura $\overline{BF}$ en el punto T, a la prolongación de $\overline{CA}$ en el punto R. Si QT = 3 y TP = 2, hallar PR.

Resolución:

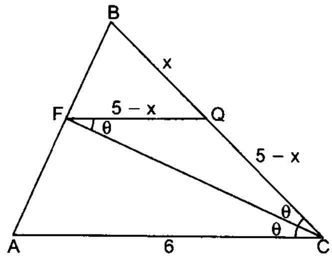


Según la figura, los puntos R, P, T y Q son armónicos. Se cumple:

$\frac{3}{2} = \frac{x+5}{x} \Rightarrow 3x = 2x + 10 \quad \therefore x = 10$

19. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{CF}$ y luego por F, una paralela a $\overline{AC}$, de modo que interseca a $\overline{BC}$ en Q. Si BC = 5 y AC = 6, hallar la magnitud de $\overline{BQ}$.

Resolución:

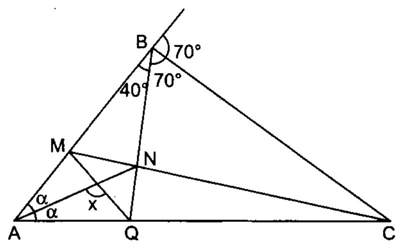


$\overline{FQ} \parallel \overline{AC}$: $\frac{x}{5} = \frac{5-x}{6} \Rightarrow 6x = 25 - 5x \Rightarrow 11x = 25$

$\therefore x = \frac{25}{11}$

20. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{BQ}$ y $\overline{CM}$ que se interseca en N, $m\angle BAN = m\angle QAN$, $m\angle ABQ = 40°$ y $m\angle QBC = 70°$, hallar la medida del ángulo que determina AN y QM.

Resolución:



Por el teorema de Menelao en el $\triangle ABC$ ($\overleftrightarrow{MC}$: recta secante).

(AM)(BN)(QC) = (MB)(NQ)(AC)

$\Rightarrow \frac{(BN)(QC)}{(NQ)(AC)} = \frac{MB}{AM}$ ...(1)

Por teorema de la bisectriz interior, en el $\triangle ABQ$:

$\frac{AB}{AQ} = \frac{BN}{NQ} \Rightarrow AB = \frac{(AQ)(BN)}{NQ}$

Por teorema de la bisetriz exterior, en el $\triangle ABQ$:

$\frac{AB}{BQ} = \frac{AC}{QC} \Rightarrow AB = \frac{(BQ)(AC)}{QC}$

Igualando: $\frac{(BN)(QC)}{(NQ)(AC)} = \frac{BQ}{AQ}$ ...(2)

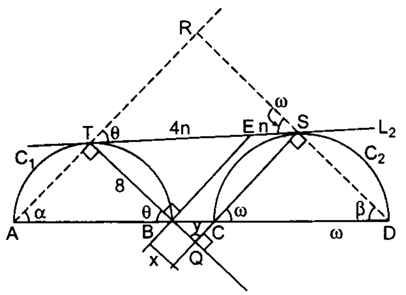
De (1) y (2): $\frac{BQ}{AQ} = \frac{MB}{AM}$

Esto demuestra que $\overline{QM}$ es bisectriz, por propiedad: $x = 90° + \frac{40°}{2}$

$\therefore x = 110°$

21. En una recta L, se ubican los puntos consecutivos A, B, C y D con diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se trazan las semicircunferencias C_1 y C_2 en un mismo semiplano, L_2 es recta tangente a C_1 y C_2 en T y S respectivamente, las prolongaciones de $\overline{TB}$ y $\overline{SC}$ se intersecan en el punto Q, en $\overline{TS}$ se ubica E de manera que $m\angle TBE = 90°$, TB = 8, TE = 4(ES). Hallar BQ.

Resolución:



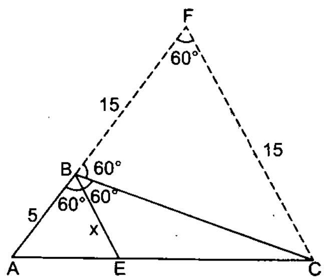
En el cuadrilátero TRSQ:

$2y + 180° = 360° \Rightarrow y = 90° \Rightarrow EB \parallel SQ$

Por Tales: $\dfrac{x}{8} = \dfrac{n}{4n} \Rightarrow x = 2$ cm

22. En un triángulo ABC, si $m\angle B = 120°$, AB = 5 cm y BC = 15 cm. Se traza la bisectriz $\overline{BE}$. Hallar la longitud de $\overline{BE}$.

Resolución:



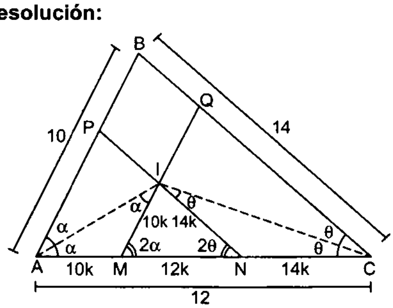
Se construye el triángulo equilátero BFC.

Se observa que $\overline{BE} \parallel \overline{FC}$

$\triangle ABE \sim \triangle AFC$: $\dfrac{x}{15} = \dfrac{5}{20} \Rightarrow x = \dfrac{15}{4}$ cm

23. Por el incentro de un triángulo ABC se trazan dos rectas paralelas hacia $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$; las cuales intersecan a $\overline{AC}$ en los puntos M y N respectivamente. Si AB = 10 cm, BC = 14 cm y AC = 12 cm. Hallar $\overline{MN}$.

Resolución:



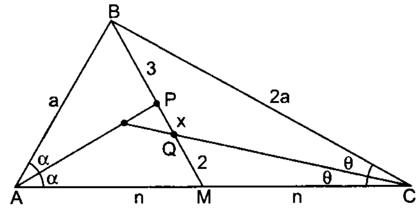
$\triangle ABC \sim \triangle MIN$: $\dfrac{MI}{10} = \dfrac{IN}{14} = \dfrac{MN}{12} = k$

Luego, $10k + 12k + 14k = 12 \Rightarrow k = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow MN = 12(1/3) \quad \therefore MN = 4$ cm

24. En un triángulo ABC, se tiene que BC = 2(AB). Las bisectrices interiores de los ángulos A y C intersecan a la mediana $\overline{BM}$ en los puntos P y Q, tal que $\overline{BP}$ es menor que $\overline{BQ}$. Si BP = 3 y QM = 2, hallar $\overline{PQ}$.

Resolución:



Por teorema de la bisectriz interior.

$\triangle ABM$: $\dfrac{a}{n} = \dfrac{3}{x+2}$ ...(1)

$\triangle MBC$: $\dfrac{2a}{n} = \dfrac{x+3}{2} \Rightarrow \dfrac{a}{n} = \dfrac{x+3}{4}$ ...(2)

(1) = (2): $\dfrac{3}{x+2} = \dfrac{x+3}{4} \Rightarrow 12 = (x+2)(x+3)$

$0 = x^2 + 5x - 6$

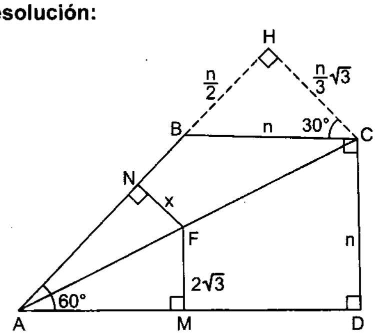
$x \quad\; 6$

$x \quad -1$

$0 = (x - 1)(x + 6) \Rightarrow x = 1$

25. En un cuadrilátero ABCD se tiene que $m\angle A = 60°$, $m\angle C = m\angle D = 90°$ y BC = CD. En AC se ubica el punto F y se traza $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ y $\overline{FN} \perp \overline{AB}$. Si $FM = 2\sqrt{3}$, hallar FN.

Resolución:



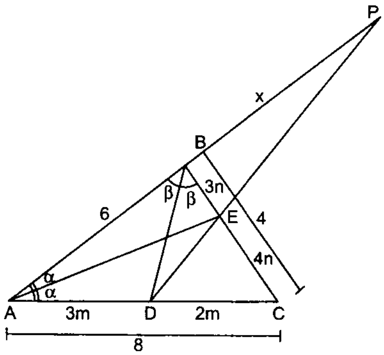
$⊿ANF \sim ⊿AHC$: $\dfrac{x}{\frac{n}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{AF}{AC}$ ...(1)

$⊿AFM \sim ⊿ACD$: $\dfrac{2\sqrt{3}}{n} = \dfrac{AF}{AC}$ ...(2)

(1) = (2): $\dfrac{x}{\frac{n}{2}\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{n} \quad \therefore x = 3$

26. En un triángulo ABC, AB = 6, AC = 8 y BC = 4. Se trazan las bisectrices $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ y el rayo $\overline{DE}$ que interseca a $\overline{AB}$ en P. Calcular BP.

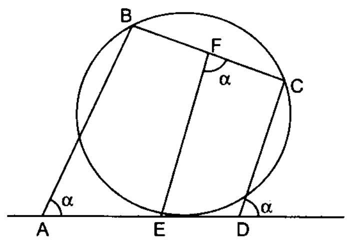
Resolución:



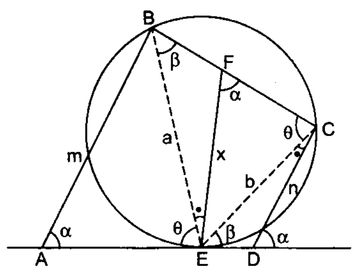
Por el teorema de Menelao, en el $\triangle ABC$ ($\overleftrightarrow{PD}$: recta secante): $3m(4n)(x) = 2m(3n)(x+6)$

$\therefore\ x = 6$

27. En la figura, AB = m y CD = n, calcular EF.



Resolución:



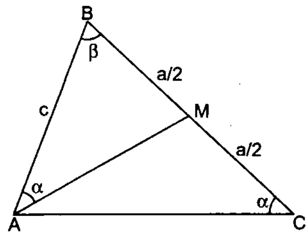
$\triangle ABE \sim \triangle FEC$: $\dfrac{m}{x} = \dfrac{a}{b}$ ...(1)

$\triangle BFE \sim \triangle EDC$: $\dfrac{x}{n} = \dfrac{a}{b}$ ...(2)

(1) = (2): $\dfrac{m}{x} = \dfrac{x}{n} \Rightarrow x = \sqrt{mn}$

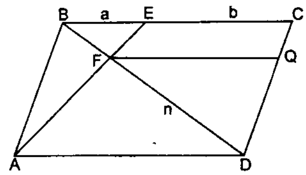
28. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{AM}$ ($M \in \overline{BC}$). Si la $m\angle BAM = m\angle BCA$. Calcular $\dfrac{AB}{BC}$.

Resolución:

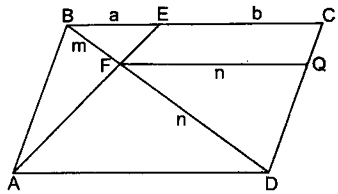


$\triangle ABC \sim \triangle MBA$: $\dfrac{c}{a} = \dfrac{a/2}{c} \Rightarrow \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

29. ABCD es un paralelogramo, $\overline{FQ}\ //\ \overline{AD}$. Si BE = a; EC = b, hallar FQ.



Resolución:



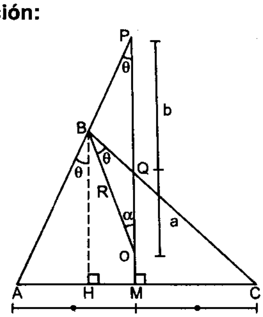
$\triangle BCD \sim \triangle FQD$: $\dfrac{x}{a+b} = \dfrac{n}{m+n}$ ...(1)

$\triangle AFD \sim \triangle EFB$: $m = \dfrac{a}{k}$ y $n = \dfrac{a+b}{k}$

En (1): $\dfrac{x}{a+b} = \dfrac{\dfrac{a+b}{k}}{\dfrac{2a+b}{k}} \Rightarrow x = \dfrac{(a+b)^2}{2a+b}$

30. En un triángulo ABC (AB < BC), la mediatriz de $\overline{AC}$ intersecan a $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AB}$ en P. Si O es el circuncentro y OQ = a; PQ = b, calcular el circunradio.

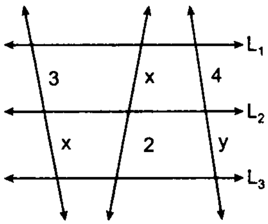
Resolución:



$\triangle OBP \sim \triangle OQB$: $\dfrac{R}{a+b} = \dfrac{a}{R} \Rightarrow R^2 = a(a+b)$

$\therefore\ R = \sqrt{a(a+b)}$

31. En la figura mostrada, las rectas L_1, L_2 y L_3 son paralelas. Entonces, el valor de y es:



Resolución:

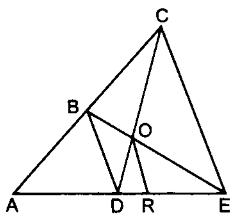
Por el teorema de Tales:

$\frac{3}{x} = \frac{x}{2} \Rightarrow x^2 = 6 \Rightarrow x = \sqrt{6}$

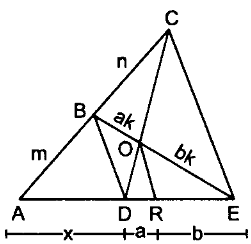
También: $\frac{x}{2} = \frac{4}{y} \Rightarrow y = \frac{8}{x}$

$\Rightarrow y = \frac{8}{\sqrt{6}} = \frac{8\sqrt{6}}{6} \quad \therefore\ y = \frac{4\sqrt{6}}{3}$

32. En la figura mostrada se cumple que: $\overline{BD} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{OR}$. Si DR = a y RE = b, hallar la longitud de $\overline{AD}$.



Resolución:



Dato: $\overline{BD} \parallel \overline{CE} \parallel \overline{OR}$

Por el teorema de Tales:

$\frac{m}{n} = \frac{x}{a+b} \Rightarrow \frac{m+n}{n} = \frac{x+a+b}{a+b}$

Por el teorema de Menelao en el $\triangle ABE$ ($\overline{DC}$ secante):

$x(bk)n = (a + b)(ak)(m + n)$

$\Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}\right)(a + b)\underbrace{\left(\frac{m+n}{n}\right)}$

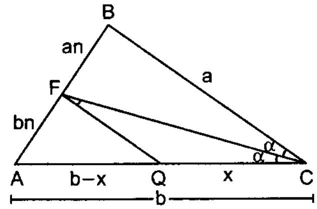
$\Rightarrow x = \left(\frac{a}{b}\right)(a + b)\left(\frac{x+a+b}{(a+b)}\right)$

$\Rightarrow bx = ax + a(a + b) \Rightarrow x(b - a) = a(a + b)$

$\therefore\ x = \frac{a(a+b)}{b-a}$

33. En un $\triangle ABC$ se traza la bisectriz interior $\overline{CF}$ ($F \in \overline{AB}$). Luego se traza $\overline{FQ} \parallel \overline{BC}$ ($Q \in \overline{AC}$). Si BC = a y AC = b, hallar la longitud de $\overline{FQ}$.

Resolución:



Si $\overline{FQ} \parallel \overline{BC} \Rightarrow FQ = QC = x$

Por teorema: $BF = an \wedge AF = bn$

Por el teorema de Tales:

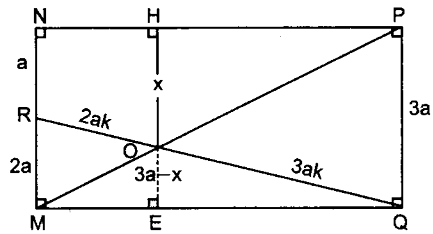
$\frac{bn}{an} = \frac{b-x}{x} \Rightarrow bx = ab - ax$

$\Rightarrow ax + bx = ab \Rightarrow x(a + b) = ab$

$\therefore\ x = \frac{ab}{a+b}$

34. MNPQ es un rectángulo, tal que MQ > MN. Si $R \in \overline{MN}$, NR = a, RM = 2a y $MP \cap RQ = \{0\}$, hallar la distancia de O al lado $\overline{NP}$.

Resolución:

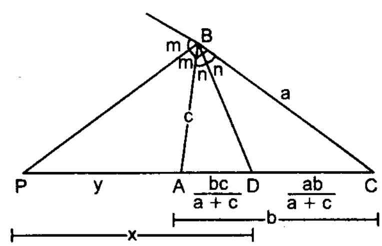


$\triangle MRQ \sim \triangle EOQ \Rightarrow \frac{3a-x}{2a} = \frac{3ak}{5ak}$

$\Rightarrow 15a - 5x = 6a \Rightarrow 5x = 9a \Rightarrow x = \frac{9a}{5}$

35. En un $\triangle ABC$, sus lados miden AB = c, BC = a y AC = b (c < a). Se trazan las bisectrices interior y exterior $\overline{BH}$ y $\overline{BP}$ ($D \in \overline{AC}$ y $P \in a\overleftrightarrow{AC}$). Entonces, la longitud de $\overline{DP}$ es:

Resolución:



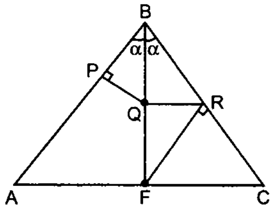
Por teorema: $\frac{a}{c} = \frac{y+b}{y} \Rightarrow ay = cy + bc$

$\Rightarrow y(a - c) = bc \Rightarrow y = \frac{bc}{a-c}$

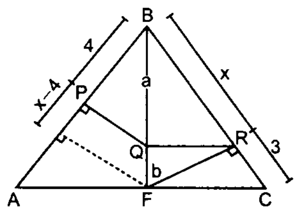
Luego: $x = \frac{bc}{a-c} + \frac{bc}{a+c} \Rightarrow x = bc\left[\frac{a+c+a-c}{(a-c)(a+c)}\right]$

$x = \frac{(bc)(2a)}{a^2 - c^2} \quad \therefore\ x = \frac{2abc}{a^2 - c^2}$

36. En la figura mostrada: $\overline{QR} \parallel \overline{AC}$. Si BP = 4 y RC = 3, entonces la longitud de $\overline{BR}$ es:



Resolución:



Por el teorema de Tales:

$\frac{a}{b} = \frac{x}{3}$ ...(1)

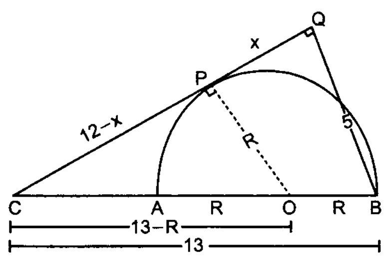
$\frac{a}{b} = \frac{4}{x-4}$ ...(2)

De (1) y (2): $\frac{x}{3} = \frac{4}{x-4} \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 6$

37. $\overline{AB}$ es el diámetro de una semicircunferencia, se ubica el punto C en la prolongación del diámetro $\overline{BA}$, desde C se traza una tangente a la semicircunferencia en el punto P, Q ∈ $\overline{CP}$, tal que: $\overline{QB} \perp \overline{CQ}$. Si BQ = 5 y CB = 13 , entonces la longitud en $\overline{PQ}$ es:

Resolución:



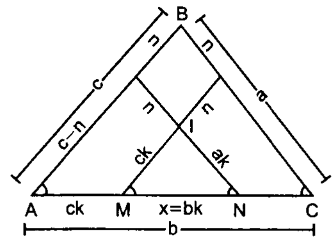
$⊿CPO \sim ⊿CQB \Rightarrow \frac{R}{5} = \frac{13-R}{13} \Rightarrow R = \frac{65}{18}$

También: $\frac{12-x}{12} = \frac{65}{18(5)}$

$\Rightarrow 36 - 3x = 26 \Rightarrow 3x = 10 \quad \therefore x = \frac{10}{3}$

38. En un $\triangle ABC$ sus lados miden: AB = c; BC = a y AC = b. Por el incentro I se trazan rectas paralelas a uno de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, dichas rectas paralelas intersecan al lado $\overline{AC}$ en los puntos M y N. Entonces, hallar la longitud del segmento MN.

Resolución:



Por el teorema de Tales:

$\frac{n}{ak} = \frac{c}{b} \Rightarrow n = \frac{ack}{b}$ ...(1)

Por semejanza:

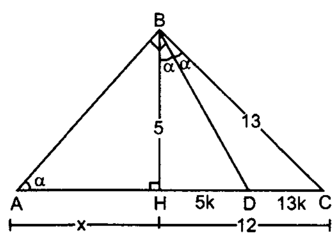
$\frac{ck}{c-n} = \frac{b}{b+c}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $k = \frac{b}{a+b+c} = \frac{b}{2p}$

Luego: $x = b\left(\frac{b}{2p}\right) \Rightarrow x = \frac{b^2}{2p}$

39. En un $\triangle ABC$ se traza la altura $\overline{BH}$. Si m∠HBC = 2(m∠BAH), BH = 5 y HC = 12, entonces la longitud de $\overline{AH}$ es:

Resolución:

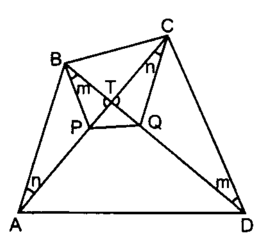


$⊿BHC$: $5k + 13k = 12 \Rightarrow 18k = 12 \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

$⊿ABD$: $5^2 = x(5)\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow x = 7{,}5$

40. En un cuadrilátero ABCD se trazan: $\overline{BP}$ paralelo al lado $\overline{CD}$ (P pertenece a la diagonal $\overline{AO}$) y $\overline{CQ}$ paralelo a $\overline{AB}$ (Q pertenece a $\overline{BD}$). En dichas condiciones, respecto a $\overline{PQ}$ se puede afirmar.

Resolución:



$\triangle PTB \sim \triangle CTD \Rightarrow \dfrac{TP}{TC} = \dfrac{TB}{TD}$ ...(1)

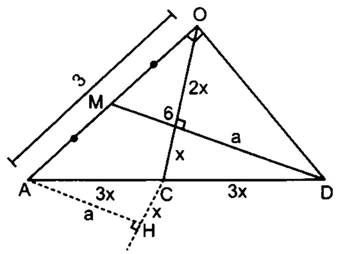
$\triangle ATB \sim \triangle CTQ \Rightarrow \dfrac{TC}{TA} = \dfrac{TQ}{TB}$ ...(2)

$(1) \times (2)$: $\dfrac{TP(TC)}{TC(TA)} = \dfrac{TB(TQ)}{TD(TB)} \Rightarrow \dfrac{TP}{TA} = \dfrac{TQ}{TD}$

Esto significa que: $\overline{PQ} \,//\, \overline{AD}$

41. En el $\triangle AOD$ recto en O (AO > OD), las medianas $\overline{OC}$ y $\overline{DM}$ se intersecan perpendicularmente. Si AO = 3 m, entonces la longitud (en m) de $\overline{AD}$ es:

Resolución:



$\triangle AHC \cong \triangle DGC$ (ALA)

$\Rightarrow AH = GD = a$

Pero: $a^2 = 9x^2 - x^2 \Rightarrow a^2 = 8x^2$

$\triangle AHO$: $3^2 = a^2 + (4x)^2$

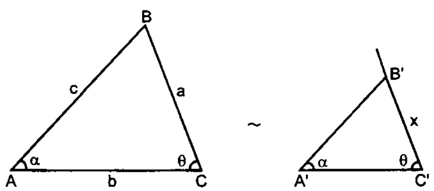
$9 = 8x^2 + 16x^2$

$\Rightarrow 24x^2 = 9 \Rightarrow 2\sqrt{6}x = 3$

$\Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{6}}{12} \Rightarrow x = \dfrac{\sqrt{6}}{4} \quad \therefore AC = \dfrac{3\sqrt{6}}{2}$

42. En un $\triangle ABC$ sus lados miden: AC = b, BC = a y AB = c (a < b y a < c). Entonces, la longitud del menor lado de otro triángulo de perímetro L semejante al $\triangle ABC$ es:

Resolución:



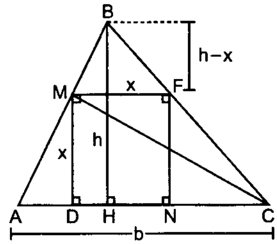
(1): $2p = a + b + c$ (2): $2p = L$

Por teoría, si son semejantes, sus elementos homólogos son proporcionales.

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{L}{a+b+c} \Rightarrow x = \dfrac{aL}{a+b+c}$

43. En un $\triangle ABC$ se trazan la altura $\overline{BH}$ y la ceviana $\overline{CM}$. En $\overline{CM}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M, F, N y D respectivamente que determinan un cuadrado. Si AC = b + BH = h, entonces la longitud de la altura $\overline{MD}$ del $\triangle AMC$ es:

Resolución:



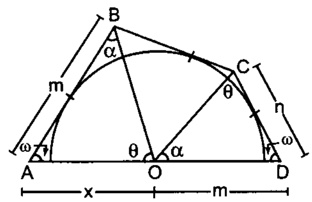
$\triangle MBF \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow \dfrac{h-x}{h} = \dfrac{x}{b} \Rightarrow bh - bx = hx$

$\Rightarrow x(b + h) = bh \quad \therefore x = \dfrac{bh}{b+h}$

44. En un cuadrilátero ABCD se cumple AB = m, CD = n y $m\angle BAD = m\angle CDA$. Considerando el punto medio de $\overline{AD}$ como centro se traza una semicircunferencia tangente a los otros 3 lados del cuadrilátero. Entonces, la longitud de $\overline{AD}$ es:

Resolución:



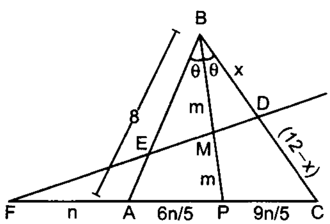
$\triangle ABO \sim \triangle DOC$

$\Rightarrow \dfrac{x}{n} = \dfrac{m}{x} \Rightarrow x^2 = mn \Rightarrow x = \sqrt{mn}$

Luego: $AD = 2\sqrt{mn}$

45. En un $\triangle ABC$ se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$ ($P \in \overline{AC}$), luego por el punto medio de $\overline{BP}$ se traza una recta secante que intercepta a $\overline{AB}$ en E, a $\overline{BC}$ en D y a la prolongación de $\overline{CA}$ en F. Si BC = 12, AB = 8 y AC = 3(AF), entonces la longitud de $\overline{BD}$ es:

Resolución:



Por el teorema del Menelao en el $\triangle PBC$:

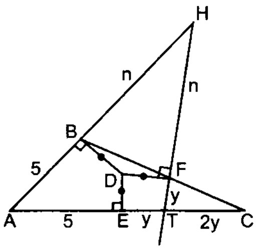
$(12 - x)m\left(n + \dfrac{6n}{5}\right) = x(m)4n$

$(12 - x)\left(\dfrac{11}{5}\right) = 4x$

$132 - 11x = 20x \Rightarrow x = \dfrac{132}{31}$

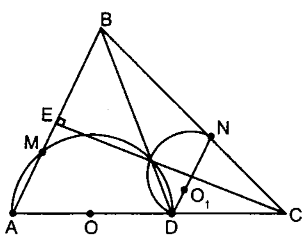
46. En el interior de un $\triangle ABC$ se ubica el punto D, en los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y F respectivamente, tal que DB = DE = DF y m$\angle$ABD = m$\angle$DEC = 90°. Una recta trazada por F perpendicular a $\overline{DF}$ divide a $\overline{EC}$ en dos segmentos ET y TC ($T \in \overline{EC}$). Si TC = 2(ET) y AB = 5, entonces la longitud de $\overline{EC}$ es:

Resolución:

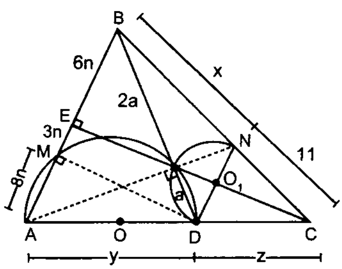


Por el teorema de Menelao, en el $\triangle AHT$:
$(5)(n)(2y) = (n)(y)(5 + 3y)$
$10 = 5 + 3y \Rightarrow 3y = 5$

47. En la figura mostrada los puntos O y O_1 son centros de las semicircunferencias. Si 3(AM) = 8(ME); BE = 2(EM) y NC = 11, entonces la longitud de $\overline{BN}$ es:



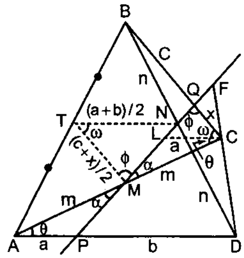
Resolución:



Por el teorema de Ceva, en el $\triangle ABC$:
$(11n)(x)(z) = (6n)(11)(y)$ ...(1)
Por el teorema de Menelao, en el $\triangle ABC$:
$(11)(2a)(y) = (x)(a)(y + z)$ ...(2)
De (1) y (2): x = 16 $\therefore$ BN = 16

48. En un cuadrilátero ABCD, se ubican M y N puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente. Luego trazamos la recta que pasa por M y N e interseca a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ en los puntos P y Q y a la prolongación de $\overline{CD}$ en el punto F. Si AP = a, PD = b y BQ = c, entonces $\overline{CQ}$ es:

Resolución:



Se traza $\overline{LC} // \overline{AD}$:
$\Rightarrow \triangle MLC \cong \triangle MPA$ (A. L. A)
Luego: LC = AP = a
Ahora observamos que el $\triangle LQC \sim \triangle NMT$

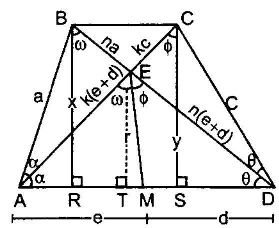
$$\Rightarrow \frac{x}{\frac{c+x}{2}} = \frac{a}{\frac{a+b}{2}} \Rightarrow x(a+b) = a(c+x)$$

$\Rightarrow xa + xb = ac + ax$

$$\therefore\ x = \frac{ac}{b}$$

49. En un cuadrilátero ABCD: m$\angle$BAC = m$\angle$CAD, m$\angle$ADB = m$\angle$BDC, AB = a y CD = c. Sea M un punto de $\overline{AD}$ y $\{E\} = \overline{BD} \cap \overline{AC}$, tal que m$\angle$AEM + m$\angle$EDM = 90°, MD = d y AM = e, hallar el cociente de las distancias de B y C al segmento AD.

Resolución:



$\triangle AET \sim \triangle ACS$

$$\Rightarrow \frac{r}{y} = \frac{k(e+d)}{k(e+d+c)} \Rightarrow r = \frac{y(e+d)}{(e+d+c)} \quad ...(1)$$

$\triangle BRD \sim \triangle ETD$

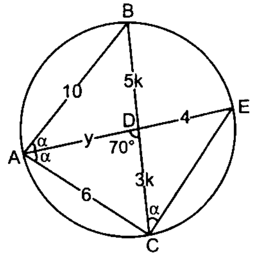
$$\Rightarrow \frac{r}{x} = \frac{n(e+d)}{n(a+e+d)} \Rightarrow r = \frac{x(e+d)}{(a+e+d)} \quad ...(2)$$

De (1) y (2):

$$\frac{x(e+d)}{a+e+d} = \frac{y(e+d)}{e+d+c} \quad \therefore\ \frac{x}{y} = \frac{a+d+e}{c+d+e}$$

50. Un triángulo ABC está inscrito en una circunferencia, la prolongación de la bisectriz interior $\overline{AD}$ interseca a la circunferencia en el punto E. Si AC = 6, AB = 10, DE = 4 y la m$\angle$ADB = 110°, entonces la m$\angle$BCE es:

Resolución:



Por teoría: $(y)(4) = (5k)(3k) \Rightarrow y = \dfrac{15k^2}{4}$ ...(1)

También el $\triangle ABC$: $y^2 = 60 - 15k^2$ ...(2)

(1) en (2): $\dfrac{225}{16}k^4 = 60 - 15k^2$; si: $k^2 = x$

$\Rightarrow 15x^2 + 16x - 64 = 0$

$3x \quad +8$

$5x \quad -8$

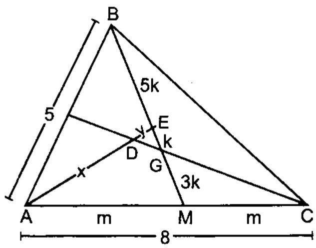
$\Rightarrow (3x + 8)(5x - 8) = 0 \Rightarrow x = \dfrac{8}{5}$

Luego: $y = \dfrac{15}{4}\left(\dfrac{8}{5}\right) \Rightarrow y = 6$

$\triangle ADC$ es isósceles: $AD = AC = 6 \quad \therefore \alpha = 40°$

51. En un triángulo ABC de baricentro G, se traza la mediana $\overline{BM}$, luego se traza la bisectriz interior $\overline{AE}$ en el triángulo ABM, $\overline{CG} \cap \overline{AE} = \{D\}$. Si AB = 5 cm y AC = 8 cm, entonces AD/DE es:

Resolución:

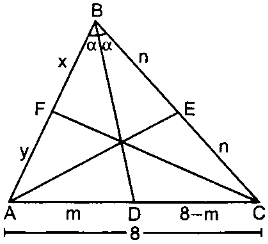


Por el teorema de Menelao en el $\triangle AEM$:

$(x)(k)(m) = (y)(3k)(2m) \Rightarrow \dfrac{x}{y} = 6$

52. En el triángulo ABC se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, la mediana $\overline{AE}$ y la ceviana $\overline{CF}$ que pasa por la intersección BD y AE. Si AC = 8 y (BE)(AD) = 12, entonces la longitud de $\overline{BF}$ es:

Resolución:



Por teorema: $\dfrac{x+y}{2n} = \dfrac{m}{8-m}$

$\Rightarrow x + y = \dfrac{2mn}{8-m} \Rightarrow y = \dfrac{2mn}{8-m} - x$ ...(1)

En el $\triangle ABC$, por el teorema de Ceva:

$(y)(n)(8 - m) = (x)(n)(m) \Rightarrow y = \dfrac{xm}{8-m}$ ...(2)

Igualando (1) $\wedge$ (2):

$\dfrac{2mn}{8-m} - x = \dfrac{xm}{8-m} \Rightarrow 2mn - x(8 - m) = xm$

$\Rightarrow 2mn - 8x + xm = xm \Rightarrow 8x = 2mn$

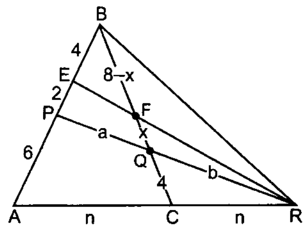
$\Rightarrow x = \dfrac{mn}{4}$

Por dato: mn = 12

Reemplazando: $x = \dfrac{12}{4} \quad \therefore x = 3$

53. Se tiene el triángulo ABC, donde AB = BC = 12, en $\overline{AB}$ se ubican los puntos consecutivos P y E, tal que AP = PB, AB = 3(BE), en la prolongación de $\overline{AC}$ se ubica el punto **R** de manera que AC = CR, $\overline{PR}$ y $\overline{RE}$ intersecan al lado BC en Q y F. Halle $\overline{FQ}$.

Resolución:



Por el teorema de Menelao en el $\triangle APR$:

($\overline{BC}$ es secante): $(n)(b)(6) = (n)(a)(12)$

$b = 2a$ ...(1)

En el $\triangle PBQ$ ($\overline{ER}$ es secante):

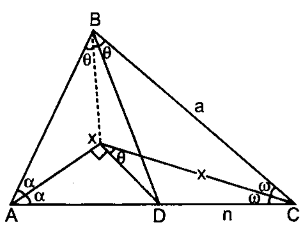
$2(8 - x)(b) = 4(x)(a + b)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $(8 - x)(2a) = 2x(a + 2a)$

$\Rightarrow 8 - x = x(3) \Rightarrow 4x = 8 \quad \therefore x = 2$

54. En un triángulo ABC se traza la ceviana $\overline{BD}$, de manera que la $m\angle AID = 90°$ (I es incentro del $\triangle ABC$) y (BC)(CD) = 64. Entonces la longitud de $\overline{IC}$ es:

Resolución:



Dato: $(a)(n) = 64$ ...(1)

Por propiedad: $m\angle AIC = 90° + \dfrac{2\theta}{2} = 90° + \theta$

Pero por dato: m∠AID = 90° ⇒ m∠DIC = θ

Luego: ΔDIC ~ ΔIBC

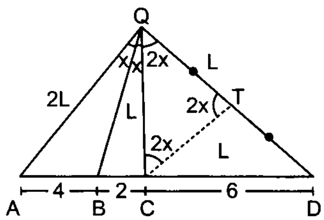
$\Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{a}{x} \Rightarrow x^2 = (a)(n) \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$x^2 = 64 \Rightarrow x = 8$

55. Dado el triángulo AQD de manera que: B, C ∈ $\overline{AD}$, $\frac{(m\angle CQD)}{2}$ = m∠BQC = m∠AQB = x, si AB = 4, BC = 2, y CD = 6. Halle x.

Resolución:



Piden: x

Trazamos $\overline{CT}$ // $\overline{AQ}$ ⇒ QT = DT

TC = L (base media)

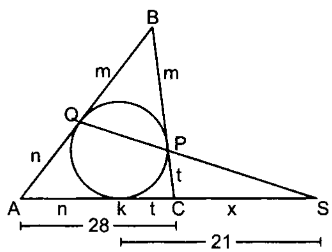
ΔQTC: isósceles ⇒ m∠QTC = 2x

ΔQTC: 2x + 2x + 2x = 180°

⇒ 6x = 180° ∴ x = 30°

56. Se tiene un triángulo escaleno ABC, circunscrito a una circunferencia de centro O, se ubican P, Q y K puntos de tangencia (P ∈ $\overline{BC}$, K ∈ $\overline{AC}$), las prolongaciones de PQ y AC se intersecan en S. Si AC = 28 y KS = 21, calcule $\overline{CS}$.

Resolución:



Piden CS = x

ΔABC (Teorema de Menelao)

(n)(m)(x) = (m)(t)(28 + x) ⇒ nx = t(28 + x)

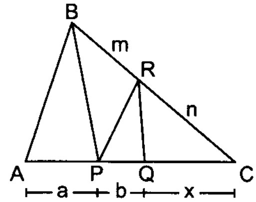
Pero: t = 21 − x ∧ n = 7 + x

⇒ (7 + x)(x) = (21 − x)(28 + x)

∴ x = 14

57. Dado el triángulo ABC, en $\overline{AC}$ se ubican los puntos consecutivos P y Q. En $\overline{BC}$ se ubica el punto R, de manera que $\overline{PR}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{BP}$ // $\overline{RQ}$. Si AP = a y PQ = b, cuánto mide $\overline{QC}$.

Resolución:



Piden: QC = x

Donde: $\overline{PR}$ // $\overline{AB}$ ∧ $\overline{QR}$ // $\overline{PB}$

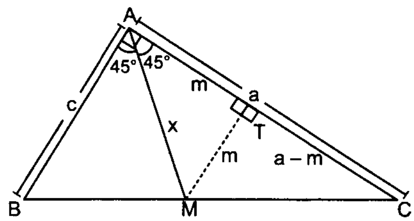
ΔABC (Tales): $\frac{m}{n} = \frac{a}{b+x}$ ...(1)

ΔBPC (Tales) ⇒ $\frac{m}{n} = \frac{b}{x}$ ...(2)

(1) = (2) ⇒ $\frac{a}{b+x} = \frac{b}{x}$ ∴ $x = \frac{b^2}{a-b}$

58. En un triángulo rectángulo ABC; recto en A, se traza la bisectriz interior AM (M pertenece a $\overline{BC}$). Si la suma de las inversas de las longitudes de los catetos es igual a $k\sqrt{2}$. Determine la longitud de la bisectriz AM.

Resolución:



Piden: AM = x

Dato: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = k\sqrt{2}$

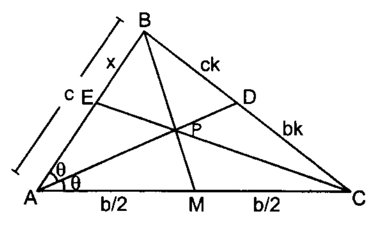
⊿MTC ~ ⊿BAC ⇒ $\frac{m}{c} = \frac{a-m}{a} \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$

$\Rightarrow \frac{1}{m} = k\sqrt{2} \Rightarrow m = \frac{1}{k\sqrt{2}}$

Como: $x = m\sqrt{2}$ ∴ $x = \frac{1}{k}$

59. En un triángulo ABC se traza la mediana BM y la bisectriz interior AD que se intersecan en P. Además se traza la ceviana CE que pasa por el punto P. Si AB = c y AC = b, calcule $\overline{BE}$.

Resolución:



Piden: BE = x

$\triangle ABC$ (TBI): $\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}$

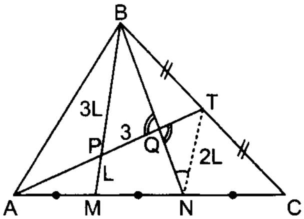
$\Rightarrow$ BD = ck y DC = bk

$\triangle ABC$ (Teorema de Menelao)

$xbk\left(\frac{b}{2}\right) = (c-x)ck\left(\frac{b}{2}\right) \quad \therefore\ x=\frac{c^2}{b+c}$

60. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas BM y BN (M y N contenidos en $\overline{AC}$) tal que: AM = MN = NC. La mediana relativa al lado BC interseca a las cevianas BM y BN en los puntos P y Q respectivamente. Si PQ = 3 dm, halle la longitud de la mediana mencionada.

Resolución:



Piden: AT; si PQ = 3

$\triangle BMC$: $\overline{TN} \parallel \overline{BM}$ (base media)

$\triangle ATN$: $\overline{PM}$: base media

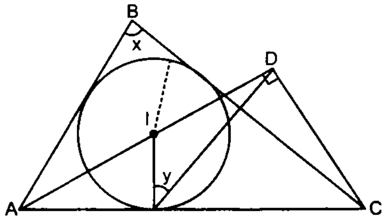
$\Rightarrow$ AP = PT y TN = 2(MP)

BM = 2(TN) $\Rightarrow$ BM = 4L $\Rightarrow$ BP = 3L

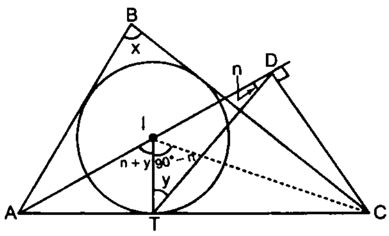
$\triangle BPQ \sim \triangle NTQ$:

$\frac{TQ}{3}=\frac{2L}{3L} \Rightarrow TQ = 2 \Rightarrow AP = PT = 5 \quad \therefore\ AT = 10$

61. En la figura I es el incentro del triángulo ABC, se puede decir que:



Resolución:



⏢TIDC inscriptible: m∠IDT = n

$\triangle TID$: m∠AIT = n + y

⊾ITC: m∠TIC = 90° − n

Por propiedad: m∠AIC = 90° + $\frac{x}{2}$

Pero: m∠AIC = n + y + 90° − n

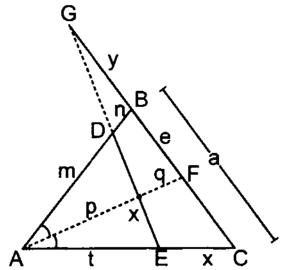
Luego: n + y + 90° − n = 90° + $\frac{x}{2}$

$\Rightarrow$ x = 2y

Se puede decir que: x > y

62. En un triángulo ABC, BC = a, L es una recta que contiene al incentro e interseca a los lados AB y AC en D y E respectivamente. Si AD = m; DB = n y AE = t, entonces $\overline{EC}$ mide:

Resolución:



Por el teorema de Menelao en el $\triangle ABC$:

x(m)y = t(n)(y + a)

De donde: $y=\frac{ant}{xm-nt}$ ...(1)

En el $\triangle ABF$: p(n)(y + e) = q(m)y

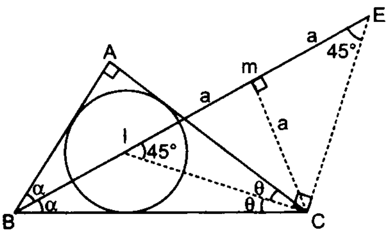
$\Rightarrow \frac{p}{q}=\frac{my}{n(y+e)}$. Pero: $\frac{p}{q}=\frac{m+n+t+x}{a}$

$\Rightarrow \frac{m+n+t+x}{a}=\frac{my}{n(y+e)}$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): obtenemos después de simplificar: $x=\frac{mat-nt^2}{m^2+mn+nt}$

63. En un triángulo ABC recto en A, la distancia del incentro I a un excentro, relativa a un cateto es igual a la longitud de la hipotenusa. Entonces la medida del menor ángulo agudo del triángulo es:

Resolución:



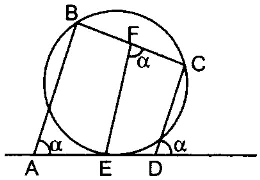
Dato: IE = BC = 2a

⊾ICE isósceles: MC = a

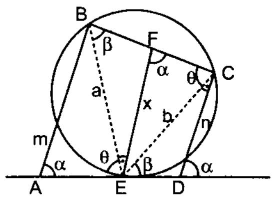
⊾BMC notable (30° ∧ 60°)

$\Rightarrow \alpha = 30° \quad \therefore$ m∠ACB = 30°

64. En la siguiente figura, AB = m y CD = n. Calcule $\overline{EF}$.



Resolución:



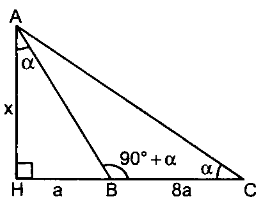
$\triangle ABE \sim \triangle FEC \Rightarrow \frac{m}{x} = \frac{a}{b}$ ...(1)

$\triangle BFE \sim \triangle EDC \Rightarrow \frac{x}{n} = \frac{a}{b}$ ...(2)

$(1) = (2)$: $\frac{m}{x} = \frac{x}{n} \Rightarrow x = \sqrt{mn}$

65. En un triángulo ABC, la $m\angle B - m\angle C = 90$. Se traza la altura $\overline{AH}$ y resulta que: $BC = 8(BH) = 8a$. Calcule $\overline{AH}$.

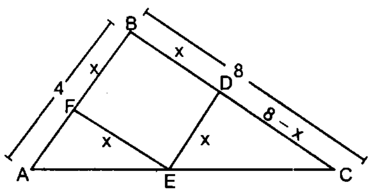
Resolución:



$\triangle BHA \sim \triangle AHC \Rightarrow \frac{x}{9a} = \frac{a}{x} \quad \therefore\ x = 3a$

66. En un triángulo ABC, $AB = 4$, $BC = 8$. Se inscribe el rombo BDEF ($D \in \overline{BC}$, $F \in \overline{AB}$). Calcule $\overline{BD}$.

Resolución:

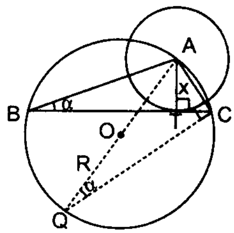


$\overline{DE} \,//\, \overline{AB}$; $\overline{EF} \,//\, \overline{BC}$

$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{8-x}{8} \Rightarrow x = \frac{8}{3}$

67. En una circunferencia de radio R, se traza una cuerda $\overline{BC}$, sea A un punto de la circunferencia; con centro en A se traza una circunferencia tangente a la cuerda; halle el radio de esta circunferencia si: $(AB)(AC) = k$.

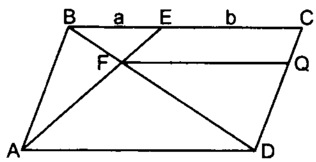
Resolución:



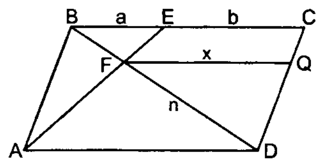
$\triangle ATB \sim \triangle ACQ \Rightarrow \frac{x}{AC} = \frac{AB}{2R}$

$\Rightarrow x = \frac{\overbrace{(AB)(AC)}^{k}}{2R} \Rightarrow x = \frac{k}{2R}$

68. ABCD es un paralelogramo: $\overline{FQ} \,//\, \overline{AD}$. Si $BE = a$; $EC = b$. Halle: $\overline{FQ}$.



Resolución:



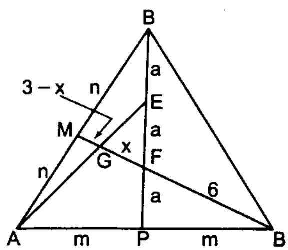
$\triangle BCD \sim \triangle FQD \Rightarrow \frac{x}{a+b} = \frac{n}{m+n}$ ...(1)

$\triangle AFD \sim \triangle EFB \Rightarrow m = \frac{a}{k}$ y $n = \frac{a+b}{k}$

En (1): $\frac{x}{a+b} = \frac{\frac{a+b}{k}}{\frac{2a+b}{k}} \Rightarrow x = \frac{(a+b)^2}{2a+b}$

69. En un triángulo se trazan las medianas $\overline{CM}$ y $\overline{BP}$ que se intersecan en F. Si $E \in \overline{BP}$, tal que $\overline{AE} \cap \overline{CM} = \{G\}$ y $BE = FP$, calcule $\overline{GF}$, si $FC = 6$.

Resolución:



F es baricentro del $\triangle ABC$

$\Rightarrow$ BE = EF = FP = a; FC = 2(MF) = 6

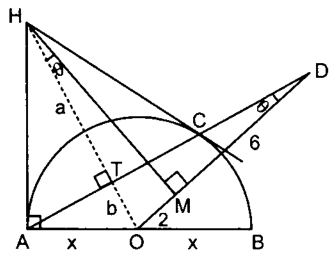
Se pide hallar GF = x $\Rightarrow$ MG = 3 – x

Por el teorema de Menelao en el $\triangle MBF$ ($\overline{EA}$ recta secante): (a)(x)(n) = (a)(3 – x)(2n)

Luego: x = 6 – 2x $\Rightarrow$ 3x = 6 $\Rightarrow$ x = 2

70. Se tiene una semicircunferencia de centro O y de diámetro AB, se traza $\overline{HA} \perp AB$, luego de H, la tangente HC (C sobre la semicircunferencia), se prolonga $\overline{AC}$ hasta un punto D y trazamos $\overline{HM} \perp \overline{OD}$. Si: OM = 2 dm, MD = 6 dm. Calcule AB (en dm).

Resolución:



$\triangle HMO \sim \triangle DTO \Rightarrow \dfrac{a+b}{8} = \dfrac{2}{b}$

b(a + b) = 16 ...(1)

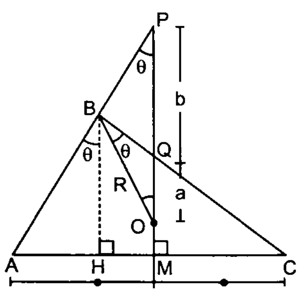
$\triangle HAO$: $x^2 = b(a+b)$ ...(2)

De (1) y (2): $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

$\therefore$ AB = 8

71. En un triángulo ABC (AB < BC), la mediatriz de $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en Q y a la prolongación de $\overline{AB}$ en P. Si O es el circuncentro y OQ = a, PQ = b, calcule el circunradio.

Resolución:



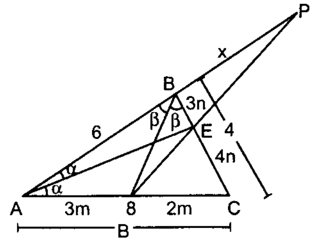
$\triangle OBP \sim \triangle OQB$

$\Rightarrow \dfrac{R}{a+b} = \dfrac{a}{R} \Rightarrow R^2 = a(a+b)$

$\Rightarrow R = \sqrt{a(a+b)}$

72. En un triángulo ABC, AB = 6 , AC = 8 y BC = 4. Se trazan las bisectrices $\overline{AE}$ y $\overline{BD}$ y el rayo DE que interseca a AB en P. Calcular $\overline{BP}$.

Resolución:

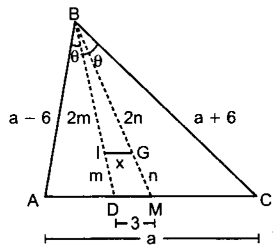


Por el teorema de Menelao, en el $\triangle ABC$ ($\overline{PD}$ recta secante):

(3m)(4n)(x) = (2m)(3n)(x + 6) $\Rightarrow$ x = 6

73. En un triángulo ABC; $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ al mismo nivel tienen sus longitudes en progresión aritmética de razón igual a 6. Calcular la distancia del incentro al baricentro.

Resolución:



Por el teorema del incentro:

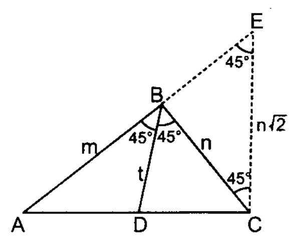
$\dfrac{BI}{ID} = \dfrac{a-6+a+6}{a} \Rightarrow \dfrac{BI}{ID} = 2$

Pero como: $\dfrac{BG}{GM} = 2 \Rightarrow \overline{IG} \parallel \overline{AC}$

$\triangle IBG \sim \triangle DBM \Rightarrow \dfrac{x}{3} = \dfrac{2n}{3n} \Rightarrow x = 2$

74. En un triángulo rectángulo ABC (recto en B), se traza la bisectriz BD. Si AB = m; BC = n y BD = t. ¿En qué relación están m, n y t?

Resolución:



Se prolonga $\overline{BE}$, de modo que BE = BC = n

$\Rightarrow m\angle ABD = m\angle BEC = 45°$

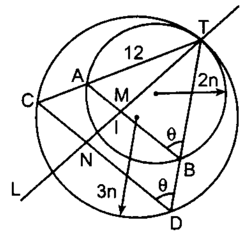
BD // EC $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEC$

$\Rightarrow \dfrac{t}{n\sqrt{2}} = \dfrac{m}{m+n} \Rightarrow \dfrac{m+n}{mn} = \dfrac{\sqrt{2}}{t}$

$$\frac{m}{mn}+\frac{n}{mn}=\frac{\sqrt{2}}{t} \Rightarrow \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{\sqrt{2}}{t}$$

75. Sean dos circunferencias tangentes interiores, sea T el punto de tangencia. Sean A, B, C y D puntos de las circunferencias de radios r y R. r < R. Los puntos: T, A y C; y T, B y D son colineales, $T \in \overline{L}$, tal que $\overline{L} \cap \overline{AB} = \{M\}$ y $\overline{L} \cap \overline{CD} = \{N\}$. Si 3r = 2R y TM = 12 cm. Halle $\overline{MN}$.

Resolución:



$\overline{AB} \,//\, \overline{CD}$

$\Rightarrow \triangle ATB \sim \triangle CTD$

Sea: MN = x

$\Rightarrow \dfrac{12}{x+12}=\dfrac{2n}{3n}$

Efectuando:

$x = 6 \quad \therefore\ MN = 6$

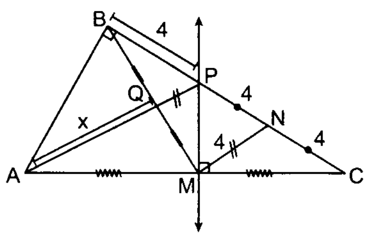
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

En un triángulo ABC, la mediatriz relativa al lado $\overline{AC}$ interseca a $\overline{BC}$ en P. $\overline{AP}$ y $\overline{BM}$ se intersecan en Q. Determine $\overline{AQ}$ (en cm), si MQ = QB y BP = 4 cm.

A) 2 B) 4 C) 6
D) 8 E) 10

Resolución:



Trazamos $\overline{MN} \,//\, \overline{AP} \Rightarrow NP = NC$

Por mediana relativa a $\overline{PC}$: MN = NP = NC

Pero: BP = PN $\Rightarrow$ NP = 4

En el $\triangle BMN$ (base media): QP = 2

En el $\triangle APC$ (base media): x + 2 = 8

$\therefore\ x = 6$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

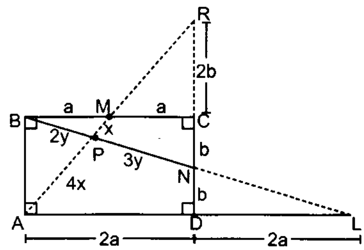
En un rectángulo ABCD, M y N son puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, tales que AM = $2\sqrt{2}$ cm y BN = $\sqrt{17}$ cm. Si P es el punto de intersección de los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, entonces el valor de PM + PN en cm es:

A) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{17}}{5}$ B) $\dfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$

C) $\dfrac{2\sqrt{2}+2\sqrt{17}}{5}$ D) $\dfrac{3\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$

E) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{17}}{5}$

Resolución:



- $\triangle BCN \cong \triangle DNL \Rightarrow DL = 2a$
- $\triangle BPM \sim \triangle APL$: AP = 4(PM)

Luego: $5x = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = \dfrac{2\sqrt{2}}{5}$

- $\triangle MCR \cong \triangle ABM \Rightarrow RC = 2b$
- $\triangle APB \sim \triangle NPR \Rightarrow \dfrac{PN}{BP}=\dfrac{3}{2}$

Luego: $5y = \sqrt{17} \Rightarrow 3y = \dfrac{3\sqrt{17}}{5}$

$x + 3y = \dfrac{2\sqrt{2}+3\sqrt{17}}{5}$

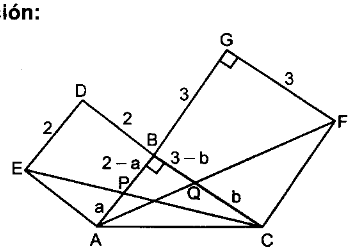
Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Sobre los catetos de un triángulo ABC, recto en B, se construyen los cuadrados ABDE y BCFG; $\overline{CE}$ corta $\overline{AB}$ en P y $\overline{AF}$ interseca a $\overline{BC}$ en Q. Si AB = 2 m y BC = 3 m, calcule el valor de $\sqrt{(AP)(CQ)}$ en m.

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{6}{5}$ D) $\frac{5}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

Resolución:



Piden: $\sqrt{ab}$

$\Delta EDC \sim \Delta PBC$: $\dfrac{2}{2-a} = \dfrac{5}{3} \Rightarrow a = \dfrac{4}{5}$

$\Delta ABQ \sim \Delta AGF$: $\dfrac{3-b}{3} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow b = \dfrac{9}{5}$

$\therefore \sqrt{ab} = \dfrac{6}{5}$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

En la figura adjunta, OC = 6 cm, AM = 8 cm. Calcule la longitud de la circunferencia (en cm).

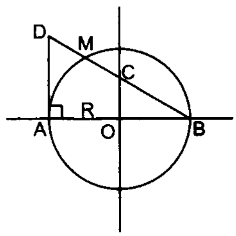
A) $12\sqrt{7}\pi$

B) $12\sqrt{5}\pi$

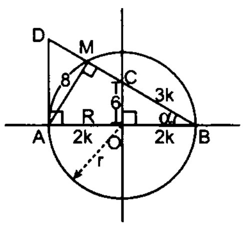
C) $12\sqrt{3}\pi$

D) $\dfrac{24\sqrt{3}}{3}\pi$

E) $\dfrac{24\sqrt{5}}{5}\pi$



Resolución:



Piden L⊙: longitud de circunferencia

- $\Delta AMB \sim \Delta OCB$: $\dfrac{BC}{OB} = \dfrac{3}{2}$
- ΔOCB (Pitágoras): $(2k)^2 + 6^2 = (3k)^2$

$k = \dfrac{6}{\sqrt{5}} \Rightarrow r = \dfrac{12}{\sqrt{5}} \quad \therefore L\odot = 2\pi r = \dfrac{24\sqrt{5}}{5}\pi$

Clave: E

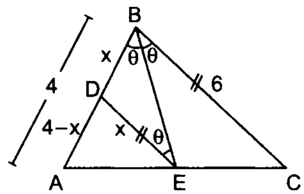
PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

En un triángulo ABC, AB = 4, BC = 6. Se traza $\overline{DE}$ paralela a $\overline{BC}$ donde los puntos D y E pertenecen a los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente, de modo que el segmento BE sea bisectriz del ángulo B. Calcule el valor de $\overline{BD}$.

A) 1,8 B) 2,0 C) 2,2

D) 2,4 E) 2,8

Resolución:



Piden: x

$\Delta ADE \sim \Delta ABC$: $\dfrac{x}{6} = \dfrac{4-x}{4}$

$\Rightarrow 2x = 12 - 3x \quad \therefore x = 2,4$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un rombo ABCD de 12 m de lado, se toma el punto medio M de $\overline{BC}$, $\overline{AM}$ corta a $\overline{BD}$ en G y $\overline{DM}$ a $\overline{AC}$ en H. Calcular $\overline{GH}$.

A) 4 m B) 6 m C) $2\sqrt{2}$ m
D) $3\sqrt{2}$ m E) 1 m

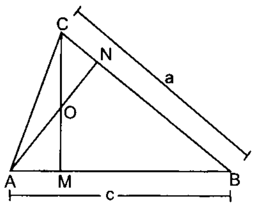
2. Se tiene un triángulo ABC, donde la medida del ángulo A es dos veces la medida del ángulo B.
Si b = 4 y c = 5, hallar la razón $\frac{a}{b}$.

A) 2/3 B) 5/6 C) $\frac{\sqrt{6}}{2}$
D) 6/5 D) 3/2

3. En un trapecio ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{BC} < \overline{AD}$), por B se traza una parálela a $\overline{CD}$, que interseca a $\overline{AC}$ en M y por C se traza una paralela a $\overline{AB}$ que intersecan a $\overline{BD}$ en N. Calcular la longitud del segmento $\overline{MN}$, sabiendo que BC = 3, AM = 6 y CM = 4.

A) 1,40 B) 1,50 C) 1,20
D) 1,25 E) 1,35

4. En la figura, el punto O es el ortocentro del △ABC; BN = 2; MB = 3; a + c = 10. Hallar la longitud de OC.

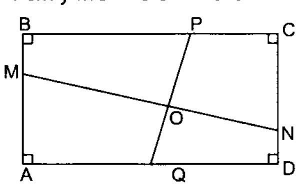


A) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ B) $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{27}{2\sqrt{3}}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

5. Las longitudes de los lados de un triángulo son 4; 7 y 10 cm. Si otro triángulo semejante al primero, de 147 cm. ¿Cuál es la longitud de su lado menor?

A) 28 cm B) 24 cm C) 32 cm
D) 20 cm E) 48 cm

6. En la figura, se tiene un rectángulo ABCD en el cual AD = 2(CD) y donde m∠OMA = m∠BPO. Si $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se intersecan en O, de modo que PO = 2 cm, QO = 4 cm y MO = 5 cm. Hallar $\overline{NO}$.



A) 8 cm B) 10 cm C) 7 cm
D) 9 cm E) 6 cm

7. Los lados de un triángulo ABC miden: BC = 6, CA = 8, AB = 4 respectivamente. Por un punto M de $\overline{AB}$ se traza la paralela $\overline{MN}$ al lado $\overline{BC}$. Hallar la longitud de $\overline{AM}$, de modo que el perímetro del triángulo MAN sea igual al perímetro del trapecio BMNC.

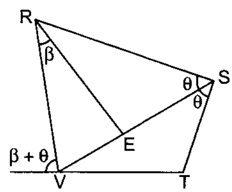
A) 3,5 B) 2,0 C) 1,5
D) 2,5 E) 3,0

8. En una circunferencia, se inscribe el triángulo ABC. La recta mediatriz del segmento $\overline{AC}$ interseca a la circunferencia en el punto M (M ∈ $\overset{\frown}{AB}$). La prolongación del segmento $\overline{MB}$ interseca a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en el punto Q. Si AB = c, BC = a, AC = b y AB > BC. Calcular la longitud del segmento CQ.

A) $\frac{ac}{c-a}$ B) $\frac{bc}{b-a}$ C) $\frac{ab}{c-a}$
D) $\frac{ab}{a+c}$ E) $\frac{bc}{c-a}$

9. En la figura, RS = 10, ES = 5, VE = 3, calcular ST.

A) 2
B) 2,5
C) 4
D) 6
E) 8



10. En un trapezoide ABCD, la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, es L unidades. Las prolongaciones de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ se intersecan en el punto E. Hallar la longitud del segmento que une los baricentros de las regiones triangulares BEC y AEC.

A) $\frac{L}{3}$ B) $\frac{L}{2}$ C) $\frac{2L}{3}$
D) $\frac{4L}{5}$ E) $\frac{3L}{4}$

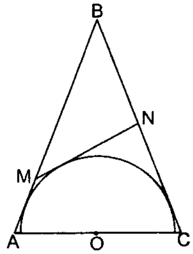
11. En un △ABC, se cumple que m∠BAC = 2 (m∠BCA); AB = 6 y AC = 8. Hallar la longitud de BC.

A) $3\sqrt{21}$ B) $\sqrt{21}$ C) $2\sqrt{21}$
D) $2\sqrt{14}$ E) $3\sqrt{14}$

12. Sea un triángulo rectángulo ABC (recto en B). Trazamos la bisectriz que parte del ángulo recto, que corta a la hipotenusa en el punto D. Si AB = c y BC = a. ¿Cuál de las siguientes relaciones es verdaderas?

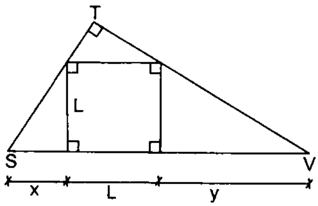
A) BD(a + c) = ac   B) BD(a + c) < ac
C) BD(a + c) ≥ ac   D) BD(a + c) ≤ ac
E) BD(a + c) > ac

13. En la figura mostrada, el triángulo ABC es isósceles, O es el centro de la semicircunferencia; $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia. Si AM = a y NC = b, hallar $\overline{AC}$.



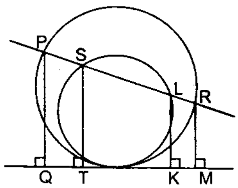
A) $\sqrt{ab}$
B) $2\sqrt{ab}$
C) $\sqrt{a^2+b^2}$
D) $\dfrac{2ab}{a+b}$
E) $\dfrac{3ab}{a+b}$

14. En la figura, hallar la hipotenusa del triángulo STV. Si $x^2 + y^2 = 20$; $L = \sqrt{8}$.



A) $5 + \sqrt{8}$ B) $8 + \sqrt{8}$ C) $6 + \sqrt{8}$
D) $7 + \sqrt{8}$ E) $9 + \sqrt{8}$

15. De la figura, calcular: (PQ)(RM), si: (ST)(LK) = 27.

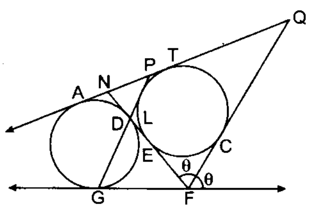


A) 25
B) 25/2
C) 27
D) 27/2
E) 9

16. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{AE}$ que interseca al lado $\overline{BC}$ en D. Luego, desde los vértices B y C se trazan las perpendiculares $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ a dicha bisectriz. Si HD = 1 cm y DE = 2 cm, hallar la longitud del segmento $\overline{AH}$.

A) 5 cm   B) 4 cm   C) 3 cm   D) 2 cm   E) 1 cm

17. En el gráfico, A, T, C, E, D, L y G son puntos de tangencia. Si 7(AN) = GF y NP = 2 cm, hallar PQ.



A) 16 cm
B) 13 cm
C) 18 cm
D) 14 cm
E) 21 cm

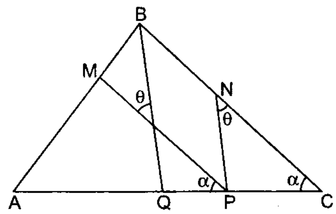
18. En el triángulo ABC, la bisectriz exterior del ángulo B interseca a la prolongación de $\overline{AC}$ en F. Hallar $\overline{PF}$, siendo P el punto de tangencia de la circunferencia inscrita al triángulo ABC con el lado $\overline{AC}$, si AE = 7, BC = 5 y AC = 6.

A) 16   B) 13   C) 14
D) 19   E) 17

19. Por el baricentro G, de un triángulo ABC se traza una recta que corta a $\overline{AB}$ en E y $\overline{BC}$ en F. Calcular FC, si AE = a, EB = b y BF = c

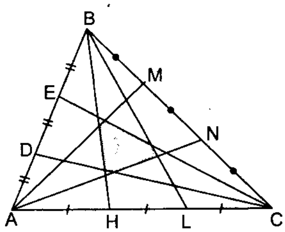
A) $\dfrac{b(a+c)}{2}$ B) $\dfrac{c(a-b)}{a}$ C) $\dfrac{c(b-a)}{b}$
D) $\dfrac{c(b+a)}{b}$ E) $\dfrac{(b+a)}{b}$

20. Hallar NC, si BN = 4, 3AM = 5MB y AQ = QC.



A) 10   B) 8   C) 12
D) 16   E) 9

21. La suma de las cevianas interiores al triángulo ABC es 200 cm. Calcular el perímetro del hexágono interior sombreado.



A) 20 cm   B) 24 cm   C) 25 cm
D) 30 cm   E) 32 cm

22. Tenemos una semicircunferencia cuyo diámetro $\overline{AB}$ descansa sobre una recta. Luego, se trazan dos circunferencias, cada una de ellas tangente, exteriormente, con la semicircunferencia (a lados distintos) y a la recta en los puntos E y F (A ∈ $\overline{EB}$), si AE = a, FB = b. Calcular AB.

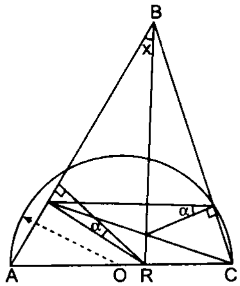
A) $\sqrt{ab}$ B) $\sqrt{2ab}$ C) a + b
D) $\dfrac{a+b}{2}$ E) $\dfrac{2ab}{a+b}$

23. En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{AD}$ // $\overline{BC}$) se inscribe una circunferencia de centro O. Se prolonga

$\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ hasta los puntos M y N respectivamente, tal que $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia mencionada e interseca a los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ del trapecio en los puntos E y F respectivamente. Si EF = b y FN = a, hallar $\overline{ME}$.

A) $2a + b$ B) $a + b$ C) $\dfrac{a+b}{a-b}$
D) $\dfrac{a(a+b)}{a-b}$ E) $\dfrac{b(a+b)}{(a-b)}$

24. Del gráfico mostrado, calcular x.



A) $90° - \alpha$ B) 2α C) $90° - 2\alpha$
D) 3α E) α

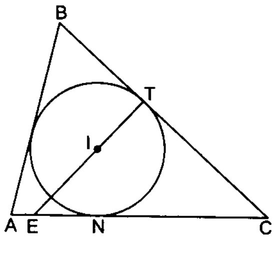
25. En una circunferencia, se inscribe el triángulo ABC en el cual se trazan las cevianas concurrentes en O, $\overline{AN}$, $\overline{BK}$ y $\overline{CL}$. Si O es el centro de la circunferencia (R: radio). Calcular $\dfrac{1}{AN} + \dfrac{1}{BK} + \dfrac{1}{CL}$

A) R^{-1} B) $2(R^{-1})$ C) 1
D) 2 E) $(2R)^{-1}$

26. En un triángulo ABC (AB > BC), se traza la bisectriz exterior $\overline{BF}$, F en la prolongación de $\overline{AC}$. Luego, se traza la ceviana $\overline{CK}$; $\overline{KF} \cap \overline{BC} = \{M\}$; tal que $\overline{AM}$ sea bisectriz de $\angle BAC$; $\overline{AM} \cap \overline{KC} = \{J\}$. Hallar la $m\angle KJM$, si la $m\angle ABC = \theta$.

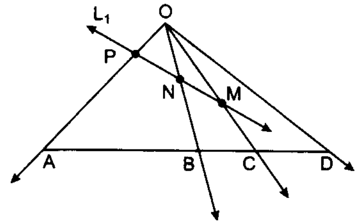
A) θ B) 2θ C) $90° + \theta$
D) $90° + \theta/2$ E) $90° - \theta/2$

27. En el gráfico, AB = 7, BC = 9 y AC = 8. Calcular $\dfrac{EI}{ET}$.



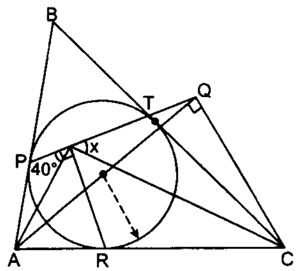
A) 3/5 B) 3/4 C) 2/5
D) 2/3 E) 5/6

28. Si A, B, C y D forman una cuaterna armónica y $\overline{OD} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$. Hallar $\dfrac{PN}{NM}$.



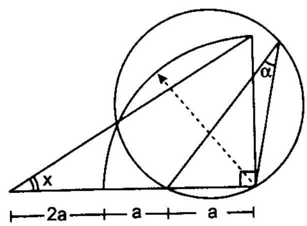
A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

29. Si P y T son puntos de tangencia en la figura. Calcular x.



A) 20° B) 30° C) 40°
D) 50° E) 60°

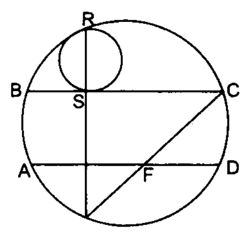
30. Del gráfico, calcular x en función de α.



A) α B) 2α C) 3α
D) $90° - \alpha$ E) $90° - 2\alpha$

31. En la figura, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, BC = k(AB); AF = m. Hallar $\overline{FD}$.

A) mk
B) $\sqrt{mk}$
C) $\dfrac{k}{m}$
D) $\dfrac{m}{k}$
E) $2\sqrt{mk}$



32. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BP}$ (P $\in \overline{AC}$); por el punto medio de $\overline{BP}$ se traza una recta secante que interseca a $\overline{AB}$ en E; a $\overline{BC}$ en D y a la prolongación de $\overline{CA}$ en F. Si BC = 12, AB = 8 y $\frac{AC}{AF} = 3$, hallar BD.

A) $\frac{132}{41}$ B) $\frac{132}{31}$ C) $\frac{130}{31}$
D) $\frac{130}{41}$ E) $\frac{142}{31}$

33. En el triángulo KLM, se trazan las cevianas interiores y concurrentes en I, $\overline{LQ}$, $\overline{KP}$ y $\overline{MR}$. Hallar E.

$$E = \frac{LR}{RK} - \frac{LI}{IQ} + \frac{LP}{PM}$$

A) 1 B) 2 C) 3 D) 1/2 E) 0

34. Sobre los lados $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ de un paralelogramo ABCD, se ubican los puntos medios M, N y L respectivamente, de tal manera que $\overline{AM}$ interseca a los segmentos BL y BN en los puntos E y F. Calcular EF, si AM − EF = 14.

A) 7 B) 6 C) 5 D) 4 E) 8

35. En un triángulo ABC, $\overline{BD}$ es bisectriz, $\overline{BM}$ es mediana, I es el incentro, $\overline{AI} \cap \overline{BM} = \{P\}$, $\overline{CI} \cap \overline{BM} = \{Q\}$, $\frac{BI}{ID} = \frac{3}{2}$, BP = 6 y QM = 4. Calcular $\overline{PQ}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

36. En un triángulo ABC, la circunferencia inscrita al triángulo es tangente al lado $\overline{AB}$ en M, al lado $\overline{BC}$ en N y al lado AC en el punto Q. La prolongación de $\overline{MN}$ interseca a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en el punto F. Si AQ = 5 cm y QC = 4 cm, hallar la longitud de $\overline{CF}$.

A) 34 cm B) 36 cm C) 38 cm
D) 40 cm E) 42 cm

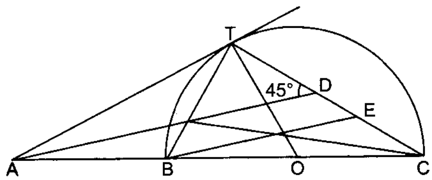
37. En los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ de un cuadrado ABCD, se ubican los puntos P y Q, respectivamente, luego se traza $\overline{PH} \perp \overline{AQ}$ (H $\in \overline{AQ}$). Calcular $\overline{PH}$, si AH = 7, HQ = 5 y m∠ABH = m∠AQD.

A) 5,5 B) 6 C) 6,5 D) 7 E) 7,5

38. En el lado $\overline{AB}$ de un cuadrado ABCD se toma el punto E, tomando como diámetro a $\overline{EA}$ se traza interiormente una semicircunferencia, la cual corta a $\overline{AC}$ en F. Si FD = 6, calcular $\overline{EC}$.

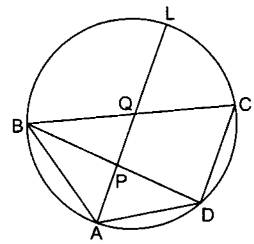
A) 3 B) $3\sqrt{2}$ C) 6
D) $6\sqrt{2}$ E) $9\sqrt{2}$

39. En la figura, $\frac{TD}{3} = \frac{DE}{2} = \frac{EC}{4}$, calcular $\frac{AT}{AB}$ (O: centro).



A) 5/4 B) 3/2 C) 3/4
D) 4/5 E) 5/2

40. En el gráfico, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, PQ = 2 y QL = 6, calcular BP.



A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 6
D) 4 E) $2\sqrt{3}$

41. En el triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AE}$ y $\overline{CD}$, tales que (AD)(CE) = AD + CE. Calcular (DB)(BE).

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) 1 E) 4

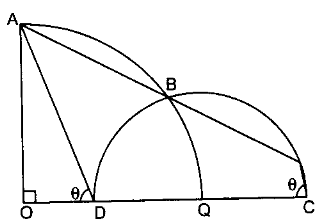
42. En el triángulo ABC, G es el baricentro, la circunferencia que contiene a B, G y C interseca a $\overline{AC}$ en P, tal que AP = 2(PC). Calcular la m∠ABC.

A) 75° B) 60° C) 120°
D) 90° E) 105°

43. Por el excentro relativo al lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, se traza una recta paralela a $\overline{AC}$, la cual interseca a los otros dos lados en los puntos P y Q. Si AB = 12, BC = 8 y AC = 6, calcular PQ.

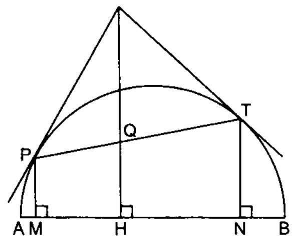
A) 2,5 B) 2,4 C) 2,6
D) 2,7 E) 3,6

44. En el gráfico mostrado O y Q son centros y (OA)(AB) = $18\sqrt{2}$. Calcular AD.



A) 4 B) 3 C) 4,5
D) $3\sqrt{2}$ E) 6

45. En la figura O es centro, PM = 2 y TN = 3. Calcular $\overline{QH}$ (P y T son puntos de tangencia)



A) 2,1 B) 2,2 C) 2,3
D) 2,5 E) 2,4

46. En un $\triangle ABC$ se trazan las cevianas interiores $\overline{AP}$, $\overline{CQ}$ y $\overline{BR}$ que concurren en M. Si 4(BQ) = 3(BP) = 2(PC), calcular la razón entre BM y MR.

A) 11/9 B) 13/9 C) 15/2
D) 17/12 E) 19/13

47. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BP}$, tal que la $m\angle BCA = 2(m\angle PBC)$. Si AP = 14 y PC = 4, calcular $\overline{BC}$.

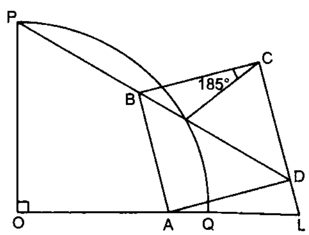
A) 6 B) 6,4 C) 7,2
D) 7,6 E) 8

48. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las trisectrices $\overline{CQ}$ y $\overline{CP}$ ($P \in \overline{AQ}$). Si AP = a y PQ = b, calcular $\overline{QB}$.

A) $\dfrac{ab}{a+b}$ B) $\sqrt{ab}$ C) $2\sqrt{ab}$

D) $\dfrac{b(a+b)}{a}$ E) $\dfrac{b(a+b)}{2a}$

49. Del gráfico, calcular AQ/QL, si ABCD es un cuadrado (O es centro del PQ).



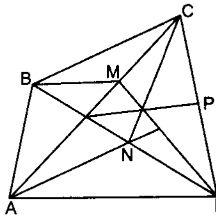
A) 1/2 B) 1/3 C) 1/4
D) 2/3 E) 3/4

50. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Las distancias interiores $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ intersecan a la altura BH en los puntos M y N. Si AB = 6, BC = 8 y AC = 10, hallar la longitud de $\overline{MN}$.

A) 1/3 B) 1/4 C) 2/3
D) 2/5 E) 2/7

51. Del gráfico, calcular $\dfrac{CP}{PD}$, si $\overline{BM} \parallel \overline{AD}$ y $\overline{AN} \parallel \overline{BC}$.

A) 2
B) 1
C) 2/3
D) 1/2
E) 3/4

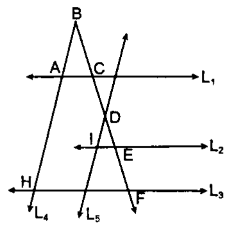


52. En un triángulo ABF, se traza la mediana $\overline{BE}$, $D \in \overline{AF}$, $P \in \overline{BF}$; $DP \parallel \overline{BE}$; $\overline{DP} \cap \overline{AB} = \{C\}$, AB = 11, BC = 7 y BP = 14. Calcular PF.

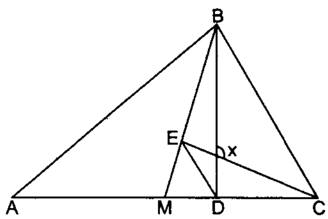
A) 6,5 B) 7,5 C) 8
D) 8,5 E) 9

53. En la figura $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$ y $\overleftrightarrow{L_4} \parallel \overleftrightarrow{L_5}$; AB = DE = 3, IG = 5, EF = 6 y HG = 3(IE). Calcular CD − BC

A) 1,5
B) 1,8
C) 2
D) 2,28
E) 2,4

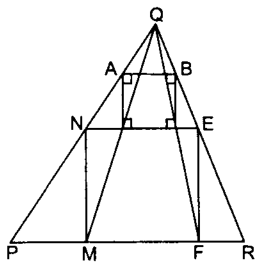


54. En la figura, AM = MC, $\overline{ED} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC. Calcular el valor de x.



A) 120° B) 75° C) 100°
D) 90° E) 135°

55. Según el gráfico, MNEF es un cuadrado. Si PR = 7 y la altura relativa a dicho lado mide 3, calcular $\overline{AB}$.

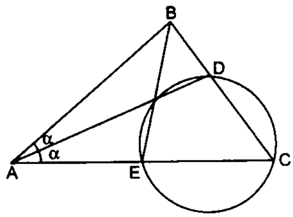


A) 0,73 B) 0,49 C) 0,54
D) 0,63 E) 0,7

56. En el exterior y relativo al lado BC de un triángulo ABC se ubica el punto E, tal que $\overline{BE} \parallel \overline{AC}$, en $\overline{AE}$ se ubica el punto D, tal que m∠ABD = m∠DAC = m∠DCB. Si BE = 18 y AC = 8, calcular $\overline{BC}$.

A) $5\sqrt{3}$ B) 7 C) $6\sqrt{2}$ D) 9 E) 12

57. Según el gráfico, DE = CD y (EC)(AB) = 25, calcular $\overline{BC}$.



A) 4 B) 5 C) 2,5 D) $5\sqrt{2}$ E) 10

58. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, sobre los catetos se traza exteriormente los triángulos equiláteros ABM y BCN. Calcular la longitud del segmento que tiene por extremos los puntos medios de $\overline{AN}$ y $\overline{MB}$, si AC = $8\sqrt{2}$ m.

A) 4 m B) 2 m C) $2\sqrt{2}$ m
D) $4\sqrt{2}$ m E) 5 m

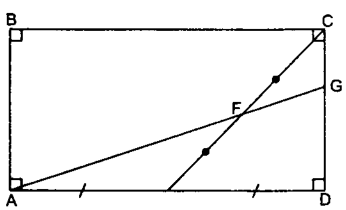
59. Desde los vértices de un triángulo ABC, con baricentro G, se trazan las perpendiculares $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ de longitudes 6 m, 8 m y 4 m, respectivamente, a una recta exterior. Calcular la distancia del baricentro de la región triangular MGC a dicha recta exterior, siendo M punto medio de $\overline{AA'}$.

A) 6 m B) 5 m C) 11/3 m
D) 6,5 m E) 13/3 m

60. Se tiene una mesa de billar ABCD de dimensiones (2 m × 3 m) BC > AB y dos bolas M y N. La bola M dista 1,6 m de $\overline{AB}$ y 1,5 m de $\overline{BC}$ y la bola N dista de $\overline{AB}$ 1,2 m y 0,6 m de $\overline{BC}$. Si se juega a 2 bandas ¿a qué distancia de A debe golpear la bola M en la banda $\overline{AB}$ para que luego de tocar $\overline{BC}$ impacte en la bola N?

A) 0,3 m B) 0,8 m C) 1,2 m
D) 1,5 m E) 1,7 m

61. En la figura, AF = 18 m, hallar $\overline{FG}$.

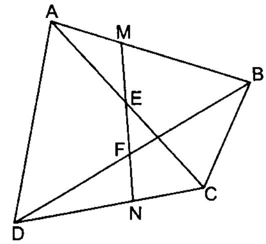


A) 10 m B) 12 m C) 8 m
D) 5 m E) 6 m

62. En un triángulo ABC, AB = a, BC = a + 2 y AC = a + 1. Se traza la bisectriz $\overline{BN}$ y la mediana $\overline{BM}$ (N en $\overline{AC}$). Hallar $\overline{MN}$.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{a}{4}$ C) $\frac{a}{2}$
D) $\frac{1}{2}$ E) $\frac{3a}{4}$

63. En el cuadrilátero convexo ABCD, E y F son puntos medios de sus diagonales. Hallar $\overline{NC}$, si AM = 2 m, MB = 5 m y DN = 4 m.



A) 1,5 m B) 2,5 m C) 1,6 m
D) 2 m E) 1,8 m

64. El ángulo B de un triángulo escaleno ABC mide 120°. Si $\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC} = \frac{1}{8}$, hallar la longitud de la bisectriz BD.

A) 4 m B) 5 m C) 7 m
D) 8 m E) 6 m

65. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{BL}$ y la perpendicular $\overline{LQ}$ a $\overline{BC}$ (L ∈ $\overline{AC}$ y Q ∈ $\overline{BC}$). Si m∠ACB = 37°, siendo I el incentro del triángulo ABC y a la vez es el excentro del triángulo LQC, calcular $\frac{BI}{IL}$.

A) 2 B) $\frac{3}{2}$ C) 3
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{1}{2}$

66. Los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ABC miden 9 m, 12 m y 15 m, respectivamente. Se trazan la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz $\overline{AD}$ (D ∈ $\overline{BC}$) que se intersecan en E. Calcular $\overline{BE}$.

A) 4,5 m B) 15 m C) 6 m
D) 3 m E) 3,5 m

67. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$. Si m∠A = 2(m∠C), (AC)(BC) = 180 m^2 y AB + AC = 30 m, hallar $\overline{AD}$.

A) 7 m B) 5 m C) 6 m
D) 5,5 m E) 4,5 m

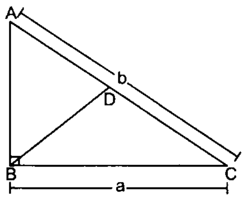
68. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BE}$ (D y E en $\overline{AC}$), AD = 6 cm y DE = 4 cm. Hallar $\overline{EC}$, si m∠ABD = m∠DBE = m∠EBC = 45°.

A) 18 cm B) 20 cm C) 21 cm
D) 22 cm E) 24 cm

69. En un triángulo ABC, $\overline{BD}$ es bisectriz interior. En los triángulos ADB y DBC, $\overline{DE}$ y $\overline{DF}$ son bisectrices interiores. Si EB = 2AE, BF = 3AE y BF = 6 m, hallar $\overline{FC}$.

A) 4 m B) 6 m C) 5 m D) 3 m E) 7 m

70. En la figura, $\overline{BD}$ es bisectriz y AD = 3 m, hallar $\overline{BD}$.



A) $\frac{2\sqrt{3}a}{b}$ m B) $\frac{3\sqrt{2}a}{b}$ m C) $\frac{3\sqrt{3}a}{b}$ m
D) $\frac{2\sqrt{2}a}{b}$ m E) $\frac{3\sqrt{2}a}{b}$ m

71. Sean M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en el triángulo ABC. Si la distancia del baricentro a $\overline{MN}$ es d, hallar la medida de la altura $\overline{BH}$.

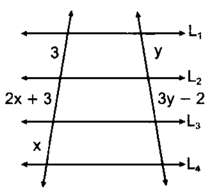
A) 3d B) 4d C) 6d D) 8d E) 5d

72. En un triángulo ABC, el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo a lado $\overline{BC}$ y AB + AC = 14 m. Hallar $\overline{BC}$.

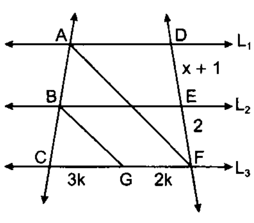
A) 3 m B) 5 m C) 6 m
D) 7 m E) 8 m

73. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3} // \overleftrightarrow{L_4}$, hallar x.

A) 1
B) 2
C) 3
D) 4
E) 5



74. En la figura, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$ y $\overline{BG} // \overline{AF}$, hallar x.

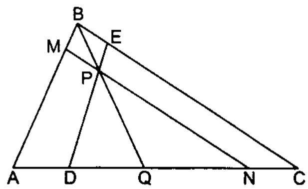


A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{5}{2}$

75. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y la ceviana interior $\overline{AD}$ que se intersecan en el punto E. Si EM = 4 BE y BC = 27 cm, hallar $\overline{CD}$.

A) 26 cm B) 25 cm C) 20 cm
D) 24 cm E) 22 cm

76. En la figura, $\overline{DE} // \overline{AB}$, $\overline{MN} // \overline{BC}$, AD = 6 m, DQ = 9 m y QC = 20 m. Hallar $\overline{NC}$.

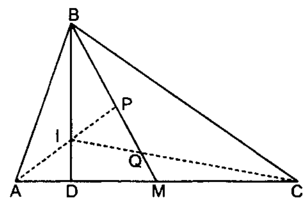


A) 9 m B) 8 m C) 5 m
D) 6 m E) 7 m

77. En un edificio de 6 pisos de 30 m de altura, el primer y último piso tienen 6 m y 4 m de altura, respectivamente, y la diferencia de las longitudes de las sombras de dichos pisos es 1 m. Hallar la longitud de la sombra del edificio.

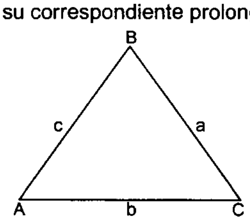
A) 12 m B) 13 m C) 15 m
D) 18 m E) 20 m

78. En la figura, I es el incentro del triángulo ABC, AM = MC, $\frac{BI}{ID} = \frac{3}{2}$, BP = 6 m y QM = 4 m. Hallar $\overline{PQ}$.



A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 2,5 m E) $\frac{3}{2}$ m

79. En la figura, trazar las bisectrices interiores y exteriores del vértice B y hallar la longitud del segmento formado por la intersección de dichas bisectrices con $\overline{AC}$ y su correspondiente prolongación.

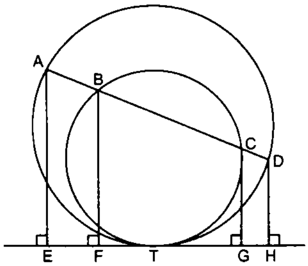


A) $\dfrac{2a^2b}{c^2-d^2}$ B) $\dfrac{2abc}{a^2-b^2}$

C) $\dfrac{bc}{(c-a)^2}$ D) $\dfrac{a+b+c}{c^2-b^2}$

E) $\dfrac{2abc}{c^2-a^2}$

80. Según la figura, AE = 5 m, BF = 4 m y CG = 3 m. Calcular DH (T es punto de tangencia).

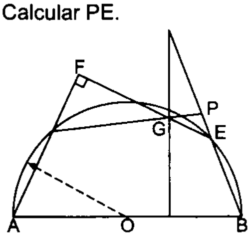


A) 1 m B) 1,2 m C) 2 m
D) 2,4 m E) 1,8 m

81. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, cuyo incentro es I, miden 8 m y 12 m respectivamente. Si AI = 6 m y BI = 4 m, calcular la longitud del segmento que tiene por extremos los excentros relativos a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$.

A) 10 m B) 12 m C) 15 m
D) 20 m E) 25 m

82. En la figura, O es centro, FG = 5, GE = 6 y EB = 12. Calcular PE.



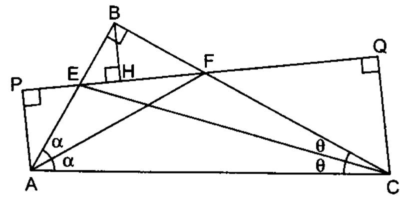
A) 7,1 B) 7,2 C) 7,3
D) 7,4 E) 7,5

83. En un triángulo ABC (AB = c; BC = a; AC = b), por C se traza una recta paralela a $\overline{AB}$, en esta recta se ubica el punto D, de modo que CD = BC + AC; el segmento BD interseca $\overline{AC}$ en M. Calcular la distancia del incentro del triángulo ABC al punto M.

A) $\dfrac{ab}{a+b+c}$ B) $\dfrac{ac}{a+b+c}$ C) $\dfrac{bc}{a+b+c}$

D) $\dfrac{2ab}{a+b+c}$ E) $\dfrac{2bc}{a+b+c}$

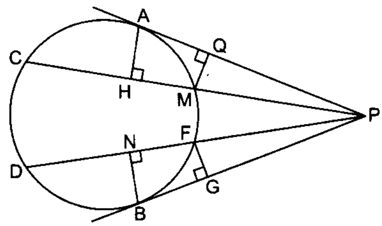
84. En la figura, AE = a, CF = b y $\dfrac{PQ}{AC} = k$; calcular $\overline{BH}$.



A) $\dfrac{ab}{a+b}$ B) $(a+b)k$ C) $\dfrac{ab}{k(a+b)}$

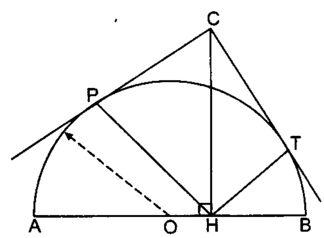
D) $\dfrac{kab}{a+b}$ E) $\dfrac{ka^2}{a+b}$

85. En la figura, AH = FG = 3; MQ = 2 y 10(PC) = 9(PD). Calcular $\overline{BN}$ siendo A y B puntos de tangencia.



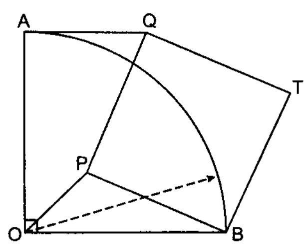
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

86. En la figura mostrada P y T son puntos de tangencia, O es centro de la semicircunferencia. Calcular $\overline{OH}$, si se sabe que PH = 15, HT = 8 y el radio de la semicircunferencia mide 13.



A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

87. Según el gráfico, PQTB es un cuadrado; calcular $\overline{AQ}$, si OP = 6.

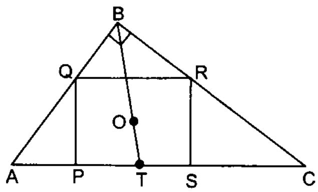


A) 6 B) $6\sqrt{2}$ C) 3
D) $3\sqrt{2}$ E) 12

88. En un triángulo ABC, $m\angle ABC = 2\alpha$, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ y en el exterior relativo a lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubican los puntos E y F respectivamente, tal que $\overline{AE} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{CF}$. Si BF = 8; AD = 4, (AE)(DC) = 20; $m\angle ABE = \theta$ y $m\angle CBF = 2\theta + \alpha$, calcular $\overline{FC}$.

A) 10 B) 13 C) 11
D) 14 E) 12

89. Según el gráfico, PQRS es un cuadrado de centro O. Si AP= 4 y SC = 9, calcular $\overline{PT}$.



A) 5,4 B) 1,8 C) 1,2
D) 2,4 E) 3,6

90. En un triángulo ABC, obtuso en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BM}$ y las alturas $\overline{AN}$ y $\overline{CQ}$, respectivamente. Si AN = a y CQ = b, calcular la longitud de la altura trazada desde M en el triángulo BMC.

A) ab B) a/b C) $\sqrt{ab}$
D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{a+b}{ab}$

91. Dado un hexágono ABCDEF, calcular el segmento que une los baricentros de los triángulos ABC y DEF; sabiendo que AF + BE + CD = 18 y $\overline{CD} \parallel \overline{BE} \parallel \overline{AF}$.

A) 12 B) 9 C) 6 D) 3 E) 2

92. En un triángulo ABC se traza las alturas $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, además se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$.

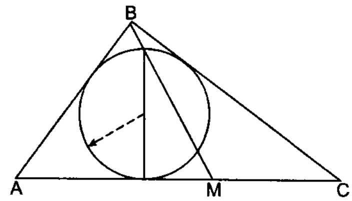
Si $\dfrac{1}{AP} + \dfrac{1}{CQ} = \dfrac{2}{BD}$. Calcular la $m\angle ABC$.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 75°

93. En la región interior y exterior relativo al lado AB de un triángulo equilátero ABC se ubican los puntos P y Q respectivamente, tal que el triángulo PQB es equilátero. La recta que contiene a los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{PQ}$ interseca a la recta AQ en el punto R. Calcular $m\angle MRB$, siendo M el punto medio de $\overline{AC}$.

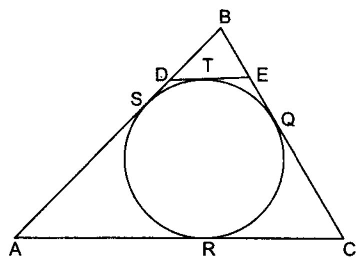
A) 45° B) 90° C) 60°
D) 75° E) 30°

94. Según la figura, dos hormigas inician su recorrido desde el punto B. Una de ellas sigue la trayectoria BAM y lo hace en un tiempo t_1 y la otra, la trayectoria BCM y lo hace en un tiempo t_2. Calcular la razón entre t_1 y t_2 si ambas hormigas tienen la misma velocidad.



A) 1/1 B) 2/1 C) 3/1
D) 1/2 E) 4/3

95. En la figura, $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$, DE = 3, BE = 3, BS = 5. Calcular $\overline{AC}$, si Q, R, S y T son puntos de tangencia.

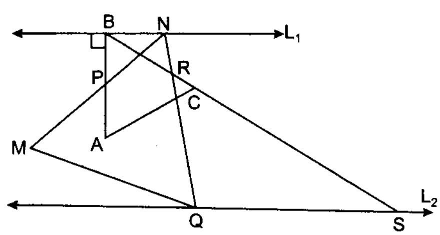


A) 6 B) 7,5 C) 8
D) 10 E) 12

96. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BM}$; en el triángulo ABM se traza la altura MH y la bisectriz interior AT secantes en Q; $\overline{HL} \cap \overline{BQ} = \{S\}$; AB = MC y LS = 6. Calcular $\overline{HS}$.

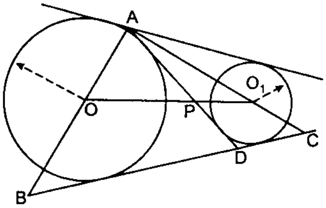
A) 6 B) 5 C) 4
D) 7 E) 8

97. En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$ y los triángulos ABC y MNQ son equiláteros. Si BR = 2, BP = PA y MN = NP, calcular $\overline{RS}$.



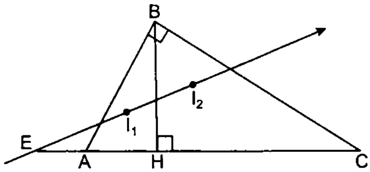
A) 4 B) 6 C) 5
D) 8 E) 3

98. Calcular $\dfrac{AP}{PD}$; si: $\dfrac{AO_1}{CO_1} + \dfrac{AO}{BO} = 2$



A) 2 B) 1 C) 0,5
D) 0,25 E) 4

99. Según el gráfico, I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos AHB y BHC respectivamente. Si AB = c, BC = a y AC = b, calcular $\overline{AE}$.



A) $\frac{c(b-c)}{a-b}$ B) $\frac{a(c+b)}{a-c}$ C) $\frac{b(b-c)}{a+b}$

D) $\frac{c(b-a)}{a-c}$ E) $\frac{c(b+c)}{a+b}$

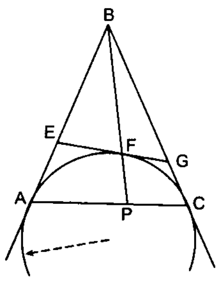
100. En un triángulo ABC, se inscribe un rombo BMNT (M está en $\overline{BC}$ y N en $\overline{AC}$). Calcular el lado de rombo, si AB y BC miden 3 m y 7 m, respectivamente.

A) 1,2 m B) 2,1 m C) 3 m
D) 4,2 m E) 2,4 m

101. En un cuadrilátero convexo ABCD, las diagonales se intersecan en O. En la prolongación de $\overline{BC}$ se ubica el punto F, tal que m∠BCA = m∠FCD; m∠BAC = m∠CAD; AD = 12; OC = 3 y CD = 7. Calcular $\overline{AB}$.

A) 3 B) 4 C) 9 D) 12 E) 10

102. Según el gráfico, A, F y C son puntos de tangencia. Si $\frac{AE}{3} = \frac{EB}{5} = \frac{GC}{2}$, calcular $\frac{AP}{PC}$.



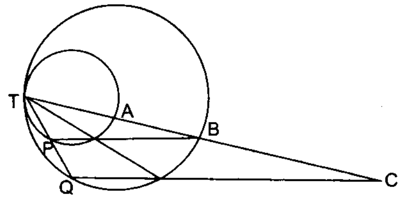
A) 8/3 B) 7/4 C) 9/5
D) 21/8 E) 17/9

103. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interna $\overline{BF}$, tal que $\frac{AB}{AF} + \frac{BC}{FC} = \frac{14}{5}$

Calcular r/R siendo r y R el inradio y circunradio del triángulo ABC.

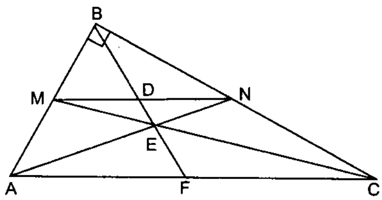
A) 1/5 B) 2/5 C) 3/5
D) 4/5 E) 1

104. Según el gráfico, T es punto de tangencia; si TA = 4 y BC = 5, calcular $\overline{AB}$.



A) 1 B) 9 C) $\sqrt{6}$
D) $2(\sqrt{6}-1)$ E) $(\sqrt{6}-2)$

105. Según el gráfico, $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$, si BD = 3 y EF = 2, calcular $\overline{AC}$.



A) 10 B) 12 C) 14 D) 15 E) 20

106. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC), se trazan las cevianas interiores $\overline{AR}$ y $\overline{CT}$ secantes en S. Si $\overline{BS} \cap \overline{RT} = \{L\}$, AT = a y RC = b, calcular $\frac{TL}{LR}$.

A) $\frac{2a}{b}$ B) $\frac{b}{a}$ C) $\frac{2b}{a}$

D) $\frac{3a}{b}$ E) $\frac{a}{b}$

107. En una semicircunferencia de diámetro AC se ubica el punto B, se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$ (H ∈ $\overline{AC}$). Si M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BH}$, respectivamente. Calcular m∠MCN, si m∠ABH = θ y m∠MCA = α.

A) $\theta - 2\alpha$ B) $2\theta - \alpha$ C) $\frac{\theta+\alpha}{2}$

D) $\frac{\theta-\alpha}{2}$ E) $\frac{2\theta+\alpha}{2}$

108. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, inscrito en una circunferencia de radio R, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$ cuya prolongación es secante a la circunferencia en P. Si r es el inradio del triángulo ABC, calcular $\overline{DP}$ en función de R y r.

A) $\frac{R\sqrt{2}}{R+r}$ B) $\frac{Rr}{R-r}$ C) $R-r$

D) $\frac{2Rr}{R+r}$ E) $\frac{R^2\sqrt{2}}{R+r}$

109. En el lado BC de un cuadrado ABCD, se ubican los puntos P y Q, de modo que BP = PQ y $\overline{BD}$ interseca a $\overline{AP}$ en E y $\overline{AQ}$ interseca a $\overline{PD}$ en F. Calcular la m∠EBF.

A) 18°30' B) 22°30' C) 26°30'
D) 18° E) 16°

110. En un triángulo ABC, recto en B, I es el incentro y G el baricentro. Si $\overline{IG}$ // $\overline{BC}$; IG = 4 m, calcular el inradio del triángulo ABC.

A) 10 B) 4 C) 6 D) 8 E) 12

111. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz exterior BF (F en la prolongación de $\overline{AC}$). Luego, se ubica el punto D en $\overline{AB}$, tal que $\overline{DF}$ interseca a $\overline{BC}$ en E. Si AD = 2; BD = 4 y BE = 3, calcular $\overline{EC}$.

A) 0,5 B) 2 C) 1,5
D) 1 E) 2,5

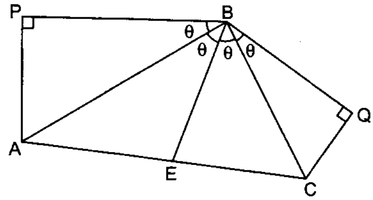
112. En un triángulo ABC, se traza la ceviana interior BD, tal que CD = 2(AD), I_1 e I_2 son los incentros de los triángulos ABD y BDC respectivamente, tal que $\overline{I_1I_2}$ // $\overline{AC}$. Calcular el valor de la siguiente expresión $E = \dfrac{BC - BD}{AB}$.

A) 1 B) 1,5 C) 3
D) 2 E) 0,5

113. Dada una región triangular rectangular ABC, (recto en B), de baricentro G, en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ se ubica los puntos M y Q, respectivamente, de modo que G ∈ $\overline{MQ}$ y m∠MQC = m∠AQB, calcular $\dfrac{AQ}{QM}$.

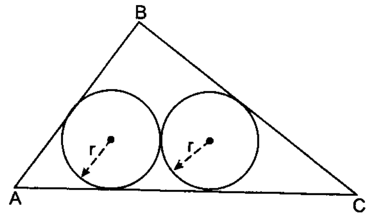
A) $\frac{5}{2}$ B) $\frac{5}{3}$ C) $\frac{5}{4}$
D) $\frac{4}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

114. En la figura, BP = a, BQ = b, calcular $\overline{BE}$.



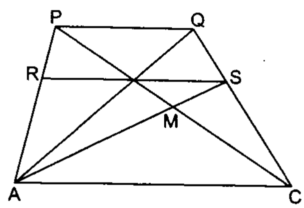
A) $\dfrac{2ab}{a+b}$ B) $\dfrac{ab}{a+b}$ C) 2a + b
D) a + b E) a + 2b

115. En la figura, r = 2 y AC = 12. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABC.



A) 25 B) 3 C) 4 D) 4,5 E) 6

116. En la figura, AR = 4, PR = 2, MS = 1 y $\overline{PQ}$ // $\overline{RS}$ // $\overline{AC}$. Calcular AM.



A) 1 B) 2 C) 5 D) 4 E) 3

CLAVES

1. A	16. C	31. D	46. D	61. E	76. D	91. C	106. E
2. E	17. D	32. B	47. C	62. D	77. C	92. C	107. A
3. C	18. E	33. C	48. E	63. C	78. B	93. C	108. E
4. C	19. C	34. B	49. B	64. D	79. E	94. A	109. A
5. A	20. C	35. A	50. A	65. A	80. D	95. B	110. E
6. C	21. D	36. B	51. B	66. A	81. D	96. A	111. D
7. E	22. B	37. B	52. C	67. C	82. B	97. B	112. D
8. C	23. E	38. D	53. B	68. B	83. C	98. B	113. B
9. C	24. B	39. C	54. D	69. B	84. D	99. D	114. A
10. C	25. B	40. D	55. D	70. B	85. E	100. D	115. B
11. C	26. D	41. C	56. E	71. C	86. C	101. C	116. E
12. E	27. A	42. D	57. D	72. D	87. B	102. C	
13. B	28. A	43. B	58. D	73. B	88. B	103. B	
14. C	29. C	44. E	59. E	74. A	89. E	104. D	
15. C	30. A	45. E	60. E	75. D	90. D	105. B	

Relaciones métricas en triángulos rectángulos

10 capítulo

Pitágoras de Samos (569 a. C.-475 a. C.) fue un filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática helénica, la geometría y la aritmética, derivadas particularmente de las relaciones numéricas. Es el fundador de la Hermandad Pitagórica, una sociedad que, si bien era de naturaleza predominantemente religiosa, se interesaba también en medicina, cosmología, filosofía, ética y política, entre otras disciplinas. El pitagorismo formuló principios que influyeron tanto en Platón como en Aristóteles y, de manera más general, en el posterior desarrollo de la matemática y en la filosofía racional en Occidente.

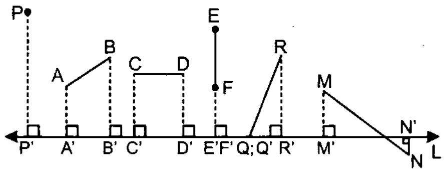
El interés de Pitágoras era el de «los principios» de la matemática, «el concepto de número», «el concepto de triángulo» (u otras figuras geométricas) y la idea abstracta de «prueba». Pitágoras reconocía en los números propiedades tales como «personalidad», «masculinos y femeninos», «perfectos o imperfectos», «bellos y feos». Entre los descubrimientos matemáticos que se le atribuye a Pitágoras es el teorema que lleva su nombre y que dice: «En un triángulo rectángulo, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa». También demostró el inverso del teorema, es decir, si los lados de un triángulo satisfacen la ecuación, entonces el triángulo es rectángulo.

Fuente: Wkipedia

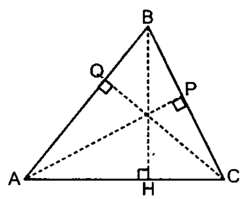
PROYECCIONES

La proyección ortogonal de un punto P sobre una recta L, es el pie de la perpendicular trazada desde P a L. En la figura adjunta, $\overline{PP'}$ se llama proyectante. Asimismo la proyección de un segmento (cualquier figura, en general), se obtiene de proyectar todos los puntos de dicha figura sobre la recta.

$\overline{A'B'} \Rightarrow$ Proyección ortogonal o simplemente proyección de $\overline{AB}$ sobre L.



Ejemplo:



En la figura, se han trazado las alturas del $\triangle ABC$:

$\overline{AH} \Rightarrow$ Proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$

$\overline{HC} \Rightarrow$ Proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$

$\overline{AQ} \Rightarrow$ Proyección de $\overline{AC}$ sobre $\overline{AB}$

$\overline{PC} \Rightarrow$ Proyección de $\overline{AC}$ sobre $\overline{BC}$.

$\overline{QB} \Rightarrow$ ...

$\overline{PB} \Rightarrow$ ...

RELACIONES MÉTRICAS EN TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

En todo triángulo rectángulo, se cumplen las siguientes propiedades:

I. El cuadrado de la longitud de un cateto, es igual al producto de longitudes de la hipotenusa y su proyección sobre dicha hipotenusa.

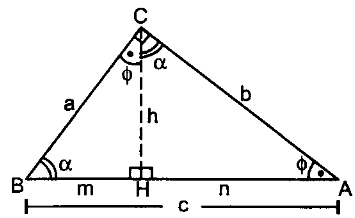
II. El cuadrado de la longitud de la altura relativa a la hipotenusa, es igual al producto de longitudes de los segmentos parciales que determina en dicho lado.

III. **Teorema de Pitágoras.** La suma de los cuadrados de longitudes de los catetos, es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

IV. El producto de longitudes de los catetos es igual al producto de longitudes de la hipotenusa y la altura respectiva.

V. La suma de las inversas de los cuadrados de longitudes de los catetos, es igual a la inversa del cuadrado de la longitud de la altura.

Sea el $\triangle ACB$, recto en C; entonces:



I. $\boxed{a^2 = cm}$ $\wedge$ $\boxed{b^2 = cn}$

II. $\boxed{h^2 = mn}$ III. $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$

IV. $\boxed{ab = ch}$ V. $\boxed{\dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{h^2}}$

Demostraciones:

Sabemos: $m\angle BCH = m\angle A$ y $m\angle HCA = m\angle B$ (Propiedad)

I. $\triangle BHC \sim \triangle BCA$: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{m}{a} \Rightarrow a^2 = cm$

$\triangle CHA \sim \triangle BCA$: $\dfrac{b}{c} = \dfrac{n}{b} \Rightarrow b^2 = cn$

II. $\triangle BHC \sim \triangle CHA$: $\dfrac{h}{n} = \dfrac{m}{h} \Rightarrow h^2 = mn$

III. Sumando los resultados de (I): $a^2 + b^2 = cm + cn$

$a^2 + b^2 = c(m + n)$

$a^2 + b^2 = c(c)$

$\therefore\ a^2 + b^2 = c^2$

Pitágoras demostró de otro modo su teorema. Para ello, ver el capítulo 17: áreas.

IV. Multiplicando los resultados de (I): $a^2b^2 = c^2mn$

Con (II): $a^2b^2 = c^2h^2$

De donde: $ab = ch$

V. De (I): $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{1}{cm}$ y $\dfrac{1}{b^2} = \dfrac{1}{cn}$

Sumando:

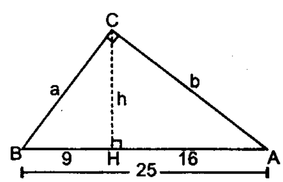
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{cm} + \frac{1}{cn} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{m+n}{mn}\right);\ \text{pero } m + n = c \text{ y } mn = h^2$$

$$\therefore \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

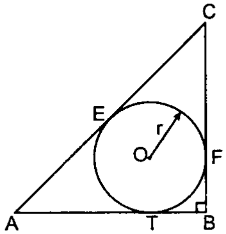
Ejemplos:

1. En el gráfico:



- $a^2 = 25(9) \Rightarrow a = \sqrt{25}(\sqrt{9})$ $\therefore\ a = 15$
- $b^2 = 25(16) \Rightarrow b = \sqrt{25}(\sqrt{16})$ $\therefore\ b = 20$
- $h^2 = 9(16) \Rightarrow h = \sqrt{9}(\sqrt{16})$ $\therefore\ h = 12$

2. En la figura, E, F y T son puntos de tangencia. $r = 3$ y $AE = 5$. Hallar: EC.



Resolución:

$EC = x$

Tangentes: $EC = CF$ y $AE = AT$

OFBT: cuadrado

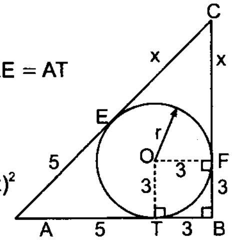
Teorema de Pitágoras:

$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$

$\Rightarrow (5 + x)^2 = 8^2 + (3 + x)^2$

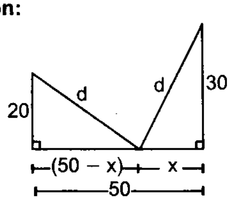
De donde: $x = 12$

$\therefore EC = 12$



3. A ambas orillas de un río crecen dos palmeras, una frente a la otra. La altura de una es de 30 codos, y la de la otra, es de 20. La distancia entre sus troncos, 50 codos. En la copa de cada palmera hay un pájaro. De súbito los dos pájaros descubren un pez que aparece en la superficie del agua, entre las dos palmeras. Los pájaros se lanzaron con la misma velocidad y alcanzaron al pez al mismo tiempo. ¿A qué distancia del tronco de la palmera mayor apareció el pez?

Resolución:



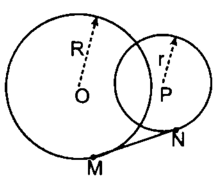
Como llegan al mismo tiempo y van a la misma velocidad, entonces las distancias hacia el pez son iguales (d).

Luego: $d^2 = x^2 + 30^2 \Rightarrow$ y $d^2 = 20^2 + (50 - x)^2$

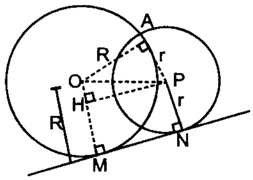
Igualando los segundos miembros:

$x^2 + 900 = 400 + (50 - x)^2 \quad \therefore x = 20$ codos

4. En el gráfico, se tienen dos circunferencias ortogonales de radios r y R. M y N son puntos de tangencia. Hallar MN.



Resolución:



Por ser ortogonales, las circunferencias: $\overline{OA} \perp \overline{PA}$

Trazamos: $\overline{OM}$; $\overline{PN} \perp \overline{MN}$ y $\overline{PH} \perp \overline{OM}$:

$\Rightarrow$ HMNP, es un rectángulo: $HP = MN$.

Teorema de Pitágoras:

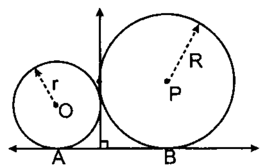
$\triangle OAP \Rightarrow (OP)^2 = R^2 + r^2$ ...(1)

$\triangle OHP \Rightarrow (HP)^2 = (OP)^2 - (OH)^2$

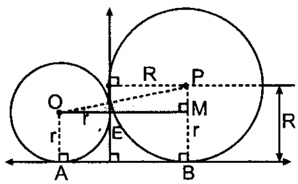
Con (1): $(HP)^2 = R^2 + r^2 - (R - r)^2$

$(HP)^2 = 2Rr \Rightarrow HP = \sqrt{2Rr} \quad \therefore MN = \sqrt{2Rr}$

5. Hallar la distancia OP entre los centros de las circunferencias.



Resolución:



Con los trazos indicados:

$PM = PB - MB \Rightarrow PM = R - r$

y $OM = OE + EM \Rightarrow OM = R + r$

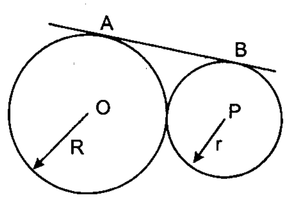
$\triangle OMP$, teorema de Pitágoras:

$(OP)^2 = (OM)^2 + (PM)^2$

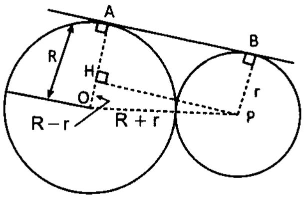
$(OP)^2 = (R + r)^2 + (R - r)^2$

$\therefore OP = \sqrt{2(R^2 + r^2)}$

6. Demostrar que el segmento tangente exterior común a dos circunferencias tangentes exteriores, de radios r y R, tiene longitud: $AB = 2\sqrt{Rr}$



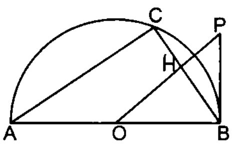
Resolución:



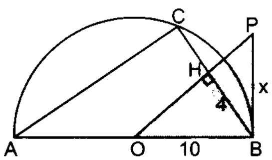
Considerando el gráfico, donde $\overline{AB}$ es el segmento en mención O y P, centros, se traza $\overline{PH} \perp \overline{OA}$, entonces:

Por teorema de Pitágoras:
$(HP)^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$
$x^2 = 4Rr \Rightarrow x = 2\sqrt{Rr} \quad \therefore AB = 2\sqrt{Rr}$

7. Dada una semicircunferencia de centro O y 10 cm de radio, se le inscribe un triángulo rectángulo cuyo cateto CB mide 8 cm. En B se traza la tangente $\overline{BP}$ que encuentra en P a la perpendicular $\overline{OH}$ a la cuerda $\overline{BC}$. Calcular BP.



Resolución:



$BC = 8 \Rightarrow BH = \dfrac{BC}{2} \Rightarrow BH = 4$

Por relaciones métricas en el $\triangle OBP$:

$$\frac{1}{4^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{10^2} \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{1}{4^2} - \frac{1}{10^2}$$

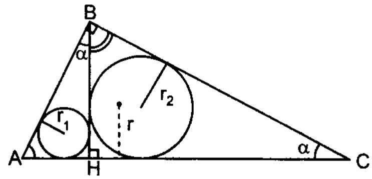
$$\frac{1}{x^2} = \frac{10^2 - 4^2}{(4^2)(10^2)} = \frac{84}{1600} \Rightarrow x^2 = \frac{1600}{84}$$

$$\Rightarrow x = \frac{40}{\sqrt{84}} \quad \therefore x = \frac{20}{21}\sqrt{21}\ \text{cm}$$

8. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$. Si r; r_1 y r_2 son inradios de los triángulos ABC; AHB y BHC, respectivamente. Demostrar que $r^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2$.

Resolución:

Los triángulos ABC, AHB y BHC son semejantes. Escribimos la relación de inradios e hipotenusas:



$\Rightarrow \dfrac{r}{AC} = \dfrac{r_1}{AB} = \dfrac{r_2}{BC}$; elevamos al cuadrado:

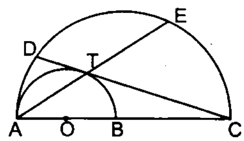
$$\Rightarrow \frac{r^2}{(AC)^2} = \frac{(r_1)^2}{(AB)^2} = \frac{(r_2)^2}{(BC)^2}$$

Por propiedad de proporciones:

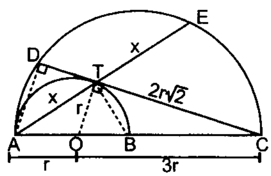
$$\Rightarrow \frac{r^2}{(AC)^2} = \frac{(r_1)^2 + (r_2)^2}{(AB)^2 + (BC)^2}$$

Siendo los denominadores iguales:
$\therefore r^2 = (r_1)^2 + (r_2)^2$

9. En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ son diámetros, $\overline{CT}$ es tangente a $\overset{\frown}{AB}$. Hallar ET, si AB = BC = 2r.



Resolución:



Incógnita: ET = x
Como B es centro de la mayor semicircunferencia y $\overline{BT} \perp \overline{AT}$, entonces AT = ET.

$\triangle ADC \sim \triangle OTC \Rightarrow \dfrac{AD}{OT} = \dfrac{AC}{OC} \Rightarrow AD = \dfrac{4r}{3}$

$\triangle OTC$, con el teorema de Pitágoras: $TC = 2r\sqrt{2}$

Teorema de Tales:

$$\frac{DT}{TC} = \frac{AO}{OC} \Rightarrow \frac{DT}{2r\sqrt{2}} = \frac{r}{3r} \Rightarrow DT = \frac{2r\sqrt{2}}{3}$$

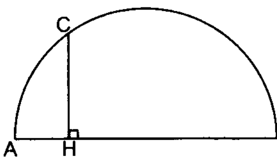
Finalmente, por el teorema de Pitágoras en el $\triangle$ ADT: $(AT)^2 = (AD)^2 + (DT)^2 \Rightarrow x^2 = \left(\dfrac{4r}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{2r\sqrt{2}}{3}\right)^2$

$$\Rightarrow x = \frac{2\sqrt{6}\,r}{3} \quad \therefore ET = \frac{2\sqrt{6}}{3}r$$

PROBLEMAS RESUELTOS

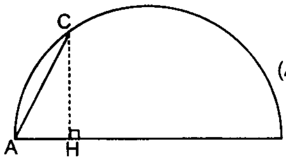
1. En cada caso, $\overline{AB}$ es diámetro de las semicircunferencias. Demostrar lo que se indica.

I.



$(CH)^2 = (AH)(HB)$

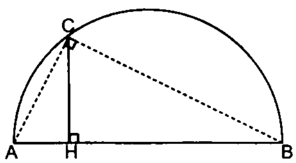
II.



$(AC)^2 = (AB)(AH)$

Resolución:

I.

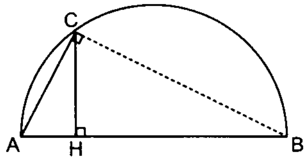


Se traza $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$; $m\angle ACB = 90°$

En el $\triangle ABC$, por relación métrica:

$\therefore\ (CH)^2 = (AH)(HB)$

II.

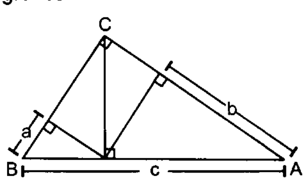


Se traza $\overline{CB}$

En el $\triangle ACB$, recto en C, por relación métrica:

$\therefore\ (AC)^2 = (AB)(AH)$

2. Sea el gráfico:



Demostrar que $a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$

Resolución:

Por propiedad de semejanza y relaciones métricas:

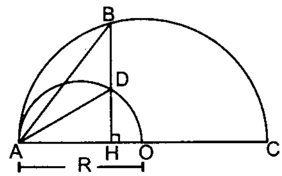
$b = \dfrac{(AC)^3}{c^2}$; luego: $AC = b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$

También: $BC = a^{\frac{1}{3}}c^{\frac{2}{3}}$

Por Pitágoras: $(BC)^2 + (AC)^2 = (AB)^2$

$\Rightarrow\ a^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}} + b^{\frac{2}{3}}c^{\frac{4}{3}} = c^2 \quad \therefore\ a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{2}{3}}$

3. En la figura, AO = OC, $\overline{AO}$ y $\overline{AC}$ son diámetros. Si AD = 2, hallar AB.



Resolución:

Por propiedad:

$(AB)^2 = (AC)(AH) \Rightarrow (AB)^2 = 2R(AH)$ ..(1)

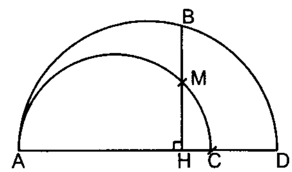
También: $AD^2 = (AO)(AH) \Rightarrow 2^2 = R(AH)$

$\Rightarrow R(AH) = 4$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$(AB)^2 = 2(4) \quad \therefore\ AB = 2\sqrt{2}$

4. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ son diámetros. BM = MH. Hallar BH, si: (AH)(CD) = 27.



Resolución:

Dato: AH(CD) = 27

Por propiedad: $(BH)^2 = (AH)(HD)$

Es decir: $(BH)^2 = AH(HC + CD)$

$(BH)^2 = (AH)(HC) + (AH)(CD)$

$\Rightarrow (BH)^2 = (AH)(HC) + 27$ ...(1)

Además: $(MH)^2 = (AH)(HC)$

Pero: $MH = \dfrac{BH}{2}$

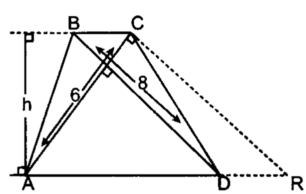
Entonces: $\dfrac{(BH)^2}{4} = (AH)(HC)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $(BH)^2 = \dfrac{(BH)^2}{4} + 27$

$\therefore BH = 6$

5. Las diagonales de un trapecio son perpendiculares entre sí y tienen longitudes 6 y 8. Hallar la longitud de la altura.

Resolución:



Sea el trapecio ABCD, donde AC = 6 y BD = 8.

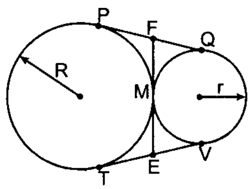
Se traza $\overline{CR} \parallel \overline{BD} \Rightarrow CR = BD = 8$

La altura relativa a $\overline{AR}$, en el ΔACR, es la misma que la del trapecio. En dicho triángulo se escribe:

$$\frac{1}{h^2}=\frac{1}{(AC)^2}+\frac{1}{(CR)^2}\Rightarrow\frac{1}{h^2}=\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}\qquad\therefore\ h=4{,}8$$

6. En un trapecio isósceles se puede inscribir dos circunferencias de radios 3 y 4 cm. Calcular cuánto mide la mediana.

Resolución:



Recordemos que para dos circunferencias tangentes exteriormente, las dos tangentes comunes exteriores y la interior, miden igual, y se calculan en función de los radios.

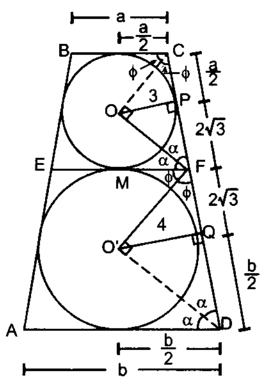
$PQ = TV = EF = 2\sqrt{Rr}$

$PF = FM = FQ = ET = EM = EV$

Para nuestro problema, sea ABCD el trapecio en mención; por lo anterior:

$PQ = 2\sqrt{4(3)} = 4\sqrt{3} \Rightarrow PQ = 4\sqrt{3}$

$PF = FQ = 2\sqrt{3}$



Sabemos además que las bisectrices de los ángulos conjugados internos entre dos paralelas, son perpendiculares, por lo que:

$m\angle COF = 90° = m\angle FO'D$

Por relaciones métricas:

$\Delta COF \Rightarrow (OP)^2 = CP(PF)$

$\Rightarrow 3^2 = \frac{a}{2}(2\sqrt{3}) \Rightarrow a = 3\sqrt{3}$

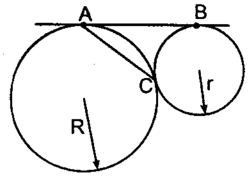
$\Delta FO'D \Rightarrow (O'Q)^2 = FQ(QD) \Rightarrow 4^2 = 2(\sqrt{3})\frac{b}{2}$

$\Rightarrow b = \frac{16}{3}\sqrt{3}$

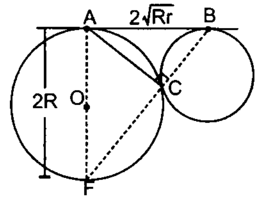
$\therefore$ La mediana: $\frac{a+b}{2} = \frac{25}{6}\sqrt{3}$ cm

7. En la figura: A, B y C son puntos de tangencia.

Demostrar: $AC = 2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$



Resolución:



Se traza $\overline{BC}$ y se prolonga hasta F.

Se traza $\overline{FA}$.

Se sabe, por propiedad, que $m\angle ACB = 90°$, luego: $\overline{AF}$ es diámetro.

En el triángulo FAB:

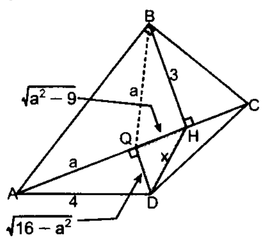
$$\frac{1}{(AC)^2}=\frac{1}{(AF)^2}+\frac{1}{(AB)^2}\Rightarrow\frac{1}{(AC)^2}=\frac{1}{4R^2}+\frac{1}{4Rr}$$

$\therefore\ AC = 2R\sqrt{\frac{r}{R+r}}$

Análogamente: $BC = 2r\sqrt{\frac{R}{R+r}}$

8. En un cuadrilátero convexo ABCD, $m\angle ABC = 90°$ se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{DQ}$ de los triángulos ABC y ADC respectivamente $\overline{AQ} \cong \overline{QC}$. Si $AD = 4$ y $BH = 3$, hallar DH.

Resolución:



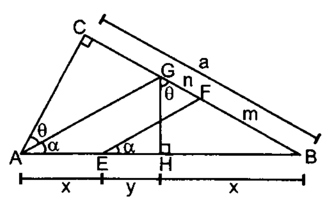
⊾DQH por Pitágoras:

$x^2 = a^2 - 9 + 16 - a^2 \Rightarrow x^2 = 7 \qquad \therefore\ x = \sqrt{7}$

9. En un triángulo ABC (recto en C) $G \in \overline{BC}$, $F \in \overline{BC}$ y $E \in \overline{AB}$, tal que $\overline{AG}$ es paralela a $\overline{EF}$.

Si $\overline{GH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ ($H \in \overline{AB}$), $AE = BH$ y $BC(FG) = 25$, calcular AE.

Resolución:



$\triangle ACB \sim \triangle GHB; \Rightarrow \dfrac{a}{x} = \dfrac{2x+y}{m+n}$ ...(1)

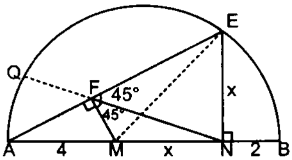
Por Tales: $\dfrac{x+y}{x} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow \dfrac{x}{n} = \dfrac{2x+y}{m+n}$ ...(2)

De (1) y (2): $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{n} \Rightarrow x^2 = an = 25$ (dato)

$\therefore x = 5$

10. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se ubican los puntos M, N en el diámetro y E en la semicircunferencia, $\overline{EN} \perp \overline{AB}$; AM = 2NB = 4. Se traza el rayo $\overrightarrow{NQ}$ que intercepta a $\overline{AE}$ en F, m∠QFA = m∠MFN = 45°. Hallar EN.

Resolución:



De la figura: $x^2 = (x + 4)(2)$

$0 = x^2 - 2x - 8$

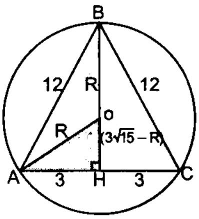
$x \quad -4$

$x \quad +2$

$0 = (x - 4)(x + 2) \quad \therefore x = 4$

11. La base de un triángulo isósceles mide 6 y uno de sus lados congruentes mide 12. Hallar la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo.

Resolución:



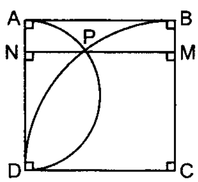
$\triangle AOH$; por Pitágoras:

$R^2 = 9 + (3\sqrt{15} - R)^2$

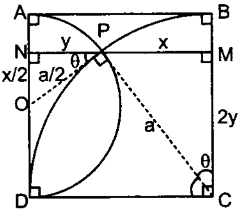
Efectuando:

$\therefore \mathbf{R} = \dfrac{8}{5}\sqrt{15}$

12. En la figura mostrada ABCD es un cuadrado. La semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ interseca al arco $\overset{\frown}{BD}$ del cuadrante BCD en el punto P. Hallar la relación $\left(\dfrac{PM}{NP}\right)$.



Resolución:



$x + y = a \Rightarrow x = a - y$ ...(1)

$\triangle PMC$: $x^2 + 4y^2 = a^2$ ...(2)

(1) en (2): $(a - y)^2 + 4y^2 = a^2$

Resolviendo: $y = \dfrac{2a}{5} \Rightarrow x = \dfrac{3a}{5}$

$\therefore \dfrac{PM}{NP} = \dfrac{x}{y} = \dfrac{3}{2}$

13. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ se inscribe el triángulo ABC. Con diámetro BC se traza una semicircunferencia la cual interseca a $\overline{AC}$ en F. Luego se traza $\overline{FH} \perp \overline{BC}$. Si $\overline{AF}$ = 1 y FC = 8, calcular FH.

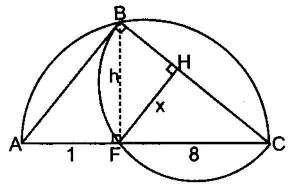
Resolución:

$h^2 = (1)(8)$

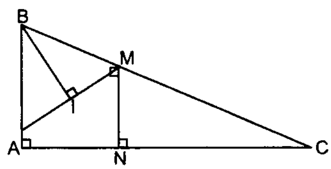
$\Rightarrow h^2 = 8$

$\triangle BFC$: $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{64}$

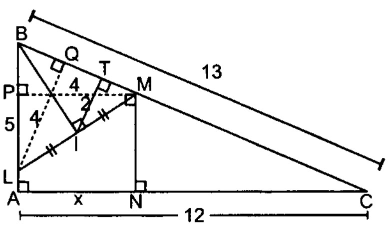
$\therefore x = \dfrac{8}{3}$



14. En la figura, I es el incentro del triángulo ABC. Si AB = 5 y AC = 12, hallar AN.



Resolución:



Por Poncelet:

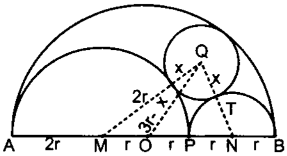
$5 + 12 = 13 + 2(IT) \Rightarrow IT = 2$

$\triangle LBM$ isósceles: $LQ = MP = 2(2) = 4$

$\therefore AN = x = 4$

15. En el interior de una semicircunferencia C se inscriben 2 semicircunferencias tangentes exteriormente y tangentes interiores a C. Si los diámetros de las semicircunferencias están en la relación de 2 es a 1 contenidas en el diámetro de C que mide 14. Halle el radio de una circunferencia tangente a las tres semicircunferencias.

Resolución:



Por Stewart; en el $\triangle$MQN:

$(3r - x)^2(3r) = (x + 2r)^2(2r) + (x + r)^2 r - r(2r)(3r)$

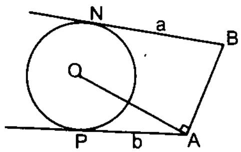
$3(9r^2 - 6rx + x^2) = 2(x^2 + 4rx + 4r^2) + x^2 + 2rx + r^2 - 6r^2$

$27r^2 - 18rx + 3x^2 = 2x^2 + 8rx + 8r^2 + x^2 + 2rx - 5r^2$

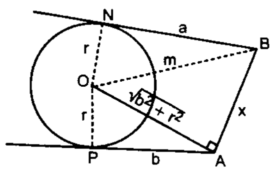
$24r^2 = 28rx \Rightarrow 6r = 7x \Rightarrow x = \dfrac{6r}{7}$

Por dato: $6r = 14 \quad \therefore x = 2$

16. En la figura, hallar AB, si AP = b y BN = a.



Resolución:



$\triangle$ONB: $m^2 = a^2 + r^2$ ...(1)

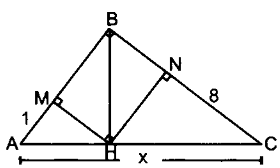
$\triangle$OAB: $m^2 = b^2 + r^2 + x^2$ ...(2)

De (1) y (2):

$a^2 + r^2 = b^2 + r^2 + x^2 \quad \therefore x = \sqrt{a^2 - b^2}$

17. En un triángulo rectángulo ABC se trazan la altura $\overline{BH}$ y las perpendiculares $\overline{HM}$ y $\overline{HN}$ a los catetos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, AM = 1 y CN = 8. Hallar AC.

Resolución:



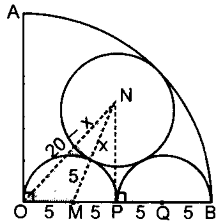
Por propiedad:

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3]{1^2} + \sqrt[3]{8^2} \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 + 4 \Rightarrow x = 5^{\frac{3}{2}}$

$\therefore AC = x = 5\sqrt{5}$

18. En un cuadrante AOB de radio 20, en $\overline{OB}$ se ubica el punto medio P y se trazan dos semicircunferencias de diámetros $\overline{OP}$ y $\overline{PB}$, luego se traza una circunferencia que es tangente a estas 2 semicircunferencias y al arco $\overset{\frown}{AB}$. Hallar la longitud del radio de dicha circunferencia.

Resolución:



Por Euclides en el $\triangle$ONM obtusángulo

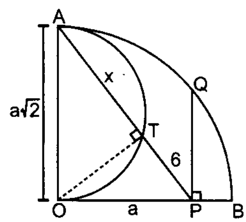
$(20 - x)^2 = (x + 5)^2 + 5^2 + 2(5)(5)$

$400 - 40x = 10x + 25 + 25 + 50$

$300 = 50x \quad \therefore x = 6$

19. En un cuadrante AOB de radio $a\sqrt{2}$, se ubica sobre $\overline{OB}$ un punto P, tal que OP =a, luego se traza $\overline{QP} \perp \overline{OB}$ (Q $\in$ al arco $\overset{\frown}{AB}$), con diámetro AO se traza una semicircunferencia C, tal que $\overline{AP} \cap C = \{T\}$. Si PT = 6, hallar AT.

Resolución:



$\triangle$AOP: $(AP)^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2 \Rightarrow AP = a\sqrt{3}$

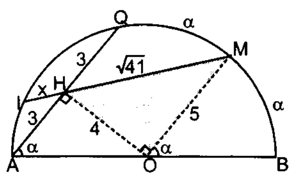
$a^2 = 6(a\sqrt{3}) \Rightarrow a = 6\sqrt{3}$

$x + 6 = (6\sqrt{3})(\sqrt{3}) \Rightarrow x = 18 - 6$

$\therefore x = 12$

20. En una circunferencia C de diámetro $\overline{AB}$, en C se ubican los puntos I, Q y M, tal que $\overline{IM} \cap \overline{AQ} = \{H\}$, $\overset{\frown}{QM} \cong m\overset{\frown}{MB}$ y $\overline{AH} \cong \overline{HQ}$, AQ = 6 y R = 5. Hallar IH (**R** radio de la C).

Resolución:

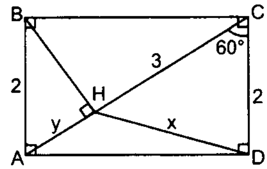


$\triangle$HOM: $(HM)^2 = 4^2 + 5^2 \Rightarrow HM = \sqrt{41}$

Por cuerdas: $x\sqrt{41} = 9 \quad \therefore\ x = \dfrac{9}{\sqrt{41}}$

21. En un rectángulo ABCD, se traza la altura $\overline{BH}$ del triángulo ABC. Si AB = 2 y HC = 3. Hallar HD.

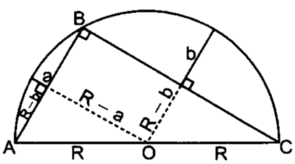
Resolución:



⊾ABC: $4 = y(y + 3) \Rightarrow y = 1$
⊾ACD notable de 30° y 60°.
$\triangle$HCD; por propiedad:
$x^2 = 3^2 + 2^2 - 2(3)(2)\cos 60°$
$x^2 = 13 - 6 \quad \therefore\ x = \sqrt{7}$

22. En un triángulo rectángulo, las longitudes de las flechas relativos a los catetos miden a y b. Hallar la longitud del inradio del triángulo rectángulo.

Resolución:

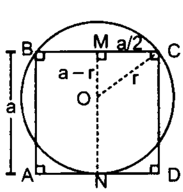


Por Pitágoras: $R^2 = (R - a)^2 + (R - b)^2$
Efectuando: $R = a + b + \sqrt{2ab}$ ...(1)
Por Poncelet en el ⊾ABC:
$2(R - b) + 2(R - a) = 2R + 2r$
$2R - 2(a + b) = 2r$ ...(2)
(1) en (2):
$2(a + b) + 2\sqrt{2ab} - 2(a + b) = 2r$
$\therefore\ r = \sqrt{2ab}$

23. En un cuadrado ABCD de longitud de lado a, se traza una circunferencia que pasa por B y C, siendo además tangente al lado $\overline{AD}$. Hallar la longitud del radio de dicha circunferencia.

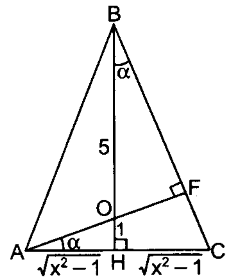
Resolución:

En ⊾OMC:
Por Pitágoras:
$r^2 = (a - r)^2 + (a/2)^2$
$\therefore r = \dfrac{5}{8}a$



24. En un triángulo isósceles ABC(AB = BC). La altura AF, interseca a la altura BH en O. Si OB = 5 y OH = 1. Calcular OA.

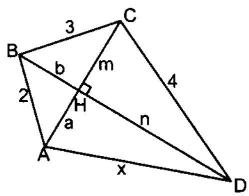
Resolución:



⊾BHC ~ ⊾AHO $\Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{1} = \dfrac{6}{\sqrt{x^2 - 1}}$
$\Rightarrow x^2 - 1 = 6 \Rightarrow x^2 = 7 \quad \therefore\ x = \sqrt{7}$

25. Los lados consecutivos de un trapezoide miden 2, 3 y 4. Si las diagonales son perpendiculares, determinar la longitud del cuarto lado.

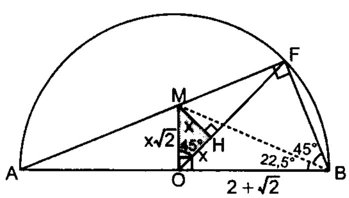
Resolución:



⊾AHB: $a^2 + b^2 = 2^2$ ...(1)
⊾BHC: $b^2 + m^2 = 3^2$ ...(2)
⊾CHD: $m^2 + n^2 = 4^2$ ...(3)
Sumando (1), (2) y (3):
$\underbrace{a^2 + n^2}_{x^2} + 2\underbrace{(b^2 + m^2)}_{3^2} = 4 + 9 + 16$
$\Rightarrow x^2 + 18 = 29 \Rightarrow x^2 = 11 \quad \therefore\ x = \sqrt{11}$

26. En una semicircunferencia de diámetro AB y centro O se ubica un punto F y en $\overline{AF}$ se ubica un punto M de tal manera que $\overline{MO} \perp \overline{AB}$. Si el radio de la semicircunferencia es $(2 + \sqrt{2})$ y la m∠MBF = 45, hallar la longitud del segmento perpendicular a $\overline{OF}$ trazado desde M.

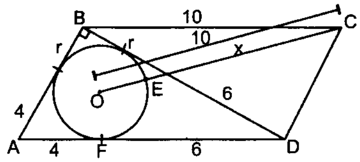
Resolución:



⊾MHO: $OM = x\sqrt{2}$ ...(1)
⊾MOB: $OM = \sqrt{2}$ ...(2)
De (1) y (2): $x\sqrt{2} = \sqrt{2} \quad \therefore\ x = 1$

27. En un paralelogramo ABCD, m∠ABD = 90°, la circunferencia P de centro O inscrita en el triángulo ABD es tangente con $\overline{AD}$ en F, AF = 4, FD = 6, BC = OC, $\overline{OC} \cap P = \{E\}$. Calcular CE.

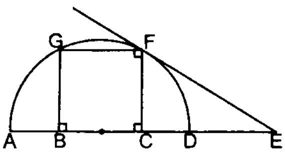
Resolución:



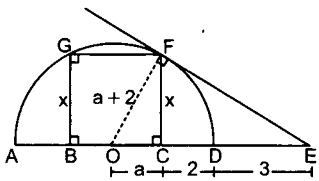
$\triangle ABD$: $(r+4)^2 + (r+6)^2 = 10^2 \Rightarrow r = 2$

$\Rightarrow x + 2 = 10 \quad \therefore x = 8$

28. En la figura, AB = 2, DE = 3, hallar: GB



Resolución:



$\triangle OFE$: $(a+2)^2 = a(a+5)$

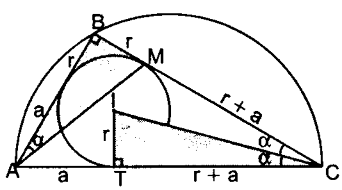
Efectuando: $a = 4$

OFE: $x^2 = (4)(5)$

$\therefore x = 2\sqrt{5}$

29. En un triángulo ABC, recto en B la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{BC}$ en el punto M. Si $m\angle BCA = 2m\angle BAM$, hallar $m\angle BCA$.

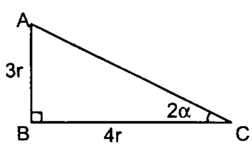
Resolución:



$\triangle ABM \cong \triangle CTI \Rightarrow AB = TC = r + a$

$\triangle ABC$: $(r+a)^2 + (2r+a)^2 = (r+2a)^2$

Efectuando: $2r = a$



$\therefore m\angle BCA = 2\alpha = 37°$

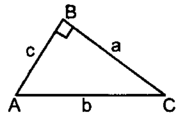
30. En un triángulo rectángulo ABC, cuyo perímetro es igual a 40 y la diferencia entre los catetos es igual a 7. Calcular la longitud de la hipotenusa.

Resolución:

$a + b + c = 40 \quad ...(1)$

$a - c = 7 \quad ...(2)$

T. de Pitágoras: $b^2 = a^2 + c^2 \ ...(3)$



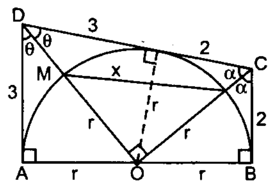
De (1), (2) y (3):

$b = 17$, $a = 15$ y $c = 8$

$\therefore b = 17$

31. Se tiene el diámetro $\overline{AB}$ de una semicircunferencia de centro O, por los extremos de dicho diámetro se trazan las perpendiculares $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ de modo que $\overline{CD}$ sea tangente a la semicircunferencia, además se trazan $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$ intersecando a la semicircunferencia en los puntos M y N, respectivamente. Si BC = 2 y AD = 3. Hallar la cuerda MN.

Resolución:



Piden: MN = x

Del gráfico: $2\theta + 2\alpha = 180° \Rightarrow \theta + \alpha = 90°$

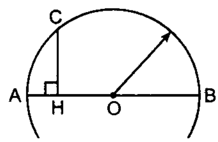
$\Rightarrow m\angle DOC = 90°$

$\triangle MON$: $x = r\sqrt{2}$

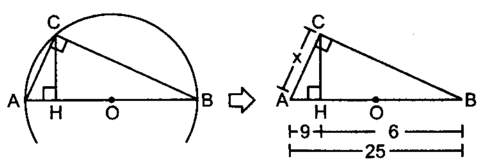
$\triangle DOC$: $r^2 = 3(2) \Rightarrow r = \sqrt{6}$

$\therefore x = 2\sqrt{3}$

32. Hallar AC, si AH = 9 y HB = 16.



Resolución:



Sea: AC = x

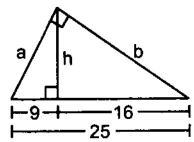
$m\angle ACB = 90°$ ya que $\overline{AB}$ es diámetro

$\triangle ACB$: $x^2 = 25(9)$

$\therefore x = 15$

33. Calcular la suma de los catetos de un triángulo rectángulo con la altura relativa a la hipotenusa sabiendo que las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa miden 9 y 16.

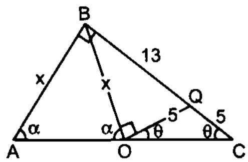
Resolución:



$a^2 = 25(9) \Rightarrow a = 15$
$b^2 = 25(16) \Rightarrow b = 20$
$h^2 = 9(16) \Rightarrow h = 12$
$\therefore a + b + h = 47$

34. En el $\triangle ABC$ (recto en B), se ubican P y Q en $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que BP = BA, PQ = QC. Si BC = 18 y QC = 5, hallar AB.

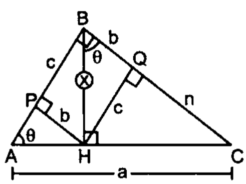
Resolución:



Sea: AB = x
⊿BPQ (teorema de Pitágoras): $13^2 = x^2 + 5^2$
$\therefore x = 12$

35. En el $\triangle ABC$ (recto en B) se traza la altura $\overline{BH}$ y los segmentos $\overline{HP}$ y $\overline{HQ}$ perpendiculares a los catetos. Si AC(HP)(HQ) = 2744, hallar BH.

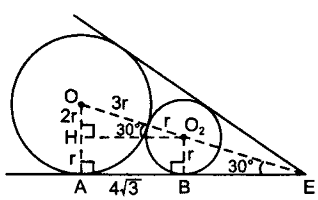
Resolución:



Sea BH = x
⊿BHC: $x^2 = b(b + n)$ ...(1)
⊿BHC ~ ⊿ABC $\Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{c}{b+n}$
$\Rightarrow b + n = \dfrac{ac}{x}$ ...(2)
(2) en (1): $x^2 = b\left(\dfrac{ac}{x}\right) \Rightarrow x^3 = abc$
Por dato: $abc = 2744 = 14^3 \Rightarrow x^3 = 14^3$
$\therefore x = 14$

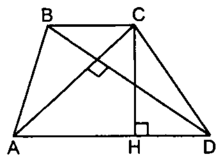
36. Los radios de dos circunferencias tangentes externas están en la relación de uno a tres. Las tangentes comunes exteriores miden $4\sqrt{3}$ y se cortan en E. Calcular la distancia entre el centro de la circunferencia mayor y E.

Resolución:

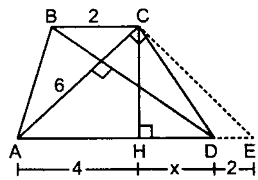


Unimos los centros con E.
Se observa que: $OO_2 = 4r$; $OH = 2r$
$\Rightarrow m\angle OO_2H = 30° \Rightarrow m\angle OEA = 30°$
⊿OHO_2(30°, 60°): $HO_2 = AB = 4\sqrt{3} = 2r\sqrt{3} \Rightarrow r = 2$
$\Rightarrow OA = 6$
⊿OAE: OE = 2OA $\therefore$ OE = 12

37. En el trapecio mostrado calcular HD, si: AC = 6, AH = 4 y BC = 2.



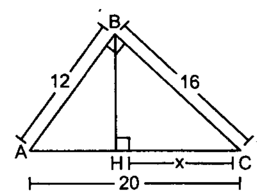
Resolución:



Sea: HD = x
A partir del vértice C se traza una paralela a $\overline{BD}$.
Donde DBCE es un paralelogramo.
⊿ACE: $6^2 = 4(6 + x)$ $\therefore x = 3$

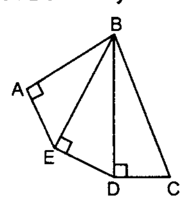
38. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, calcular la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{AC}$, si: AB = 12 y AC = 20

Resolución:



Sea: HC = x
⊿ABC (37° y 53°): BC = 16
Por propiedad: $16^2 = 20(x)$
$\therefore x = 12{,}8$

39. Calcular AB, si: BC = 10 y $DC^2 + ED^2 + AE^2 = 56$

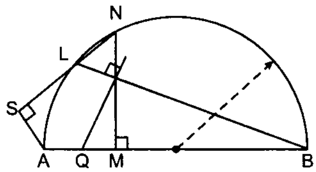


Resolución:

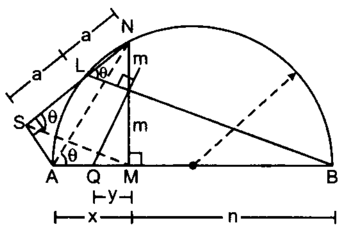
Por teorema de Pitágoras, tenemos:
⊿BDC: $(BC)^2 = (DC)^2 + (BD)^2$ ...(1)
⊿BED: $(BD)^2 = (ED)^2 + (BE)^2$ ...(2)
⊿BAE: $(BE)^2 = (AE)^2 + (AB)^2$ ...(3)

Sumando (1), (2) y (3) obtenemos:
$(BC)^2 = (DC)^2 + (ED)^2 + (AE)^2 + (AB)^2$
$10^2 = 56 + (AB)^2 \Rightarrow 44 = (AB)^2$
$\therefore\ AB = 2\sqrt{11}$

40. Según la figura, NL = LS, calcular: $\dfrac{AM}{QM}$



Resolución:



Piden: $\dfrac{AM}{QM} = \dfrac{x}{y}$

Sea: $m\angle NLB = \theta \Rightarrow m\angle NAB = \theta$

⏢ASNM inscriptible: $m\angle NSM = m\angle NAM = \theta$

$\triangle NSM$: $\overline{LT}$ base media $\Rightarrow NT = TM = m$

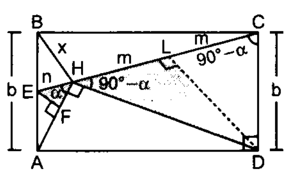
En la semicircunferencia, por teorema: $(2m)^2 = xn$ ...(1)

◺QTB (por teorema): $m^2 = yn$ ...(2)

(1) ÷ (2): $\therefore\ \dfrac{x}{y} = 4$

41. En un rectángulo ABCD, se ubican los puntos colineales E y H en $\overline{AB}$ y el interior del rectángulo, respectivamente, tal que $m\angle BHC = m\angle AHD = 90°$, DH = AB, luego se traza $\overline{EF}$ perpendicular a $\overline{AH}$ ($F \in \overline{AH}$), de modo que (EF)(DH) = 18. Calcular BH.

Resolución:



Sea: BH = x

Como ABCD (rectángulo): CD = AB = b

Se traza $\overline{DL} \perp \overline{HC} \Rightarrow HL = LC = m$, sea: EH = **n**

◺EBC (por teorema): $x^2 = n(2m)$ ...(1)

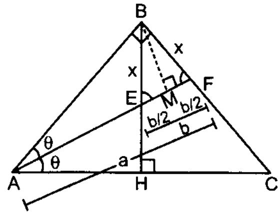
◺EFH ~ ◺HLD (AAA): $\dfrac{EF}{m} = \dfrac{n}{DH}$

$nm = (EF)(DH) \Rightarrow mn = 18$

En (1): $x^2 = 2(18)$ $\therefore\ x = 6$

42. En un $\triangle ABC$ rectángulo (recto en B) se traza la bisectriz $\overline{AF}$ y la altura $\overline{BH}$ que se intersecan en E. Si (AF)(EF) = 72, hallar BE.

Resolución:



Sea: BF = x

Dato: ab = 72 ...(1)

◺ABF: $x^2 = \left(\dfrac{b}{2}\right)a$ ...(2)

(1) en (2): $x^2 = \dfrac{72}{2}$ $\therefore\ x = 6$

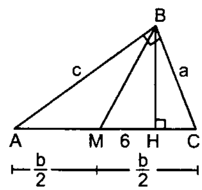
43. La relación de los cuadrados de las longitudes de los catetos de un triángulo rectángulo es igual a 5/8 y la proyección de la mediana relativa a la hipotenusa sobre esta mide 6. ¿Cuánto mide la hipotenusa?

Resolución:

Dato: $\dfrac{a^2}{c^2} = \dfrac{5}{8}$ ...(1)

◺ABC: $a^2 = HC(AC)$

$\Rightarrow a^2 = \left(\dfrac{b}{2} - 6\right)b$ ...(2)



También:

$c^2 = \left(\dfrac{b}{2} + 6\right)b$ ...(3)

(2) ÷ (3): $\dfrac{a^2}{c^2} = \dfrac{b-12}{b+12}$ ...(4)

(1) en (4): $5b + 60 = 8b - 96$ $\therefore\ b = 52$

44. ABCD es un romboide (AB < BC), $\overline{AE}$ es la bisectriz del ángulo BAD ($E \in \overline{BC}$), $L \in \overline{AD}$ y $\overline{LN} \perp \overline{AE}$ (N es punto medio de $\overline{AE}$, $\overline{NQ} \perp \overline{BE}$, ($Q \in \overline{BE}$). Si BQ = 4 y NL = 6, hallar AL.

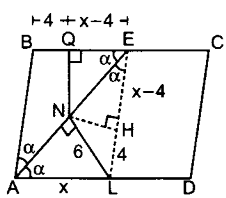
Resolución:

Sea: AL = x

Por relaciones métricas en el ◺LNE:

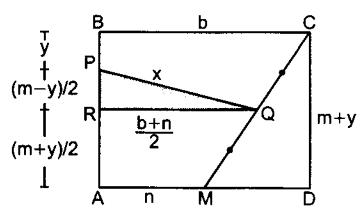
$6^2 = 4x$

$\therefore\ x = 9$



45. Dado un rectángulo ABCD, en los lados $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ se ubican los puntos M y P, respectivamente. Si se cumple $BC + AM = \sqrt{13}$ y $AP - PB = \sqrt{3}$, hallar la longitud del segmento que une P con el punto medio de $\overline{MC}$.

Resolución:



Por el teorema de Pitágoras en el ⊿PRQ:

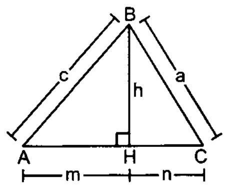
$$x^2 = \left[\frac{m-y}{2}\right]^2 + \left[\frac{b+n}{2}\right]^2 \quad ...(1)$$

Por dato: $b + n = \sqrt{13}$; $m - y = \sqrt{3}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $x^2 = \frac{16}{4}$ $\quad \therefore x = 2$

46. La base de un triángulo mide 20, la altura trazada a esta base divide en dos segmentos cuyas medidas se diferencian en 8. Si la diferencia de las medidas de los otros dos lados es 4, calcular la longitud del mayor lado del triángulo.

Resolución:



Dato: $m + n = 20$

$m - n = 8 \wedge c - a = 4$

Se pide mayor lado: c

T. de Pitágoras:

$h^2 = c^2 - m^2$ ...(1)

$h^2 = a^2 - n^2$ ...(2)

(1) = (2):

$c^2 - m^2 = a^2 - n^2$

$\Rightarrow c - a^2 = m^2 - n^2$

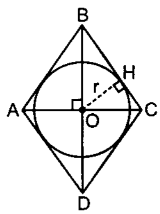
$\Rightarrow (c + a)(c - a) = (m + n)(m - n)$

$\Rightarrow (c + a)(4) = (20)(8)$

$\Rightarrow c + a = 40 \quad \Rightarrow a = 18 \quad \therefore c = 22$

47. Hallar la longitud del radio de la circunferencia inscrita en un rombo cuyas diagonales miden 12 y 16, respectivamente.

Resolución:



Sea ABCD el rombo, con:

AC = 12 y BD = 16

$\Rightarrow AO = OC = 6$ y $BO = OD = 8$

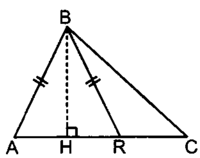
⊿BOC (por fórmula):

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{(BO)^2} + \frac{1}{(OC)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r^2} = \frac{1}{8^2} + \frac{1}{6^2} \quad \therefore r = 4{,}8$$

48. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana interior $\overline{BR}$, tal que AB = BR, hallar AB, si: AC(AR) = 72.

Resolución:



Dato: AC(AR) = 72 ...(1)

Se traza la altura $\overline{BH}$.

△ABR (isósceles):

$AH = HR = \frac{AR}{2}$ ...(2)

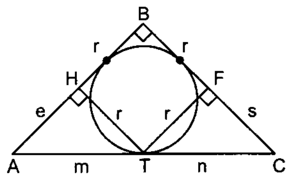
Por relaciones métricas en ⊿ABC: $(AB)^2 = AC(AH)$

De (2): $(AB)^2 = AC\left(\frac{AR}{2}\right) \Rightarrow (AB)^2 = \frac{AC(AR)}{2}$

De (1): $(AB)^2 = \frac{72}{2}$ $\quad \therefore AB = 6$

49. Se tiene un triángulo ABC recto en B, la circunferencia inscrita es tangente a la hipotenusa en T, luego se trazan $\overline{TH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{TF} \perp \overline{BC}$. Calcular AT(TC), si: (AH)(HB) + (BF)(FC) = 100

Resolución:



⊿AHT: $r^2 + e^2 = m^2$ ...(1)

⊿TFC: $r^2 + s^2 = n^2$ ...(2)

⊿ABC: $(e + r)^2 + (r + s)^2 = (m + n)^2$ ...(3)

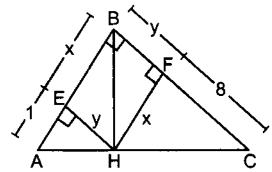
De (1), (2) y (3) : $2er + 2rs = 2mn$

$\Rightarrow er + rs = mn$

Por dato: $er + rs = 100 \quad \therefore mn = 100$

50. En un ⊿ABC, recto en B, se trazan la altura $\overline{BH}$; $\overline{HE} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HF} \perp \overline{BC}$ (E en $\overline{AB}$ y F en $\overline{BC}$). Si AE = 1 y FC = 8, hallar EB y BF.

Resolución:



Sean: EB = x, FB = y

EHFB es rectángulo:

EH = BF = y; HF = EB = x

Por fórmula:

⊿AHB: $(HE)^2 = AE(EB) \Rightarrow y^2 = 1(x) \Rightarrow y^2 = x$ ...(1)

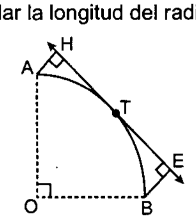
⊿BHC: $(HF)^2 = FC(BF) \Rightarrow x^2 = 8y$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $(y^2)^2 = 8y$

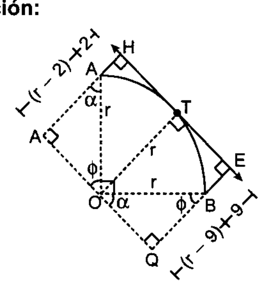
$\Rightarrow y^3 = 8 \Rightarrow y = 2$

Luego: $x = y^2 = 2^2 \Rightarrow x = 4 \quad \therefore EB = 4;\ BF = 2$

51. En la figura, O es centro del cuarto de circunferencia y T es punto de tangencia. Además AH = 2; BE = 9. Hallar la longitud del radio.



Resolución:



Trazamos $\overline{OT}$ y por O, $\overline{PQ}$ la paralela a $\overline{HE}$:

$\Rightarrow PA = r - 2$ y $QB = r - 9$

Donde:

$m\angle OAP = m\angle BOQ = \alpha$ y $m\angle AOP = m\angle OBQ = \phi$

$\triangle OPA \cong \triangle BQO$

$\Rightarrow OP = BQ$

$\Rightarrow OP = r - 9$ ...(1)

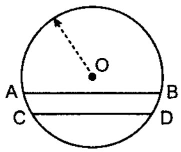
$\triangle OPA$ (teorema de Pitágoras):

$(OP)^2 + (PA)^2 = (OA)^2$

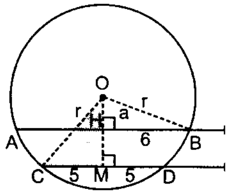
De (1): $(r-9)^2 + (r-2)^2 = r^2$

$\therefore r = 17$

52. En la figura, O es centro. $\overline{AB} // \overline{CD}$; $AB = 12$ y $CD = 10$. Hallar r, sabiendo que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ distan 1 entre sí.



Resolución:



Trazamos $\overline{OM} \perp \overline{CD}$, cortando a $\overline{AB}$ en el punto H.

$\Rightarrow CM = MD = 5$ y $AH = HB = 6$

Por dato $HM = 1$

Sea $OH = a$

Por el teorema de Pitágoras:

$\triangle OMC$: $(OM)^2 + (MC)^2 = (OC)^2$

$\Rightarrow (a+1)^2 + 25 = r^2$ ...(1)

$\triangle OHB$: $(OH)^2 + (HB)^2 = (OB)^2$

$\Rightarrow a^2 + 36 = r^2$ ...(2)

(1) = (2): $(a+1)^2 - a^2 + 25 - 36 = 0 \Rightarrow a = 5$

De (2): $r^2 = 25 + 36 \quad \therefore r = \sqrt{61}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2008 - II)

En la figura, AO = 10 cm, O y A son centros de circunferencias. Calcule CD, en cm.

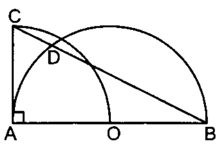
A) $2\sqrt{5}$

B) $\frac{8}{3}\sqrt{5}$

C) $2\sqrt{6}$

D) $\frac{8}{3}\sqrt{6}$

E) $2\sqrt{7}$



Resolución:

Por relaciones métricas:

$\triangle BAC$: $\dfrac{1}{m^2} = \dfrac{1}{10^2} + \dfrac{1}{20^2}$

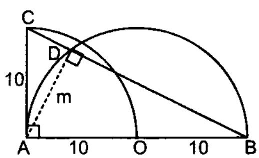
$\Rightarrow m = 4\sqrt{5}$ ...(I)

$\triangle ADC$: Pitágoras:

$m^2 + (CD)^2 = 10^2$

De (I): $(4\sqrt{5})^2 + CD^2 = 10^2$

$\therefore CD = 2\sqrt{5}$ cm



Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2009 - II)

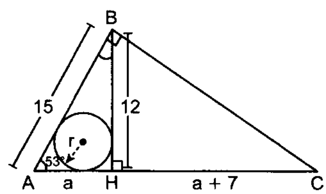
Si en un triángulo rectángulo ABC, recto en B, la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AC}$ y $AH < HC$) relativa a la hipotenusa mide 12 cm, y la diferencia entre las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa es 7 cm. Entonces, la longitud (en cm) del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo ABH es:

A) 1,5 B) 2,0 C) 2,5

D) 3,0 E) 3,5

Resolución:

Nos piden: r



Dato: $HC - AH = 7$

Por relaciones métricas en el $\triangle ABC$:

$12^2 = (a)(a+7) \Rightarrow a = 9$

Luego, $\triangle AHB$: notable $(37° - 53°) \Rightarrow AB = 15$

Por teorema de Poncelet: $15 + 2r = 12 + 9$

$\therefore r = 3$ cm

Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2010 - II)

En un trapecio rectángulo ABCD (recto en A y D) sus diagonales se intersecan perpendicularmente en E. Si AD = 3 m y DE = 1 m. Determinar (en m) la proyección de $\overline{BC}$ sobre $\overline{DC}$.

A) $\frac{21\sqrt{2}}{4}$ B) $\frac{21\sqrt{2}}{2}$ C) 9

D) 10 E) $11\sqrt{2}$

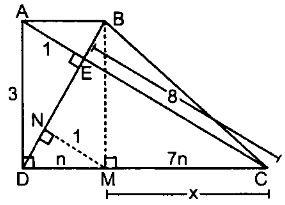
Resolución:

Nos piden: $MC = x$

$AD = 3$; $DE = 1$

Por relaciones métricas en el $\triangle ADC$:

$3^2 = (EC + 1)(1) \Rightarrow EC = 8$



Por Pitágoras en el ⊿ADC: $DC = 6\sqrt{2}$

De la figura el ⊿DNM ≅ ⊿DEC

$\Rightarrow \frac{DM}{DC} = \frac{1}{8}$; $DM = n \wedge DC = 8n$

Pero: $DC = 6\sqrt{2}$

$8n = 6\sqrt{2} \Rightarrow n = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

Luego: $x = 7n = 7\left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ $\therefore x = \frac{21\sqrt{2}}{4}$ m

Clave: A

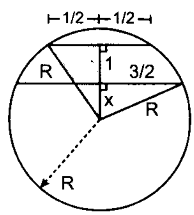
PROBLEMA 4 (UNI 2013 - II)

Dos segmentos paralelos en el plano tienen longitudes 3 cm y 1 cm respectivamente. Si la distancia entre esos segmentos es de 1 cm, calcule el radio de la circunferencia que pasa por los extremos de dichos segmentos.

A) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{7}{2}}$

D) $\sqrt{\frac{9}{2}}$ E) 2,5

Resolución:



Piden: R

$R^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (1 + x)^2$ ...(I)

$R^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2$ ...(II)

Resolviendo (I) / (II):

$\therefore R = \sqrt{\frac{5}{2}}$ cm

Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

En un rectángulo ABCD (AB < BC), se dibuja una semicircunferencia con diámetro $\overline{AD}$ tangente a $\overline{BC}$ en P. Se ubica el punto Q en $\overline{PC}$ y se traza $\overline{QE}$ perpendicular a $\overline{PC}$ donde el punto E está sobre la semicircunferencia. Si PQ = 1 cm y el perímetro del rectángulo ABCD es 48 cm, entonces la longitud de $\overline{AE}$ (en cm) es:

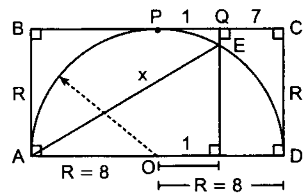
A) 6 B) 8 C) 9

D) 10 E) 12

Resolución:

Piden: AE p : semiperimetro

Dato: $2p = 48 = 6R$



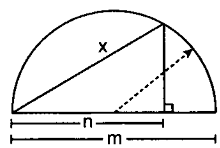
$R = 8$

Luego por relaciones métricas:

$x^2 = mn$

$\Rightarrow x^2 = 16(9)$

$\therefore x = 12$ cm



Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un trapecio rectángulo ABCD, $m\angle A = m\angle B = 90°$ la base menor BC = CD = 10 y $m\angle C = 120°$. Hallar la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BD}$.

A) 5/2 B) $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C) 15/2
D) 20 E) $\frac{10\sqrt{3}}{2}$

2. Dado el triángulo ABC, se traza la altura $\overline{BF}$. Se traza luego $\overline{FQ}$ perpendicular a $\overline{AB}$. Si AQ = 1, QB = 9 y FC = $9\sqrt{10}$, calcular la medida del $\angle ABC$

A) 60° B) 30° C) 45° D) 75° E) 90°

3. Desde un punto P exterior a una circunferencia de 7 cm de radio, se traza una tangente $\overline{PA}$ cuya longitud es 24 cm. Determinar la longitud de la secante PBC que pasa por el centro de la circunferencia.

A) 14 cm B) 21 cm C) 18 cm
D) 32 cm E) 30 cm

4. Dos cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ dé una circunferencia de centro O, se cortan perpendicularmente en el punto E. Si $\overline{AE}$, $\overline{EB}$, $\overline{ED}$ miden 24 cm, 5 cm y 10 cm, respectivamente, hallar la longitud de la cuerda $\overline{BC}$.

A) 13 cm B) 7 cm C) 10 cm
D) 12 cm E) 18 cm

5. En una circunferencia, una cuerda que mide 6 y un radio se bisecan mutuamente. Hallar la longitud del radio.

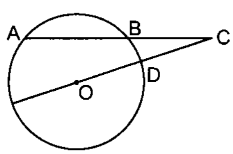
A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) $\sqrt{2}$ E) 6

6. Se tiene un triángulo rectángulo de lados 6, 8 y 10. Hallar la proyección del cateto menor sobre la bisectriz del ángulo recto.

A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{2}$ D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

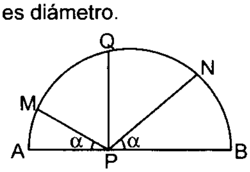
7. En la circunferencia de centro O, mostrada en la figura, AB = 40, BC = 16 y CD = 14. Calcular el radio.

A) 12,5
B) 25
C) 50
D) 33,33
E) 40



8. En la figura, calcular PQ, si MP = 4, NP = 9, $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$ y $\overline{AB}$ es diámetro.

A) 6
B) 5
C) 6,5
D) 4
E) 7



9. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B se traza la altura $\overline{BH}$. Si AH = BC y (AB)(BH) = 12, calcular BC.

A) $2\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

10. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo cuyas bases miden 2 y 3.

A) 3/5 B) 6/5 C) 4/3
D) 2/3 E) 3/2

11. En una circunferencia se traza la cuerda AB, tal que $m\overset{\frown}{AB} = 74°$, tomando dicha cuerda como lado, se traza interiormente un cuadrado ABCD, cuyo perímetro es 12, la prolongación de $\overline{BD}$ interseca a la circunferencia en P, calcular PD.

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{4}$

12. En un triángulo rectángulo, la altura trazada desde el vértice del ángulo recto mide 26,4 m y los cuadrados de los catetos están en la relación 9/16. Calcular la suma de los catetos.

A) 44 B) 55 C) 66 D) 77 E) 87

13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 15 m y la altura relativa a ella mide 6 m. Calcular la diferencia de los catetos.

A) 3 m B) 4 m C) $2\sqrt{5}$ m
D) $3\sqrt{5}$ m E) 6 m

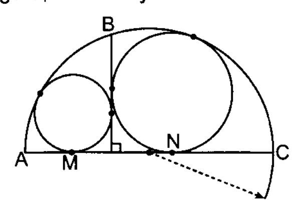
14. Las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ de un trapecio ABCD, miden 5 y 7 respectivamente. Calcular la longitud de la base media del trapecio, si $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

A) 3 B) $\sqrt{74}/2$ C) 4
D) $\sqrt{45}/2$ E) 5

15. En una circunferencia se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, las cuales se intersecan en P, si $m\overset{\frown}{AC} = m\overset{\frown}{CB}$ AP = 2, PC = 5 y $m\angle CPB = 53°$. Calcular PD.

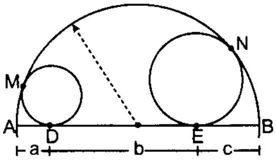
A) 2,8 B) 4,2 C) 3,6 D) 3,2 E) 2,6

16. En la figura, AB = 12 y BC = 16. Calcular MN.



A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

17. Del gráfico, calcular b^2; si $m\overset{\frown}{MN} = 90°$

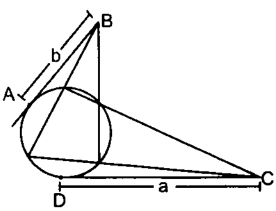


A) $a^2 + 2c^2$ B) $a^2 + c^2$ C) $2ac$
D) ac E) $\sqrt{ac}$

18. Se tienen dos circunferencias secantes en los puntos P y Q. Por un punto A de la circunferencia menor se traza una tangente que corta a la otra circunferencia en los puntos B y C. La prolongación de $\overline{PQ}$ corta a la tangente en N. Hallar AN, si NB = 3 y BC = 9.

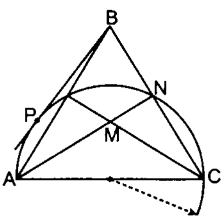
A) 27 B) 6 C) 18
D) 13, 5 E) 9

19. Calcular BC



A) $a + b$ B) $\sqrt{a^2 + 2b^2}$ C) $2\sqrt{ab}$
D) $\sqrt{a^2 + b^2}$ E) $2ab$

20. Calcular BP, si AM = a, MN = b y AB = AC.

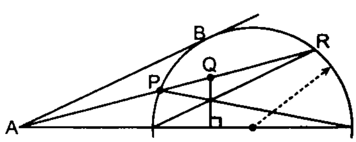


A) $\sqrt{2b(a+b)}$ B) $\sqrt{2a(a+b)}$ C) $\sqrt{b(a+b)}$
D) $\sqrt{a(a+b)}$ E) $\sqrt{a^2 + b^2}$

21. Calcular la distancia del incentro al excentro relativo al lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC, si AC − AB = 5 y la suma del inradio y exradio relativo a $\overline{BC}$ es 12.

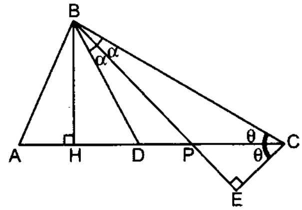
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

22. En la figura, PQ =2; QR = 4 y B es punto de tangencia. Calcular AB.



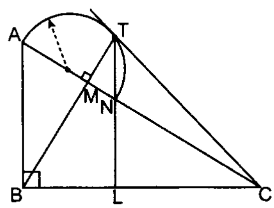
A) 3 B) 6 C) $5\sqrt{2}$
D) $6\sqrt{2}$ E) 8

23. Según el gráfico, $m\angle ABC = 90°$. Si (AC)(AP) = 80, calcular AB.



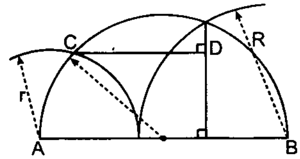
A) $4\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $4\sqrt{10}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $3\sqrt{5}$

24. Según el gráfico, calcular BL, si AM = a y NC = b (T es punto de tangencia).



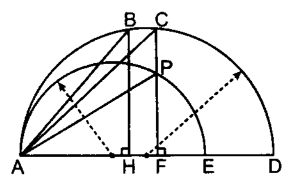
A) $\sqrt{a^2 + b^2}$ B) $\dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ C) $\sqrt{a(a+b)}$
D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{b(a+b)}$

25. Según el gráfico, calcular CD en función de R y r.



A) $\dfrac{R-r}{Rr}$ B) $2\sqrt{Rr}$ C) $\dfrac{Rr}{R-r}$
D) $\dfrac{Rr}{R+r}$ E) $\dfrac{2Rr}{R+r}$

26. Según la figura, calcular AB si AP = 6 m.

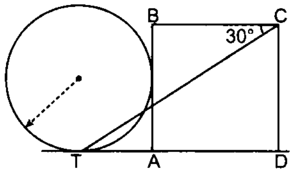


A) $6\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 6
D) 8 E) 12

27. Los catetos de un triángulo rectángulo miden b y c (b > c). ¿Cuál es la razón que debe existir entre ambos para que la mediana relativa al cateto que mide b sea perpendicular a la mediana relativa a la hipotenusa?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{3}{2}$

28. En el gráfico se muestra al cuadrado ABCD y a una circunferencia de radio R (P y T son puntos de tangencia). Calcular la tangente trazada desde C.

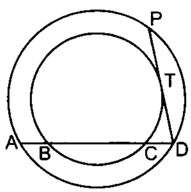


A) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$ B) $R\sqrt{3}$ C) $R\sqrt{6}$
D) $R\sqrt{3+\sqrt{3}}$ E) $R\sqrt{3-\sqrt{3}}$

29. Se tiene una circunferencia de radio 41. Calcular la longitud de una cuerda cuya flecha correspondiente es 32.

A) 42 B) 50 C) 80
D) $16\sqrt{3}$ E) $21\sqrt{5}$

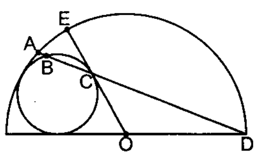
30. En el esquema, las circunferencias son concéntricas, T es punto de tangencia, AB = 2 y AD = 10. Calcular DP.



A) 12 B) 8 C) 6
D) $3\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

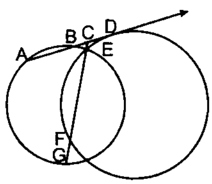
31. En la figura, calcular CD, si AB = 1, BC = 2, CE = $\sqrt{7}$. C punto de tangencia.

A) 2
B) 6
C) 10
D) 8
E) 7

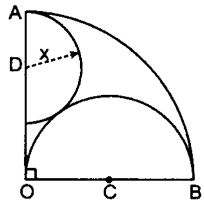


32. Calcular FG, si AB = BC = CD y CF = 9 (D es punto de tangencia).

A) 6
B) 8
C) 9
D) 10
E) 12

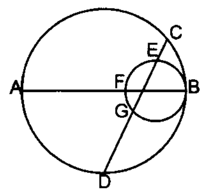


33. En el gráfico, calcular x, si O; C y D son centros, además AO = OB = 6.



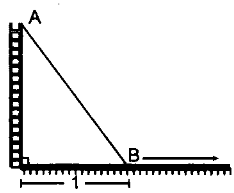
A) 1,5 B) 2 C) 2,5
D) 2,4 E) 1,8

34. En la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros, si CE = 2, AF = 5 y DG = 4, calcular EG.



A) 8 B) 10 C) 12 D) 14 E) 16

35. En la figura, $\overline{AB}$ representa una escalera apoyada en una pared. Si A cae hasta la mitad de su altura y B se aleja 2 m. ¿cuánto mide la escalera?

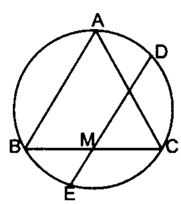


A) 5 B) 10 C) $2\sqrt{2}/3$
D) $\sqrt{35/3}$ E) $\sqrt{7}$

36. En un triángulo ABC, recto en C, se traza la altura $\overline{CH}$ y $\overline{HF} \perp \overline{BC}$. Calcular BF, si AB = c; BC = a.

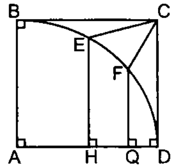
A) $\frac{c^3}{a^2}$ B) $\frac{a^3}{c^2}$ C) $\frac{\sqrt{a^3}}{c}$
D) $\sqrt{\frac{a}{c}}$ E) $a\sqrt{\frac{c}{a}}$

37. En la figura adjunta, el triángulo ABC es equilátero, M es punto medio del lado $\overline{BC}$ y D es punto medio del arco $\overset{\frown}{AC}$. Si x e y representan las longitudes de los segmentos $\overline{DM}$ y $\overline{ME}$ respectivamente, hallar x/y.



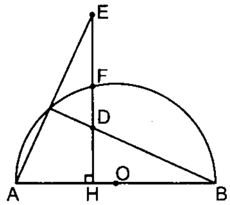
A) 5/3 B) 2 C) 4
D) 8/3 E) 7/3

38. Del gráfico, calcular el lado del cuadrado ABCD, si CE = CF, EH = 6, FQ = 4 y A es centro del arco $\widehat{BD}$.



A) 10 B) 8 C) $2\sqrt{13}$
D) $2\sqrt{6}$ E) 9

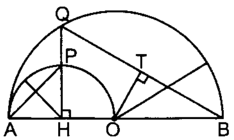
39. En el gráfico, O centro; EF = 3; FD = 2. Calcular DH.



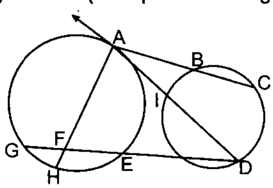
A) 3 B) 2,5 C) 4
D) 5 E) 3,5

40. En el gráfico adjunto, calcular OT, si AP = 4.

A) 4
B) 3
C) 5
D) $2\sqrt{2}$
E) $2\sqrt{3}$



41. Calcular FA, si AB = 6; BC = ED = 8; ID = 5; GF = 4 y FH = 3 (A es punto de tangencia).



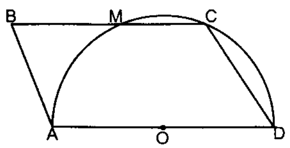
A) 10 B) 7 C) 6 D) 8 E) 5

42. Se tiene un cuadrado ABCD, en el arco $\widehat{AD}$ se considera el punto E, tal que AE + EC = $4\sqrt{2}$. Calcular BE.

A) 2 B) 4 C) $2\sqrt{2}$
D) 6 E) 8

43. En la figura mostrada, ABCD es un paralelogramo, BM = 4; MC = 6 y O es centro de la semicircunferencia. Calcular AB.

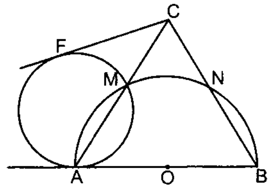
A) $2\sqrt{2}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{5}$
D) 4
E) $4\sqrt{5}$



44. El diámetro $\overline{AB}$ de una semicircunferencia se prolonga hasta C y se traza la secante CDE, BC = 2, DE = 1, m$\widehat{AE}$ = 3(m∠C). Calcular DC.

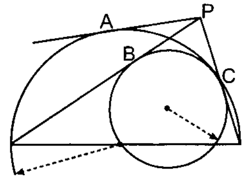
A) 3 B) 1 C) 4
D) 2 E) 3,5

45. En el gráfico AC = AB, O es centro, A y F son puntos de tangencia. Calcular $\frac{FC}{MN}$.



A) 2 B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) 3 E) 4

46. En la figura, A, B y C son puntos de tangencia, PA = 8, PC = 6. Calcular PB.



A) 10 B) $2\sqrt{5}$ C) 5
D) $5\sqrt{2}$ E) 4

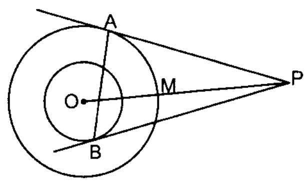
47. Dado un triángulo rectángulo ABC (recto en B), sobre su lado $\overline{AC}$ se considera un punto O; por el vértice C, se traza una perpendicular $\overline{CD}$ a la prolongación de $\overline{BO}$, de manera que $\overline{CO}$ sea bisectriz del ∠BCO. Calcular AB, si (AO)(AC) = 32

A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) 8
D) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ E) $4\sqrt{3}$

48. Las diagonales perpendiculares de un trapecio miden 8 y 15; la base menor mide 6. Calcular la medida de la base mayor.

A) 14 B) 12 C) 13
D) 11 E) 15

49. Calcular AB, sabiendo que las circunferencias son concéntricas, los radios son 1 y 2 y MP = 1 (O: centro).



A) $\frac{1}{3}(2\sqrt{8}+\sqrt{5})$ B) $\frac{1}{3}(2\sqrt{5}+\sqrt{8})$

C) $\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+\sqrt{2})$ D) $\frac{1}{2}(3\sqrt{5}+2\sqrt{8})$

E) $\frac{1}{2}(8\sqrt{2}+\sqrt{5})$

50. Una hoja rectangular ABCD, de papel se dobla de modo que A coincida con C; AB = $\sqrt{3}$; AD = 3. Calcular la longitud del doblez.

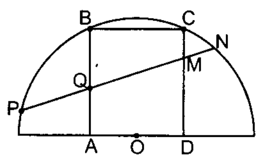
A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 2,5 E) $\sqrt{5}$

51. En un trapecio rectángulo ABCD, la altura $\overline{AB}$ mide 13. Con diámetro $\overline{AD}$ se traza la semicircunferencia que corta en Q a $\overline{CD}$, la tangente $\overline{BQ}$ corta a $\overline{AC}$ en P, AP = 12, PC = 3. Calcular PQ.

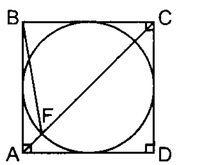
A) 2,5 B) 3,5 C) 4
D) 3 E) 5

52. En la figura, ABCD es un rectángulo; BC = QA, PQ = 3; QM = 8; MN = 1. Calcular CM.

A) 1
B) 2
C) 1,5
D) 2,5
E) 0,5

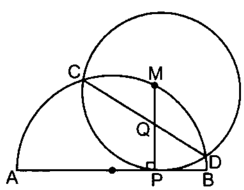


53. Si ABCD es un cuadrado de lado a, calcular BF.



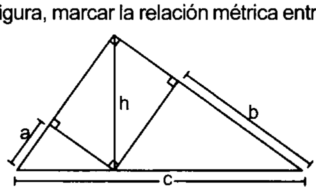
A) $a\sqrt{3}/2$ B) $a\sqrt{7}/2$ C) $a\sqrt{3}/4$
D) $a\sqrt{5}/4$ E) $a\sqrt{2}/2$

54. Si $\overline{AB}$ es diámetro, M es centro y PQ = 4, calcular QM.



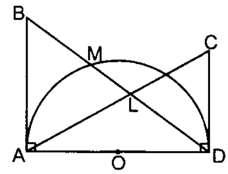
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

55. En la figura, marcar la relación métrica entre h, a, b y c.



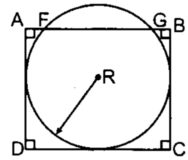
A) h = ab/c B) h = $\sqrt{abc}$
C) h = a + b − c D) $h^3 = \frac{a^2b^2}{c}$
E) h^3 = abc

56. Del gráfico, O es centro, AB = 15; LD = CD = 10. Calcular ML.



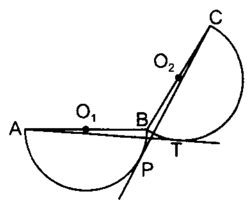
A) 6 B) 8 C) 9
D) 7 E) 5

57. Calcular R, si AD = 18 y FG = 24.



A) 6 B) 10 C) 12
D) 13 E) 15

58. Del gráfico, calcular AC, si $CP^2 + AT^2 = 338\ m^2$ ($O_1 \wedge O_2$: centros)



A) $13\sqrt{2}$ m B) $2\sqrt{13}$ m C) $2\sqrt{17}$ m
D) 13 m E) $5\sqrt{13}$ m

59. En un rectángulo ABCD, se ubica el punto P en $\overline{BC}$, tal que m∠APD = 90, BP = 4 y PC = 9. Calcular la distancia entre las proyecciones de B y C sobre $\overline{AP}$ y $\overline{PD}$ respectivamente.

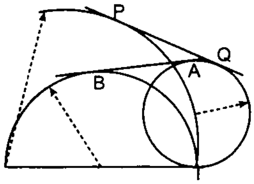
A) 7 B) 8 C) $\sqrt{61}$
D) 6,5 E) $\sqrt{51}$

60. En un cuadrante AOB de centro O, por un punto M del arco $\overset{\frown}{AB}$ se traza la paralela a la cuerda $\overline{AB}$ que interseca a la prolongación de $\overline{OA}$ en A' y a la prolongación de $\overline{OB}$ en B'. Calcular AB, si MA' = a y MB' = b.

A) $2\sqrt{ab}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\sqrt{a^2+b^2}$ E) $2\sqrt{a^2+b^2}$

61. Calcular PQ, si AB = a (P, Q, T, A y B son puntos de tangencia).



A) 2a B) a C) $a\sqrt{2}$
D) 4a E) 2a

62. Las dimensiones de una hoja con forma rectangular son a y b (b > a). Dicha hoja se dobla de tal manera que dos vértices opuestos coinciden. Calcular la longitud del doblez.

A) $\dfrac{b\sqrt{a^2+4b^2}}{2a}$ B) $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ C) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$

63. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B; se ubica los puntos L y M en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, tal que m∠BLM = m∠BCA, la proyección de $\overline{LM}$ sobre $\overline{AC}$ mide 8 cm. Calcular $\dfrac{1}{BL^2}+\dfrac{1}{BM^2}$.

A) 1/16 B) 1/4 C) 1/9
D) 1/8 E) 1/3

64. Se tiene un paralelogramo ABCD, en $\overline{BC}$ se ubica un punto M de modo que A, B, M y D pertenecen a una circunferencia de diámetro $\overline{AD}$. Calcular AB, si BM = 14 y MC = 4.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

65. En la prolongación de $\overline{BC}$ de un cuadrado ABCD se ubica el punto P y en $\overline{AB}$ el punto M, tal que $\overline{MP} \cap \overline{CD} = \{L\}$, m∠PMD = 45°, CL = 1 y LD = 5. Calcular el producto de MP con la distancia de B a $\overline{MP}$.

A) 36 B) 27 C) 32
D) 40 E) 25

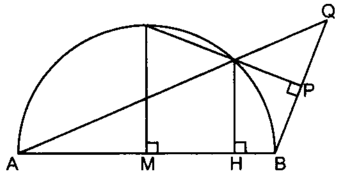
66. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH; en los triángulos AHB y BHC se traza las alturas HM y HN respectivamente; luego en los triángulos AMH y HNC se traza las alturas MP y NQ respectivamente, tal que AP = a, QC = b y AC = c. Indicar la relación correcta.

A) $\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{a}$ B) $\sqrt{c}=\sqrt{b}+\sqrt{a}$

C) $a=\dfrac{c^2}{b}$ D) $c=\sqrt{ab}$

E) $\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$

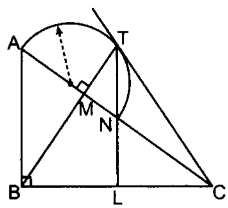
67. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la semicircunferencia. Si AB = 2R, HB = b, MB = a, calcular PQ.



A) Ab(2R − a) B) $(2R-a)\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ C) 2R(a − b)

D) $\dfrac{a-b}{R}$ E) $\dfrac{\sqrt{ab}}{2R}$

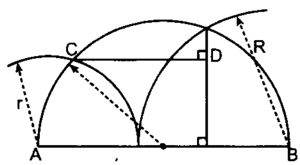
68. Según el gráfico, calcular BL, si AM = a y NC = b (T es punto de tangencia).



A) $\sqrt{a^2+b^2}$ B) $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$ C) $\sqrt{a(a+b)}$

D) $\sqrt{ab}$ E) $\sqrt{b(a+b)}$

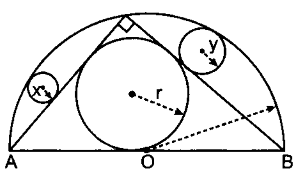
69. Según el gráfico, calcular CD en función de R y r.



A) $\dfrac{R-r}{Rr}$ B) $2\sqrt{Rr}$ C) $\dfrac{Rr}{R-r}$

D) $\dfrac{Rr}{R+r}$ E) $\dfrac{2Rr}{R+r}$

70. Según el gráfico, calcular r en función de x e y, si x e y tienen valores máximos.



A) $2\sqrt{xy}$ B) $\dfrac{x+y}{2}$ C) $2\sqrt{xy}$

D) $2\sqrt{2xy}$ E) $\dfrac{x+y}{3}$

71. En un triángulo ABC, (AB)(BC) = 36 m². Se trazan la mediana $\overline{BM}$ y la bisectriz interior $\overline{BD}$. Si BD = MD. Hallar AC.

A) 6 m B) $6\sqrt{2}$ m C) 12 m
D) $12\sqrt{2}$ m E) $6\sqrt{3}$ m

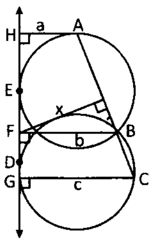
72. En un trapecio ABCD se tiene que las bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 6 y 8 cm. En las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se ubican los puntos P y Q, tal que CP = 2PA y BQ = 2QD. Calcular PQ.

A) 8/3 cm B) 11/3 cm C) 4/3 cm
D) 13/3 cm E) 10/3 cm

73. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura BH, las bisectrices exteriores de vértices A y C intersecan a la prolongación de $\overline{BH}$ en P y Q respectivamente. Si AB = c, BC = a y AC = b (a > c), calcular PQ.

A) $\dfrac{2abc}{(a-c)^2}$ B) $\dfrac{ac(a-c)}{(b-a)(b-c)}$ C) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{b}$
D) $\dfrac{abc}{\sqrt{ac}(a+c)}$ E) $\dfrac{\sqrt{ac}(a-c)}{a+b+c}$

74. En el gráfico, AH = a, BF = b y CG = c. Calcular x (D y E son puntos de tangencia).

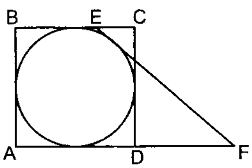


A) $\sqrt[3]{abc}$ B) $\dfrac{ac}{2b}$ C) $\dfrac{a^2+c^2}{2b}$
D) $\dfrac{\sqrt{b}}{2}(\sqrt{a}+\sqrt{c})$ E) $\sqrt{\dfrac{b}{2}(a+c)}$

75. Sea ACB un triángulo rectángulo en C, cuya hipotenusa mide d. Se divide la hipotenusa en tres segmentos de igual longitud por medio de los puntos M y N. Hallar la suma de los cuadrados de las medidas de los lados del triángulo CMN.

A) $d^2/3$ B) $2d^2/3$ C) d^2
D) $4d^2/3$ E) $5d^2/3$

76. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD, si EC = 2 m y DF = 3 m.



A) 2 m B) 3 m C) 4 m D) 6 m E) 9 m

77. En un triángulo ABC, con diámetro $\overline{AB}$, se traza la semicircunferencia que interseca a $\overline{AC}$ en F. En el arco BF se ubica un punto E tal que la tangente trazada por E es perpendicular a $\overline{FC}$ en D. Calcular ED, si AD = 8 cm y BE = 3 cm.

A) 5 cm B) $\sqrt{2}$ cm C) $2\sqrt{2}$ cm
D) 4 cm E) 6 cm

78. Se tiene el trapecio ABCD (BC//AD), tal que AB = 9; BC = 6; CD = 13 y AD = 160. Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de la bases.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 9 E) 11,5

79. En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior $\overline{BD}$ (D en $\overline{AC}$) y la mediana $\overline{BM}$, tal que BD = DM. Calcular $\overline{AC}$; si (AB)(BC) = 144.

A) 12 B) 16 C) 18 D) 20 E) 24

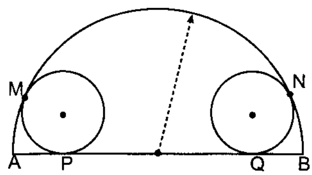
80. En un triángulo ABC, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$ relativa a la hipotenusa AC; luego se traza $\overline{HP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{HQ} \perp \overline{BC}$. Si AP = 1 y CQ = 8, calcular la longitud de AC.

A) $5\sqrt{5}$ B) $4\sqrt{5}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $7\sqrt{5}$

81. Las dimensiones de una hoja con forma rectangular son a y b (b > a). Dicha hoja se dobla de tal manera que dos vértices opuestos coinciden. Calcular la longitud del doblez.

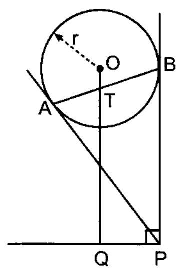
A) $\dfrac{b\sqrt{a^2+4b^2}}{2a}$ B) $\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$ C) $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$
D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{a\sqrt{a^2+b^2}}{2b}$

82. Según el gráfico; M, P, Q y N son puntos de tangencia, si AP = a, PQ = b, QB = c y $m\overset{\frown}{MN} = 90°$, calcular la relación entre a, b y c.



A) 2b = a + c B) $b^2 = a^2 + c^2$ C) $b = \sqrt{ac}$
D) $\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}$ E) $b = 2\sqrt{ac}$

83. Según el gráfico, A y B son puntos de tangencia, OT = 2 y TQ = 6, calcula r.



A) 3 B) 4 C) 5
D) 7 E) 6

84. Se tienen dos circunferencias tangentes exteriores cuyos radios miden 5 m y 3 m. Una recta secante interseca a la circunferencia mayor en los puntos A y B, y a la circunferencia menor en los puntos C y D. Si AB = 6 m y CD = 3,6 m, hallar BC.

A) $(\sqrt{61{,}4}-4{,}8)$ m B) $(\sqrt{61{,}4}-3{,}8)$ m
C) $(\sqrt{61}-4{,}8)$ m D) $(\sqrt{61}-3{,}8)$ m
E) $(\sqrt{61}-4)$ m

85. Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r y 2r. En la circunferencia mayor se ubican los puntos A; B y C, tal que AB = BC = AC. En la circunferencia menor se ubica el punto P próximo a B. Si $(AP)^2+(BP)^2+(CP)^2=15$, calcular r.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $\sqrt{5}$

86. En un triángulo ABC, sobre $\overline{BC}$ se marcan M y N, tal que BM = MN = NC. Si AB = 7, AC = 8 y BC = 9, calcular AM^2+AN^2.

A) 77 B) 66 C) 44
D) 88 E) 55

87. Los lados AB, BC y AC de un triángulo miden 8 m, en una fila y 12 m, respectivamente. Por B se traza una ceviana BE que divide al lado AC en dos segmentos, AE = 9 m y EC = 3 m. Calcular BE.

A) 4 m B) 5 m C) 6 m
D) 7m E) 8 m

88. Se tiene el triángulo rectángulo ABC, recto en B, la altura $\overline{BH}$ y las perpendiculares $\overline{HF}$ y $\overline{HE}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si AF = a, EC = b y AC = c, hallar la relación entre las longitudes a, b y c.

A) $c^{2/3}=a^{2/3}+b^{2/3}$ B) $c^{1/3}=a^{1/3}+b^{1/3}$
C) $c^3=a^3+b^3$ D) $c^{1/3}=a^{1/3}-b^{1/3}$
E) $c=a+b$

89. En el triángulo rectángulo ABC, recto en A, los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 dividen a la hipotenusa en cinco partes congruentes. Si $(AP_1)^2=256$ y $(AP_4)^2=160$, hallar BC.

A) 12,7 B) 15,7 C) 18,7
D) 21,7 E) 24,7

90. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se trazan las medianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$; por B se traza una recta paralela a $\overline{AC}$. Las prolongaciones de $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ intersecan a dicha recta en P y Q respectivamente. Calcular $(AP)^2+(CQ)^2$, si AC = 12.

A) 720 B) 630 C) 540
D) 480 E) 640

91. En las siguientes proposiciones, indicar si es verdadero (V) o falso (F):

I. La proyección de un segmento sobre una recta siempre es un segmento.
II. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.
III. El triángulo cuyos lados miden: $\sqrt{a-b}$; $\sqrt{a-b}$ y $\sqrt{2a}$ es un triángulo rectángulo.

A) VVV B) VVF C) FVV
D) FFF E) FVF

92. La suma de los cuadrados de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo es 1250. Calcular la medida de la hipotenusa.

A) 20 B) 24 C) 25 D) 29 E) 30

93. En un trapezoide, tres lados consecutivos miden 6 m, 8 m y 10 m. Si las diagonales se interceptan perpendicularmente, calcular la longitud del cuarto lado.

A) 2 m B) 3 m C) 4 m
D) 5 m E) $6\sqrt{2}$ m

94. Calcular la medida de la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que la suma de los cuadrados de las medianas es igual a 54.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 9 E) 7

95. Las bases de un trapecio, isósceles miden 7 y 25. Determinar la diagonal del trapecio, sabiendo además que los lados no paralelos miden 15.

A) 25 B) 16 C) 18 D) 20 E) 17

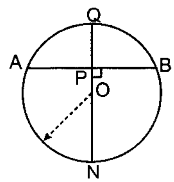
96. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. En una circunferencia se trazan las cuerdas PQ y RS que se intersecan en M; entonces: PQ(MQ) = RS(MS).
II. En una circunferencia se traza por el punto P exterior la tangente PT y la secante PQR; entonces $(PT)^2$ = PQ(QR)
III. Si las prolongaciones de los lados AB y DC de un cuadrilátero inscriptible ABCD se intersecan en P; entonces: PA(PB) = PD(PC).

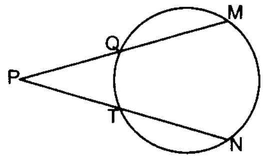
A) FFFF B) FFV C) FVV
D) VVF E) FVF

97. Si QN = 10 y QP = 2, calcular AB.

A) $4\sqrt{2}$
B) 8
C) $3\sqrt{2}$
D) 6
E) $7\sqrt{2}$

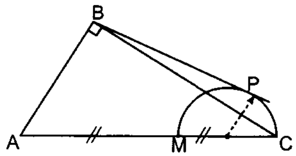


98. De la figura, calcular TN, si PQ = 4, QM = 6 y TP = 2



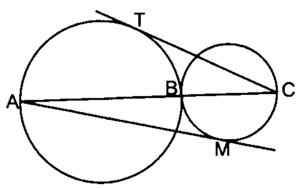
A) 16 B) 15 C) 18
D) 17 E) 15,5

99. Calcular BP; Si AB = 3; AC = 5 y P es punto de tangencia.



A) 4 B) $2\sqrt{2}$ C) 2
D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

100. Calcular CT, si AM = 12; AC = 13; B, M y T son puntos de tangencia.



A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

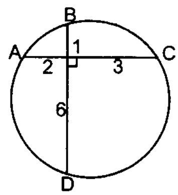
101. En un trapecio isósceles, calcular la medida de la proyección de una de las diagonales sobre la base mayor, si la suma de las medidas de sus bases es 12.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

102. Desde el punto P, exterior a una circunferencia, se traza una tangente y una secante. La secante interseca a la circunferencia en A y B tal es que AB = 3PA, mAB = 120. Si el radio de la circunferencia mide 6, calcular la medida del segmento cuyos extremos son P y el punto de tangencia.

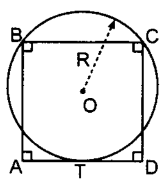
A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $4\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

103. Calcular el radio de la circunferencia.



A) $5\sqrt{2}$ B) 2,5 C) 4
D) $0,5\sqrt{2}$ E) $2,5\sqrt{2}$

104. Si ABCD es un cuadrado, AB = 6 y T es punto de tangencia, calcular R.



A) 4 B) 5 C) 6 D) $5\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{2}$

CLAVES

1. B	14. B	27. B	40. D	53. A	66. B	79. B	92. C
2. E	15. D	28. D	41. D	54. D	67. B	80. A	93. E
3. C	16. D	29. C	42. B	55. C	68. D	81. E	94. B
4. A	17. B	30. B	43. C	56. A	69. E	82. B	95. D
5. E	18. B	31. E	44. C	57. B	70. D	83. B	96. B
6. D	19. D	32. C	45. C	58. A	71. C	84. A	97. B
7. B	20. A	33. B	46. D	59. C	72. E	85. A	98. C
8. A	21. D	34. B	47. A	60. D	73. B	86. A	99. B
9. B	22. C	35. D	48. D	61. C	74. D	87. E	100. B
10. B	23. B	36. B	49. A	62. E	75. B	88. A	101. D
11. D	24. D	37. E	50. C	63. A	76. D	89. E	102. D
12. D	25. E	38. C	51. C	64. B	77. C	90. A	103. E
13. D	26. C	39. C	52. A	65. B	78. B	91. C	104. B

Relaciones métricas en triángulos oblicuángulos

capítulo 11

Jakob Steiner nació el 18 de marzo de 1796 en la villa de Utzenstorf, Cantón de Berna y murió el 1 de abril de 1863. A los dieciocho años fue alumno de Johann Heinrich Pestalozzi y luego estudió en Heidelberg. Posteriormente, viajó a Berlín donde se ganó la vida dando clases. Allí conoció a Crelle quien, motivado por sus habilidades y las de Niels Henrik Abel, fundó el periódico *Journalfür die reine undangewandteMathematik*.

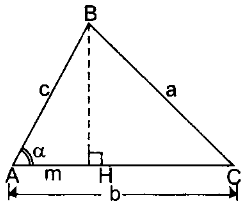
La obra matemática de Steiner se centró en la geometría, que desarrolló en el campo sintético, excluyendo totalmente la analítica, que odiaba, y que se decía consideraba una desgracia para la geometría aun cuando se obtuvieran iguales o mejores resultados. En su campo, sobrepasó a todos sus contemporáneos. Sus investigaciones se distinguen por su generalización, la riqueza de sus fuentes y el rigor de sus demostraciones. En su *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander*, Steiner sentó las bases de la geometría pura moderna, donde presenta las formas geométricas y la correlación entre ellas, en lo que él mismo llamó «geometría proyectiva». Otras investigaciones importantes de Steiner se relacionaron con máximos y mínimos.

Fuente: Wikipedia

TEOREMA DE EUCLIDES

1.° Caso. En todo triángulo, el cuadrado de la longitud del lado que se opone a un ángulo agudo es igual a la suma de cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de uno de ellos por la longitud de la proyección del otro sobre él.

Sea ABC, el triángulo, donde $\alpha < 90°$. $\overline{AH}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AC}$.



Entonces: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bm}$

Demostración:

Por el teorema de Pitágoras:

$\triangle BHC \Rightarrow a^2 = (BH)^2 + (HC)^2 \Rightarrow a^2 = (BH)^2 + (b - m)^2$ ...(1)

$\triangle AHB \Rightarrow (BH)^2 = c^2 - m^2$ ...(2)

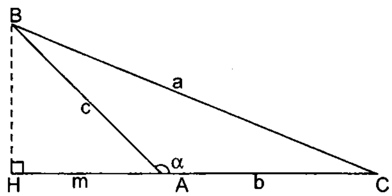
Reemplazando (2) en (1): $a^2 = c^2 - m^2 + (b - m)^2$

De donde, efectuando y ordenando:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bm.$

2. ° Caso. En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado de la longitud del lado opuesto al ángulo obtuso es igual a la suma de cuadrados de los dos, más el doble o producto de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Consideremos el $\triangle ABC$, obtuso en A.



Luego: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2 + 2bm}$

$\overline{AH}$: proyección de $\overline{AB}$, sobre $\overline{AC}$.

Demostración:

Con el teorema de Pitágoras:

$\triangle BHC \Rightarrow a^2=(BH)^2+(HC)^2 \Rightarrow a^2=(BH)^2+(m+b)^2$...(1)

$\triangle BHA \Rightarrow (BH)^2 = c^2 - m^2 + (m + b)^2$ ...(2)

(2) en (1): $a^2 = c^2 - m^2 + (m + b)^2$

$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 + 2bm$

TEOREMA DE HERÓN

En todo triángulo, la longitud de una altura es igual al doble de la inversa de la longitud del lado sobre el cual cae, por la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y su diferencia con la longitud de cada lado.

Consideremos los gráficos adjuntos, en cada caso, el triángulo en mención es ABC.

El semiperímetro p: $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

La fórmula, para el teorema de Herón, con relación a la altura $\overline{BH}$ es:

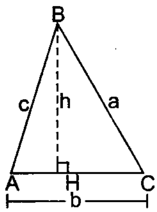


Fig. 1

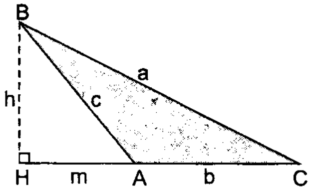


Fig. 2

$$\boxed{h = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Demostración:

Para ambas figuras, por el teorema de Pitágoras:

$h^2 + m^2 = c^2 \Rightarrow h^2 = c^2 - m^2 \vee$

$h^2 = (c + m)(c - m)$ ...(1)

Según el teorema de Euclides:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Fig. 1} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bm \Rightarrow m = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2b} \\ \text{Fig. 2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2bm \Rightarrow m = \dfrac{a^2-b^2-c^2}{2b} \end{array}\right\}\text{...(2)}$$

Sustituyendo en (1), la primera de las expresiones indicadas en (2):

$$h^2 = \left(c + \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{b^2+c^2-a^2}{2b}\right)$$

$$h^2 = \frac{(2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2)}{4b^2}$$

o mejor; al notar los desarrollos de binomios suma y diferencia:

$$h^2 = \frac{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}{4b^2}$$

cada expresión entre corchetes es una diferencia de cuadrado. Usando los equivalentes:

$$h^2 = \frac{(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)}{4b^2} \text{...(a)}$$

Teniendo en cuenta que $a + b + c = 2p$

Se obtienen: $b + c - a = 2p - 2a$

$a + b - c = 2p - 2c$

$a + c - b = 2p - 2b$

Reemplazamos en (a):

$$h^2 = \frac{(2p)(2p-2a)(2p-2c)(2p-2b)}{4b^2}$$

Es decir:

$$h^2 = \frac{16p(p-a)(p-b)(p-c)}{4b^2}$$

De donde: $h = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

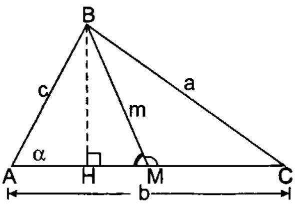
Nota

Los pasos a seguir para la demostración son análogos si se reemplaza la segunda expresión de m, dada por (2) en (1).

TEOREMA DE LA MEDIANA

En todo triángulo, la suma de cuadrados de las longitudes de dos lados es igual a dos veces el cuadrado de la longitud de la mediana hacia el tercer lado, más la mitad del cuadrado de la longitud de dicho lado.

Sea $\overline{BM}$ una mediana del triángulo ABC:



Entonces: $\boxed{a^2 + c^2 = 2m^2 + \dfrac{b^2}{2}}$

Demostración:

Por el teorema de Euclides:

$\triangle ABM \Rightarrow$ (1.^{er} caso, para el $\angle AMB$):

$c^2 = m^2 + (AM)^2 - 2AM(HM)$

$\triangle BM \Rightarrow$ (2.° caso, para el $\angle BMC$):

$a^2 = m^2 + (MC)^2 + 2MC(HM)$

Efectuando la suma miembro a miembro:

$$a^2 + c^2 = 2m^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{2}\right)HM + 2\left(\frac{b}{2}\right)HM$$

De donde: $a^2 + c^2 = 2m^2 + \dfrac{b^2}{2}$

TEOREMA DE LA PROYECCIÓN DE LA MEDIANA

En todo triángulo, la diferencia de cuadrados de las longitudes de dos lados es igual al doble producto del tercero y la proyección de la mediana relativa a él.

Demostración:

Para el anterior gráfico, efectuando la diferencia de las expresiones obtenidas en (1), teniendo en cuenta que:

$AM = MC = \dfrac{b}{2}$

$a^2 - c^2 = 2MC(HM) + 2AM(HM)$

$a^2 - c^2 = 2\dfrac{b}{2}(HM) + 2\dfrac{b}{2}(HM)$

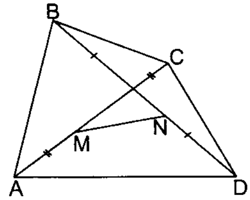
$\therefore \boxed{a^2 - c^2 = 2b(HM)}$

($\overline{HM}$ es la proyección de $\overline{BM}$ sobre $\overline{AC}$)

TEOREMA DE EULER

En todo cuadrilátero, la suma de los cuadrados de las longitudes de los lados es igual a la suma de cuadrados de las longitudes de las diagonales, más el cuadrado de la distancia entre los puntos medios de las diagonales.

Sea el cuadrilátero ABCD; donde M es punto medio de $\overline{AC}$ y N es punto medio de $\overline{BD}$.

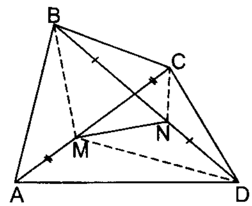


Entonces:

$$\boxed{(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(MN)^2}$$

Demostración:

Por el teorema de la mediana, anteriormente demostrado:



$\triangle BMD$: $(BM)^2 + (MD)^2 = 2(MN)^2 + \dfrac{(BD)^2}{2}$ ...(1)

$\triangle ABC$: $(AB)^2 + (BC)^2 = 2(BM)^2 + \dfrac{(AC)^2}{2}$ ...(2)

$\triangle ACD$: $(CD)^2 + (AD)^2 = 2(MD)^2 + \dfrac{(AC)^2}{2}$ ...(3)

Sumando las expresiones (2) y (3), miembro a miembro:

$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = 2(BM^2 + MD^2) + (AC)^2$

Con lo de (1) reemplazamos:

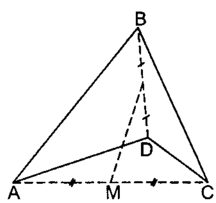
$$(AB)^2+(BC)^2+(CD)^2+(AD)^2=2\left(2(MN)^2+\frac{(BD)^2}{2}\right)+(AC)^2$$

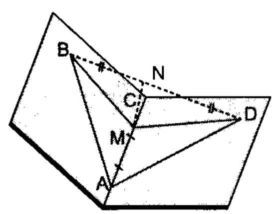
Efectuando y ordenando:

$(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = (AC)^2 + (BD)^2 + 4(MN)^2$

Nota

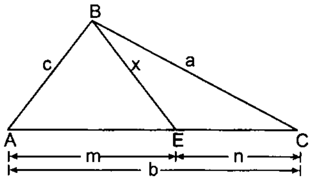
La propiedad también es válida para los cuadriláteros no convexo y alabeado.





TEOREMA DE STEWART

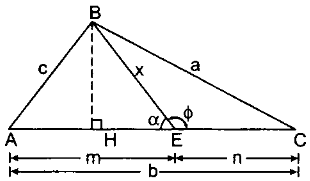
En todo triángulo, la longitud de una ceviana interior, puede evaluarse con la siguiente expresión.



$\overline{BE}$: ceviana interior del $\triangle ABC$

$$\boxed{a^2m + c^2n = x^2b + mnb}$$

Demostración:



Se traza la altura $\overline{BH}$. Por el teorema de Euclides:

$\triangle ABE$ (para $\alpha < 90°$):

$c^2 = m^2 + x^2 - 2m(HE)$ ...(1)

$\triangle BEC$ (para $\phi > 90°$):

$a^2 = n^2 + x^2 + 2n(HE)$ ...(2)

Ahora, multiplicando la expresión (1) por n y (2) por m y efectuando la suma miembro a miembro:

$c^2n + a^2m = m^2n + mn^2 + x^2n + x^2m - 2mn(HE) + 2mn(HE)$

Es decir: $a^2m + c^2n = mn\,(m+n) + x^2(n + m)$

pero: $m + n = b$

Entonces: $a^2m + c^2n = mnb + x^2b$

NATURALEZA DE UN TRIÁNGULO

Sean a, b y c, longitudes de los lados de un triángulo ABC, con el lado mayor de longitud a. Entonces, para saber si ABC es un triángulo rectángulo, acutángulo u obtusángulo, se comparan a^2 y $(b^2 + c^2)$.

(I) Si $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC$, es recto en A.

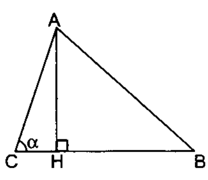
(II) Si $a^2 < b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC$, es acutángulo, con el $\angle A$ agudo.

(III) Si $a^2 > b^2 + c^2 \Rightarrow \triangle ABC$, es obtusángulo, con el $\angle A$ obtuso.

Ejemplos:

1. En un triángulo ABC, AB = BC, se traza la altura $\overline{AH}$ (H en $\overline{BC}$). Si BC(CH) = 18, hallar AC.

   Resolución:



   Datos: AB = BC; BC(CH) = 18

   Por al teorema de Euclides ($\alpha < 90°$):

   $(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2 - 2BC(CH)$

   Cancelando $(AB)^2$ y $(BC)^2$:

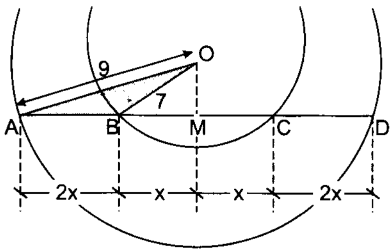
   $0 = (AC)^2 - 2BC(CH)$

   $\Rightarrow (AC)^2 = 2BC(CH)$

   Del dato: $(AC)^2 = 2(18)\ \therefore\ AC = 6$

2. A dos circunferencias concéntricas de 7 m y 9 m de radio, se traza una secante tal que la cuerda intersecada por la circunferencia mayor resulta dividida en tres partes iguales por la otra circunferencia. Calcular la longitud de dicha cuerda.

   Resolución:



   Del gráfico: AB = BC = CD = 2x

   $\triangle AOB$, obtuso en B. Por el teorema de Euclides:

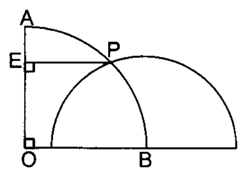
   $(AO)^2 = (AB)^2 + (BO)^2 + 2(AB)(BM)$

   $\Rightarrow 9^2 = (2x)^2 + 7^2 + 2(2x)(x)$

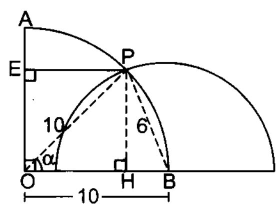
   $\Rightarrow 32 = 8x^2 \Rightarrow x = 2$

   Luego: AD = 6x $\quad\therefore$ AD = 12 m

3. En la figura, O y B son centros. Los radios miden 6 y 10. Hallar PE.



   Resolución:



   Se proyecta $\overline{PE}$, sobre $\overline{OB}$.

   $\Rightarrow$ OH = PE.

   Luego, se trazan los radios.

   OP = 10 y BP = 8

   En el $\triangle OPB$, por el teorema de Euclides ($\alpha < 90°$):

   $(PB)^2 = (OP)^2 + (OB)^2 - 2(OB)(OH)$

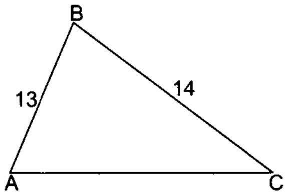
   $\Rightarrow 6^2 = 10^2 + 10^2 - 2(10)(OH)$

   De donde: OH = 8,2

   $\therefore$ PE = 8,2

4. En un $\triangle ABC$, AB = 13; BC = 14 y el $\angle B$ es obtuso. Hallar el mínimo valor entero de AC.

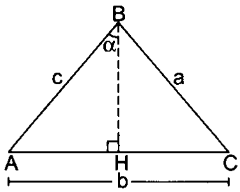
Resolución:



Si el $\angle B$ es obtuso, sabemos que se debe cumplir:
$(AC)^2 > 13^2 + 14^2$
$(AC)^2 > 365 \Rightarrow AC > 19{,}10$
Por lo tanto el mínimo valor entero de AC es 20.

5. En un triángulo ABC, hallar la medida del $\angle A$, sabiendo que entre las longitudes de sus lados se cumple, $a^2 = b^2 + c^2 - bc$

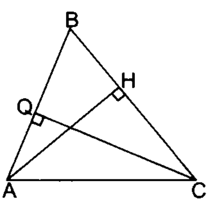
Resolución:



Dato: $a^2 = b^2 + c^2 - bc$ ...(1)
Teorema de Euclides:
$a^2 = b^2 + c^2 - 2b(AH)$ ...(2)
De (1) y (2): $b^2 + c^2 - bc = b^2 + c^2 - 2b(AH)$
$\Rightarrow AH = \frac{c}{2}$
Luego, en el $\triangle AHB$: $\alpha = 30°$ y
$\therefore\ m\angle A = 60°$

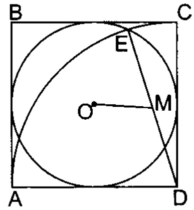
6. En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AH}$ y $\overline{CQ}$. Si $AB(AQ) = 24\ m^2$ y $BC(CH) = 25\ m^2$. Hallar AC.

Resolución:

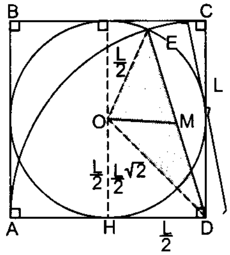


Teorema de Euclides:
$\angle A \Rightarrow (BC)^2 = (AB)^2 + (AC)^2 - 2AB(AQ)$ ...(1)
$\angle C \Rightarrow (AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2 - 2CB(CH)$ ...(2)
Sumando (1) y (2), miembro a miembro.
$(BC)^2 + (AB)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + 2(AC)^2 - 2AB(AQ) - 2CB(CH)$
Cancelando términos iguales y simplificando.
$(AC)^2 = AB(AQ) + CB(CH)$
Con los datos: $(AC)^2 = 24 + 25$ $\therefore\ AC = 7$ m

7. L es longitud de lado del cuadrado ABCD, de centro O, D es centro del arco AEC y EM = MD. Hallar OM.



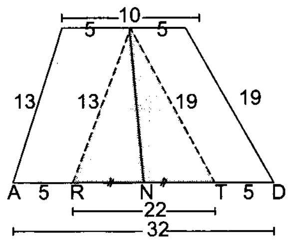
Resolución:



El radio de la circunferencia mide: $\frac{L}{2}$ y el del cuarto de circunferencia, L.
En el $\triangle EOD$, por el teorema de la mediana
$(OE)^2 + (OD)^2 = 2(OM)^2 + \frac{ED^2}{2}$
De donde: $OM = \frac{L\sqrt{2}}{4}$

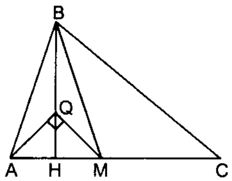
8. En un trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$; AB = 13, BC = 10, CD = 19 y AD = 32. Hallar la distancia sobre los puntos medios de las bases.

Resolución:



Sean M y N, puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente.
Trazamos, $\overline{MR} \parallel \overline{AB}$ y $\overline{MT} \parallel \overline{CD}$.
Luego: ABMR y MCDT son Paralelogramos
$\Rightarrow$ MR = 13; MT = 19: AR = TD = 5 y RT = 22
En el $\triangle RMT$, con el teorema de la mediana:
$13^2 + 19^2 = 2(MN)^2 + \frac{(22)^2}{2}$
$\therefore\ MN = 12$

9. En la figura, $BC^2 - AB^2 = 144$; AM = MC y $m\angle AQM = 90°$. Hallar QM.



Resolución:

En el $\triangle AQM$, por relación métrica: $(QM)^2 = AM(HM)$.

Pero: $AM = \frac{AC}{2}$. Entonces:

$$(QM)^2 = \frac{AC}{2}(HM) \Rightarrow (QM)^2 = \frac{AC(HM)}{2} \quad ...(1)$$

De otro lado, en el $\triangle ABC$, $\overline{HM}$ es proyección de la mediana $\overline{BM}$, sobre $\overline{AC}$.

Luego, por el teorema de dicha proyección:
$(BC)^2 - (AB)^2 = 2AC(HM)$.

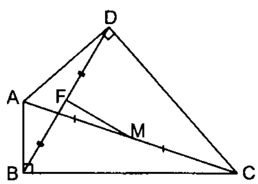
Con el dato: $144 = 2AC(HM) \Rightarrow AC(HM) = 72$

Reemplazando esto último, en (1): $\therefore\ QM = 6$

10. En un trapezoide ABCD, $m\angle B = m\angle D = 90°$, $AC = 17$ y $BD = 15$; M es punto medio de $\overline{AC}$ y F, de $\overline{BD}$. Hallar MF.

Resolución:

$AC = 17$; $BD = 15$



Por el teorema de Euler:

$$\underbrace{(AB)^2+(BC)^2}+\underbrace{(CD)^2+(DA)^2}=(AC)^2+(BD)^2+4(MF)^2$$

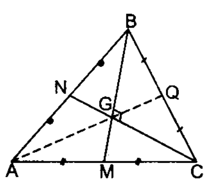
$$\Rightarrow (AC)^2 + (AC)^2 = (AC)^2+(BD)^2+4(MF)^2$$

De donde: $(MF)^2 = \frac{(AC)^2-(BD)^2}{4}$

Con los datos: $(MF)^2 = \frac{17^2-15^2}{4}$ $\therefore\ MF = 4$

11. En un triángulo ABC, las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son perpendiculares entre sí. Demostrar que $(AB)^2 + (AC)^2 = 5(BC)^2$

Demostración:



Se traza la figura correspondiente.

En el triángulo ABC: G, es baricentro:

Se traza la mediana $\overline{AQ}$.

En el triángulo BGC, $GQ = \frac{1}{2}BC$

Por propiedad $AQ = 3GQ \Rightarrow AQ = \frac{3}{2}BC$

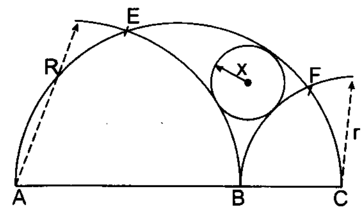
Por teorema de la mediana:

$$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AQ)^2 + \frac{(BC)^2}{2}$$

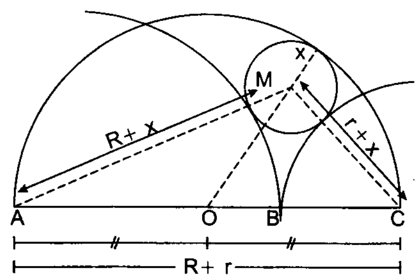
$$(AB)^2 + (AC)^2 = 2\left(\frac{3}{2}BC\right)^2 + \frac{(BC)^2}{2}$$

De donde: $(AB)^2 + (AC)^2 = 5(BC)^2$

12. Hallar x, si $\overline{AC}$ es diámetro, A y C son centros de los arcos EB y FB, respectivamente.



Resolución:



Sea O, centro de la semicircunferencia.

$\Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{R+r}{2}$

También: $OT = \frac{R+r}{2}$ y $OM = OT - MT$

$OM = \frac{R+r}{2} - x$

$\overline{MO}$ es mediana del $\triangle AMC$:

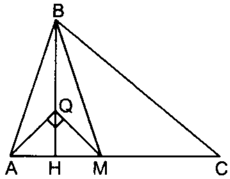
Luego, con el teorema para esta línea:

$$(AM)^2 + (MC)^2 = 2(OM)^2 + \frac{(AC)^2}{2}$$

Reemplazando:

$$\Rightarrow (R + x)^2 + (r + x)^2 = 2\left(\frac{R+r}{2} - x\right)^2 + \frac{(R+r)^2}{2}$$

$$\therefore\ x = \frac{0{,}5Rr}{R+r}$$



Resolución:

En el $\triangle AQM$, por relación métrica: $(QM)^2 = AM(HM)$.

Pero: $AM = \frac{AC}{2}$. Entonces:

$(QM)^2 = \frac{AC}{2}(HM) \Rightarrow (QM)^2 = \frac{AC(HM)}{2}$ ...(1)

De otro lado, en el $\triangle ABC$, $\overline{HM}$ es proyección de la mediana $\overline{BM}$, sobre $\overline{AC}$.

Luego, por el teorema de dicha proyección:
$(BC)^2 - (AB)^2 = 2AC(HM)$.

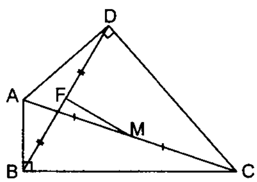
Con el dato: $144 = 2AC(HM) \Rightarrow AC(HM) = 72$

Reemplazando esto último, en (1): $\therefore\ QM = 6$

10. En un trapezoide ABCD, $m\angle B = m\angle D = 90°$, $AC = 17$ y $BD = 15$; M es punto medio de $\overline{AC}$ y F, de $\overline{BD}$. Hallar MF.

Resolución:

$AC = 17$; $BD = 15$



Por el teorema de Euler:

$\underbrace{(AB)^2+(BC)^2}+\underbrace{(CD)^2+(DA)^2}=(AC)^2+(BD)^2+4(MF)^2$

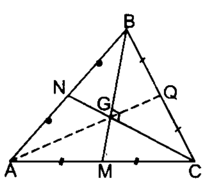
$\Rightarrow\ (AC)^2 \quad + \quad (AC)^2 \quad = (AC)^2+(BD)^2+4(MF)^2$

De donde: $(MF)^2 = \frac{(AC)^2-(BD)^2}{4}$

Con los datos: $(MF)^2 = \frac{17^2-15^2}{4}$ $\therefore\ MF = 4$

11. En un triángulo ABC, las medianas $\overline{BM}$ y $\overline{CN}$ son perpendiculares entre sí. Demostrar que $(AB)^2 + (AC)^2 = 5(BC)^2$

Demostración:



Se traza la figura correspondiente.

En el triángulo ABC: G, es baricentro:

Se traza la mediana $\overline{AQ}$.

En el triángulo BGC, $GQ = \frac{1}{2}BC$

Por propiedad $AQ = 3GQ \Rightarrow AQ = \frac{3}{2}BC$

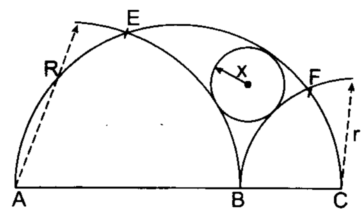
Por teorema de la mediana:

$(AB)^2 + (AC)^2 = 2(AQ)^2 + \frac{(BC)^2}{2}$

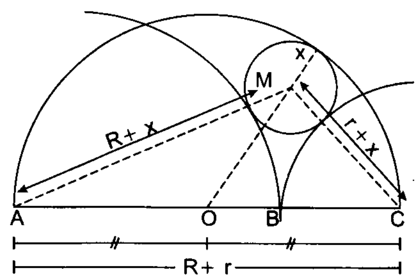
$(AB)^2 + (AC)^2 = 2\left(\frac{3}{2}BC\right)^2 + \frac{(BC)^2}{2}$

De donde: $(AB)^2 + (AC)^2 = 5(BC)^2$

12. Hallar x, si $\overline{AC}$ es diámetro, A y C son centros de los arcos EB y FB, respectivamente.



Resolución:



Sea O, centro de la semicircunferencia.

$\Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{R+r}{2}$

También: $OT = \frac{R+r}{2}$ y $OM = OT - MT$

$OM = \frac{R+r}{2} - x$

$\overline{MO}$ es mediana del $\triangle AMC$:

Luego, con el teorema para esta línea:

$(AM)^2 + (MC)^2 = 2(OM)^2 + \frac{(AC)^2}{2}$

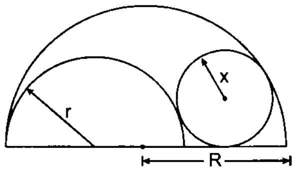
Reemplazando:

$\Rightarrow (R+x)^2 + (r+x)^2 = 2\left(\frac{R+r}{2} - x\right)^2 + \frac{(R+r)^2}{2}$

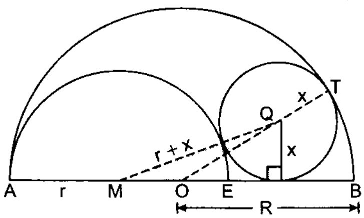
$\therefore\ x = \frac{0,5Rr}{R+r}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar x, si los radios de las semicircunferencias son R y r.



Resolución:



Siendo M, O y Q centros, con los trazos:
$MQ = r + x$, $OQ = OT - QT$
$\Rightarrow OQ = R - x$ y $OM = OA - MA \Rightarrow OM = R - r$
En el triángulo MOQ; el semiperímetro p es:

$$p = \frac{OM + OQ + MQ}{2} = \frac{(R-r)+(R-x)+(r+x)}{2};$$

$p = R$

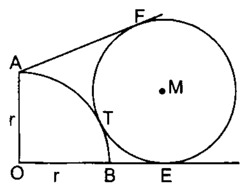
Aplicando el teorema de Herón:

$$x = \frac{2}{OM}\sqrt{p(p-OM)(p-OQ)(p-MQ)}$$

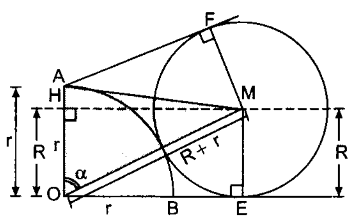
$$x = \frac{2}{(R-r)}\sqrt{R(r)(x)(R-r-x)}$$

Efectuando: $x = \dfrac{4Rr(R-r)}{(R+r)^2}$

2. En la figura, E, T y F son puntos de tangencia. Demostrar que AF = r



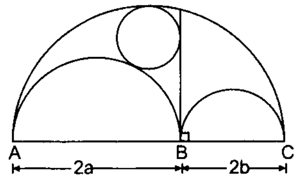
Resolución:



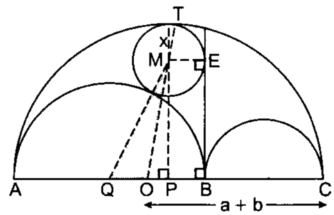
Llamemos R al radio de la circunferencia.

Se traza $\overline{AM}$, $\overline{MO}$ y la perpendicular $\overline{MH}$ a $\overline{OA}$.
Del gráfico: teorema de Euclides, en el triángulo AOM.
$(AM)^2 = (AO)^2 + (OM)^2 - 2(AO)(OH)$ ...(1)
Pero en el $\triangle$AFM: $AM^2 = R^2 + (AF)^2$
Reemplazando valores en (1):
$R^2 + (AF)^2 = r^2 + (R + r)^2 - 2(r)(R)$
$\therefore\ AF = r\sqrt{2}$

3. En la figura, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ son diámetros. Hallar el radio de la circunferencia.

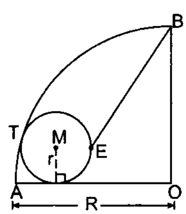


Resolución:

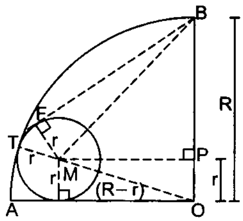


Se unen los centros M con Q y M con O.
Se traza la perpendicular $\overline{MP}$ al diámetro mayor, y los radios $\overline{OT}$ y $\overline{ME}$.
El radio de la mayor semicircunferencia, mide:
$\dfrac{AC}{2} = a + b$
Si O, Q y M, son centros. Del gráfico:
$QM = a + x$; $OM = OT - MT$; $OM = (a + b - x)$ y
$OQ = OA - QA \Rightarrow OQ = b$
Además, $OP = OC - BC - PB$; $OP = a - b - x$
En el triángulo QOM, aplicar el teorema de Euclides: $(QM)^2 = (OQ)^2 + (OM)^2 + 2(OQ)(OP)$
Luego: $(a + x)^2 = b^2 + (a + b - x)^2 + 2b(a - b - x)$
$\therefore\ x = \dfrac{ab}{a + b}$

4. En la figura O y M son centros, hallar la longitud de la tangencia BE. R y r son radios.



Resolución:



Es más conveniente hallar la longitud de $\overline{BF}$, según la tangencia desde B.

Con los trazos indicados:

$\triangle MFB$: $(BF)^2 = (BM)^2 - (MF)^2$ ...(1)

$\triangle OMB$, teorema de Euclides:

$(BM)^2 = (OM)^2 + (OB)^2 - 2(OB)(OP)$

$\Rightarrow (BM)^2 = (R - r)^2 + R^2 - 2Rr$

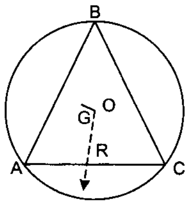
y con MF = r

En (1): $(BF)^2 = (R - r)^2 + R^2 - 2Rr - r^2$

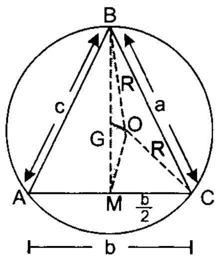
$\therefore\ BF = \sqrt{2R(R - 2r)}$

5. En el triángulo ABC, BC = a, AB = c y AC = b; G es baricentro y O es circuncentro.

Demostrar que $(OG)^2 = R^2 - \left(\dfrac{a^2 + b^2 + c^2}{9}\right)$



Resolución:



Sea M, punto medio de $\overline{AC}$

$\overline{BM} \perp \overline{AC}$ y por propiedad de baricentro.

$BG = \frac{2}{3}(BM)$ y $GM = \frac{1}{3}(BM)$

Se trazan los radios $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$.

En el $\triangle MBO$, por el teorema de Stewart:

$(OG)^2(BM) + BG(GM)(BM) = (OB)^2(GM) + (OM)^2(BG)$

Es decir:

$(OG^2(BM) + \frac{2}{3}BM(\frac{1}{3}BM) = OB^2(\frac{1}{3}BM) + OM^2(\frac{2}{3}BM)$

Simplificando BM:

$(OG)^2 + \frac{2}{9}(BM)^2 = \frac{1}{3}(OB)^2 + \frac{2}{3}(OM)^2$

$(OG)^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{2}{3}(OM)^2 - \frac{2}{9}(BM)^2$ (1)

Por otro lado, en el $\triangle OMC$:

$(OM)^2 = R^2 - \frac{b^2}{4}$ ...(2)

Y, en el $\triangle ABC$, por el teorema de la mediana.

$2(BM)^2 + \frac{b^2}{2} = a^2 + c^2 \Rightarrow (BM)^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}$ ...(3)

Reemplazando ahora, (2) y (3) en (1):

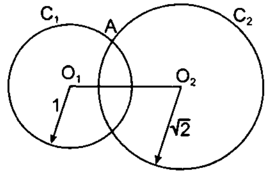
$(OG)^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{2}{3}\left[R^2 - \frac{b^2}{4}\right] - \frac{2}{9}\left[\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right]$

Efectuando:

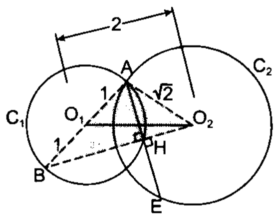
$(OG)^2 = \frac{R^2}{3} + \frac{2}{3}R^2 - \frac{b^2}{6} - \left(\frac{a^2 + c^2}{9}\right) + \frac{b^2}{18}$

$\therefore\ (OG)^2 = R^2 - \left(\frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}\right)$

6. En la figura O_1 y O_2 son centroS de las circunferencias C_1 y C_2, respectivamente, $O_1O_2 = 2$. Hallar la longitud de una cuerda $\overline{AE}$ del círculo C_2, sabiendo que el punto medio de $\overline{AE}$ está en C_1.



Resolución:



Sea H el punto medio de $\overline{AE}$

Luego: AE = 2AH

$H \in C$, También $\overline{O_2H} \perp \overline{AE}$

Por lo tanto, $\overline{AB}$ será diámetro de C_1

Encontramos primero $\overline{O_2B}$, luego $\overline{HO_2}$ y después $\overline{AH}$

En el $\triangle ABO_2$, por el teorema de la mediana para O_1O_2:

$(O_2B)^2 + \sqrt{2}^2 = 2(2^2) + \frac{2^2}{2} \Rightarrow O_2B = 2\sqrt{2}$

En el mismo triángulo, por el teorema de Euclides; para el $\angle AO_2B$:

$(AB)^2 = (AO_2)^2 + (O_2B)^2 - 2(O_2B)(HO_2)$

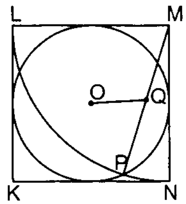
Ahora, en el $\triangle AHO_2$, por el teorema de Pitágoras.

$(AH)^2 + (HO_2)^2 = (AO_2)^2$

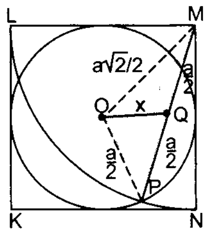
$(AH)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^3 = (\sqrt{2})^2 \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{14}}{4}$

$\therefore\ AE = \frac{\sqrt{14}}{2}$

7. KLMN es un cuadrado de centro O y lado a, si M es centro del arco NPL y MQ = QP, hallar OQ.



Resolución:



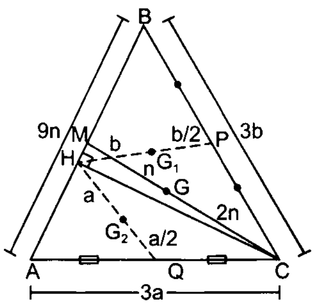
$\triangle$POM, por teorema de la mediana:

$(a/2)^2 + (a\sqrt{2}/2)^2 = 2x^2 + \frac{a^2}{2}$

$\frac{a^2}{4} + \frac{2a^2}{4} - \frac{2a^2}{4} = 2x^2 \quad \therefore\ x = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

8. En un triángulo ABC, se traza la altura $\overline{CH}$; se ubican los baricentros G, G_1 G_2 de los triángulos ABC, CHB, CHA en ese orden; sea $\overline{CM}$ una mediana del triángulo ABC, AB = 3CM y $(HG_1)^2 + (HG_2)^2 = K(CG)^2$. Hallar K.

Resolución:



Dato: $a^2 + b^2 = k(2n)^2$ ...(1)

Por el teorema de la mediana:

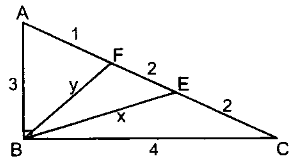
$(3a)^2 + (3b)^2 = 2(3n)^2 + \frac{(9n)^2}{2}$

$a^2 + b^2 = 2n^2 + \frac{9}{2}n^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = \frac{13}{2}n^2$

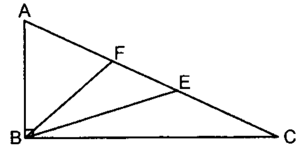
$a^2 + b^2 = \frac{13}{8}(2n)^2$ ...(2)

De (1) y (2): $k = \frac{13}{8}$

9. En la figura, si AB = 3; BC = 4, FE = EC = 2. Hallar $(BE)^2 - (BF)^2$



Resolución:



Por el teorema de Stewart:

$5x^2 = 16(3) + 9(2) - 2(3)5$

$5x^2 = 48 + 18 - 30 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{5}$

$5y^2 = 16(1) + 9(4) - 1(4)5$

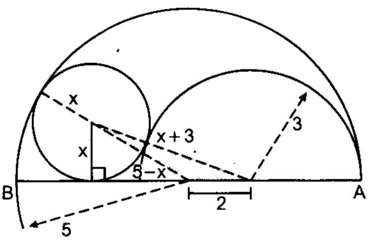
$5y^2 = 16 + 36 - 20 = 32 \Rightarrow y^2 = \frac{32}{5}$

Luego: $x^2 - y^2 = \frac{36 - 32}{5}$

$\therefore\ x^2 - y^2 = \frac{4}{5}$

10. Dos circunferencias de radios 3 y 5 son tangentes interiormente en el punto A, por el cual se traza el diámetro AB en la circunferencia mayor. Hallar el radio de la circunferencia que es tangente a AB y a las dos circunferencias.

Resolución:

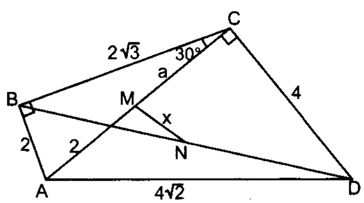


Por Herón: $x = \frac{2}{2}\sqrt{5(3)(5-5+x)(5-3-x)}$

Simplificando: $x = \frac{15}{8}$

11. En un cuadrilátero ABCD, m∠B = 90°, m∠BCD = 120°, si CD = 4, AB = 2 y m∠ACD = 90°. Hallar el segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

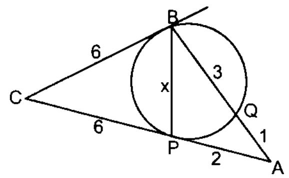
Resolución:



$\triangle BCD$: $(BD)^2 = 12 + 16 + 8\sqrt{3} = 28 + 8\sqrt{3}$
Por Euler: $4 + 12 + 16 + 32 = 16 + 28 + 8\sqrt{3} + 4x^2$
$4x^2 = 20 - 8\sqrt{3} \Rightarrow x^2 = 5 - 2\sqrt{3}$
$\therefore\ x = \sqrt{5 - 2\sqrt{3}}$

12. Desde un punto exterior C de una circunferencia, se trazan las tangentes CB y CP (B y P son puntos de tangencia). Luego se traza la cuerda $\overrightarrow{BQ} \cap \overrightarrow{CP} = \{A\}$. Si AQ = 1, AP = 2 y BC = 6. Calcular PB.

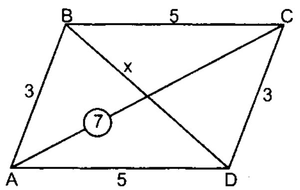
Resolución:



Por teorema:
$(AP)^2 = AB(AQ) \Rightarrow 4 = 1(BQ + 1) \Rightarrow BQ = 3$
Por Stewart:
$8x^2 = 36\,(2) + 16(6) - 2(6)8$
$8x^2 = 72 \Rightarrow x^2 = 9 \quad \therefore\ x = 3$

13. En un paralelogramo ABCD, se cumple que AB = 3, BC = 5 y AC = 7. Hallar la longitud de la otra diagonal.

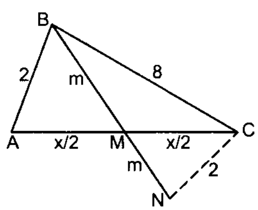
Resolución:



Por Euler:
$3^2 + 3^2 + 5^2 + 5^2 = x^2 + 7^2 \Rightarrow 18 + 50 - 49 = x^2$
$\therefore\ x = \sqrt{19}$

14. Dado el triángulo ABC, AB = 2, BC = 8, la longitud de la mediana relativa al lado AC es un número natural. Hallar AC.

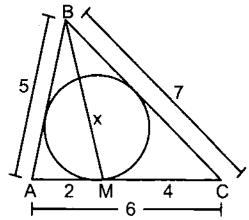
Resolución:



$\triangle BCN$, por teorema:
$6 < 2m < 8 + 2 \Rightarrow 3 < m < 5 \Rightarrow m = 4$
Por teorema de la mediana:
$2^2 + 8^2 = 2m^2 + \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow 68 = 32 + \dfrac{x^2}{2}$
$\therefore\ x = 6\sqrt{2}$

15. En un triángulo ABC sus lados miden AB = 5, BC = 7 y AC = 6. La circunferencia inscrita al triángulo determina el punto M en el lado AC. Hallar BM.

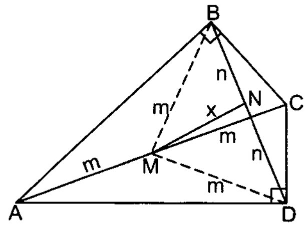
Resolución:



Por el teorema de Stewart:
$6x^2 = 49(2) + 25(4) - 2(4)(6)$
$6x^2 = 98 + 100 - 48 = 150 \Rightarrow x^2 = 25 \quad \therefore\ x = 5$

16. En un cuadrilátero ABCD, $m\angle B = m\angle D = 90°$, $(AC)^2 - (BD)^2 = 64$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

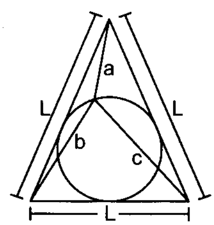
Resolución:



Dato: $(2m)^2 - (2n)^2 = 64 \Rightarrow m^2 - n^2 = 16$
$\triangle MBD$; por teorema de la mediana
$2m^2 = 2x^2 + \dfrac{(2n)^2}{2} \Rightarrow x^2 = \underbrace{m^2 - n^2}_{16}$
$x^2 = 16 \quad \therefore\ x = 4$

17. C es una circunferencia inscrita en un triángulo equilátero de longitud de lado L, la suma de los cuadrados de las longitudes de sus distancias de un punto C a los vértices del triángulo es 7, hallar L.

Resolución:



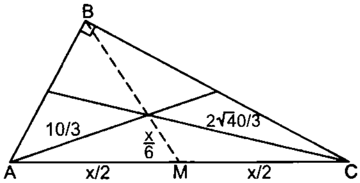
Por propiedad: $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{5L^2}{4}$

Por dato: $\dfrac{5L^2}{4} = 7$

$\therefore\ L = \dfrac{2}{5}\sqrt{35}$

18. Las medianas de un triángulo rectángulo, trazadas a partir de los vértices de los ángulos agudos miden 5 y $\sqrt{40}$. Hallar la longitud de la hipotenusa.

Resolución:



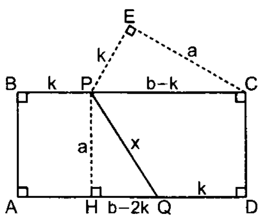
$\triangle$ABC; por teorema de la mediana:

$$\frac{100}{9}+\frac{160}{9}=\frac{x^2}{18}+\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{520}{18}=\frac{10x^2}{18}\Rightarrow x=2\sqrt{13}$$

19. Una cartulina tiene la forma de una región rectangular ABCD, dicha cartulina se dobla de tal manera que los vértices A y C coinciden. Si AB = a y BC = b, hallar la longitud del doblez.

Resolución:



$\triangle$PEC: $(b-k)^2=a^2+k^2$

$b^2-2bk=a^2$

$2k=\dfrac{b^2-a^2}{b}$ ...(1)

$\triangle$PHQ: $x^2=a^2+(b-2k)^2$ ...(2)

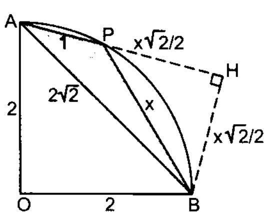
(1) en (2): $x^2=a^2+\left[\left(b-\left(\dfrac{b^2-a^2}{2}\right)\right)^2\right]$

$x^2=a^2+\left(\dfrac{b^2-b^2+a^2}{b}\right)^2\Rightarrow x^2=a^2+\dfrac{a^4}{b^2}$

$\therefore\ x=\dfrac{a}{b}\sqrt{a^2+b^2}$

20. En un cuadrante AOB de radio R = 2 y centro O. En el arco AB se ubica P, tal que AP = 1, calcular PB.

Resolución:



$\triangle$APB, por Euclides: $8=x^2+1+2\left[\dfrac{x\sqrt{2}}{2}\right]$

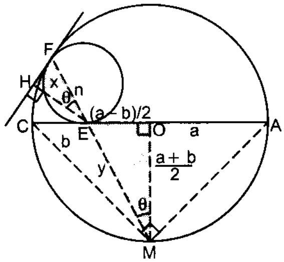
Simplificando: $x^2+x\sqrt{2}-7=0\Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{30}-\sqrt{2}}{2}$

Elevando al cuadrado miembro a miembro:

$\therefore\ x=\sqrt{8-\sqrt{15}}$

20. Dos circunferencias son tangentes interiormente en el punto F. El diámetro $\overline{CA}$ de la circunferencia mayor es tangente a la circunferencia menor en el punto E. Si AE = a y EC = b, hallar la longitud de la perpendicular trazada desde el punto E a la recta tangente común a las dos circunferencias.

Resolución:



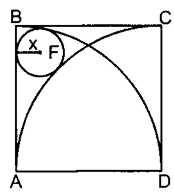
$\triangle$EOM: $y^2=\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2+\left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2\Rightarrow y=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$

Por cuerdas: $n=\dfrac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

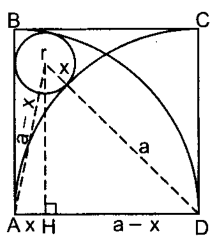
$\triangle$FHE ~ $\triangle$EOM:

$$\Rightarrow\frac{x}{\dfrac{a+b}{2}}=\frac{\dfrac{\sqrt{2}ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}{\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}}\Rightarrow x=\frac{2ab(a+b)}{a^2+b^2}$$

22. ABC es un cuadrado de lado a. Se trazan los arcos BD y AC con centros A y D. Hallar la longitud del radio de la circunferencia de centro F.



Resolución:



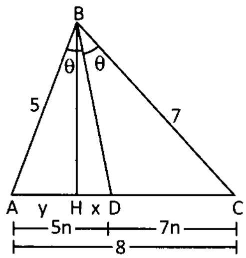
$\triangle$AFD, por el teorema de Euclides

$(a+x)^2=(a-x)^2+a^2-2xa$

Efectuando: $x=\dfrac{a}{6}$

23. En un triángulo ABC, AB = 5. BC = 7, AC = 8 se traza la altura BH y la bisectriz interior BD. Hallar la magnitud del segmento HD.

Resolución:



$5n + 7n = 8 \Rightarrow n = \dfrac{2}{3}$

$\triangle ABC$, por Euclides:

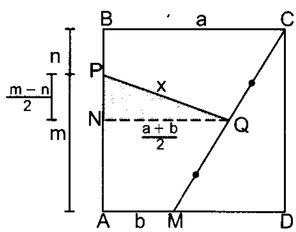
$49 = 25 + 64 - 2y(8)$

$\Rightarrow y = \dfrac{5}{2}$

Luego: $x = \dfrac{10}{3} - \dfrac{5}{2} \therefore x = \dfrac{5}{6}$

24. Dado un rectángulo ABCD, en los lados AD y AB se ubican los puntos M y P respectivamente. Si $BC + AM = \sqrt{13}$, $AP - PB = \sqrt{3}$, hallar la longitud del segmento que une P con el punto medio de $\overline{MC}$.

Resolución:



Dato: $a + b = \sqrt{13}$ y $m - n = \sqrt{3}$

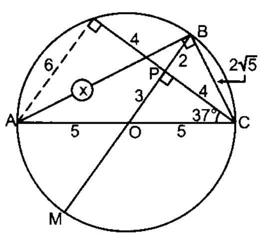
$\triangle PNQ$: $x^2 = \left[\dfrac{a+b}{2}\right]^2 + \left[\dfrac{m-n}{2}\right]^2$

Remplazando: $x^2 = \dfrac{1}{4}(13) + \dfrac{1}{4}(3)$

$x^2 = \dfrac{16}{4} \Rightarrow x^2 = 4 \quad \therefore x = 2$

25. El triángulo rectángulo ABC, recto en B, se encuentra inscrito en una circunferencia de 5 de radio. A partir de C se traza una cuerda CX que interseca al diámetro BM en P. Si XC = 8 y PB = 2. Hallar AB.

Resolución:



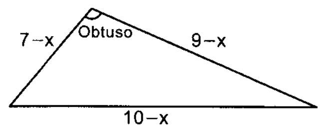
$\triangle OPC$ notable aproximado: PC = 4

$\triangle PBC$: $(BC)^2 = 2^2 + 4^2 \Rightarrow (BC)^2 = 20$

$\triangle ABC$: $x^2 = 10^2 - 20 \quad \therefore x = 4\sqrt{5}$

26. Los tres lados de un triángulo miden 10, 9 y 7; determinar el menor valor entero de una longitud x, tal que si se le quita a cada lado el triángulo es obtusángulo.

Resolución:



Se cumple: $10 - x < 7 - x + 9 - x$

$\Rightarrow x < 6 \quad ...(1)$

$(10 - x)^2 > (7 - x)^2 + (9 - x)^2$

Efectuando: $x^2 - 12x + 30 < 0 \quad ...(2)$

(1) + (2): $x^2 - 11x + 24 < 0$

Factorizando: $(x - 8)(x - 3) < 0$

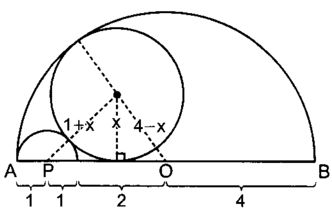
Como la inecuación es menor que cero, solo satisface el resultado negativo.

$3 < x < 8 \quad ...(3)$

De (1) y (3): $3 < x < 6 \quad \therefore x = 4$

27. Interiormente a una semicircunferencia de diámetro AB = 8 cm se traza otra semicircunferencia de radio 1 cm y cuyo diámetro está contenido en $\overline{AB}$. Halle el radio de la circunferencia tangente a $\overline{AB}$ y a las semicircunferencias anteriores.

Resolución:



OQ = 4 − x

PQ = 1 + x

$\triangle PQO$: T. Herón: $p = \dfrac{PQ + PO + OQ}{2} = 4$

$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{(4-3)(4-1-x)(4-4+x)}$

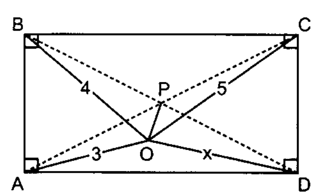
$\Rightarrow x = \dfrac{2}{3}\sqrt{4(3-x)(x)}$

$\Rightarrow 9x^2 - 4(4x)(3 - x) = 0 \Rightarrow 25x^2 - 48x = 0$

$\therefore x = \dfrac{48}{25}$

28. En el interior de un rectángulo ABCD se ubica un punto O. Si las distancias de O a los vértices A, B y C son de 3, 4 y 5 cm. Halle la distancia de O al vértice D.

Resolución:



P punto medio $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$

$\triangle BOD$: Teorema de la mediana

$x^2 + 4^2 = 2(OP)^2 + \frac{1}{2}(BD)^2$ ...(1)

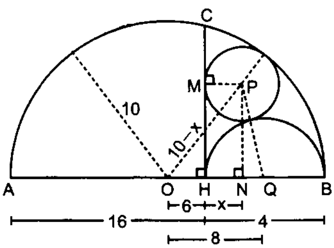
$\triangle AOC$: Teorema de la mediana

$3^2 + 5^2 = 2(OP)^2 + \frac{1}{2}(AC)^2$ ...(2)

(1) = (2): $x^2 + 16 = 9 + 25$ $\therefore$ $x = 3\sqrt{2}$ cm

29. Desde un punto C de una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza $\overline{CH} \perp \overline{AB}$ (H en AB). Se traza luego la semicircunferencia de diámetros $\overline{HB}$ interior a la semicircunferencia anterior. Si AH = 16 cm y HB = 4 cm. Halle el radio de la circunferencia inscrita en el triángulo mixtilíneo HCB.

Resolución:



PM = x OP = 10 – x: PQ = 2 + x

$\triangle DPQ$: T de la proyección (ángulo agudo)

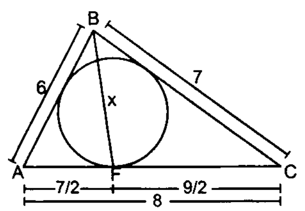
$(2 + x)^2 = (10 - x)^2 + 8^2 - 2(8)(x + 6)$

$\Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 100 \times 20x + x^2 + 64 - 16x - 96$

$\therefore$ x = 8/5 = 1,6 cm

30. En un triángulo ABC se cumple que AB = 6, BC = 7, AC = 8. Si F es el punto de tangencia de la circunferencia inscrita con el lado $\overline{AC}$, halle BF.

Resolución:



$P_{ABC} = \dfrac{6 + 7 + 8}{2} = \dfrac{21}{2}$

Teorema AF = p(7) = $\dfrac{21}{2} - 7 = \dfrac{7}{2}$ de donde

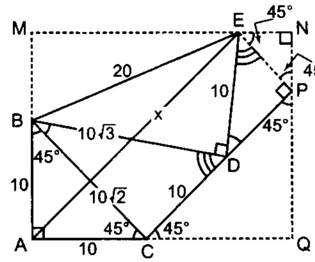
$FC = 8 - \dfrac{7}{2} = \dfrac{9}{2}$

Teorema Stewart en el $\triangle ABC$:

$6^2\left(\dfrac{7}{2}\right) + 7^2\left(\dfrac{9}{2}\right) = x^2(8) + \left(\dfrac{7}{2}\right)\left(\dfrac{9}{2}\right)(8)$ $\therefore x = \dfrac{\sqrt{415}}{4}$

31. Se tiene un triángulo rectángulo isósceles BAC tal que AB = AC = 10 cm. Se traza $\overline{CD} \perp \overline{BC}$ y $\overline{DE} \perp \overline{BD}$ de modo que CD = DE = 10 cm. Halle la longitud del segmento $\overline{AE}$.

Resolución:



Pitágoras: $BC = 10\sqrt{2}$ $BD = 10\sqrt{3}$ $BE = 20$

⊾BCD ~ ⊾DPE

$\Rightarrow \dfrac{10\sqrt{3}}{10} = \dfrac{10}{EP} = \dfrac{10\sqrt{2}}{DP} \Rightarrow EP = \dfrac{10}{3}\sqrt{3}: DP = \dfrac{10}{3}\sqrt{3}$

$\triangle ABE$: T. de la proyección (ángulo obtuso)

$x^2 = 10^2 + 20^2 + 2(10)(MB)$

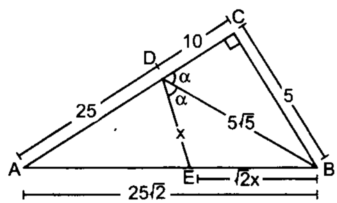
$x^2 = 500 + 2(10)(MB)$

$x^2 = 500 + 20\left\{\dfrac{5}{3}\sqrt{6} + 5\sqrt{2} + \dfrac{10}{3}\sqrt{3} - 10\right\}$

$x = \sqrt{480 + \dfrac{100}{3}(\sqrt{6} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})}$ cm

32. En un triángulo ABC recto en C, se ubican en $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ los puntos E y D respectivamente de tal manera que $m\angle EDB = m\angle BDC$. Si AD = 25; DC = 10 y BC = 5. Calcule DE.

Resolución:



Pitágoras: $BD = 5\sqrt{5}$; $AB = 25\sqrt{2}$

Teorema de la bisectriz exterior:

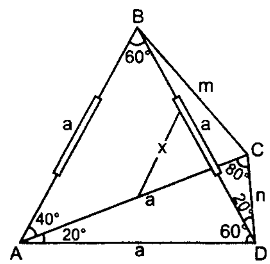
$\dfrac{25}{x} = \dfrac{25\sqrt{2}}{EB} \Rightarrow EB = \sqrt{2}x$

Teorema de la longitud de la bisectriz exterior:

$(5\sqrt{2})^2 = (25\sqrt{2})(\sqrt{2}x)$ $25x = 25x$ $\therefore$ x = 5

33. En un cuadrilátero ABCD se cumple: $m\angle ACD = 80°$ y $m\angle DBC = 20°$. Si AB = BD y $(BC)^2 + (CD)^2 = 100\,cm^2$, halle la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

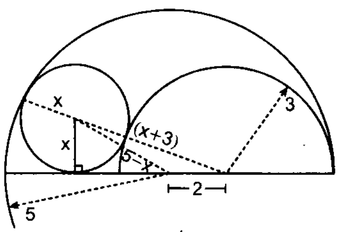
Resolución:



$\triangle ABD$: Equilátero $\Rightarrow AB = BD = AD = a$
$\triangle ACD$: Isósceles $\Rightarrow AC = AD = a$
Teorema de Euler:
$a^2 + m^2 + n^2 + a^2 = a^2 + a^2 + 4x^2$
$\Rightarrow m^2 + n^2 = 4x^2$
Pero por dato: $m^2 + n^2 = 100$
$\therefore x = 5$ cm

34. Dos circunferencias de radios 3 y 5 son tangentes interiormente en el punto A, por el cual se traza el diámetro AB en la circunferencia mayor. Halle el radio de la circunferencia que es tangente a AB y a las dos circunferencias.

Resolución:

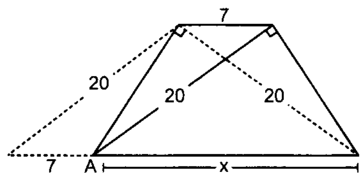


Por Herón: $x = \frac{2}{2}\sqrt{5(3)(5-5+x)(5-3-x)}$

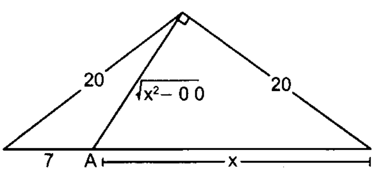
Simplificando: $x = \frac{15}{8}$

35. En un trapecio isósceles ABCD, la $m\angle ACD = 90$, $BC = 7$ y $AC = 20$. Calcule AD.

Resolución:



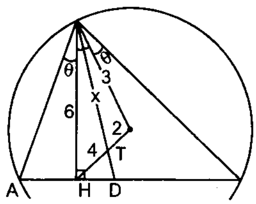
Se traza $\overline{BE} \,//\, \overline{AC} \Rightarrow BC = EA = 7$



$\triangle EBD$ por el teorema de Stewart:
$(x^2 - 400)(x + 7) = 400x + 400(7) - 7x(x + 7)$
$x^2 - 400 = 400 - 7x \Rightarrow x^2 + 7x - 800 = 0$
$\Rightarrow (x + 32)(x - 25) = 0 \quad \therefore x = 25$

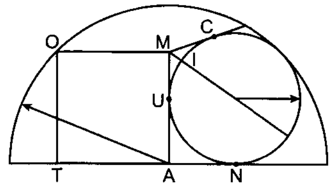
36. En un triángulo ABC, inscrito en una circunferencia de centro O y radio de medida 3 u, se trazan: la bisectriz BD y la altura BH, $\overline{HO}$ interseca a la bisectriz BD en T. Si OT = 2 u y BH = 6 u. Calcule BT.

Resolución:

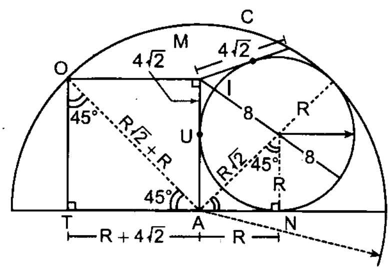


$\triangle HBO$: $\frac{6}{HT} = \frac{3}{2}$
$\Rightarrow HT = 4$
Por teorema:
$x^2 = 18 - 8 = 10$
$\therefore x = \sqrt{10}$

37. TOMA es un cuadrado, hallar MI si: $CM = 4\sqrt{2}$
(N, U, C $\Rightarrow$ puntos de tangencia)



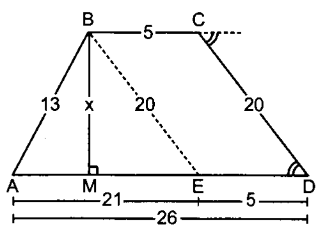
Resolución:



En el ◺ATO: $R\sqrt{2} + R = (R + 4\sqrt{2})\sqrt{2} \Rightarrow R = 8$
En la (teorema de la tangente)
$MI\,(MI + 16) = (4\sqrt{2})^2$
$(MI)^2 + 16\,MI = 32$
Luego: $(MI)^2 + 2MI(8) + 8^2 = 32 + 64$
$(MI + 8)^2 = 96 \quad \therefore MI = 4(\sqrt{6} - 2)$

38. Calcular la longitud de la altura de un trapecio ABCD si las bases miden BC = 5 y AD = 26. Además: AB = 13 y CD = 20

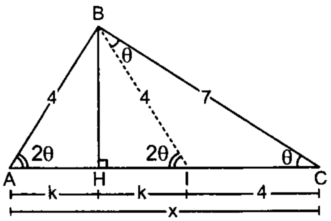
Resolución:



⏢BCDE $\Rightarrow$ paralelogramo
(propiedad: $\overline{BC} \,//\, \overline{DE}$ y $BC = DE = 5$)
En el $\triangle ABE$ (teorema de Herón)
$x = \frac{2}{21}\sqrt{27(27-21)(27-20)(27-13)}$
$x = \frac{2}{21}\sqrt{27(6)(7)(14)} \quad \therefore x = 12$

39. Se tiene un triángulo ABC, AB = 4, BC = 7. Calcular AC, si: m∠BAC = 2m∠BCA

Resolución:



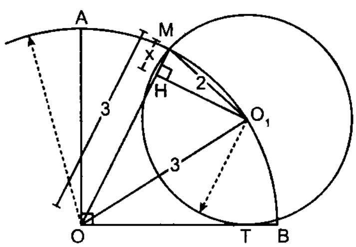
En el △ABC, se traza $\overline{BI}$ tal que:
△BIC sea isósceles (IB = IC = 4),
Luego en el △ABI isósceles
(AB = BI = 4), se traza $\overline{BH} \perp \overline{AI}$
Entonces: HA = HI = k
En el △BIC (teorema de Euclides)

$7^2 = 4^2 + 4^2 + 2(4)(k) \Rightarrow 2k = \frac{17}{4}$

Luego: $x = 4 + 2k \Rightarrow x = 4 + \frac{17}{4} \quad \therefore x = \frac{33}{4}$

40. En un cuadrante AOB (AO = BO = 3) en el arco AB se ubica el punto O_1 el cual será centro de una circunferencia cuyo radio mide 2, tangente a $\overline{BO}$ en T. Dicha circunferencia interseca al arco AB en M luego se traza $\overline{O_1H} \perp \overline{MO}$ ($H \in \overline{MO}$). Calcular MH.

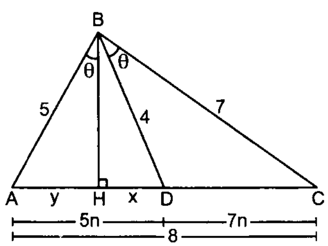
Resolución:
En el $\triangle MOO_1$ teorema de Euclides.



$3^2 = 3^2 + 2^2 - (2)(3)(x) \Rightarrow 6x = 4 \quad \therefore x = \frac{2}{3}$

41. En un triángulo ABC, AB = 5, BC = 7, AC = 8 se traza la altura BH y la bisectriz interior BD. Halle la magnitud del segmento HD.

Resolución:



$5n + 7n = 8 \Rightarrow n = \frac{2}{3}$

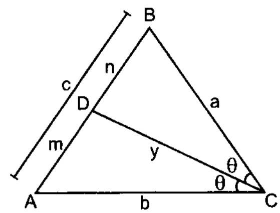
△ABC; por Euclides: $49 = 25 + 64 - 2y(8) \Rightarrow y = \frac{5}{2}$

Luego: $x = \frac{10}{3} - \frac{5}{2} \quad \therefore x = \frac{5}{6}$

42. En un triángulo ABC, AB = c, BC = a, AC = b, se traza la bisectriz CD del ángulo C, $D \in \overline{AB}$, si x es el semiperimetro del triángulo ABC, demuestre que:

$CD = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$

Resolución:



Sabemos que: $m = \frac{bc}{a+b}$ y $n = \frac{ac}{a+b}$

Por teorema: $y^2 = ab - mn$

$$y^2 = ab - \frac{bc}{a+b}\left(\frac{ac}{a+b}\right) = ab\left[1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right]$$

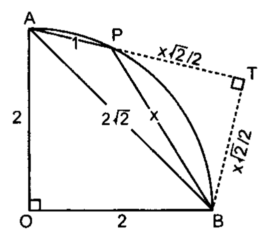
$$y^2 = ab\left[\frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}\right] = ab\left[\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2}\right]$$

$$y^2 = ab\left[\frac{(2p)(2p-2c)}{(a+b)^2}\right]$$

$$\therefore y = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

43. En un cuadrante AOB de radio R = 2 y centro O. En el arco $\overset{\frown}{AB}$ se ubica P tal que AP = 1 u calcule PB.

Resolución:



△APB; por Euclides:

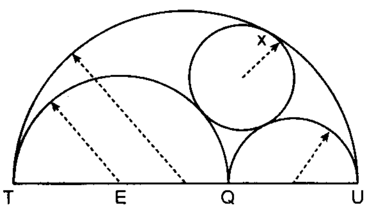
$8 = x^2 + 1 + 2\left[\frac{x\sqrt{2}}{2}\right](1)$

Simplificando:

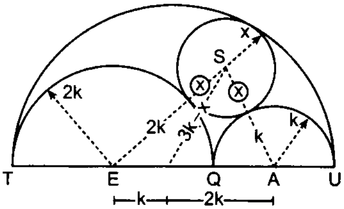
$x^2 + x\sqrt{2} - 7 = 0$

$\therefore x = \frac{\sqrt{30} - \sqrt{2}}{2}$

44. En la figura mostrada E y Q trisecan al diámetro $\overline{TU}$. Calcular x sabiendo que: TU = 14.



Resolución:



Dato: TU = 6 k = 14

En el $\triangle$ESA (teorema de Stewart)

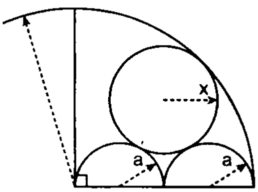
$(3k - x)^2(3k) = (2k + x)^2(2k) + (x + k)^2(k) - k(2k)(3k)$

$27k^2 + 3x^2 - 18kx = 8k^2 + 2x^2 + 8kx + x^2 + k^2 + 2kx - 6k^2$

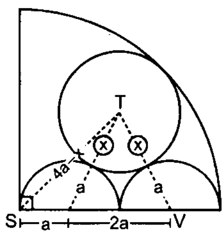
De donde; 6k = 7x

Luego: 7x = 14 $\therefore$ x = 2

45. En el gráfico mostrado, calcular x



Resolución:



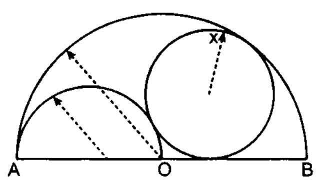
En el $\triangle$STV (teorema de Stewart)

$3a(x + a)^2 = 2a(4a - x)^2 + a(x + a)^2 - a(2a)(3a)$

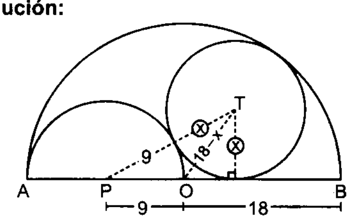
$32a^3 - 16a^2x + 2ax^2 + ax^2 + 2xa^2 + a^3 - 6a^3 = 3ax^2 + 6xa^2 + 3a^3$

$30a^3 - 20xa^2 - 6a^3 = 0 \quad \therefore x = \dfrac{6a}{5}$

46. Hallar x, si AB = 36



Resolución:



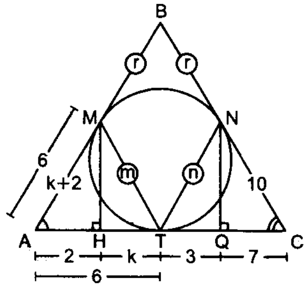
En el $\triangle$PTO: (teorema de Herón)

$x = \dfrac{2}{9}\sqrt{(18)(9)(9 - x)x}$

$x = \dfrac{2}{9}(9)\sqrt{2x(9 - x)} \quad \therefore x = 8$

47. En un triángulo ABC se inscribe en una circunferencia tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$ en M, N y T respectivamente, desde M y N se trazan $\overline{MH}$ y $\overline{NQ}$ perpendiculares a $\overline{AC}$ (H y Q en AC) si AH = 2, CQ = 7, NC = 10 y p – BM = 16 (P ⇒ semiperímetro del triángulo ABC), hallar: $(TM)^2 + (TN)^2$

Resolución:



Dato: p – r = 16

Pero: p = r + 10 + k + 2 ⇒ p – r = 12 + k

Luego: 12 + k = 16 ⇒ k = 4

Piden: $x = m^2 + n^2$ ...(1)

En el $\triangle$AMT: teorema de Euclides

$m^2 = 6^2 + 6^2 - 2(6)(2) \Rightarrow m^2 = 48$

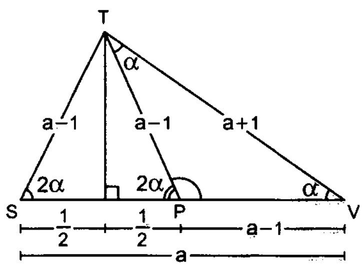
En el $\triangle$TNC: teorema de Euclides

$n^2 = 10^2 + 10^2 - 2(10)(7) \Rightarrow n^2 = 60$

Finalmente en (1): x = 48 + 60 $\therefore$ x = 108

48. En un triángulo STU, los lados están representados por tres números enteros consecutivos, si el ángulo mayor es el doble del menor. Calcular los lados del triángulo.

Resolución:



En el $\triangle$TPV teorema de Euclides

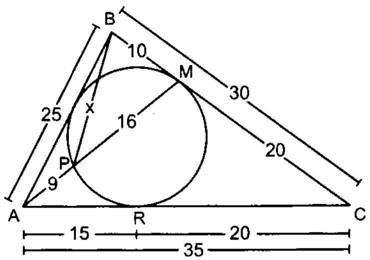
$(a + 1)^2 = (a - 1)^2 + (a - 1)^2 + 2(a - 1) \times \dfrac{1}{2}$

Al resolver: a = 5

Luego: $\begin{cases} ST = 4 \\ TV = 6 \\ VS = 5 \end{cases}$

49. Los lados de un triángulo ABC miden AB = 25, BC = 30 y AC = 35. La circunferencia inscrita determina con $\overline{BC}$ el punto de tangencia M, $\overline{AM}$ interseca a la circunferencia en P. Calcular BP.

Resolución:



Se tiene: CM = CR = 45 − 25

CM = CR = 20

$\triangle ABC$ (teorema de Stewart)

$(AM)^2(30) = 35^2(10) + 25^2(20) - 10(20)(30)$

AM = 25

Por el teorema de la tangente

$15^2 = 25AP \Rightarrow AP = 9$

$\triangle ABM$ (teorema de Stewart)

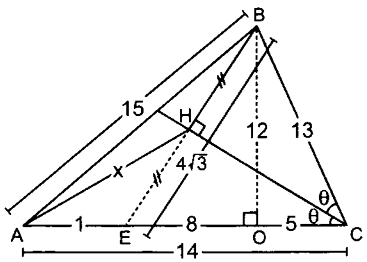
$25x^2 = 25^2(16) + 10^2(9) - 9(16)(25)$

$\therefore\ x = 2\sqrt{73}$

50. En un triángulo ABC se traza $\overline{BH}$ perpendicular a la bisectriz interior trazado por C.

Hallar: AH si AB = 15, BC = 13 y AC = 14

Resolución:



$\triangle ABC$: teorema de Herón:

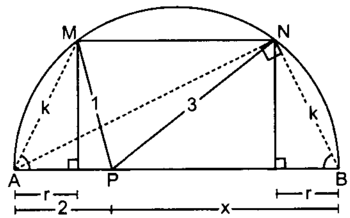
$BO = \frac{2}{14}\sqrt{21(6)(7)(8)} \Rightarrow BO = 12$

$\triangle ABE$: teorema de la mediana

$1^2 + 15^2 = 2x^2 + \frac{(4\sqrt{13})^2}{2} \quad \therefore\ x = \sqrt{61}$

51. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ se traza una cuerda $\overline{MN}$ // $\overline{AB}$. Luego se toma un punto P en $\overline{AB}$, si PM = 1, PN = 3 y PA = 2. Calcule PB

Resolución:



$\triangle AMP$: teorema de Euclides

$1^2 = k^2 + 2^2 - 2(2)r$

$-3 = k^2 - 2(2)r \qquad ...(1)$

$\triangle PNB$: teorema de Euclides

$3^2 = x^2 + k^2 - (2)(x)(r)$

$9 = k^2 - (2)(x)(r) + x^2 \qquad ...(2)$

En el ⊾ANB (el cuadrado de un cateto)

$K^2 = r(2 + x) \Rightarrow k^2 - r(2 + x) = 0$

Luego: (1) + (2)

$9 - 3 = 2[k^2 - r(x + 2)] + x^2$

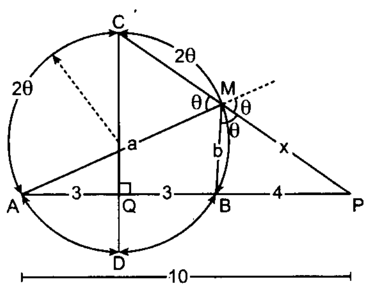
$x^2 = 6 \quad \therefore\ x = \sqrt{6}$

52. En una circunferencia se trazan la cuerda $\overline{AB}$ y el diametro $\overline{CD}$ perpendicular a $\overline{AB}$ en Q.

En la prolongaciòn de AB se ubica el punto P, $\overline{PC} \cap \overset{\frown}{BC}$ = [M]. Calcular MP, si BP = 4 y BQ = 3

MA(MB) = 24

Resolución:



Dato: a(b) = 24

En el $\triangle AMB$ (teorema de la bisectriz exterior)

$x^2 = 10(4) - a(b)$

$\Rightarrow x^2 = 40 - 24$

$\therefore\ x = 4$

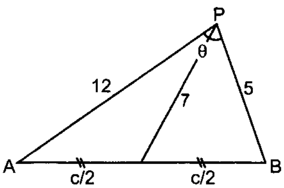
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2002 - I)

Dos autos parten simultáneamente desde un punto P en direcciones que forman un ángulo θ uno a 5 km/h y el otro a 12 km/h. Calcular el $\cos\theta$ sabiendo que al cabo de 1 h la distancia desde el punto P al punto medio del segmento que separa ambos autos es de 7 km.

A) $\frac{5}{8}$ B) $\frac{7}{16}$ C) $\frac{3}{80}$ D) $\frac{9}{40}$ E) $\frac{13}{25}$

Resolución:



Aplicando el teorema de la mediana:

$$12^2 + 5^2 = 2(7)^2 + \frac{c^2}{2} \Rightarrow c^2 = 142$$

Aplicando la ley de cosenos:

$c^2 = 12^2 + 5^2 - 2(12)(5)\cos\theta$

$142 = 169 - 120\cos\theta$

$\therefore \cos\theta = 9/40$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2003 - II)

En el interior de un cuadrante de una circunferencia C_1 de radio R, se construye una semicircunferencia C_2, cuyo diámetro es uno de los radios del cuadrante de C_1. Hallar el radio de otra circunferencia C_3 tangente a C_1, a C_2 y a un radio del cuadrante.

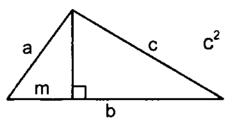
A) $\frac{R}{6}$ B) $\frac{R}{5}$ C) $\frac{R}{4}$ D) $\frac{R}{3}$ E) $\frac{R}{7}$

Resolución:

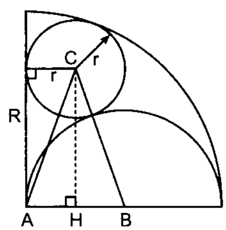
En el $\triangle ABC$:

$AB = \frac{R}{2}$; $BC = \frac{R}{2} + r$; $CA = R - r$

Sabemos:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2bm$$



Aplicando:

$$\left(\frac{R}{2} + r\right)^2 = (R - r)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{R}{2}\right)(r)$$

$$\frac{R^2}{4} + Rr + r^2 = R^2 - 2Rr + \frac{R^2}{4} - Rr \quad \therefore\ r = \frac{R}{4}$$

Clave: C

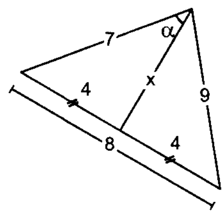
PROBLEMA 3 (UNI 2007 - I)

En un triángulo de lados 7; 8 y 9 m se traza la mediana relativa al lado de 8 m. Determine el coseno del ángulo y comprendido entre el lado de 7 m y la mediana trazada.

A) $\frac{41}{49}$ B) $\frac{43}{49}$ C) $\frac{45}{49}$ D) $\frac{46}{49}$ E) $\frac{47}{49}$

Resolución:

Sea:



Por teorema de la mediana:

$$2x^2 + \frac{8^2}{2} = 7^2 + 9^2 \Rightarrow x = 7\text{ m}$$

Por ley de coseno:

$4^2 = 7^2 + x^2 - 2(7)/x)\cos\alpha$

Reemplazando el valor de x:

$4^2 = 7^2 + 7^2 - 2(7)(7)\cos\alpha$

$\therefore\ \cos\alpha = \frac{41}{49}$

Clave: A

PROBLEMA 4 (UNI 2009 - II)

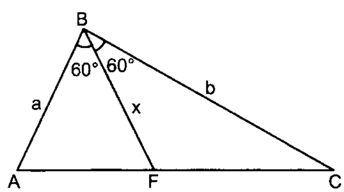
En un triángulo ABC se tiene AB = a, BC = b y $m\angle ABC = 120°$. Calcule la longitud de la bisectriz interna $\overline{BF}$, $F \in \overline{AC}$.

A) $\frac{ab}{a+b}$ B) $\frac{2ab}{a+b}$ C) $\sqrt{ab}$

D) $\frac{ab\sqrt{3}}{a+b}$ E) $\frac{2ab\sqrt{3}}{a+b}$

Resolución:

Nos piden: BF = x



Dato: $m\angle ABC = 120°$

$\overline{BF}$: bisectriz

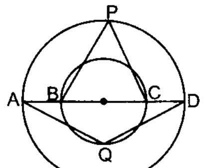
Por propiedad: $x = \frac{2ab}{a+b}\cos\left(\frac{B}{2}\right)$

$$\Rightarrow x = \frac{2ab}{a+b}\cos 60° \quad \therefore\ x = \frac{ab}{a+b}$$

Clave: A

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura se muestra dos circunferencias concéntricas. Si $(AQ)^2 + (QD)^2 = 100$, calcular $(PB)^2 +$ $+ (PC)^2$

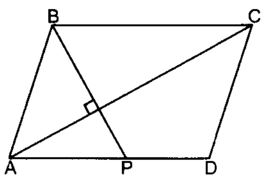


A) 10 B) 120 C) 100
D) 81 E) 64

2. En un trapecio las bases miden 12 y 26 y los lados no paralelos miden 13 y 15. Calcular la longitud de la altura de dicho trapecio.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

3. En el romboide ABCD, donde AB= 13; BC = 20 y AC= 21. Calcular PD.



A) 10,5 B) 10 C) 12
D) 13,75 E) 15

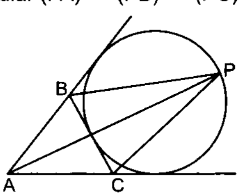
4. Se tiene un triángulo ABC, tal que AB=BC=2AC. Si la distancia de B a la bisectriz interior del $\angle A$ mide 4. Calcular AC.

A) 1 B) $\sqrt{6}$ C) 2
D) 3 E) 4

5. Se tienen dos circunferencias concéntricas de radios r y 2r. En la circunferencia mayor se ubican los puntos A, B y C tal que AB = BC = AC. En la circunferencia menor se ubica el punto P próximo a B. Si $(AP)^2 + (BP)^2 + (CP)^2 = 15$. Calcular r.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) 2 E) $\sqrt{5}$

6. En la figura, el lado del triángulo equilátero ABC mide 4. Calcular $(PA)^2 - (PB)^2 - (PC)^3$

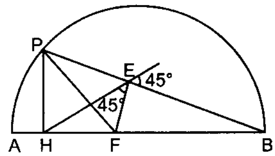


A) 4 B) 8 C) 16
D) 32 E) 9

7. En un triángulo ABC, calcular la medida del ángulo A, si se cumple que $2a^2 = b^2 + c^2 + (b+c)^2$

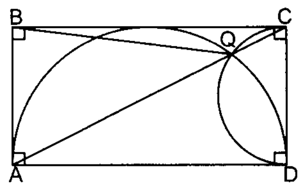
A) 105° B) 60° C) 90°
D) 120° E) 135°

8. De la figura, $\overline{AB}$ es diámetro, FB = 2AH = 4. Calcular PH.



A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{6}$ C) 4
D) 8 E) $2\sqrt{2}$

9. Si AQ= 9 y QC= 4, calcular BQ.

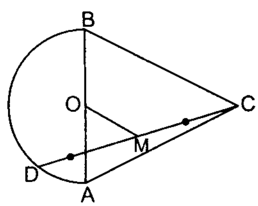


A) $2\sqrt{61}$ B) $18\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{13}$
D) $\sqrt{61}$ E) 10

10. En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que: BC = a, AC = b y AB = c; además: $a^2 = c^2 + bc$; $m\angle ABC = 63$. Calcular $m\angle ACB$

A) 30° B) 45° C) 37°
D) 39° E) 38°

11. En la figura, $AB = BC = AC = 2\sqrt{5}$, O es centro y DM = MC = 3. Calcular OM.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4/5 E) 3/2

12. Se tiene un cuadrilátero ABCD, donde AB = CD, BC=9, BD=10, AC=13, además $m\angle BDC = m\angle BAD + m\angle ADB$. Calcular, AB.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 10 E) 8

13. La circunferencia inscrita en un triángulo ABC, es tangente a $\overline{AC}$ en D. Calcular BD, si AB = 5; BC = 7; AC = 6

A) 5,5 B) 4,5 C) 6
D) 5 E) 4

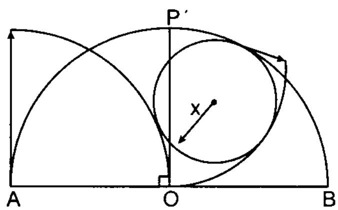
14. Los lados de un triángulo ABC miden AB = 13, BC = 20 y AC = 21. Calcular la distancia del baricentro al lado $\overline{AC}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) $\sqrt{20}$

15. Los radios de dos circunferencias miden 7 y 5, y la distancia entre sus centros es 14. Si un punto exterior dista de las dos circunferencias 8, calcular la distancia de dicho punto a la línea que une los centros.

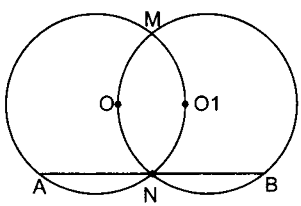
A) 10 B) $\sqrt{106}$ C) 12
D) $\sqrt{132}$ E) 13,2

16. En la figura O, A y P son centros. Si OB = $\sqrt{6}$, calcular x.



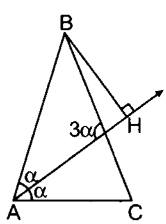
A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

17. En el gráfico, calcular MN, si O y O_1 son centros; AN = 3; NB = 5.



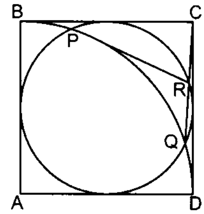
A) 5,5 B) 6,5 C) 7,5
D) 6 E) 7

18. Del gráfico, calcular AC, si AB = 2AC, BH = $\sqrt{6}$



A) 1 B) 2 C) 5 D) 3 E) 4

19. ABCD es cuadrado de lado igual a 4, calcular PR.



A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{5}$
D) 3 E) 1

20. Si en un triángulo A, se cumple que $a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{2}bc$. Hallar la medida de uno de los ángulos del triángulo.

A) 45° B) 60° C) 120°
D) 135° E) 105°

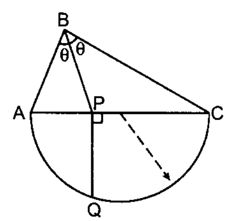
21. En un triángulo ABC se trazan la bisectriz interior $\overline{BD}$ (D en $\overline{AC}$) y la mediana $\overline{BM}$, tal que BD = DM. calcular AC; si (AB)(BC) = 144

A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24

22. Las longitudes de los lados de un triángulo están representados por tres números enteros consecutivos. Si la medida del ángulo mayor es el doble de la medida del menor, calcular la longitud del mayor lado del triángulo.

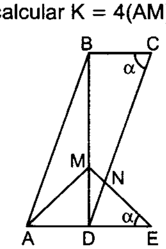
A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 10

23. De la figura, calcular BP, si (AB)(BC) = 32 y BP = PQ



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

24. Siendo ABCD un romboide, MB = MD, MN = 1 y AD = DE = 3, calcular K = $4(AM)^2 + (BD)^2$



A) 85 B) 95 C) 80
D) 90 E) 92

25. Sea ACB un triángulo rectángulo en C, cuya hipotenusa mide d. Se divide la hipotenusa en tres segmentos de igual longitud por medio de los puntos M y N. Hallar la suma de los cuadrados de las medidas de los lados del triángulo CMN.

A) $\frac{d^2}{3}$ B) $\frac{2d^2}{3}$ C) d^2 D) $\frac{4d^2}{3}$ E) $\frac{5d^2}{3}$

26. Se tiene el trapecio ABCD, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, tal que AB = 9; BC = 6; CD = 13 y AD = 16. Calcular la medida del segmento que une los puntos medios de las bases.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 9 E) 11,5

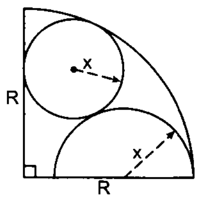
27. En un triángulo ABC se tiene que AB = 10, BC = 4 y AC = 9. Calcular la medida de la bisectriz exterior BQ (Q en la prolongación de $\overline{AC}$).

A) $2\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{2}$ C) 5
D) 4 E) $2\sqrt{6}$

28. En un paralelogramo ABCD, AB = 3; BC = 5 y AC = 7. Calcular la m∠A.

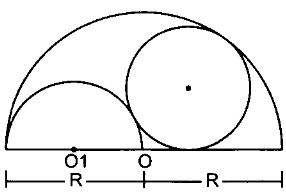
A) 30° B) 53° C) 45°
D) 60° E) 75°

29. En la figura, el radio R= 12, calcular x.



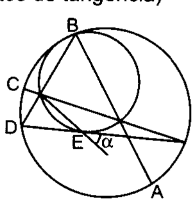
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

30. En la figura, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia si el radio R = 9?



A) 1 B) 5 C) 4
D) 6 E) 4,5

31. Del gráfico, calcular el valor de α, si mADC = 130°, (B y E son puntos de tangencia)



A) 50° B) 32,5° C) 80°
D) 22,5° E) 65°

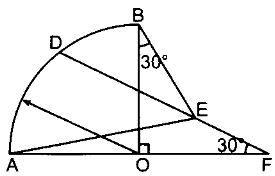
32. Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia. En los arcos AB, BC y AC se ubican los puntos M, N y Q, respectivamente, calcular la suma de las medidas de los ángulos AMB, BNC y CQA.

A) 270° B) 360° C) 720°
D) 540° E) 405°

33. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$, luego se traza una circunferencia que contiene a B y que además es tangente a $\overline{AC}$ en D. Siendo E el punto de intersección de $\overline{AB}$ con la circunferencia mencionada. Calcular m∠C, si m$\overset{\frown}{BE}$ = 64°.

A) 28° B) 32° C) 24°
D) 23° E) 26°

34. Del gráfico, calcular m∠AEB, si m$\overset{\frown}{DB}$ = 30°



A) 45° B) 60° C) 75°
D) 30° E) 90°

35. Se tiene un triángulo ABC, equilátero inscrito en una circunferencia; se ubica el punto medio M del arco AC y el punto medio N de $\overline{BC}$, luego en $\overline{AB}$ se ubica el punto E, tal que $\overline{EN} \perp \overline{MN}$. Calcular m∠NME.

A) 36° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 40°

36. Se tiene dos circunferencias secantes en M y N. Por M se trazan tangentes a ambas circunferencias formando un ángulo que mide 120°. En la circunferencia mayor se traza la cuerda $\overline{ME}$ que interseca a la otra en Q. Calcular la medida del mayor ángulo que forman $\overline{EQ}$ y $\overline{PF}$.

A) 105° B) 120° C) 135°
D) 150° E) 90°

37. Se tiene un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H, inscrito en una circunferencia, en el arco BC se ubica el punto P y se trazan $\overline{PM}$ y $\overline{PN}$ perpendiculares a $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. La prolongación de $\overline{BH}$ interseca a la circunferencia circunscrita en Q y la prolongación de $\overline{MN}$ interseca a $\overline{HP}$ en L, tal que PQ = 24. Calcular LM.

A) 6 B) 9 C) 12
D) 16 E) 18

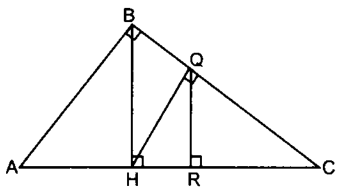
38. En un triángulo ABC, E es excentro relativo a $\overline{BC}$, tal que P es el punto de intersección de $\overline{AE}$ con la circunferencia circunscrita al triángulo ABC. Si BP = 3 y la m∠ABC = 60°. Calcular CE.

A) 3 B) $2\sqrt{3}$ C) 4
D) 6 E) $3\sqrt{3}$

39. Se tiene un triángulo ABC, se trazan las bisectrices interiores $\overline{BQ}$ y $\overline{CP}$, tal que los puntos A, P, I y Q son cíclicos. Calcular la m∠BAC.

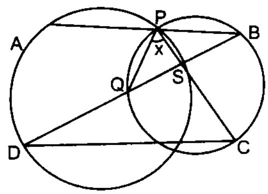
A) 50° B) 53° C) 60°
D) 37° E) 45°

40. En el gráfico, calcular HR, si BQ = 1 y QC = 2



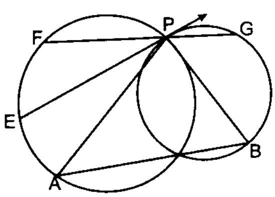
A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{6}/2$ C) $\sqrt{6}/3$
D) $\sqrt{6}/6$ E) $\sqrt{6}/12$

41. En el gráfico: $m\widehat{APS}$ = 110°; calcular el valor de x.



A) 70° B) 35° C) 55°
D) 60° E) 65°

42. En la figura, P es punto de tangencia y $m\widehat{PFE}$ = 146. Calcular la m∠APB.



A) 34° B) 73° C) 68° D) 44° E) 54°

43. Los diámetros de dos circunferencias coplanares y la distancia entre sus centros están en la relación de 13, 10 y 1. ¿Qué posición relativa ocupan las dos circunferencias?

A) Interiores B) Concéntricas
C) Exteriores D) Secantes
E) Tangentes interiores

44. En un triángulo ABC, la circunferencia exinscrita relativa a $\overline{AC}$ es tangente a $\overline{AC}$ en D. Calcular la relación de los perímetros de los triángulos ABD y DBC.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

45. En un cuadrilátero ABCD tenemos que: m∠A = m∠B = m∠ACD = 90°, las medidas de los inradios de los triángulos ABC y ACD suman 8 más AD, calcular el perímetro del cuadrilátero ABCD.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

46. En la prolongación de $\overline{AD}$ de un cuadrado ABCD se ubica el punto E. Se traza $\overline{AH} \perp \overline{CE}$ (H ∈ $\overline{CE}$), calcular m∠DHE.

A) 40° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 50°

47. En una circunferencia de centro O, se trazan el diámetro $\overline{AB}$ y la cuerda $\overline{CD}$ que se interseca en P y, además, $3(m\widehat{AC}) = m\widehat{BD}$. Calcular PC, si AP = 2 y AB = 10

A) 5 B) 3 C) 2,5 D) 4 E) 1

48. Se tiene un cuadrilátero ABCD circunscrito a una circunferencia, tal que CD = 5, m∠A = 37° y m∠B = 90°. Si AD + BC = 21, calcular la medida del radio de la circunferencia.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

49. En un trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, tomando como diámetro $\overline{AB}$ se construye una circunferencia que es tangente a $\overline{CD}$ en M. Calcular CD, si el radio de la circunferencia mide 6 y el perímetro del trapecio es 38.

A) 8 B) 1 C) 13
D) 15 E) 19

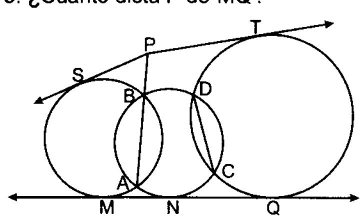
50. Dos circunferencias de centros O y O_1 secantes en P y Q. $\overline{OO_1}$ interseca a las circunferencias en B y A respectivamente. El radio de la circunferencia de centro O_1 tiene igual longitud con la cuerda $\overline{AC}$ de la otra circunferencia. Si $m\widehat{PC} = m\widehat{PA}$. Calcular la $m\angle\widehat{PBQ}$.

A) 120° B) 90° C) 60°
D) 80° E) 106°

51. Dado un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{AD}$ y la mediana AM de manera que AD = DM y (AB)(AC) = 16. Calcular BC.

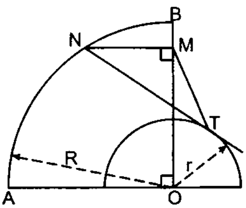
A) 4 B) 8 C) 12 D) 16 E) 10

52. Según el gráfico, M, N, Q, S y T son puntos de tangencia. AB = 9,2(PS) = 2(PT) = MN = NQ = 12 y DC = 5. ¿Cuánto dista P de $\overleftrightarrow{MQ}$?



A) $\frac{3}{5}\sqrt{14}$ B) $2\sqrt{14}$ C) $\frac{10}{3}\sqrt{14}$
D) $5\sqrt{14}$ E) $\frac{13}{7}\sqrt{14}$

53. Según el gráfico, R = 25, r = 15 y MN = 7. Si T es punto de tangencia y $m\overset{\frown}{NT} = \theta$, calcular m∠OMT.

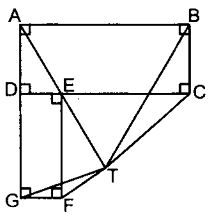


A) $\frac{\theta}{2}$ B) $90° - \theta$ C) $\frac{\theta}{3}$
D) $\frac{3\theta}{2}$ E) $90° - 2\theta$

54. En la región exterior relativa al lado BC de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se ubica un punto D, tal que m∠ADC = 90°. Si AB = 7, CD = 15 y AC = 25, calcular la distancia entre los puntos medios de BC y AD.

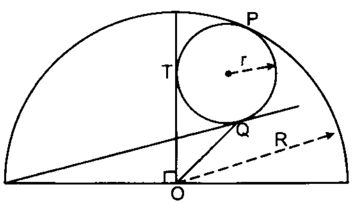
A) $\sqrt{73}$ B) $\sqrt{37}$ C) $\sqrt{47}$
D) $\sqrt{74}$ E) $3\sqrt{3}$

55. Según el gráfico, AE = ET, $(BT)^2 + (GT)^2 = 37$ y $(CT)^2 + (TF)^2 = 10$, calcular AT.



A) 2   B) 4   C) 6
D) $3\sqrt{3}$ E) 5

56. Según el gráfico, T, P y Q son puntos de tangencia, R = 5 y r = 2. Calcular OQ.

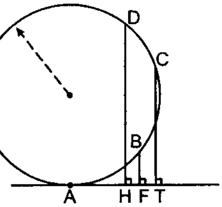


A) $5(3 - \sqrt{2})$ B) $5\sqrt{3}(3 - \sqrt{2})$
C) $\frac{5\sqrt{3}}{9}(3 - \sqrt{2})$ D) $\frac{5\sqrt{3}}{3}(3 - \sqrt{2})$
E) $\frac{9}{5}\sqrt{3}(\sqrt{2} - 1)$

57. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la mediana AM y la altura BQ, en el triángulo ABM se traza la altura BH. Si QH = HM = 3 y BQ = 4, calcular CH.

A) $3\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) 5   E) $5\sqrt{2}$

58. Según el gráfico $m\overset{\frown}{DC} = m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{BC}$, DH = a y BF = b. Calcular CT (A es punto de tangencia).



A) $\sqrt{ab} - b$ B) $a - b$ C) $\frac{a+b}{2}$
D) $\frac{\sqrt{ab}}{4}$ E) $\sqrt{ab} + b$

59. En un cuadrilátero convexo ABCD de diagonales perpendiculares $m\angle DAC = \frac{m\angle ABD}{2} = \frac{m\angle ACB}{4}$

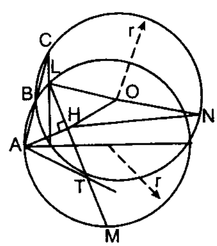
Luego con centro en D y radio DA se traza un arco y se ubica el punto P, de modo que m∠PDC= 90° y PD = 6 cm, calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

A) 2 cm   B) $2\sqrt{3}$ cm   C) 6 cm
D) 3 cm   E) $3\sqrt{3}$ cm

60. Desde un punto exterior a una circunferencia se traza las secantes PAB y PCD, en el arco BD se ubica el punto E tal que $m\overset{\frown}{ED} = m\overset{\frown}{AC}$. Si (BE) (PC)= 22 y (BE)(CD) = 27, calcular (BD)(CE).

A) 25   B) 22   C) 35
D) 49   E) 98

61. En el gráfico, T es punto de tangencia, $\overline{LN} \parallel \overline{AT}$, OH = 4 y $(LN)^2 + (AM)^2 = 164$. Calcular HN.



A) 6   B) 12   C) 8   D) 4   E) 9

62. En una circunferencia de centro O, se trazan las cuerdas perpendiculares AB y CD (C en el menor arco AB); la prolongación de $\overline{BO}$ interseca a la circunferencia en E, tal que $m\overset{\frown}{AE} = m\overset{\frown}{AC}$ luego $\overleftrightarrow{OD} \cap \overleftrightarrow{AB} = (F)$, (BF)(AB)= 15 y OF = 2, calcular AB.

A) $3\sqrt{5}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $\frac{3}{2}\sqrt{10}$

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

63. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior CL, luego se traza $\overline{BH} \perp \overline{CL}$ ($H \in \overline{CL}$). Si AB = 15, BC = 13 y AC = 14, calcular AH.

A) $\sqrt{73}$ B) $\sqrt{59}$ C) $\sqrt{61}$

D) $\sqrt{8}$ E) $7\sqrt{2}$

64. Desde un punto exterior a una circunferencia se trazan las tangentes PA y PB a dicha circunferencia (A y B son puntos de tangencia), en las prolongaciones de $\overline{AP}$ y $\overline{PB}$ se ubican los puntos C y D, tal que m∠CDP = 90°. Si AC = a, CD = b y BD = c, calcular el radio de la circunferencia.

A) $\frac{a^2-b^2-c^2}{2b}$ B) $\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

C) $\frac{a^2+b^2-c^2}{4b}$ D) $\frac{abc}{4}$

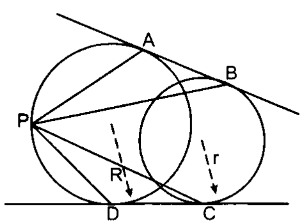
E) $\frac{a^2+b^2-c^2}{4a}$

65. En un cuadrado ABCD, en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos N y M respectivamente, tal que m∠NAM = m∠MAD, BN = 5, MD = 8; luego se traza $\overline{MH} \perp \overline{AN}$ ($H \in \overline{AN}$). Calcular $\frac{HC}{MN}$.

A) $\frac{4}{5}$ B) $\frac{11}{12}$ C) $\frac{12}{13}$

D) $\frac{13}{14}$ E) $\frac{11}{13}$

66. En el gráfico, A, B, C y D son puntos de tangencia. Si $\frac{(PA)^2-(PD)^2}{(PB)^2-(PC)^2} = 8$, calcular $\frac{R}{r}$.



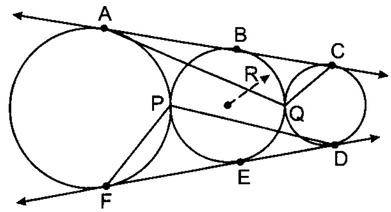
A) 2 B) 4 C) 8 D) $2\sqrt{2}$ E) 16

67. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. En $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se ubica los puntos P y Q respectivamente, tal que m∠PDQ= 90°. Luego, en el triángulo APD, se traza la altura PH; si la distancia de B a $\overline{AC}$ es el doble de $\overline{HD}$, AB = c y BC = a, calcular PB.

A) $\frac{c(4a-c)}{2(a+c)}$ B) $\frac{a(a+c)}{a+2c}$ C) $\frac{c(3a-c)}{2(a+c)}$

D) $\frac{a(4c-a)}{2(a+c)}$ E) $\frac{a(3c-a)}{2(a+c)}$

68. En la figura, $(AQ)^2 + (PD)^2 - [(FP)^2 + (QC)^2] = 16$; calcular R.



A) 1 B) 2 C) 4 D) 8 E) 9

69. En un paralelogramo ABCD, las bisectrices exteriores de los ángulos de vértices C y D se intersecan en M, tal que BC = 4, CD = 10 y AM = 12. Calcular BM.

A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt{13}$ C) $\sqrt{17}$

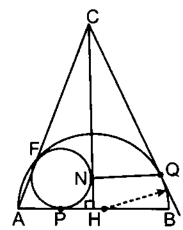
D) $2\sqrt{13}$ E) $2\sqrt{17}$

70. En un triángulo ABC, AB + BC = 2(AC) y BC − AB = 8. Calcular la longitud de la proyección de la mediana relativa a $\overline{AC}$ sobre $\overline{AC}$.

A) 2 B) 4 C) 6

D) 8 E) 16

71. En la figura, CN= a, NH = b y HQ = c; calcular NQ (F, N, Q y P son puntos de tangencia).



A) $\frac{a}{a+c}$ B) $\frac{b}{a+b}$ C) $c\sqrt{\frac{b}{a+b}}$

D) $c\sqrt{a+b}$ E) $c\sqrt{\frac{a}{a+b}}$

72. En un rectángulo ABCD en $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ se ubica los puntos M y N, tal que el triángulo MNC es equilátero, AB = 5 y AD = 6. Calcular MN.

A) $\sqrt{61+30\sqrt{3}}$ B) $\sqrt{51+10\sqrt{3}}$

C) $\sqrt{41+10\sqrt{3}}$ D) $\sqrt{31+15\sqrt{3}}$

E) $2\sqrt{61-30\sqrt{3}}$

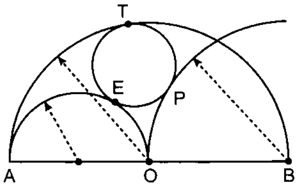
73. En un cuadrilátero bicéntrico ABCD, la circunferencia inscrita es tangente a $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$ en P, Q, T y L, respectivamente, luego con centros en Q y T, se traza las circunferencias de radios $\overline{QP}$ y $\overline{TL}$ respectivamente, las cuales se intersecan en M. Si la m∠BAD = 53° y la circunferencia inscrita en el cuadrilátero ABCD es de radio $\sqrt{10}$, ¿cuánto dista M del punto medio de $\overline{QT}$?

A) $\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{2}$

74. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior BF y la mediana BM de tal manera que MF = BF y (AB)(BC) = 16 cm^2. Calcular AC.

A) 5 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 10 cm E) 12 cm

75. Según la figura, AO = OB. Calcular $m\overset{\frown}{EO}$ (E, P y T son puntos de tangencia).



A) 75° B) 60° C) 53°
D) 45° E) 74°

76. Se tiene una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, centro O y radio R, donde se ubican M y L (M ∈ $\overset{\frown}{AL}$), tal que $m\overset{\frown}{ML} = m\overset{\frown}{LB}$, OC = a; C ∈ $\overline{ML}$, $a^2 + R^2 = 32$. Calcular AC.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{3}$

77. En un triángulo acutángulo ABC, la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{BC}$ mide la cuarta parte de BC. Calcular BC, si $(AC)^2 - (AB)^2 = 8$.

A) 2 B) 4 C) 8
D) 16 E) 6

78. Se tiene dos circunferencias tangentes interiores en T, tal que el triángulo ATC está inscrita en la mayor circunferencia y es tangente a la mayor circunferencia y es tangente a la menor en Q. Calcular TQ, si AT = 6, TC = 9 y AC = 10.

A) $\sqrt{30}$ B) 6 C) 5
D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{5}$

79. Se tiene un rectángulo ABCD en la prolongación de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se ubican los puntos P y Q, respectivamente. Si O es el centro del rectángulo DQ = 8, BC = 10 y OP = PQ y m∠OPQ = 90°; calcular la longitud de la proyección de $\overline{CP}$ sobre $\overline{OP}$.

A) $13\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{13}$ C) $\sqrt{73}$
D) $\frac{42\sqrt{73}}{73}$ E) $\frac{\sqrt{73}}{3}$

80. Se tiene una circunferencia inscrita en un cuadrado ABCD de lado 4 donde se traza un cuadrante BAD. Calcular la distancia de C a un punto de la intersección de la circunferencia con el arco del cuadrante.

A) $2\sqrt{2}$ B) 4 C) 3 D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2}$

81. Se tiene un rombo ABCD, M es punto medio de $\overline{AB}$, $\overline{CM} \cap \overline{BD}$ (T), m∠DAB = 106° y CD = 10. Calcular CT.

A) $\sqrt{17}$ B) $2\sqrt{17}$ C) 5
D) 6 E) $3\sqrt{2}$

82. Se tiene una semicircunferencia de centro O y de diámetro $\overline{AB}$, donde se ubica Q en $\overline{AB}$ tal que $\overline{QD} \perp \overline{AB}$ y D ∈ $\overset{\frown}{AB}$, se traza el cuadrante DQE tal que DB y el arco DE se intersecan en C. Calcular AO, si DC = CB = 2

A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ E) 2

83. Se tiene dos semicircunferencia de diámetro $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ cuyos arcos se intersecan en N y A (AC = 2r y AB = 2R) tal que NP ⊥ AC y $\overline{NQ} \perp \overline{AB}$. Calcular R/r si m∠NPQ = 53°

A) $\frac{5}{4k}$ B) $\frac{4}{3k}$ C) $\frac{4k}{3}$
D) $\frac{5}{3k}$ E) $\frac{5k}{4}$

84. En un triángulo ABC; se traza la altura BH y con diámetro $\overline{HD}$ ($\overline{DC} \in \overline{HC}$) se traza una semicircunferencia tangente a $\overline{BC}$ en T. Si AB = 13, $\overline{BC}$ = 20 y AC = 21, calcular el radio de la semicircunferencia.

A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6

85. Se tiene una semicircunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$, siendo L un punto exterior al arco AC, tal que $\overline{LT}$ es tangente en T. Calcular OM, si M punto medio de LT. LM = MT = 1 y LC = $2\sqrt{5}$.

A) $\sqrt{2}$ B) 3 C) $\sqrt{3}$
D) $3\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{2}$

86. Se tiene un cuadrado ABCD inscrito en una circunferencia de centro O y de lado $2\sqrt{2}$. Calcular CN, siendo N punto medio de arco CD.

A) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ E) $3\sqrt{2-\sqrt{3}}$

87. Se tiene un trapecio ABCD de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$. Si AB = 13, BC = 10, CD = 15 y AD = 24; calcular BD.

A) $\sqrt{505}$ B) $\sqrt{503}$ C) $\sqrt{511}$
D) $\sqrt{507}$ E) $\sqrt{504}$

88. En un plano se traza la circunferencia C_1 y C_2 de modo que $C_1 \cap C_2$ = (P). En C_1 se ubica el punto A del cual se traza la tangente $\overline{AC}$ (C ∈ C_2), luego $\overline{CP} \cap C_1$ = {B}, BP = 5, PC = 4 y AC = 3. Calcular la distancia de B a $\overline{AC}$.

A) $\frac{4}{13}\sqrt{14}$ B) $\frac{3}{2}\sqrt{11}$ C) $\frac{\sqrt{11}}{3}$
D) $\sqrt{14}$ E) $\frac{6}{5}\sqrt{14}$

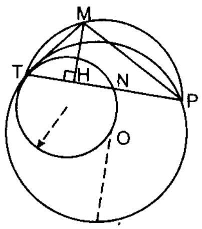
89. En un rectángulo cuya longitud de lados es 36 y 48, se traza la diagonal. Si en cada uno de los triángulos determinados está inscrito una circunferencia, calcular la distancia entre los centros.

A) $10\sqrt{2}$ B) $10\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{5}$
D) $5\sqrt{5}$ E) $12\sqrt{5}$

90. En un triángulo ABC, AB = 5, BC = 7 y AC = 6, se traza la altura $\overline{BH}$ y la bisectriz interior $\overline{BD}$. Calcular HD.

A) 3/2 B) 6/7 C) 5/6
D) 4/5 E) 7/2

91. En el gráfico, O y T son puntos de tangencia de la circunferencia TH = HN = 2, calcular TM.



A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

92. Se tiene un triángulo ABC, donde se traza la altura $\overline{BE}$ y la ceviana interior $\overline{BD}$ tal que $2(m\angle ABE) = m\angle DBC$ y $4(AE) = 4(ED) = DC = 12$. Calcular BD.

A) $2\sqrt{6}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{6}$
D) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ E) $3\sqrt{6}$

93. Se tiene un cuadrilátero ABCD recto en D, donde se ubica M y N en $\overline{BC}$ ($N \in \overline{BD}$) tal que $2(MN) = 2(NC) = BM = 2$, $AB = AD$, $CD = 5$. Calcular $(AN)^2 - (AM)^2$.

A) 25 B) $\frac{31}{4}$ C) 35
D) 9 E) $\frac{47}{3}$

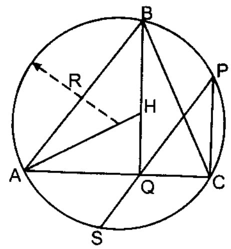
94. Se tiene un triángulo ABC en el cual se traza la altura $\overline{BH}$ ($H \in \overline{AC}$) y $\overline{HM}$ ($M \in \overline{BC}$) tal que BM = MC. Si AB = 5, BC = 7 y AC = 6. Calcular la distancia de M a $\overline{AC}$.

A) 7 B) 3,5 C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{7}$ E) $\frac{6}{7}$

95. Se tiene tres circunferencias tangentes exteriores dos a dos de radios 5, 6 y 7; calcular la mayor altura del triángulo cuyo vértice son los centros de dichas circunferencias.

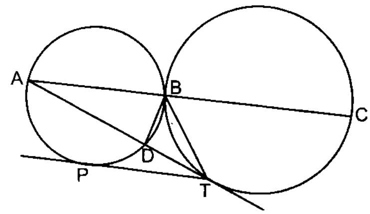
A) $\frac{8}{11}\sqrt{10}$ S B) $\frac{8}{11}\sqrt{11}$ S C) $\frac{12}{11}\sqrt{10}$ S
D) $\frac{10}{11}\sqrt{10}$ S E) $\frac{12}{11}\sqrt{11}$ S

96. Según el gráfico, H es ortocentro del triángulo ABC. Si $2R^2 - (CP)^2 = 18$ y $m\overset{\frown}{PC} = m\overset{\frown}{CS}$, calcular AH.



A) 6 B) 5 C) 4 D) 9 E) 8

97. Según el gráfico, B, P y T son puntos de tangencia; si BD = 2, BT = 4 y PT = 6, calcular AB.

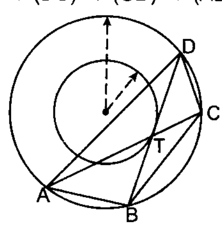


A) 10 B) 5 C) 7,5
D) 12 E) 9

98. En un cuadrilátero inscrito ABCD de diagonales perpendiculares y secantes en P, se traza las perpendiculares $\overline{PE}$, $\overline{PF}$, $\overline{PG}$ y $\overline{PH}$; a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$, respectivamente. Si $EG = GH = 2(FG) = 2a$ y $FH = b$, calcular EH.

A) $\frac{2}{3}(a+b)$ B) $\frac{4}{3}(a+b)$ C) $\frac{a+b}{2}$
D) $\frac{2ab}{a+b}$ E) $\frac{5a+b}{3}$

99. Se tiene dos circunferencias concéntricas, siendo T un punto de tangencia, CT = 3 cm y AT = 5 cm, calcular $(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2$.

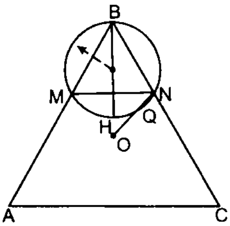


A) 120 cm^2 B) 128 cm^2 C) 130 cm^2
D) 142 cm^2 E) 144 cm^2

100. En un paralelogramo ABCD, $\overline{BD} \perp \overline{CD}$ y en la región interior se ubica el punto P. Si $(AP)^2 + (PC)^2 = 55$ y $(PB)^2 + 2(CD)^2 = 30$, calcular PD.

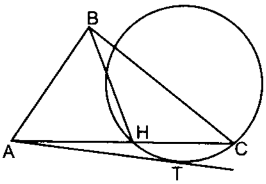
A) 7 B) 5 C) 6
D) 8 E) 4

101. En el gráfico, H y O son, respectivamente, el ortocentro y el circuncentro del triángulo ABC.
Si $m\widehat{MB} = m\widehat{MHQ} = 120°$, MN = m y OQ = n, calcular BM.



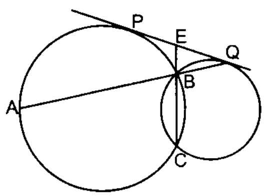
A) $\sqrt{2(3m^2+n^2)}$ B) $\dfrac{3m^2+n^2}{m+n}$ C) $\dfrac{3m^2-n^2}{m}$
D) $\sqrt{3m^2+n^2}$ E) $\dfrac{\sqrt{2(3m^2-n^2)}}{2}$

102. Hallar AT, si $m\angle ABH = m\angle ACB$ y AB = 8 (T es punto de tangencia)



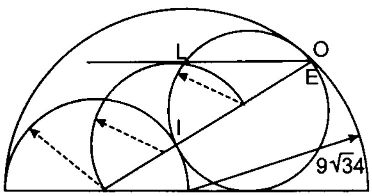
A) 4 B) 6 C) 8
D) 12 E) 16

103. En el gráfico, P y Q son puntos de tangencia. Si AB = 6, BQ = 2, BC = 3, calcular EB.



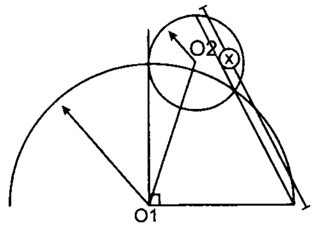
A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) 1,2

104. Del gráfico, calcular LE (D, I, L, O, son puntos de tangencia).



A) $10\sqrt{11}$ B) $10\sqrt{13}$ C) $10\sqrt{17}$
D) $10\sqrt{19}$ E) $10\sqrt{21}$

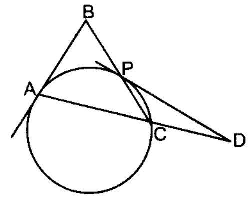
105. Del gráfico, calcular x, en función de a.
Donde $O_1O_2 = a$



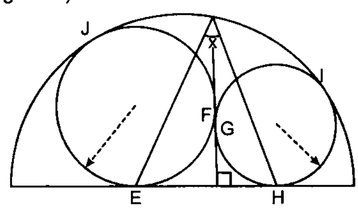
A) $a\sqrt{7}$ B) $a\sqrt{6}$ C) $a\sqrt{5}$
D) $a\sqrt{3}$ E) $a\sqrt{2}$

106. En el gráfico, A y P son puntos de tangencia.
Si AB = a y DP = b, calcular BD.

A) $\sqrt{a^2+b^2}$
B) $\sqrt{a^2+b^2-ab}$
C) $\sqrt{a^2+b^2-3ab}$
D) $\sqrt{a^2-b^2+ab}$
E) $\sqrt{a^2+b^2+ab}$

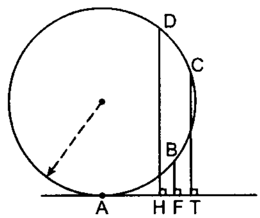


107. De la figura, calcular x (E, F, G, H, I, J son puntos de tangencia).



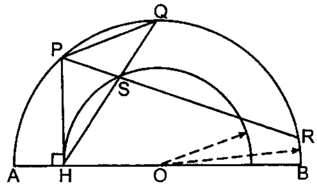
A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 64°

108. Según el gráfico, $m\widehat{DC} = m\widehat{AB} = m\widehat{BC}$, DH = a y BF = b. Calcular CT (A es punto de tangencia).



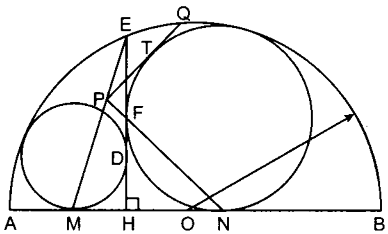
A) $\sqrt{ab} - b$ B) $a - b$ C) $\dfrac{a+b}{2}$
D) $\dfrac{\sqrt{ab}}{4}$ E) $\sqrt{ab} + b$

109. Calcular $m\widehat{QR}$, si HP = PQ y HS = 2SQ.



A) 30° B) 45° C) 15°
D) 60° E) 22°30'

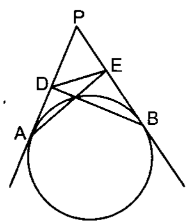
110. Hallar PT, si PE= 2. D, F, M, N y T puntos de tangencia.



A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{5}{2}$ C) $\sqrt{3}$
D) $\frac{8}{3}$ E) 2

111. En la figura, A y B son puntos de tangencia, si DA = a y EB = b.

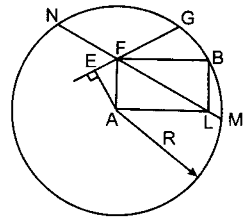
A) $\sqrt{a^2+ab+b^2}$
B) $\sqrt{a^2-ab+b^2}$
C) $\sqrt{a^2+2ab+2b^2}$
D) $\sqrt{a^2+ab-b^2}$
E) $\sqrt{a^2+a-b^2}$



112. Se tiene un triángulo ABC, donde AB = 8 m, BC = 5 m, AC = 6 m, se traza el diámetro $\overline{EN}$ perpendicular al lado $\overline{BC}$ y en su punto medio (N en $\overline{BC}$), las prolongaciones de $\overline{EA}$ y $\overline{BC}$ se cortan en F. Calcular AF.

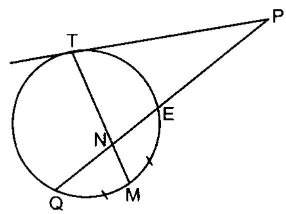
A) 8 m B) 10 m C) $4\sqrt{7}$ m
D) $5\sqrt{7}$ m E) $6\sqrt{7}$ m

113. En el gráfico, AFBL es un rectángulo: (2EF = FG), FG = 48, NF = 4, LM = 2. Calcular R.



A) 10 B) 8 C) 6
D) 5 E) 4

114. En la figura mostrada, calcular QN (T es punto de tangencia). PT = 9, EN = 3.



A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

115. Graficar a una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$. Trazar las cuerdas $\overline{AF}$ y $\overline{BE}$ que se intersecan en Q. Calcular el valor de $\overline{FB}$, sabiendo que AQ = 8 dm, QF = 4 dm, QE = 6 dm.

A) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ dm B) $\frac{4}{3}\sqrt{11}$ dm C) $\frac{4}{3}\sqrt{7}$ dm
D) $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ dm E) $\frac{16}{3}$ dm

CLAVES

1. C	16. B	31. B	46. C	61. C	76. D	91. A	106. E
2. C	17. E	32. B	47. B	62. C	77. B	92. C	107. B
3. D	18. B	33. B	48. D	63. C	78. E	93. A	108. E
4. C	19. D	34. E	49. C	64. A	79. B	94. A	109. D
5. A	20. D	35. B	50. C	65. C	80. B	95. C	110. E
6. A	21. E	36. B	51. B	66. C	81. D	96. A	111. B
7. D	22. B	37. C	52. C	67. E	82. E	97. A	112. E
8. C	23. D	38. E	53. B	68. A	83. D	98. A	113. A
9. D	24. D	39. C	54. B	69. E	84. E	99. B	114. D
10. D	25. B	40. C	55. C	70. D	85. A	100. B	115. C
11. A	26. B	41. C	56. C	71. E	86. B	101. E	
12. B	27. B	42. B	57. D	72. E	87. B	102. C	
13. D	28. D	43. A	58. E	73. B	88. C	103. B	
14. C	29. D	44. A	59. D	74. C	89. B	104. C	
15. C	30. C	45. E	60. D	75. B	90. B	105. E	

Relaciones métricas en la circunferencia Potencia

12 capítulo

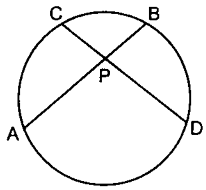
Claudio Ptolomeo (Ptolemaida, Tebaida, 100 d. C.-Cánope, 170 d. C) fue un astrónomo, astrólogo, químico, geógrafo y matemático grecoegipcio. Llamado comúnmente en español Ptolomeo o Tolomeo, vivió y trabajó en Egipto (se cree que en la famosa Biblioteca de Alejandría), donde destacó entre los años 127 d. C. y 145 d. C. Divulgador de la ciencia astronómica de la antigüedad, se dedicó a la observación astronómica en Alejandría en época de los emperadores Adriano y Antonino Pío.

El teorema de Ptolomeo es una relación en geometría euclidiana entre los cuatro lados y las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico. Esta relación puede ser expresada de manera verbal de la siguiente forma: «En todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales». Existe una generalización de este teorema llamado el teorema de Casey, que involucra a cuatro circunferencias no secantes y tangentes interiores a una quinta.

Fuente: Wikipedia

TEOREMA DE CUERDAS

En toda circunferencia, el producto de las longitudes de los segmentos sobre cuerdas secantes es constante.



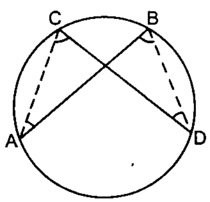
$$\boxed{(PA)(PB) = (PC)(PD)}$$

Demostración:

Se trazan $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$; por semejanza de triángulos:

$m\angle C = m\dfrac{\overset{\frown}{AD}}{2} = m\angle B \ \wedge \ m\angle A = m\dfrac{\overset{\frown}{CB}}{2} = m\angle D$

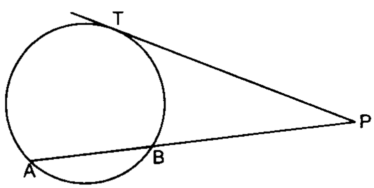
$\triangle ACP \sim \triangle DBP$:



$\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB} \quad \therefore \ (PA)(PB) = (PC)(PD)$

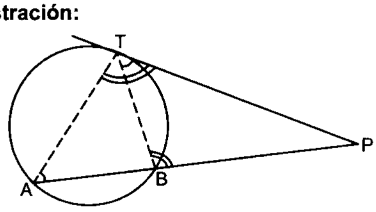
TEOREMA DE LA TANGENTE

El cuadrado de la longitud de una tangente es igual al producto de longitudes de una secante entera y su parte externa, trazadas desde el mismo punto a la circunferencia.



$$\boxed{(PT)^2 = (PA)(PB)}$$

Demostración:



Se trazan $\overline{TB}$ y $\overline{AT}$, entonces:

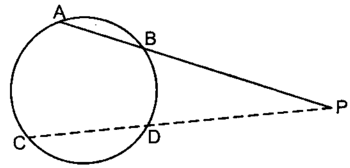
$m\angle A = \dfrac{m\overset{\frown}{TB}}{2} = m\angle BTP$. Luego: $\triangle ATP \sim \triangle TBP$

$\Rightarrow m\angle ATP = m\angle TBP$. Así $\dfrac{PT}{PA} = \dfrac{PB}{PT}$

De donde: $(PT)^2 = (PA)(PB)$

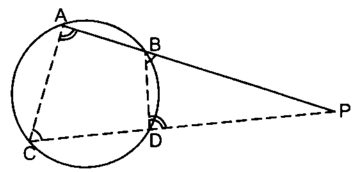
TEOREMA DE LA SECANTE

El producto de las longitudes de una secante y su parte externa es constante.



$$\boxed{(PA)(PB) = (PC)(PD)}$$

Demostración:



Se trazan $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Luego, en el cuadrilátero ABCD:

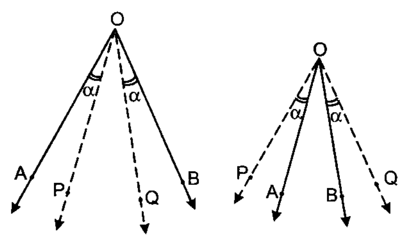
$m\angle A = m\angle BDP$ y $m\angle C = m\angle DBP$

(Propiedad del cuadrilátero inscrito).

$\triangle PAC \sim \triangle PDB$: $\dfrac{PA}{PD} = \dfrac{PC}{PB}$

$\therefore \ (PA)(PB) = (PC)(PD)$

RECTAS ISOGONALES



Son aquellas que, partiendo del vértice, forman ángulos congruentes con los lados de un ángulo. Se dice que son simétricas respecto a la bisectriz del ángulo, porque forman ángulos congruentes con dicha bisectriz.

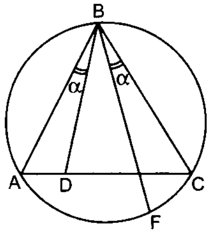
Por ejemplo, $\overrightarrow{OP}$ y $\overrightarrow{OQ}$, se llaman isogonales respecto a $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$.

Los segmentos que tienen un extremo O y los otros sobre las rectas isogonales, se llaman isogonales.

Teoremas

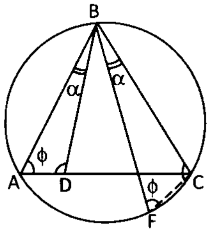
1. En todo triángulo, el producto de las longitudes de segmentos isogonales que parten de un vértice, medidos uno hasta el lado opuesto y otro hasta la circunferencia circunscrita, es igual al producto de longitudes de los lados que concurren con ellos en el vértice mencionado.

Así, para el $\triangle ABC$ de la figura:



$$\boxed{(BD)(BF) = (AB)(BC)}$$

Demostración:



Se traza $\overline{CF}$, entonces: $m\angle A = m\angle F = m\dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2}$

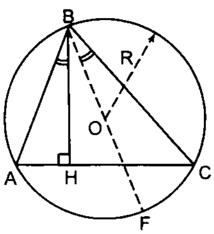
$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle FBC$

Luego: $m\angle ADB = m\angle FCB$

De la semejanza: $\dfrac{BD}{BC} = \dfrac{AB}{BF}$

$\therefore\ (BD)(BF) = (AB)(BC)$

2. En todo triángulo, el producto de las longitudes de dos lados, es igual al producto de las longitudes de la altura relativa al tercer lado y al diámetro de circunferencia circunscrita.



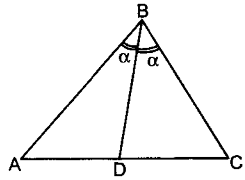
En efecto; sea el $\triangle ABC$, de circuncentro O y circunradio R. En el capítulo de circunferencias (capítulo 7), se ha demostrado en un problema que:
$m\angle FBC = m\angle ABH$
Es decir, $\overline{BH}$ y $\overline{BF}$ son segmentos isogonales respecto al ángulo ABC. Luego, por el teorema anterior, $(AB)(BC) = (BH)(BF)$

$\therefore\ \boxed{(AB)(BC) = (BH)(2R)}$

◀ SEGUNDO TEOREMA DE LA BISECTRIZ

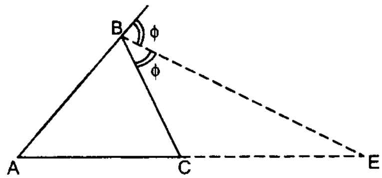
En todo triángulo, el cuadrado de la longitud de una bisectriz es igual a la diferencia del producto de longitudes de los lados que concurren con dicha bisectriz y los segmentos medidos del pie de la bisectriz a los vértices del lado opuesto. Así, para el $\triangle ABC$, tenemos:

Bisectriz interior



$$\boxed{(BD)^2 = (AB)(BC) - (AD)(DC)}$$

Bisectriz exterior

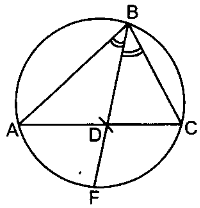


$$\boxed{(BE)^2 = (EA)(EC) - (AB)(BC)}$$

Demostración:

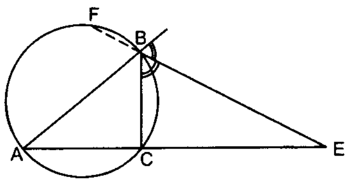
Se puede demostrar, usando el teorema de Stewart, pero lo haremos con el teorema de isogonales.

a. $\overline{BD}$ y $\overline{BF}$ son isogonales respecto al ángulo ABC. Entonces, según el teorema para estas líneas:



$(BD)(BF) = (AB)(BC)$
Es decir: $BD(BD + DF) = (AB)(BC)$
$(BD)^2 + (BD)(DF) = (AB)(BC)$
Pero, por el teorema de cuerdas:
$(BD)(DF) = (AD)(DC)$
En lo anterior: $(BD)^2 + (AD)(DC) = (AB)(BC)$
$(BD)^2 = (AB)(BC) - (AD)(DC)$

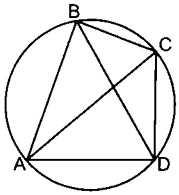
b. En este caso, los segmentos isogonales son $\overline{BE}$ y $\overline{BF}$, entonces: $(BE)(BF) = (AB)(BC)$



Es decir: $(BE)(EF - BE) = (AB)(BC)$
$\Rightarrow (BE)^2 = (BE)(EF) - (AB)(BC)$ ...(1)
Ahora, por el teorema de la secante:
$(EF)(EB) = (EA)(EC)$
$(BE)(EF) = (EA)(EC)$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1):
$(BE)^2 = (EA)(EC) - (AB)(BC)$

TEOREMAS DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito (o inscriptible) en una circunferencia, se cumplen:



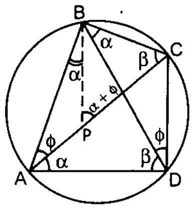
I. El producto de las diagonales es igual a la suma de productos de longitudes de lados opuestos.

$$\boxed{(AC)(BD) = (AB)(CD) + (BC)(AD)}$$

II. La razón de diagonales es igual a la razón de la suma de productos de longitudes de los lados que concurren a los extremos de cada diagonal (teorema de Viette).

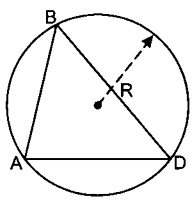
$$\frac{AC}{BD} = \frac{(AB)(AD) + (BC)(CD)}{(AB)(BC) + (AD)(CD)}$$

Demostración:



I. Se toma un punto P de $\overline{AC}$, tal que:
$m\angle ABP = a = m\angle DBC$
Entonces: $\triangle ABP \sim \triangle DBC$.
$\frac{AB}{BD} = \frac{AP}{CD} \Rightarrow (AB)(CD) = (AP)(BD)$ ...(1)
$\triangle ABD \sim \triangle PBC$: $\frac{AD}{PC} = \frac{BD}{BC}$
$\Rightarrow (AD)(BC) = (PC)(BD)$ ...(2)
Sumando miembro a miembro (1) y (2):
$(AB)(CD) + (AD)(BC) = (AP + PC)(BD)$
$\therefore (AB)(CD) + (AD)(BC) = (AC)(BD)$

II. Para demostrar este teorema, usaremos la fórmula del área de un triángulo:



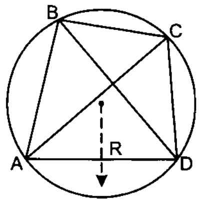
$$S_{\triangle ABD} = \frac{(AB)(BD)(AD)}{4R}$$

(Esto se demuestra en el capítulo de áreas)
Entonces, para el cuadrilátero ABCD
$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC}$ y $S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$
Es decir, $S_{ABC} + S_{ADC} = S_{ABD} + S_{BCD}$

Usando la fórmula en mención:

$$\frac{(AB)(BC)(AC)}{4R} + \frac{(AD)(CD)(AC)}{4R} = \frac{(AB)(BD)(AD)}{4R} + \frac{(BC)(CD)(BD)}{4R}$$

Cancelando 4R y factorizando términos comunes:



$$[(AB)(BC) + (AD)(CD)]AC = [(AB)(AD) + (BC)(CD)]BD$$

De donde: $\frac{AC}{BD} = \frac{(AB)(AD) + (BC)(CD)}{(AB)(BC) + (AD)(CD)}$

POTENCIA

La potencia de un punto respecto al centro de una circunferencia es el producto de las distancias dirigidas de dicho punto a dos puntos cualesquiera de la circunferencia; siempre y cuando sus tres puntos se encuentren en línea recta.

Por convención. Se considera la potencia (+) cuando el punto es exterior a la circunferencia y a la potencia se le antepone el signo (−) cuando el punto es interior a la circunferencia.

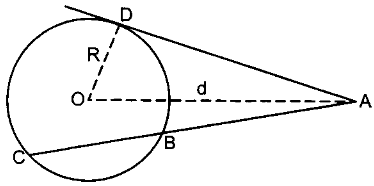
Potencia de un punto exterior

Se puede obtener de las siguientes formas:

a. El cuadrado de la tangente trazada por dicho punto a la circunferencia.

$$\boxed{Pot_{A(O)} = AD^2}$$

b. El producto de una secante por su parte externa.



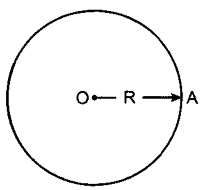
$$\boxed{Pot_{A(O)} = (AC)(AB)}$$

c. **Fórmula general:** $\triangle ODA$: $(AD)^2 = d^2 - R^2$

Luego: $\boxed{Pot_{A(O)} = d^2 - R^2}$

d: es la distancia del punto al centro O.

Potencia de un punto de la circunferencia



De la fórmula obtenida:
$Pot_{A(O)} = d^2 - R^2$, pero d = R
$Pot_{A(O)} = R^2 - R^2$
$Pot_{A(O)} = 0$

Potencia de un punto interior

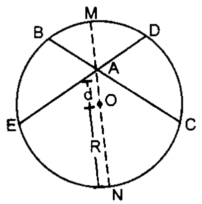
Se puede obtener de las siguientes formas:

a. El producto de segmentos de cuerda trazados por el punto, anteponiéndole el signo menos.

$$Pot_{A(O)} = -(BA)(AC) = -(DA)(AE)$$

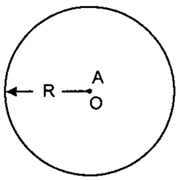
b. Fórmula general: usando la distancia del punto al centro O.

$$Pot_{A(O)} = -(MA)(AN) = -(R-d)(R+d) = (d-R)(d+R)$$



$$\boxed{Pot_{A(O)} = d^2 - R^2}$$

Potencia del centro:



Es el mínimo valor de la potencia.
De la fórmula, se tiene: $Pot_{A(O)} = d^2 - R^2$; pero $d = 0$

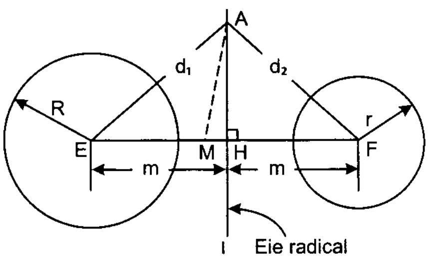
$$\boxed{Pot_{A(O)} = -R^2}$$

EJE RADICAL

Es el lugar geométrico de todos los puntos que tienen igual potencia con relación a los centros de dos circunferencias.

Propiedades

1. El eje radical es una recta perpendicular al segmento que une los centros de las dos circunferencias.



Se afirmará que L es el eje radical

Por definición:

$Pot_{A(E)} = Pot_{A(F)} \Rightarrow d_1^2 - R^2 = d_2^2 - r^2$

$\Rightarrow d_1^2 - d_2^2 = R^2 - r^2$

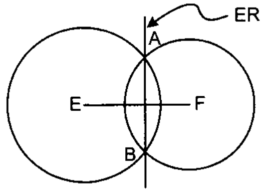
Como los radios son valores constantes, entonces: $d_1^2 - d_2^2 = \text{cte}$.

En el triángulo EAF usamos el teorema de la proyección de la mediana:

$d_1^2 - d_2^2 = 2(EF)(MH) = \text{cte}$.

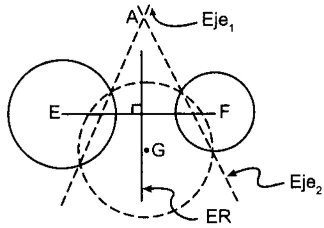
Donde observamos que para cualquier punto A de L se forma un triángulo EAF, donde $\overline{EF}$ y $\overline{MH}$ no varían, por lo tanto L es el eje radical.

2. El eje radical de dos circunferencias secantes pasa por la cuerda común.



$$\left.\begin{array}{l} Pot_{A(F)} = Pot_{A(E)} = 0 \\ Pot_{B(F)} = Pot_{B(E)} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Luego, por A y B} \\ \text{pasa el eje radical.}\end{array}$$

3. El eje radical se puede construir empleando una circunferencia auxiliar.
Se traza la circunferencia auxiliar de centro G.



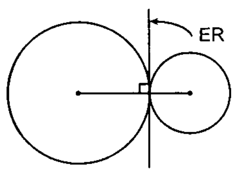
El eje radical de E y G es eje$_1$: $Pot_{A(E)} = Pot_{A(G)}$

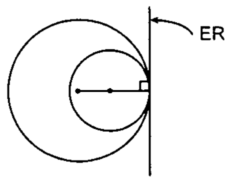
El eje radical de F y G es eje$_2$: $Pot_{A(F)} = Pot_{A(O)}$

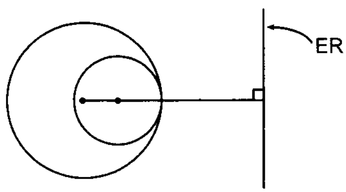
Igualando: $Pot_{A(E)} = Pot_{A(F)}$

Por lo tanto, A pertenece al eje radical de las circunferencias de centros E y F; luego, se traza una perpendicular al segmento que une los centros, o de lo contrario, se traza otra circunferencia y se ubica otro punto, uniéndose estos 2 puntos se determina el eje radical.

4. Como casos particulares tenemos:

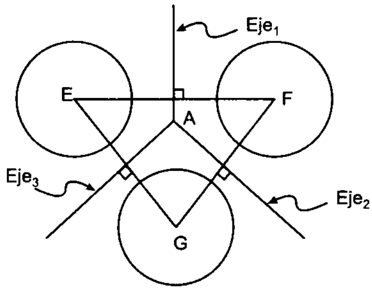






CENTRO RADICAL

Es el punto de intersección de los ejes radicales de tres circunferencias tomadas de dos en dos. Los ejes son:



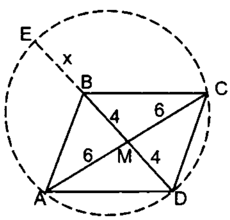
Eje_1 de E y F; Eje_2 de F y G; Eje_3 de E y G.

$Pot_{A(E)} = Pot_{A(F)} = Pot_{A(G)}$ $\quad\therefore$ A es el centro radical.

Ejemplos:

1. Las diagonales de un paralelogramo ABCD, miden AC = 12 y BD = 8. La prolongación de $\overline{DB}$, corta en E a la circunferencia circunscrita al triángulo ACD. Hallar $\overline{DE}$.

Resolución:



EB = x

Como ABCD, es paralelogramo:

$BM = MD = \dfrac{BD}{2} = \dfrac{8}{2} = 4$

$AM = MC = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6$

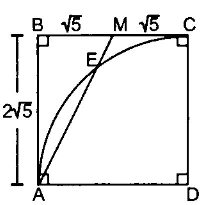
Por el teorema de cuerdas:

$(DM)(ME) = (AM)(MC) \Rightarrow 4(4 + x) = 6(6)$

Efectuando: x = 5

2. En un cuadrado ABCD, AB = $2\sqrt{5}$; M biseca a $\overline{BC}$; con centro en D, se traza el arco AC, contenido a $\overline{AM}$ en el punto E. Hallar $\overline{ME}$.

Resolución:



M es punto medio de $\overline{BC}$.

Por el teorema de la tangente:

$(MC)^2 = (MA)(ME) \Rightarrow \sqrt{5}^2 = (MA)(ME)$

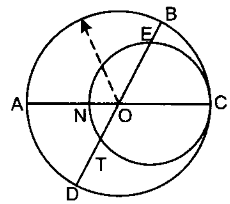
De donde: $(MA)(ME) = 5$ $\qquad$ ...(1)

Pero, en el $\triangle ABM$, por el teorema de Pitágoras:

$(MA)^2 = \sqrt{5}^2 + (2\sqrt{5})^2 \Rightarrow MA = 5$

Reemplazando en (1): $5(ME) = 5 \Rightarrow ME = 1$

3. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de la circunferencia mayor; C es punto de tangencia. Si BE = 1; AN = 2,5 y TD = 2; hallar $\overline{NC}$.



Resolución:

Sea R el radio del círculo mayor.

Por el teorema de cuerdas en la menor circunferencia: (OE)(OT) = (OC)(ON)

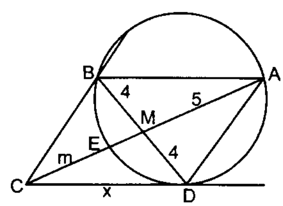
$\Rightarrow (R - 1)(R - 2) = R(R - 2,5) \Rightarrow R = 4$

Luego, NC = 2R − AN = 8 − 2,5

$\therefore$ NC = 5,5

4. En un paralelogramo ABCD, de diagonales AC = 10 y BD = 8, la circunferencia circunscrita al triángulo ABC es secante a $\overline{BC}$ y tangente a $\overline{CD}$ en D. Hallar $\overline{CD}$.

Resolución:



Se traza la figura de acuerdo al enunciado.

Incógnita: CD.

Por ser paralelogramo:

$BM = MD = 4 \wedge CM = AM = 5$

Teorema de las tangentes, desde C.

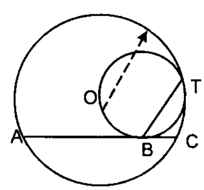
$(CD)^2 - (CA)(CE) \Rightarrow x^2 = 10\,m$ $\qquad$ ...(1)

Teorema de cuerdas: (AM)(EM) = (MB)(MD)

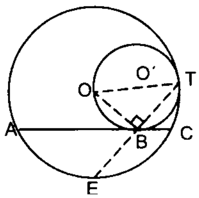
$5(5 - m) = 16 \Rightarrow m = \dfrac{9}{5}$

Sustituyendo en (1): $x = 3\sqrt{2}$

5. En la figura, O es centro de la mayor circunferencia. T y B puntos de tangencia, AB = 9, BC = 4. Hallar $\overline{TB}$.



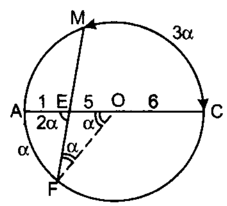
Resolución:



Con los trazos indicados:
$\overline{OT}$ contiene el centro O' de la menor circunferencia.
Luego, $\overline{OT}$ es diámetro y $m\angle OBT = 90°$
Para la circunferencia mayor, como $\overline{OB} \perp \overline{ET}$, entonces: EB = TB.
Teorema de cuerdas: (EB)(BT) = (AB)(BC)
$\Rightarrow (TB)^2 = 9 \times 4 \quad \therefore\ TB = 6$

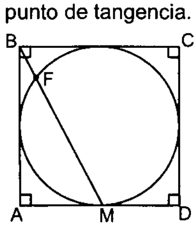
6. En una circunferencia de centro O y diámetro AC = 12, la cuerda $\overline{MF}$ corta a $\overline{AO}$ en E. Hallar $\overline{EM}$, si AE = 1 y $m\overset{\frown}{MC} = m3\overset{\frown}{AF}$.

Resolución:

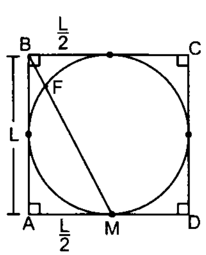


Ángulo interior:
$$m\angle E = \frac{m\overset{\frown}{AF} + m\overset{\frown}{MC}}{2} = \frac{\alpha + 3\alpha}{2} \Rightarrow m\angle E = 2\alpha$$
Ángulo central: $m\angle AOF = m\overset{\frown}{AF}$
$m\angle AOF = \alpha$
$\triangle OEF$ es isósceles: EF = EO = 5
Teorema de cuerdas: (EM)(EF) = (AE)(EC)
$(EM)(5) = 11 \times 1 \quad \therefore\ EM = 2{,}2$

7. Hallar FM, si L es la longitud del lado del cuadrado ABCD, M es punto de tangencia.



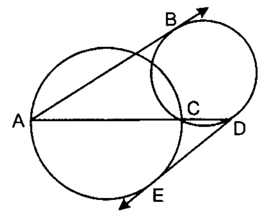
Resolución:



Se tiene: FM = BM − BF ...(1)

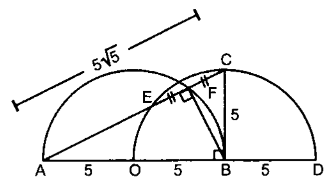
En el $\triangle BAM$: $(BM)^2 = L^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow BM = \frac{L}{2}\sqrt{5}$
Por otro lado, por el teorema de la tangente:
$(BT)^2 = (BM)(BF)$
$\Rightarrow \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)(\sqrt{5})(BF) \Rightarrow BF = \frac{L}{10}\sqrt{5}$
Reemplazando lo obtenido en (1):
$FM = \frac{L}{2}\sqrt{5} - \frac{L}{10}\sqrt{5} \Rightarrow FM = \frac{2}{5}L\sqrt{5}$

8. En el gráfico, B y E son puntos de tangencia: AB = 15 y ED = 8. Hallar $\overline{AD}$.



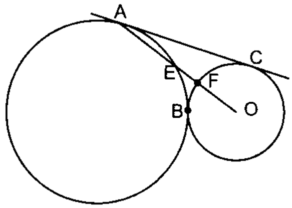
Resolución:
Datos: AB = 15; ED = 8
Por el teorema de la tangente:
Circunferencia menor: $(AB)^2 = (AD)(AC)$
Circunferencia mayor: $(DE)^2 = (DA)(DC)$
Sumando miembro a miembro:
$(AB)^2 + (DE)^2 = (AD)(AC) + (DA)(DC)$
o mejor: $(AB)^2 + (DE)^2 = (AD)(AC) + (AD)(CD)$
$(AB)^2 + (DE)^2 = AD\underbrace{(AC + CD)}$
Es decir: $(AB)^2 + (DE)^2 = (AD)^2$ (propiedad)
Reemplazando datos:
$15^2 + 8^2 = (AD)^2 \Rightarrow AD = 17$

9. En la figura, O y B son centros; BC = 5, hallar $\overline{EF}$.

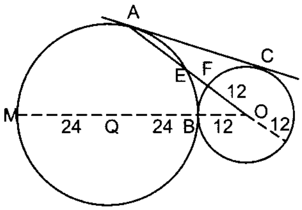


Resolución:
Como $\overline{AB}$ es diámetro: $m\angle AFB = 90°$
En el arco OEC: EF = FC
$\Rightarrow EF = \frac{EC}{2}$ ... (1)
$\triangle ABC$: $(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$
$\Rightarrow (AC)^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow AC = 5\sqrt{5}$
Se completa la semicircunferencia de centro B.
Por el teorema de la secante: (AC)(AE) = (AD)(AD)
$\Rightarrow 5\sqrt{5}\,(AE) = 15 \times 5 \Rightarrow AE = 3$
$\Rightarrow EC = AC - AE \Rightarrow EF = 5\sqrt{5} - 3\sqrt{5} \Rightarrow EC = 2\sqrt{5}$
Finalmente, con EC en (1): $EF = \sqrt{5}$

10. En la figura, A, B y C, son puntos de tangencia. Los radios miden 12 y 24, O es centro. Hallar $\overline{EF}$.



Resolución:



Por propiedad: $AC = 2\sqrt{Rr}$

$\Rightarrow AC = 2\sqrt{12(24)} = 24\sqrt{2}$

Se prolonga $\overline{AO}$ hasta H.

En la menor circunferencia, por el teorema de la tangente:

$(AC)^2 = (AF)(AH) \Rightarrow (24\sqrt{2})^2 = AF(AF + 24) \Rightarrow AF = 24$

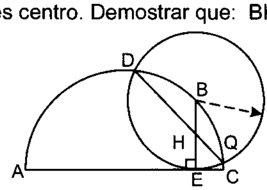
Si Q es centro de la mayor circunferencia; al trazar OQM, aplicamos el teorema de la secante:

$(OA)(OE) = (OM)(OB) \Rightarrow (OF + FA)(OF + FE) = 60(12)$

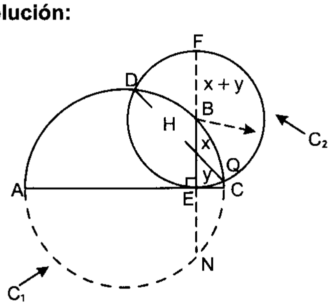
$\Rightarrow (12 + 24)(12 + FE) = 720$

De donde: $EF = 8$

11. En la figura, $\overline{AC}$ es diámetro; E es punto de tangencia y B es centro. Demostrar que: $BH = HE$



Resolución:



Se completa la circunferencia:

Llamando: $BF = BE = x + y$,

se tiene: $BF = BE = x + y \wedge EN = BE$

Por el teorema de cuerdas:

En C_1: $(DH)(HQ) = (FH)(HE)$

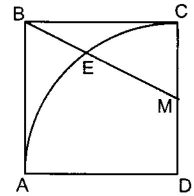
En C_2: $(DH)(HQ) = (BH)(HN)$

De donde: $(FH)(HE) = (BH)(HN)$

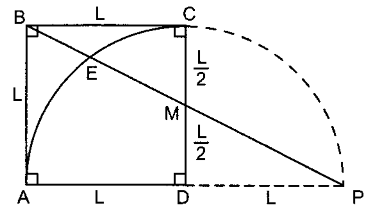
$\Rightarrow (2x + y)y = x(x + 2y)$

$\Rightarrow x = y \quad \therefore BH = HE$

12. En la figura, ABCD es un cuadrado, cuyo lado tiene longitud L. D es centro del arco AC; CM = MD. Hallar $\overline{BE}$.



Resolución:



Se prolongan $\overline{BM}$ y $\overline{AD}$, hasta su corte en P.

En el $\triangle BAP$: $\overline{MD} \,//\, \overline{AB}$ y $MD = \dfrac{AB}{2}$

$\Rightarrow \overline{MD}$ es base media relativa a $\overline{AB}$.

Por eso, $DP = AD \Rightarrow DP$ es radio.

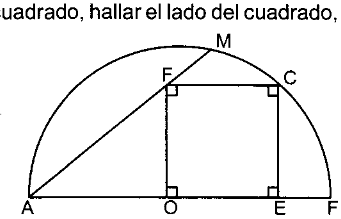
En el $\triangle BAP$: $(BP)^2 = L^2 + (2L)^2 \Rightarrow BP = L\sqrt{5}$

Por el teorema de la tangente:

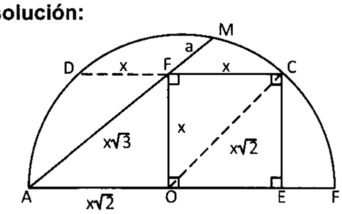
$(BC)^2 = (BP)(BE) \Rightarrow L^2 = L\sqrt{5}(BE)$

De donde: $BE = \dfrac{L}{5}\sqrt{5}$

13. En la figura, O es centro del semicírculo, OECF es un cuadrado, hallar el lado del cuadrado, si FM = a.



Resolución:



x: longitud del lado del cuadrado

Prolongamos $\overline{CF}$ hasta D. Luego, como O es centro y $\overline{OF} \perp \overline{CD}$, entonces: $FD = CF = x$

Al trazar $\overline{OC}$, en el $\triangle OFC$: $OC = x\sqrt{2}$

$\Rightarrow OA = \text{radio} = OC = x\sqrt{2}$

En el $\triangle AOF$, por el teorema de Pitágoras:

$AF = x\sqrt{3}$

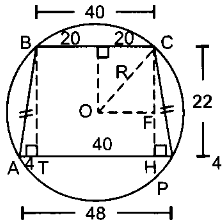
Finalmente, teorema de cuerdas:

$(CF)(FD) = (FM)(FA)$

$\Rightarrow x^2 = ax\sqrt{3} \quad \therefore x = a\sqrt{3}$

14. El trapecio ABCD está inscrito en una circunferencia (el centro es inferior al cuadrilátero). Hallar la longitud del radio, si $\overline{BC} // \overline{AD}$; BC = 40, AD = 48 y la altura del trapecio mide 22.

Resolución:



Se trata de un trapecio isósceles, ya que si:

$\overline{BC} // \overline{AD} \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = m\overset{\frown}{CD}$ y $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Con los trazos adicionales:

$\triangle OMC$: $(OC)^2 = (OM)^2 + (MC)^2$

$\Rightarrow R^2 = (OM)^2 + 20^2$ ...(1)

Cálculo de OM:

$OM = FC = \dfrac{CP}{2} = \dfrac{CH + HP}{2} = \dfrac{22 + HP}{2}$

$\Rightarrow OM = 11 + \dfrac{HP}{2}$ ...(2)

Se observa:

$TH = BC = 40 \Rightarrow AT = HD = \dfrac{48 - 40}{2} = 4$

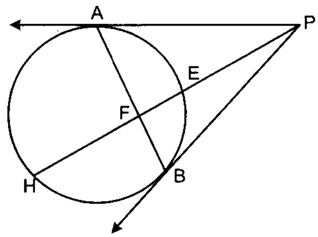
Por teorema de cuerdas:

$(AH)(HD) = (CH)(HP) \Rightarrow 44(4) = 22(HP) \Rightarrow HP = 8$

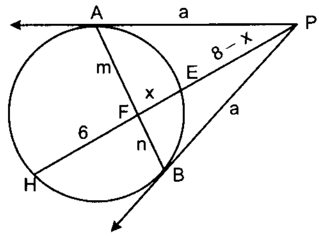
Reemplazando esto último, en (2): OM = 15

En (1): $R^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow R = 25$

15. En la figura, A y B son puntos de tangencia. HF = 6 y FP = 8. Hallar $\overline{EF}$.



Resolución:



Datos: HF = 6; FP = 8 y EF = x

Teorema de la tangente:

$(PA)^2 = (PH)(PE) \Rightarrow a^2 = 14(8 - x)$ ...(1)

Teorema de cuerdas:

$mn = 6x$ ...(2)

En el $\triangle APB$, teorema de Stewart:

$(PA)^2(FB) + (PB)^2(AF) = (AF)(FB)(AB) + (PF)^2(AB)$

$\Rightarrow a^2n + a^2m = mn(m + n) + 8^2(m + n)$

De donde: $a^2 = mn + 8^2$ ...(3)

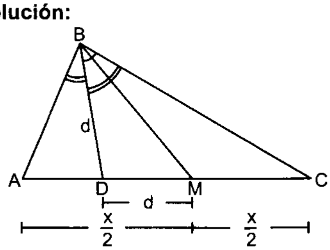
Reemplazando (1) y (2) en (3): $14(8 - x) = 6x + 64$

Resolviendo esto último: $x = 2{,}4 \Rightarrow EF = 2{,}4$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un triángulo ABC, se trazan: $\overline{BD}$, bisectriz interior y $\overline{BM}$, mediana. Si BD = DM y (AB)(BC) = 9, hallar $\overline{AC}$.

Resolución:



Se traza el gráfico con el enunciado: AC = x

Por el 2.° teorema de la bisectriz:

$(BD)^2 = (AB)(BC) - (AD)(DC)$.

$\Rightarrow d^2 = 9 - \left(\frac{x}{2} - d\right)\left(\frac{x}{2} + d\right)$

$d^2 = 9 - \left(\frac{x^2}{4} - d^2\right)$ $\quad \therefore x = 6$

2. En un triángulo ABC, la longitud de la bisectriz interna del $\angle A$, es media proporcional entre los segmentos que ella determina en el lado $\overline{BC}$. Demostrar que entre las longitudes de los lados del triángulo se cumple que: $b + c = \mathbf{a}\sqrt{2}$

Demostración:

Dato: $(AD)^2 = (BD)(DC)$

Pero, según el segundo teorema de la bisectriz:

$(AD)^2 = bc - (BD)(DC)$

Entonces: $(BD)(DC) = bc - (BD)(DC)$

$\Rightarrow 2(BD)(DC) = bc$ ...(1)

Por el primer teorema de la bisectriz: $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{BD}{b}$

Usando propiedad de proporciones:

$\dfrac{BD}{BD + DC} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow \dfrac{BD}{a} = \dfrac{c}{b + c} \Rightarrow BD = \dfrac{ac}{b + c}$

En forma análoga: $DC = \dfrac{ab}{b + c}$

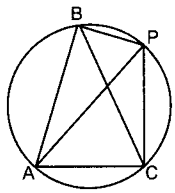
Reemplazando lo hallado, en (1):

$2\left[\dfrac{ac}{(b + c)}\right]\left[\dfrac{ab}{(b + c)}\right] = bc \Rightarrow \dfrac{2a^2}{(b + c)^2} = 1$

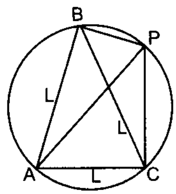
De donde, efectivamente:

$a\sqrt{2} = b + c \ \vee \ b + c = a\sqrt{2}$

3. En la figura, el $\triangle ABC$ es equilátero P, un punto cualquiera del arco BC, L es longitud de $\overline{AC}$. Hallar: $(PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2$.



Resolución:



$$x = PA^2 + PB^2 + PC^2$$

Por el teorema de Chadú, demostrado anteriormente: $PA = PB + PC$

Entonces: $x = (PB + PC)^2 + (PB)^2 + (PC)^2$

$\Rightarrow x = 2[(PB)^2 + (PC)^2 + (PB)(PC)]$ ...(1)

En el cuadrilátero ABPC, por el segundo teorema de Ptolomeo:

$$\frac{AP}{BC} = \frac{(AB)(AC) + (PB)(PC)}{(AB)(PB) + (AC)(PC)}$$

$$\Rightarrow \frac{AP}{L} = \frac{(L)(L) + (PB)(PC)}{L(PB) + L(PC)} \Rightarrow \frac{AP}{L} = \frac{L^2 + (PB)(PC)}{L(PB + PC)}$$

De donde: $AP(PB + PC) = L^2 + (PB)(PC)$

Pero, $AP = PB + PC$.

Entonces, $(PB + PC)^2 = L^2 + (PB)(PC)$

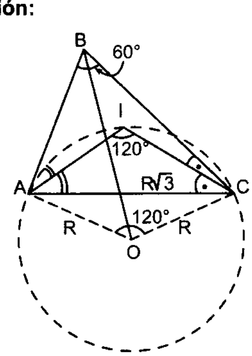
Efectuando: $(PB)^2 + (PC)^2 + (PB)(PC) = L^2$

Reemplazando esto último en (1):

$\Rightarrow (PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 = 2L^2$ (propiedad).

4. En un $\triangle ABC$, $m\angle B = 60°$, I es incentro. Si O es el circuncentro de $\triangle AIC$ y $AB + BC = 12$, hallar $\overline{OB}$.

Resolución:



Dato: $AB + BC = 12$

En el $\triangle ABC$, por ser I incentro:

$m\angle AIC = 90° + m\dfrac{\angle ABC}{2} \Rightarrow \angle AIC = 120°$

Luego: $\overset{\frown}{AEC} = 2\angle AIC$

$m\overset{\frown}{AEC} = 240°$ y $m\angle AOC = m\overset{\frown}{AIC} = 120°$

Entonces, en la circunferencia circunscrita al $\triangle AIC$, si R es circunradio: $AC = L_3 \Rightarrow AC = R\sqrt{3}$

Observamos que el cuadrilátero ABCO es inscriptible, porque $m\angle ABC + m\angle AOC = 180°$. Entonces, por el teorema de Ptolomeo:

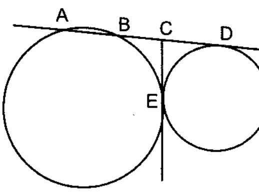
$(OB)(AC) = (OC)(AB) + (OA)(BC)$

$\Rightarrow (OB)(R\sqrt{3}) = R(AB) + R(BC)$

Cancelando R: $OB(\sqrt{3}) = AB + BC$

$\therefore (OB)(\sqrt{3}) = 12 \Rightarrow OB = 4\sqrt{3}$

5. En la figura, E y D son puntos de tangencia. Demostrar que $\dfrac{1}{DB} + \dfrac{1}{DA} = \dfrac{1}{DC}$



Resolución:

Por el teorema de la tangente, en la mayor circunferencia: $(CE)^2 = (CA)(CB)$ ...(1)

Según el gráfico:

$CE = DC$; $CA = DA - DC$; $CB = DB - DC$

Sustituyendo estas tres equivalencias en (1):

$(DC)^2 = (DA - DC)(DB - DC)$

Efectuando: $(DC)^2 = (DA)(DB) - DC(DA+DB) + (DC)^2$

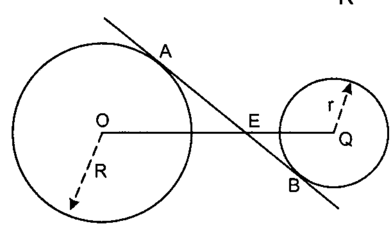
Es decir, $DC(DA + DB) = (DA)(DB)$

Arreglando en forma conveniente:

$$\frac{DA + DB}{(DA)(AB)} = \frac{1}{DC} \Rightarrow \frac{DA}{(DA)(DB)} + \frac{DB}{(DA)(DB)} = \frac{1}{DC}$$

De donde: $\dfrac{1}{DB} + \dfrac{1}{DA} = \dfrac{1}{DC}$

6. En la figura, $Pot_{E(O)} = 2Pot_{E(O)}$; hallar $\dfrac{r}{R}$.



Resolución:

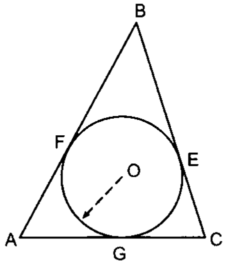
Por definición, en el dato: $Pot_{E(O)} = 2Pot_{E(O)}$

$(EA)^2 = 2(EB)^2 \Rightarrow EA = \sqrt{2}\,EB$ ...(1)

Si se trazan $\overline{OA}$ y $\overline{QB}$: $\triangle QBE \sim \triangle OAE$: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{EB}{EA}$

Con lo de (1): $\dfrac{r}{R} = \dfrac{EB}{\sqrt{2}(EB)}$ $\quad\therefore \dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

7. En la figura, AB = 15, BC = 14 y AC = 13; hallar $Pot_{B(O)}$.



Resolución:

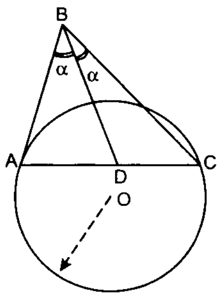
Por definición: $Pot_{B(O)} = (BE)^2$ ...(1)

Pero, si p es el semiperímetro del $\triangle ABC$, sabemos por propiedad, que BE = p – AC

$\Rightarrow BE = \dfrac{13 + 14 + 15}{2} - 13 \Rightarrow BE = 8$

Reemplazando en (1) $\Rightarrow Pot_{B(O)} = 64$

8. En la figura, AB = 5; BC = 8 y BD = 6. Hallar la potencia del punto D con respecto al centro O de la circunferencia.



Resolución:

Por definición: $Pot_{D(O)} = -(AD)(DC)$ ...(1)

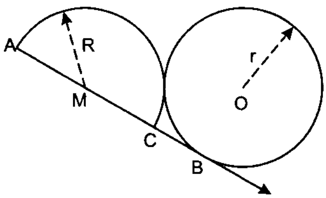
En el $\triangle ABC$, por el segundo teorema de la bisectriz:

$(BD)^2 = (AB)(BC) - (AD)(DC)$

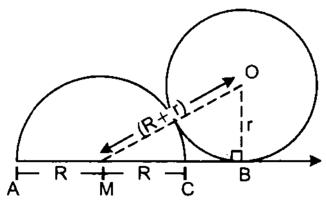
$\Rightarrow 6^2 = 5 \times 8 - (AD)(DC) \Rightarrow (AD)(DC) = 4$

Reemplazando en (1): $Pot_{D(O)} = -4$

9. En el siguiente gráfico, hallar $Pot_{A(O)} + Pot_{C(O)}$.



Resolución:



Se tiene $Pot_{A(O)} = (AB)^2$

Luego, $Pot_{A(O)} + Pot_{C(O)} = (AB)^2 + (CB)^2$ ...(1)

Siendo en el $\triangle MBO$:

$(MB)^2 = (MO)^2 - (OB)^2 \Rightarrow MB = \sqrt{(R + r)^2 - r^2}$

$\Rightarrow MB = \sqrt{R^2 + 2Rr}$

Luego, AB = AM + MB $\Rightarrow AB = R + \sqrt{R^2 + 2Rr}$

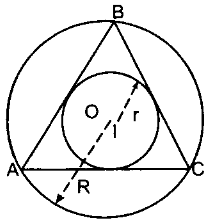
CB = MB – MC $\Rightarrow CB = \sqrt{R^2 + 2Rr} - R$

Entonces, reemplazando en (1):

$Pot_{A(O)} + Pot_{C(O)} = \left(R + \sqrt{R^2 + 2Rr}\right)^2 + \left(\sqrt{R^2 + 2Rr} - R\right)^2$

$\therefore\ Pot_{A(O)} + Pot_{C(O)} = 4R(R + r)$

10. En la figura, O e I son el circuncentro e incentro, respectivamente, del $\triangle ABC$. Demostrar que $OI^2 = R(R - 2r)$; OI es la distancia del circuncentro al incentro.



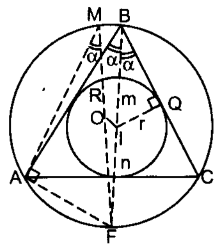
Resolución:

Se prolonga $\overline{BI}$ hasta F.

Sean: BI = m; IF = n

Se tiene: $Pot_{I(O)} = (OI)^2 - R^2 \Rightarrow Pot_{I(O)} = -mn$

$(OI)^2 - R^2 = -mn$ ...(1)



En el capítulo de circunferencias se demuestra que: AF = IF (el lector puede comprobarlo al analizar los ángulos del $\triangle AIF$).

Entonces, AF = n

Se traza el diámetro $\overline{FM} \Rightarrow m\angle AMF = m\angle ABF = \alpha$

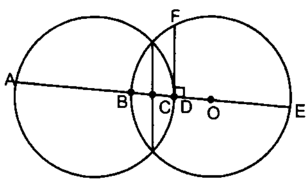
$\triangle MAF \sim \triangle BQI$:

$\dfrac{AF}{IQ} = \dfrac{MR}{BI} \Rightarrow \dfrac{n}{r} = \dfrac{2R}{m} \Rightarrow mn = 2Rr$ ...(2)

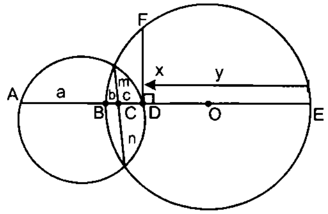
Reemplazando (2) en (1): $(OI)^2 = R^2 - 2Rr$

$\Rightarrow (OI)^2 = R(R - 2r)$

11. En la figura, AB = a, BC = b, CD = c, calcular $\overline{DF}$.



Resolución:



Por el teorema de cuerdas:

$mn = c(a + b)$ ...(1)

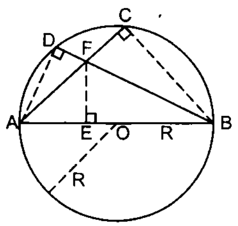
$mn = b(c + y)$ ...(2)

RM ⊾: $x^2 = (b + c)y$ ...(3)

De (1), (2) y (3): $x = \sqrt{\dfrac{(b + c)ac}{b}}$

12. Sea $\overline{AB}$ el diámetro de una circunferencia y $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, dos cuerdas que se intersecan. La suma de los productos de las longitudes de cada cuerda por el segmento desde el extremo del diámetro al punto de intersección es 256 m^2. Hallar el radio de la circunferencia (en m).

Resolución:



Dato: (AC)(AF) + (BD)(BF) = 256

Por secantes:

⏢ADFE: (BD)(BF) = 2R(EB) ...(1)

⏢EFCB: (AC)(AF) = 2R(AE) ...(2)

Sumando (1) y (2):

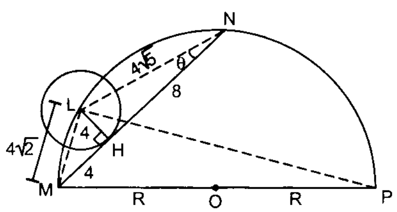
$\underbrace{(AC)(AF) + (BD)(BF)}_{256} = 2R(AE + EB)$

$256 = 2R(2R)$

$\Rightarrow R^2 = 64 \quad \therefore R = 8$ m

13. En la semicircunferencia de diámetro $\overline{MP}$, la cuerda $\overline{MN}$ mide 12. Si L es punto del arco MN y una circunferencia de 4 de radio y con centro en L es tangente a $\overline{MN}$ en H y $\overline{MH}$ mide 4, calcular la longitud del radio de la semicircunferencia.

Resolución:



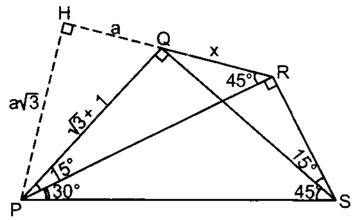
⊾LHN ~ ⊾MLP: $\dfrac{2R}{4\sqrt{5}} = \dfrac{4\sqrt{2}}{4} \Rightarrow R = 2\sqrt{10}$

14. En PQRS (convexo), $\overline{PQ} \perp \overline{QS}$,

$m\angle QPR = m\angle QSR = \dfrac{m\angle QRP}{3} = \dfrac{m\angle RPS}{2}$.

Calcular $\overline{QR}$ (en m), si PQ = $(\sqrt{3} + 1)$ m

Resolución:



⊾PHR es notable:

$a + x = a\sqrt{3} \Rightarrow x = a(\sqrt{3} - 1)$ ...(1)

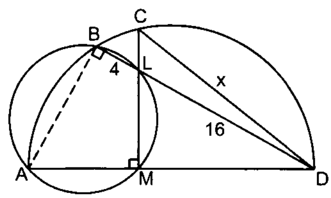
⊾PHQ es notable: $2a = \sqrt{3} + 1$ ...(2)

De (1) y (2): $x = \dfrac{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)}{2}$

$\Rightarrow x^2 = \dfrac{3 - 1}{R} \quad \therefore x = 1$

15. En la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$, se trazan las cuerdas $\overline{DC}$ y $\overline{DB}$ ($m\overset{\frown}{DC} < m\overset{\frown}{DB}$) y una circunferencia que pasa por A y B y por M ∈ $\overline{AD}$. Si CM ∩ BD = {L}, L está en la circunferencia, DL = 16 y LB = 4; calcular $\overline{CD}$.

Resolución:



Por RM ⊾: $x^2 = (AD)(MD)$ ...(1)

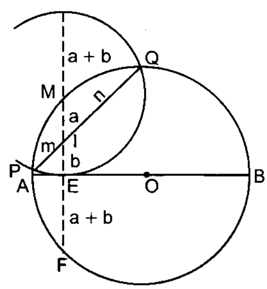
Por teorema de las secantes:

$(AD)(MD) = (20)(16)$ ...(2)

De (1) y (2): $x^2 = (20)(16) \quad \therefore x = 8\sqrt{5}$

16. Se tiene una circunferencia de centro O, se traza un diámetro $\overline{AB}$ y luego se toma un punto M sobre la circunferencia y haciendo centro en M, se traza otra circunferencia tangente a $\overline{AB}$ en E y que corta la primera en P y Q. Si $\overline{PQ} \cap \overline{ME}$ = {I}, hallar: $\dfrac{2(MI) + 3(IE)}{ME}$

Resolución:



Se pide hallar: $x = \dfrac{2a + 3b}{a + b}$

Pero de la figura, por teorema de cuerdas:

$mn = b(2a + b)$ ...(1)

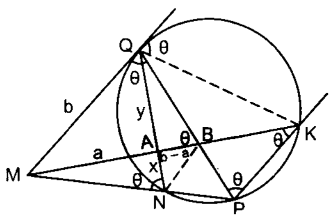
$mn = a(a + 2b)$ ...(2)

De (1) y (2): $b(2a + b) = a(a + 2b) \Rightarrow a = b$

$\therefore\ x = 5/2$

17. Desde un punto M exterior a una circunferencia de centro O, se traza la tangente $\overleftrightarrow{MQ}$ y la secante MNP, luego desde P se traza una paralela a $\overline{MQ}$ que interseca a la circunferencia en K. Si $\overline{NQ} \cap \overline{MK} = \{A\}$, $\overline{PQ} \cap \overline{MK} = \{B\}$, KP = KB, MA = a y MQ = b; hallar (NA)(AQ).

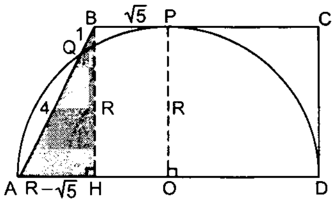
Resolución:



En el cuadrilátero inscriptible MQBN se cumple; por el teorema de cuerdas: $xy = a(b - a)$

18. Sea ABCD un paralelogramo donde $\overline{AB} < \overline{BC}$ y el ángulo BAD agudo. La semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ interseca a $\overline{AB}$ en Q y es tangente a $\overline{BC}$ en P. Si BP = $\sqrt{5}$ y BQ = 1, calcular la longitud del radio.

Resolución:



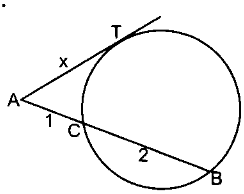
Por teorema de la tangente:

$(\sqrt{5})^2 = (1)(1 + AR) \Rightarrow AQ = 4$

$25 = R^2 + (R - \sqrt{5})^2 \quad \therefore\ R = 2\sqrt{5}$

19. A es un punto exterior a una circunferencia de centro O, por el punto A se trazan la tangente $\overline{TA}$ y la secante ACB, siendo $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{3}{1}$ y AC = 1, calcular $\overline{AT}$.

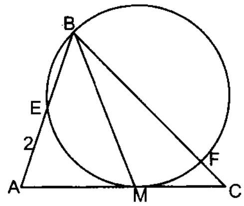
Resolución:



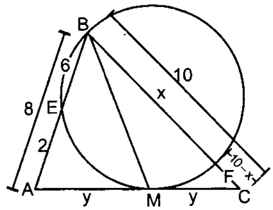
Por teorema de la tangente:

$x^2 = (1)(1 + 2) \Rightarrow x = \sqrt{3}$

20. En el triángulo ABC de mediana BM, $\overline{AC}$ es tangente en M a la circunferencia, siendo AB = 8; BE = 6; BC= 10. Hallar $\overline{BF}$.



Resolución:



Por teorema de la tangente:

$y^2 = (2)(8) = 16 \Rightarrow y = 4$

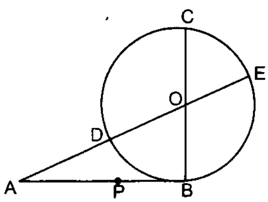
También: $y^2 = 10(10 - x)$

$4^2 = 10(10 - x)$

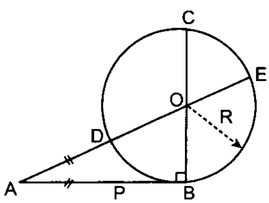
$1{,}6 = 10 - x \Rightarrow x = 10 - 1{,}6$

$x = 8{,}4$

21. Sea la circunferencia de centro el punto O, tal que se cumple que $\overline{AB} \perp \overline{BC}$, $\overline{ADOE}$ es un segmento de recta, AP = AD y AB = 2R, siendo R la longitud del radio de la circunferencia. Hallar $(AP)^2$.



Resolución:



Dato: AP = AD y AB = DE = 2R

Por teorema de la tangente:

$(AB)^2 = (AE)(AD) \Rightarrow (AB)^2 = (AD + DE)AP$

$\Rightarrow (AB)^2 = (AP + AB)AP = (AP)^2 + (AB)(AP)$

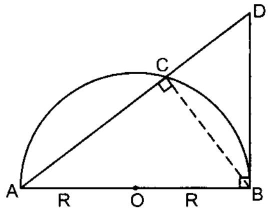
$\Rightarrow \underbrace{AB(AB - AP)} = (AP)^2$

$(AB)(PB) = (AP)^2$

$(AP)^2 = (AB)(PB)$

22. En una circunferencia cuyo radio mide R, se traza un diámetro AB. Por el punto B se traza una tangente a la circunferencia y por el punto A se traza una cuerda que interseca a la circunferencia en un punto C y a la tangente en otro D. Hallar el valor de (AC)(AD).

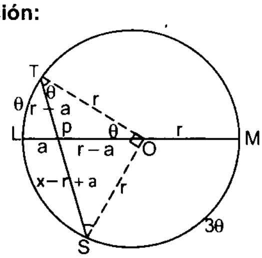
Resolución:



Por relaciones métricas en el ⊾ABD:
$(2R)^2 = (AC)(AD) \Rightarrow (AC)(AD) = 4R^2$

23. Un diámetro LM y una cuerda ST se intersecan en un punto P, en una circunferencia de centro O. Si $m\overset{\frown}{MS} = 3\theta$ y $m\overset{\frown}{LT} = \theta$ y LP= a; calcular ST en función de "a" y el radio "r" de la circunferencia.

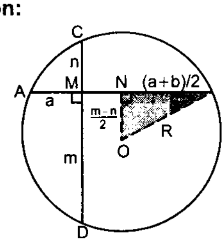
Resolución:



Por teorema de las cuerdas:
$a(2r - a) = (r - a)(x - r + a)$
$2ar - a^2 = xr - r^2 + 2ar - ax - a^2$
$r^2 = x(r - a) \Rightarrow x = \dfrac{r^2}{r - a}$

24. En una circunferencia de centro O, se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ perpendiculares entre sí en el punto M. Si $(AM)^2 + (BM)^2 + (CM)^2 + (MD)^2 = 64$. Calcular $\overline{AO}$.

Resolución:



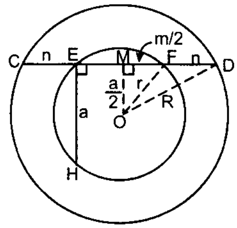
Por teorema de cuerdas: ab = mn

⊾ONB: $R^2 = \left(\dfrac{m-n}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$

$4R^2 = a^2 + b^2 + m^2 + n^2 + 2ab - 2mn$
$4R^2 = a^2 + b^2 + m^2 + n^2 = 64$
$R^2 = 16 \Rightarrow \mathbf{R = 4}$

25. La suma de los cuadrados de los radios de dos circunferencias concéntricas es 25. En la circunferencia mayor se traza la cuerda CD, que interseca a la otra en los puntos E y F, luego en la circunferencia menor se traza la cuerda EH ($\overline{EH} \perp \overline{CD}$).
Calcular: $(CE)^2 + (DE)^2 + (HE)^2$.

Resolución:



⊾OMF: $r^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2}\right)^2$ ...(1)

⊾OMD: $R^2 = \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{m}{2} + n\right)^2$ ...(2)

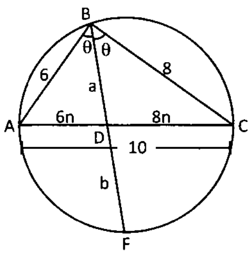
Sumando (1) y (2):

$\underbrace{R^2 + r^2}_{25} = \dfrac{a^2 + m^2}{4} + \dfrac{a^2 + (m + 2n)^2}{4}$

$100 = 2a^2 + m^2 + m^2 + 4mn + 4n^2$
$50 = a^2 + m^2 + 2mn + n^2 + n^2$
$50 = a^2 + (m + n)^2 + n^2$
$\therefore\ (CE)^2 + (DE)^2 + (HE)^2 = 50$

26. El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia y la prolongación de su bisectriz BD interseca a la circunferencia en F, calcular (BD)(DF), siendo AB = 6; BC = 8 y AC = 10.

Resolución:



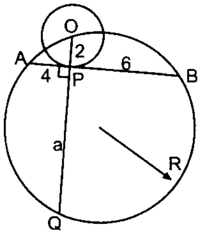
Por teorema: AD = 6n y DC = 8n

Pero: $6n + 8n = 10 \Rightarrow n = \dfrac{5}{7}$

Por teorema de cuerdas:
$ab = (6n)(8n)$
$ab = 6 \times \dfrac{5}{7} \times 8 \times \dfrac{5}{7}$
$ab = \dfrac{1200}{49}$

27. En una circunferencia C, se traza una cuerda AB y con centro en un punto del arco menor AB, se traza otra circunferencia tangente a $\overline{AB}$ en P. Si el radio de esta última mide 2 m y AP = 4 m, BP = 6 m, calcular la longitud del radio de la circunferencia C.

Resolución:



Por propiedad: $4R^2 = 4^2 + 6^2 + 2^2 + a^2$

Pero por teorema de las cuerdas:

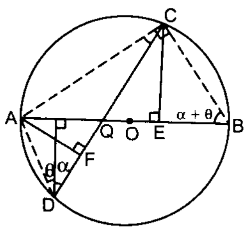
$2a = (4)(6) \Rightarrow a = 12$

Reemplazando: $4R^2 = 4^2 + 6^2 + 2^2 + 12^2$

$\therefore\ R = 5\sqrt{2}\,m$

28. Se tiene una circunferencia de centro O y de diámetro AB. Sean C y D dos puntos de la circunferencia $\overline{CD} \cap \overline{AB}$: {Q}, $\overline{AF} \perp \overline{CD}$ (F $\in \overline{CD}$), $\overline{CE} \perp \overline{AB}$ (E $\in \overline{AB}$); $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ (H $\in \overline{AB}$); AE > AH; (AE)(AH) = 169. Calcular $\overline{AF}$.

Resolución:



AF = x

Dato: (AE)(AH) = 169.

$\triangle$ACB: $(AC)^2 = (AE)(AB)$ ...(1)

$\triangle$AHD ~ $\triangle$AFD.

$\Rightarrow \dfrac{x}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow x(AD) = (AH)(AC)$ ...(2)

$\triangle$ACB ~ $\triangle$AFD

$\Rightarrow \dfrac{x}{AC} = \dfrac{AD}{AB} \Rightarrow x(AB) = (AC)(AD)$ ...(3)

(2) × (3): $x^2(AB)(AD) = (AC)^2(AH)(AD)$

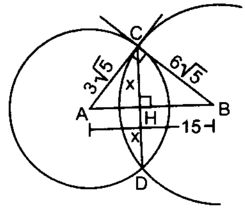
$x^2(AB) = (AC)^2(AH)$ ...(4)

(1) en (4): $x^2(AB) = (AE)(AB)(AH)$

$x^2 = (AE)(AH) = 13^2 \quad \therefore\ x = 13$

29. Dos circunferencias de centro A y B se intersecan en los puntos C y D. La tangente a la circunferencia de centro A trazada por el punto C pasa por el punto B y la tangente trazada por el punto C a la circunferencia de centro B pasa por el punto A. Si los diámetros de las circunferencias tienen por longitud $6\sqrt{5}$ m y $12\sqrt{5}$ m, calcular la longitud de la cuerda común CD.

Resolución:



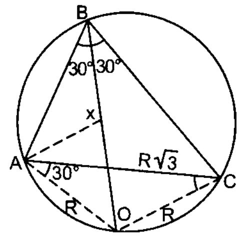
Las circunferencias son ortogonales:

$\triangle$ACB: $(3\sqrt{5})(6\sqrt{5}) = x(15) \Rightarrow x = 6$

Luego, CD = 12

30. En un triángulo ABC, m∠ABC = 60°, el punto I es el incentro y el punto O es el circuncentro del triángulo AIC, si AB + BC = L. Hallar $\overline{OB}$.

Resolución:



Dato: AB + BC = L

En el cuadrilátero inscrito OABC, por el teorema de Ptolomeo:

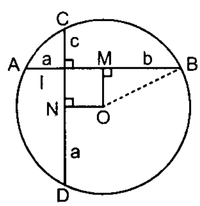
$OB(R\sqrt{3}) = R(AB) + R(BC)$

$OB(R\sqrt{3}) = R(AB + BC)$

$OB(R\sqrt{3}) = rL \Rightarrow OB = \dfrac{L\sqrt{3}}{3}$

31. Si en una circunferencia de radio R se trazan dos cuerdas secantes perpendiculares cualesquiera, calcule la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos parciales en función de R.

Resolución:



En efecto llamaremos a, b, c, d, las longitudes de los cuatro segmentos AI, IB, CI, ID. Tracemos $\overline{OM}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{ON}$ perpendicular a $\overline{CD}$.

Como AM = MB

$\Rightarrow MB = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{a+b}{2}$

Del mismo modo: CN = ND

$\Rightarrow ND = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{c+d}{2}$

Luego:

$$OM = NI = NC - IC = \frac{c+d}{2} - c = \frac{c+d-2c}{2} = \frac{d-c}{2}$$

En el triángulo rectángulo OMB aplicamos el teorema de Pitágoras, entonces:

$$(OM)^2 + (MB)^2 = (OB)^2$$

es decir: $\left(\frac{d-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = R^2$

$$\Rightarrow \frac{d^2+c^2-2dc}{4} + \frac{a^2+b^2+2ab}{4} = R^2$$

$d^2 + c^2 + a^2 + b^2 + 2ab - 2dc = 4R^2$

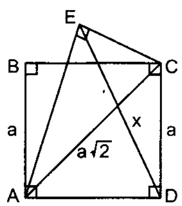
como (AI)(IB) = (CI)(ID), es decir, ab = cd resulta que: 2ab − 2dc = 0 (Teorema de las cuerdas)

Finalmente: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 4R^2$

Teorema de Arquímedes

32. Se tiene un cuadrado ABCD, se ubica un punto exterior E cercano al lado $\overline{BC}$, tal que $\overline{AE} \perp \overline{CE}$. Si $AE + CE = 3\sqrt{2}$. Calcule $\overline{DE}$.

Resolución:



De la figura, observamos que AECD es un cuadrilátero inscriptible.

Por el teorema de Ptolomeo:

$x(a\sqrt{2}) = (AE)a + (EC)a$

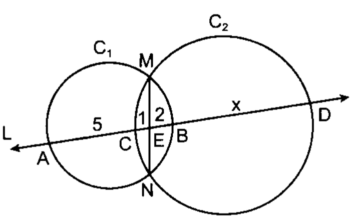
$x\sqrt{2} = AE + EC$

Por dato: $AE + EC = 3\sqrt{2}$

$\therefore\ x = 3$

33. Dos circunferencias C_1 y C_2 se intersecan en M y N, y una recta L interseca a C_1 en A y B y a C_2 en C y D. Si $\overline{MN}$ interseca a $\overline{BC}$ en E y AC = 5. CE = 1 y EB = 2. Calcule BD.

Resolución:



Por el teorema de las cuerdas.

En C_1, para las cuerdas $\overline{MN}$ y $\overline{AB}$

⇒ (ME)(EN) = (AE)(EB).

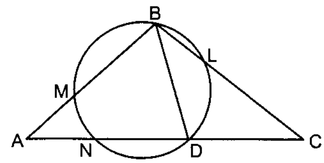
En C_2, para las cuerdas $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$

⇒ (ME)(EN) = (CE)(ED)

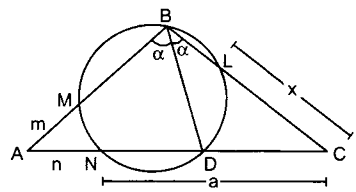
Igualando: (AE)(EB) = (CE)(ED)

⇒ $6 \times 2 = (1)(2 + BD)$ ⇒ BD = 10

34. En el triángulo ABC de la figura mostrada, $\overline{BD}$ es bisectriz interior. Si AM = m, AN = n y CN = a. Halle $\overline{CL}$.



Resolución:



A es punto exterior

⇒ m(AB) = n(AD) (Teorema de las secantes)

C es punto exterior

⇒ x(BC) = a(CD) (Teorema de las secantes)

Luego: $\left(\frac{m}{x}\right)\left(\frac{AB}{BC}\right) = \left(\frac{n}{a}\right)\left(\frac{AD}{CD}\right)$

Además: $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$

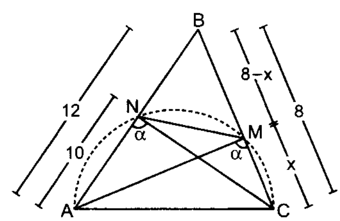
Reemplazando:

$\frac{m}{x} = \frac{n}{n} \quad \Rightarrow x = \frac{(a)(m)}{n}$

35. En un triángulo ABC se trazan las cevianas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ de manera que m∠AMC = m∠ANC.

Si AB = 12; AN = 10; BC = 8. Calcule $\overline{CM}$.

Resolución:



En la figura, el cuadrilátero ANMC es inscriptible.

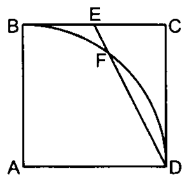
Las diagonales $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ hacen ángulos iguales los lados opuestos $\overline{CM}$ y $\overline{AN}$ respectivamente.

Por el teorema de las secantes ($\overline{BA}$ y $\overline{BC}$)

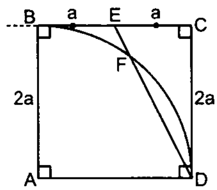
Tenemos que: (BA)(BN) = (BC)(BM)

⇒ (12)(2) = (8)(8 − CM) $\therefore$ CM = 5

36. Se tienen el cuadrado ABCD mostrado en la figura, si la longitud de $\overline{EF}$ es igual a 1 dm. E es punto medio de $\overline{BC}$. Calcule el perímetro del cuadrado.



Resolución:



En el ⊾CDE: $(ED)^2 = (2n)^2 + a^2 \Rightarrow ED = a\sqrt{5}$

E es punto exterior y B punto de tangencia

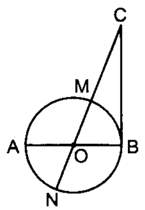
$\Rightarrow a^2 = (1)(ED)$ (Teorema de la tangente)

Luego: $a^2 = (1)(a\sqrt{5}) \Rightarrow a = \sqrt{5}$

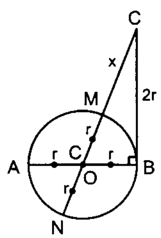
Finalmente: $(2p)_{ABCD} = 8a$

$(2p)_{ABCD} = 8\sqrt{5}$ dm

37. En la figura mostrada, O es centro de la circunferencia si $AD = r$, $AB = BC$ y $m\angle ABC = 90°$. Calcule $\overline{MC}$.



Resolución:



En la figura:

C es punto exterior y B es punto de tangencia

$(CN)(MC) = (BC)^2$ (teorema de la tangente)

Luego: $(2r + x)(x) = (2r)^2 = 4r^2$

$x^2 + 2rx - 4r^2 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 + 16r^2}}{2} = \frac{-2r \pm \sqrt{20r^2}}{2}$$

$$x = -r \pm \sqrt{5}r \begin{cases} x_1 = -r - \sqrt{5}r < 0 & \text{NO} \\ x_2 = -r + \sqrt{5} < 0 & \text{SI} \end{cases}$$

$x = r(\sqrt{5} - 1)$

38. Se tiene un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia. Sobre el arco BC se ubica el punto M, tal que $\overline{MB}$ y $\overline{MC}$ miden 2 y 5 dm. respectivamente. Calcule el lado de dicho triángulo equilátero.

Resolución:

Por el teorema de Ptolomeo:

$(AM)(x) = (x)(5) + (x)(2)$

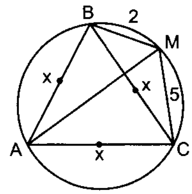
$\Rightarrow (AM = 7)$

Por el teorema de Viette:

$$\frac{x}{7} = \frac{2x + 5x}{x^2 + 2(5)} = \frac{7x}{x^2 + 10}$$

Resolviendo: $x^2 + 10 = 49$

$\Rightarrow x = \sqrt{39}$ dm



39. Se tiene el cuadrilátero ABCD inscrito en una circunferencia, sus diagonales se intersecan en el punto E y se cumple que: $\overline{AD} \cong \overline{DC}$, $(BE)(ED) = 24$ y el producto de los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es 52. Calcule la longitud de $\overline{BE}$.

Resolución:

De la figura: $\overline{BD}$ es bisectriz del ángulo ABC

Por el T. de la bisectriz interior en el △ABC tenemos:

$x^2 = ab - mn$

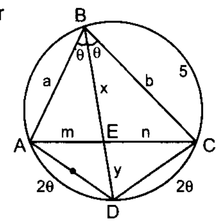
Por el teorema de las cuerdas:

$(m)(n) = (x)(y) = 24$ (Dato)

También, por dato: $ab = 52$

$\Rightarrow x^2 = 52 - 24 = 28$

$\therefore x = 2\sqrt{7}$



40. En una circunferencia C se traza una cuerda AB y con centro en un punto del arco menor AB se traza una circunferencia tangente a AB en P. Si el radio de esta última mide 2 dm; AP = 4 dm y BP = 6 dm. Calcule la longitud del radio de la circunferencia C.

Resolución:

De la figura:

$(AQ)^2 = 4^2 + 2^2 \Rightarrow AQ = 2\sqrt{5}$

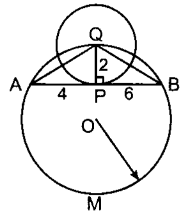
$(BQ)^2 = 2^2 + 6^2 \Rightarrow BQ = 2\sqrt{10}$

Por el T. del triángulo inscrito

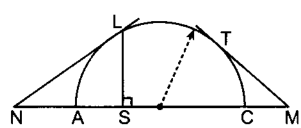
$(AQ)(BQ) = (QP)(2r)$

$\Rightarrow (2\sqrt{5})(2\sqrt{10}) = 2(2r)$

$\therefore r = 5\sqrt{2}$ dm



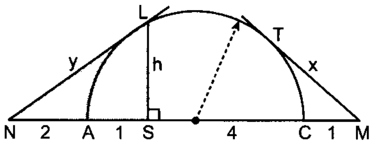
41. Según el gráfico, T es punto de tangencia, AN = 2 cm; AS = CM = 1 cm y SC = 4 cm. Calcular $(TM)^2 + (LN)^2$.



Resolución:

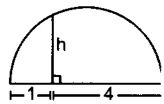
Piden: $(TM)^2 + (LN)^2 \Rightarrow x^2 + y^2$

T: punto de tangencia



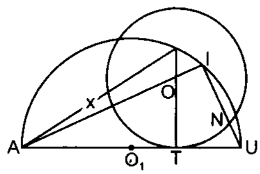
Teorema de la tangente:
$x^2 = (MA)(MC) = (6)(1) = 6$
$\triangle$NLS: $y^2 = h^2 + (3)^2$

Por propiedad:

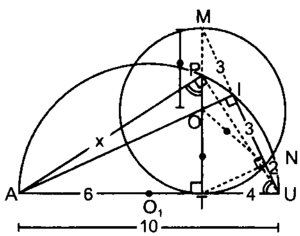


$\Rightarrow h^2 = (1)(4)$
$\Rightarrow y^2 = 4 + 9 = 13$
$\Rightarrow x^2 + y^2 = 6 + 13$
$\therefore\ x^2 + y^2 = 19\ cm^2$

42. En la figura mostrada O y O_1 son centros. Calcular x, sabiendo que: UN = 2; NI = 3; AU = 10
(T es punto de tangencia)



Resolución:

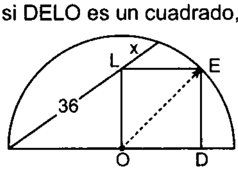


$\triangle$MIO $\cong$ $\triangle$NIO
Luego se deduce que: T, O, M (puntos colineales)
En el $\triangle$AIU (por Tales)

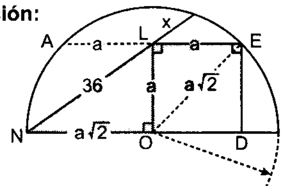
$$\frac{AT}{3} = \frac{TU}{2} = k \begin{cases} AT = 3k \\ TU = 2k \end{cases}$$

Luego: AU = 5k = 10 $\Rightarrow$ k = 2
Entonces: AT = 6 y TU = 4
$\triangle$APU: $x^2 = 6 \times 10 \Rightarrow x = 2\sqrt{15}$

43. En la figura, si DELO es un cuadrado, calcular x.

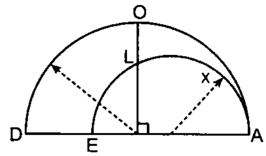


Resolución:

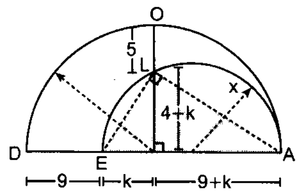


AL = LE = a (propiedad) y en el cuadrado DELO:
$OE = a\sqrt{2}$
En la semicircunferencia (teorema de las cuerdas)
$(a)(a) = 36(x) \Rightarrow \dfrac{a^2}{36} = x$ ...(1)
$\triangle$NOL (por Pitágoras): $36^2 = a^2 + (a\sqrt{2})^2$
$\Rightarrow \dfrac{a^2}{36} = 12$ ...(2)
De (1) y (2): x = 12

44. En la figura, hallar x, si: DE = 9 y LO = 5

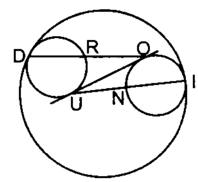


Resolución:

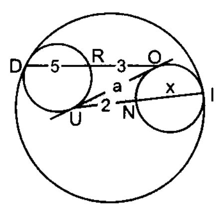


$\triangle$ELA: $(4 + k)^2 = k(k + 9)$
$16 + k^2 + 8k = k^2 + 9k \Rightarrow k = 16$
Nos piden: x = k + 4,5 $\therefore$ x = 20,5

45. En la figura mostrada, hallar NI, si: DR = 5; RO = 3 y UN = 2 (D, O, U, I son puntos de tangencia)

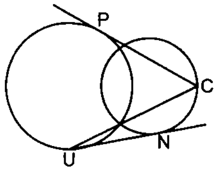


Resolución:

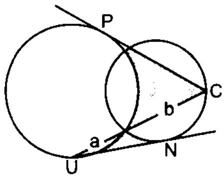


En la $\odot$ de la izquierda (teorema de la tangente)
$a^2 = 3 \times 8 \Rightarrow \dfrac{a^2}{2} = 12$ ...(1)
En la $\odot$ de la derecha (teorema de la tangente)
$a^2 = 2(2 + x) \Rightarrow \dfrac{a^2}{2} = (2 + x)$ ...(2)
De (1) = (2): 2 + x = 12 $\therefore$ x = 10

46. En la figura: $(UN)^2 + (CP)^2 = 144$. Calcular UC
(P y N son puntos de tangencia)



Resolución:



Piden: UC = a + b

En la ⊙ de la derecha (teorema de la tangente)

$(UN)^2 = a(a + b)$ ...(1)

En la ⊙ de la izquierda (teorema de la tangente)

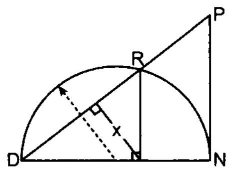
$(CP)^2 = b(a + b)$ ...(2)

(1) + (2): $(UN)^2 + (CP)^2 = a(a + b) + b(a + b)$

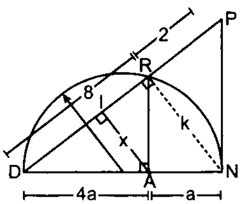
$144 = (a + b)(a + b)$

$12^2 = (a + b)^2 \Rightarrow a + b = 12 \quad \therefore\ UC = 12$

47. En el gráfico mostrado, hallar x si: DR = 8 y RP = 2



Resolución:



⊾DNP (altura relativa a la hipotenusa)

$k^2 = 8 \times 2 \Rightarrow k = 4$

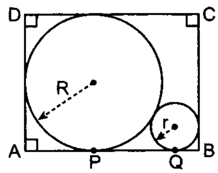
⊾DNP (por Tales)

$\dfrac{DA}{8} = \dfrac{AN}{2} \Rightarrow \dfrac{DA}{4} = \dfrac{AN}{1} = a \left\} \begin{array}{l} DA = 4a \\ AN = a \end{array}\right.$

⊾DIA ~ ⊾DRN: $\dfrac{x}{k} = \dfrac{4a}{5a} \Rightarrow x = \dfrac{4}{5}k$

Luego: $x = \dfrac{4}{5}(4) \quad \therefore\ x = 3{,}2$

48. En la figura, se tiene que la suma de las longitudes de las dos circunferencias es de 81,64 m y la diferencia de sus radios es 5 m. Calcule el área del rectángulo ABCD.



Resolución:

Dado: $2\pi(R + r) = 81{,}64$

$R + r = 13 \ \wedge\ R - r = 5$

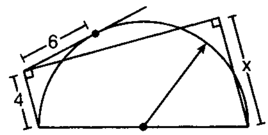
De las ecuaciones: R = 9 y r = 4

Ademas: AD = 18; AP = 9; QB = 4;

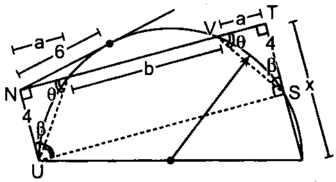
$PQ = 2\sqrt{Rr}$; PQ = 12; AB = 25

$\therefore\ A_{\square ABCD} = 18 \times 25 = 450\ m^2$

49. Del gráfico, calcular x.



Resolución:



⊾UNI ≅ ⊾STV (A. L. A)

Entonces: NI = VT = a

En la ◠ (teorema de la tangente)

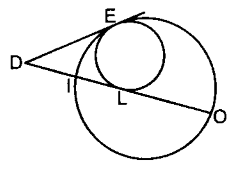
$6^2 = a(a + b)$ ...(I)

En la ◠ (teorema de las secantes)

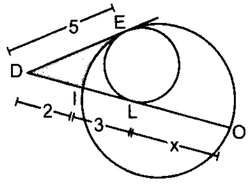
$4x = a(a + b)$ ...(II)

De (I) = (II): $4x = 36 \quad \therefore\ x = 9$

50. Del gráfico, calcular LO, DI = 2 y IL = 3 (E; L: puntos de tangencia)



Resolución:

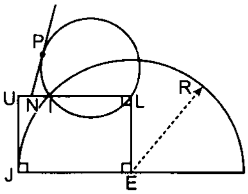


DE = DL = 5

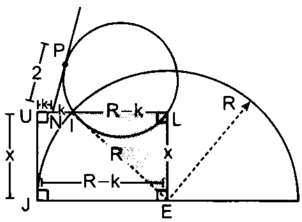
Ahora, por el Teorema de la tangente:

$5^2 = 2(5 + x) \quad \therefore\ x = 7{,}5$

51. En la figura UN = NI, calcular $\overline{JU}$, si PN = 2, siendo P punto de tangencia.



Resolución:



El teorema de la tangente

$2^2 = k(R - k) \Rightarrow k(R - k) = 4$ ...(1)

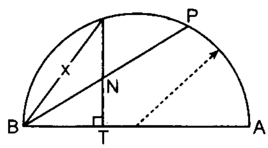
En el ⊿ILE, por Pitágoras,

$R^2 = x^2 + (R - 2k)^2$

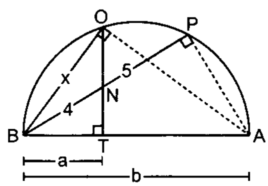
$k(R - k) = \dfrac{x^2}{4}$ ...(2)

De (1) = (2): $\dfrac{x^2}{4} = 4 \Rightarrow x = 4$

52. Del gráfico, calcular x si: BN = 4 y NP = 5



Resolución:



⊿BOA: $x^2 = ab$ ...(1)

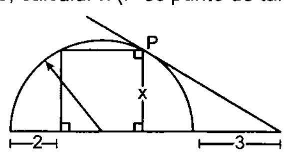
⏢APNT inscriptible (teorema de las secantes)

$4 \times 9 = ab$ ...(2)

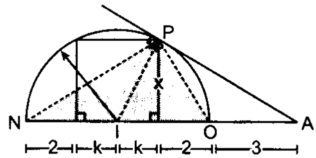
De (1) = (2), se tiene: $x^2 = 6^2$

$\therefore\ x = 6$

53. Del gráfico, calcular x (P es punto de tangencia).



Resolución:



En el ⊿NPO: $x^2 = 2(2 + 2k)$ ...(1)

En el ⊿IPA : $x^2 = 5k$ ...(2)

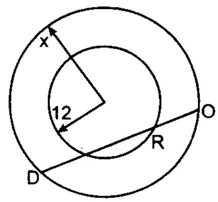
De (1) = (2): $5k = 2(2 + 2k) \Rightarrow k = 4$

Luego, en (1): $x^2 = 2(10)$

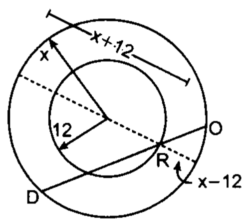
$\therefore\ x = 2\sqrt{5}$

54. En la figura: (DR)(RO) = 25

Calcular x.



Resolución:



Dato: (DR)(RO) = 25

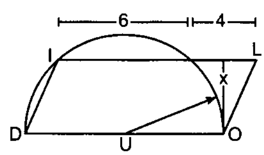
Por el teorema de las cuerdas:

$(x + 12)(x - 12) = (DR)(RO)$

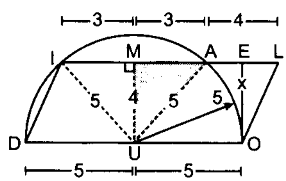
$x^2 - 12^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 = 12^2 + 5^2$

$\therefore\ x = 13$

55. Si DILO es un paralelogramo, calcular x.



Resolución:

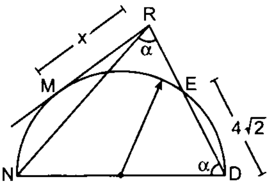


En el △IUA, isósceles (IU = UA = 5)

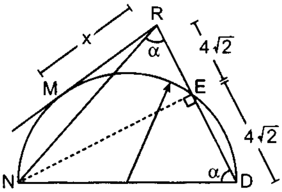
Se tiene: IM = MA = 3

Ahora, en el ⊾UMA: UM = 4
Por lo tanto, en el cuadrilátero UMEO: x = 4

56. Del gráfico, calcular x (M es punto de tangencia).

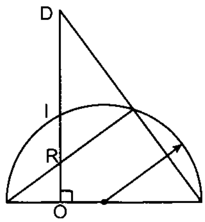


Resolución:

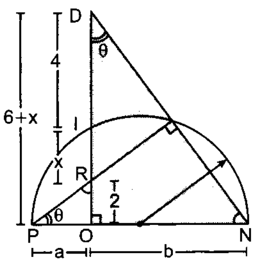


En el △DNR (m∠R = m∠D = α) se tiene que:
DE = ER = $4\sqrt{2}$
Por el teorema de la tangente:
$x^2 = 8\sqrt{2} \times 4\sqrt{2}$
$\Rightarrow x^2 = 8^2 \quad \therefore x = 8$

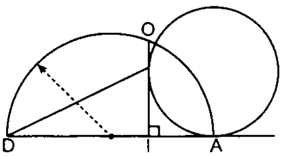
57. En la figura mostrada, calcular $\overline{RI}$.
Si: DI = 4; RO = 2



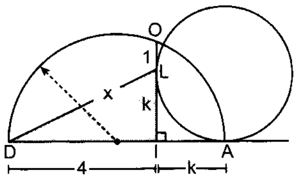
Resolución:
En la semicircunferencia:
$(x + 2)^2 = ab \quad ...(I)$
⊾POR ~ ⊾DON
Entonces: $\dfrac{6+x}{a} = \dfrac{b}{2}$
$\Rightarrow 2(6 + x) = ab \quad ...(II)$
De (I) = (II):
$(x + 2)^2 = 2(6 + x)$
$\therefore x = 2$



58. Del gráfico, L y A son puntos de tangencia, DI = 4, LO = 1, calcular $\overline{DL}$.

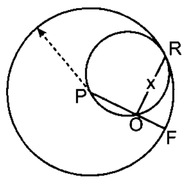


Resolución:

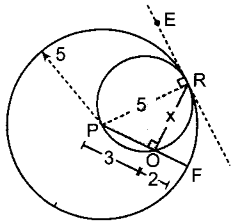


En la semicircunferencia (por propiedad)
$(1 + k)^2 = 4k \Rightarrow k = 1$
Ahora en el ⊾DIL, por Pitágoras:
$x^2 = 4^2 + k^2 \Rightarrow x^2 = 4^2 + 1$
$\therefore x = \sqrt{17}$

59. Del gráfico, calcular x. Si: PO = 3 y OF = 2
(R es punto de tangencia)

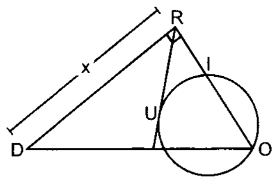


Resolución:

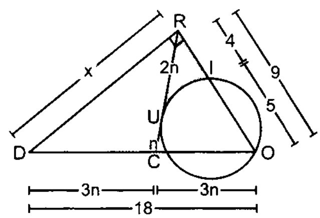


En la circunferencia:
m∠PRE = 90° ∧ m∠POR = 90° (propiedad)
En el ⊾POR (por Pitágoras): x = 4

60. Del gráfico, calcular x si: RI = 4 y IO = 5. U es punto de tangencia y además baricentro del triángulo DRO.

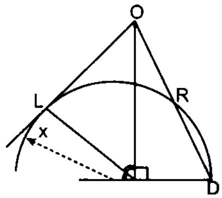


Resolución:

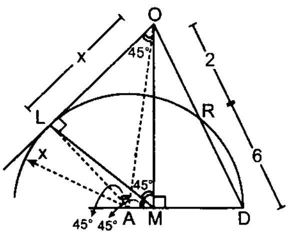


Por el teorema de la tangente:
$(2n)^2 = 9 \times 4 \Rightarrow n = 3$
Luego, por simple inspección: DO = 6n = 18
Finalmente, en el ◺DRO (por Pitágoras):
$x = 9\sqrt{3}$

61. De la figura, calcular x, si DR = 6 y RO = 2
(L es punto de tangencia)

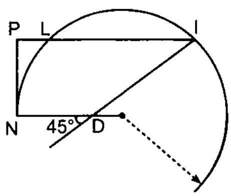


Resolución:

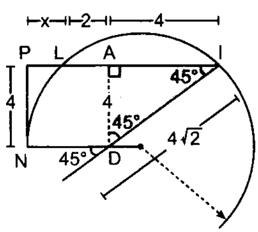


El ◁LOMA es inscriptible, luego el ◺ALO es isoángulo
($m\angle A = m\angle O = 45°$)
Entonces: LA = LO = x
Ahora, por el teorema de la tangente:
$x^2 = 8 \times 2 \Rightarrow x = 4$

62. Del gráfico, calcular PL, si: $DI = 4\sqrt{2}$, LI = 6
(N es punto de tangencia)

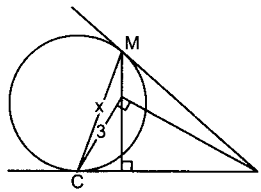


Resolución:

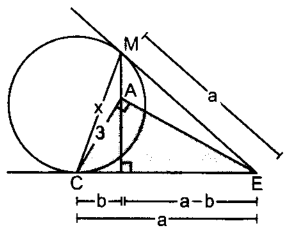


◺DAI: DA = AI = 4
▭NPAD: DA = PN = 4
Por el teorema de la tangente:
$4^2 = x(x + 6) \Rightarrow x = 2$

63. En la figura mostrada, calcular x
(C, M son puntos de tangencia)

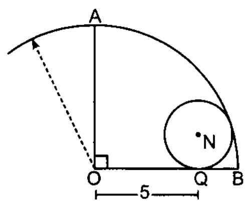


Resolución:

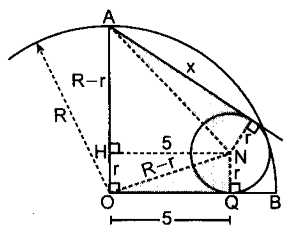


En el ◺CAE (por propiedad):
$ab = 3^2 \Rightarrow ab = 9$ ...(1)
En el △CME (por Euclides):
$x^2 = a^2 + a^2 - 2a(a - b)$
$x^2 = 2ab$ ...(2)
De (1) = (2): $x^2 = 2 \times 9 \Rightarrow x = 3\sqrt{2}$

64. Hallar la potencia del punto A con respecto al centro N de la circunferencia menor.

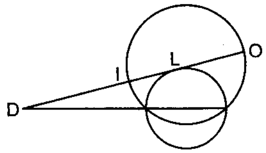


Resolución:

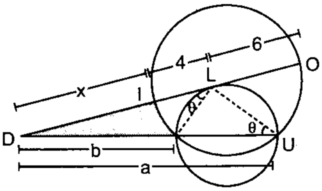


En la figura: $(R - r)^2 + 5^2 = r^2 + x^2$ ...(1)
También: $(R - r)^2 = r^2 + 5^2$ ...(2)
De (2) en (1): $r^2 + 5^2 + 5^2 = r^2 + x^2$
$2 \times 5^2 = x^2 \quad \therefore x = 5\sqrt{2}$

65. Del gráfico, calcular DI, si IL = 4 y LO = 6
(L es punto de tangencia)



Resolución:



En el $\triangle$DLU (propiedad de semejanza)

$ab = (x + 4)^2$ ...(I)

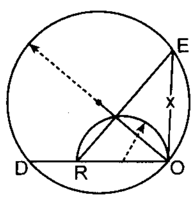
En la ⊙ menor (teorema de las secantes)

$ab = x(x + 10)$ ...(II)

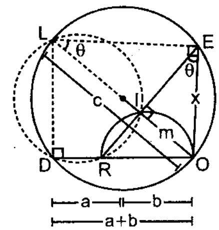
De (I) = (II): $(x + 4)^2 = x(x + 10)$

$x^2 + 16 + 8x = x^2 + 10x \quad \therefore\ x = 8$

66. Del gráfico, calcular x, si DR = a; RO = b



Resolución:



En el ⌂DRIL inscriptible (teorema de las secantes)

$b(a + b) = cm$ ...(I)

En el ⊿LEO (propiedad: semejanza)

$x^2 = cm$ ...(II)

Luego, de (I) = (II): $x^2 = b(a + b)$

$\therefore\ x = \sqrt{b(a+b)}$

67. Hallar la potencia del vértice A de un triángulo ABC con respecto a la circunferencia inscrita. Si AB = 12; BC = 14 y AC = 16.

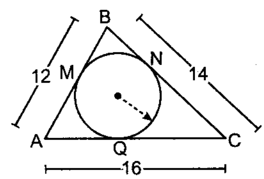
Resolución:

Por definición, sabemos que:

$Pot_{A(0)} = AQ^2$

Pero por teoría sabemos que:

$AQ = p - a$



$$AQ = \frac{12 + 14 + 16}{2} - 14 \Rightarrow AQ = 7$$

En consecuencia: $Pot_{A(0)} = 7^2 \quad \therefore\ Pot_{A(0)} = 49$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2010 - II)

La figura muestra una semicircunferencia donde GF = 9 m y FD = 7 m. Calcule la longitud del segmento FE, en metros.

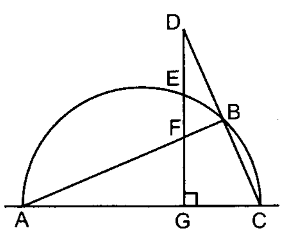
A) 1

B) 2

C) 3

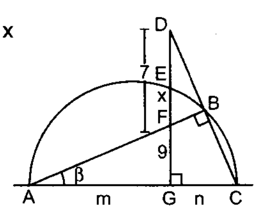
D) 4

E) 5



Resolución:

Nos piden: FE = x



De la figura: ⊿AGF ~ ⊿DGC

$$\Rightarrow \frac{m}{9} = \frac{16}{n} \Rightarrow mn = 9 \times 16 \quad ...(I)$$

Por relaciones métricas en la circunferencia:

$(x + 9)^2 = mn$ ...(III)

Reemplazando (I) en (II):

$(x + 9)^2 = 9 \times 16$

De donde: $x = 3$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

En una circunferencia de 10 cm de radio, dos cuerdas se cortan de manera que el producto de los segmentos que cada una determina sobre sí es 1296 cm^4. Determine a qué distancia (en cm) del centro, se halla el punto de intersección.

A) 5 B) 6 C) 7

D) 8 E) 9

Resolución:

Dato: abcd = 1296

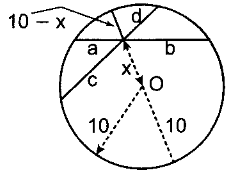
ab = cd ⇒ $(ab)^2 = 1296$

ab = 36

Teorema de las cuerdas:

ab = (10 − x)(10 + x)

$36 = 100 - x^2 \Rightarrow x = 8$



Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

Dos circunferencias son tangentes interiores en G. En la circunferencia se trazan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CG}$ que intersecan a la circunferencia menor en M, N y F respectivamente, AM < AN, AM = a, BN = b, CF = c. Determine la medida del radio de la circunferencia mayor.

A) $\dfrac{ab}{a+b+c}$ B) $\dfrac{b}{a+b-c}$ C) $\dfrac{ab}{a+b+c}$

D) $\dfrac{ab}{a+b-c}$ E) $\dfrac{a}{a+b+c}$

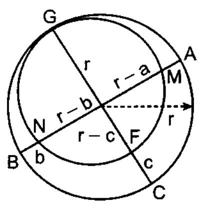
Resolución:

Piden: r

Teorema de cuerdas:

(r − c)r = (r − a)(r − b)

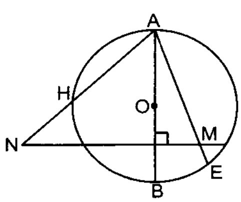
$r = \dfrac{ab}{a+b-c}$



Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

En la figura, O centro de la circunferencia.
Si NH = 11, (AM)(DE) = 900 y m∠ANM = 45°, entonces la longitud del diámetro de la circunferencia es:

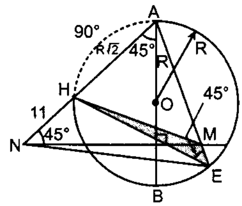


A) $5\sqrt{2}$ B) $10\sqrt{2}$ C) $15\sqrt{2}$

D) $20\sqrt{2}$ E) $25\sqrt{2}$

Resolución:

Piden el diámetro = 2R



▱NHME inscriptible

Teorema de las secantes:

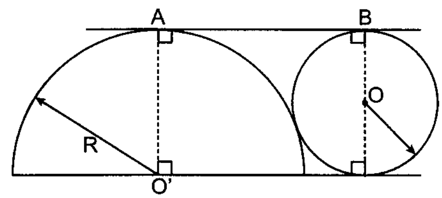
$(R\sqrt{2} + 11)R\sqrt{2} = (AM)(AE) = 900$

$R\sqrt{2} = 25 \quad \therefore 2R = 25\sqrt{2}$

Clave: E

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - II)

En la figura mostrada, si AB = $4\sqrt{2}$ m.
Halle R (en metros).

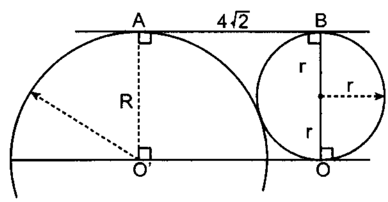


A) 2 B) 2,5 C) 3

D) 3,5 E) 4

Resolución:

Piden: R



O'A = OB ⇒ R = 2r

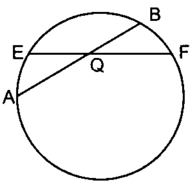
Por la propiedad: AB = $2\sqrt{Rr}$ ⇒ $4\sqrt{2} = 2\sqrt{Rr}$

⇒ $4\sqrt{2} = 2\sqrt{R \times \dfrac{R}{2}} \quad \therefore R = 4$

Clave: E

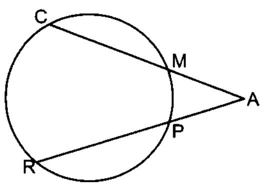
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si AQ = QB; EQ = 4 y QF = 9, hallar $\overline{AB}$.



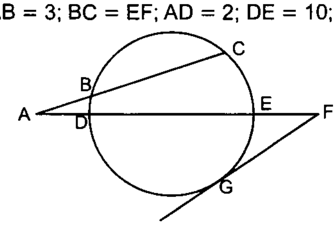
A) 6 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

2. En la figura, hallar $\overline{AC}$, si MC = 2; AR = 8 y PR = 5.



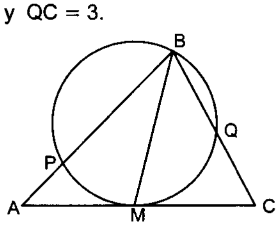
A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

3. Si AB = 3; BC = EF; AD = 2; DE = 10; hallar $\overline{FG}$.



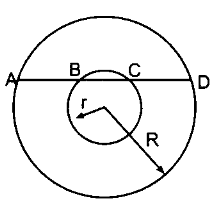
A) $2\sqrt{5}$ B) $5\sqrt{2}$ C) $4\sqrt{6}$
D) $3\sqrt{5}$ E) $5\sqrt{3}$

4. Del gráfico, AM = MC, calcular $\overline{BQ}$; siendo AP = 4; PB = 5 y QC = 3.



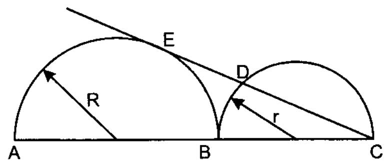
A) 8 B) 9 C)7
D) 10 E) 12

5. Si AB = BC = CD, hallar AD, si R = 9 y r = 7.



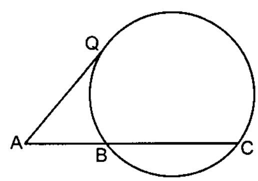
A) 4 B) 8 C) 12
D) 9 E) 15

6. Si CD = DE = 3, hallar $\overline{AC}$.



A) 3 B) 6 C) 4
D) $2\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3}$

7. Si $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AQ}$ tienen valores enteros consecutivos. Calcular $\overline{AQ}$. (Q: punto de tangencia).

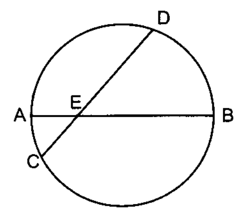


A) 8 B) 6 C) 7
D) 5 E) 4

8. Se tiene una circunferencia de 14 m de radio, por un punto interior se traza una cuerda de modo que el producto de los dos segmentos de cuerda determinados es de 160 m^2. Calcular la distancia del punto de intersección de las 2 cuerdas al centro de la circunferencia.

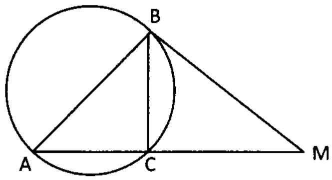
A) 3 m B) 4 m C) 5 m
D) 6 m E) 1 m

9. Se tiene una circunferencia de diámetro AB = 6 m, se traza una cuerda $\overline{CD}$ que corta al diámetro en E y forma un ángulo de 30° con este. Si la distancia de E al centro es de 2 m, ¿cuánto mide $\overline{CD}$?



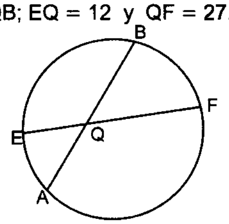
A) 5 m B) $5\sqrt{2}$ m C) 6 m
D) $6\sqrt{2}$ m E) $4\sqrt{2}$ m

10. Los lados de un triángulo ABC inscrito en una circunferencia miden: AB = 6 m, AC = 5 m, BC = 4 m; Por B se traza una tangente a la circunferencia que corta a la prolongación del lado $\overline{AC}$ en M. Calcular $\overline{BM}$.



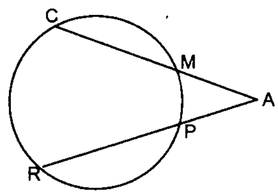
A) 5 m B) $5\sqrt{2}$ m C) 6 m
D) $6\sqrt{2}$ m E) $6\sqrt{3}$ m

11. Si AQ = QB; EQ = 12 y QF = 27, hallar $\overline{AB}$.



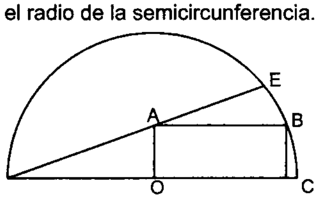
A) 18 B) 24 C) 36
D) 20 E) 48

12. En la figura, hallar AC, si MC = 4; AR = 16 y PR = 10.



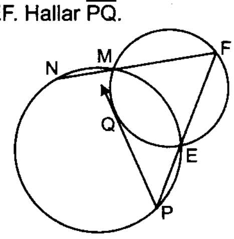
A) 12 B) 20 C) 18
D) 24 E) 36

13. Siendo O el centro de la semicircunferencia y OABC un rectángulo, tal que AB = 2(BC) y AE = $2\sqrt{6}$ cm. Hallar el radio de la semicircunferencia.



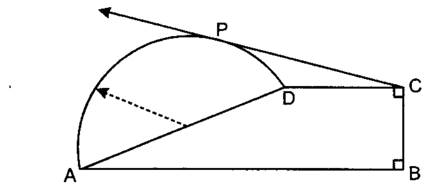
A) $3\sqrt{2}$ cm B) $3\sqrt{5}$ cm C) $2\sqrt{3}$ cm
D) $2\sqrt{10}$ cm E) $2\sqrt{5}$ cm

14. Si Q es punto de tangencia, MN = 9; MF = 16 y 4(EP) = EF. Hallar $\overline{PQ}$.



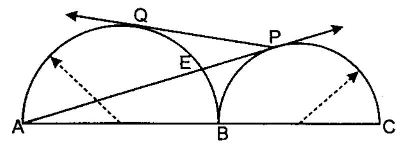
A) 12 B) 10 C) 11
D) 13 E) 9

15. Hallar $\overline{PC}$, si CD = 3 y AB = 12 (P es punto de tangencia).



A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

16. Si: P y Q son puntos de tangencia, AB = 2(BC) y EP = $6\sqrt{5}$. Hallar $\overline{PQ}$.

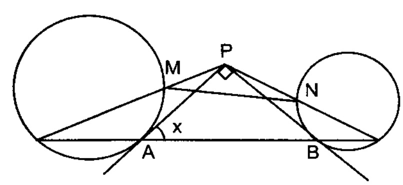


A) 18 B) 24 C) 30
D) 36 E) 5

17. Por un punto interior a una circunferencia de radio 10, se traza dos cuerdas, cumpliéndose que el producto de los 4 segmentos determinados es 625. Calcular la distancia entre el punto medio hasta el centro de la circunferencia.

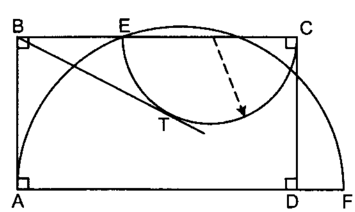
A) 25 B) $5\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{3}$
D) $10\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{3}$

18. Si $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{BN}$, A y B son puntos de tangencia, calcular x.



A) 60° B) 30° C) 50°
D) 45° E) 37°

19. En la figura, T es punto de tangencia $\overline{EC}$ y $\overline{AF}$ son diámetros. AB = 10; DF = 4,5; BE = 8. Calcular $\overline{BT}$.

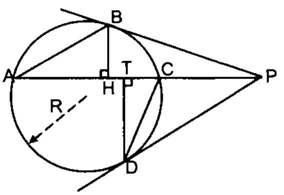


A) 6 B) 10 C) $16\sqrt{2}$
D) $8\sqrt{2}$ E) 8

20. Sean C_1 y C_2 dos circunferencias tangentes interiores en A ($C_1 > C_2$); se ubican en C_1 los puntos M y C, tal que $\overline{MC}$ es tangente en P a C_2 y $\overline{AC}$ se interseca con C_2 en B. Las prolongaciones de $\overline{BP}$ y $\overline{PB}$ son secantes a C_1 en Q y D, respectivamente. Si BD = QP, AB = a y BC = b, calcular $\overline{MC}$.

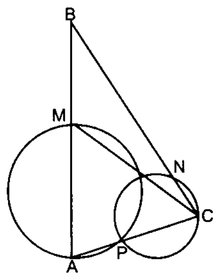
A) $\frac{a+b}{2}$ B) $\frac{ab}{a+b}$ C) $\sqrt{\frac{a+b}{a}}$
D) $(a+b)\sqrt{\frac{a}{b}}$ E) $(2a+b)\sqrt{\frac{b}{a+b}}$

21. Según el gráfico calcular R, si (AB)(CD) = $\sqrt{k}$, (BH)(BD) = k; B y D son puntos de tangencia.



A) 1 B) 2 C) 1/2
D) $\sqrt{k}/k$ E) 1/4

22. Según el gráfico, BN = 5 m; AP = 2 m y PC = 4 m. Calcular $\overline{NC}$.

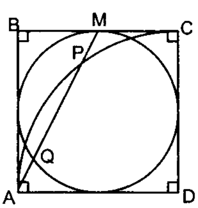


A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

23. En una circunferencia se trazan las cuerdas AB y MN, secantes en Q, $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{MB}$. Si los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos mixtilíneos AQN y NQB son R y r, calcular la longitud del segmento tangente común a dichas circunferencias.

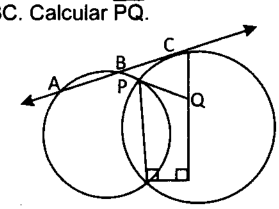
A) R + r B) R − r C) $\frac{R+r}{2}$
D) $\sqrt{Rr}$ E) $2\sqrt{Rr}$

24. En el cuadrado ABCD, AB = $2\sqrt{5}$; calcular $\overline{PQ}$.



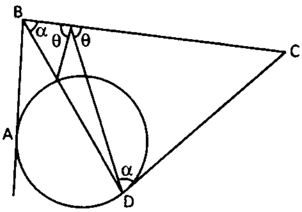
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

25. En el gráfico, C es punto de tangencia, BP = 2 y AB = BC. Calcular $\overline{PQ}$.



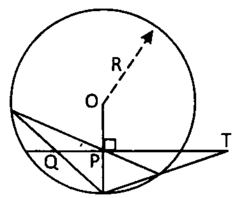
A) 2,5 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

26. Según el gráfico, A es punto de tangencia; si AB = a y CD = b, calcular $\overline{BC}$.



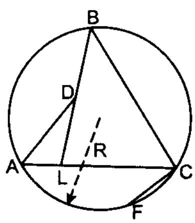
A) $\sqrt{ab}$ B) $2\sqrt{ab}$ C) $\frac{a+b}{2}$
D) $a\sqrt{a^2+b^2}$ E) $\sqrt{a^2+b^2}$

27. En el gráfico, OP = 1; PQ = 4 y PT = 12; calcular R.



A) 14 B) 12 C) 8 D) 7 E) 6

28. En la figura, m∠DAL = m∠LBC; (AD)(LC) = 9; R = 3 y DL = CF. Calcular la distancia de C a $\overline{BF}$.



A) 3/2 B) 2/3 C) 3/5 D) 5/3 E) 2/7

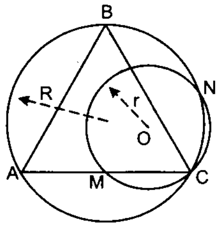
29. Se tiene un triángulo acutángulo ABC de ortocentro H con diámetro AC, se traza exteriormente una semicircunferencia la cual se interseca con la prolongación de la altura $\overline{BQ}$ en R. Si BH = 5 y HQ = 4, calcular la longitud del segmento tangente trazado desde R a la circunferencia circunscrita al triángulo AHB.

A) $5\sqrt{6}$ B) 5 C) 2
D) $3\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{6}$

30. Desde un punto P exterior a una circunferencia, se trazan las secantes PAD y PMQ; luego se ubica el punto medio N de $\overset{\frown}{AD}$, $\overline{MN}$ y $\overline{NQ}$ son secantes a $\overline{AD}$ en B y C, respectivamente. Siendo $\overline{NM} \perp \overline{PQ}$, BC = 4 y CD = 6; calcular $\overline{AP}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

31. El $\triangle ABC$ es equilátero, AM = MC, $m\overset{\frown}{BN} = m\overset{\frown}{BC}$. Calcular en función del radio r, la potencia de A respecto a la circunferencia de centro O.



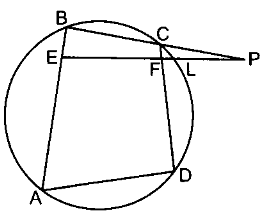
A) $\frac{3r^2}{2}$ B) r^2 C) $r^2\sqrt{3}$
D) $\frac{3r^2}{4}$ E) $2r^2$

32. Dos circunferencias son tangentes interiores en P, el diámetro $\overline{AB}$ de la circunferencia mayor es secante a la circunferencia menor en M y N, respectivamente, siendo N centro de la circunferencia mayor y b diámetro de la circunferencia menor, luego se traza la tangente $\overline{BQ}$ a la circunferencia menor (Q: punto de tangencia) y AM = a. Calcular = $\frac{BQ}{PM}$.

A) $\frac{a}{b}$ B) $\sqrt{\frac{2b}{a}}$ C) $\sqrt{\frac{b}{a}}$
D) $\frac{b}{a}$ E) $\frac{2a}{b}$

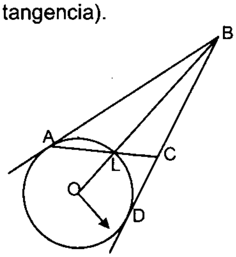
33. En la figura, $\overline{EP}$ // $\overline{AD}$, AE = 8; EF = 7; FL = 1 y LP = 8. Calcular $\overline{BE}$.

A) 1
B) 2
C) 2,5
D) 2,6
E) 3



34. En la figura, hallar $\overline{AB}$, si AL = 5 y LC = 4 (A y D son puntos de tangencia).

A) 18
B) 20
C) 25
D) 30
E) 35

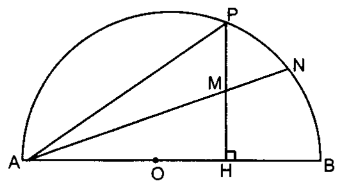


35. En una circunferencia, se trazan los diámetros perpendiculares AB y CD que se cortan en O, luego se trazan las cuerdas BE y BF, las cuales se intersecan con $\overline{CO}$ y $\overline{OD}$ en M y N respectivamente. Si el radio de la circunferencia mide 1, hallar:

$$\sqrt{(BM)(BE)+(BF)(BN)}$$

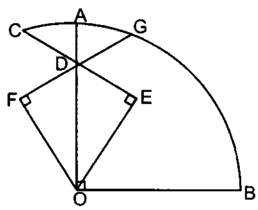
A) 1 B) 2 C) $\sqrt{2}$
D) 4 E) $\sqrt{2}$

36. Si AP = 8; AM = 6 y $\overline{AB}$ es diámetro, hallar $\overline{MN}$.



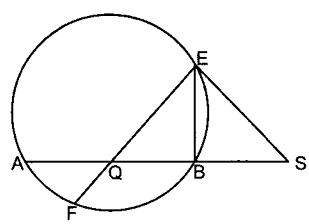
A) 4 B) 5 C) 7/3
D) 10/3 E) 14/3

37. Del gráfico, AO = OB; CD = 3; GD = 4 y FD = 1; hallar $\overline{DE}$.



A) 2 B) 2,4 C) 2,5
D) 3,5 E) 3

38. En el gráfico, AQ = 8, QE = 12 y EF = 16. Si $\overline{EB}$ es mediana del triángulo QES, se afirma que el triángulo QES es:



A) Rectángulo B) Escaleno
C) Equilátero D) Isósceles
E) Rectángulo isósceles

39. Se tiene un cuadrilátero ACBE inscrito en una circunferencia donde AC = BC, las diagonales se intersecan en D. Calcular $\overline{AC}$, si AB = 5; CD = 2; AE + BE = 7.

A) 1,43 B) 1,73 C) 2,5
D) 2,8 E) 3,5

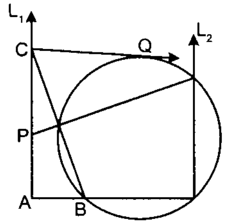
40. El diámetro de una circunferencia tiene 32,5 m; éste se prolonga 4,5 m. ¿Cuál será la longitud de la tangente trazada desde este extremo?

A) 12,1 m B) 12,4 m C) 12,7 m
D) 12,9 m E) 13,2 m

41. En una circunferencia de 16 cm de diámetro, se traza en cuerda $\overline{TD}$ de 12 cm y por T una tangente $\overline{TP}$ a la circunferencia, siendo $\overline{PD}$ una secante que pasa por el centro de la circunferencia. Hallar la distancia de P a la circunferencia.

A) 52 cm B) 54 cm C) 56 cm
D) 58 cm E) 50 cm

42. En el gráfico, $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$, AP = 10 y PC = 8; calcular el valor de $\overline{CQ}$.

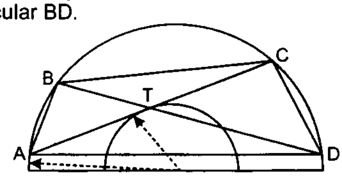


A) 10 B) 12 C) 11
D) 16 E) 18

43. Graficar al cuadrilátero inscriptible ABCD, de modo que AB = BD, m∠BCD = 120°, BC = 6 y CD = 4. Calcular la longitud de $\overline{BD}$.

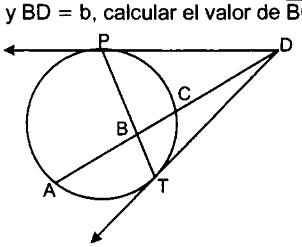
A) $2\sqrt{11}$ B) $2\sqrt{13}$ C) $2\sqrt{15}$
D) $2\sqrt{17}$ E) $2\sqrt{19}$

44. En el gráfico, las semicircunferencias son concéntricas, T es punto de tangencia y además: $(AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2 + (AD)^2 = 8$:
Calcular $\overline{BD}$.



A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) 4
D) $4\sqrt{2}$ E) 8

45. En el gráfico P y T son puntos de tangencia. Si: AB = a y BD = b, calcular el valor de $\overline{BC}$.



A) $\dfrac{ab}{2a+b}$ B) $\dfrac{ab}{2b+a}$ C) $\dfrac{2ab}{a+b}$
D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{ab}$

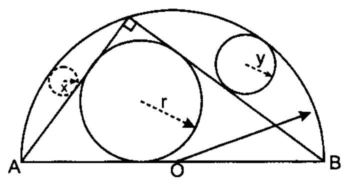
46. En un triángulo inscrito en una circunferencia, las sagitas correspondientes a cada lado mide 1, 2 y 3. Calcular la medida del menor lado del triángulo.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

47. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana BD = 6. Si los inradios de los triángulos ABD y CBD son iguales, calcular el producto de los exradios relativos a los catetos.

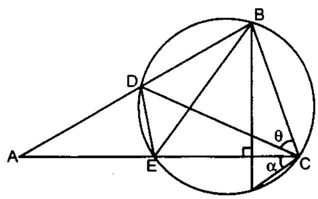
A) 15 B) 18 C) 24
D) 30 E) 36

48. Según el gráfico, calcular "r" en función de x e y, si ambos tienen valores máximos.



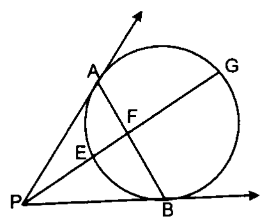
A) $2\sqrt{xy}$ B) $\dfrac{x+y}{2}$ C) $\sqrt{xy}$
D) $2\sqrt{2xy}$ E) $\dfrac{x+y}{3}$

49. Según la figura, calcular $\overline{EB}$, si $\alpha + \theta = 90°$; (BC)(AB) − (AE)(DE) = 25.



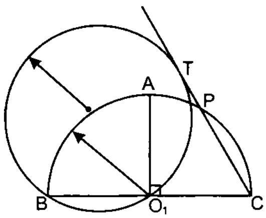
A) $2\sqrt{5}$ B) 5 C) $4\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

50. A y B son puntos de tangencia. Si EP = 6 y EF = 4, calcular el valor de $\overline{FG}$.



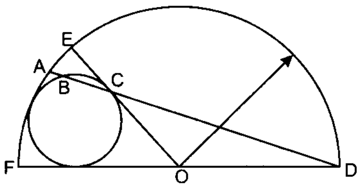
A) 12 B) 16 C) 18
D) 20 E) 22

51. De la figura, calcular la m∠ATC, si la m$\widehat{AP}$ = 80° (T es punto de tangencia).



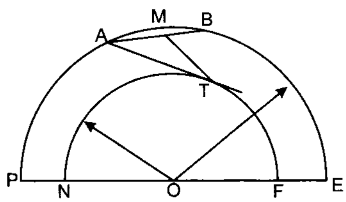
A) 30° B) 60° C) 70°
D) 45° E) 80°

52. En la figura, AB = 1, BC = 2, CE = $\sqrt{7}$, hallar $\overline{CD}$.



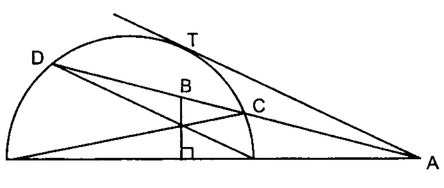
A) 3 B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{5}$
D) $2\sqrt{7}$ E) 7

53. En la figura, NP = 10, NO = 15, AM = MB = 7. Calcular $\overline{MT}$, si T es un punto de tangencia.



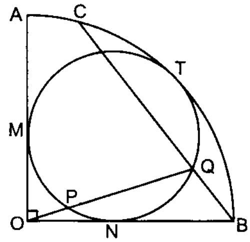
A) 5 B) 10 C) 12
D) 15 E) 16

54. Del gráfico, calcular $\overline{AT}$, si AB = 3 y BC = 2 (T es punto de tangencia).



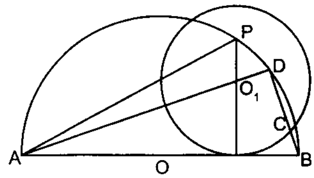
A) $5\sqrt{2}$ B) $5\sqrt{5}$ C) 10
D) 12 E) $8\sqrt{5}$

55. De la figura, AO = OB; OP = 1, PQ = 3. Calcular (BQ)(QC), si M, N y T son puntos de tangencia.



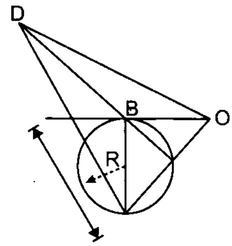
A) $(\sqrt{2}-1)$ B) $2(\sqrt{3}+1)$ C) $4(2\sqrt{2}-1)$
D) $2\sqrt{2}-3$ E) $5(\sqrt{2}+1)$

56. En la figura mostrada O y O_1 son centros. Calcular $\overline{AP}$, sabiendo que CD = 3; BC = 2 y AB = 10



A) $2\sqrt{3}$ B) $3\sqrt{7}$ C) $5\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{15}$ E) $\sqrt{22}$

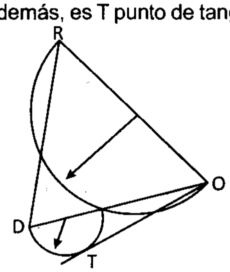
57. Del gráfico, calcular $\overline{DO}$, si $(DB)^2 + (BD)^2 = 13$; $R = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



A) $\sqrt{15}$ B) $\sqrt{17}$ C) $\sqrt{18}$
D) $\sqrt{20}$ E) $\sqrt{19}$

58. En el gráfico, calcular $(DO)^2 - (DR)^2$. Sabiendo que RO = a y TO = b. Además, es T punto de tangencia.

A) $\sqrt{2}b - a$
B) $b^2 + a^2/2$
C) $3b^2 - 2a^2$
D) $2b^2 - a^2$
E) $3b^2 - a^2$



59. Hallar la distancia del incentro al circuncentro de un triángulo cuyo circunradio mide 14 cm, sabiendo que el producto de multiplicar entre la distancia del incentro a un vértice y el circunradio del triángulo formado al unir el incentro con los otros dos vértices es igual a 171 cm^2.

A) 3,5 cm B) 4 cm C) 4,5 cm
D) 4,8 cm E) 5 cm

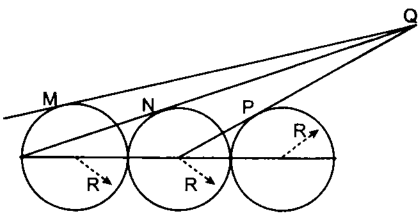
60. En un cuadrilátero ABCD, inscrito en una circunferencia; la tangente trazada por D a dicha circunferencia es paralela a $\overline{AC}$. Si $(BD)^2 - (AB)(BC) = 162$, calcular $\overline{CD}$.

A) 9 B) $3\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{3}$ D) $9\sqrt{2}$ E) 18

61. En un cuadrilátero ABCD inscriptible, se trazan las perpendiculares $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ y $\overline{DG}$ a los lados $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si DE = 6, DF = 3, DG = 2, AB = 4, BC = 3, calcular $\overline{AC}$.

A) 5 B) 5,5 C) 6 D) 6,5 E) 7

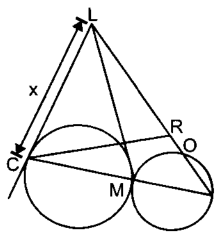
62. En el gráfico, M, N, P son puntos de tangencia; calcular $\overline{QM}$, si R = 1



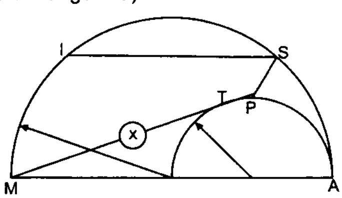
A) 5,5 B) 6 C) 6,5
D) 7 E) 7,18

63. Del gráfico, calcular x, si DR = 2(RO) = 4
(C y M son puntos de tangencia).

A) $2\sqrt{2}$
B) $2\sqrt{3}$
C) 5
D) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$
E) $2\sqrt{6}$



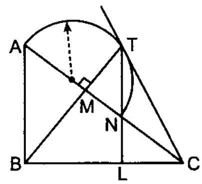
64. En el gráfico mostrado, calcular x. Si $\overline{MA}$ // $\overline{IS}$, $m\overset{\frown}{MI} = m\angle PSI$. Además, IS = 6 y PS = 1. (T es punto de tangencia).



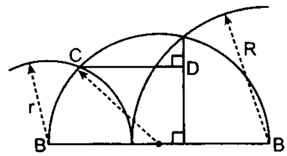
A) 4 B) $4\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{2}$
D) 7,5 E) $6\sqrt{2}$

65. Según el gráfico, calcule $\overline{BL}$, si AM = a y NC = b
(T es punto de tangencia)

A) $\sqrt{a^2+b^2}$
B) $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$
C) $\sqrt{a(a+b)}$
D) $\sqrt{ab}$
E) $\sqrt{b(a+b)}$



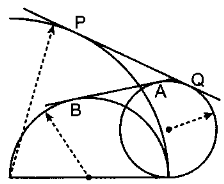
66. Según el gráfico, calcule $\overline{CD}$ en función de R y r.



A) $\frac{R-r}{Rr}$ B) $2\sqrt{Rr}$ C) $\frac{Rr}{R-r}$
D) $\frac{Rr}{R+r}$ E) $\frac{2Rr}{R+r}$

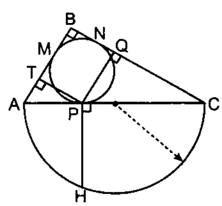
67. Calcule $\overline{PQ}$, si AB = a
(P, Q, T, A y B son puntos de tangencia)

A) 2a
B) a
C) $a\sqrt{2}$
D) 4a
E) $2a\sqrt{2}$

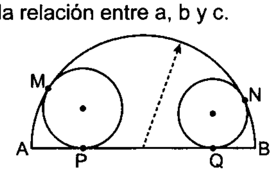


68. Según el gráfico P, M y N son puntos de tangencia y (AT)(TB) + (BQ)(QC) = 25, calcule $\overline{PH}$.

A) 10
B) 5
C) 12,5
D) 5
E) 10



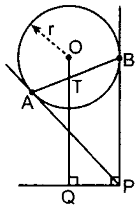
69. Según el gráfico M, P, Q y N son puntos de tangencia, si AP = a, PQ = b, QB = c y $m\overset{\frown}{MN} = 90°$, calcule la relación entre a, b y c.



A) 2b = a + c B) $b^2 = a^2 + c^2$ C) $b = \sqrt{ac}$
D) $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ E) $b = 2\sqrt{ac}$

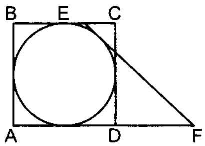
70. Según el grafico A y B son puntos de tangencia, OT = 2 y TQ = 6, calcule "r".

A) 3
B) 4
C) 5
D) 7
E) 6

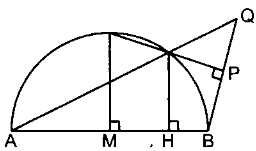


71. Calcule el radio de la circunferencia inscrita en el cuadrado ABCD; si EC = 2 m y DF = 3 m.

A) 2 m
B) 3 m
C) 4 m
D) 6 m
E) 9 m



72. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro de la semicircunferencia. Si AB = 2R, HB = b, MB = a, calcule $\overline{PQ}$.

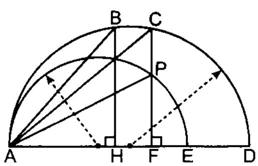


A) $ab(2R - a)$ B) $(2R - a)\sqrt{\frac{b}{a}}$

C) $2R(a - b)$ D) $\frac{a-b}{R}$

E) $\frac{\sqrt{ab}}{2R}$

73. Según la figura, calcule $\overline{AB}$, si AP = 6.



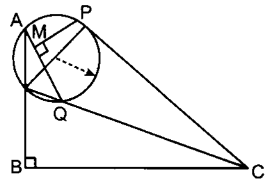
A) $6\sqrt{2}$ B) $4\sqrt{2}$ C) 6
D) 8 E) 12

74. En un triángulo ABC, con diámetro $\overline{AB}$ se traza la semicircunferencia que interseca a $\overline{AC}$ en F; en el arco BF se ubica un punto E, tal que la tangente trazada por E es perpendicular a $\overline{FC}$ en D. Calcule $\overline{ED}$, si AD = 8 cm y BE = 3 cm.

A) 5 cm B) $\sqrt{2}$ cm C) $2\sqrt{2}$ cm
D) 4 cm E) 6 cm

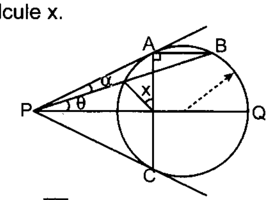
75. En el gráfico, 2(BC) = 3(AQ) y AB = 6. Calcule $\overline{PM}$

A) 1
B) 4
C) 3
D) 2
E) 1,5



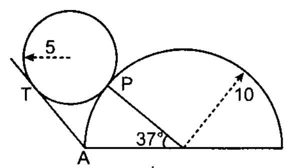
76. Del gráfico $2\theta + \alpha = 40°$, (A y C son puntos de tangencia). Calcule x.

A) 20°
B) 40°
C) 30°
D) 50°
E) 80°



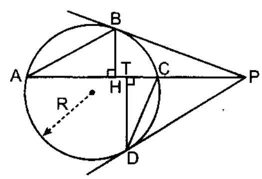
77. Del gráfico, calcule $\overline{AT}$ (P y T, puntos de tangencia)

A) $\sqrt{15}$
B) $3\sqrt{15}$
C) $2\sqrt{15}$
D) 8
E) 9



78. Según el gráfico, calcule R, si (AB)(CD) = $\sqrt{k}$, (BH)(BD) = k. (B y D son puntos de tangencia).

A) 1
B) 2
C) 1/2
D) $\sqrt{k}/k$
E) 1/4



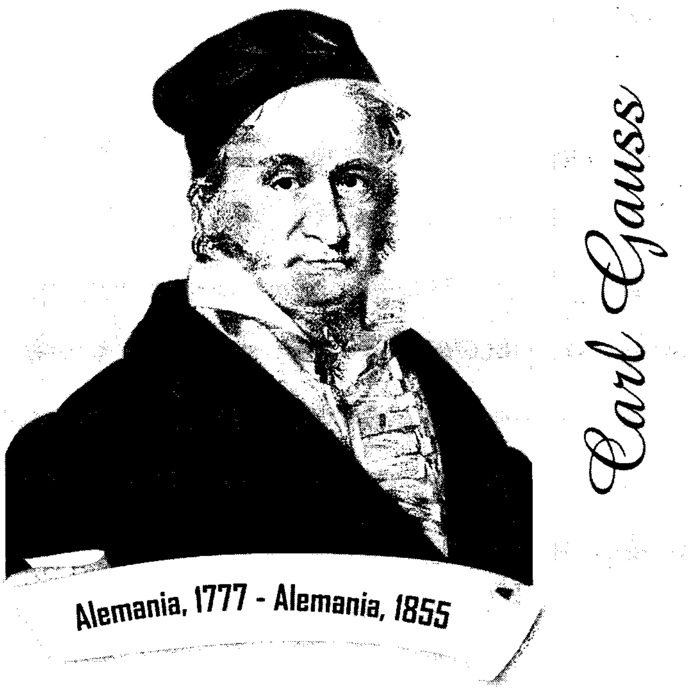
CLAVES

1. D	11. C	21. C	31. E	41. C	51. C	61. D	71. D
2. C	12. A	22. C	32. B	42. B	52. E	62. E	72. B
3. E	13. B	23. E	33. B	43. E	53. D	63. E	73. C
4. B	14. B	24. C	34. D	44. A	54. B	64. B	74. C
5. C	15. C	25. C	35. B	45. A	55. C	65. D	75. B
6. E	16. C	26. E	36. E	46. B	56. D	66. E	76. B
7. B	17. C	27. D	37. C	47. E	57. E	67. C	77. C
8. D	18. D	28. A	38. D	48. D	58. D	68. B	78. C
9. E	19. D	29. A	39. D	49. B	59. E	69. B	
10. C	20. E	30. D	40. D	50. D	60. D	70. B	

Polígonos regulares Longitud de la circunferencia

13 capítulo

Johann Carl Friedrich Gauss (Brunswick, 30 de abril de 1777-Gotinga, 23 de febrero de 1855) fue un matemático, astrónomo, geodesta y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos campos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica. Considerado «el príncipe de los matemáticos» y «el matemático más grande desde la antigüedad», Gauss ha tenido una influencia notable en muchos campos de la matemática y de la ciencia, y es considerado uno de los matemáticos que más influencia ha tenido en la historia.



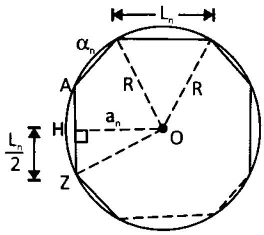
Es claro que Gauss era un genio en varias disciplinas, pero no se decidió por las matemáticas hasta el 30 de marzo de 1796, porque ese mismo día, cuando le faltaba aún un mes para cumplir los diecinueve años, hizo un brillante descubrimiento. Desde hacía más de 2000 años, se sabía cómo construir con regla y compás el triángulo equilátero, el cuadrado y el pentágono regular (así como algunos otros polígonos regulares cuyos números de lados son múltiplos de dos, de tres o de cinco), pero ningún otro polígono regular con un número primo de lados. Ese día en cuestión, Gauss halló un método para construir un polígono regular de 17 lados con ayuda de regla y compás, e incluso fue más allá, demostrando que solo ciertos polígonos regulares se podían construir con ayuda de regla y compás.

Fuente: Wikipedia

POLÍGONOS REGULARES

Son aquellos polígonos convexos que tienen sus lados y ángulos, respectivamente, congruentes.

Todo polígono regular puede ser inscrito y circunscrito a dos circunferencias concéntricas.



O: centro de la circunferencia.
R: circunradio.
L_n: longitud del lado, para el polígono regular de **n** lados.
$\mathbf{a_n}$: longitud de la apotema.
$\triangle COB$: elemento fundamental del polígono.
α_n: medida del ángulo central o del arco que subtiende cada lado del polígono.

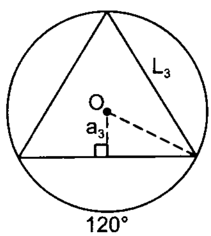
$$\boxed{\alpha_n = \frac{360}{n}}$$

Cálculo de la longitud del lado. En el $\triangle COB$ con la ley de cosenos: $\boxed{L_n = R\sqrt{2(1-\cos\alpha_n)}}$

Cálculo de la apotema. En el $\triangle OHZ$: $\boxed{a_n = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$

POLÍGONOS REGULARES NOTABLES

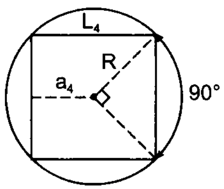
1. **Triángulo equilátero**



$$\boxed{L_3 = R\sqrt{3}}$$

$$\boxed{a_3 = \frac{R}{2}}$$

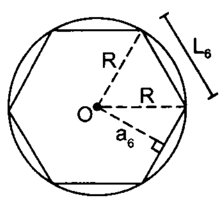
2. **Cuadrado**



$$\boxed{L_4 = R\sqrt{2}}$$

$$\boxed{a_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}}$$

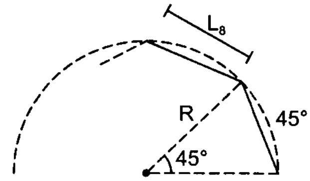
3. **Hexágono regular**



$$\boxed{L_6 = R}$$

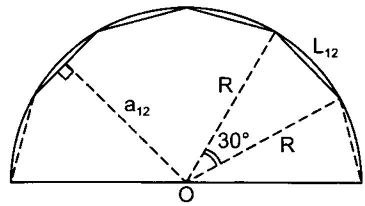
$$\boxed{a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}}$$

4. **Octógono regular**



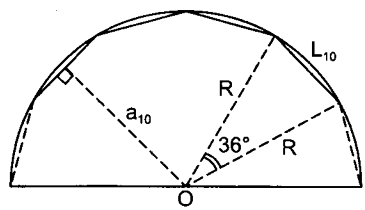
$$\boxed{L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}} \; ; \; \boxed{a_8 = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}$$

5. **Dodecágono regular**



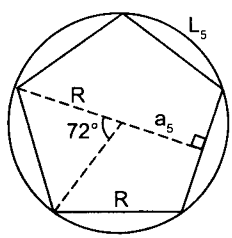
$$\boxed{L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}} \; ; \; \boxed{a_{12} = \frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}}$$

6. **Decágono regular**



$$\boxed{L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)} \; ; \; \boxed{a_{10} = \frac{R}{4}\sqrt{10+\sqrt{20}}}$$

7. **Pentágono regular**

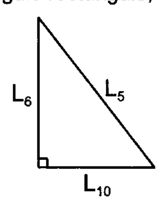


$$\boxed{L_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}}$$

$$\boxed{a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)}$$

Propiedad

Los lados del pentágono, hexágono y decágono regulares forman un triángulo rectángulo; así:

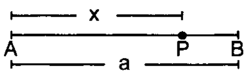


En resumen:

Polígono regular	α_n	L_n	a_n
Triángulo	120°	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$
Cuadrado	90°	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$
Hexágono	60°	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$
Octógono	45°	$R\sqrt{2-\sqrt{2}}$	$\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$
Dodecágono	30°	$R\sqrt{2-\sqrt{3}}$	$R\sqrt{2+\sqrt{3}}$
Decágono	36°	$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$	$\frac{R}{4}\sqrt{10+\sqrt{20}}$
Pentágono	72°	$\frac{R}{2}\sqrt{10-\sqrt{20}}$	$\frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Dividir un segmento en media y extrema razón, quiere decir dividir la longitud del segmento en dos partes diferentes, siendo la mayor media proporcional entre la parte menor y el total. A la porción mayor, se le llama **sección áurea** del segmento total.



Así: $\frac{AP}{AB} = \frac{PB}{AP}$ (definición) $\Rightarrow (AP)^2 = AB(PB)$

Si AB = a, entonces, para hallar x: $x^2 = a(a - x)$

$\Rightarrow x^2 + ax - a^2 = 0 \Rightarrow x = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

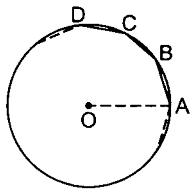
(fórmula de la sección áurea de un segmento de longitud a).

A la cantidad: $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ se la conoce como **número áureo** (0,61803).

Propiedad

El lado del decágono regular tiene longitud igual a la sección áurea del radio de la circunferencia circunscrita.

En efecto, sea ABCD el decágono regular inscrito en la circunferencia de centro O y radio R. Demostremos que:



$L_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

Para ello extraemos el $\triangle AOB$; tracemos la bisectriz $\overline{BZ}$ del $\angle ABO$. Entonces, se observa:

$\triangle ZBA$ (isósceles) $BZ = AB \Rightarrow BZ = L_{10}$

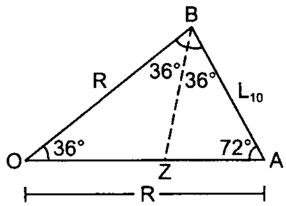
$\triangle OZB$ (isósceles) $OZ = BZ \Rightarrow OZ = L_{10}$

$\Rightarrow ZA = OA - OZ$

$\Rightarrow ZA = R - L_{10}$

En el $\triangle ABO$, por el primer teorema de la bisectriz:

$\frac{AB}{OB} = \frac{ZA}{OZ}$

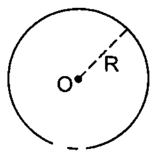


$\Rightarrow \frac{L_{10}}{R} = \frac{R - L_{10}}{L_{10}} \Rightarrow (L_{10})^2 = R(R - L_{10})$

De donde: $L_{10} = R\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$

LONGITUD DE LA CIRCUNFERENCIA

Como: $\frac{C}{2R} = \pi$



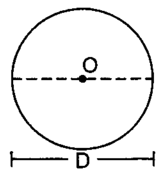
$\boxed{C = 2\pi R}$

Es decir, la longitud de toda circunferencia es proporcional a la longitud de su radio.

Usualmente, la longitud C de una circunferencia se deja indicada en función de π.

Por ejemplo, para una circunferencia de radio 5 cm, $C = 10\pi$ cm.

Si D es longitud de diámetro de una circunferencia:

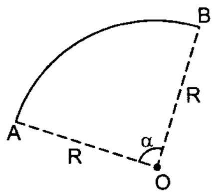


$\boxed{C = \pi D}$

LONGITUD DE ARCO

La longitud de un arco, cuyo ángulo central tiene medida α, se evalúa:

$L_{\overset{\frown}{AB}}$: longitud del arco AB.

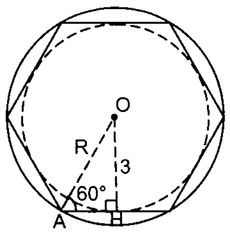


$\boxed{L_{\overset{\frown}{AB}} = 2\pi R\left(\frac{\alpha^\circ}{360^\circ}\right)}$

Ejemplos:

1. El radio de la circunferencia inscrita en un hexágono regular es 3. Hallar la longitud del radio de la circunferencia circunscrita al mismo polígono.

Resolución:



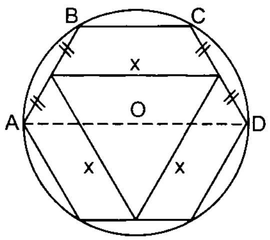
Según el gráfico dado por el enunciado: OH = 3
En el $\triangle AHO$ (30° y 60°):

$$\frac{OA}{2}\sqrt{3} = OH \Rightarrow \frac{R}{2}\sqrt{3} = 3$$

De donde: $R = 2\sqrt{3}$

2. Hallar el perímetro del triángulo que se forma al unir los puntos medios de tres lados no consecutivos de un hexágono regular de circunradio R.

Resolución:



Como: $m\overset{\frown}{ABCD} = 180° \Rightarrow \overline{AD}$ es diámetro

En el trapecio ABCD: $x = \dfrac{AD + BC}{2}$

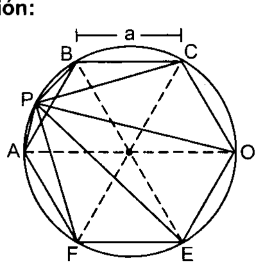
Donde: $BC = L_6 = R \Rightarrow x = \dfrac{2R + R}{2} = \dfrac{3}{2}R$

Como el triángulo es equilátero, su perímetro es:

$3x = \dfrac{9R}{2}$

3. Sobre el arco AB, de la circunferencia circunscrita a un hexágono regular ABCDEF, de lado a, se toma un punto P. Hallar:
$\Sigma = (PA)^2 + (PB)^2 + (PC)^2 + (PD)^2 + (PE)^2 + (PF)^2$

Resolución:



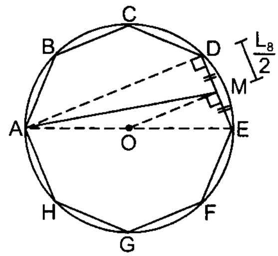
Se observan en los triángulos rectángulos:

$$\left.\begin{array}{l}(PA)^2 + (PD)^2 = (AD)^2\\(PB)^2 + (PE)^2 = (BE)^2\\(PC)^2 + (PF)^2 = (FC)^2\end{array}\right\}(+)$$

$\Rightarrow \Sigma = (AD)^2 + (BE)^2 + (FC)^2 \Rightarrow \Sigma = 12a^2$

4. En un octógono regular ABCDEFGH de circunradio R, hallar la distancia del vértice A al punto medio del lado $\overline{DE}$.

Resolución:



$OM = a_8 = \dfrac{R}{2}\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

En el triángulo ADE, por ser base media:

$AD = 2(OM) \Rightarrow AD = R\sqrt{2 + \sqrt{2}}$

En el triángulo rectángulo ADM:

$(AM)^2 = (AD)^2 + (DM)^2$

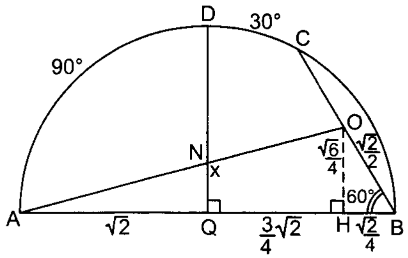
$(AM)^2 = (R\sqrt{2 + \sqrt{2}})^2 + \left(\dfrac{R}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2}}\right)^2$

$\therefore AM = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 + 3\sqrt{2}}$

5. En una circunferencia de centro Q y radio $\sqrt{2}$, se trazan los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{DE}$, perpendiculares entre sí. La recta que une el punto A con el punto medio O de $\overline{BC}$, lado del hexágono regular inscrito, corta a $\overline{DE}$ en N. Indicar cuanto mide QN.

Resolución:

Sea el gráfico, con los datos:



Como $CB = L_6 = \sqrt{2} \Rightarrow OB = OC = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Se traza $\overline{OH} \perp \overline{OB}$

En el $\triangle OHB$ (30° y 60°)

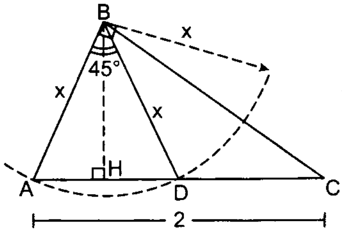
$HB = \dfrac{OB}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ y $OH = (HB)\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$\triangle AQN \sim \triangle AHO$: $\dfrac{x}{\frac{\sqrt{6}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \frac{3}{4}\sqrt{2}}$

$\therefore x = \dfrac{\sqrt{6}}{7}$

6. La hipotenusa de un triángulo rectángulo ABC, mide AC = 2. Se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Si BD = AB, hallar AB.

Resolución:



AB = x

B es el centro de una circunferencia de radio AB = BD, donde: AD = L_8 ya que m∠ABD = 45°

Trazamos $\overline{BH} \perp \overline{AC} \Rightarrow AH = \dfrac{AD}{2} = \dfrac{x}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

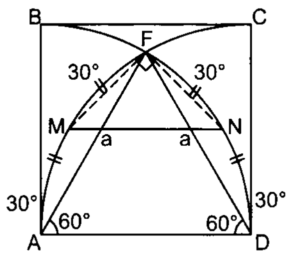
Por relaciones métricas: $AB^2 = (AC)(AH)$

$x^2 = (2)\left(\dfrac{x}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right) \Rightarrow x = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

7. En un cuadrado ABCD, de lado a, tomando como centros los vértices A y D y con radio a se trazan los arcos BD y AC, secantes en F. Hallar la distancia entre los puntos medios de $\overset{\frown}{AF}$ y $\overset{\frown}{FD}$.

Resolución:

Sea el gráfico:



El triángulo AFD es equilátero

Luego, $m\overset{\frown}{AF} = m\overset{\frown}{FD}$ = 60° (ángulo central).

Ángulo inscrito $m\angle AFM = m\angle NFD = \dfrac{30°}{2} = 15°$

Entonces, por arco que subtiende:

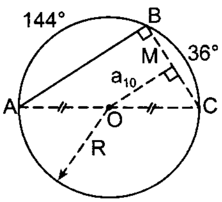
$FM = FN = L_{12} = a\sqrt{2-\sqrt{3}}$

En el △MFN, isósceles: $MN = MF\sqrt{2}$

$\therefore MN = a\sqrt{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow MN = a(\sqrt{3}-1)$

8. En una circunferencia de radio R, hallar la longitud de la cuerda que subtiende un arco de 144°.

Resolución:



Sea $\overline{AB}$ la cuerda, tal que $m\overset{\frown}{AB}$ = 144°

Si se traza el diámetro $\overline{AC}$: $m\overset{\frown}{BC}$ = 36° ⇒ OM = a_{10}

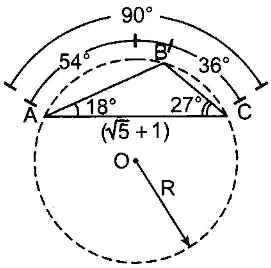
En el △ABC:

$AB = 2(a_{10}) \Rightarrow AB = 2\left(\dfrac{R}{4}\sqrt{10+\sqrt{20}}\right)$

$\Rightarrow AB = \dfrac{R}{2}\sqrt{10+\sqrt{20}}$

9 En un △ABC, m∠A = 18°, m∠C = 27° y AC = $\sqrt{5}+1$; hallar BC.

Resolución:



Dibujamos la circunferencia circunscrita al △ABC.

R: circunradio

Como: m∠A = 18° ⇒ $m\overset{\frown}{BC}$ = 36°

y m∠C= 27° ⇒ $m\overset{\frown}{AB}$ = 54°

Luego: $\overset{\frown}{ABC}$ = 90°

Entonces, $\overline{AC}$ es un lado del cuadrado inscrito en la circunferencia:

$AC = L_4 \Rightarrow \sqrt{5}+1 = R\sqrt{2} \Rightarrow R = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$

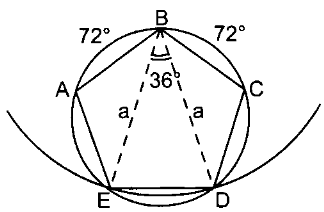
También, BC = L_{10} ya que $m\overset{\frown}{BC}$ = 36°

Para el decágono regular: $L_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

$\Rightarrow BC = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \Rightarrow BC = \dfrac{(\sqrt{5}-1)}{2\sqrt{2}}(\sqrt{5}+1)$

$\therefore BC = \sqrt{2}$

10. Hallar la longitud del lado de un pentágono regular, sabiendo que una diagonal mide a.

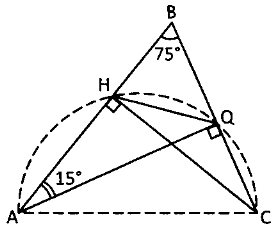


Resolución:

Es fácil probar que en el pentágono regular, todas las diagonales son congruentes. Como B equidista de E y D; B es centro de una circunferencia de radio a, pasando por E y D. En dicha circunferencia: $ED = L_{10} = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$ (Lado del pentágono regular en función de la diagonal).

11. En un triángulo ABC acutángulo, $m\angle B = 75°$ y $AC = 12$, se trazan las alturas $\overline{AQ}$ y $\overline{CH}$. Hallar HQ.

Resolución:



AHQC es un cuadrilátero inscriptible.

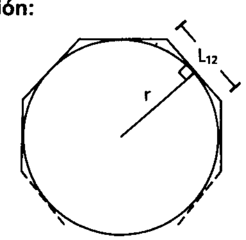
$m\angle BAQ = 15° \Rightarrow m\overset{\frown}{HQ} = 30°$

Luego: $HQ = L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

Pero: $R = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{12}{2} = 6 \quad \therefore HQ = 6\sqrt{2-\sqrt{3}}$

12. Hallar la longitud del lado de un decágono regular, sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita en él, mide 0,5 cm.

Resolución:



Dato: $r = 0{,}5$ cm

Sabemos que si R es el circunradio:

$L_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \;\wedge\; a_{12} = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Luego: $\dfrac{L_{12}}{a_{12}} = \dfrac{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} \Rightarrow L_{12} = 2(2-\sqrt{3})a_{12}$

Siendo: $a_{12} = r$

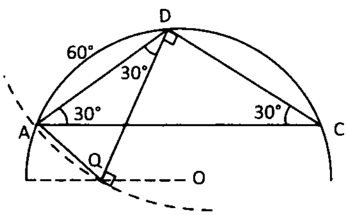
Entonces, $L_{12} = 2(2-\sqrt{3})r$

Con el dato: $L_{12} = 2(2-\sqrt{3})0{,}5$

$\therefore L_{12} = (2-\sqrt{3})$ cm

13. En una circunferencia de radio $\sqrt{2+\sqrt{3}}$, se inscribe el triángulo isósceles ABC, tal que $m\angle B = 120°$. Luego, se dibuja interiormente el cuadrado BCPQ. Hallar AQ.

Resolución:



Para la circunferencia de radio R: $AB = L_6 = R$

Para la circunferencia de centro B y radio $AB = BQ$:

$AQ = L_{12} = AB\sqrt{2-\sqrt{3}}$

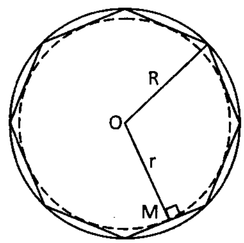
$\Rightarrow AQ = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow AQ = \sqrt{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}$

$\therefore\; AQ = 1$

14. Hallar la relación entre los radios de las circunferencias, inscrita y circunscrita a un octógono regular.

Resolución:



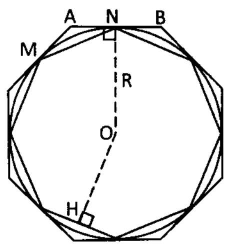
Del gráfico, sabemos que:

$OM = a_8 \Rightarrow r = \dfrac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$

$\therefore \dfrac{r}{R} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

15. Hallar la relación entre las longitudes de los lados de dos octógonos regulares, inscrito y circunscrito, a la misma circunferencia.

Resolución:



Los polígonos regulares de igual número de lados son semejantes. Luego, como se pide $\dfrac{MN}{AB}$ de la semejanza, podemos escribir:

razón de lados = razón de apotemas

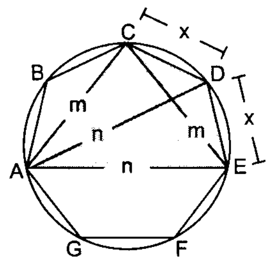
$$\frac{MN}{AB} = \frac{OH}{ON} \Rightarrow \frac{MN}{AB} = \frac{\frac{R}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}}{R}$$

$$\therefore \frac{MN}{AB} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG, si $\frac{1}{AE}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{6}$

Resolución:



Si AC = m y AE = n $\Rightarrow$ $\frac{1}{n}+\frac{1}{m}=\frac{1}{6}$ (dato)

Como: $m\overset{\frown}{ABC}=m\overset{\frown}{CDE}$ $\Rightarrow$ CE = AC $\Rightarrow$ CE = m

$m\overset{\frown}{ABCD}=m\overset{\frown}{AGFE}$ $\Rightarrow$ AD = AE $\Rightarrow$ AD = n

En ACDE, teorema de Ptolomeo:

AE(CD) + AC(DE) = AD(CE) $\Rightarrow$ nx + mx = mn

$x(n+m)=nm \Rightarrow \frac{n+m}{nm}=\frac{1}{x}$

De donde: $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{x}$

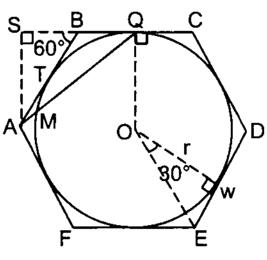
(Propiedad para todo heptágono regular)

Comparando con el dato: x = 6

$\therefore$ Perímetro: 42

2. ABCDEF es un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de radio r, tangente a $\overline{BC}$ en Q. $\overline{AQ}$ corta a la circunferencia en M. Hallar AM.

Resolución:



Según el gráfico, T es punto de tangencia en $\overline{AB}$

Por el teorema de la tangente:

$(AT)^2=AQ(AM)$ ...(1)

Trazamos $\overline{AS}$, perpendicular a $\overline{BC}$.

$\triangle$EWO: $EW=\frac{OW}{\sqrt{3}}\Rightarrow EW=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow ED=2EW=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$ (lado del hexágono).

Entonces:

$AB=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$ y $AT=\frac{AB}{2}\Rightarrow AT=\frac{r}{3}\sqrt{3}$ ...(2)

Además en ASB: AS = OQ $\Rightarrow$ AS = r $\wedge$

$SB=\frac{AB}{2}\Rightarrow SB=\frac{r}{3}\sqrt{3}$

Luego: $SQ=SB+BQ=\frac{r\sqrt{3}}{3}+\frac{r\sqrt{3}}{3}\Rightarrow SQ=\frac{2}{3}r\sqrt{3}$

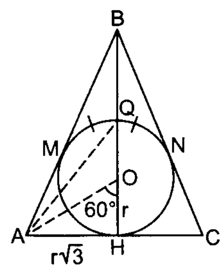
En $\triangle$ASQ, teorema de Pitágoras: $AQ^2=AS^2+SQ^2$

$(AQ)^2=r^2+\left(\frac{2}{3}r\sqrt{3}\right)^2\Rightarrow AQ=\frac{r}{3}\sqrt{21}$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1): $AM=r\frac{\sqrt{21}}{21}$

3. El triángulo equilátero ABC, está circunscrito a una circunferencia de radio r, tangente a $\overline{AB}$ en M y a $\overline{BC}$ en N. Si Q es el punto medio de $\overline{MN}$, hallar $(BQ)^2+(AQ)^2$.

Resolución:



O: baricentro del triángulo ABC $\Rightarrow$ BO = 2(OH)

BO = 2r $\Rightarrow$ BQ = r

$\triangle$AHO (30° y 60°): $AH=r\sqrt{3}$

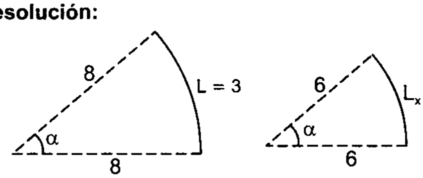
$\triangle$AHQ: $(AQ)^2=(AH)^2+(HQ)^2$

$(AQ)^2=(r\sqrt{3})^2+(2r)^2\Rightarrow AQ^2=7r^2$

Luego: $(BQ)^2+(AQ)^2=r^2+7r^2=8r^2$

4. Un arco (con radio de 8 m) mide 3 m. ¿Qué diferencia existe entre la longitud de este arco y la de otro, del mismo valor angular, de 6 m de radio?

Resolución:



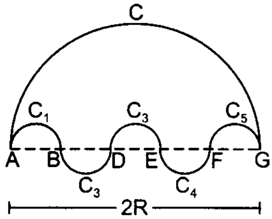
Por semejanza:

$\frac{L_x}{3}=\frac{6}{8}\Rightarrow L_x=2{,}25$

$\therefore L-L_x=3-2{,}25=0{,}75$ m

5. Sobre el diámetro 2R de un semicírculo, se toman segmentos cualesquiera AB, BD, DE, EF y FG, los cuales se utilizan como diámetros de otras semicircunferencias, según la figura. Calcular la longitud total de $m\overset{\frown}{AC_1B}+m\overset{\frown}{BC_2D}+m\overset{\frown}{DC_3E}+m\overset{\frown}{EC_4F}+m\overset{\frown}{FC_5G}$

Resolución:



Llamando, L, L_1, L_2, ... a las longitudes de las semicircunferencias: $L = \pi R$

$L_1 = \pi\left(\frac{AB}{2}\right)$, $L_2 = \pi\left(\frac{BD}{2}\right)$

$L_3 = \pi\left(\frac{DE}{2}\right)$, $L_4 = \pi\left(\frac{EF}{2}\right)$

$L_5 = \pi\left(\frac{FG}{2}\right)$

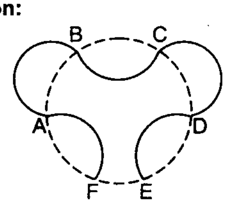
Sumando: $L_1 + L_2 + L_3$ ...se tiene:

$$L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = \frac{\pi}{2}(AB + BD + DE + EF + FG) = \frac{\pi}{2}(2R) = \pi R$$

$\therefore\ L_1 + L_2 + L_3 + L_4 + L_5 = \pi R$

6. Hallar la longitud de la figura, si $m\overset{\frown}{EF}$ es de 60° y los demás arcos son semicircunferencias de igual radio.

Resolución:



Se tendrá: $L_{total} = 5(L_{\overset{\frown}{AB}}) + L_{\overset{\frown}{EF}}$ ...(1)

Como: $AB = L_6 = R$, esto indica que el radio de $\overset{\frown}{AB}$ es $\frac{R}{2}$

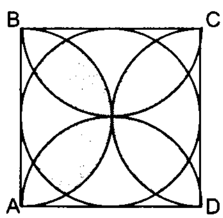
Luego: $L_{\overset{\frown}{AB}} = \frac{\pi R}{2}$ ...(2)

También: $L_{\overset{\frown}{EF}} = 2\pi R\left(\frac{60}{360}\right) = \frac{\pi R}{3}$ ...(3)

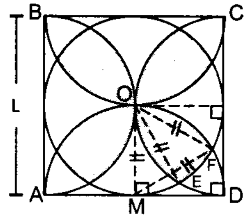
Reemplazando en (1): $L_{total} = 5\left(\frac{\pi R}{2}\right) + \frac{\pi R}{3}$

$\therefore\ L_{total} = \frac{17\pi R}{6}$

7. La figura muestra un cuadrado de lado L, una circunferencia y cuatro semicircunferencias. Hallar el perímetro de la región sombreada.



Resolución:



Se analiza una parte de la figura; el perímetro pedido equivale a:

$x = 8(L_{\overset{\frown}{OF}}) + 4(L_{\overset{\frown}{EF}})$ ...(1)

Como: $OM = OF = MF \Rightarrow \triangle OMF$ es equilátero,

Entonces:

$m\angle OMF = m\angle EOF = 60°$ y $m\angle FOP = 30°$

Análogamente: $m\angle MOE = 30° \Rightarrow m\angle EOF = 30°$

Luego: $L_{\overset{\frown}{OF}} = 2\pi(MO)\left(\frac{m\angle OMF}{360}\right) = 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{60}{360}\right)$

$\Rightarrow L_{\overset{\frown}{OF}} = \frac{\pi L}{6}$

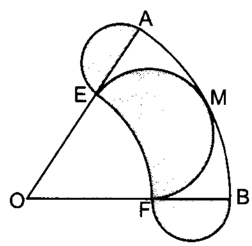
También:

$L_{\overset{\frown}{EF}} = 2\pi(OF)\left(\frac{m\angle EOF}{360}\right) = 2\pi\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{30}{360}\right) \Rightarrow L_{\overset{\frown}{EF}} = \frac{\pi L}{12}$

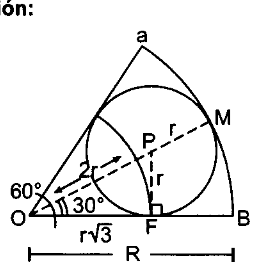
Reemplazando en (1):

$x = 8\left(\frac{\pi L}{6}\right) + 4\left(\frac{\pi L}{12}\right)\quad \therefore\ x = \frac{5}{3}\pi L$

8. Hallar el perímetro de la figura sombreada, si el radio $\overline{OA}$ mide R, $m\angle AOB = 60°$. Además, O es centro de $\overset{\frown}{EF}$; $\overline{AE}$ y $\overline{FB}$ son diámetros.



Resolución:



$x = L_{\overset{\frown}{AE}} + L_{\overset{\frown}{FB}} + L_{\overset{\frown}{EF}} + L_{\overset{\frown}{AMB}}$ ...(1)

Debemos encontrar los otros radios, en función de R.

Sean P y r, centro y radio de la circunferencia.

$\triangle OFP$ (30°; 60°) $OP = 2PF \Rightarrow OP = 2r$

Entonces: $OP + PM = OM$

$2r + r = R \Rightarrow r = \dfrac{R}{3}$

Además, $OF = r\sqrt{3} = \dfrac{R}{3}\sqrt{3}$ y $FB = R - r\sqrt{3}$

$\Rightarrow FB = R - \dfrac{R}{3}\sqrt{3}$

$\overset{\frown}{AE}$ y $\overset{\frown}{FB}$ forman una circunferencia de diámetro $\overline{FB}$.

$\Rightarrow L_{\overset{\frown}{AE}} + L_{\overset{\frown}{FB}} = \pi(FB) = \pi\left(R - \dfrac{R}{3}\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow L_{\overset{\frown}{AE}} + L_{\overset{\frown}{FB}} = \dfrac{\pi}{3}R(3 - \sqrt{3})$

Por otro lado:

$L_{\overset{\frown}{EF}} = 2\pi(r\sqrt{3})\left(\dfrac{60}{360}\right) = 2\pi\left(\dfrac{R}{3}\sqrt{3}\right)\left(\dfrac{60}{360}\right)$

$\Rightarrow L_{\overset{\frown}{EF}} = \dfrac{\pi R\sqrt{3}}{9}$

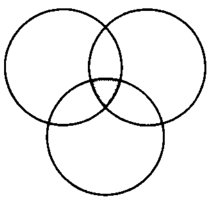
$L_{\overset{\frown}{AMB}} = 2\pi R\left(\dfrac{60}{360}\right) \Rightarrow L_{\overset{\frown}{AMB}} = \dfrac{\pi R}{3}$

Finalmente, reemplazando lo hallado en (1):

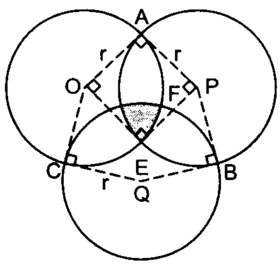
$x = \dfrac{\pi}{3}R(3 - \sqrt{3}) + \dfrac{\pi R\sqrt{3}}{9} + \dfrac{\pi R}{3}$

$\therefore\ x = \dfrac{2\pi}{9}R(6 - \sqrt{3})$

9. La figura muestra tres circunferencias de igual radio **r**, ortogonales entre sí, dos a dos. Hallar el perímetro de la figura sombreada.



Resolución:



Por ser ortogonales las circunferencias:

$\overline{OA} \perp \overline{PA}$; $\overline{OC} \perp \overline{QC}$, $\overline{QB} \perp \overline{PB}$; $\overline{OE} \perp \overline{PE}$,

OAPE es un cuadrado.

La suma de las medidas de los ángulos internos de APBQCO es $180°\ (6 - 2) = 720°$

Pero: $m\angle A + m\angle B + m\angle C = 3(90)° = 270°$

$\therefore m\angle AOC + m\angle CQB + m\angle APB = 720° - 270° = 450°$

y $m\angle AOC = m\angle CQB = m\angle APB = \dfrac{450}{3} = 150°$

$\Rightarrow m\angle EOC = m\angle AOC - m\angle AOE = 150° - 90°$

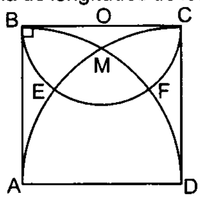
$\therefore\ m\angle EOC = 60° \Rightarrow m\angle EOF = 30°$

Luego: $L_{\overset{\frown}{EF}} = 2\pi r\left(\dfrac{\angle EOF}{360}\right) = 2\pi r\left(\dfrac{30}{360}\right) = \dfrac{\pi r}{6}$

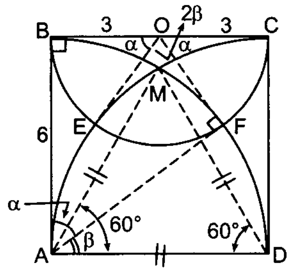
$\therefore$ Perímetro $= 3(L_{\overset{\frown}{EF}}) = \dfrac{\pi r}{2}$

10. La longitud del lado del cuadrado ABCD es 6 cm. A es centro del arco BD; D es centro del arco AC; $\overline{BC}$ es diámetro.

Hallar la suma de longitudes de los arcos: $L_{\overset{\frown}{EF}} + L_{\overset{\frown}{FM}}$



Resolución:



Si se trazan $\overline{AO}$, $\overline{OF}$ y $\overline{AF}$:

$\triangle ABO \cong \triangle AFO$ (LLL) $\Rightarrow m\angle AFO = m\angle ABO = 90°$

Entonces, si $m\angle BAF = \alpha$.

$m\angle FOC = \alpha$ y $m\angle EOB = \alpha$

Sea: $m\angle FAD = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90°$, en el vértice A.

$\Rightarrow m\angle EOF = 2\beta$

AMD, equilátero, ya que $AM = AD = DM$

$\Rightarrow m\angle MAF = 60° - \beta$

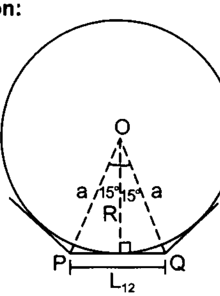
$L_{\overset{\frown}{EF}} = 2\pi(3)\left(\dfrac{2\pi}{360}\right) \Rightarrow L_{\overset{\frown}{EF}} = \dfrac{\pi\beta}{30}$

Luego: $L_{\overset{\frown}{FM}} = 2(6)\left(\dfrac{60 - \beta}{360}\right) \Rightarrow L_{\overset{\frown}{FM}} = \dfrac{\pi}{30}(60 - \beta)$

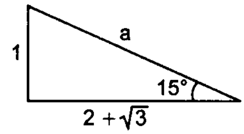
$L_{\overset{\frown}{EF}} + L_{\overset{\frown}{FM}} = 2\pi$ cm

11. Calcular la longitud del lado del dodecágono regular circunscrito a una circunferencia cuyo radio mide $(2 + \sqrt{3})$.

Resolución:



Dato: $R = 2 + \sqrt{3}$



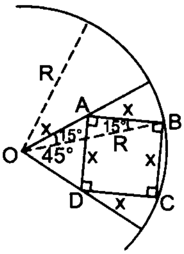
$\Rightarrow a^2 = 1 + (2\sqrt{3})^2 \Rightarrow a = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

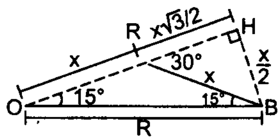
ΔPOQ: $L_{12} = a\sqrt{2-\sqrt{3}} = 2(\sqrt{2+\sqrt{3}})(\sqrt{2-\sqrt{3}})$

$L_{12} = 2\sqrt{4-3} \Rightarrow L_{12} = 2$

12. Hallar el lado el cuadrado inscrito en un sector circular de 60° de radio R y conociendo que dos de sus vértices están sobre el arco del sector.

Resolución:





$\triangle$OHB; por el teorema de Pitágoras:

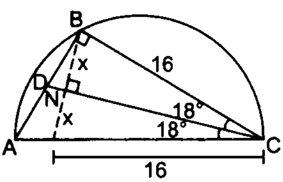
$$R^2 = \left[x + \frac{x\sqrt{3}}{2}\right]^2 + \left[\frac{x}{2}\right]^2 \Rightarrow R^2 = x^2\left[\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right]$$

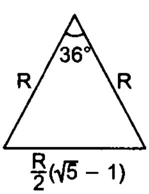
$$R^2 = \frac{x^2}{4}(7 + 4\sqrt{3} + 1) \Rightarrow R^2 = \frac{x^2}{4}(8 + 4\sqrt{3})$$

$$x^2 = \frac{R^2(2-\sqrt{3})}{4-3} \Rightarrow x = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

13. En un triángulo rectángulo ABC, se traza $\overline{BN}$ perpendicular a la bisectriz interna del $\angle C$, BC = 16, m$\angle$A = 54°. Hallar BN.

Resolución:





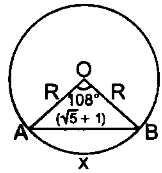
Recordar:
En el ΔEBC isósceles:

$2x = \frac{16}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$x = 4(\sqrt{5} - 1)$

14. Hallar la longitud de arco de circunferencia cuya medida es 108°, que subtiende una cuerda cuya longitud es $(\sqrt{5} + 1)$.

Resolución:



De la figura:

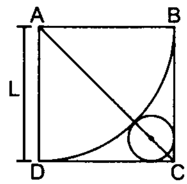
$\sqrt{5} + 1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$

$\Rightarrow$ **R** $= 2$

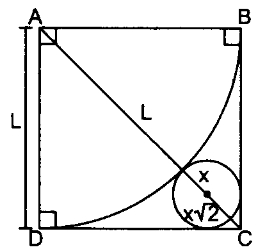
Luego: $x = 2\pi(2)\left[\frac{108}{360}\right]$

$\therefore x = \frac{6}{5}\pi$

15. Determinar la longitud de la circunferencia inscrita, si ABCD es un cuadrado de lado L.



Resolución:

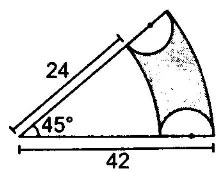


$AC = L\sqrt{2} = L + x + x\sqrt{2}$

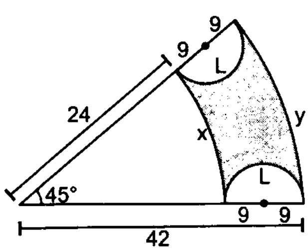
$$x(\sqrt{2} + 1) = L(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow x = \frac{1(\sqrt{2} - 1)^2}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)}$$

$\Rightarrow x = L(3 - 2\sqrt{2}) \quad \therefore L_x = 2\pi L(3 - 2\sqrt{2})$

16. Hallar el perímetro de la región sombreada.



Resolución:

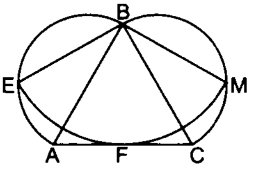


$2L = 18\pi$; $x = 6\pi$; $y = \frac{21\pi}{2}$

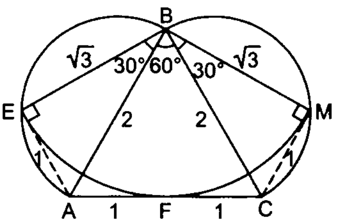
Luego, el perímetro de la región sombreada es:

$2p = 18\pi + 6\pi + \frac{21\pi}{2} \quad \therefore 2p = 69\pi/2$

17. ABC es triángulo equilátero, $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son diámetro y $\overset{\frown}{EFM}$ es arco de circunferencia con centro en B. Si AC = 2, hallar $L_{\overset{\frown}{EFM}}$.



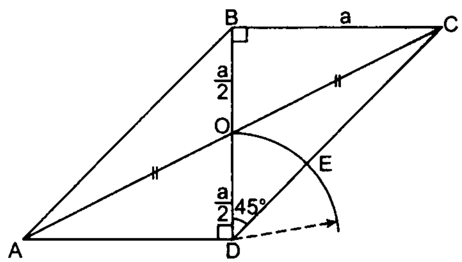
Resolución:



De la figura: $L_{\overset{\frown}{EFM}} = \dfrac{2\pi(\sqrt{3})}{3}$

18. ABCD es un paralelogramo con $\overline{BD} \perp \overline{AD}$ y O es punto medio de $\overline{AC}$. Con centro en D se traza el arco OE($E \in \overline{DC}$), si BC = BD = a, hallar la $L_{\overset{\frown}{EO}}$.

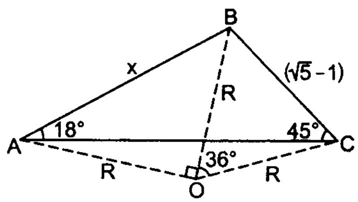
Resolución:



$L_{\overset{\frown}{EO}} = 2\pi\left(\dfrac{a}{2}\right)\left(\dfrac{45}{360}\right) \quad \therefore\ L_{\overset{\frown}{EO}} = \dfrac{\pi a}{8}$

19. En un triángulo ABC, se tiene que la m∠BAC = 18°, m∠ACB = 45°, si BC = ($\sqrt{5}$ − 1), hallar la longitud de AB.

Resolución:

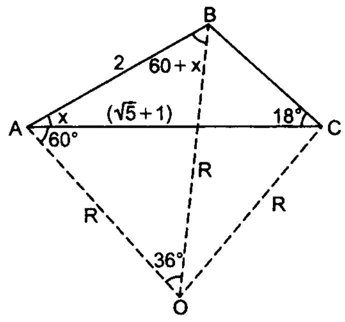


$\triangle$AOB: $x = R\sqrt{2}$

$\triangle$OBC: $(\sqrt{5} - 1) = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow \mathbf{R = 2} \quad \therefore x = 2\sqrt{2}$

20. En un triángulo ABC (obtuso en B), la m∠ACB = 18°, AB = **2**, AC = ($\sqrt{5}$ + 1), hallar la m∠BAC.

Resolución:



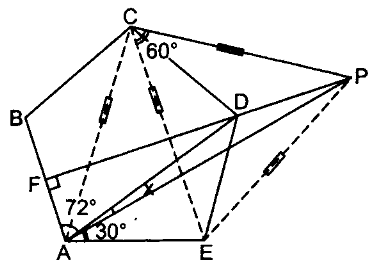
$\triangle$AOB: $2 = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow R = \sqrt{5} + 1$

$\triangle$AOC (equilátero) OA = OC = AC

$\triangle$AOB (isósceles) x + 60° = 72° $\quad \therefore$ x = 12°

21. En un pentágono regular ABCDE, se traza $\overline{DF}$ perpendicular a $\overline{AB}$ y se prolonga $\overline{FD}$ hasta P de manera que BE = CP. Calcular la m∠DAP.

Resolución:



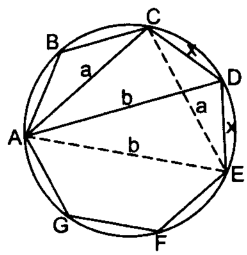
$\triangle$ECP es equilátero.

C: circuncentro del $\triangle$AEP $\Rightarrow$ m∠PAE = 30°.

Luego: x + 30° + 72° = 108° $\quad \therefore$ x = 6°

22. En un heptágono regular ABCDEFG, si $\dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD} = \dfrac{1}{10}$, hallar la longitud del lado del polígono.

Resolución:

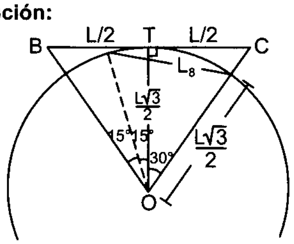


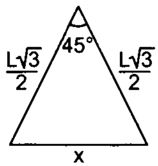
Por el teorema de Ptolomeo en el cuadrilátero inscrito ACDE: ab = ax + bx

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{10} \quad \therefore$ x = 10

23. ABCDEF es un hexágono regular de lado L circunscrito a una circunferencia de centro O. Calcular el perímetro del octágono regular inscrito en dicha circunferencia.

Resolución:





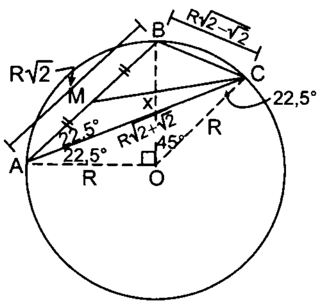
Sabemos que: $L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$

Reemplazando: $x = \frac{L\sqrt{3}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

El perímetro del octágono regular será: $2p = 4L\sqrt{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

24. El triángulo ABC está inscrito en una circunferencia de radio R. Si m∠A= 22,5° y m∠C = 45°, calcular la longitud de la mediana CM.

Resolución:



△ABC, por teorema de la mediana

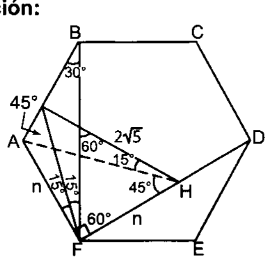
$$R^2(2-\sqrt{2}) + R^2(2+\sqrt{2}) = 2x^2 + \frac{(R\sqrt{2})^2}{2}$$

$$4R^2 = 2x^2 + R^2 \Rightarrow 2x^2 = 3R^2$$

$$\Rightarrow x = R\sqrt{\frac{3}{2}} \qquad \therefore x = \frac{R\sqrt{6}}{2}$$

25. En un hexágono regular ABCDEF, se traza la bisectriz interior $\overline{FG}$ del triángulo ABF y en el segmento $\overline{FD}$ se ubica el punto H de manera que AF = FH ($\overline{HG}$ interseca a $\overline{BF}$ en el punto I), si HI = $2\sqrt{5}$, hallar la apotema del hexágono.

Resolución:



⌂AGHF (inscriptible): m∠GHA = m∠AFG = 15°

△FIH (equilátero): $n = 2\sqrt{5}$

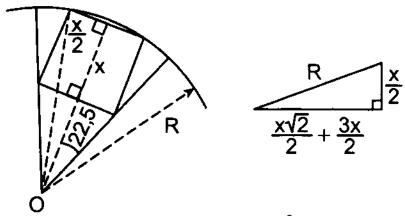
Apotema del hexágono regular:

$$a_p = \frac{n}{2}\sqrt{3}$$

$$a_p = \frac{2\sqrt{5}}{2}\sqrt{3} \qquad \therefore a_p = \sqrt{15}$$

26. Calcular la longitud del lado del cuadrado inscrito en un sector circular de 45° y de $\sqrt{2+\sqrt{2}}$ m de radio de manera que dos vértices de cuadrado estén en el arco del sector.

Resolución:

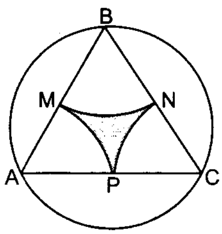


$$\text{Por Pitágoras: } R^2 = \left[\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{3x}{2}\right]^2 + \left[\frac{x}{2}\right]^2$$

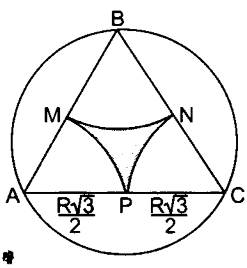
$$R^2 = \frac{6x^2}{4}(2+\sqrt{2}) \Rightarrow (2+\sqrt{2}) = \frac{6x^2}{4}(2+\sqrt{2})$$

$$\therefore x^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

27. En la figura, M, N y P son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia de radio R. Hallar el perímetro de la región sombreada MNP.



Resolución:



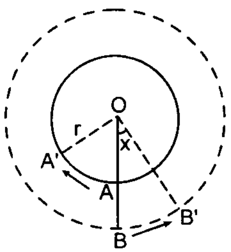
De la figura: $L_{\widehat{MP}} = L_{\widehat{NP}} = L_{\widehat{MN}} = L$

Se pide hallar x = 3L

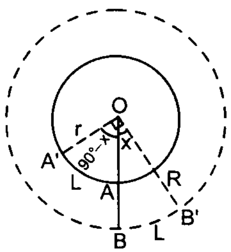
$$\text{Pero: } L = 2\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{60}{360}\right) \Rightarrow L = \frac{1}{6}\pi R\sqrt{3}$$

$$3L = \frac{1}{2}\pi R\sqrt{3}$$

28. En la figura, se tienen dos circunferencias concéntricas de centro O, radio r y R ($r < R$). A y B recorren una igual longitud en el sentido indicado hasta alcanzar las nuevas posiciones A', B' respectivamente. Si $m\angle A'OB' = 90$, calcular x.



Resolución:



De la figura:

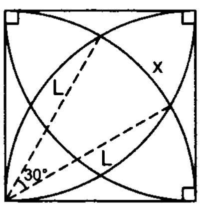
$$L = 2\pi r\left(\frac{90 - x}{360}\right) = 2\pi R\left(\frac{x}{360}\right)$$

$$r(90° - x) = Rx \Rightarrow 90°\,r - rx = Rx$$

$$x(R + r) = 90°r$$

$$\therefore\ x = \left(\frac{r}{R + r}\right)90°$$

29. En un cuadrado cuyo lado mide L, se trazan arcos interiores, haciendo centro en cada vértice y con radio L, que al intersecarse determinan un cuadrilátero curvilíneo. Hallar su perímetro.



Resolución:

De la figura: $x = 2\pi L\left(\dfrac{30}{360}\right)$

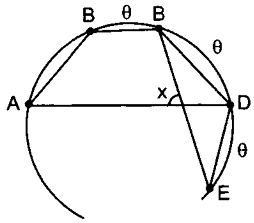
$$x = \frac{1}{6}\pi L$$

$$\therefore\ 4x = \frac{2\pi L}{3}$$

30. En un polígono regular ABCDE... ¿Qué ángulo forma $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$, siendo n el número de lados del polígono?

Resolución:

Por ser polígono regular está inscrito



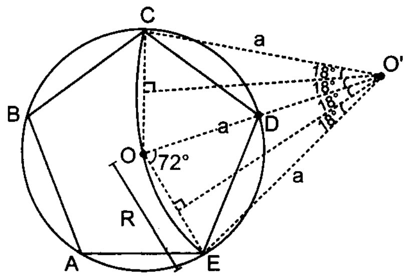
$$\theta = \frac{360°}{n}$$

Interior: $x = \dfrac{\theta + 2\theta}{2} = \dfrac{3\theta}{2}$

Reemplazando: $\therefore\ x = \dfrac{540°}{n}$

31. Dado el pentágono regular ABCDE inscrito en una circunferencia de centro O y un circunradio que mide R. Se traza un arco de circunferencia que une los puntos C y E, pasando por el centro O. Halle la longitud de dicho arco.

Resolución:



$\triangle OO'E$ isósceles, donde $m\angle OO'E = 36°$

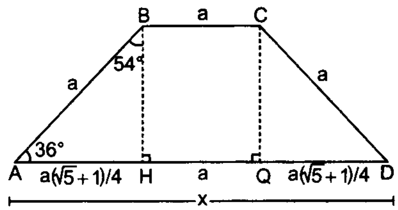
$$R = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow a = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Luego: $L_{\widehat{COE}} = 2\pi a\left[\dfrac{72}{360}\right]$

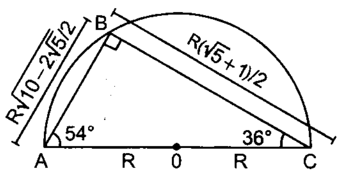
$$\Rightarrow L_{\widehat{COE}} = 2\pi\left(\frac{R}{2}\right)(\sqrt{5} + 1)\left(\frac{1}{5}\right)\ \therefore\ L_{\widehat{COE}} = \frac{\pi R}{5}(\sqrt{5} + 1)$$

32. Hallar la longitud de la base mayor de un trapecio, si los otros tres lados miden $(3 - \sqrt{5})$ y que uno de sus ángulos mide 36°.

Resolución:



Para resolver este problema, es necesario recordar el triángulo rectángulo:



Luego: $AH = QD = \frac{a}{4}(\sqrt{5}+1)$

Sumando: $x = \frac{a(\sqrt{5}+1)}{4} + a + \frac{a(\sqrt{5}+1)}{4}$

$x = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}+1\right) \Rightarrow x = \frac{a}{2}(\sqrt{5}+3)$

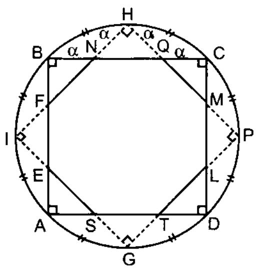
Pero $a = 3 - \sqrt{5}$

Reemplazando: $x = (3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})/2$

$\Rightarrow x = \frac{9-5}{2} \quad \therefore x = 2$

33. Un cuadrado se encuentra inscrito en una circunferencia cuyo diámetro mide $4\sqrt{2}$. Calcular la longitud del lado del octógono inscrito en el cuadrado.

Resolución:



Los cuadrados ABCD y GIHP son congruentes.

Por dato: $AC = BD = 4\sqrt{2}$, entonces $AB = BC = 4$

En BC: $a + a\sqrt{2} + a = 4$

$a = \frac{4}{\sqrt{2}+2} \quad ...(1)$

El octógono EFNQMLTS es regular, en el cual:

$NQ = a\sqrt{2} \quad ...(2)$

Reemplazando (1) en (2):

$NQ = \sqrt{2}\left(\frac{4}{\sqrt{2}+2}\right) \quad \therefore NQ = 4(\sqrt{2}-1)$

34. Indique cuál o cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas:

I. Las áreas de dos polígonos regulares del mismo número de lados son proporcionales a sus perímetros.

II. Dos polígonos regulares del mismo número de lados, uno circunscrito y el otro inscrito a una misma circunferencia son semejantes.

III. Si unimos consecutivamente los puntos medios de los lados de un polígono regular obtenemos un polígono regular semejante al polígono dado.

Resolución:

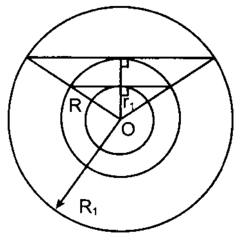
I. **Falsa.** Por propiedad, si dos polígonos regulares tienen igual número de lados estos son semejantes, entonces las áreas de las regiones poligonales son proporcionales a los cuadrados de las longitudes de sus elementos homólogos.

II. **Verdadera.** Siendo dos polígonos regulares del mismo número de lados inscrito y circunscrito a una misma circunferencia sus líneas homólogas son de diferente longitud, entonces dichos polígonos son semejantes.

III. **Verdadera.** Si se unen los puntos medios de los lados de un polígono regular en forma consecutiva se forma otro polígono regular de igual número de lados que el polígono original, pero de diferente tamaño, entonces dichos polígonos son semejantes.

35. Se tiene dos polígonos regulares de n lados uno inscrito y otro circunscrito a una misma circunferencia. Si la longitud de la circunferencia inscrita al polígono menor mide 18 y la longitud de la circunferencia circunscrita al polígono mayor mide 32. Calcule la longitud de la circunferencia circunscrita al polígono menor.

Resolución:



$2\pi r_1 = 18 \quad ...(1)$

$2\pi R_1 = 32 \quad ...(2)$

Por triángulos semejantes: $\frac{r_1}{R} = \frac{R}{R_1}$

$\Rightarrow R^2 = R_1 r_1 \quad ...(3)$

$(1) \times (2)$: $4\pi^2 r_1 R_1 = 18(32)$

Pero $r_1 R_1 = R^2 \Rightarrow 4\pi^2 R^2 = 18(32)$

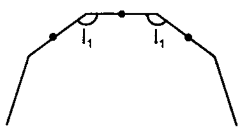
$\therefore 2\pi R = \sqrt{18(32)} = 24$

36. En un polígono regular de n lados, si el ángulo interno disminuye en 15° resultará otro polígono regular cuyo número de lados es 3/4 n. El valor de n es:

Resolución:

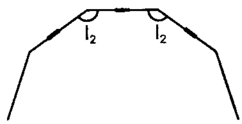
En el polígono 1 de n lados

$i_1 = \frac{180°}{n}(n-2)$



En el polígono 2 de 3/4 n lados

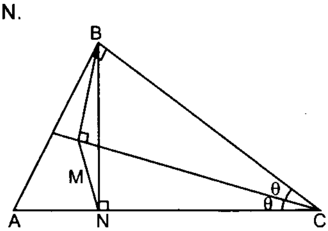
$$i_2 = \frac{180°}{\left(\frac{3}{4}n\right)}\left(\frac{3}{4}n - 2\right)$$



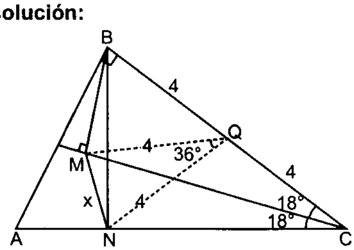
Dato: $i_2 = i_1 - 15°$

$$\Rightarrow \frac{180°}{\frac{3}{4}n}\left(\frac{3}{4}n - 2\right) = \frac{180°(n-2)}{n} - 15° \qquad \therefore\ n = 8$$

37. En la figura mostrada, m∠ABM = 18°, BC = 8. Hallar MN.



Resolución:

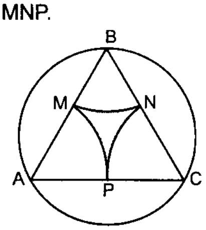


El triángulo MQN es isósceles MQ = NQ = 4, además la m∠MQN = 36°.

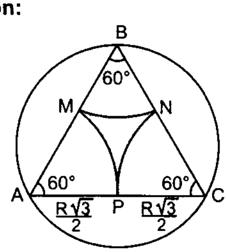
Esto quiere decir que $\overline{MN}$ es el lado de un decágono regular de radio R = 4

Luego: $x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \qquad \therefore\ x = 2(\sqrt{5} - 1)$

38. En la figura M, N, P son puntos medios de los lados del triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia de radio R. Halle el perímetro de la región sombreada MNP.



Resolución:



De la figura: $L_{\widehat{MP}} = L_{\widehat{NP}} = L_{\widehat{MN}} = L$

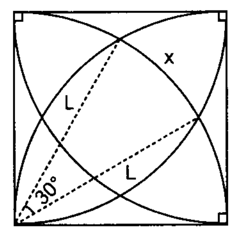
Se pide hallar L + L + L = 3 L

Pero: $L = 2p\left[\frac{R\sqrt{3}}{2}\right]\left[\frac{60}{360}\right] \Rightarrow L = \frac{1}{6}\pi R\sqrt{3}$

$\therefore\ 3L = \frac{1}{2}\pi R\sqrt{3}$

39. En un cuadrado cuyo lado mide L, se trazan arcos interiores, haciendo centro en cada vértice y con radio L, que al intersecarse determinan un cuadrilátero curvilíneo. Halle su perímetro.

Resolución:

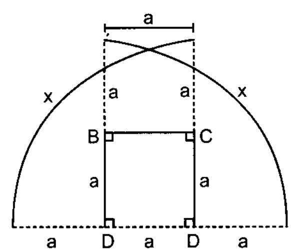


De la figura: $x = 2\pi L\left[\frac{30}{360}\right]$

Nos piden: $x = \frac{1}{6}\pi L \qquad \therefore\ 4x = \frac{2\pi L}{3}$

40. En un cuadrado ABCD, cuyo lado mide a y con centro en cada uno de sus vértices se traza un cuadrante cuyo radio mide 2a, los cuales se enlazan con segmentos, entonces la relación entre la longitud de la figura trazada y el perímetro del cuadrado es:

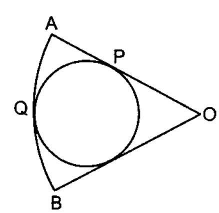
Resolución:



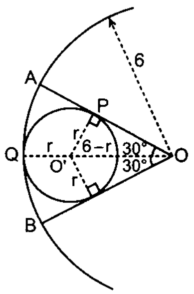
De la figura: $x = 2\pi(2a)\left[\frac{1}{4}\right] \Rightarrow 4x = 4\pi a$

Se pide: $\frac{4\pi a + 4a}{4a} \quad \therefore\ \pi + 1$

41. En la figura la circunferencia está inscrita en el sector circular AOB. Si la m∠AOB = 60° y los puntos P, Q, R son puntos de tangencia y AO = BO = 6 cm, halle la longitud del $\widehat{PQR}$ (en cm).



Resolución:



⊾OPO' notable de 30° y 60°:

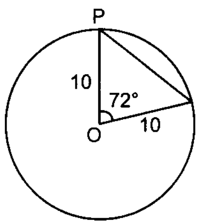
$6 - r = 2r \Rightarrow 3r = 6 \Rightarrow r = 2$

Luego: $L_{\widehat{PQR}} = 2\pi r\left[\dfrac{240°}{360°}\right]$

$L_{\widehat{PQR}} = \dfrac{4\pi r}{3} \Rightarrow \dfrac{4\pi(2)}{3} \quad \therefore\ L_{\widehat{PQR}} = \dfrac{8\pi}{3}$ cm

42. En una circunferencia cuyo radio mide 10 cm se traza una cuerda PQ, siendo $m\widehat{PQ} = 72$. Halle la longitud del arco PQ.

Resolución:

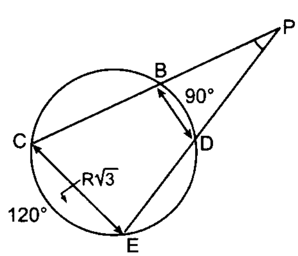


Si $m\widehat{PQ} = 72° \Rightarrow m\angle POQ = 72°$

Luego: $L_{\widehat{PQ}} = 2\pi(10)\left[\dfrac{72°}{360°}\right] \quad \therefore\ L_{\widehat{PQ}} = 4\pi$ cm

43. Desde un punto P externo a una circunferencia se trazan dos secantes PBC y PDE a una circunferencia cuyo radio mide R. Si $BD = R\sqrt{2}$ y $CE = R\sqrt{3}$. Calcule la $m\angle P$.

Resolución:



$CE = L_3 .\ m\widehat{CE} = 120°$

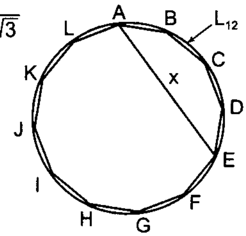
$BD = L_4 .\ m\widehat{BD} = 90°$

Luego: x (externo)

$x = \dfrac{120° - 90°}{2} \quad \therefore\ x = 15°$

44. El lado de un dodecágono regular ABCDE... KL mide $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$. Calcule AE

Resolución:



$L_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}} = 2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

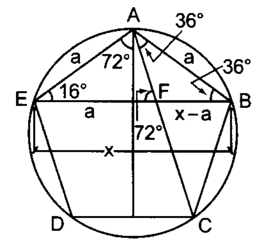
$R = 2$

Pero $AE = L_3 = R\sqrt{3}$

$\therefore\ AE = 2\sqrt{3}$

45. En un pentágono regular ABCDE, $\overline{AC} \cap \overline{BE} = (F)$, si FE = a. Calcule BE.

Resolución:



$\triangle AFB - \triangle EAB$

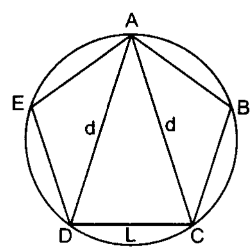
$a^2 = x(x - a)$

$x^2 - ax - a^2 = 0$

$\therefore\ x = \dfrac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$

46. El lado de un pentágono regular mide L. Calcule su diagonal.

Resolución:



$\triangle DAC$ es un elemento del decágono R.

$L_{10} = \dfrac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$

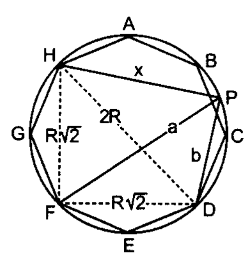
Reemplazando:

$L = \dfrac{d}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$\therefore\ d = \dfrac{L}{2}(\sqrt{5} + 1)$

47. En un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia. $P \in \widehat{BC}$. PF = a, PD = B. Calcule PH.

Resolución:



PDFH (Ptolomeo)

$2Ra = bR\sqrt{2} + xR\sqrt{2}$

$\therefore\ x = a\sqrt{2} - b$

48. En un triángulo ABC, $AC = (\sqrt{5} + 1)$ la $m\angle B > 90°$. AB = 2, la $m\angle C = 18°$. Cuánto mide la $m\angle A$.

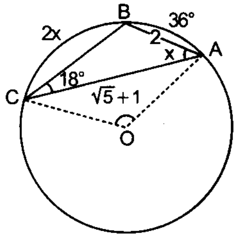
Resolución:

$AB = L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = 2$

El $\triangle AOC$ es equilátero

$2x + 36 = 60°$

$\therefore\ x = 12°$



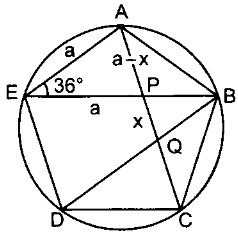
49. Dado el pentágono regular ABCDE. AE = a; $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$ intersecan a $\overline{CA}$ en los puntos P y Q. Halle PQ.

Resolución:

$\triangle AEP$:

$L_{10} = a - x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1)$

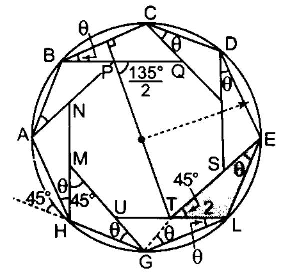
$\therefore\ x = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{5})$



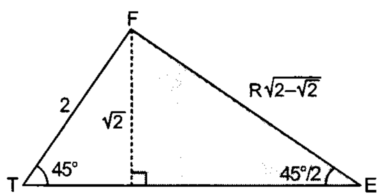
50. Se trazan dos polígonos regulares ABCDEFGH y MNPQRSTU, este último en la región interior del primero, tal que M, N, P, Q, R, S, T y U en $\overline{HN}$, $\overline{AP}$, $\overline{BQ}$, $\overline{CR}$, $\overline{DS}$, $\overline{ET}$, $\overline{FU}$ y $\overline{GM}$, respectivamente. Calcular el circunradio del primer polígono, si FT = 2 m y $\overline{TP} \perp \overline{BC}$.

Resolución:

Piden: R



$\theta = \frac{45°}{2}$



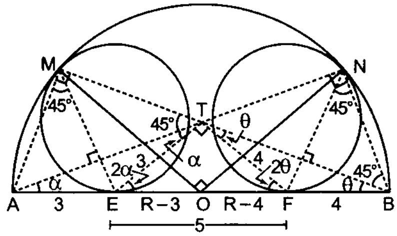
$\Rightarrow$ E, T y G son colineales

$EF = L_8 = R \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{L_8}{2} = \frac{R\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$

$\therefore\ R = 2(\sqrt{2} + 1)$

51. En una semicircunferencia $\mathscr{C}$ de diámetro AB están inscritos las circunferencias $\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ tal que $\mathscr{C}_1$ es tangente a $\mathscr{C}$ en M y al diámetro en E; $\mathscr{C}_2$ es tangente a $\mathscr{C}$ en N y al diámetro en F ($\mathscr{C}_1$ y $\mathscr{C}_2$ son circunferencias exteriores). Halle la longitud de la semicircunferencia $\mathscr{C}$, si AE = 3; FB = 4 y $m\overset{\frown}{MN} = 90$.

Resolución:



$\triangle$ETF notable aproximado:

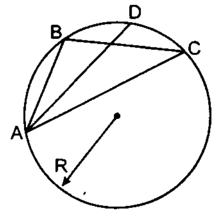
$EF = 5 = R - 3 + R - 4$

$2R = 12 \Rightarrow R = 6$

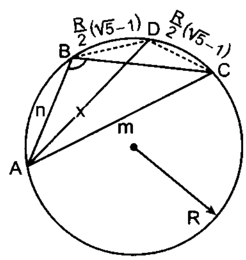
Longitud de la semicircunferencia

Es: $L = 2\pi(6)/2 \quad \therefore\ L = 6\pi$

52. En la figura $AB = BC = L_5$, $\overset{\frown}{BD} \cong \overset{\frown}{DC}$, si $\left(\frac{AC}{AB}\right)R = 4$, halle AD.



Resolución:



$\triangle ABC$: $m = \frac{n}{2}(\sqrt{5} + 1) \quad ...(1)$

Por dato: $mR = 4n \quad ...(2)$

De (1) y (2): $R = 2(\sqrt{5} - 1)$

Por Ptolomeo en el cuadrilátero inscrito ABDC:

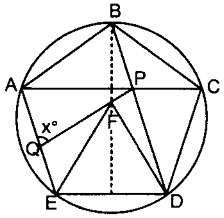
$x(n) = (n)\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) + m\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$

$x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\left[\frac{m+n}{n}\right] \Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\left[\frac{R+4}{R}\right]$

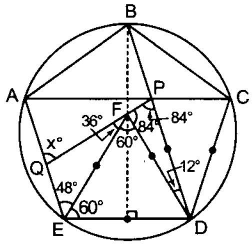
$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(2\sqrt{5} - 2 + 4)$

$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)(2)(\sqrt{5} + 1) \ \therefore\ x = 4$

53. En la siguiente figura el pentágono ABCDE es regular, el radio de la circunferencia es R. El triángulo DEF es equilátero. Halle x.



Resolución:

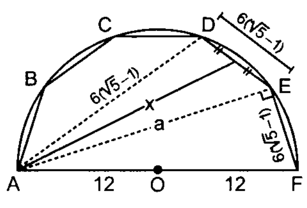


$\triangle$FPD isósceles: m$\angle$DFP = m$\angle$FPD = 84°
Como: m$\angle$EFD = 60° $\Rightarrow$ m$\angle$QFE = 36°
m$\angle$FED = 60° $\Rightarrow$ m$\angle$QEF = 48°

$\triangle$EQF: x = 48° + 36° $\quad\therefore$ x = 84°

54. En un decágono regular ABCD... IJ, el radio de la circunferencia circunscrita mide 12. Entonces la distancia del vértice A al punto medio del lado DE es:

Resolución:



$\triangle$AEF: $a^2 = 24^2 - 36(\sqrt{5}-1)^2$ ...(1)

$\triangle$ADE; por teorema de la mediana:

$$a^2 + 36(\sqrt{5}+1)^2 = 2x^2 + \frac{36(\sqrt{5}-1)^2}{2} \quad ...(2)$$

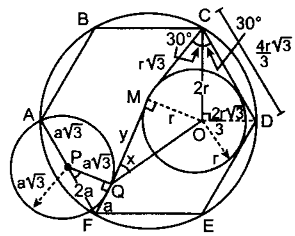
Reemplazando (1) en (2):

$$24^2 - 36(\sqrt{5}-1)^2 + 36(\sqrt{5}+1)^2 = 2x^2 + 18(\sqrt{5}-1)^2$$

$\therefore$ Efectuando: $x = 3\sqrt{26+10\sqrt{5}}$

55. Se tiene una circunferencia de centro O tangente a $\overline{CD}$, $\overline{DE}$ y $\overline{CF}$, en un hexágono regular ABCDEF; se ubica el punto P en $\overline{AF}$ y con centro en P y radio $\overline{PA}$, se traza una circunferencia tangente a $\overline{CF}$ en Q. Calcular: m$\angle$OQC.

Resolución:



Incógnita: m$\angle$OQC = x

$\triangle$QMO: $\text{ctg}x = \dfrac{y}{r}$ ...(1)

ABCDEF: Hexágono regular

$$\Rightarrow 2a + a\sqrt{3} = \frac{4r}{3}\sqrt{3} \Rightarrow a = \frac{4r\sqrt{3}}{3(2+\sqrt{3})}$$

Luego:

$$a + y + r\sqrt{3} = \frac{8r\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5r\sqrt{3}}{3} - \frac{4r\sqrt{3}}{3(2+\sqrt{3})} \quad ...(2)$$

(2) en (1):

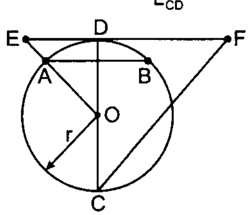
$\therefore$ $x = \text{arc ctg}(4-\sqrt{3})$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

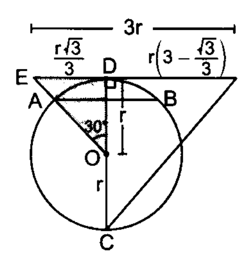
PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

En la figura, $\overline{AB}$ es el lado de un hexágono regular inscrito en la circunferencia de centro O. El diámetro $\overline{CD}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y D es punto de tangencia. Si EF = 3r. Determine el valor de $\dfrac{CF}{L_{\widehat{CD}}}$ (π = 3, 14).

A) 1/4
B) 1/2
C) 1
D) 3/2
E) 2



Resolución:



$\triangle$CDF: Pitágoras

$$(CF)^2 = (2r)^2 + \left(r\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)^2 \Rightarrow CF = r\sqrt{4+\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}$$

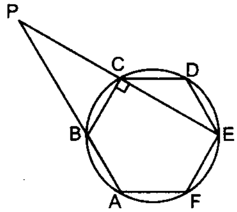
Nos piden: $\dfrac{CF}{L_{\widehat{CD}}} = \dfrac{r\sqrt{4+\left(3-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}{\pi r}$ $\therefore$ $\dfrac{CF}{L_{\widehat{CD}}} \approx 1$

Clave: C

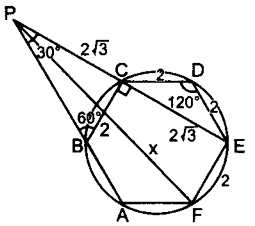
PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

En la figura ABCDE... es un polígono regular cuyo lado mide 2 cm. Calcule PF (en cm).

A) $4\sqrt{3}$
B) $2\sqrt{13}$
C) $3\sqrt{6}$
D) $6\sqrt{2}$
E) $4\sqrt{6}$



Resolución:



El polígono ABCDEF es un hexágono regular

$CE = L_3 = 2\sqrt{3}$

$PC = 2\sqrt{3}$

⊾PEF: $X^2 = (4\sqrt{3})^2 + (2)^2$

$\therefore\ X = 2\sqrt{13}$ cm

Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

Los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de una circunferencia son perpendiculares. Si $E \in \widehat{BD}$, AE interseca a $\overline{CD}$ en el punto F y FD = 1 cm, entonces la longitud de la circunferencia circunscrita al triángulo FED (en cm) es:

A) $\pi\sqrt{2}$ B) $2\pi\sqrt{2}$ C) $2\pi\sqrt{3}$
D) $3\pi\sqrt{2}$ E) $3\pi\sqrt{3}$

Resolución:

- $m\widehat{AED} = \dfrac{90^\circ}{2} = 45^\circ$
- $\odot_{O'}$

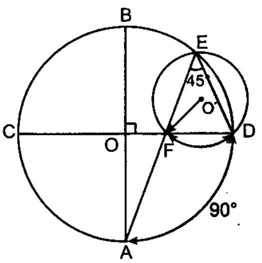
$m\widehat{FD} = 90^\circ$

$\Rightarrow FD = L_4 = 1$

$r\sqrt{2} = 1 \Rightarrow r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$L = 2\pi r = 2\pi\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ L = \pi\sqrt{2}$ cm

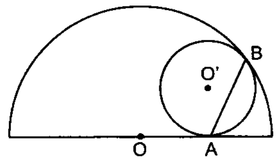


Clave: A

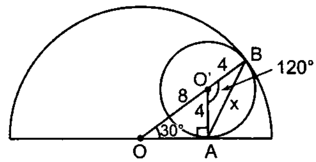
PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

En la figura mostrada, O es el centro de la semicircunferencia de radio 12 cm y O' es el centro de la circunferencia de radio 4 cm. Si la circunferencia es tangente en A y B a la semicircunferencia, calcule AB en cm.

A) $2\sqrt{6}$
B) $3\sqrt{3}$
C) $4\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{3}$
E) $6\sqrt{2}$



Resolución:



⊾OAO' Notable (30° – 60°)

$m\angle BO'A = 120^\circ$

$x = L_3 = R\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

$\therefore\ AB = 4\sqrt{3}$ cm

Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Calcule el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG, si: $\dfrac{1}{AE} + \dfrac{1}{AC} = \dfrac{1}{5}$

A) 34 B) 35 C) 36
D) 37 E) 38

Resolución:

Piden: $2p_{\text{heptágono}}$

Dato: $\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{5}$

T. Ptolomeo

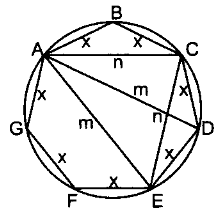
□ACDE: inscriptible

$mn = nx + mx$

$\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}$

$\Rightarrow\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow x = 5$

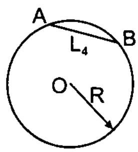
$\therefore\ 2p_{\text{heptágono}} = 35$



Clave: B

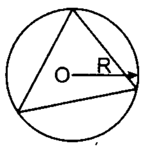
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Del gráfico, $L_4 = 4$, calcular el radio de la circunferencia.



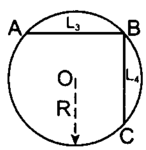
A) $2\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $\sqrt{2}$
D) $4\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

2. Si $R = \sqrt{3}$, calcular el perímetro del triángulo equilátero inscrito en la circunferencia.



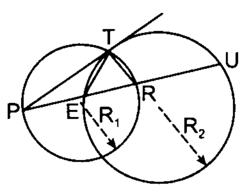
A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

3. Hallar $m\angle ABC$.



A) 50° B) 55° C) 60°
D) 70° E) 75°

4. Calcular R_2, si $EU = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$; $TE = 1$; $TR = \sqrt{5}$ y $R_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ (T es punto de tangencia).

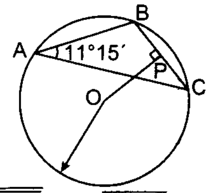


A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{2}$ E) 3

5. En un dodecágono regular ABCDEFGHIJKL, $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ se intersecan en P. Calcular PE, si $BC = 2\sqrt{2}$

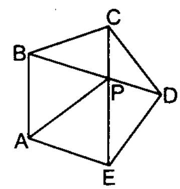
A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{3}{2}$
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{5}$

6. En la figura, $OP = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$, calcular BC.



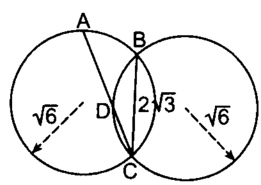
A) $\sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}$ B) $4\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ C) $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$
D) $2\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ E) $2\sqrt{2}$

7. Calcular la longitud del lado del pentágono regular ABCDE. Si $(AP)^2 - (PC)^2 = 5$.



A) 5 B) $\sqrt{5}$ C) $\sqrt[4]{5}$
D) $6\sqrt{10}$ E) $\sqrt{10}$

8. En el gráfico, $m\overset{\frown}{AB} = 2m\overset{\frown}{CD}$, calcular $\frac{CD}{AD}$.

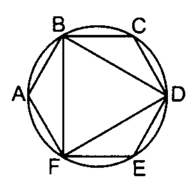


A) $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{7} - 1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5} - 1}{3}$ E) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{2}}{3}$

9. La sección áurea del segmento AB es $\overline{BC}$, la sección de $\overline{AC}$ es $\overline{AM}$, la sección áurea de $\overline{AM}$ es $\overline{AF}$. Si BC = 4, calcular AF.

A) $2(\sqrt{5} - 1)$ B) $2(\sqrt{5} + 1)$ C) $4(\sqrt{5} - 2)$
D) $\sqrt{5} - 1$ E) $3(\sqrt{5} - 1)$

10. En la figura, ABCDEF es hexágono regular. Si FBD es triángulo equilátero, calcular la relación entre el perímetro del hexágono regular y el triángulo equilátero:



A) $\frac{2}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{3}{\sqrt{3}}$

11. En una circunferencia, desde un punto de ella se trazan dos cuerdas de medidas R y $R\sqrt{2}$. Si R es radio, calcular la medida del ángulo que forman las 2 cuerdas.

A) 90° B) 100° C) 105°
D) 110° E) 120°

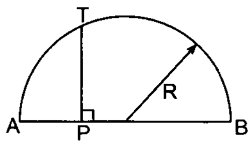
12. Si el lado de un pentágono regular mide $\sqrt{5}-1$, hallar la suma de las longitudes de todas sus diagonales.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

13. Calcular la longitud de una de las diagonales de un pentágono regular cuyo lado mide 2.

A) $\sqrt{5}+1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $3\sqrt{5}-2$
D) $2\sqrt{5}$ E) $10\sqrt{5}$

14. En la figura, P divide al diámetro $\overline{AB}$ en media y extrema razón. Calcular PT, si $R=\sqrt{2+\sqrt{5}}$.



A) 0,5 B) 1 C) 1,5
D) 2 E) $\sqrt{5}$

15. En un polígono regular ABCDEFG calcular AB, si:
$\frac{1}{AD}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{7}$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

16. En un eneágono regular ABCDEFGHI se cumple que AB + BD = 14. Calcular BG.

A) 3 B) 7 C) 11
D) 14 E) 21

17. En un triángulo BAC isósceles (BA = AC), se inscribe el cuadrado PQRS (el lado $\overline{RS}$ está sobre el lado $\overline{CA}$). Los segmentos BS y BR intersecan al segmento PQ en los puntos M y N. Si m∠BAC = 30° y $MN=\sqrt{2+\sqrt{3}}$, calcular la longitud de BC.

A) 12 B) 9 C) $4\sqrt{2+\sqrt{3}}$
D) 6 E) $3\sqrt{2+\sqrt{3}}$

18. En un romboide ABCD, se cumple que BC = AC, hallar BD, si m∠CAD = 30° y $AD=\sqrt{5+2\sqrt{3}}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{13}$ E) $2\sqrt{6}$

19. En una circunferencia, se traza la cuerda $\overline{CD}$ y el diámetro $\overline{AB}$ las cuales se intersecan en T, tal que $m\overset{\frown}{CAD}=144°$. Calcular el radio de dicha circunferencia si las distancias de A y B a $\overline{CD}$ son 1 y $\sqrt{5}$, respectivamente.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 0,5 E) 1, 5

20. Se tiene el cuadrante AOB de centro O, en $\overline{OB}$ se ubica el punto P, tal que $\overline{PB}$ es la sección áurea de $\overline{OB}$, luego con centro en B y radio $\overline{PB}$ se traza un arco que interseca al arco AB en T. Calcular la m∠PTB.

A) 26° B) 72° C) 45°
D) 36° E) 54°

21. En un dodecágono regular ABCDEFGHIJL, $\overline{AG}\cap\overline{DI}=(P)$. Calcular AP, si $AB=\sqrt{6}$.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

22. Dado un pentágono ABCDE inscrito en una circunferencia de radio R cuyos lados AE = CD = BC = L_6 (L_6 es la longitud del lado de un hexágono regular inscrito en dicha circunferencia) y AB = DE, ¿cuánto dista C del punto medio de $\overline{AB}$?

A) $\frac{R}{3}\sqrt{9+5\sqrt{3}}$ B) $\frac{R}{5}\sqrt{8+3\sqrt{5}}$ C) $\frac{R}{2}\sqrt{7+4\sqrt{3}}$
D) $\frac{R}{4}\sqrt{8+5\sqrt{3}}$ E) $\frac{R}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$

23. En un triángulo ABC (AB = BC) la mediatriz de $\overline{AB}$ interseca a la prolongación de $\overline{AC}$ en P. Si m∠BCA = 75° y $AP=12\sqrt{2+\sqrt{3}}$, calcular la longitud del lado del cuadrado inscrito en dicho triángulo, tal que uno de sus lados está contenido en $\overline{BC}$.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 6 E) 4

24. Se tienen dos polígonos regulares de igual número de lados, uno inscrito y otro circunscrito a una misma circunferencia. Si la longitud de la circunferencia inscrita al polígono menor mide 9 cm y la longitud de la circunferencia circunscrita al polígono mayor mide 16 cm, calcular la longitud de la circunferencia circunscrita al polígono menor.

A) 3 cm B) 12 cm C) 18 cm
D) 4 cm E) 24 cm

25. En un heptágono regular ABCDEFG, se cumple que $(FC)^2+4(EG)^2=(2+BE)^2$. Calcular la longitud del lado.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Se tiene un cuadrado y un triángulo equilátero inscritos en una misma circunferencia, los cuales tienen un vértice en común, calcular la medida del ángulo determinado por el lado del triángulo opuesto a dicho vértice con cualquiera de los lados del cuadrado.

A) 30° B) 40° C) 60°
D) 45° E) 75°

27. Se tiene una circunferencia de radio 4 cm, en la cual se tiene 6 circunferencias interiores congruentes, cada una de ellas tangente a la circunferencia inicial y tangente a otras dos. Calcular el radio de la circunferencia inscrita en el polígono obtenido al unir los puntos de tangencia entre las seis circunferencias congruentes.

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) 4 cm E)1,5 cm

28. En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), m∠BAD = 36° y la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales es 1. Calcular AB.

A) $\sqrt{5}+1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
D) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ E) 2

29. En un rectángulo ABCD, con centros en C y en D y radio $\overline{CB}$ se trazan circunferencias secantes en P (P en la región interior del rectángulo). Calcular la medida del ángulo entre las circunferencias.

A) 18° B) 36° C) 54°
D) 45° E) 72°

30. En un cuadrilátero inscrito ABCD; m∠BAC = 60°, m∠BCA = 15° y el circunradio del cuadrilátero es R, calcular AC.

A) $R(\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}})$ B) $R(\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{3}})$
C) $R\sqrt{2+\sqrt{3}}$ D) $R(\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}})$
E) $R(\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}})$

31. La sección áurea del segmento AB es $\overline{BC}$, la sección áurea de $\overline{AC}$ es $\overline{AM}$, la sección áurea de $\overline{AM}$ es $\overline{AF}$. Si BC = 4, calcular AF.

A) $2(\sqrt{5}-1)$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $2(\sqrt{5}+1)$
D) $3(\sqrt{5}-1)$ E) $4(\sqrt{5}-2)$

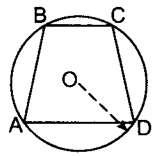
32. En un octógono regular ABCDEFGH, $AB=\frac{\sqrt{2}}{2}$, ¿cuánto dista A de $\overline{FC}$?

A) $\frac{(\sqrt{2}+1)}{2}$ B) $\frac{(\sqrt{2}-1)}{2}$ C) $\frac{(2\sqrt{2}+1)}{2}$
D) $2\sqrt{2}+1$ E) $2\sqrt{2}-1$

33. Se tiene un segmento OO' en el cual se ubica un punto A, luego se construyen los octógonos regulares ABCDEFGH y A'B'C'E'F'G'H' de centro O y O', respectivamente (B y B' en un mismo semiplano respecto de $\overline{OO'}$). Si $\overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{DD'}$ = (P), calcular BAP.

A) $\frac{37}{2}$ B) $\frac{135}{2}$ C) 45°
D) 15° E) $\frac{45}{2}$

34. Calcular la longitud de la altura del trapecio ABCD, si $BC = R\sqrt{2}$; $AD = R\sqrt{3}$ y $R = \sqrt{2}-1$



A) 0,5 B) 0,75 C) 1
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

35. En un icoságono ABCDE..., las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{ED}$ se intersecan en P. Calcular m∠BPD.

A) 100° B) 110° C) 116°
D) 120° E) 126°

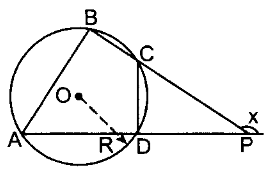
36. Se tiene un octógono equiángulo ABCDE..., AB = 2, $BC=\sqrt{2}$ y CD = 3. Calcular AD.

A) 4 B) 5 C) 6 D) 5 E) 12

37. Calcular el máximo número de ángulos exteriores obtusos de un polígono convexo de n lados.

A) n/2 B) n – 3 C) 3
D) n/3 E) n – 2

38. Si $AB = 2\sqrt{3}$ y $CD = R\sqrt{2}$, calcular el valor de x.



A) 100 B) 115 C) 135
D) 155 E) 165

39. En una misma circunferencia, cuál es el cociente del perímetro del hexágono regular circunscrito entre el perímetro del hexágono regular inscrito.

A) $\sqrt{3}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

40. Desde un punto P, exterior a una circunferencia se trazan una tangente y una secante. La secante corta a la circunferencia en los puntos A y B, tales que AB = 3PA, m$\overset{\frown}{AB}$ = 120°. Si el radio de la circunferencia mide 6, hallar la longitud del segmento formado por P y el punto de tangencia.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{3}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

41. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la ceviana $\overline{BF}$, tal que AB = FB; m∠FBC = 60° y AC = $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Hallar la longitud FB.

A) 1 B) 2 C) $\sqrt{3}$
D) $\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{2}$

42. En un triángulo ABC, m∠ABC = 108° y su incentro es I, calcular la longitud del circunradio del triángulo AIC, si el circunradio del triángulo ABC es R.

A) $\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)R$ B) $\left(\frac{\sqrt{5}+2}{2}\right)R$ C) $\frac{\sqrt{5}}{2}R$
D) $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)R$ E) $(\sqrt{5}+1)R$

43. En un pentágono regular ABCDE.
BC = $2\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overset{\frown}{AB}$ y $\overset{\frown}{DE}$, siendo estos arcos los de la circunferencia circunscrita al pentágono.

A) 8 B) $2\sqrt{5+2\sqrt{5}}$
C) $2\sqrt{10+2\sqrt{5}}$ D) $2\sqrt{10-5\sqrt{2}}$
E) $4\sqrt{10+2\sqrt{5}}$

44. En un pentágono regular ABCDE, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en M. Si: AC(MC) = 196 dm^2, calcular el valor de AE.

A) $14\sqrt{3}$ dm B) $7\sqrt{2}$ dm
C) $7\sqrt{3}$ dm D) $7(\sqrt{5}-1)$ dm
E) 14 dm

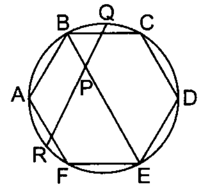
45. En un triángulo ABC de ortocentro H y circuncentro O, m∠HOC = 135° y HC = 8. Además m∠ABC = 60°. Calcular AC.

A) $2\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}$ C) $3\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{6}$ E) $4\sqrt{6}$

46. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ y es igual a la longitud de la bisectriz interna relativa a la hipotenusa. Hallar la longitud de la hipotenusa.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 6 m

47. Hallar el lado del hexágono regular, si $\overline{QR}$ // $\overline{AB}$, PQ = m y PR = n

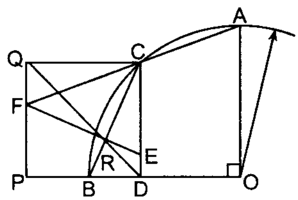


A) $\sqrt{m^2+n^2}$ B) $\frac{2mn}{m+n}$
C) $\sqrt{m^2+n^2-mn}$ D) $\sqrt{m^2+n^2+mn}$
E) $\frac{m^2+n^2}{m-n}$

48. En un triángulo isósceles ABC (AB = BC = 1), m∠ABC = 68°, se ubica un punto P, en la región interior, tal que: m∠BAP = 41° y PC = $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcular la m∠BCP.

A) 30° B) 37° C) 23°
D) 45° E) 32°

49. En la figura mostrada, PQCD es un cuadrado, m$\overset{\frown}{AC}$ = 18°, CE = $\sqrt{5}$ + 1, calcular FR.



A) $1{,}5\sqrt{3}$ B) 2 C) 1
D) $\sqrt{2}$ E) $\frac{\sqrt{5}+3}{2}$

50. Sobre una semicircunferencia de centro O y diámetro $\overline{AC}$ se ubica un punto B, luego se traza la ceviana interior $\overline{CF}$ relativa a $\overline{AB}$ en el triángulo ABC, la cual divide al segmento OB en media y extrema razón (P es la intersección de $\overline{OB}$ y $\overline{CF}$). Siendo $\overline{BP}$ la sección áurea. Calcular la m∠PBC, si m∠PCB = 18°.

A) 9° B) 18° C) 30°
D) 36° E) 54°

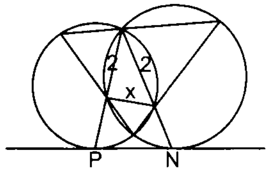
51. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{CF}$ y $\overline{AE}$ cumpliéndose que m∠AFC = m∠AEC = 135° y m∠B = 120°. Calcular $\overline{EF}$, si $\overline{AC}$ = $2\sqrt{2}$.

A) $\sqrt{3-\sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{2+\sqrt{3}}$
D) $\sqrt{2-\sqrt{3}}$ E) $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

52. Calcular la flecha correspondiente a una cuerda que subtiende un arco de 144° en una circunferencia de 8 unidades de diámetro.

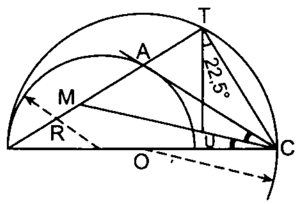
A) $2(\sqrt{2}-1)$ B) $5-\sqrt{5}$ C) $2+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}+1$ E) $\sqrt{2}+2$

53. En el gráfico, P y N son puntos de tangencia; calcular x.



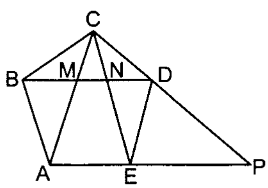
A) $\sqrt{7}-1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{2}-1$ D) 2
$\sqrt{2}-2$ E) $\sqrt{3}-1$

54. En el gráfico, calcular TU, si $CM = 3\sqrt{2}$ (A es punto de tangencia).



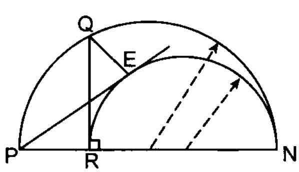
A) $2\sqrt{3-\sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{3-\sqrt{3}}$ C) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $3\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $4\sqrt{3-\sqrt{3}}$

55. En la figura, ABCDE es un pentágono regular. Calcular EP, si MN = 2.



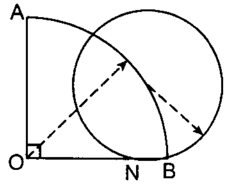
A) $2(\sqrt{5}+2)$ B) $2(\sqrt{5}+1)$ C) $4(\sqrt{5}-1)$
D) $8(\sqrt{5}-2)$ E) $4(\sqrt{5}-1)$

56. En la figura, calcular $\frac{PE}{QR}$, si $\overline{RN}$ es la sección áurea de $\overline{PN}$ (E es punto de tangencia).



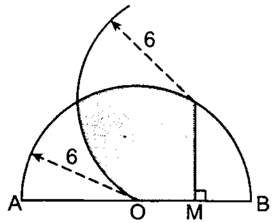
A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
D) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

57. Calcular la longitud de la circunferencia si (OA)(NB) = 16.



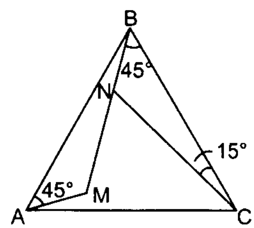
A) 6π B) 10π C) 12π
D) 8π E) 48π

58. El perímetro de la región sombreada es $(a + b\pi + c\sqrt{3})$, donde a, b y c son números enteros. Calcular a + 2b + 3c, si M es punto medio de $\overline{OB}$.



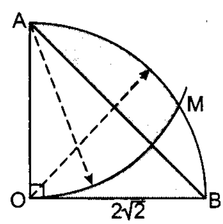
A) 11 B) 12 C) 18
D) 20 E) 10

59. Del gráfico, el triángulo ABC es equilátero, $NC = 8\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcular AM.



A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) 8 E) $4\sqrt{2}$

60. Calcular el perímetro de la región sombreada.



A) $2\sqrt{2}(\pi+3\sqrt{2})$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}(2\pi+3\sqrt{2}+3)$
C) $2\sqrt{2}(2\pi+3\sqrt{2})$ D) $2\sqrt{2}(2\pi+\sqrt{3})$
E) $2\sqrt{2}(\pi+\sqrt{3})$

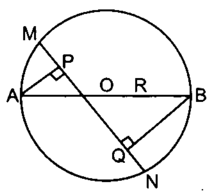
61. En un triángulo ABC, la $m\angle BAC = 45°$. Si O es el circuncentro, $m\angle BAO = 15°$, $AO = R$ y $\overline{AO} \cap \overline{BC} = \{D\}$, halle BD.

A) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{R\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
D) $\frac{R}{4}$ E) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

62. En un triángulo ABC, AB = BC = 2, se ubica un punto Q en su región interior, tal que: $m\angle BAQ = 40°$, $CQ = \sqrt{5} - 1$ y $m\angle ABC = 64°$. Calcule la $m\angle BCQ$.

A) 40° B) 42° C) 43°
D) 44° E) 45°

63. En la figura, calcule R, si $m\overset{\frown}{MN} = 144°$, AP = 1 y $BQ = \sqrt{5}$.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

64. En un triángulo ABC obtuso en B; $m\angle ACB = 18°$, AB = 2 y $AC = \sqrt{5} + 1$. Entonces la $m\angle BAC$ es:

A) 24° B) 12° C) 36°
D) 18° E) 30°

65. En un triángulo ABC se trazan las alturas si $\overline{AJ}$ y $\overline{CF}$. Si $AC = 2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ y la $m\angle ABC = 67{,}5°$, calcule FJ.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

66. Se tiene un pentágono regular ABCDE, tal que $\overline{BD} \cap \overline{CH} = \{P\}$, $\overline{CH} \perp \overline{AE}$, $H \in \overline{AE}$ y $PH = \sqrt{5} + 1$. Calcule PC.

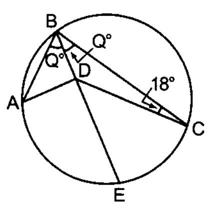
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

67. En un romboide ABCD: BC = AC, $m\angle CAD = 30°$ y $AD = \sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Calcular BD.

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{13}$ C) 4 D) 3 E) 6

68. En la circunferencia mostrada: $m\overset{\frown}{AB} = 72°$ y DE = 2. Calcule AD.

A) 3
B) 4
C) $\sqrt{5} + 1$
D) $\sqrt{5} - 1$
E) 6



69. En un trapecio isósceles ABCD: $AB = BC = CD = \sqrt{50 - 10\sqrt{5}}$ y ademas tenemos $m\angle A = m\angle D = 18°$. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

70. En una circunferencia C, de radio $\sqrt{5} + 2$, se dibujan en su interior 10 circunferencias congruentes tangentes exteriormente dos a dos y tangentes a C. ¿Cuánto mide el radio de estas circunferencias?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1
D) 2 E) 3

71. En un octógono regular ABCDEFGH cuyo lado mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$: $\overline{BE} \cap \overline{BF} = \{M\}$, entonces $\overline{HM}$ mide:

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

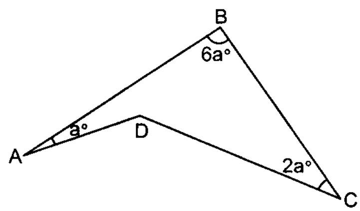
72. El circunradio de un triángulo ABC mide $6\sqrt{3}$ y la $m\angle ABC = 60°$. Calcule la longitud del segmento que une los pies de las alturas trazadas desde A y C.

A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 6
D) 9 E) 18

73. Se tiene un triángulo ABC, donde $m\angle BAC = 45°$, $m\angle ACB = 15°$ y AB = 1. Calcule AC.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{4+\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{2+3\sqrt{3}}$ E) 4

74. En la figura: $AB = BC = CD = \sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calcule AD.



A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

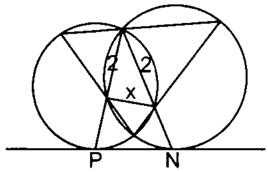
75. En un triángulo ABC, recto en B y la $m\angle BAC = 52°$, se ubica un punto M en su región interior de modo que $9\,(m\angle MCA) = 10\,(m\angle MCB)$ y $AC = (\sqrt{5} + 1)\,BM$. Calcule $m\angle BMC$.

A) 108° B) 118° C) 126°
D) 128° E) 138°

76. En un hexágono regular ABCDEF se traza la bisectriz interior $\overline{FG}$ del triángulo ABF y en el segmento $\overline{FD}$ se ubica el punto H de manera que AF = FH ($\overline{HG} \cap \overline{BF} = \{I\}$). Si HI = 2, entonces el apotema del hexágono mide:

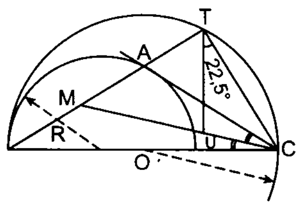
A) $2(\sqrt{2}-1)$ B) $5-\sqrt{5}$ C) $2+\sqrt{2}$
D) $\sqrt{5}+1$ E) $\sqrt{2}+2$

53. En el gráfico, P y N son puntos de tangencia; calcular x.



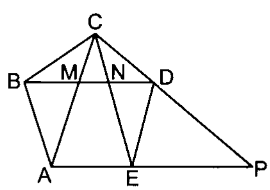
A) $\sqrt{7}-1$ B) $\sqrt{5}-1$ C) $\sqrt{2}-1$ D) $2\sqrt{2}-2$ E) $\sqrt{3}-1$

54. En el gráfico, calcular TU, si CM = $3\sqrt{2}$ (A es punto de tangencia).



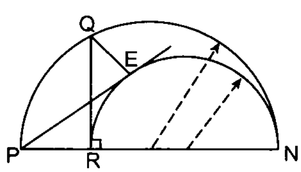
A) $2\sqrt{3-\sqrt{2}}$ B) $2\sqrt{3-\sqrt{3}}$ C) $2\sqrt{2-\sqrt{2}}$
D) $3\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $4\sqrt{3-\sqrt{3}}$

55. En la figura, ABCDE es un pentágono regular. Calcular EP, si MN = 2.



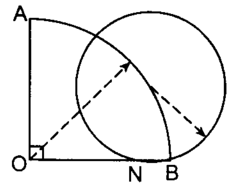
A) $2(\sqrt{5}+2)$ B) $2(\sqrt{5}+1)$ C) $4(\sqrt{5}-1)$
D) $8(\sqrt{5}-2)$ E) $4(\sqrt{5}-1)$

56. En la figura, calcular $\frac{PE}{OR}$, si $\overline{RN}$ es la sección áurea de $\overline{PN}$ (E es punto de tangencia).



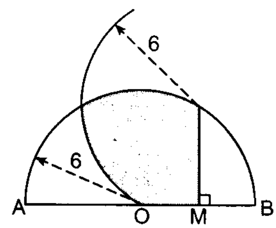
A) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ C) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$
D) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ E) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$

57. Calcular la longitud de la circunferencia si (OA)(NB) = 16.



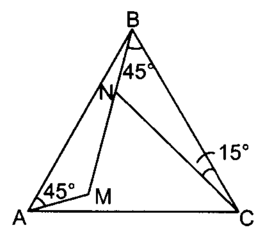
A) 6π B) 10π C) 12π
D) 8π E) 48π

58. El perímetro de la región sombreada es $(a+b\pi+c\sqrt{3})$, donde a, b y c son números enteros. Calcular a + 2b + 3c, si M es punto medio de $\overline{OB}$.



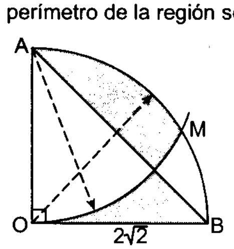
A) 11 B) 12 C) 18
D) 20 E) 10

59. Del gráfico, el triángulo ABC es equilátero, NC = $8\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Calcular AM.



A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{6}$
D) 8 E) $4\sqrt{2}$

60. Calcular el perímetro de la región sombreada.



A) $2\sqrt{2}(\pi+3\sqrt{2})$ B) $\frac{2\sqrt{2}}{3}(2\pi+3\sqrt{2}+3)$
C) $2\sqrt{2}(2\pi+3\sqrt{2})$ D) $2\sqrt{2}(2\pi+\sqrt{3})$
E) $2\sqrt{2}(\pi+\sqrt{3})$

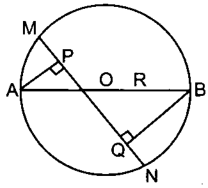
61. En un triángulo ABC, la m∠BAC = 45°. Si O es el circuncentro, m∠BAO = 15°, AO = R y $\overline{AO} + \overline{BC} = \{D\}$, halle BD.

A) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{R\sqrt{6}}{2}$ C) $\frac{R}{2}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
D) $\frac{R}{4}$ E) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$

62. En un triángulo ABC, AB = BC = 2, se ubica un punto Q en su región interior, tal que: m∠BAQ = 40°, CQ = $\sqrt{5}-1$ y m∠ABC = 64°. Calcule la m∠BCQ.

A) 40° B) 42° C) 43°
D) 44° E) 45°

63. En la figura, calcule R, si m$\overset{\frown}{MN}$ = 144°, AP = 1 y BQ = $\sqrt{5}$.



A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

64. En un triángulo ABC obtuso en B; m∠ACB = 18°, AB = 2 y AC = $\sqrt{5}$ + 1. Entonces la m∠BAC es:

A) 24° B) 12° C) 36°
D) 18° E) 30°

65. En un triángulo ABC se trazan las alturas si $\overline{AJ}$ y $\overline{CF}$. Si AC = $2\sqrt{2+\sqrt{2}}$ y la m∠ABC = 67,5°, calcule FJ.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2
D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

66. Se tiene un pentágono regular ABCDE, tal que $\overline{BD} \cap \overline{CH} = \{P\}$, $\overline{CH} \perp \overline{AE}$, H ∈ $\overline{AE}$ y PH = $\sqrt{5}$ + 1. Calcule PC.

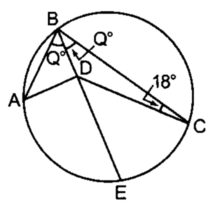
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

67. En un romboide ABCD: BC = AC, m∠CAD = 30° y AD = $\sqrt{5+2\sqrt{3}}$. Calcular BD.

A) $\sqrt{7}$ B) $\sqrt{13}$ C) 4 D) 3 E) 6

68. En la circunferencia mostrada: m$\overset{\frown}{AB}$ = 72° y DE = 2. Calcule AD.

A) 3
B) 4
C) $\sqrt{5}$ + 1
D) $\sqrt{5}$ − 1
E) 6



69. En un trapecio isósceles ABCD: AB = BC = CD = $\sqrt{50-10\sqrt{5}}$ y ademas tenemos m∠A = m∠D = 18°. Calcular la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.

A) 5 B) 6 C) 8
D) 10 E) 12

70. En una circunferencia C, de radio $\sqrt{5}$ + 2, se dibujan en su interior 10 circunferencias congruentes tangentes exteriormente dos a dos y tangentes a C. ¿Cuánto mide el radio de estas circunferencias?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1
D) 2 E) 3

71. En un octógono regular ABCDEFGH cuyo lado mide $\sqrt{2-\sqrt{2}}$: $\overline{BE} \cap \overline{BF} = \{M\}$, entonces $\overline{HM}$ mide:

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\sqrt{3}$ D) 2 E) 3

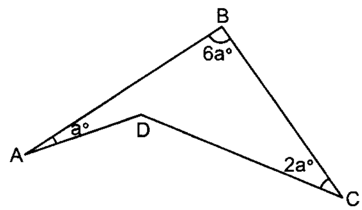
72. El circunradio de un triángulo ABC mide $6\sqrt{3}$ y la m∠ABC = 60°. Calcule la longitud del segmento que une los pies de las alturas trazadas desde A y C.

A) $3\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 6
D) 9 E) 18

73. Se tiene un triángulo ABC, donde m∠BAC = 45°, m∠ACB = 15° y AB = 1. Calcule AC.

A) $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ B) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{4+\sqrt{2}}$
D) $\sqrt{2+3\sqrt{3}}$ E) 4

74. En la figura: AB = BC = CD = $\sqrt{2+\sqrt{3}}$. Calcule AD.



A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{2}$ E) $\sqrt{3}$

75. En un triángulo ABC, recto en B y la m∠BAC = 52°, se ubica un punto M en su región interior de modo que 9 (m∠MCA) = 10 (m∠MCB) y AC = ($\sqrt{5}$ + 1) BM. Calcule m∠BMC.

A) 108° B) 118° C) 126°
D) 128° E) 138°

76. En un hexágono regular ABCDEF se traza la bisectriz interior $\overline{FG}$ del triángulo ABF y en el segmento $\overline{FD}$ se ubica el punto H de manera que AF = FH ($\overline{HG} \cap \overline{BF} = \{I\}$). Si HI = 2, entonces el apotema del hexágono mide:

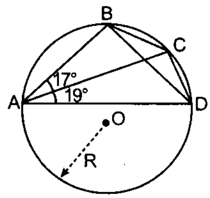
A) 1 B) 2 C) 3
D) $\sqrt{3}$ E) $\sqrt{2}$

77. En un polígono regular ABCDEFGHIJKL: $AB = \sqrt{6 - 3\sqrt{3}}$. Calcule AE.

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

78. En la figura: $R = \sqrt{5} + 1$. Calcule BD.

A) $\sqrt{5} - 1$
B) $\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$
C) $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
D) $2\sqrt{5} + 3$
E) 4

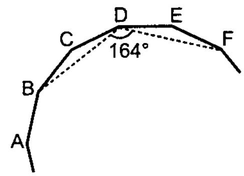


79. En un triángulo ABC el circunradio mide 4, la $m\angle BAC = 45°$ y $m\angle ACB = 18°$. Calcule la longitud de la altura $\overline{BH}$.

A) $\sqrt{5} - 1$ B) $\sqrt{10} - \sqrt{2}$ C) $\sqrt{5} + 1$
D) $\sqrt{2}$ E) 1

80. La figura muestra parte de un polígono regular de n lados. Calcular el valor de n.

A) 40
B) 36
C) 45
D) 18
E) 24

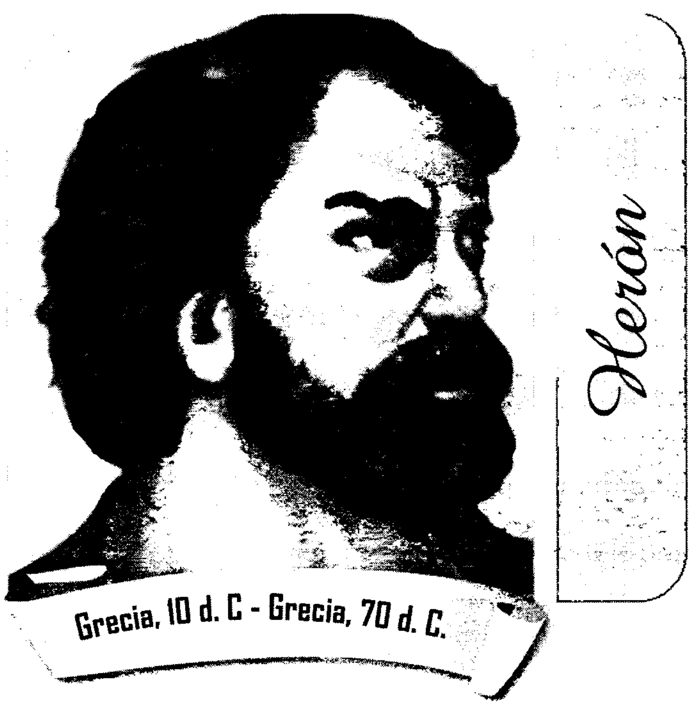


CLAVES

1. A	11. C	21. E	31. E	41. A	51. E	61. C	71. B
2. D	12. B	22. E	32. A	42. D	52. B	62. D	72. D
3. E	13. A	23. E	33. E	43. B	53. B	63. B	73. B
4. B	14. D	24. B	34. A	44. E	54. D	64. B	74. A
5. B	15. B	25. A	35. E	45. E	55. A	65. A	75. D
6. D	16. D	26. D	36. B	46. B	56. E	66. B	76. D
7. B	17. B	27. B	37. C	47. C	57. D	67. D	77. C
8. A	18. D	28. B	38. E	48. B	58. D	68. D	78. C
9. C	19. B	29. B	39. D	49. E	59. E	69. A	79. B
10. C	20. E	30. C	40. C	50. D	60. B	70. C	80. C

Área de regiones planas

14 capítulo



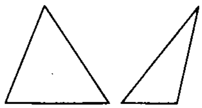
Herón de Alejandría (siglo I d. C.) fue un ingeniero y matemático helenístico que destacó en Alejandría (en la provincia romana de Egipto). Este griego es considerado uno de los científicos e inventores más grandes de la antigüedad y su trabajo es representativo de la tradición científica helenista. Su mayor logro fue la invención de la primera máquina de vapor, conocida como «eolípila», y la fuente de Herón. Es también autor de numerosos tratados de mecánica.

Sin embargo, es conocido sobre todo como matemático, tanto en el campo de la geometría como en el de la geodesia (una rama de las matemáticas que se encarga de la determinación del tamaño y configuración de la Tierra, y de la ubicación de áreas concretas de la misma especie). Herón trató los problemas de las mediciones terrestres con mucho más acierto que cualquier otro de su época; por eso se dice que fue un gran científico. Como matemático escribió *La métrica*, obra en la que estudia las áreas de las superficies y los volúmenes de los cuerpos. Desarrolló también técnicas de cálculo tomadas de los babilonios y egipcios, como el cálculo de raíces cuadradas mediante iteraciones. Su logro más destacado en el campo de la geometría es la denominada fórmula de Herón, en la que se establece la relación entre el área de un triángulo y la longitud de sus lados.

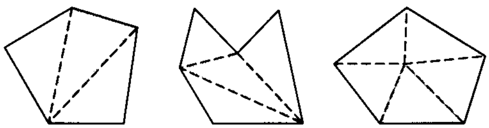
Fuente: Wikipedia

REGIÓN TRIANGULAR

Una región triangular es la reunión de un triángulo y su interior.



Una región poligonal es una figura plana formada por la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, de modo que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.



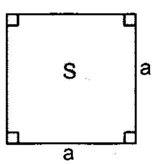
(a) (b) (c)

Observar que una misma región poligonal se puede dividir de diferentes formas: (figura a y c) a fin de tener un conjunto de regiones triangulares.

El área de una superficie limitada, cualquiera, es la medida de su extensión, indicada por un número positivo único, acompañado de la unidad adecuada (cm^2, m^2, etc.). De modo que al hablar del área de una región triangular, región cuadrangular, región trapezoidal, región poligonal, etc., estamos haciendo referencia a la medida de la superficie limitada por un triángulo, cuadrilátero, trapecio, polígono, etc. Para simbolizar el área de una región cualquiera, comúnmente se usan las letras mayúsculas A o S, siendo, por ejemplo, SPQR, el área de una determinada región triangular PQR.

POSTULADO DE LA UNIDAD

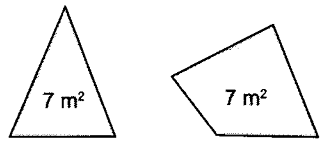
El área de una región cuadrada, se expresa por el cuadrado de la longitud de su lado.



$\boxed{S = a^2}$

Observaciones:

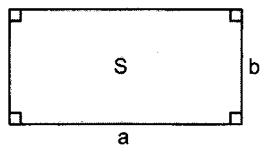
- En adelante, para abreviar, haremos referencia al área de un triángulo, área de un polígono, etc., entendiendo, desde luego, que se trata del área de la región correspondiente.
- Es a partir del postulado de la unidad del área (área del cuadrado), que se demuestran las fórmulas básicas para el cálculo de área de las diferentes regiones elementales: rectángulo, triángulo, trapecio, etc.
- Dos regiones cualesquiera, que tienen igual área, se llaman equivalentes; independientemente de la forma de uno con relación al otro. Así, por ejemplo, para la figura adjunta diremos que el triángulo y cuadriláteros son equivalentes.
- Dos triángulos congruentes (en general dos polígonos congruentes, son equivalentes).



Veamos a manera de aplicación del postulado de la unidad de áreas, la demostración de la expresión para el cálculo del área de un rectángulo, así como la deducción para el romboide y triángulo.

TEOREMAS

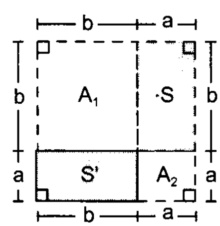
I. El área de todo rectángulo es igual al producto de sus dos longitudes



$\boxed{S = ab}$

Demostración:

Con la figura, donde $A_1 = b^2$, $A_2 = a^2$ y $S' = S$, por ser rectángulos congruentes, el área de la figura total es:



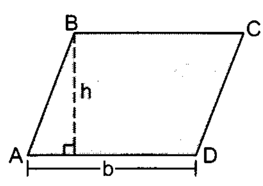
$S + S' + A_1 + A_2 = S_{total}$

Luego: $2S + b^2 + a^2 = (a + b)^2$

$2S + b^2 + a^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 2S = 2ab$

De donde: $S = ab$

II. El área de todo romboide es igual al producto de la longitud de un lado y la altura respectiva a dicho lado.

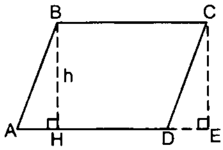


$\boxed{S_{ABCD} = bh}$

Nota

Puede expresarse también el área del romboide mediante el producto de la longitud de $\overline{CD}$ y la altura trazada a dicho lado (distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).

Demostración:

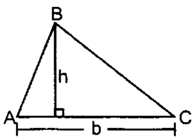


Como: $\triangle BHA \cong \triangle CED$, entonces AH = DE, por lo que HE = AD = b

Además: $S_{AHB} = S_{DEC} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{HBCE}$

Siendo: $S_{HBCE} = HE(BH) = bh \quad \therefore\ S_{ABCD} = bh$

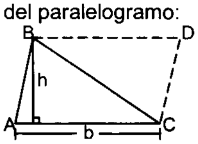
III. El área de todo triángulo es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura respectiva.



$$\boxed{S_{ABC} = \frac{bh}{2}}$$

Demostración:

Trazando paralelas para tomar el paralelogramo ABCD; puesto que los triángulos ABC y DCB son congruentes, sus áreas equivalen a la mitad de la del paralelogramo:

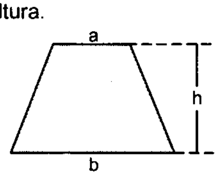


$$S_{ABC} = \frac{S_{ABDC}}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\therefore\ S_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

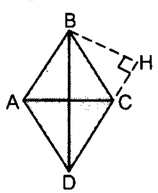
Con ello, se demuestran las expresiones básicas para el cálculo de áreas del trapecio y rombo, así como las deducciones para los triángulos rectángulo y equilátero.

IV. El área de todo trapecio es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las bases y de la altura.



$$\boxed{S_S = \left(\frac{a+b}{2}\right)h}$$

V. El área de todo rombo es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales.

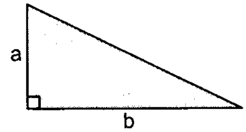


$$\boxed{S = \frac{(AC)(BD)}{2}}$$

Nota

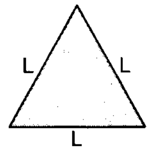
También, para el rombo ABCD: S = (CD)(BH)

Corolario. El área de todo triángulo rectángulo es igual al semiproducto de las longitudes de los catetos.



$$\boxed{S = \frac{ab}{2}}$$

Corolario. El área de todo triángulo equilátero es igual al cuadrado de la longitud del lado, multiplicado por el factor $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

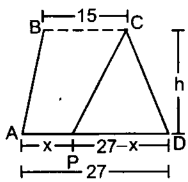


$$\boxed{S = L^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Aplicaciones:

1. En un trapecio ABCD, se conocen las longitudes de las bases: BC = 15 cm y AD = 27 cm, P es un punto de $\overline{AD}$, tal que al unirlo con C, resultan dos regiones equivalentes. Hallar $\overline{PA}$.

   Resolución:



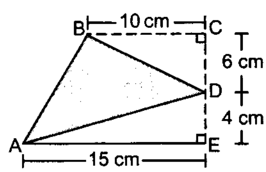
   Del gráfico, se tiene: $S_{ABCP} = S_{PCD}$

   $$\left(\frac{x+15}{2}\right)h = \frac{(27-x)h}{2}$$

   De donde, fácilmente hallamos:

   $x = 6 \quad \therefore\ AP = 6$ cm

2. En la figura, hallar el área de la región sombreada.



   Resolución:

   Se pide: S_{ABD}

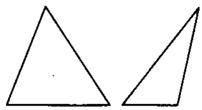
   Observamos: $S_{ABD} + S_{BCD} + S_{AED} = S_{ABCE}$

   Luego: $S_{ABD} + \frac{10\times 6}{2} + \frac{15\times 4}{2} = \left(\frac{10+15}{2}\right)10$

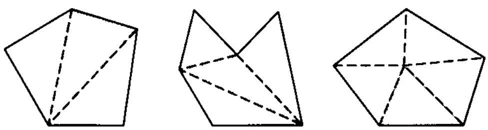
   $\therefore$ Efectuando: $S_{ABD} = 65\ cm^2$

REGIÓN TRIANGULAR

Una región triangular es la reunión de un triángulo y su interior.



Una región poligonal es una figura plana formada por la reunión de un número finito de regiones triangulares en un plano, de modo que si dos cualesquiera de ellas se intersecan, su intersección es o bien un punto o un segmento.



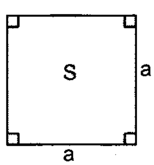
(a) (b) (c)

Observar que una misma región poligonal se puede dividir de diferentes formas: (figura a y c) a fin de tener un conjunto de regiones triangulares.

El área de una superficie limitada, cualquiera, es la medida de su extensión, indicada por un número positivo único, acompañado de la unidad adecuada (cm^2, m^2, etc.). De modo que al hablar del área de una región triangular, región cuadrangular, región trapezoidal, región poligonal, etc., estamos haciendo referencia a la medida de la superficie limitada por un triángulo, cuadrilátero, trapecio, polígono, etc. Para simbolizar el área de una región cualquiera, comúnmente se usan las letras mayúsculas A o S, siendo, por ejemplo, SPQR, el área de una determinada región triangular PQR.

POSTULADO DE LA UNIDAD

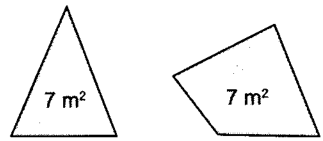
El área de una región cuadrada, se expresa por el cuadrado de la longitud de su lado.



$\boxed{S = a^2}$

Observaciones:

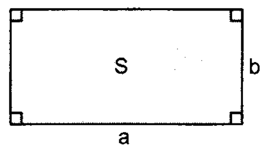
- En adelante, para abreviar, haremos referencia al área de un triángulo, área de un polígono, etc., entendiendo, desde luego, que se trata del área de la región correspondiente.
- Es a partir del postulado de la unidad del área (área del cuadrado), que se demuestran las fórmulas básicas para el cálculo de área de las diferentes regiones elementales: rectángulo, triángulo, trapecio, etc.
- Dos regiones cualesquiera, que tienen igual área, se llaman equivalentes; independientemente de la forma de uno con relación al otro. Así, por ejemplo, para la figura adjunta diremos que el triángulo y cuadriláteros son equivalentes.
- Dos triángulos congruentes (en general dos polígonos congruentes, son equivalentes).



Veamos a manera de aplicación del postulado de la unidad de áreas, la demostración de la expresión para el cálculo del área de un rectángulo, así como la deducción para el romboide y triángulo.

TEOREMAS

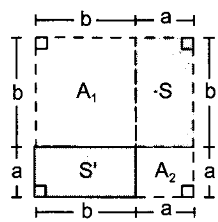
I. El área de todo rectángulo es igual al producto de sus dos longitudes



$\boxed{S = ab}$

Demostración:

Con la figura, donde $A_1 = b^2$, $A_2 = a^2$ y $S' = S$, por ser rectángulos congruentes, el área de la figura total es:



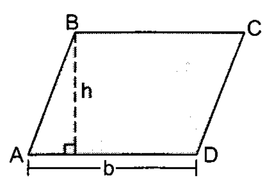
$S + S' + A_1 + A_2 = S_{total}$

Luego: $2S + b^2 + a^2 = (a + b)^2$

$2S + b^2 + a^2 = a^2 + 2ab + b^2 \Rightarrow 2S = 2ab$

De donde: $S = ab$

II. El área de todo romboide es igual al producto de la longitud de un lado y la altura respectiva a dicho lado.

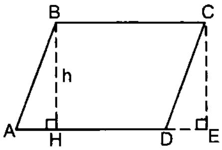


$\boxed{S_{ABCD} = bh}$

Nota

Puede expresarse también el área del romboide mediante el producto de la longitud de $\overline{CD}$ y la altura trazada a dicho lado (distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$).

Demostración:

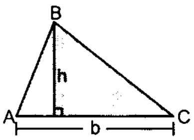


Como: $\triangle BHA \cong \triangle CED$, entonces $AH = DE$, por lo que $HE = AD = b$

Además: $S_{AHB} = S_{DEC} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{HBCE}$

Siendo: $S_{HBCE} = HE(BH) = bh \quad \therefore S_{ABCD} = bh$

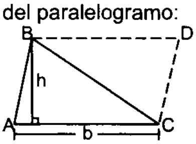
III. El área de todo triángulo es igual al semiproducto de la longitud de un lado y la altura respectiva.



$$\boxed{S_{ABC} = \frac{bh}{2}}$$

Demostración:

Trazando paralelas para tomar el paralelogramo ABCD; puesto que los triángulos ABC y DCB son congruentes, sus áreas equivalen a la mitad de la del paralelogramo:

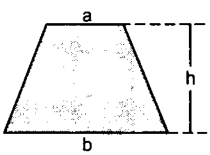


$$S_{ABC} = \frac{S_{ABDC}}{2} = \frac{bh}{2}$$

$$\therefore S_{ABC} = \frac{bh}{2}$$

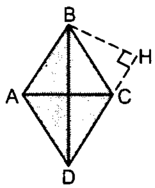
Con ello, se demuestran las expresiones básicas para el cálculo de áreas del trapecio y rombo, así como las deducciones para los triángulos rectángulo y equilátero.

IV. El área de todo trapecio es igual al producto de la semisuma de las longitudes de las bases y de la altura.



$$\boxed{S_S = \left(\frac{a+b}{2}\right)h}$$

V. El área de todo rombo es igual al semiproducto de las longitudes de las diagonales.

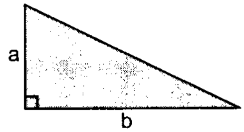


$$\boxed{S = \frac{(AC)(BD)}{2}}$$

Nota

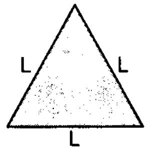
También, para el rombo ABCD: $S = (CD)(BH)$

Corolario. El área de todo triángulo rectángulo es igual al semiproducto de las longitudes de los catetos.



$$\boxed{S = \frac{ab}{2}}$$

Corolario. El área de todo triángulo equilátero es igual al cuadrado de la longitud del lado, multiplicado por el factor $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

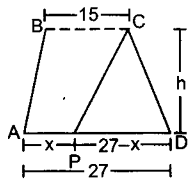


$$\boxed{S = L^2\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

Aplicaciones:

1. En un trapecio ABCD, se conocen las longitudes de las bases: $BC = 15$ cm y $AD = 27$ cm, P es un punto de $\overline{AD}$, tal que al unirlo con C, resultan dos regiones equivalentes. Hallar $\overline{PA}$.

   Resolución:



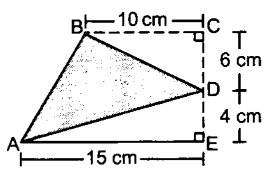
   Del gráfico, se tiene: $S_{ABCP} = S_{PCD}$

   $$\left(\frac{x+15}{2}\right)h = \frac{(27-x)h}{2}$$

   De donde, fácilmente hallamos:

   $x = 6 \quad \therefore AP = 6$ cm

2. En la figura, hallar el área de la región sombreada.



   Resolución:

   Se pide: S_{ABD}

   Observamos: $S_{ABD} + S_{BCD} + S_{AED} = S_{ABCE}$

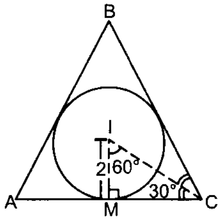
   Luego: $S_{ABD} + \frac{10\times 6}{2} + \frac{15\times 4}{2} = \left(\frac{10+15}{2}\right)10$

   $\therefore$ Efectuando: $S_{ABD} = 65\text{ cm}^2$

3. Calcular el área de un triángulo equilátero, sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita mide 2 m.

Resolución:

Sea el triángulo ABC.



En $\triangle$IMC: $MC = 2\sqrt{3}$ (se opone a 60°)

$AC = 2MC \Rightarrow AC = 4\sqrt{3}$

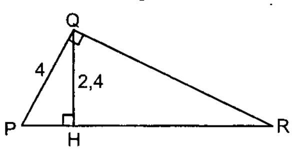
Luego: $S_{ABC} = (AC)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow S_{ABC} = (4\sqrt{3})^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore\ S_{ABC} = 12\sqrt{3}\ m^2$

4. En un triángulo rectángulo, un cateto mide 4 m y la altura sobre la hipotenusa 2,4 m. ¿Cuál es el área del triángulo?

Resolución:

Consideremos el triángulo PQR



Luego: $S_{PQR} = \dfrac{(PR)(CH)}{2} \Rightarrow S_{PQR} = \dfrac{PR(2,4)}{2}$

$\Rightarrow S_{PQR} = (1,2)PR \qquad ...(1)$

Para hallar PR, previamente calculamos $\overline{PH}$, en el $\triangle$PHQ, por el teorema de Pitágoras:

$PH = \sqrt{4^2 - (2,4)^2} \Rightarrow PH = 3,2$

Luego, en $\triangle$PQR, sabemos por relaciones métricas:

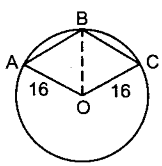
$(PQ)^2 = (PR)(PH) \Rightarrow 4^2 = (PR)(3,2) \Rightarrow PR = 5$

Sustituimos esto en (1): $S_{PQR} = (1,2)(5)$

$\therefore\ S_{PQR} = 6\ m^2$

5. Los lados de un rombo son dos radios y dos cuerdas de una circunferencia de 16 cm de radio. Calcular el área del rombo, en cm^2.

Resolución:



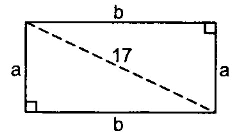
Del gráfico, notamos que los triángulos AOB y BOC son equiláteros.

Luego: $S_{ABCD} = 2(S_{AOB}) \Rightarrow S_{ABCO} = 2\left(16\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore\ S_{ABCO} = 128\sqrt{3}$

6. Un terreno tiene forma rectangular y se sabe que su perímetro mide 46 m, siendo su diagonal igual a 17 m. ¿Cuál es el área terreno?

Resolución:



Del dato: $2(a + b) = 46 \Rightarrow a + b = 23 \qquad ...(1)$

Además: $a^2 + b^2 = 289 \qquad ...(2)$

Para obtener el área, S = ab, elevamos ambos miembros de la expresión (1) al cuadrado:

$(a + b)^2 = 23^2$

$a^2 + b^2 + 2ab = 529$

Con (2): $269 + 2ab = 529 \Rightarrow ab = 120$

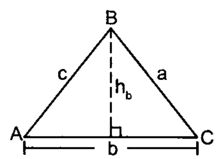
$\therefore\ S = 120\ m^2$

REGIONES TRIANGULARES

Veamos a continuación, diversas expresiones para el cálculo del área de un triángulo, derivadas en su mayoría de la fórmula básica y dependiendo de los datos considerados.

I. Teorema de Herón de Alejandría. El área de todo triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro y su diferencia con cada lado.

Demostración:



En efecto, para el $\triangle$ABC, se tiene:

$S = \dfrac{bh_b}{2} \qquad ...(1)$

Pero, sabemos que, siendo p el semiperímetro del triángulo:

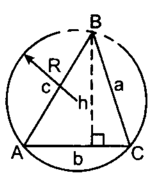
$h_b = \dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad ...(2)$

Al reemplazar (2) en la expresión (1):

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

II. En función del circunradio (R). El área de todo triángulo es igual al producto de las longitudes de los tres lados, dividido por cuatro veces el circunradio.

Demostración:



En $\triangle ABC$: $S = \dfrac{bh}{2}$ ...(1)

Sabemos, además, que:

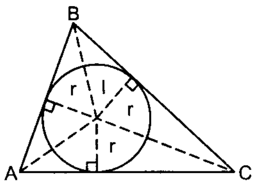
$h(2R) = ac \Rightarrow h = \dfrac{ac}{2R}$ ...(2)

Reemplazando la expresión (2) en (1):

$$\boxed{S = \frac{abc}{4R}}$$

III. En función del inradio (r). El área de todo triángulo es igual al producto del semiperímetro y el inradio.

Demostración:



Por adición, tenemos:

$S_{ABC} = S_{AIB} + S_{BIC} + S_{AIC}$

Luego: $S_{ABC} = \dfrac{AB(r)}{2} + \dfrac{BC(r)}{2} + \dfrac{AC(r)}{2}$

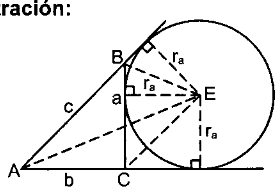
Esto es: $S_{ABC} = \left(\dfrac{AB + BC + AC}{2}\right)r$

Pero: $\dfrac{AB + BC + AC}{2} = p$ (semiperímetro).

De donde: $\boxed{S_{ABC} = pr}$

IV. En función de un exradio. El área de todo triángulo es igual al producto del exradio relativo a un lado y la diferencia entre el semiperímetro y dicho lado.

Demostración:



Sea el $\triangle ABC$, donde $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ y r_a el exradio relativo al lado BC.

Se tiene: $S_{ABC} = S_{ABEC} - S_{BEC}$

Es decir: $S_{ABC} = S_{AEC} + S_{BEC}$

$$S_{ABC} = \frac{br_a}{2} + \frac{cr_a}{2} - \frac{ar_a}{2}$$

$$S_{ABC} = \left(\frac{b + c - a}{2}\right)r_a \quad ...(1)$$

Siendo: $a + b + c = 2p$, el perímetro del $\triangle ABC$.

De aquí: $b + c = 2p - a$, reemplazando en la expresión (1):

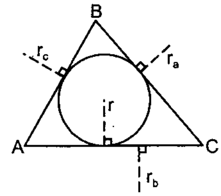
$$S_{ABC} = \left(\frac{2p - 2a}{2}\right)r_a \quad \therefore \boxed{S_{ABC} = (p - a)r_a}$$

En forma análoga:

$$\boxed{S_{ABC} = (p - b)r_b} \wedge \boxed{S_{ABC} = (p - c)r_c}$$

V. En función del inradio y los exradios: En todo triángulo, el área es igual a la raíz cuadrada del producto del inradio y los tres exradios.

Demostración:



En efecto, por deducciones anteriores tenemos, para el área:

$S = pr$; $S = (p - a)r_a$; $S = (p - b)r_b$; $S = (p - c)r_c$

Multiplicando miembro a miembro estas expresiones:

$$S^4 = \underbrace{p(p - a)(p - b)(p - c)}\, r\, r_a r_b r_c$$

Esto es: $S^4 = S^2\, r\, r_a\, r_b\, r_c$

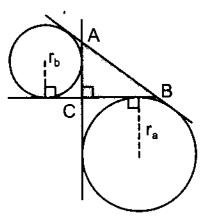
De donde: $\boxed{S = \sqrt{r\, r_a\, r_b\, r_c}}$

CASOS PARTICULARES

A partir de las expresiones generales, deduciremos a continuación fórmulas para el caso de triángulos rectángulos.

I. En todo triángulo rectángulo el área se puede expresar como el producto de los exradios relativos a los catetos.

Demostración:



Desde luego, sabemos que para el área S de la región triangular ABC:

$S = (p - a)r_a \Rightarrow \dfrac{S}{r_a} = p - a$

Además: $\dfrac{S}{r_b} = p - b$

Sumando miembro a miembro estas expresiones:

$\dfrac{S}{r_a} + \dfrac{S}{r_b} = 2p - a - b$, siendo: $2p = a + b + c$

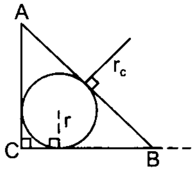
Luego: $S\left(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_c}\right) = c \Rightarrow S = \left(\dfrac{cr_a r_c}{r_a + r_b}\right)$ ...(1)

Ahora, recordemos que en todo triángulo rectángulo la suma de exradios relativos a los catetos es igual a la longitud de la hipotenusa (propiedad). Por lo que: $r_a + r_b = c$

Al reemplazar en (1): $\boxed{S = r_a r_b}$

II. En todo triángulo rectángulo, el área es igual al producto del inradio y el exradio relativo a la hipotenusa. Para demostrar esto, recordemos que:

Demostración:



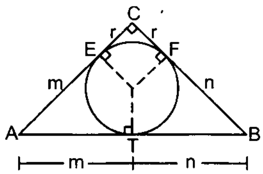
$S^2 = r\,r_a\,r_b\,r_c$

Pero, por lo anterior: $S = r_a r_b$

Luego: $S^2 = rSr_c \quad \therefore\ S = rr_c$

III. En todo triángulo rectángulo, el área se puede expresar como el producto de las longitudes de los segmentos que determina la circunferencia inscrita sobre la hipotenusa.

Sea el $\triangle ABC$, donde $AT = m$ y $TB = n$, son las longitudes de los segmentos en mención. Demostraremos, que: $\boxed{S_{ACB} = mn}$



Del gráfico tenemos: $AC = m + r$ y $CB = n + r$

Por lo que: $S_{ACB} = \dfrac{(AC)(CB)}{2} \Rightarrow 2S_{ACB} = (m + r)(n + r)$

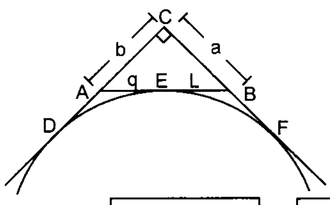
Esto es: $2S_{ACB} = mn + (m + n + r)r$ ...(1)

Además: $pr = S_{ACB} \Rightarrow (m + n + r)r = S_{ACB}$ ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): $2S_{ACB} = mn + S_{ACB}$

$\therefore\ S_{ACB} = mn$

IV. En todo triángulo rectángulo, el área puede expresarse como el producto de las longitudes de los segmentos que determina en la hipotenusa, la respectiva circunferencia exinscrita.



Así, para el ACB $\boxed{S = (AE)(BE)}$ ∨ $\boxed{S = qL}$

Demostración:

Por ser tangentes trazadas desde un mismo punto: $AD = AE = q$; $BE = BF = L$,

y además: $CD = CF \Rightarrow b + AD = a + BF$

Con lo anterior: $b + q = a + L$

De lo que: $q - L = a - b$

Elevando al cuadrado ambos miembros de esta última expresión, a fin de obtener el producto entre q y L: $(q - L)^2 = (a - b)^2$

Desarrollando: $q^2 + L^2 - 2qL = a^2 + b^2 - 2ab$ ...(1)

Para el $\triangle ABC$: $a^2 + b^2 = (AB)^2 = (q + L)^2$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

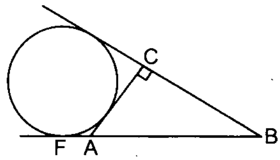
$q^2 + L^2 - 2qL = (q + L)^2 - 2ab$

De donde: $ab = 2qL$

$\dfrac{ab}{2} = qL \quad \therefore\ S = qL$

V. Sea ACB, un triángulo rectángulo (ver figura), recto en C. Se dibuja la circunferencia exinscrita relativa a uno de los catetos, la cual es tangente a la prolongación de la hipotenusa, en F. Se cumple que:

$\boxed{S = (AF)(BF)}$



RELACIONES FUNDAMENTALES EN EL TRIÁNGULO

Consideremos un triángulo ABC cualquiera, de inradio r, circunradio R, exradio r_a, r_b, r_c y alturas h_a, h_b, h_c. Entonces:

1. La inversa del inradio es igual a la suma de las inversas de los exradios.

   Sabemos que para el área:

   $S = pr \Rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{P}{S}$ ...(1)

   Además, podemos escribir:

   $\dfrac{S}{r_a} = p - a$; $\dfrac{S}{r_b} = p - b$ y $\dfrac{S}{r_c} = p - c$

   Sumando miembro a miembro estas últimas tres expresiones y factorizando S:

   $S\left(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}\right) = 3p - (a + b + c)$

   Esto es: $S\left(\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}\right) - p$

   De donde: $\dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c} = \dfrac{P}{S}$ ...(2)

   Luego, comparando (1) y (2): $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$

   Ejemplo:

   Hallar el área del triángulo, en el cual los exradios, miden: $r_a = 2$ cm, $r_b = 3$ cm y $r_c = 6$ cm

   Resolución:

   Cálculo de r: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} \Rightarrow r = 1$ cm

   Luego: $S = \sqrt{rr_ar_br_c} = \sqrt{(1)(2)(3)(6)} \quad \therefore\ S = 6\ cm^2$

2. La inversa del inradio es igual a la suma de las inversas de las alturas: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$

3. Exradios en función de alturas:

$$\frac{1}{r_a}=\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_a} \qquad ...(\alpha)$$

$$\frac{1}{r_b}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_c}-\frac{1}{h_b} \qquad ...(\beta)$$

$$\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c} \qquad ...(\gamma)$$

4. Además, recordemos la relación de Steiner:
$r_a + r_b + r_c = 4R + r$

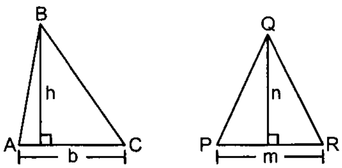
5. Cabe adicionar la relación resultante de combinar (α), (β) y (γ): $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$

◀ COMPARACIONES DE REGIONES TRIANGULARES

Propiedades

1. Las áreas de dos triángulos son entre sí como los productos de sus bases y respectivas alturas.

Demostración:

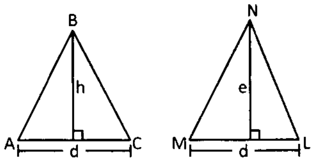


Para la figura, como: $S_{ABC} = \frac{bh}{2}$ y $S_{PQR} = \frac{mn}{2}$

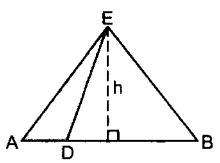
Entonces: $\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{PQR}} = \frac{bh}{mn}}$

2. Si dos triángulos tienen congruente un lado, sus áreas son entre sí como las respectivas alturas.

Para el gráfico, se tendrá: $\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{h}{e}}$



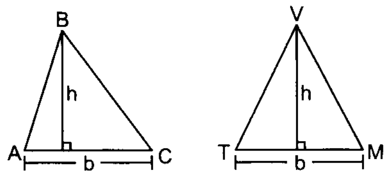
3. Si dos triángulos tienen una altura congruente, entonces las áreas son entre sí como sus respectivas bases.



$\boxed{\frac{S_{AED}}{S_{DEB}} = \frac{AD}{DB}}$

4. Dos triángulos que tienen congruentes un lado y las respectivas alturas, son equivalentes.

Demostración:

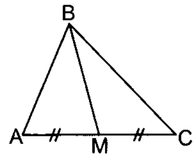


Por definición de figuras equivalentes:

$\frac{S_{ABC}}{S_{TVM}} = \frac{bh}{bh} = 1 \qquad \therefore \boxed{S_{ABC} = S_{TVM}}$

5. En todo triángulo, una mediana cualquiera determina dos triángulos parciales equivalente.

Demostración:



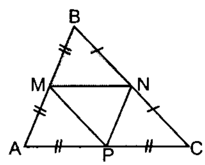
En efecto, sea $\overline{BM}$ una mediana del △ABC. Entonces, por tener congruentes $\overline{AM}$ y $\overline{MC}$ y la misma altura desde B.

$$\boxed{S_{ABM} = S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{2}}$$

6. En todo triángulo, al unir los puntos medios de los tres lados se determinan cuatro triángulos parciales equivalentes.

Demostración:

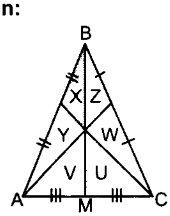
Por ser congruentes los triángulos MBN, AMP, MNP y NPC, se tendrá:



$$\boxed{S_{MBN} = S_{AMP} = S_{MNP} = S_{NPC} = \frac{S_{ABC}}{4}}$$

7. En todo triángulo, al trazar las tres medianas se determinan seis triángulos parciales equivalentes.

Demostración:



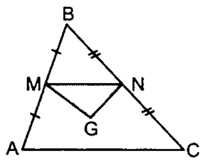
En efecto, por (5), en el gráfico adjunto: X = Y, U = V, W = Z. Bastará probar que X = Z. Para la mediana $\overline{BM}$:

$S_{ABM} = S_{BMC} \Rightarrow X + Y + V = Z + W + U$

Cancelando V y U: $2X = 2Z \Rightarrow X = Z$

Luego: $\boxed{X = Y = Z = \ldots = \dfrac{S_{ABC}}{6}}$

8. Al unir el baricentro de todo triángulo con los puntos medios de dos lados y dichos puntos entre sí, se determina una región triangular cuya área equivale a la doceava parte del área total.

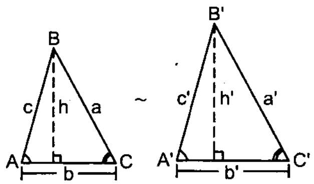


G: baricentro del $\triangle ABC$

En el gráfico: $\boxed{S_{MNG} = \dfrac{S_{ABC}}{12}}$

9. Si dos triángulos (dos polígonos, en general) son semejantes, entonces las áreas son entre sí como los cuadrados de cualquier par de elementos homólogos.

Demostración:



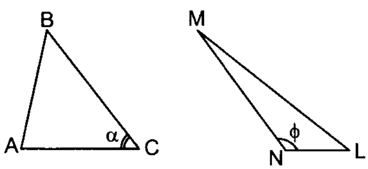
Sea k la razón de semejanza en los triángulos ABC y A'B'C'.

Como: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{bh}{b'h'} \Rightarrow \dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \left(\dfrac{b}{b'}\right)\left(\dfrac{h}{h'}\right) = k^2$

Luego: $\boxed{\dfrac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \dfrac{a^2}{(a')^2} = \dfrac{b^2}{(b')^2} = \dfrac{c^2}{(c')^2} = \dfrac{h^2}{(h')^2}}$

En la relación anterior podemos considerar también medianas, inradios, circunradios, etc.

10. En los triángulos que tienen dos ángulos suplementarios, uno en cada triángulo, las áreas son entre sí, como los productos de los lados que forman dichos ángulos. Para los triángulos ABC y MNL, si $\alpha + \phi = 180°$, entonces:

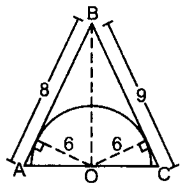


$$\boxed{\frac{S_{ABC}}{S_{MNL}} = \frac{(CA)(CB)}{(MN)(NL)}}$$

Aplicaciones:

1. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC tienen longitudes 8 y 9 centímetros, respectivamente. Una semicircunferencia de radio 6 cm es tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, teniendo su diámetro sobre $\overline{AC}$. Hallar el área del triángulo.

Resolución:



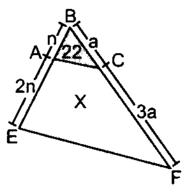
Trazando $\overline{BO}$ y luego los radios a los puntos de tangencia:

$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} \Rightarrow S_{ABC} = \dfrac{8(6)}{2} + \dfrac{9(6)}{2}$

$\therefore\ S_{ABC} = 51\ cm^2$

2. El área de un triángulo ABC es $22\ cm^2$. Sobre las prolongaciones de los lados $\overline{BA}$ y $\overline{BC}$ se toman longitudes AE = 2AB y CF = 3BC. Hallar el área del cuadrilátero ACFE.

Resolución:



Del gráfico, como los triángulos EBF y ABC, tienen en común la $m\angle B$:

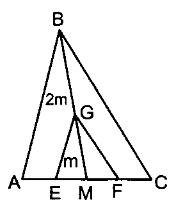
$\dfrac{S_{EBF}}{S_{ABC}} = \dfrac{(BE)(BF)}{(BA)(BC)} \Rightarrow \dfrac{22 + X}{22} = \dfrac{(3n)(4a)}{na}$

$\Rightarrow 22 + X = 12(22)$, de donde $X = 242$

$\therefore\ S_{ACFE} = 242\ cm^2$

3. El área de un triángulo ABC es $72\ cm^2$. Por el baricentro G se trazan paralelas a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, que intersecan a $\overline{AC}$ en los puntos E y F, respectivamente. Hallar el área del triángulo EGF.

Resolución:



En el $\triangle ABC$, como G es baricentro, al trazar la mediana $\overline{BGM}$, sabemos que BG = 2(GM)

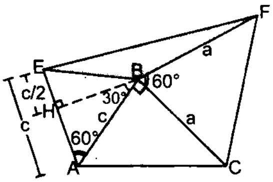
Si GM = m, entonces BG = 2m.

Como los triángulos EGF y ABC son semejantes, donde $\overline{GM}$ y $\overline{BM}$ son medianas homólogas.

$\dfrac{S_{EGF}}{S_{ABC}} = \dfrac{(GM)^2}{(BM)^2} \Rightarrow \dfrac{S_{EGF}}{72} = \dfrac{m^2}{(3m)^2} \quad \therefore\ S_{EGF} = 8\ cm^2$

4. El área de un triángulo rectángulo ABC ($m\angle B = 90°$), es 24 cm^2. Exteriormente se dibujan los triángulos equiláteros AEB y BFC. Trazar $\overline{EF}$ y hallar el área del triángulo EBF.

Resolución:



Haciendo AB = c y BC = a, el dato:

$$S_{ABC} = \frac{AB(BC)}{2} = 24 \Rightarrow \frac{ac}{2} = 24$$

Es decir, $ac = 48$ cm^2 ...(1)

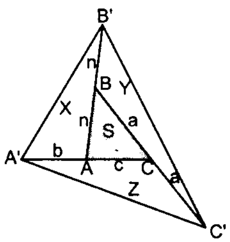
La prolongación de $\overline{FB}$ forma con $\overline{AB}$ un ángulo de 30°, por lo que $\overline{BH}$ será perpendicular a $\overline{AE}$:

$$S_{EBF} = \frac{BF(EH)}{2} = \frac{a\left(\frac{c}{2}\right)}{2} \Rightarrow S_{EBF} = \frac{ac}{4}$$

Con (1): $S_{EBF} = \frac{48}{4}$ $\therefore$ $S_{EBF} = 12$ cm^2

5. El área de un triángulo es S. Si se prolongan los lados en un mismo sentido y una longitud igual a la del lado prolongado, hallar el área del triángulo que se forma al unir los extremos de dichas prolongaciones.

Resolución:



Sea ABC el triángulo dado y A'B'C' el de los extremos de las prolongaciones.

Del gráfico: $S_{A'B'C'} = S + X + Y + Z$ ...(1)

Los triángulos A'AB' y ABC tienen un par de ángulos suplementarios ($m\angle A'AB' + \angle BAC = 180°$), por propiedad:

$$\frac{S_{A'AB'}}{S_{ABC}} = \frac{(AA')(AB')}{(AC)(AB)} \Rightarrow \frac{X}{S} = \frac{(b)(2n)}{(b)(n)} \Rightarrow X = 2S$$

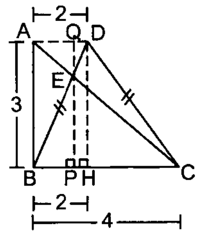
Análogamente, al comparar los triángulos BB'C' y A'CC' con ABC: Y = 2S; Z = 2S

Sustituyendo en (1): $S_{A'B'C'} = S + 2S + 2S + 2S$

$\therefore$ $S_{A'B'C'} = 7S$

6. En un triángulo rectángulo ABC, las longitudes de los catetos son AB = 3 cm y BC = 4 cm. Se dibuja el triángulo isósceles BDC (BD = DC), equivalente a ABC, intersecando $\overline{BD}$ a $\overline{AC}$ en el punto E. Hallar el área del triángulo BEC.

Resolución:



Del gráfico, como los triángulos BDC y ABC son equivalentes y tienen la misma base $\overline{BC}$, entonces DH = AB = 3. Además, $\overline{AD}$ resulta paralelo a $\overline{BC}$; AD = BH = 2 y de la semejanza entre los triángulos BEC y DEA:

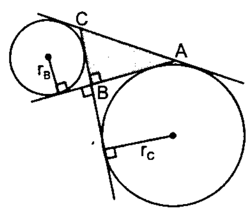
$$\frac{EP}{EQ} = \frac{BC}{AD} \Rightarrow \frac{EP}{QP - EP} = \frac{BC}{AD}$$

Luego: $\frac{EP}{3 - EP} = \frac{4}{2} \Rightarrow EP = 2$

$$S_{DEC} = \frac{(BC)(EP)}{2} = \frac{(4)(2)}{2} \quad \therefore S_{BEC} = 4 \text{ cm}^2$$

7. Los radios de dos circunferencias exteriores miden 3 y 8 cm, respectivamente, siendo las tangentes interiores comunes perpendiculares entre sí. Hallar el área del triángulo que forman las dos tangentes interiores y una tangente exterior común.

Resolución:



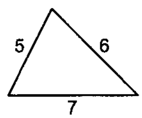
El triángulo formado, ABC, es recto en B y las circunferencias son exinscritas relativas a los catetos

$S_{ABC} = r_a r_c = (3)(8) \Rightarrow S_{ABC} = 24$ cm^2

8. Las longitudes de los lados de un triángulo son 5; 6 y 7 cm. Hallar las longitudes del inradio y circunradio.

Resolución:

En este tipo de problema se trata de relacionar las fórmulas de áreas. Así, por Herón:



$S = \sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)} \Rightarrow S = 6\sqrt{6}$ cm^2

$p = \frac{5+6+7}{2} \Rightarrow p = 9$

Cálculo del inradio r: pr = S

Luego: $9r = 6\sqrt{6} \Rightarrow r = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ cm

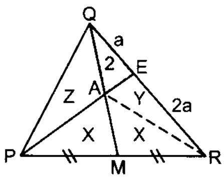
Cálculo del circunradio R: $\dfrac{abc}{4R} = S$

Sustituyendo valores numéricos:

$\dfrac{5\times6\times7}{4R} = 6\sqrt{6} \Rightarrow R = \dfrac{35\sqrt{6}}{24}$ cm

9. En un triángulo PQR, la mediana $\overline{QM}$ corta a la ceviana interior $\overline{PE}$ en el punto A. Siendo ER = 2(EQ) y el área del $\triangle$QAE, 2 cm^2. Hallar el área del triángulo PQR.

Resolución:



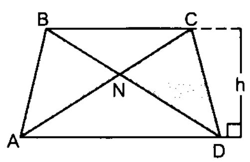
Considerando el gráfico, los triángulos AER y QAE, tienen la misma altura desde el vértice A.
Luego, las áreas son entre sí como sus bases:
$S_{AER} = 2S_{QAE} \Rightarrow Y = 4$
Además, por ser $\overline{AM}$ mediana del $\triangle$APR:
$S_{APM} = S_{AMR} = X$ y en $\triangle$PQR: $S_{PQM} = S_{MQR}$
$\Rightarrow Z + X = X + Y + 2 \Rightarrow Z = Y + 2 \Rightarrow Z = 6$
También, para los triángulos PQR y QPE, que tienen la misma altura desde P, como:
$QR = 3(EQ) \Rightarrow S_{PQR} = 3(S_{QPE})$
Esto es: $S_{PQR} = 3(Z + 2) \Rightarrow S_{PQR} = 3(6 + 2)$
$\therefore S_{PQR} = 24$ cm^2

REGIONES CUADRANGULARES

A manera de introducción, en este apartado veremos algunos problemas que nos muestran propiedades particulares y generales, para luego indicar las fórmulas correspondientes a los cuadriláteros.

1. En un trapecio ABCD, de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se cortan en el punto N. Demostrar que $S_{ABN} = S_{CND}$

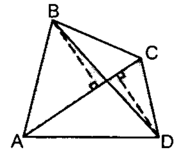
Demostración:



Como los triángulos ABD y ACD son equivalentes por tener la misma base AD e igual altura h:
$S_{ABD} = S_{ACD} \Rightarrow S_{ABN} + S_{AND} = S_{CND} + S_{AND}$
$\boxed{S_{ABN} + S_{CND}}$ para cualquier trapecio.

2. En un trapezoide ABCD, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en el punto P. Demostrar que $S_{ABP}S_{PCD} = S_{BPC}S_{APD}$

Demostración:



Considerando el gráfico adjunto, observamos que los triángulos ABP y BPC tienen la misma altura trazada desde el vértice B. Luego, sus áreas serán entre sí como las respectivas bases:

$\dfrac{S_{ABP}}{S_{BPC}} = \dfrac{AP}{PC}$ ...(1)

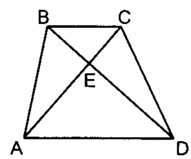
Análogamente para APD y PCD: $\dfrac{S_{APD}}{S_{PCD}} = \dfrac{AP}{PC}$ ...(2)

De (1) y (2): $\boxed{S_{ABP}S_{PCD} = S_{BPC}S_{APD}}$

Se cumple en todo cuadrilátero convexo.

3. En un trapecio ABCD, de bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ se intersecan en el punto E. Demostrar que:
   - $S_{AEB} = \sqrt{S_{BEC}S_{AED}}$
   - $\sqrt{S_{ABCD}} = \sqrt{S_{BEC}} + \sqrt{S_{AED}}$

Demostración:



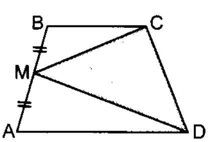
- Sabemos que:
  $S_{AEB} = S_{CED} \wedge (S_{AEB})(S_{CED}) = (S_{BEC})(S_{AED})$
  $\Rightarrow (S_{AEB})^2 = (S_{BEC})(S_{AED}) \quad \therefore S_{AEB} = \sqrt{(S_{BEC})(S_{AED})}$
- Para el trapecio:
  $S_{ABCD} = S_{BEC} + S_{AEB} + S_{CED} + S_{AED}$
  Con lo demostrado:
  $S_{ABCD} = S_{BEC} + 2\sqrt{(S_{BEC})(S_{AED})} + S_{AED}$
  $\Rightarrow S_{ABCD} = (\sqrt{S_{BEC}} + \sqrt{S_{AED}})^2$
  $\therefore \sqrt{S_{ABCD}} = \sqrt{S_{BEC}} + \sqrt{S_{AED}}$

Estas dos relaciones son válidas para todo trapecio.

4. En todo trapecio, el área del triángulo que tiene por vértices: al punto medio de uno de los lados no paralelos y los vértices del lado opuesto, es la mitad del área total.

Demostración:

Así, para el trapecio ABCD, se tiene: $S_{MCD} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$



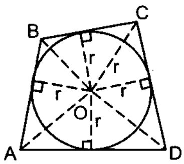
Llamando "d" a la distancia de M a $\overline{CD}$, se tiene:

$$S_{MCD} = \frac{(CD)d}{2} \quad ...(1)$$

Pero, por lo anterior: $(CD)d = S_{ABCD}$ ...(2)

De (2) en (1): $S_{MCD} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$

5. En todo cuadrilátero circunscrito (o circunscriptible) a una circunferencia, el área es igual al producto del semiperímetro y el radio de dicha circunferencia.



Demostración:

En el gráfico:

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{AOD}$$

$$S_{ABCD} = \frac{(AB)(r)}{2} + \frac{(BC)(r)}{2} + \frac{(CD)(r)}{2} + \frac{(AD)(r)}{2}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \left(\frac{AB + BC + CD + AD}{2}\right)r$$

Siendo la expresión en el paréntesis el semiperímetro p: $\boxed{S_{ABCD} = pr}$

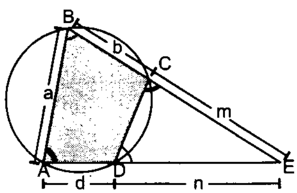
6. **Teorema de Brahmagupta.** El área de todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, es igual a la raíz cuadrada del producto de las diferencias del semiperímetro con cada lado.

Demostración:

Así, para el cuadrilátero ABCD, donde:

$p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$ se tiene:

$$\boxed{S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}$$



En efecto, sabemos que $m\angle DCE \cong m\angle A$ y $m\angle CDE \cong m\angle B$, por lo que los triángulos ABE y CDE son semejantes.

Luego: $\dfrac{S_{ABE}}{S_{CDE}} = \dfrac{a^2}{c^2} \Rightarrow \dfrac{S_{ABE} - S_{CDE}}{S_{CDE}} = \dfrac{a^2 - c^2}{c^2}$

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{CDE}} = \frac{a^2 - c^2}{c^2} \Rightarrow S_{ABCD} = \left(\frac{a^2 - c^2}{c^2}\right)S_{CDE} \quad ...(1)$$

Cálculo del área S_{CDE}. Para el $\triangle CDE$, haremos uso del teorema de Herón:

$$S_{CDE} = \sqrt{\left(\frac{m+n+c}{2}\right)\left(\frac{m+n-c}{2}\right)\left(\frac{m+c-n}{2}\right)\left(\frac{n+c-m}{2}\right)} \quad ...(2)$$

De la semejanza entre los triángulos CDE y ABE:

$$\frac{m}{d+n} = \frac{c}{a} = \frac{n}{b+m}$$

De lo que deducimos:

$$(m+n) = \frac{c(b+d)}{a-c}; \quad (m-n) = \frac{c(d-b)}{a+c}$$

Luego:

$$\left.\begin{aligned} \frac{m+n+c}{2} &= \frac{c}{a-c}\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right) \\ \frac{m+n-c}{2} &= \frac{c}{a-c}\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right) \\ \frac{m+n-c}{2} &= \frac{c}{a+c}\left(\frac{a+c+d-b}{2}\right) \\ \frac{n+c-m}{2} &= \frac{c}{a+c}\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right) \end{aligned}\right\} (*)$$

Con (*) en (2), ordenado:

$$S_{CDE} = \sqrt{\frac{c^4}{(a^2-c^2)^2}\left(\frac{b+c+d-a}{2}\right)\left(\frac{a+c+d-b}{2}\right)\left(\frac{a+b+d-c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c-d}{2}\right)}$$

En función del semiperímetro p del cuadrilátero ABCD:

$$S_{CDE} = \left(\frac{c^2}{a^2 - c^2}\right)\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad ...(3)$$

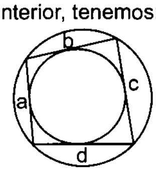
Finalmente, sustituyendo (3) en (1):

$$\therefore S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

7. **Teorema de Leudesdorf.** El área de todo cuadrilátero bicéntrico es igual a la raíz cuadrada del producto de las longitudes de sus cuatro lados.

Demostración:

Por el teorema anterior, tenemos:



$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad ...(1)$$

Y con el teorema de Pitot: $a + c = b + d$

Siendo: $p = \dfrac{a+b+c+d}{2}$

Luego: $p = a + c \wedge p = b + d$

Entonces: $p - a = cp - b = d$
$p - c = a \wedge p - d = b$

Sustituyendo en (1): $\boxed{S = \sqrt{abcd}}$

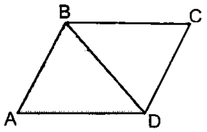
◀ COMPARACIÓN DE REGIONES CUADRANGULARES

1. Las áreas de dos paralelogramos son entre sí como los productos de sus bases y sus respectivas alturas.
2. Si dos paralelogramos tienen congruentes un lado, entonces las áreas son entre sí como sus respectivas alturas.
3. Si dos paralelogramos tienen congruentes una altura, las áreas son entre sí como son sus respectivas bases.

4. Dos paralelogramos que tienen congruentes un lado y sus respectivas alturas, son equivalentes.
5. Las áreas de dos trapecios son entre sí como los productos de sus medianas y alturas.
6. Si dos trapecios tienen sus medianas congruentes, las áreas son entre sí como las alturas.
7. Si dos trapecios tienen sus alturas congruentes, las áreas se encuentran en la misma relación que las medianas.
8. Dos trapecios que tienen medianas y alturas, respectivamente congruentes son equivalentes.
9. Si dos cuadriláteros son semejantes, las áreas son entre sí como el cuadrado de la respectiva razón de semejanza.

Propiedades

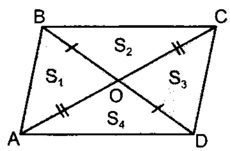
1. En todo paralelogramo una diagonal determina dos regiones equivalentes.
   Así:



$\triangle ABD = \triangle CDB$:

$\therefore\ \boxed{S_{ABD} = S_{CDB} = \frac{S_{ABCD}}{2}}$

2. En todo paralelogramo al trazar las dos diagonales se determinan cuatro regiones equivalentes. Así:
   En el paralelogramo ABCD, para el $\triangle BCD$, como $\overline{CO}$ es mediana.



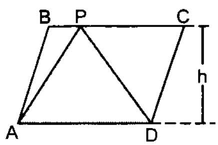
$S_2 = S_3$ y, en $\triangle ACD$: $S_3 = S_4$

Además: $\overline{BO}$ es mediana del $\triangle ABC \Rightarrow S_1 = S_2$

Luego: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = \frac{S_{ABCD}}{4}$

3. En todo paralelogramo, el área de la región triangular determinada al unir un punto cualquiera de un lado con los vértices correspondientes al lado opuesto, equivale a la mitad de la del cuadrilátero.

Demostración:

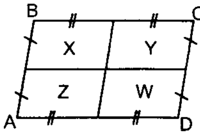


Consideremos el paralelogramo ABCD y P un punto cualquiera del lado BC.

Se tienen: $S_{APD} = \frac{(AD)(h)}{2}$ y $S_{ABCD} = (AD)(h)$

$\boxed{S_{APD} = \frac{S_{ABCD}}{2}}$

4. Al trazar los segmentos que unen los puntos medios de los lados opuestos de todo paralelogramo, se determinan cuatro regiones equivalentes.
   Así, en el paralelogramo ABCD, demuestre que:

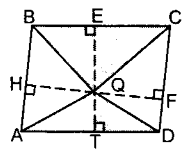


$\boxed{X = Y = Z = W = \frac{S_{ABCD}}{4}}$

5. Si se une un punto interior a un paralelogramo con los cuatro vértices, se determinan cuatro triángulos, donde la suma de áreas correspondientes a aquellos que tienen por bases dos lados opuestos del cuadrilátero, es igual a la suma de las otras dos.

Demostración:

Sea Q un punto interior cualquiera al paralelogramo ABCD.



Del gráfico: $S_{AQB} + S_{COD} = \frac{AB(QH)}{2} + \frac{CD(QF)}{2}$

Siendo: AB = CD, se puede escribir:

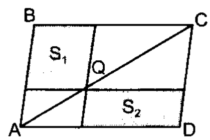
$S_{AQB} + S_{CQD} = \frac{AB(QH + QF)}{2} = \frac{AB(HF)}{2} = \frac{S_{ABCD}}{2}$

Esto es: $S_{AQB} + S_{CQD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$ ...(1)

En forma análoga: $S_{BOC} + S_{AQD} = \frac{S_{ABCD}}{2}$ ...(2)

De (1) y (2): $S_{AQB} + S_{CQD} = S_{BQC} + S_{AQD}$

6. Si por un punto cualquiera de una diagonal de un paralelogramo, se trazan dos paralelas a los lados, entonces los paralelogramos obtenidos son equivalentes (teorema de Gnomon).
   Así:

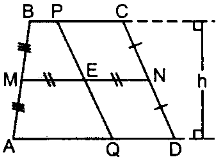


Sea ABCD el paralelogramo y O, el punto en mención. Se cumple que: $\boxed{S_1 = S_2}$

7. Toda recta que pase por el punto medio de la mediana de un trapecio e interseque a las bases, determina dos regiones equivalentes.
   Sea E punto medio de la mediana $\overline{MN}$ del trapecio ABCD, si P y Q son puntos cualesquiera de las bases, entonces:

$\boxed{S_{ABPQ} = S_{QPCD} = \frac{S_{ABCD}}{2}}$

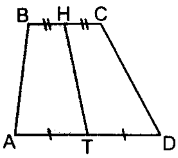
Demostración:



Se tienen: $S_{ABPQ} = (ME)h \wedge S_{QPCD} = (EN)h$
Siendo: $ME = EN \Rightarrow S_{ABPQ} = S_{QPCD}$

8. El segmento que une los puntos medios de las bases de todo trapecio determina dos regiones equivalentes.

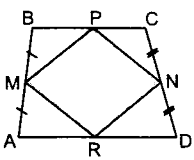
   Así, para el trapecio ABCD, H y T son puntos medios de las bases.



$\therefore \boxed{S_{ABHT} = S_{THCD} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}}$

9. El área de la región que encierra el cuadrilátero que tiene por vértices los puntos medios de los lados no paralelos y dos puntos cualesquiera de las bases de un trapecio, equivale a la mitad del área de dicho trapecio.

   Considerando el trapecio ABCD, donde M y N son puntos medios de los lados no paralelos y, además, P y R son puntos cualesquiera en las bases:

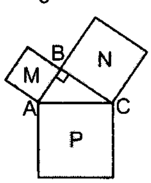


$\therefore \boxed{S_{MPNR} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Los antiguos griegos conocían el teorema de Pitágoras de la manera siguiente: "En todo triángulo, la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos es igual al área del cuadrado construido sobre la hipotenusa".

Así, para el $\triangle ABC$, donde M, N y P son las áreas cuadradas de las regiones indicadas, demostraremos que:



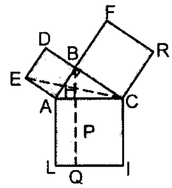
$\boxed{M + N = P}$

Demostración:
Del gráfico: $m\angle EAC \cong m\angle BAL$, luego
$m\angle EAC \cong m\angle BAL$, por lo que $S_{EAC} = S_{BAL}$ ...(1)

Además, para el $\triangle EAC$, la longitud de la altura trazada desde el vértice C es igual a $\overline{AB}$. Por lo que:

$$S_{EAC} = \frac{(AE)(AB)}{2}$$

De lo que deducimos que: $S_{ABDE} = 2S_{EAC}$ ...(2)
En forma análoga, para el $\triangle BAL$, la longitud de la altura, que parte del vértice B es igual a $\overline{AH}$.



Luego: $S_{BAL} = \dfrac{(AL)(AH)}{2} \Rightarrow S_{ALOH} = 2S_{BAL}$ ...(3)

En seguida, de (1), (2) y (3): $S_{ALQH} = S_{ABDE}$ ...(4)

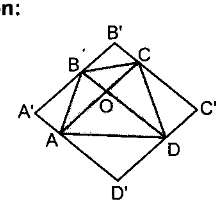
Análogamente, se demuestra que: $S_{HQTC} = S_{BCRF}$ ...(5)

Finalmente, sumando miembro a miembro las relaciones (4) y (5):
$S_{ALIQH} + S_{HQTC} = S_{ABDE} + S_{BCRF}$
De donde: $S_{ALTC} = S_{ABDE} + S_{BCRF}$

Aplicaciones:

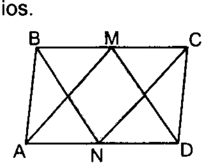
1. El área de un trapezoide es 18 cm^2. Hallar el área del cuadrilátero que se forma al trazar paralelas a las diagonales del trapezoide por los cuatro vértices.

   Resolución:

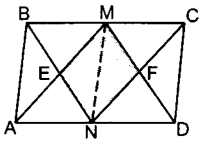


   Sea el trapezoide ABCD y A'B'C'D' el obtenido con las paralelas.
   Dato: $S_{ABCD} = 18$ cm^2
   Como AA'B'C y ACC'D son paralelogramos, sabemos que: $S_{AA'B'C} = 2(S_{ABC})$ y $S_{ACC'D} = 2(S_{ACD})$
   Sumando miembro a miembro y antecediendo el factor común en el segundo miembro:
   $S_{AA'B'C'} + S_{ACC'D} = 2(S_{ABC} + S_{ACD})$
   Esto es: $S_{A'B'C'D'} = 2(S_{ABCD})$
   y con el dato: $S_{A'B'C'D'} = 2(18) = 36$ cm^2

2. Hallar el área de la región sombreada, si el área del paralelogramo ABCD es K, además M y N son puntos medios.



Resolución:



EMFN es un paralelogramo.

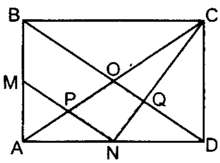
Del gráfico: $S_{ABMN} = \dfrac{S_{ABCD}}{2} \Rightarrow S_{ABMN} = \dfrac{K}{2}$

Además: $S_{NEM} = \dfrac{S_{ABMN}}{4} \Rightarrow S_{NEM} = \dfrac{K}{8}$

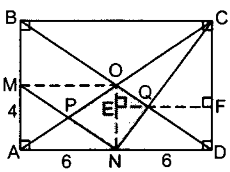
Finalmente: $S_{EMFN} = 2S_{NEM} = 2\left(\dfrac{K}{8}\right)$

$\therefore\ S_{EMFN} = \dfrac{K}{4}$

3. En la figura, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$, respectivamente. Los lados del rectángulo ABCD, miden: AB = 8 cm y AD = 12 cm. Hallar el área del cuadrilátero NPOQ.



Resolución:



Del gráfico: $S_{NPOQ} = S_{NOP} + S_{NOQ}$ ...(1)

Como: $S_{NPO} = \dfrac{S_{AMON}}{4} = \dfrac{6(4)}{4} \Rightarrow S_{NPO} = 6\ cm^2$ ...(2)

Para el S_{NOQ}, debemos hallar previamente EQ.

De la semejanza de los triángulos NOQ y CQD:

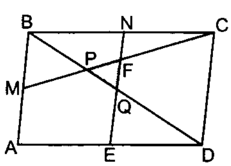
$\dfrac{EQ}{QF} = \dfrac{ON}{DC} \Rightarrow \dfrac{EQ}{6-EQ} = \dfrac{4}{8} \Rightarrow EQ = 2$

Luego: $S_{NOQ} = \dfrac{ON(EQ)}{2} = \dfrac{4(2)}{2} \Rightarrow S_{NOQ} = 4\ cm^2$ ...(3)

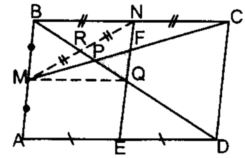
Finalmente, con (2) y (3) en (1):

$S_{NPOQ} = 6 + 4 \quad \therefore\ S_{NPOQ} = 10\ cm^2$

4. En la figura, se sabe que el área del paralelogramo ABCD es Z, AM = MB, BN = NC y AE = ED. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:



Al trazar $\overline{MN}$ y $\overline{MQ}$, como MBNQ es un paralelogramo, MR = RN y NF = FQ, deducimos que P es baricentro del $\triangle$MQN.

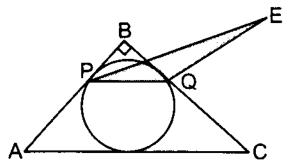
Luego, sucesivamente tenemos:

$S_{PQF} = \dfrac{1}{6}(S_{MQN}) = \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}S_{MBNQ}\right)$

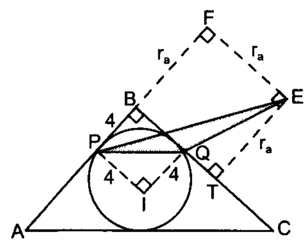
$\Rightarrow S_{PQF} = \dfrac{1}{12}(S_{MBNQ})$ y a continuación:

$S_{PQF} = \dfrac{1}{12}\left(\dfrac{1}{4}S_{ABCD}\right) = \dfrac{1}{48}(S_{ABCD}) \quad \therefore\ S_{PQF} = \dfrac{Z}{48}$

5. Hallar el área de la región sombreada, si E es un excentro del triángulo rectángulo ABC, cuyo inradio mide 4 cm y P, Q son puntos de tangencia.



Resolución:



Con los trazos indicados, donde r_a es el exradio relativo a $\overline{BC}$, se tiene:

$S_{PQE} = S_{PFEQ} - S_{PFE}$, siendo:

$S_{PFEQ} = S_{PBQ} + S_{BFEQ}$

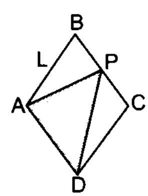
En lo anterior: $S_{PQE} = S_{PBQ} + S_{BFEQ} - S_{PFE}$

$\Rightarrow S_{PQE} = \dfrac{PB(BQ)}{2} + \left(\dfrac{BQ + EF}{2}\right)BF - \dfrac{PF(EF)}{2}$

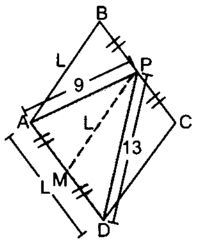
$\Rightarrow S_{PQE} = \dfrac{4 \times 4}{2} + \left(\dfrac{4 + r_a}{2}\right)r_a - \dfrac{(4 + r_a)r_a}{2}$

$\therefore\ S_{PQE} = 8\ cm^2$

6. La figura, ABCD es un rombo, P es punto medio de $\overline{BC}$, AP = 9 m y DP = 13 m. Hallar el área del rombo.



Resolución:



Sabemos que: $S_{ABCD} = 2(S_{APD})$ ...(1)

En el $\triangle APD$, trazamos la mediana $\overline{PM}$.

Luego $\overline{PM} // \overline{AB}$ y PM = AB = L = AD.

Por el teorema de la mediana en dicho triángulo:

$2L^2 + \frac{L^2}{2} = 9^2 + 13^2 \Rightarrow L = 10$

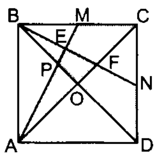
Por el teorema de Herón para el S_{APD}; hallamos previamente: $p = \frac{9+13+10}{2} = 16$

Entonces: $S_{APD} = \sqrt{16(16-9)(16-13)(16-10)}$

$S_{APD} = 12\sqrt{14}\ m^2$

Sustituyendo en (1): $S_{ABCD} = 24\sqrt{14}\ m^2$

7. En el cuadrado ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente. Si AB = a, hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

El área de la región sombreada es igual a la suma de las áreas de las regiones AMC y BND, menos el área de la región OPEF. Siendo:

$S_{AMC} = \frac{1}{2}(S_{ABC}) = \frac{1}{2}\left(\frac{S_{ABCD}}{2}\right)$

$\Rightarrow S_{AMC} = \frac{1}{4}(S_{ABCD}) = \frac{a^2}{4} \Rightarrow S_{AMC} = \frac{a^2}{4} = S_{BND}$

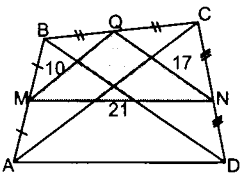
Además, por propiedad: $S_{OPEF} = \frac{a^2}{20}$

Luego: $S_{sombreada} = S_{AMC} + S_{BND} - S_{QPEF}$

$S_{sombreada} = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{20} \quad \therefore\ S_{sombreada} = \frac{9a^2}{20}$

8. Las diagonales de un trapezoide miden 20 y 34 cm. Y el segmento que une los puntos medios de dos lados opuestos mide 21 cm. Hallar el área del trapezoide.

Resolución:



Sea el trapezoide ABCD, donde AC = 20 cm, BD = 34 cm y MN = 21 cm. Tomando Q, punto medio de $\overline{BC}$, al trazar $\overline{MQ}$ y $\overline{NQ}$, según teoría, sabemos que: $S_{ABCD} = 4(S_{MQN})$ ...(1)

Siendo, en el $\triangle ABC$: $MQ = \frac{AC}{2}$

$\Rightarrow MQ = 10$ cm

y en el $\triangle BCD$: $QN = \frac{BD}{2} \Rightarrow QN = 17$ cm

Luego, por el teorema de Herón, para el S_{MQN}, donde: $p = \frac{10+17+21}{2} = 24$

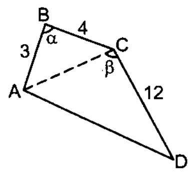
$S_{MQN} = \sqrt{24(24-10)(24-17)(24-21)}$

$S_{MQN} = 84\ cm^2$

Reemplazando en (1): $S_{ABCD} = 336\ cm^2$

9. En un cuadrilátero ABCD, AB = 3 m, BC = 4 m y CD = 12 m. Hallar el valor de $\overline{AD}$, sabiendo que el área de la región ABCD es máxima.

Resolución:



S_{ABCD} será máxima, cuando S_{ABC} y S_{ACD} lo sean.

Luego: S_{ABC} máxima implica: $\alpha = 90°$

Entonces: $(AC)^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow AC = 5$

S_{ACD} máxima implica: $\beta = 90°$

$\Rightarrow (AD)^2 = (AC)^2 + (CD)^2 \Rightarrow (AD)^2 = 5^2 + 12^2$

$\therefore$ AD = 13

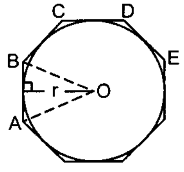
REGIONES POLIGONALES

Polígonos circunscritos

En todo polígono circunscrito a una circunferencia, el área se puede expresar como el producto del semiperímetro y el radio de la circunferencia inscrita.

Demostración:

En efecto, sea ABCDE... un polígono convexo de n lados circunscrito a una circunferencia de centro O y radio r.



Luego: $S_{polígono} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + \ldots$ (n sumandos)

$S_{polígono} = \frac{AB(r)}{2} + \frac{BC(r)}{2} + \frac{CD(r)}{2} + \ldots$

$S_{polígono} = \left(\frac{AB + BC + CD + \ldots}{2}\right)r$

Donde la expresión dentro del paréntesis significa el semiperímetro p, del polígono:

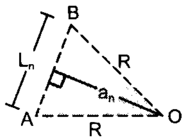
$\therefore\ \boxed{S_{polígono} = pr}$

Polígonos regulares

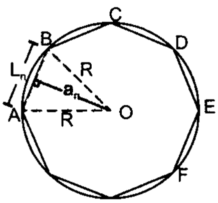
En todo polígono regular, el área es igual al producto del semiperímetro por su apotema.

Demostración:

Consideremos un polígono regular de "n" lados. Siendo L_n y a_n, las longitudes del lado y apotema, respectivamente. $S_{\text{polígono regular}} = n(S_{\triangle AOB})$



(Elemento fundamental del polígono regular).



Luego: $S_{\text{polígono regular}} = n\left(\frac{L_n a_n}{2}\right)$

Esto es: $S_{\text{polígono regular}} = \left(\frac{nL_n}{2}\right)a_n$

Siendo la expresión dentro del paréntesis, el semiperímetro p del polígono.

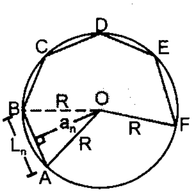
$\therefore\ \boxed{S_{\text{polígono regular}} = pa_n}$

Sector poligonal regular

Es la región del plano que encierra una línea poligonal regular, llamada base y los radio a los extremos de la circunferencia circunscrita a dicha línea.

Teorema. El área de todo sector poligonal regular es igual al producto del semiperímetro de la base y su apotema.

Demostración:



Sea el sector poligonal ABC de "m" lados, originado por una poligonal de apotema an y longitud de lado L_n; el área S del sector poligonal será "m" veces el de la región AOB. Luego.

$S = m\left(\frac{L_n a_n}{2}\right) \Rightarrow S = \left(\frac{mL_n}{2}\right)a_n$

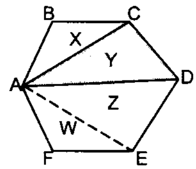
Donde la expresión en el paréntesis es el semiperímetro p' de la poligonal.

$\boxed{S = p'a_n}$

Teoremas

1. Las áreas de dos polígonos semejantes son entre sí como los cuadrados de cualquier par de elementos homólogos.

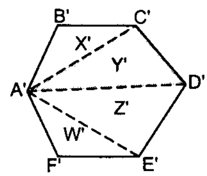
Demostración:



Sean, por ejemplo, los polígonos semejantes ABCDEF y A'B'C'D'E'F' con razón de semejanza k. Tracemos todas las diagonales correspondientes a los vértices de un par de ángulos congruentes, a fin de tener triángulos semejantes.

Luego: $\frac{X}{X'} = \frac{Y}{Y'} = \frac{Z}{Z'} = \frac{W}{W'} = k^2$

Por propiedad de proporciones: $\frac{X+Y+Z+W}{X'+Y'+Z'+W'} = k^2$



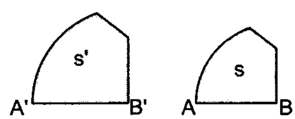
De donde: llamando S y S' las áreas totales:

$X + Y + Z + W = S \quad \wedge \quad X' + Y' + Z' + W' = S'$

$\therefore\ \frac{S}{S'} = k^2$

Esto es: $\frac{S}{S'} = \frac{AB^2}{A'B'^2} = \frac{BC^2}{B'C'^2} = \frac{CD^2}{C'D'^2}$

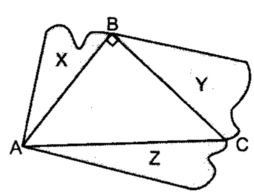
Generalización: Para cualquier par de figuras cerradas semejantes, las áreas de las superficies que determinan, son entre sí como los cuadrados de sus elementos homólogos. Así, por ejemplo, para las figuras semejantes adjuntas:



$\frac{S}{S} = \frac{AB^2}{A'B'^2}$

2. Si los lados de un triángulo rectángulo son líneas homólogas de figuras semejantes construidas sobre ellos, entonces la suma de las áreas de las regiones construidas sobre los catetos es igual al área de la región apoyada en la hipotenusa.

Demostración:



Sea el $\triangle ABC$, donde X, Y, Z representan las áreas en mención. De la generalización anterior podemos escribir: $\dfrac{X}{AB^2} = \dfrac{Y}{BC^2} = \dfrac{Z}{AC^2}$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{X+Y}{(AB)^2+(BC)^2} = \frac{Z}{(AC)^2}$$

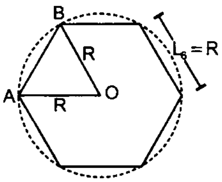
Siendo: $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2 \quad \therefore \boxed{X+Y=Z}$

Aplicaciones:

1. Determinar las fórmulas para el cálculo de áreas de los polígonos regulares:
   a) Hexágono b) Octógono c) Dodecágono
   En función del radio R de la circunferencia circunscrita.

Resolución:

a) Hexágono regular

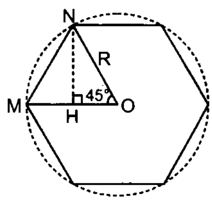


$\triangle AOB$ (equilátero): $S_6 = 6(S_{\triangle AOB}) = 6\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore S_6 = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{2}$

Expresión en la que R puede sustituirse por L_6.

b) Octógono regular



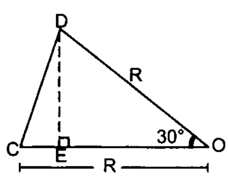
Del gráfico: $S_8 = 8(S_{\triangle MNO})$

$\Rightarrow S_8 = 8\left[\dfrac{OM(NH)}{2}\right] = 4R(NH) \quad ...(1)$

$\measuredangle NHO$: $NH = \dfrac{ON}{\sqrt{2}} \Rightarrow NH = \dfrac{R}{\sqrt{2}}$

En (1): $S_8 = 4R\left(\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right) \quad \therefore S_8 = 2R^2\sqrt{2}$

c) Dodecágono regular



Con el $\triangle ODC$, elemento fundamental de este polígono: $S_{12} = 12(S_{\triangle ODC})$, es decir:

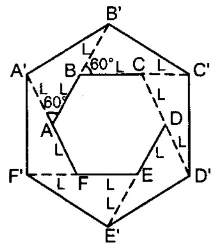
$S_{12} = 12\left[\dfrac{(OC)(DE)}{2}\right] = 6R(DE) \quad ...(1)$

Del $\measuredangle OED$: $DE = \dfrac{OD}{2} \Rightarrow DE = \dfrac{R}{2}$

Sustituimos en (1): $S_{12} = 6R\left(\dfrac{R}{2}\right) \quad \therefore S_{12} = 3R^2$

2. El lado de un hexágono regular es L. Se prolongan los lados en un mismo sentido y una longitud igual a L. Hallar el área del polígono que tiene por vértices los extremos de dichas prolongaciones.

Resolución:



Sea ABCDEF el polígono original y A'B'C'D'E'F' el de los extremos de las prolongaciones. Notemos que el $\triangle AA'B'$, es recto en A', por ser:

$AB' = 2AA'$ y $m\angle A'AB' = 60°$

Luego: $A'B' = L\sqrt{3}$, es la longitud del lado del hexágono regular A'B'C'... F'.

Por el problema anterior el área será:

$S' = \dfrac{3}{2}(L\sqrt{3})^2(\sqrt{3}) \qquad S' = \dfrac{9}{2}L^2\sqrt{3}$

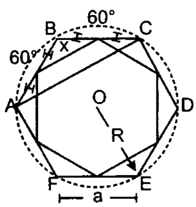
3. Hallar el área del hexágono que tiene por vértices los puntos medios de los lados de un hexágono regular, cuyo lado mide "a".

Resolución:

Sea ABC... el hexágono mayor, de lado "a".

La longitud del lado del otro es x.

Con el gráfico:



$\triangle ABC$: $x = \dfrac{AC}{2}$ (base media)

Siendo: $AC = L_3 = R\sqrt{3} = a\sqrt{3}$

Luego: $x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Entonces, para el área S_x: $S_x = \dfrac{3}{2}(x^2)(\sqrt{3})$

$S_x = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2(\sqrt{3}) = \dfrac{9}{8}(a^2)(\sqrt{3})$

4. Hallar el área de un octógono regular de 1 m de lado.

Resolución:

Sabemos que el área S_8 del octógono regular, en función del radio R de la circunferencia circunscrita, es: $S_8 = 2R^2\sqrt{2}$

Siendo: $L_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}} = 1 \Rightarrow R = \dfrac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$

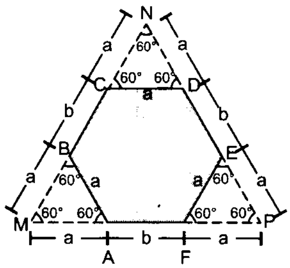
Sustituyendo en S_8:

$$S_8 = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right)^2\sqrt{2} \Rightarrow S_8 = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$$

$\therefore\ S_8 = 2(1+\sqrt{2})\ m^2$

5. Un hexágono ABCDEF tiene sus ángulos congruentes y sus lados son tales que: AB = CD = EF = a y BC = DE = FA = b. Siendo a > b, calcular el área de dicho hexágono.

Resolución:



Cada ángulo exterior del hexágono mide: $\dfrac{360°}{6} = 60°$. Al prolongar los lados se obtienen los triángulos CND, EPF, AMB y MNP, equiláteros.

$S_{hexágono} = S_{MNP} - S_{MBA} - S_{CND} - S_{FEP}$

Luego:

$$S_{hexágono} = (2a+b)^2\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

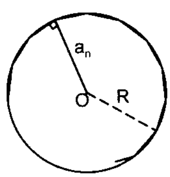
De donde: $S_{hexágono} = (a^2 + 4ab + b^2)\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

◀ REGIONES CIRCULARES

Círculo

Es la región del plano limitada por una circunferencia.

Teorema. El área de todo círculo es igual al semiproducto de la longitud de su circunferencia y el radio.



Demostración:

En efecto, sabemos que el área del polígono regular es igual al producto del semiperímetro y apotema. Aumentando indefinidamente la cantidad de lados del polígono, su perímetro se aproxima cada vez más a la longitud de la circunferencia L.

Luego: $S_{polígono\ regular} = pa_n$ ...(1)

Cuando $n \to \infty$, el área del polígono regular: $S_{polígono} \to S_{círculo}$

$a_n \to R$ y $p \to L/2$. De modo que al sustituir en (1):

$$S_{círculo} = \frac{LR}{2} \qquad ...(2)$$

Corolario. El área de todo círculo es directamente proporcional al cuadrado de su radio. Para esto, reemplazando $L = 2\pi R$, en la expresión (2):

$$S_{círculo} = \frac{(2\pi R)R}{2} \quad \therefore\ \boxed{S_{círculo}: \pi R^2}$$

Nota

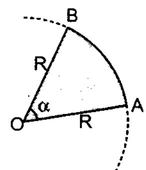
Además, en función del diámetro D: $\boxed{S_{círculo} = \dfrac{\pi D^2}{4}}$

Sector circular

Se denomina así a la porción de círculo limitada por dos radios.

Teorema. El área de todo sector circular es igual al semiproducto de su respectivo arco y el radio.

$$S_{sector\ AOB} = \frac{(L_{\overset{\frown}{AB}})R}{2}$$



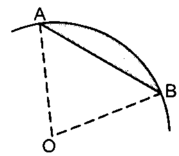
La demostración se deja al lector. (Ver sector poligonal regular).

Corolario. El área de todo sector circular de radio R y ángulo central α, es: $\boxed{S_{sector\ AOB} = \dfrac{\alpha\pi R^2}{360°}}$

Segmento circular

Es la porción de círculo limitada por una cuerda y su respectivo arco.

Así:



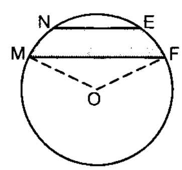
Para el área del segmento

$$S_{segmento\ AB} = S_{sector\ AOB} - S_{triángulo\ AOB}$$

Zona o faja circular

Es la porción de círculo, limitada por cuerdas paralelas.

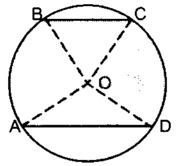
a) Las bases a un mismo lado del centro:



$\overline{NE}$ y $\overline{MF}$: bases

$$S_{zona\ MNEF} = S_{sector\ MOF} - S_{segmento\ NE} - S_{triángulo\ MOF}$$

b) Las bases a diferentes lados del centro:

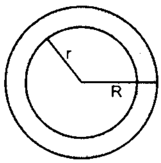


$\overline{BC}$ y $\overline{AD}$: bases

$S_{\text{zona ABCD}} = S_{\text{sectores (AOB)} \cup \text{(COD)}} + S_{\text{triángulos (BOC)} \cup \text{(AOD)}}$

Aro o corona circular

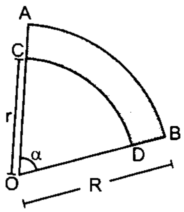
Se llama así a la región del plano, exterior a la menor de dos circunferencias concéntricas e interior a la mayor.



$$\boxed{S_{\text{corona}} = \pi(R^2 - r^2)}$$

Trapecio circular

Es la porción de corona circular, determinada al trazar dos radios mayores.

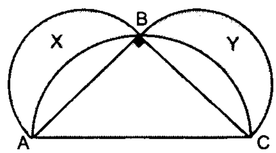


$S_{\text{trapecio ABCD}} = S_{\text{sector AOB}} - S_{\text{sector COD}}$

$$\therefore \boxed{S_{\text{trapecio ABCD}} = \frac{\alpha\pi}{360°}(R^2 - r^2)}$$

Lúnulas de Hipócrates

Al tomar los lados de un triángulo rectángulo como diámetro de semicircunferencias, se cumple:



1.° $\boxed{X + Y = S_{\Delta ABC}}$

Demostración:

Por un teorema anterior:

$S_{\text{semicírculo AB}} + S_{\text{semicírculo BC}} = S_{\text{semicírculo AC}}$

$(X + S_{\text{segmento AB}}) + (Y + S_{\text{segmento BC}}) =$

$S_{\text{segmetno AB}} + S_{\text{segmento BC}} + S_{\Delta ABC}$

De donde, efectivamente: $X + Y = S_{\Delta ABC}$

2.° $\boxed{W - Z = S_{\Delta ABC}}$

Demostración:

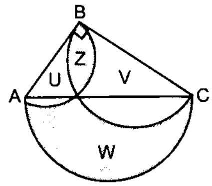
Por el teorema utilizando en el primer caso:

$S_{\text{semicírculo AB}} + S_{\text{semicírculo BC}} = S_{\text{semicírculo AC}}$

$(Z + U + S_{\text{segmento AH}}) + (Z + V + S_{\text{segmento HC}}) =$

$W + S_{\text{segmento AH}} + S_{\text{segmento HC}}$

Ordenando convenientemente a fin de tener S_{ABC} y simplificado:



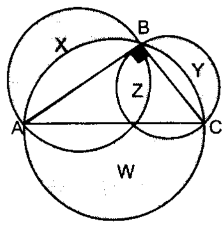
$(Z + U + V) + Z = W$

$S_{\Delta ABC} + Z = W \quad \therefore S_{\Delta ABC} = W - Z$

Considerando las circunferencias, cuyos diámetros son los lados del triángulo rectángulo:

3.° $\boxed{W = X + Y + Z}$

Demostración:



Por las relaciones anteriores:

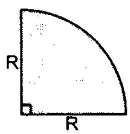
$W - Z = S_{\Delta ABC} \wedge X + Y = S_{\Delta ABC}$

De donde, al igualar los primeros miembros:

$W - Z = X + Y \Rightarrow W = X + Y + Z$

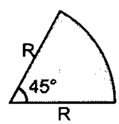
Nota

En algunos problemas donde no sea necesario resaltar el ángulo central del sector circular al que hagamos referencia escribiremos las expresiones directas para el área, como una fracción del círculo correspondiente. Así, por ejemplo:



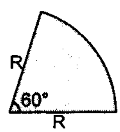
Un cuarto de círculo

$\frac{\pi R^2}{4}$



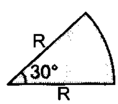
Un octavo de círculo

$\frac{\pi R^2}{8}$



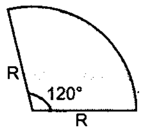
Un sexto de círculo

$\frac{\pi R^2}{6}$



Un doceavo de círculo

$\frac{\pi R^2}{12}$



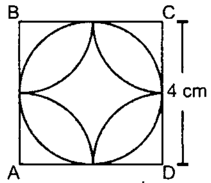
Un tercio de círculo

$$\frac{\pi R^2}{3}$$

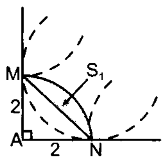
Ya que: $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$; $\frac{45°}{360°} = \frac{1}{8}$; $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$, etc.

Aplicaciones:

1. Hallar el área de la región sombreada, si los vértices del cuadrado ABCD son centros de los cuartos de circunferencia de igual radio.



Resolución:



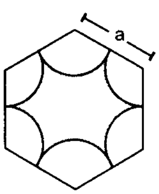
Se tiene: $S_{total} = 8S_1$ ...(1)

Siendo: $S_1 = S_{sector\ MAN} - S_{triángulo\ MAN}$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\pi(2^2)}{4} - \frac{2(2)}{2} \Rightarrow S_1 = (\pi - 2)\ cm^2$$

Reemplazando en (1): $S_{total} = 8(\pi - 2)\ cm^2$

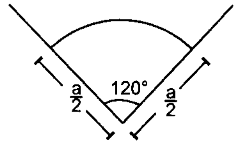
2. Los vértices de un hexágono regular son los centros de seis circunferencias iguales y tangentes (según muestra la figura). Hallar el área de la región sombreada en función del lado "a" del hexágono.



Resolución:

El área de la región sombreada es igual a la del hexágono, menos los seis sectores.

Cada sector tiene radio $\frac{a}{2}$ y ángulo central 120°. El área de cada sector es: $S_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$

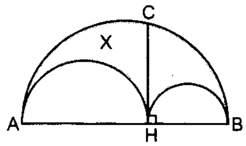


Luego: $S_{sombreada} = S_{hexágono} - 6S_1$

$$S_{sombreada} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - 6\left(\frac{\pi a^2}{12}\right)$$

$$\therefore\ S_{sombreada} = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$$

3. En la figura adjunta, $\overline{AH}$, $\overline{HB}$ y $\overline{AB}$ son diámetros y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Hallar el área de la región sombreada en función de $\overline{CH}$.



Resolución:

Por diferencia, el área X será: $X = S_{\frown AB} - S_{\frown AH} - S_{\frown HB}$

Expresamos las áreas semicirculares en función de los diámetros AH, HB y AB = AH + HB:

$$X = \frac{\pi(AB)^2}{8} - \frac{\pi(AH)^2}{8} - \frac{\pi(HB)^2}{8}$$

$$X = \frac{\pi}{8}[AB^2 - (AH^2 + HB^2)]$$

$$X = \frac{\pi}{8}[(AH + HB)^2 - (AH^2 + HB^2)]$$

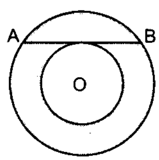
De donde: $X = \frac{\pi}{4}(AH)(HB)$ ...(1)

Además, por relaciones métricas sabemos que:

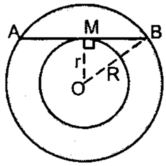
$(AH)(HB) = (CH)^2$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $X = \frac{\pi}{4}(CH)^2$

4. La figura muestra dos circunferencias concéntricas de centro O. $\overline{AB}$ es una cuerda de la mayor tangente a la menor. Hallar el área de la corona en función de $\overline{AB}$.



Resolución:



Se tiene: $S_{corona} = \pi(R^2 - r^2)$ ...(1)

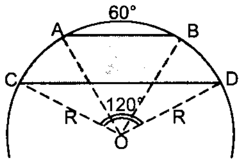
En el $\triangle$MOB: $R^2 - r^2 = MB^2$

Como: $MB = \frac{AB}{2} \Rightarrow R^2 - r^2 = \frac{AB^2}{4}$ ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): $S_{corona} = \frac{\pi}{4}(AB)^2$

5. Hallar el área de una zona del círculo de radio R, sabiendo que las bases son los lados del triángulo equilátero y hexágono regular, inscritos, situados a un mismo lado del centro.

Resolución:



Sea $AB = L_6$ y $CD = L_3 \Rightarrow m\overset{\frown}{AB} = 60°$ y $m\overset{\frown}{CD} = 120°$

Luego:

$S_{zona} = S_{sector\ COD} - S_{segmento\ AB} - S_{triángulo\ COD}$ ...(1)

Siendo: $S_{sector\ COD} = \dfrac{120°\pi R^2}{360°} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

$S_{segmento\ AB} = S_{sector\ AOB} - S_{triángulo\ AOB} = \dfrac{60°\pi R^2}{360°} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

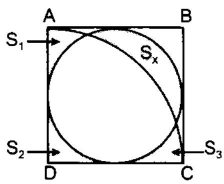
$\Rightarrow S_{segmento\ AB} = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{triángulo\ COD} = \dfrac{R(R)}{2}\text{sen}120° = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

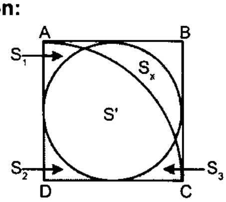
Al sustituir en (1):

$S_{zona} = \dfrac{\pi R^2}{3} - \left(\dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad \therefore S_{zona} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

6. Hallar el área de la región sombreada S_x, sabiendo que la suma de las áreas S_1, S_2 y S_3 es 100 cm². ABCD es cuadrado y D centro del arco AC.



Resolución:



Dato: $S_1 + S_2 + S_3 = 100$ ...(1)

Del gráfico, la longitud del diámetro del círculo es igual a $\overline{AD}$.

Luego: $S_{círculo} = \dfrac{\pi(AD)^2}{4} \Rightarrow S_x + S' = \dfrac{\pi(AD)^2}{4}$ ...(2)

Para el cuarto de círculo ADC:

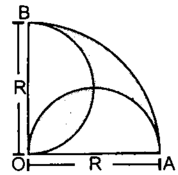
$S_{sector\ ADC} = \dfrac{\pi(AD)^2}{4} \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S' = \dfrac{\pi(AD)^2}{4}$ ...(3)

Siendo iguales los segundos miembros de las expresiones (2) y (3), los primeros miembros también deben serlo:

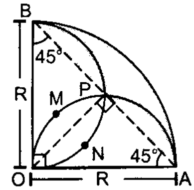
$S_x + S' = S_1 + S_2 + S_3 + S'$

$\Rightarrow S_x = S_1 + S_2 + S_3$; con (1): $S_x = 100$ cm²

7. La figura muestra dos semicírculos de diámetros OA = OB y un cuarto de círculo con centro en O. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

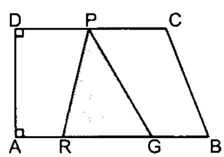


Del gráfico, al trazar $\overline{OP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$, se observa que los segmentos circulares BP, ONP, PA y OMP tienen igual área. Luego, el área de la región pedida es equivalente al área del segmento circular AB:

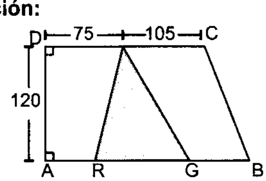
$S_{somb} = \dfrac{\pi R^2}{4} - \dfrac{R^2}{2} \Rightarrow S_{somb} = \dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$

Ejemplos:

1. Un terreno que tiene forma de un trapecio rectángulo cuyas bases son: AB = 200 m, DC = 180 m y la altura AD = 120 m, ha de dividirse en tres parcelas equivalentes, de modo que sus dueños puedan, sin salir de sus propiedades respectivas, ir por agua a un pozo P, situado en la base superior $\overline{DC}$ y a 75 m del punto D. Hallar la diferencia entre las longitudes de los segmentos AR y GB de la base inferior.



Resolución:

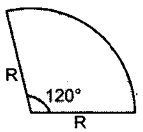


Por ser equivalentes, los trapecios: $S_{ADPR} = S_{GPCB}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{AR + 75}{2}\right)120 = \left(\dfrac{GB + 105}{2}\right)120$

De donde, al simplificar y despejar:

AR − GB = 30 m



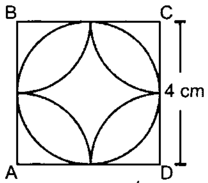
Un tercio de círculo

$$\frac{\pi R^2}{3}$$

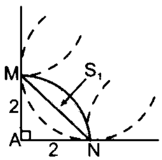
Ya que: $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$; $\frac{45°}{360°} = \frac{1}{8}$; $\frac{60°}{360°} = \frac{1}{6}$, etc.

Aplicaciones:

1. Hallar el área de la región sombreada, si los vértices del cuadrado ABCD son centros de los cuartos de circunferencia de igual radio.



Resolución:



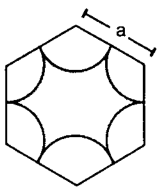
Se tiene: $S_{total} = 8S_1$ ...(1)

Siendo: $S_1 = S_{sector\ MAN} - S_{triángulo\ MAN}$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{\pi(2^2)}{4} - \frac{2(2)}{2} \Rightarrow S_1 = (\pi - 2)\ cm^2$$

Reemplazando en (1): $S_{total} = 8(\pi - 2)\ cm^2$

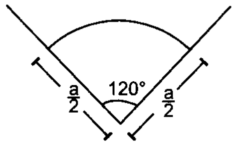
2. Los vértices de un hexágono regular son los centros de seis circunferencias iguales y tangentes (según muestra la figura). Hallar el área de la región sombreada en función del lado "a" del hexágono.



Resolución:

El área de la región sombreada es igual **a** la del hexágono, menos los seis sectores.

Cada sector tiene radio $\frac{a}{2}$ y ángulo central 120°. El área de cada sector es: $S_1 = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi a^2}{12}$

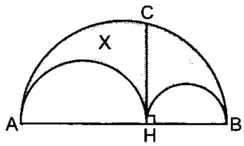


Luego: $S_{sombreada} = S_{hexágono} - 6S_1$

$$S_{sombreada} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} - 6\left(\frac{\pi a^2}{12}\right)$$

$$\therefore\ S_{sombreada} = \frac{a^2}{2}(3\sqrt{3} - \pi)$$

3. En la figura adjunta, $\overline{AH}$, $\overline{HB}$ y $\overline{AB}$ son diámetros y $\overline{CH}$ es perpendicular a $\overline{AB}$. Hallar el área de la región sombreada en función de $\overline{CH}$.



Resolución:

Por diferencia, el área X será: $X = S_{\frown AB} - S_{\frown AH} - S_{\frown HB}$

Expresamos las áreas semicirculares en función de los diámetros AH, HB y AB = AH + HB:

$$X = \frac{\pi(AB)^2}{8} - \frac{\pi(AH)^2}{8} - \frac{\pi(HB)^2}{8}$$

$$X = \frac{\pi}{8}[AB^2 - (AH^2 + HB^2)]$$

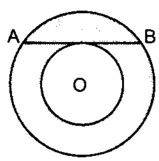
$$X = \frac{\pi}{8}[(AH + HB)^2 - (AH^2 + HB^2)]$$

De donde: $X = \frac{\pi}{4}(AH)(HB)$ ...(1)

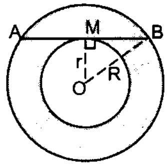
Además, por relaciones métricas sabemos que:
$(AH)(HB) = (CH)^2$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $X = \frac{\pi}{4}(CH)^2$

4. La figura muestra dos circunferencias concéntricas de centro O. $\overline{AB}$ es una cuerda de la mayor tangente a la menor. Hallar el área de la corona en función de $\overline{AB}$.



Resolución:



Se tiene: $S_{corona} = \pi(R^2 - r^2)$ ...(1)

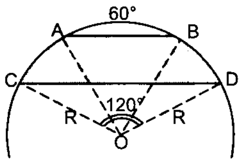
En el $\triangle$MOB: $R^2 - r^2 = MB^2$

Como: $MB = \frac{AB}{2} \Rightarrow R^2 - r^2 = \frac{AB^2}{4}$ ...(2)

Sustituyendo (2) en (1): $S_{corona} = \frac{\pi}{4}(AB)^2$

5. Hallar el área de una zona del círculo de radio R, sabiendo que las bases son los lados del triángulo equilátero y hexágono regular, inscritos, situados a un mismo lado del centro.

Resolución:



Sea $AB = L_6$ y $CD = L_3 \Rightarrow m\widehat{AB} = 60°$ y $m\widehat{CD} = 120°$

Luego:

$S_{zona} = S_{sector\ COD} - S_{segmento\ AB} - S_{triángulo\ COD}$ ...(1)

Siendo: $S_{sector\ COD} = \dfrac{120°\pi R^2}{360°} = \dfrac{\pi R^2}{3}$

$S_{segmento\ AB} = S_{sector\ AOB} - S_{triángulo\ AOB} = \dfrac{60°\pi R^2}{360°} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

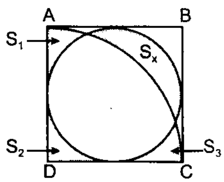
$\Rightarrow S_{segmento\ AB} = \dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$S_{triángulo\ COD} = \dfrac{R(R)}{2}\text{sen}120° = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

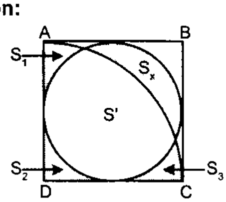
Al sustituir en (1):

$S_{zona} = \dfrac{\pi R^2}{3} - \left(\dfrac{\pi R^2}{6} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} \quad \therefore S_{zona} = \dfrac{\pi R^2}{6}$

6. Hallar el área de la región sombreada S_x, sabiendo que la suma de las áreas S_1, S_2 y S_3 es 100 cm^2. ABCD es cuadrado y D centro del arco AC.



Resolución:



Dato: $S_1 + S_2 + S_3 = 100$ ...(1)

Del gráfico, la longitud del diámetro del círculo es igual a $\overline{AD}$.

Luego: $S_{círculo} = \dfrac{\pi(AD)^2}{4} \Rightarrow S_x + S' = \dfrac{\pi(AD)^2}{4}$ ...(2)

Para el cuarto de círculo ADC:

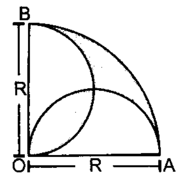
$S_{sector\ ADC} = \dfrac{\pi(AD)^2}{4} \Rightarrow S_1 + S_2 + S_3 + S' = \dfrac{\pi(AD)^2}{4}$...(3)

Siendo iguales los segundos miembros de las expresiones (2) y (3), los primeros miembros también deben serlo:

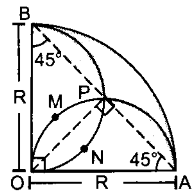
$S_x + S' = S_1 + S_2 + S_3 + S'$

$\Rightarrow S_x = S_1 + S_2 + S_3$; con (1): $S_x = 100$ cm^2

7. La figura muestra dos semicírculos de diámetros OA = OB y un cuarto de círculo con centro en O. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

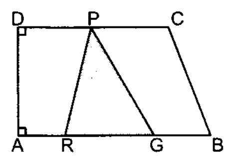


Del gráfico, al trazar $\overline{OP}$, $\overline{BP}$ y $\overline{PA}$, se observa que los segmentos circulares BP, ONP, PA y OMP tienen igual área. Luego, el área de la región pedida es equivalente al área del segmento circular AB:

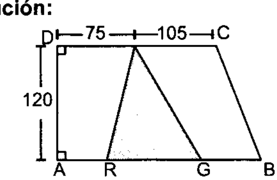
$S_{somb} = \dfrac{\pi R^2}{4} - \dfrac{R^2}{2} \Rightarrow S_{somb} = \dfrac{R^2}{4}(\pi - 2)$

Ejemplos:

1. Un terreno que tiene forma de un trapecio rectángulo cuyas bases son: AB = 200 m, DC = 180 m y la altura AD = 120 m, ha de dividirse en tres parcelas equivalentes, de modo que sus dueños puedan, sin salir de sus propiedades respectivas, ir por agua a un pozo P, situado en la base superior $\overline{DC}$ y a 75 m del punto D. Hallar la diferencia entre las longitudes de los segmentos AR y GB de la base inferior.



Resolución:



Por ser equivalentes, los trapecios: $S_{ADPR} = S_{GPCB}$

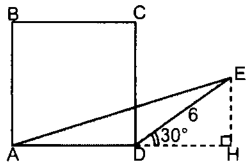
$\Rightarrow \left(\dfrac{AR + 75}{2}\right)120 = \left(\dfrac{GB + 105}{2}\right)120$

De donde, al simplificar y despejar:

AR − GB = 30 m

2. La longitud del lado de un cuadrado ABCD es 6 cm. Se construye exteriormente el triángulo equilátero CED y se traza $\overline{AE}$. Hallar el área del triángulo AED.

Resolución:



Del gráfico:

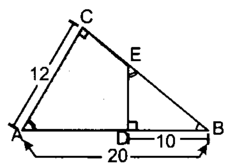
$$S_{AED} = \frac{AD(EH)}{2} \qquad ...(1)$$

Siendo AD = 6 cm y en el $\triangle$DHE, EH se opone a 30°, luego: $EH = \frac{DE}{2}$; EH = 3. Sustituyendo en (1):

$$S_{AED} = \frac{6 \times 3}{2} \quad \therefore\ S_{AED} = 9\ cm^2$$

3. En un triángulo rectángulo ABC, el ángulo recto es C. Por D punto medio de $\overline{AB}$, se levanta una perpendicular que corta al cateto $\overline{CB}$ en el punto E. Se sabe que AB = 20 m y AC = 12 m. Hallar, el área del cuadrilátero.

Resolución:



Del gráfico $S_{ADEC} = S_{ACB} - S_{EDB}$ ...(1)

En $\triangle$ACB, por el teorema de Pitágoras: CB = 16.

Luego:

$$S_{ACB} = \frac{AC(CB)}{2} = \frac{12(16)}{2} \Rightarrow S_{ACB} = 96\ cm^2 \quad ...(2)$$

Para el S_{EDB}, hallamos antes ED a partir de la semejanza entre los triángulos EDB y ACB.

$$\frac{ED}{AC} = \frac{DB}{CB} \Rightarrow \frac{ED}{12} = \frac{10}{16} \Rightarrow ED = 7{,}5$$

Ahora:

$$S_{EDB} = \frac{ED(DB)}{2} = \frac{(7{,}5)(10)}{10} \Rightarrow S_{EDB} = 37{,}5\ m^2 ...(3)$$

Con (2) y (3) en (1): $S_{ADEC} = 96 - 37{,}5 = 58{,}5\ m^2$

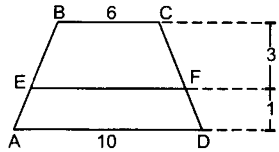
4. Una de las bases de un trapecio mide 10 m, su altura 4 m y el área 32 m^2. Calcular la longitud de la paralela a las bases, trazada a un metro de distancia de la base dada.

Resolución:

Sea "a", longitud de la base desconocida, con el dato del área:

$$\left(\frac{a + 10}{2}\right)4 = 32 \Rightarrow a = 6$$

Luego, tenemos la figura:



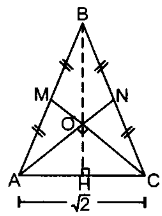
Así: $S_{AEFD} + S_{EBCF} = S_{ABCD}$

Es decir: $\left(\frac{EF + 10}{2}\right)1 + \left(\frac{EF + 6}{2}\right)3 = 32$

De donde, fácilmente hallamos: EF = 9

5. La base de un triángulo isósceles es $\sqrt{2}$. Si las medianas dibujadas hacia los lados congruentes se cortan perpendicularmente; calcular el área del triángulo.

Resolución:



Sea el $\triangle$ABC, con AB = BC

$\Rightarrow$ AN = CM y AH = HC

El $\triangle$AOC es isósceles: AO = OC

$\Rightarrow OH = \frac{AC}{2} \Rightarrow OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Siendo O el baricentro del $\triangle$ABC:

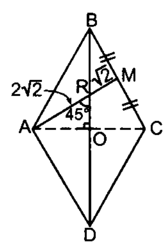
$BH = 3(OH) \Rightarrow BH = \frac{3}{2}\sqrt{2}$

Luego: $S_{ABC} = \frac{1}{2}(AC)(BH)$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(\sqrt{2})\left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right) \quad \therefore\ S_{ABC} = 1{,}5$$

6. Hallar el área de un rombo ABCD, en el cual M es punto medio de $\overline{BC}$; $\overline{AM}$ corta a $\overline{BD}$ en el punto R RM = $\sqrt{2}$ y el ángulo BRM mide 45°.

Resolución:



$$S_{ABCD} = \frac{(AC)(BD)}{2} \qquad ...(1)$$

Del gráfico: R es baricentro del $\triangle$ABC

$\Rightarrow AR = 2(RM) \Rightarrow AR = 2\sqrt{2}$

En el $\triangle$AOR: $AO = OR = \frac{AR}{\sqrt{2}} \Rightarrow AO = OR = 2$

Entonces: BO = 3(OR), para el $\triangle$ABC

$BO = 3 \times 2 \Rightarrow BO = 6$. Luego, $BD = 12$

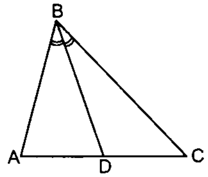
Además: $AC = 2(AO) \Rightarrow AC = 2(2) \Rightarrow AC = 4$

Sustituyendo los valores de AC y BD en (1):

$\therefore\ S_{ABCD} = \dfrac{4(12)}{2} = 24$

7. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BD}$. Demostrar que: $\dfrac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \dfrac{AB}{BC}$ (propiedad para todo triángulo).

Resolución:



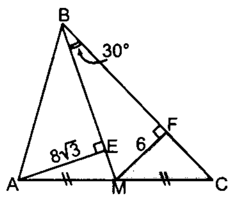
Como los triángulos ABD y DBC tienen:

$m\angle ABD \cong m\angle DBC$, entonces, por propiedad:

$\dfrac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \dfrac{(AB)(BD)}{(BC)(BD)} \Rightarrow \dfrac{S_{ABD}}{S_{DBC}} = \dfrac{AB}{BC}$

8. En un triángulo ABC, se traza la mediana $\overline{BM}$ y luego $\overline{MF}$ perpendicular a $\overline{BC}$(F en $\overline{BC}$). Si A dista $8\sqrt{3}$ cm de $\overline{BM}$, MF = 6 cm y $m\angle MBC = 30°$, hallar el área del triángulo MFC.

Resolución:



Del gráfico: $S_{MFC} = S_{MBC} - S_{BFM}$ ...(1)

En el $\triangle BFM$ (30°; 60°): $BF = 6\sqrt{3}$ y $BM = 12$

Luego:

$S_{BFM} = \dfrac{(BF)(MF)}{2} = \dfrac{(6\sqrt{3})(6)}{2} \Rightarrow S_{BFM} = 18\sqrt{3}$ ...(2)

Además, como $\overline{BM}$ es mediana del $\triangle ABC$: $S_{MBC} = S_{ABM}$

Siendo: $S_{ABM} = \dfrac{(BM)(AE)}{2} = \dfrac{12(8\sqrt{3})}{2}$

$S_{ABM} = 48\sqrt{3}$ cm², también: $S_{MBC} = 48\sqrt{3}$ cm² ...(3)

Con lo hallado en (2) y (3), al sustituir en (1):

$S_{MFC} = 48\sqrt{3} - 18\sqrt{3}$ $\therefore\ S_{MFC} = 30\sqrt{3}$ cm²

9. Hallar el área de un triángulo, sabiendo que las longitudes de las alturas son 12 cm, 15 cm y 20 cm.

Resolución:

Sean: $h_a = 12$; $h_b = 15$ y $h_c = 20$

Para los exradios del triángulo, usaremos las relaciones fundamentales:

$\dfrac{1}{r_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{30} \Rightarrow r_a = 30$

$\dfrac{1}{r_b} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{15} = \dfrac{1}{16} \Rightarrow r_b = 15$

$\dfrac{1}{r_c} = \dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{15} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow r_c = 10$

Luego, el inradio: $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{5} \Rightarrow r = 5$

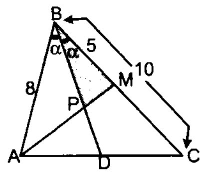
Y para el área con la expresión para regiones triangulares:

$S = \sqrt{rr_ar_br_c} = \sqrt{5 \times 30 \times 15 \times 10} = 150$

$\therefore\ S = 150$ cm²

10. En un triángulo ABC, de área 26 cm², AB = 8 cm y BC = 10 cm. La mediana $\overline{AM}$ y la bisectriz interior $\overline{BD}$ se intersecan en el punto P. Hallar el área del triángulo BPM.

Resolución:



Para el $\triangle ABC$, como $\overline{AM}$ es mediana:

$S_{ABM} = \dfrac{S_{ABC}}{2} \Rightarrow S_{ABM} = 13$ cm²

Siendo: $S_{ABP} + S_{BPM} = S_{ABM}$

$S_{ABP} + S_{BPM} = 13$ ...(1)

Además, sabemos que:

$\dfrac{S_{ABP}}{S_{BPM}} = \dfrac{AB}{BM} = \dfrac{8}{5} \Rightarrow S_{ABP} = \dfrac{8}{5}S_{BPM}$ ...(2)

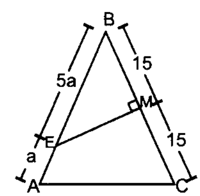
Sustituyendo (2) en (1):

$\dfrac{8}{5}S_{BPM} + S_{BPM} = 13 \Rightarrow \dfrac{13}{5}S_{BPM} = 13$

$\therefore\ S_{BPM} = 5$ cm²

11. Hallar el área de un triángulo isósceles ABC, sabiendo que AB = BC = 30 cm y que la perpendicular a $\overline{BC}$, trazada en su punto medio M corta a $\overline{AB}$ en E y que $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{1}{5}$

Resolución:



Según el gráfico, como AB = 30

Luego: $6a = 30 \Rightarrow a = 5$

Entonces EB = 25 y en el $\triangle EMB$, hallamos enseguida EM = 20 (teorema de Pitágoras).

Los triángulos ABC y EBM, tienen en común el $\angle B$; por lo que: $\dfrac{S_{ABC}}{S_{EMB}} = \dfrac{(AB)(BC)}{(EB)(BM)}$ ...(1)

Siendo: $S_{EMB} = \dfrac{EM(BM)}{2} = \dfrac{(20)(15)}{2}$

$\Rightarrow S_{EMB} = 150\ cm^2$ y con:

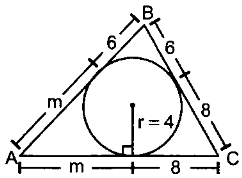
$AB = BC = 30,\ EB = 25$ y $BM = 15$

Al sustituir en (1): $\dfrac{S_{ABC}}{150} = \dfrac{(30)(30)}{(25)(15)}$

De donde: $S_{ABC} = 360\ cm^2$

12. El inradio de un triángulo mide 4 cm y la circunferencia inscrita, determina sobre uno de los lados segmentos de longitudes 6 cm y 8 cm. Hallar el área del triángulo.

Resolución:



Sea el $\triangle ABC$, con las longitudes conocidas sobre el lado $\overline{BC}$. Luego, por tangentes iguales trazadas desde un mismo punto, completamos el gráfico adjunto. Relacionamos fórmulas de áreas, para el $\triangle ABC$. Así, con expresión del inradio.

$S = pr \Rightarrow S = (m + 6 + 8)4$

$S = 4(m + 14)$ ...(1)

Además por Herón: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Siendo: $p - a = m;\ p - b = 6$ y $p - c = 8$

Luego, en la expresión de Herón:

$S = \sqrt{(m+14)(m)(6)(8)}$ ...(2)

Igualando los segundos miembros de (1) y (2):

$4(m + 14) = \sqrt{(m+14)(m)(6)(8)}$

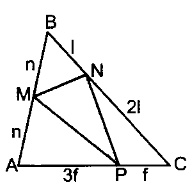
Elevando al cuadrado y luego de simplificar, hallamos: $m = 7$.

Finalmente, para el área reemplazamos este valor de m en (1):

$S = 4(7 + 14) \Rightarrow S = 84\ cm^2$

13. El área de un triángulo ABC es $24\ cm^2$, M, N y P son puntos de los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, de modo que $AM = BM$; $NC = 2BN$ y $AP = 3(PC)$. Hallar el área del triángulo MNP.

Resolución:



Dato: $S_{ABC} = 24\ cm^2$

Del gráfico:

$S_{MNP} = S_{ABC} - (S_{AMP} + S_{MBN} + S_{NPC})$ ...(1)

Por tener común la m$\angle$A: $\dfrac{S_{AMP}}{S_{ABC}} = \dfrac{(AM)(AP)}{(AB)(AC)} = \dfrac{n(3f)}{2n(4f)}$

De donde: $S_{AMP} = \dfrac{3}{6}(24) \Rightarrow S_{AMP} = 9\ cm^2$ ...(2)

Para la m$\angle$B: $\dfrac{S_{MBN}}{S_{ABC}} = \dfrac{(BM)(BN)}{(BA)(BC)} = \dfrac{n(l)}{2n(3l)}$

Despejando:

$S_{MBN} = \dfrac{1}{6}S_{ABC} = \dfrac{1}{6}(24) \Rightarrow S_{MBN} = 4\ cm^2$ ...(3)

Con la m$\angle$C: $\dfrac{S_{NPC}}{S_{ABC}} = \dfrac{(CN)(CP)}{(CB)(CA)} = \dfrac{2l(f)}{3l(4f)}$

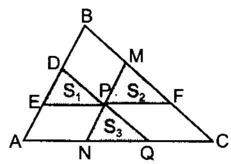
Luego: $S_{NPC} = \dfrac{1}{6}S_{ABC} \Rightarrow S_{NPC} = 4\ cm^2$ ...(4)

Sustituyendo el dato, (2), (3) y (4) en (1):

$S_{MNP} = 24 - (9 + 4 + 4) \Rightarrow S_{MNP} = 7\ cm^2$

14. Demostrar que si por un punto interior a un triángulo se trazan paralelas a los tres lados, estas determinan tres regiones triangulares de áreas S_1, S_2 y S_3, que con relación al área total S, cumplen: $\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

Resolución:



De la figura, observamos que los triángulos ABC, EDP, PMF y NPQ son semejantes, luego:

$\dfrac{S}{AC^2} = \dfrac{S_1}{EP^2} = \dfrac{S_2}{PF^2} = \dfrac{S_3}{NQ^2}$

Al extraer raíz cuadrada: $\dfrac{\sqrt{S}}{AC} = \dfrac{\sqrt{S_1}}{EP} = \dfrac{\sqrt{S_2}}{PF} = \dfrac{\sqrt{S_3}}{NQ}$

Por propiedad de proporciones:

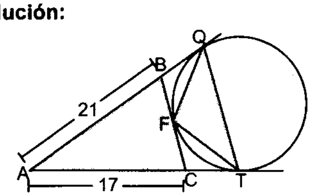
$\dfrac{\sqrt{S}}{AC} = \dfrac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{EP + PF + NQ}$

Siendo $EP = AN$ y $PF = QC \Rightarrow EP + PF + NQ = AC$

$\therefore \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}$

15. Los lados de un triángulo ABC miden: $AB = 21$ cm, $BC = 10$ cm y $AC = 17$ cm. La circunferencia exinscrita relativa a $\overline{BC}$ es tangente a este lado en el punto F y a las prolongaciones de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ en Q y T. Hallar el área del triángulo QFT.

Resolución:



Sabemos que si p es el semiperímetro del $\triangle ABC$, entonces: $AQ = AT = p$

Como: $p = \dfrac{21 + 10 + 17}{2} = 24 \Rightarrow AQ = AT = 24$

Luego: $BQ = BF = AQ - AB = 24 - 21$

$\Rightarrow BQ = BF = 3 \wedge CT = CF = AT - AC = 24 - 17$

$\Rightarrow CT = CF = 7$

$S_{QFT} = S_{AQT} - S_{ABC} - S_{FBQ} - S_{FCT}$ ...(1)

Para hallar el S_{ADT} previamente calculamos el S_{ABC} por el teorema de Herón:

$S_{ABC} = \sqrt{(24)(24-17)(24-21)(24-10)} = \sqrt{(24)(7)(3)(14)}$

$\Rightarrow S_{ABC} = 84 \text{ cm}^2$ ...(2)

En seguida, como los triángulos AQT y ABC tienen en común el $\angle A$: $\dfrac{S_{AQT}}{S_{ABC}} = \dfrac{(AQ)(AT)}{(AB)(AC)}$

$\Rightarrow \dfrac{S_{AQT}}{84} = \dfrac{(24)(24)}{(21)(17)} \Rightarrow S_{AQT} = 135{,}53 \text{ cm}^2$ ...(3)

Los triángulos FBQ y ABC tienen dos ángulos suplementarios ($m\angle FBQ + m\angle ABC = 180°$), por lo que:

$\dfrac{S_{FBQ}}{S_{ABC}} = \dfrac{(BQ)(BF)}{(BA)(BC)} \Rightarrow \dfrac{S_{FBQ}}{84} = \dfrac{(3)(3)}{(21)(10)}$

$\Rightarrow S_{FBQ} = 3{,}6 \text{ cm}^2$ ...(4)

También, los triángulos FCT y ABC tienen los ángulos suplementarios ($m\angle FCT + m\angle ACB = 180°$), luego:

$\dfrac{S_{FCT}}{S_{ABC}} = \dfrac{(CF)(CT)}{(CB)(CA)} \Rightarrow \dfrac{S_{FCT}}{84} = \dfrac{(7)(7)}{(10)(17)}$

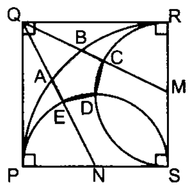
$\Rightarrow S_{FCT} = 24{,}21 \text{ cm}^2$ ...(5)

Finalmente, sustituimos (2), (3), (4) y (5) en (1):

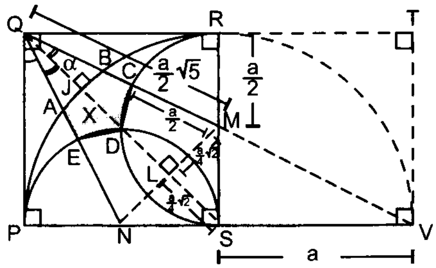
$S_{QFT} = 23{,}72 \text{ cm}^2$

16. Calcular el área del pentágono ABCDE, si el lado del cuadrado PQRS es "a".

$\overset{\frown}{PABR}$ ha sido trazado con centro en S. $\overline{PS}$ y $\overline{RS}$ son diámetros.



Resolución:



Con los trazos indicados: D es centro del cuadrado PQRS: $X = 2(A_{\triangle QDC} - A_{\triangle QJB})$ ...(1)

- $A_{\triangle QDC}$, por tener ángulo común $m\angle LQM = m\angle DOC = \alpha$

$\dfrac{A_{\triangle QDC}}{A_{\triangle QLM}} = \dfrac{(CQ)(QD)}{(LQ)(QM)}$

$$\frac{A_{QDC}}{\frac{1}{2}\left(3\frac{a}{4}\right)\sqrt{2}\left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)} = \frac{\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)\frac{a}{2}\sqrt{2}}{\left(3\frac{a}{4}\right)\sqrt{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)}$$

$A_{\triangle QDC} = \dfrac{a^2}{40}(5-\sqrt{5})$ ...(2)

- $A_{\triangle QJB}$: $\triangle QJB \sim \triangle QLM$

$\dfrac{A_{\triangle QJB}}{A_{\triangle QLM}} = \dfrac{(QB)^2}{(QM)^2}$ ...(3)

Cálculo de QB. Construyendo el cuadrado RTVS de lado a y trazando $\overset{\frown}{RV}$ (centro S).

$\overline{QV}$ es diagonal del rectángulo PQTV $= a\sqrt{5}$

En la semicircunferencia de centro S (teorema de la tangente):

$(QR)^2 = (QB)(QV) \Rightarrow a^2 = (QB)(a\sqrt{5})$

$QB = \frac{a}{5}\sqrt{5}$. Reemplazando en (3)

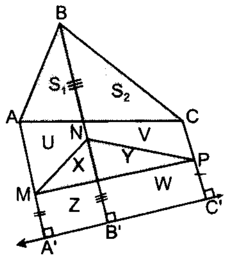
$$\frac{A_{\triangle QJB}}{\frac{1}{2}\left(3\frac{a}{4}\right)\sqrt{2}\left(\frac{a}{4}\sqrt{2}\right)} = \frac{\left(\frac{a}{5}\sqrt{5}\right)^2}{\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2} \Rightarrow A_{\triangle QJB} = \frac{3a^2}{100} \text{...(4)}$$

De (2) y (4) en (1): $x = 2\left[\dfrac{a^2}{40}(5-\sqrt{5}) - 3\dfrac{a^2}{100}\right]$

$\therefore\ x = \dfrac{a^2}{100}(19 - 5\sqrt{5})$

17. El área de un triángulo ABC es S. Se trazan $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ perpendicular es a una recta exterior, relativa a $\overline{AC}$. Hallar el área del triángulo que tiene por vértices los puntos medios de dichas perpendiculares.

Resolución:



Según el gráfico: $S_1 + S_2 = S$

AM = A'M; BN = B'N; CP = C'P

Sabemos que en todo trapecio, el segmento que une los puntos medios de las bases determina regiones equivalentes.

Luego:

Trapecio AA'B'B: $X + Z = U + S_1$ ...(1)

Trapecio BB'C'C: $Y + W = V + S_2$ ...(2)

Trapecio AA'C'C: $X + Y + U + V = Z + W$ ...(3)

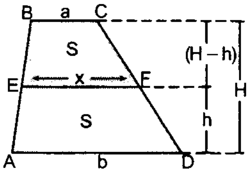
Sumando estas tres expresiones:

$2X + 2Y + U + V + W + Z = U + V + W + Z + S_1 + S_2$

$\Rightarrow 2(X + Y) = S_1 + S_2 \quad \therefore\ X + Y = \dfrac{S_1 + S_2}{2} = \dfrac{S}{2}$

18. En un trapecio, las longitudes de las bases son a y b. Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases, limitado por los otros dos lados y que determina dos figuras equivalentes.

Resolución:



Consideremos el trapecio ABCD, donde BC = a, AD = b, $\overline{EF}$ es el segmento paralelo a las bases, siendo además h y H alturas de AEFD y ABCD respectivamente.

Se tienen:

$S_{AEFD} \Rightarrow S = \left(\frac{b+x}{2}\right)h$ ...(1)

$S_{EBCF} \Rightarrow S = \left(\frac{a+x}{2}\right)(H-h)$ ...(2)

$S_{ABCD} \Rightarrow 2S = \left(\frac{a+b}{2}\right)H$ ...(3)

De (1) en (3):

$2\left(\frac{b+x}{2}\right)h = \left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{a+b}{2(b+x)}$ ...(4)

De (1) en (2): $\left(\frac{b+x}{2}\right)h = \left(\frac{a+x}{2}\right)(H-x)$

Operando convenientemente:

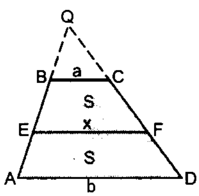
$(b + x)h + (a + x)h = (a + x)$

$H \Rightarrow \frac{S_{FCT}}{S_{ABC}} = \frac{(CF)(CT)}{(CB)(CA)} \Rightarrow \frac{S_{FCT}}{84} = \frac{(7)(7)}{(10)(17)}$ ...(5)

Finalmente, (4) en (5): $\frac{a+b}{2(b+x)} = \frac{a+x}{a+b+2x}$

De donde: $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Otra forma: prolongando $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ hasta su punto de intersección en Q.



$\Delta EQF \sim \Delta BOC$: $\frac{S_{BQC}+S}{S_{BQC}} = \frac{x^2}{a^2}$

$\Rightarrow 1 + \frac{S}{S_{BQC}} = \frac{x^2}{a^2}$ ...(1)

$\Delta AQD \sim \Delta BQC$: $\frac{S_{BQC}+2S}{S_{BQC}} = \frac{b^2}{a^2}$

$\Rightarrow 1 + 2\left(\frac{S}{S_{BQC}}\right) = \frac{b^2}{a^2}$ ...(2)

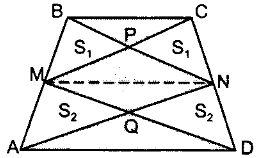
De (1): $\frac{S}{S_{BQC}} = \frac{x^2}{a^2} - 1$

Sustituyendo en (2) $\Rightarrow 1 + 2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) = \frac{b^2}{a^2}$

Despejando: $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

19. En un trapecio ABCD, de bases $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC} < \overline{AD}$, se toman M y N puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, MC y NB se cortan en P, $\overline{MD}$ y $\overline{AN}$ se intersecan en Q. Si $S_{BPC} = 10$ cm^2 y $S_{AQD} = 14$ cm^2, hallar S_{MPNQ}.

Resolución:



Al trazar $\overline{MN}$, en el trapecio MBCN, sabemos que $S_{MBP} = S_{NCP} = S_1$ y en trapecio AMND: $S_{AMQ} = S_{NQD} = S_2$

Además, para el trapecio ABCD, $2(S_{CMD}) = S_{ABCD}$

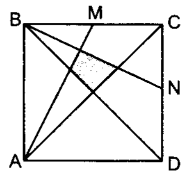
Con el gráfico:

$2(S_1 + S_2 + S_{MPNQ}) = 2S_1 + 2S_2 + S_{BPC} + S_{MPNQ} + S_{AQD}$

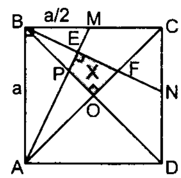
De donde, al cancelar S_1 y S_2: $S_{MPNQ} = S_{BPC} + S_{AQD}$

$\therefore S_{MPNQ} = 24$ cm^2

20. Dado el cuadrado ABCD, donde M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$. Hallar el área de la región sombreada, si AB = a.



Resolución:



Sabemos que $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$ son perpendiculares. Llamando X el área pedida, con el gráfico:

$X = S_{AEF} - S_{AOP}$ ...(1)

Para determinar S_{AEF}, hallamos AE y EF.

En el ΔABM, con el teorema de Pitágoras.

$\Rightarrow (AM)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AM = \frac{a}{2}\sqrt{5}$

Por relaciones métricas: $(AB)^2 = (AM)(AE)$

Luego: $a^2 = \frac{a}{2}\sqrt{5}(AE)$, de donde: $AE = \frac{2}{5}a\sqrt{5}$

De otro lado, F es baricentro del ΔBCD, ($\overline{BN}$ y $\overline{CO}$ son medianas de dicho triángulo).

$\Rightarrow OF = \frac{1}{3}(OC) = \frac{1}{3}\left(\frac{AC}{2}\right) = \frac{1}{6}(AC) = \frac{1}{6}(a\sqrt{2})$

$\Rightarrow OF = \frac{a\sqrt{2}}{6} \wedge AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow AF = AO + OF = \frac{a\sqrt{2}}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow AF = \frac{2}{3}a\sqrt{2}$

Esto nos permite hallar $\overline{EF}$ en el ΔAEF:

$(EF)^2 = (AF)^2 - (AE)^2$

$(EF)^2 = \left(\frac{2}{3}a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}a\sqrt{5}\right)^2$; $EF = \frac{2\sqrt{5}}{15}a$

Para el S_{AEF}:

$$S_{AEF} = \frac{(AE)(EF)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}a\sqrt{5}\right)\left(\frac{2}{15}a\sqrt{5}\right)$$

$$\Rightarrow S_{AEF} = \frac{2}{15}a^2 \qquad ...(2)$$

Ahora para hallar el S_{AOP} aprovechemos que los triángulos AOP y ABD tiene la misma altura trazada desde A. Luego las áreas S_{AOP} y S_{ABD} serán entre sí como las bases $\overline{OP}$ y $\overline{BD}$: $\frac{S_{AOP}}{S_{ABD}} = \frac{OP}{BD}$ ...(3)

Siendo P, baricentro del $\triangle ABC(\overline{AM}$ y $\overline{BO}$ son medianas en dicho triángulo), entonces:

$$OP = \frac{1}{3}(OB) = \frac{1}{3}\left(\frac{BD}{2}\right) \Rightarrow OP = \frac{BD}{6}, \text{ esto es: } \frac{OP}{BD} = \frac{1}{6}$$

Sustituyendo en (3) tenemos:

$$\frac{S_{AOP}}{S_{ABD}} = \frac{1}{6} \Rightarrow S_{AOP} = \frac{1}{6}(S_{ABD}) = \frac{1}{6}\left(\frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow S_{AOP} = \frac{a^2}{12} \qquad ...(4)$$

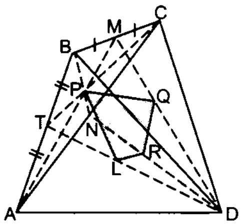
Finalmente, con (2) y (4) en (1):

$$X = \frac{2}{15}a^2 - \frac{a^2}{12} \quad \therefore X = \frac{a^2}{20}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El área de un trapezoide ABCD es 9 cm^2. Se traza la diagonal $\overline{AC}$ y se determinan P y R, baricentros de los triángulos ABC y ADC, respectivamente. Luego, se traza $\overline{BD}$ y se ubican Q y L, baricentros de los triángulos BCD y ABD. Luego de trazar $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$, $\overline{RL}$ y $\overline{LP}$, hallar el área del cuadrilátero PQRL.

Resolución:



En el gráfico: T, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Como P y Q, son baricentros de los triángulos ABC y BCD, respectivamente, por propiedad de este punto notable, tenemos:

$$\frac{PM}{AM} = \frac{1}{3} = \frac{QM}{DM}$$

Se cumple el teorema de Tales, luego $\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$

Los triángulos PMQ y AMD son semejantes:

$$\Rightarrow PQ = \frac{AD}{3}$$

Análogamente se demuestra que:

$\overline{PL} \parallel \overline{CD}$ y $PL = \frac{CD}{3}$, $\overline{QR} \parallel \overline{AB}$ y $QR = \frac{AB}{3}$, $\overline{LR} \parallel \overline{BC}$ y $LR = \frac{BC}{3}$

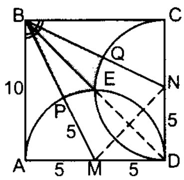
Esto indica que el cuadrilátero PQRL es semejante al ABCD, donde la razón de semejanza es 1/3.

$$\Rightarrow \frac{S_{PQRL}}{S_{ABCD}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{PQRL} = \frac{1}{9}(S_{ABCD}) = \frac{1}{9}(9)$$

$$\therefore S_{PQRL} = 1 \text{ cm}^2$$

2. La longitud de lado de un cuadrado ABCD es 10 cm. Tomando como diámetro los lados $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ se dibujan interiormente dos semicircunferencias secantes en el punto E, M y N son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{CD}$ respectivamente $\overline{BM}$ y $\overline{BN}$ intersecan a las semicircunferencias en P y Q. Hallar el área del cuadrilátero PBQE.

Resolución:



Del gráfico, notamos que el cuadrilátero PBQE es simétrico: BP = BQ y EP = EQ. Luego: $BE \perp PQ$

$$S_{PBQE} = \frac{BE(PQ)}{2} \qquad ...(1)$$

Además, E es el centro del cuadrado ABCD:

$$BE = ED = \frac{BD}{2} = \frac{10\sqrt{2}}{2} \Rightarrow BE = 5\sqrt{2}$$

Para determinar PQ, como BM = BN y BP = BQ, entonces $\overline{PQ}$ es paralelo a $\overline{MN}$.

$$\triangle PBQ \sim \triangle MBN \Rightarrow \frac{PQ}{MN} = \frac{BP}{BM} \Rightarrow PQ = \frac{(MN)(BP)}{BM} \; ...(2)$$

Siendo $MN = 5\sqrt{2}$ ($\triangle MDN$)

En $\triangle MAB$: $(BM)^2 = 10^2 + 5^2 \Rightarrow BM = 5\sqrt{5}$ y

$BP = BM - PM \Rightarrow BP = 5\sqrt{5} - 5$

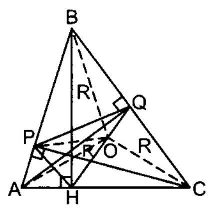
$$\text{Al sustituir en (3): } PQ = \frac{5\sqrt{2}(5\sqrt{5} - 5)}{5\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow PQ = \sqrt{2}(5 - \sqrt{5})$. Luego, con este valor y (2) en (1):

$$S_{PBQE} = \frac{5\sqrt{2}(\sqrt{2})(5 - \sqrt{5})}{2} \quad \therefore S_{PBQE} = (25 - 5\sqrt{5}) \text{ cm}^2$$

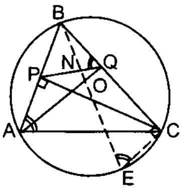
3. Demostrar que el área de todo triángulo acutángulo es igual al producto del circunradio y el semiperímetro de su triángulo órtico pedal.

Resolución:



Consideremos el $\triangle ABC$, donde O es el circuncentro y PQH el triángulo órtico pedal.

Sabemos que los radios $\overline{OB}$, $\overline{OA}$, $\overline{OC}$ de la circunferencia circunscrita al $\triangle ABC$ son perpendiculares (*) a $\overline{PQ}$, $\overline{PH}$ y $\overline{HQ}$, respectivamente. Luego, las áreas de los cuadriláteros POQB, POHA y HOQC son:



$$S_{POQB} = \frac{OB(PQ)}{2};\ S_{POHA} = \frac{OA(PH)}{2} \wedge S_{HOQC} = \frac{OC(HQ)}{2}$$

Siendo: $S_{ABC} = S_{POQB} + S_{POHA} + S_{HOQC}$

$$S_{ABC} = \frac{(OB)(PQ)}{2} + \frac{(OA)(PH)}{2} + \frac{(OC)(HQ)}{2}$$

Como:

$$OB = OA = OC = R \Rightarrow S_{ABC} = \left(\frac{PQ + PH + HQ}{2}\right)R$$

Llamando:

$p' = \dfrac{PQ + PH + HQ}{2}$; el semiperímetro del $\triangle PQH$:

$\therefore\ S_{ABC} = p'R$

(*) Para demostrar que $\overline{OB}$ es perpendicular a $\overline{PQ}$, prolongamos $\overline{BO}$ hasta E.

Luego: $m\angle PQB \cong m\angle BAC$, por ser el cuadrilátero APQC inscriptible.

Además, como $m\angle BEC \cong m\angle BAC \Rightarrow m\angle PQB \cong m\angle BEC$

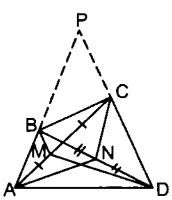
Siendo, en $m\angle BCE$:

$m\angle EBC + m\angle BEC = 90° \Rightarrow m\angle EBC + m\angle PQB = 90°$

Por lo que el $\angle BNQ = 90°$

4. En un trapezoide ABCD, M y N son puntos medios de las diagonales $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, respectivamente. Las prolongaciones de los lados AB y DC se intersecan en el punto P. Demostrar que: $S_{BMDP} = S_{ANCP}$.

Resolución:



Del gráfico: $S_{BMDP} = S_{BMDC} + S_{BCP}$

$S_{BMDP} = (S_{BMC} + S_{CMD}) + S_{BCP}$

$$S_{BMDP} = \left(\frac{S_{ABC}}{2} + \frac{S_{ACD}}{2}\right) + S_{BCP}$$

$$S_{BMDP} = \left(\frac{S_{ABC} + S_{ACD}}{2}\right) + S_{BCP}$$

Es decir: $S_{BMPC} = \left(\dfrac{S_{ABCD}}{2}\right) + S_{BPC}$ ...(1)

En forma análoga:

$S_{ANCP} = S_{BACN} + S_{BCP} \Rightarrow S_{ANCP} = (S_{ABN} + S_{BCN}) + S_{BCP}$

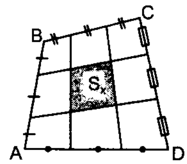
$$\Rightarrow S_{ANCP} = \left(\frac{S_{ABD}}{2} + \frac{S_{BCD}}{2}\right) + S_{BCP} \Rightarrow S_{ANCP} = \left(\frac{S_{ABD} + S_{BCD}}{2}\right) + S_{BCP}$$

$\Rightarrow S_{ANCP} = \dfrac{S_{ABCD}}{2} + S_{BCP}$ ...(2)

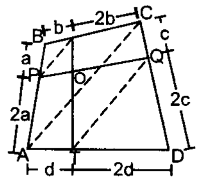
Luego, de (1) y (2): $S_{BMDP} = S_{ANCP}$ (propiedad)

Notar que: $S_{BMDP} = S_{ABCN} = \dfrac{S_{ABCD}}{2}$ (propiedad)

5. Hallar S_x, si el ⏢ABCD tiene área 72 cm². Los lados del ⏢ABCD han sido trisecados.



Resolución:



I. Problemas previos.

En el ⏢ABCD: P, R, Q y T se ubican sobre los lados de modo que:

PA=2(PB); CR=2(RB); DQ=2(QC) y TD=2(AT).

Demostremos que:

$OQ = 2(OP) \wedge OT = 2(OR)$

Veamos: $\triangle PBR \sim \triangle ABC$: $\dfrac{PB}{AB} = \dfrac{RB}{CB} = \dfrac{1}{3}$ y tienen en común la $m\angle B$.

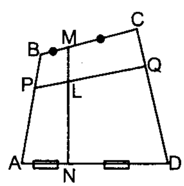
Entonces: $PR = \dfrac{AC}{3}$ y $\overline{PR} \parallel \overline{AC}$ ...(1)

Análogamente $\triangle TDQ \sim \triangle ADC$, ya que:

$\dfrac{TD}{AD} = \dfrac{QD}{CD} = \dfrac{2}{3}$ y comparten la $m\angle D$.

Luego: $TQ = \dfrac{2(AC)}{3}$ y $\overline{TQ} \parallel \overline{AC}$ ...(2)

De (1) y (2): $\overline{PR} \parallel \overline{TQ}$ y $TQ = 2(PR)$

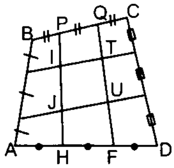


Esto indica que $\triangle OPR \sim \triangle OQT$

$\Rightarrow OQ = 2(OP) \wedge OT = 2(OR)$.

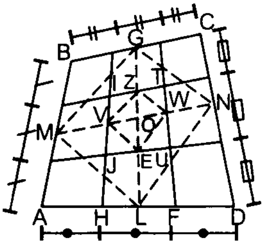
Recordar, según se demostró en un problema del capítulo semejanza de triángulos que:

Sí: $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{DQ}{QC} = 2 \Rightarrow PL = LG$ y $\dfrac{NL}{LM} = 2$



Es fácil concluir, de los resultados anteriores, que si se trisecan los lados del ⏢ABCD, entonces: PI = IJ = JH y QT = TU = UF

II. Resolución del problema propuesto



Si M, G, N y L son puntos medios de los lados del ⏢ABCD, entonces $\overline{GL}$ y $\overline{MN}$ intersecan a los lados del ⏢ITUJ en sus puntos medios.

Luego: $S_x = S_{ITUJ} = 2(S_{VZWE})$

$\Rightarrow S_x = 2(S_{VZWE})$ ...(α)

Sabemos que ⏢MGNL y ⏢VZWE son paralelogramos. Entonces: $ZO = \dfrac{ZE}{2}$

Pero: $ZE = GZ \Rightarrow ZO = \dfrac{GZ}{2} \Rightarrow ZO = \dfrac{GO}{3}$

En forma análoga,

$OV = \dfrac{OM}{3}, OW = \dfrac{ON}{3}$ y $OE = \dfrac{OL}{3}$

De aquí, es fácil concluir que los cuadriláteros VZWE y MGNL, son semejantes; con razón de semejanza $\frac{1}{3}$. Así:

$\dfrac{S_{VZWE}}{S_{MGNL}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 \Rightarrow S_{VZWE} = \dfrac{1}{9}(S_{MGNL})$

Siendo: $S_{MGNL} = \dfrac{S_{ABCD}}{2} \Rightarrow S_{VZME} = \dfrac{1}{18}(S_{ABCD})$

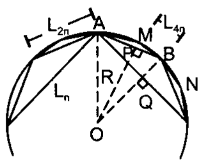
Reemplazando esto último en (α):

$S_x = \dfrac{1}{9}(S_{ABCD})$ (propiedad)

Con el dato: $S_{ABCD} = 72\ cm^2 \quad \therefore S_x = 8\ cm^2$

6. Conociendo las áreas S_n y S_{2n}, respectivas a dos polígonos regulares inscritos en una misma circunferencia, uno de "n" lados y el otro de 2n lados, hallar el área para el polígono regular de 4n lados inscrito en la misma circunferencia.

Resolución:



Consideremos el gráfico donde se indican los lados respectivos. Los triángulos MOB y POB tienen en común la altura $\overline{BP}$, entonces las áreas serán entre sí como OM y OP.

$\dfrac{S_{MOB}}{S_{PQB}} = \dfrac{OM}{OP}$, siendo $S_{MOB} = \dfrac{S_{4n}}{4n}$

$S_{POB} = \dfrac{S_{2n}}{4n}$; $OM = R$ y $OP = a_{2n}$

Sustituyendo en la relación anterior y simplificando

luego: $\dfrac{S_{4n}}{S_{2n}} = \dfrac{R}{a_{2n}}$ ...(1)

Asimismo, los triángulos AQO y AOB, tienen la misma altura $\overline{AQ}$, luego:

$\dfrac{S_{AQO}}{S_{AOB}} = \dfrac{OQ}{OB}$; donde $S_{AQO} = \dfrac{S_n}{2n}$; $S_{AOB} = \dfrac{S_{2n}}{2n}$;

$OQ = a_n$ y $OB = R$

Al sustituir y simplificar en lo anterior: $\dfrac{S_n}{S_{2n}} = \dfrac{a_n}{R}$ ...(2)

Los apotemas nos ayudarán a relacionar las expresiones (1) y (2). Como sabemos:

$a_{2n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - L_{2n}^2}$ y $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - 2R(a_n)}$, al combinar estas fórmulas:

$a_{2n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4R^2 - [2R^2 - 2R(a_n)]} \Rightarrow a_{2n} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2R^2 + 2R(a_n)}$ ...(3)

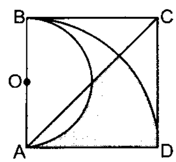
De la expresión (2): $\dfrac{S_n}{S_{2n}} = \dfrac{a_n}{R} \Rightarrow a_n = \left(\dfrac{S_n}{S_{2n}}\right)R$

Para sustituir en (3): $a_{2n} = \sqrt{2R^2 + 2R\left(\dfrac{S_n}{S_{2n}}\right)R}$

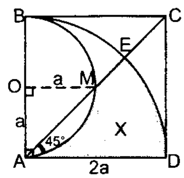
y de aquí: $\dfrac{R}{a_{2n}} = \dfrac{2S_{2n}}{S_n + S_{2n}}$, lo que reemplazamos en (1):

$\dfrac{S_{4n}}{S_{2n}} = \dfrac{2S_{2n}}{S_n + S_{2n}} \Rightarrow S_{4n} = \sqrt{\dfrac{2S_{2n}^3}{(S + S_{2n})}}$

7. En el cuadrado ABCD, $\overline{AB}$ es diámetro de la semicircunferencia y radio del cuarto de círculo. Si AB = 2a, hallar el área de la región sombreada.



Resolución:



Llamando X al área pedida:

$X = S_{sector\ AED} - S_{segmento\ AM}$ ...(1)

Siendo: $S_{sector\ AED} = \dfrac{(45°)(\pi)(2a)^2}{360°} = \dfrac{\pi a^2}{2}$ ...(2)

Para el segmento circular AM, como:

$m\angle OAM = 45°$ y $OA = OM$, en $\triangle AOM \Rightarrow \angle AOM = 90°$

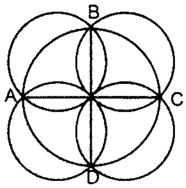
Luego: $S_{\text{segmento AM}} = S_{\text{sector AOM}} - S_{\text{triángulo AOM}}$

$$S_{\text{segmento AM}} = \frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2} \quad \ldots(3)$$

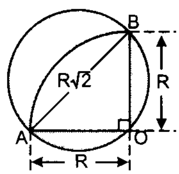
Reemplazando (2) y (3) en (1):

$$X = \frac{\pi a^2}{4} - \left(\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{\pi a^2}{4} + \frac{a^2}{2} \qquad \therefore\ X = \frac{a^2}{4}(\pi + 2)$$

8. En la figura, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros perpendiculares del círculo de radio R. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

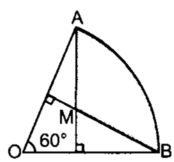


Se tiene $S_1 = S_{\text{círculo AB}} - S_{\text{sector AOB}}$

$$S_1 = \frac{\pi AB^2}{4} - \frac{\pi R^2}{4} = \frac{\pi}{4}(R\sqrt{2})^2 - \frac{\pi}{4}R^2 = \frac{\pi}{4}R^2$$

$\Rightarrow S_{\text{total}} = 4S_1 \quad \therefore\ S_{\text{total}} = \pi R^2$

9. Hallar el área de la región sombreada, si AOB es un sector circular de radio $\sqrt{6}$ cm.



Resolución:

Se tiene: $S_{\text{somb.}} = S_{\text{sector AOB}} - S_{\text{cuadrilátero cóncavo AOBM}} \ \ldots(1)$

Donde: $S_{\text{sector AOB}} = \dfrac{\pi(\sqrt{6})^2}{6} = \pi \quad \ldots(2)$

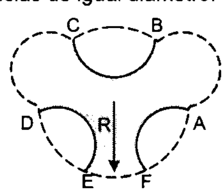
(sexta parte del círculo)

Para el cuadrilátero cóncavo AOBM, como M es baricentro del triángulo AOB, entonces:

$$S_{\text{cuadrilátero cóncavo AOBM}} = \frac{2}{3}(S_{\triangle AOB}) = \frac{2}{3}\left(\sqrt{6}^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \sqrt{3} \ \ldots(3)$$

De (2) y (3) en (1): $S_{\text{somb.}} = (\pi - \sqrt{5})\ \text{cm}^2$

10. Hallar el área de la región sombrada, donde $\overset{\frown}{EF}$ mide 60° y los demás arcos corresponden a semicircunferencias de igual diámetro.



Resolución:

Como los semicírculos tienen igual diámetro, la figura anterior es equivalente a la adjunta; luego de trasladar al región correspondiente al semicírculo en $\overline{CD}$ a $\overline{DE}$ y el de $\overline{AB}$ a $\overline{AF}$.

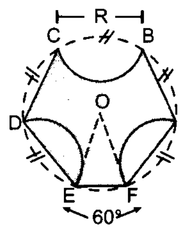
El área de esta nueva región sombreada es:

$$S_{\text{somb.}} = (S_{\text{hexágonoABCDEF}} - S_{\text{semicírculoCB}}) + S_{\text{segmento EF}} \ldots(1)$$

Donde: $S_{\text{hexágono ABCDEF}} = 6(S_{\text{triángulo EDF}}) = 6\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$$S_{\text{semicírculo CB}} = \frac{\pi CB^2}{8} = \frac{\pi R^2}{8}$$

$$\therefore\ S_{\text{segmento EF}} = S_{\text{sector EOF}} = S_{\text{triángulo EOF}} = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$



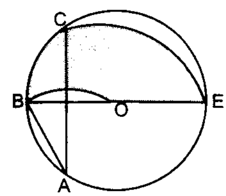
Sustituyendo en (1):

$$S_{\text{somb.}} = \left[6\left(\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) - \frac{\pi R^2}{8}\right] + \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

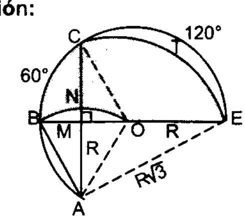
$$S_{\text{somb.}} = \frac{5}{4}R^2\sqrt{3} - \frac{\pi}{24}R^2 = \frac{R^2}{24}(30\sqrt{3} - \pi)$$

$$\therefore\ S_{\text{somb.}} = \frac{R^2}{24}(30\sqrt{3} - \pi)$$

11. A, B y C son tres vértices consecutivos de un hexágono regular inscrito en la circunferencia de centro O y radio R. Haciendo centro en A, se han trazado los arcos BO y CE. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:



Como A, B y C son vértices de un hexágono regular, deducimos que:

$m\overset{\frown}{BC} = 60$, $m\overset{\frown}{CE} = 120 = m\overset{\frown}{AE}$

$m\angle OAB = 60° = m\angle EAC$; $OM = \dfrac{R}{2}$ y $AE = L_3 = R\sqrt{3}$

La región sombreada se compone de las regiones ONBC y OCTE. Evaluando por partes:

$S_{ONBC} = S_{sector\ BOC} - S_{segmento\ BNO}$

$S_{ONBC} = S_{sector\ BOC} - (S_{sector\ OAB} - S_{\Delta OAB})$

Obsérvese que los sectores BOC y OAB son equivalentes por tener igual radio R y ángulos centrales de 60°, luego, lo anterior se reduce a:

$S_{ONBC} = S_{\Delta triángulo\ OAB}$. Esto es: $S_{ONBC} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$ ...(1)

El área de la región OCTE es igual a la del sector EAC, disminuida en los triángulos OAC y OEA, los que a su vez son equivalentes al triángulo OAB.

Así: $S_{OCTE} = S_{sector\ EAC} - (S_{\Delta OAC} + S_{\Delta OAE})$

$S_{OCTE} = S_{sector\ EAC} - 2(S_{\Delta OAB})$

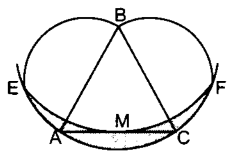
$S_{OCTE} = \dfrac{\pi(R\sqrt{3})^2}{6} - 2\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right) = \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$ ...(2)

Finalmente, con lo hallado en (1) y (2):

$S_{total} = S_{ONBC} + S_{OCTE} = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} + \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$

$S_{total} = \dfrac{R^2}{4}(2\pi - \sqrt{3})$

12. La longitud del lado del triángulo equilátero ABC es 2a. $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son diámetros de las semicircunferencias y M punto medio de $\overline{AC}$. Con centro en B se han trazado los arcos EMF y AC. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

La longitud de la altura $\overline{BM}$ del triángulo equilátero ABC es $BM = \dfrac{AB}{2}\sqrt{3} \Rightarrow BM = a\sqrt{3} = BE$

Siendo O centro de la semicircunferencia AEB, de radio a, concluimos fácilmente que $BE = L_3$, por lo que $m\overset{\frown}{EB} = 120°$.

Luego: $m\overset{\frown}{AE} = 60° = m\angle AOE$ y $m\angle ABE = 30°$

La región APMQC es un trapecio circular con centro en B, ángulo central 60° y radios BA = 2a, BM = $a\sqrt{3}$

El área respectiva:

$S_{APMQC} = \dfrac{(60°)(\pi)}{360°}[(2a)^2 - (a\sqrt{3})^2] \Rightarrow S_{APMQC} = \dfrac{\pi a^2}{6}$...(1)

Las regiones AEP y CQF son equivalentes. El área de la región AEP es igual a la del sector AOE, disminuida en la región EOP.

De modo que podemos escribir:

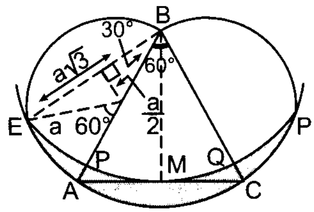
$S_{AEP} = S_{sector\ AOE} - S_{EOP}$ ...(2)

Siendo: $S_{sector\ AOE} = \dfrac{\pi a^2}{6}$ ...(3)

El área de la región EOP es igual a la del sector EBP, menos la del triángulo EOB:

$S_{EOP} = S_{sector\ EBP} - S_{\Delta EOB}$

$\Rightarrow S_{EOP} = \dfrac{\pi(a\sqrt{3})^2}{12} - \dfrac{(a\sqrt{3})\left(\frac{a}{2}\right)}{2} = \dfrac{\pi a^2}{4} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ ...(4)



Sustituyendo (3) y (4) en (2):

$S_{AEP} = \dfrac{\pi a^2}{6} - \left(\dfrac{\pi a^2}{4} - \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

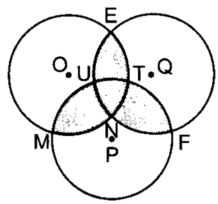
$\Rightarrow S_{AEP} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi a^2}{12} = S_{CQF}$

Finalmente, el área de la región pedida, con (1):

$S_{total} = S_{AEP} + S_{APMQC} + S_{QOF} = 2(S_{AEP}) + S_{APMQC}$

$S_{total} = 2\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{\pi a^2}{12}\right) + \dfrac{\pi a^2}{6} \quad \therefore\ S_{total} = \dfrac{a^2}{2}\sqrt{3}$

13. La figura muestra tres circunferencias de igual radio R ortogonales entre sí, dos a dos. Hallar el área de la región sombreada.



Resolución:

Se tiene: $S_{somb.} = 3(S_{MUTN}) - 2(S_{UTN})$ ...(1)

En el hexágono MOEQFP, las medidas de los ángulos en M, E y F son iguales a 90°.

Siendo la suma de las medidas de todos los ángulos interiores: $180°(6 - 2) = 720°$

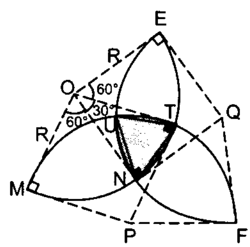
Luego: $m\angle MOE \cong m\angle EQF \cong m\angle MPF$, con medidas 150° cada uno.

Entonces: $m\overset{\frown}{MNTE} = 150°$. Además los cuadriláteros ONQE y OMPT son cuadrados.

Por lo que $m\angle EON = m\angle MOT = 90°$ y los arcos respectivos: $m\overset{\frown}{ETN} = m\overset{\frown}{MNT} = 90°$.

De donde hallamos $\overset{\frown}{NT} = 30°$

$\Rightarrow NT = L_{12} \Rightarrow NT = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$



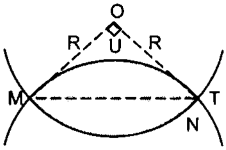
Cálculamos: $S_{UTN} = 3(S_{segmento\ NT}) + S_{\Delta UTN}$

$\Rightarrow S_{UTN} = 3(S_{sector\ NOT} - S_{\Delta NOT}) + S_{\Delta UTN}$

$S_{UTN} = 3\left(\dfrac{30°\pi R^2}{360°} - \dfrac{(R)(R)}{2}\text{sen}30°\right) + (NT)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

$\Rightarrow S_{UTN}=\frac{\pi R^2}{4}-\frac{3}{2}R^2+\frac{R^2\sqrt{3}}{2}$ ...(2)

Cálculo del S_{MUTN}: $S_{MUTN}=2(S_{MTN})$



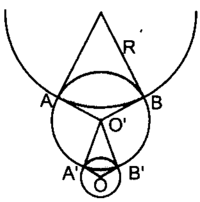
$S_{MUTN}=2\left(\frac{\pi R^2}{4}-\frac{R^2}{2}\right)\Rightarrow S_{MUTN}=\frac{\pi R^2}{4}-R^2$ ...(3)

Reemplazando (2) y (3) en (1):

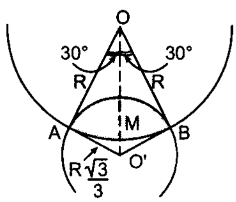
$S_{somb.}=3\left(\frac{\pi R^2}{4}-R^2\right)-2\left(\frac{\pi R^2}{4}-\frac{3R^2}{2}+\frac{R^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$S_{somb.}=(\pi-\sqrt{3})R^2$

14. Hallar el área de la región sombreada, si se sabe que la medida del ángulo AOB y la del ángulo A'O'B' es 60°. Los segmentos O'A y O'B son tangentes a la circunferencia con centro O, radio R y los segmentos O"A', O"B' son tangentes a la circunferencia de centro O'.



Resolución:



$\triangle AOB$ es equilátero: $AB=R$, $m\angle AO'B=120°$

En el $\triangle OAO'$: $O'A=\frac{R\sqrt{3}}{3}$ y en el $\triangle AMO'$ tenemos:

$m\angle O'AM=30°\Rightarrow O'M=\frac{O'A}{2}=\frac{R\sqrt{3}}{6}$

Llamando S, al área de la región común a los círculos de centro O y O'.

$S_1=\left(\frac{60°\pi R^2}{360°}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)+\left[\left(\frac{120°\pi}{360°}\right)\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2-\frac{R\left(R\frac{\sqrt{3}}{6}\right)}{2}\right]$

$S_1=\frac{5\pi R^2}{18}-\frac{R^2\sqrt{3}}{3}$ ...(1)

Para el área S_2 de la región común a los círculos de centro O' y O", por ser semejante a la anterior:

$\frac{S_2}{S_1}=\frac{(O'A')^2}{(OA)^2}\Rightarrow S_2=\frac{(O'A)^2}{(OA)^2}S_1$

Siendo: $O'A'=O'A=\frac{R\sqrt{3}}{3}$

$S_2=\frac{\left(\frac{R\sqrt{3}}{3}\right)^2}{R^2}(S_1)\Rightarrow S_2=\frac{1}{3}S_1$

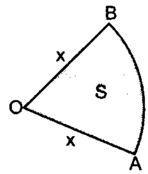
Luego: $S_{total}=S_1+S_2=S_1+\frac{1}{3}S_1$

$S_{total}=\frac{4}{3}(S_1)$; con (1): $S_{total}=\frac{4}{3}\left(\frac{5\pi R^2}{18}-\frac{R^2\sqrt{3}}{3}\right)$

$S_{total}=\frac{R^2}{9}(10\pi-4\sqrt{3})$

15. Un sector circular tiene por perímetro: L. Hallar el valor máximo del área del sector.

Resolución:



Llamando x al radio; la longitud del arco AB, será:

$L_{\overset{\frown}{AB}}=L-2x$

El área del sector: $S=\frac{1}{2}(L_{\overset{\frown}{AB}})x$

$\Rightarrow S=\frac{1}{2}(L-2x)x\Rightarrow S=\frac{Lx}{2}-x^2$

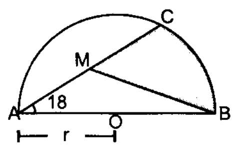
Completando cuadrados en el 2.° miembro:

$S=\frac{L^2}{16}-\left(x-\frac{L}{4}\right)^2$

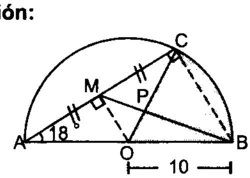
Luego, S será máximo, cuando $\left(x-\frac{L}{4}\right)^2$ sea mínimo, es decir, cuando $\left(x-\frac{L}{4}\right)^2=0$

$\therefore S_{máximo}=\frac{L^2}{16}$

16. En la figura, $\overline{AB}$ es diámetro y AM = MC. Hallar el área de la región sombreada, si el radio mide: r = 10.



Resolución:



Trazamos $\overline{OM}$, entonces, como AM = MC:

$\overline{OM}\perp\overline{AC}$

También: $m\angle ACB=90°$

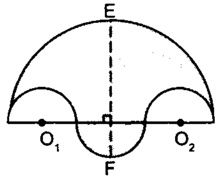
⏢OMCB es un trapecio.

Por propiedad: $S_{\triangle MPC}=S_{\triangle OPB}$

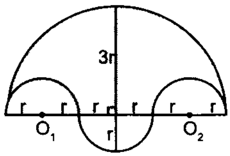
La región propuesta, equivale al sector COB:

$\Rightarrow S_{sombreada}=\pi(10^2)\left(\frac{36}{360}\right)$ $\therefore S_{sombreada}=10\pi$

17. En la figura, EF = a, calcular el área de la región sombreada.



Resolución:



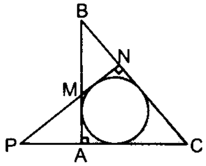
Dato: $4r = a \Rightarrow r = \dfrac{a}{4}$

El área pedida será: $S = \dfrac{\pi}{2}(3r)^2 - \dfrac{\pi}{2}r^2$

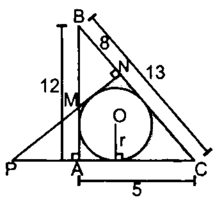
$S = \dfrac{\pi}{2}r^2\,(9-1) \Rightarrow S = 4\pi r^2$

Reemplazando: $S = 4\pi\left(\dfrac{a}{4}\right)^2 = \dfrac{\pi a^2}{4}$

18. En la figura, AC = 5 m y AB = 12 m. Calcular el área de la región sombreada en m^2.



Resolución:



$\triangle ABC$; por Poncelet: $12 + 5 = 13 + 2r \Rightarrow r = 2$

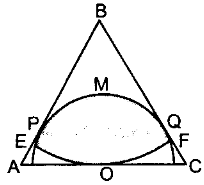
$\triangle MBN \sim \triangle CBA$: $\dfrac{MN}{5} = \dfrac{8}{12} \Rightarrow MN = \dfrac{10}{3}$

Luego: $S_{somb.} = \dfrac{(5)(12)}{2} - \dfrac{\left(\frac{10}{3}\right)(8)}{2} - \pi(2)^2$

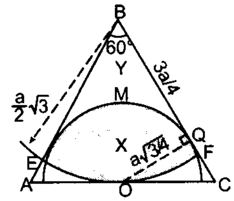
$S_{somb.} = 30 - \dfrac{40}{3} - 4\pi \Rightarrow S_{somb.} = \dfrac{50}{3} - 4\pi$

$\therefore\ S_{somb.} = \dfrac{2}{3}(25 - 6\pi)$

21. Sobre el lado $\overline{AC}$ del triángulo equilátero ABC, se encuentra el centro O de la semicircunferencia tangente a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en P y Q. Además el centro de arco EOF es B. Si AB = a, calcular el área de la región limitada por las poligonales mixtas EPMQFO.



Resolución:



$Y = \dfrac{3a}{4}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right) - \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 \Rightarrow Y = \dfrac{a^2}{16}(3\sqrt{3} - \pi)$

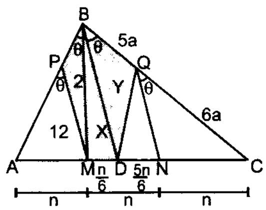
$X = \dfrac{\pi}{6}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{16}(3\sqrt{3} - \pi)$

$X = \dfrac{\pi}{8}a^2 - \dfrac{a^2}{16}(3\sqrt{3} - \pi) = \dfrac{a^2}{16}(2\pi - 3\sqrt{3} + \pi)$

$X = \dfrac{a^2}{16}(3\pi - 3\sqrt{3}) \quad \therefore\ X = \dfrac{3a^2}{16}(\pi - \sqrt{3})$

19. En el triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{BD}$ ($D \in \overline{AC}$) y se ubica M y N sobre $\overline{AC}$, tal que AM = MN = NC. Si $\overline{MP}$ ($P \in \overline{AB}$), $\overline{NQ}$ ($Q \in \overline{BC}$) y $\overline{BD}$ son paralelos y además $S_{\triangle ABC} = 42\ m^2$ y $S_{\triangle BPM} = 2\ m^2$; calcular S_{PBQDM}.

Resolución:

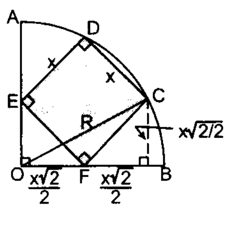


$$\dfrac{S_{DQC}}{\underbrace{S_{MBC}}_{28}} = \dfrac{6a\left(\dfrac{11n}{6}\right)}{11a(2n)} \Rightarrow S_{DQC} = 14 \Rightarrow x + y = 14$$

Luego: $S_{PBQDM} = 2 + 14 = 16\ m^2$

20. En un cuadrante AOB de centro O, se inscribe un cuadrado CDEF con C y D en $\overset{\frown}{AB}$ y, E y F en $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Si OA = OB = R, hallar el área del cuadrado.

Resolución:

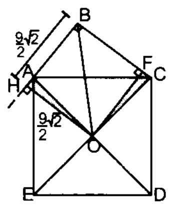


$\triangle OCH$: $R^2 = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (x\sqrt{2})^2$

$R^2 = \frac{x^2}{2} + 2x^2 \Rightarrow \frac{5x^2}{2} = R^2 \quad \therefore x^2 = \frac{2R^2}{5}$

21. Sobre la hipotenusa $\overline{AC}$ de un triángulo rectángulo ABC, se construye exteriormente el cuadrado ACDE de centro O, $\overline{OB}$ = 9 m. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

Resolución:

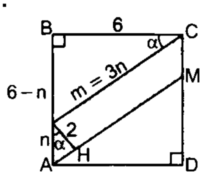


$\triangle AHO \cong \triangle FCO$: $S_{ABCO} = S_{HBFO}$

$\Rightarrow S_{ABCO} = \left(\frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \therefore S_{ABCO} = 40{,}5\ m^2$

22. En el cuadrado ABCD de 6 cm de lado, M $\in \overline{CD}$, N $\in \overline{AB}$ y $\overline{AM}$ // $\overline{CN}$. Si la distancia entre $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$ es 2 cm, calcular el área de la región AMCN.

Resolución:



$\triangle NBC \sim \triangle NHA$: $\frac{m}{n} = \frac{6}{2} \Rightarrow m = 3n$

$\triangle NBC$: $(3n)^2 = 6^2 + (6 - n)^2$

$9n^2 = 36 + 36 - 12n + n^2$

$8n^2 + 12n - 72 = 0 \Rightarrow 2n^2 + 3n - 18 = 0$

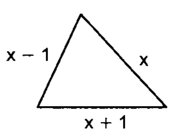
$n^2 + (3/2)n - 9 = 0 \Rightarrow n = 2{,}34$

Luego: $S_{AMCN} = 2(3n) = 6n = 6(2{,}34)$

$\therefore S_{AMCN} = 14\ cm^2$

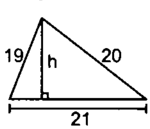
23. Los lados de un triángulo son 3 números enteros consecutivos, el perímetro es 60 m. Hallar el área del triángulo.

Resolución:



Por dato: $x - 1 + x + x + 1 = 60$

$\Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = 20$

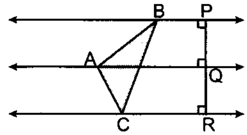


Por Euclides: $400 = 361 + 441 - 2n(21) \Rightarrow n = \frac{201}{21}$

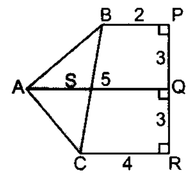
Por Pitágoras: $h^2 = 361 - \frac{40\,401}{441} \Rightarrow h = \frac{10}{7}\sqrt{33}$

$S_{ABC} = \frac{21}{2}\left(\frac{10}{7}\sqrt{33}\right) \quad \therefore S_{ABC} = 15\sqrt{33}\ m^2$

24. En la figura, calcular el área de la región triangular ABC. Si AQ = 5 m, CR = 4 m, PR = 6 m, PQ = QR y BP = 2m.



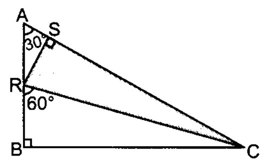
Resolución:



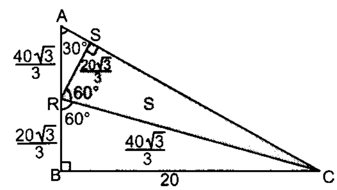
$S = \left(\frac{5+2}{2}\right)(3) + \left(\frac{4+5}{2}\right)(3) - \left(\frac{2+4}{2}\right)(6)$

Simplificando: $S = 6\ m^2$

25. En la figura, BC = 20, hallar el área de la superficie del triángulo RSC.



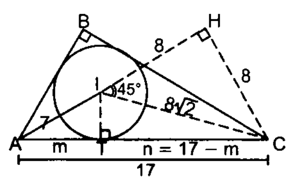
Resolución:



$S = \frac{20\sqrt{3}}{3}\left(\frac{40\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\text{sen}60}{2}\right) = \frac{800}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{200\sqrt{3}}{3}$

26. En un triángulo rectángulo, las distancias del incentro a los extremos de la hipotenusa miden 7 m y $8\sqrt{2}$ m. Calcular el área de dicha región triangular.

Resolución:



$\triangle AIT \sim \triangle ACH$: $\dfrac{m}{15} = \dfrac{7}{17} \Rightarrow m = \dfrac{105}{17}$

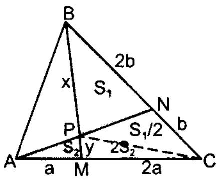
$TC = n = 17 - \dfrac{105}{17} \Rightarrow n = \dfrac{184}{17}$

Luego: $S_{ABC} = mn = \dfrac{105}{17}\left(\dfrac{184}{17}\right)$

Efectuando: $S_{ABC} = 66{,}85\ m^2$

27. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas BM y AN ($M \in \overline{AC}$ y $N \in \overline{BC}$), tal que MC = 2(AM) y BN = 2(NC). Si las cevianas se intersecan en el punto P, hallar la relación entre las áreas de las regiones triangulares BPN y APM.

Resolución:



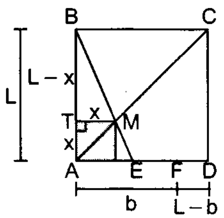
Por el teorema de Meneleao en el $\triangle MBC$:

$b(x)a = 2b(y)3a \Rightarrow x = 6y$

Luego: $\dfrac{S_1 + S_1/2}{2S_2} = 6 \Rightarrow \dfrac{S_1}{S_2} = 8$

28. En un cuadrado ABCD es traza la diagonal $\overline{AC}$ y en $\overline{AD}$ se ubican los puntos E y F de manera que $\overline{BE} \cap \overline{AC} = \{M\}$, AF = b, AE = b, (AE)(FD) = (EF)(AD). Hallar el área del cuadrado cuya diagonal es $\overline{AM}$.

Resolución:



$\triangle BTE \sim \triangle BAE$: $\dfrac{AE}{x} = \dfrac{L}{L-x} \Rightarrow AE = \dfrac{Lx}{L-x}$ ...(1)

$EF = b - \dfrac{Lx}{L-x} \Rightarrow EF = \dfrac{bL - bx - Lx}{L-x}$ ...(2)

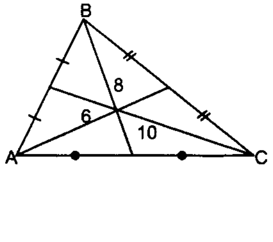
Condición: (AE)(FD) = (EF)(AD) ...(3)

(1) y (2) en (3):

$\dfrac{Lx}{L-x}(L) - b = \dfrac{bL - bx - Lx}{L-x}(L) \Rightarrow x^2 = \dfrac{b^2}{4}$

29. En un triángulo las medianas miden 6, 8 y 10 . Hallar el área de la región triangular.

Resolución:



Si $M = \dfrac{6+8+10}{2} \Rightarrow M = 12$

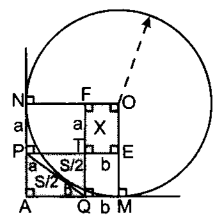
Por la fórmula de Herón:

$S_{ABC} = \dfrac{4}{3}\sqrt{12(12-6)(12-8)(12-10)}$

$S_{ABC} = \dfrac{4}{3}\sqrt{(12)(6)(4)(2)} \Rightarrow S_{ABC} = 32$

30. Dado un punto exterior A a una circunferencia de centro O, se trazan las tangentes $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$, de modo que la m$\angle$NAM = 90°. Una recta tangente a la circunferencia interseca a los segmentos AN y AM en P y Q, respectivamente. Las perpendiculares a $\overline{AN}$ y $\overline{AM}$ trazadas desde P y Q respectivamente intersecan a $\overline{OM}$ y $\overline{ON}$ en E y F, respectivamente, y $\overline{PE} \cap \overline{QF} = \{T\}$. Si el área de la región APTQ es S, hallar el área de TFOE.

Resolución:



Dato: $S_{APTQ} = S \Rightarrow 2S_{APQ} = S \Rightarrow S_{APQ} = \dfrac{S}{2}$

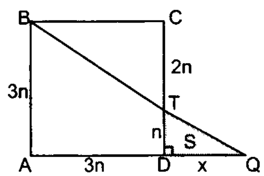
Pero: $S_{APQ} = ab = \dfrac{S}{2}$ ...(1)

Se pide: X = ab ...(2)

De (1) y (2): $X = \dfrac{S}{2}$

31. ABCD es un cuadrado, en donde T es un punto de $\overline{CD}$ y se cumple que $\dfrac{CT}{TD} = \dfrac{2}{1}$, la recta que pasa por los puntos B y T interseca a $\overline{AD}$ en Q. Si el área de la región triangular TDQ es S unidades cuadradas, calcular el área de la región cuadrada.

Resolución:



$\triangle BAQ \sim \triangle TDQ$: $\dfrac{3n}{n} = \dfrac{3n+x}{x} \Rightarrow x = \dfrac{3n}{2}$

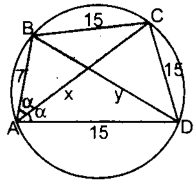
Luego: $S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3n}{2}\right)(n) \Rightarrow n^2 = \dfrac{4}{3}S$

Ahora: $S_{ABCD} = (3n^2) = 9n^2 = 9\left(\dfrac{4}{3}S\right)$

$\therefore\ S_{ABCD} = 12\ S$

32. En un cuadrilátero inscriptible ABCD sus lados miden: AB = 7 cm, BC = CD = 15 cm y AD = 25 cm. Hallar el área de la región triangular ABC (en cm^2)

Resolución:



Por Ptolomeo:

$xy = 15 \times 7 + 15 \times 25 = 15(7 + 25)$

$xy = 15(32)$ ...(1)

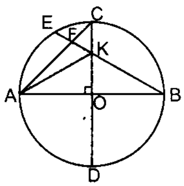
Por Viette: $\frac{x}{y} = \frac{15 \times 15 + 7 \times 25}{7 \times 15 + 15 \times 25} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{5}{6}$

De (1) y (2): $x = 20$

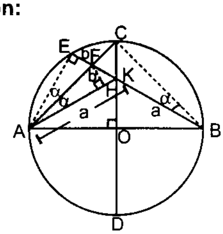
Luego: $S_{ABC} = \sqrt{21(21-20)(21-7)(21-15)}$

$\therefore\ S_{ABC} = 42\ cm^2$

33. En la figura, O centro de la circunferencia, BK = a y FE = b. Hallar el área de la región triangular AKF.



Resolución:

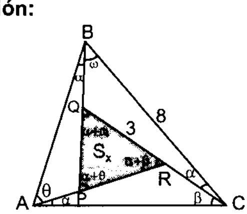


$\overrightarrow{AF}$ es bisectriz, por teorema: EF = FH = b.

Luego: $S_{AFK} = \frac{1}{2}(a)(b) \Rightarrow S_{AFK} = \frac{ab}{2}$

34. Dado el triángulo ABC, cuya región tiene como área 128 cm^2, en el interior se tiene el triángulo PQR, de manera que las prolongaciones de los lados PQ, QR y RP pasen por los vértices B, C y A; además, la m∠PAC = m∠ABQ = m∠BCR, si CR = 3, BC = 8. Hallar el área de la región PQR.

Resolución:

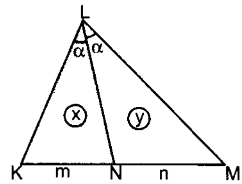


$\triangle ABC \sim \triangle PQR$: $\frac{S_{ABC}}{8} = \frac{S_x}{3}$

$\Rightarrow \frac{128}{8} = \frac{S_x}{3} = S_x = 16(3) \quad \therefore\ S_x = 48$

35. El área de una región triangular KLM es S, la bisectriz $\overline{LN}$ divide al lado opuesto dos segmentos que miden KN = m, MN = n. Hallar el área de la región triangular KLN.

Resolución:



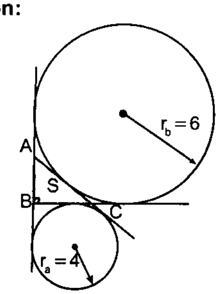
Dato: $x + y = S$

Por relación de áreas: $\frac{x}{y} = \frac{m}{n} \Rightarrow y = \frac{xn}{m}$

$\Rightarrow x + \frac{xn}{m} = S \Rightarrow x(m+n) = mS \quad \therefore\ x = \frac{Sm}{m+n}$

36. Si en un triángulo rectángulo los exradios relativos a la hipotenusa y un cateto miden 6 cm y 4 cm, respectivamente, hallar el área de la región triangular.

Resolución:



Por teoría:

$S = pr \Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{p}{S}$ ...(1)

$S = r_a r_c \Rightarrow \frac{1}{r_c} = \frac{r_a}{S}$ ...(2)

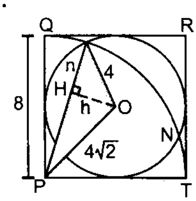
Luego: $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Rightarrow \frac{p}{S} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{4}{S}$

Pero: $p = r_b = 6 \Rightarrow \frac{6}{S} = \frac{5}{12} + \frac{4}{S} \Rightarrow \frac{6}{S} - \frac{4}{S} = \frac{5}{12}$

$\therefore\ \frac{2}{S} = \frac{5}{12} \Rightarrow S = \frac{24}{5}\ cm^2$

37. Sea el cuadrado PQRT circunscrito a una circunferencia de centro O y radio igual a 4. Se traza con centro en P, el cuadrante $\overset{\frown}{QPT}$ que interseca a la circunferencia en M y N. Hallar el área de la región triangular OMP.

Resolución:



$\triangle PMO$; por el teorema de Euclides:

$(4\sqrt{2})^2 = 4^2 + 8^2 - 2n(8)$

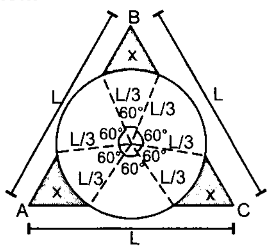
$16n = 16 + 64 - 32 \Rightarrow n = 3$

$\triangle MHO$: $h^2 = 4^2 - 3^2 - 16 - 9 = 7 \Rightarrow h = \sqrt{7}$

Luego: $S_{PMO} = \frac{1}{2}(8)(\sqrt{7}) \Rightarrow S_{PMO} = 4\sqrt{7}$

38. El lado de un triángulo regular mide L. El baricentro del triángulo es el centro de la circunferencia cuyo radio mide L/3. Hallar el área de la parte de la región triangular que se encuentra fuera de la circunferencia.

Resolución:

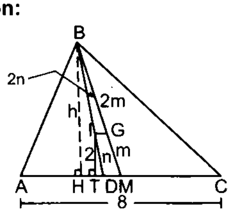


$$3x = \frac{L^2\sqrt{3}}{4} - \left[3\frac{(L/3)^2\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi(L/3)^2}{2}\right]$$

$$3x = \frac{L^2}{18}(3\sqrt{3} - \pi)$$

39. En un triángulo ABC, el segmento que une el baricentro con el incentro es paralelo al lado $\overline{AC}$. Si AC = 8 m y el inradio mide 2 m. Calcule el área de la región triangular ABC.

Resolución:



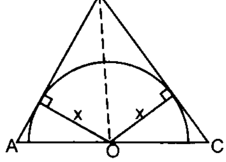
Si $\overline{IG} \parallel \overline{AC} \Rightarrow \frac{BI}{ID} = \frac{2}{1}$

$\triangle BHD \sim \triangle ITD$: $\frac{h}{2} = \frac{3n}{n} \Rightarrow h = 6$

Luego: $S_{ABC} = \frac{1}{2}(8)(6) = 24\ m^2$

40. En el lado $\overline{AC}$ de un triángulo ABC, se ubica un punto O, centro de una circunferencia tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Hallar la longitud del radio de la circunferencia, si: $S_{\triangle ABC} = a$; AB + BC = k

Resolución:



Dato: $S_{\triangle ABC} = a \wedge AB + BC = k$

$S_{AOB} = \frac{1}{2}(AB)(x)$ ...(1)

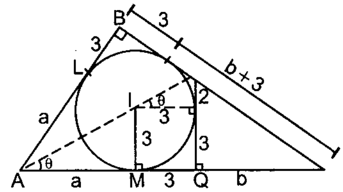
$S_{BOC} = \frac{1}{2}(BC)(x)$ ...(2)

Sumando (1) y (2): $\underbrace{S_{AOB} + S_{BOC}}_{S_{ABC}} = \frac{x}{2}\underbrace{(AB + BC)}_{k}$

$\Rightarrow A = \frac{xk}{2} \quad \therefore x = \frac{2A}{k}$

41. El inradio de un triángulo rectángulo, ABC mide 3. Se traza un segmento QP perpendicular a la hipotenusa $\overline{AC}$ ($Q \in \overline{AC}$, $P \in \overline{BC}$) y que es tangente a la circunferencia inscrita en el punto T. Si PT = 2, hallar el área de la región triangular ABC

Resolución:



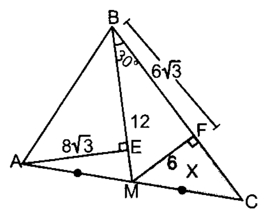
$\triangle AIM \sim \triangle IPT$: $\frac{a}{3} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{2}$

$\triangle PQC \sim \triangle ABC$: $\frac{b}{b+6} = \frac{5}{\frac{15}{2}} \Rightarrow b = 12$

Luego: $S_{\triangle ABC} = \left(\frac{9}{2}\right)(3 + 12) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{135}{2}$

42. En un triángulo ABC se traza la mediana $\overline{BM}$ y luego $\overline{MF}$ perpendicular a $\overline{BC}$ ($F \in \overline{BC}$); si A dista $8\sqrt{3}$ de $\overline{BM}$, MF = 6 y m∠MBC = 30°, hallar el área de la región triangular MFC.

Resolución:



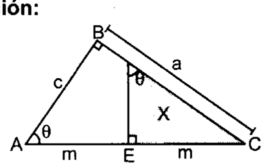
$S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2}(12)(8\sqrt{3}) = 48\sqrt{3}$

$S_{\triangle BFM} + X = 48\sqrt{3} \Rightarrow 18\sqrt{3} + X = 48\sqrt{3}$

$\therefore X = 30\sqrt{3}$

43. En un triángulo ABC, recto en B, AB = c, BC = a. Se traza la mediatriz $\overline{EF}$ relativa al lado $\overline{AC}$, $E \in \overline{AC}$, $F \in \overline{BC}$. Hallar el área de la región FEC.

Resolución:



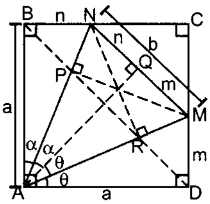
$\triangle ABC \sim \triangle FEC$: $\dfrac{x}{\frac{ac}{2}} = \left[\dfrac{m}{a}\right]^2 \Rightarrow x = \dfrac{c}{2a}m^2$ ...(1)

$\triangle ABC$: $(2m)^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow m^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{4}$ ...(2)

(2) en (1): $x = \dfrac{c}{2a}\left(\dfrac{a^2 + c^2}{4}\right) \quad \therefore\ x = \dfrac{c}{8a}(a^2 + c^2)$

44. Sea un cuadrado ABCD, cuyo lado mide a, en $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ se tiene N y M, tal que m∠MAN = 45° y MN = b. Hallar el área de la región ANCM.

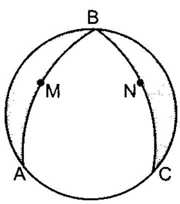
Resolución:



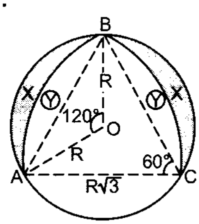
Área pedida: $S = a^2 - \left[\dfrac{an}{2} + \dfrac{am}{2}\right]$

$S = a^2 - \dfrac{a}{2}\underbrace{(m + n)}_{b} \Rightarrow S = a^2 - \dfrac{ab}{2}$

45. En la figura, $m\overset{\frown}{AB} \cong m\overset{\frown}{BC} \cong m\overset{\frown}{AC}$ sobre la circunferencia de radio R con centros en A y C se trazan los arcos $\overset{\frown}{AMB}$ y $\overset{\frown}{BNC}$. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución:



$Y = \dfrac{\pi}{6}(R\sqrt{3})^2 - \dfrac{(R\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$

Pero: $X + Y = \dfrac{\pi}{3}R^2 - \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{R}{2}\right)$

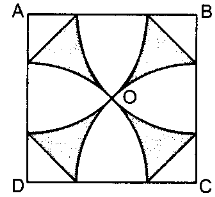
$X + \dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4} = \dfrac{\pi}{3}R^2 - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}$

$X = \dfrac{3R^2\sqrt{3}}{4} - \dfrac{R^2\sqrt{3}}{4} - \left(\dfrac{\pi R^2}{2} - \dfrac{\pi R^2}{3}\right)$

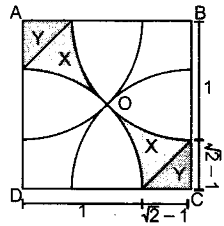
$X = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\pi R^2}{6} \Rightarrow 2X = R^2\left(\sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\therefore\ 2X = \dfrac{R^2}{3}(3\sqrt{3} - \pi)$

46. En la figura, O es el centro del cuadrado de $\sqrt{2}$ m de lado y los arcos han sido trazados con centro en los vértices. Hallar el área de la cruz mixtilínea sombreada.



Resolución:



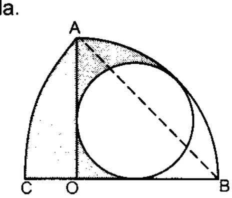
$Y = \dfrac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2} \Rightarrow 2Y = 3 - 2\sqrt{2}$ ...(1)

$2X = (\sqrt{2})^2 - \dfrac{\pi(1)^2}{2} - 3 + 2\sqrt{2}$

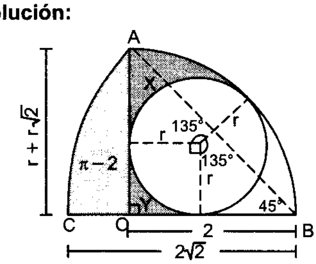
$2X = 2 - \dfrac{\pi}{2} - 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow 2X = 2\sqrt{2} - \dfrac{\pi}{2} - 1$

$\Rightarrow 4X = 4\sqrt{2} - \pi - 2 \quad \therefore\ 4X = 0{,}50\ cm^2$

47. En la figura, OAB es un cuadrante AO = 2 y el $\overset{\frown}{AC}$ tiene su centro en B. Calcular el área de la región sombreada.



Resolución:



$r + r\sqrt{2} = 2 \Rightarrow r = 2(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow r^2 = 4(3 - 2\sqrt{2})$

$2X = \pi - \left(\dfrac{3\pi r^2}{4} + r^2\right) \Rightarrow X = \sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2})(\pi - \sqrt{2})$

Pero: $Y = (3 - 2\sqrt{2})(4 - \pi) \Rightarrow S = X + Y + S_{CAO}$

$S = \sqrt{2}(3 - 2\sqrt{2})(p - \sqrt{2}) + (3 - 2\sqrt{2})(4 - \pi) + \pi - 2$

Simplificando: $S = 5\pi\sqrt{2} - 4\sqrt{2} - 6\pi + 4$

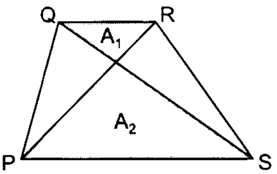
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

Las diagonales de un trapecio dividen a éste en cuatro triángulos. Si las áreas de los triángulos adyacentes a las bases son A_1 y A_2, entonces el área total del trapecio en función de A_1 y A_2 es:

A) $A_1 + A_2 + \sqrt{A_1A_2}$
B) $2\sqrt{A_1A_2}$
C) A_1A_2
D) $(\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2$
E) $A_1 + A_2 - \sqrt{A_1A_2}$

Resolución:



En el trapecio PQRS, por propiedad

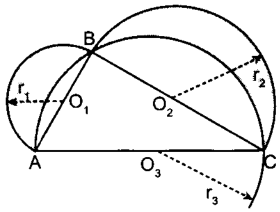
$\text{Área}_{(PQRS)} = (\sqrt{A_1} + \sqrt{A_2})^2$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

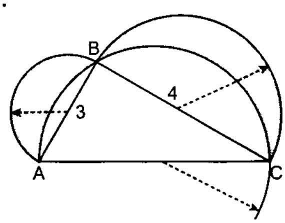
En la figura mostrada O_1, O_2 y O_3 son centros de semicircunferencias con radios de longitud r_1, r_2 y r_3, respectivamente.

Si AB = 3 cm y BC = 4 cm, entonces el área (en cm^2) de la región sombreada es:



A) 4
B) 5
C) 6
D) 4π
E) 5π

Resolución:



Piden: $A_{\text{región sombreada}}$

Por el teorema de las lúnulas de Hipócrates.

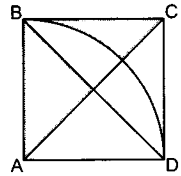
$A_{\text{región sombreada}} = A_{\triangle ABC} = \dfrac{3 \times 4}{2}$

$A_{\text{región sombreada}} = 6$

Clave: C

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

En el gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado de lado L y BAD es un sector circular con centro en A. Calcule el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{L^2}{4}(4 - \pi)$
B) $\dfrac{L^2}{4}(4 + \pi)$
C) $\dfrac{L^2}{8}(2 + \pi)$
D) $\dfrac{L^2}{8}(8 - \pi)$
E) $\dfrac{L^2}{8}(6 + \pi)$

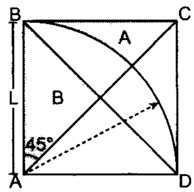
Resolución:

Piden: A + B

$A = \dfrac{L^2}{2} - \dfrac{\pi L^2}{8}$

$B = \dfrac{L^2}{4}$

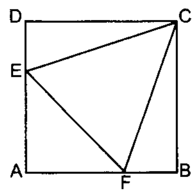
$\therefore A + B = \dfrac{L^2}{8}(8 - \pi)$



Clave: D

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Si ABCD es un cuadrado y CEF un triángulo equilátero, entonces el valor de $\dfrac{\text{área CEF}}{\text{área ABCD}}$ es igual a:



A) $\sqrt{2} - 1$
B) $\sqrt{3} - 1$
C) $2\sqrt{3} - 3$
D) $1/\sqrt{2}$
E) $1/\sqrt{3}$

Resolución:

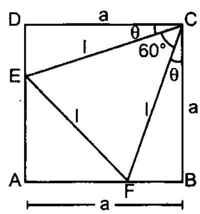
Piden: $\dfrac{A_{\triangle CEF}}{A_{\square ABCD}}$

$\triangle FBC \cong \triangle EDC \Rightarrow \theta = 15°$

$\triangle EDC$: $a = \dfrac{l}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})$

$$\frac{A_{\triangle CEF}}{A_{\square ABCD}} = \frac{\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}}{\left[\dfrac{l}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2})\right]^2}$$

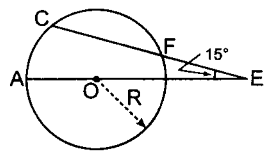
$$\frac{A_{\triangle CEF}}{A_{\square ABCD}} = 2\sqrt{3} - 3$$



Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

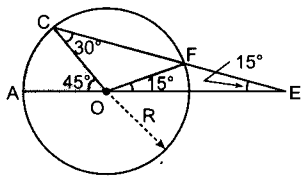
En la figura mostrada, O es centro de la circunferencia cuyo radio mide R unidades. Si AO = FE y m∠CEA = 15°, entonces el área del sector circular AOC es a la longitud de la circunferencia como:



A) $\frac{R}{12}$ B) $\frac{R}{14}$ C) $\frac{R}{15}$

D) $\frac{R}{16}$ E) $\frac{R}{18}$

Resolución:



Piden: $\frac{A_{\triangleleft}}{L_{O}}$

$$A_{sector\triangleleft} = \pi R^2\left(\frac{45°}{360°}\right) = \frac{\pi R^2}{8}$$

$L_{O} = 2\pi R$

$$\frac{A_{\triangleleft}}{L_{O}} = \frac{\frac{\pi R^2}{8}}{2\pi R} = \frac{R}{16}$$

Clave: D

PROBLEMA 6 (UNI 2013 - II)

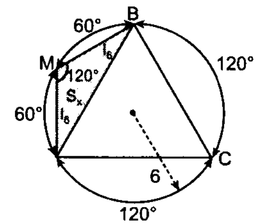
Se tiene un triángulo equilátero ABC inscrito en una circunferencia de radio r = 6 cm, si M es el punto se divide al arco $\widehat{AB}$ en partes iguales (M ≠ C), entonces el área de la región triangular AMB en cm2 es:

A) $8\sqrt{3}$ B) $9\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$

D) $11\sqrt{3}$ E) $12\sqrt{3}$

Resolución:

Piden $S_{(x)}$



$L_6 = R = 6$

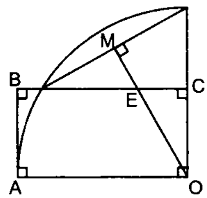
$$\therefore\ S_x = \frac{6\times 6}{2}\text{sen } 120°$$

$S_x = 9\sqrt{3}$

Clave: B

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el área del rectángulo ABCD, si EM= 3 y EO = 2



A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 15

2. En un romboide ABCD siendo O punto de intersección de las diagonales, si las distancias de O a los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$ son 2 y 3, respectivamente, y m∠ABC = 135°, Calcular el área de la región ABCD.

A) $12\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{2}$
D) $20\sqrt{2}$ E) $24\sqrt{2}$

3. En un semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O se ubican los puntos P, Q y R. Calcular el área de la región limitada por el rombo PQRS tal que QS = 2(SO) = 2a, (S ∈ $\overline{QO}$)

A) $a^2\sqrt{5}$ B) $a^2\sqrt{6}$ C) $2a^2\sqrt{5}$
D) $2a^2\sqrt{10}$ E) $a^2\sqrt{10}$

4. En un rombo ABCD en $\overline{BC}$ se ubica el punto medio M. Las diagonales del rombo intersecan a $\overline{AM}$ y $\overline{MD}$ en N y Q, respectivamente. Si NQ = 5 y m∠BAD = 74°, calcular el área de la región limitada por el rombo.

A) 284 B) 216 C) 324
D) 356 E) 420

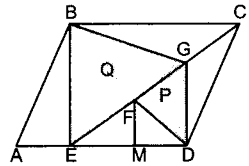
5. En los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de un cuadrado ABCD, se ubican los puntos E y F, respectivamente, de modo que EB = FD = 2 y EF = $\sqrt{26}$. Calcular el área de la región cuadrada ABCD.

A) 25 B) 24 C) 18
D) 36 E) 15

6. En un trapecio ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), AD = 4(BC), se inscribe un rectángulo PQRS, tal que Q ∈ $\overline{AB}$, R ∈ $\overline{CD}$ y P con S están ubicados en $\overline{AD}$. Calcular la razón de áreas de las regiones limitadas por dichos cuadriláteros, si AQ =2(QB).

A) 8/19 B) 7/16 C) 9/1
D) 2/3 E) 8/15

7. Calcular Q/P, si $\overline{MF}$ // $\overline{GD}$, ABCD es romboide y AE = EM = MD



A) 2 B) 3 C) 5/3 D) 4/1 E) 7/3

8. En un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), se traza $\overline{BH}$ ⊥ $\overline{AD}$ (H ∈ $\overline{AD}$). Calcular el área de la región trapecial ABCD, si AC = 6 y BH = 2

A) $8\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{2}$ C) $5\sqrt{5}$
D) $8\sqrt{2}$ E) 12

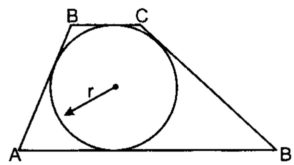
9. En un cuadrilátero convexo ABCD, M, N, Q y R son puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, respectivamente; en la prolongación de $\overline{DB}$ se ubica el punto F y la suma de las áreas de las regiones triangulares RMF y QNF es 10 m^2. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

A) 40 m^2 B) 36 m^2 C) 20 m^2
D) 25 m^2 E) 50 m^2

10. Se tiene un cuadrante AOB de radio 2, en $\overset{\frown}{AB}$ se ubica el punto C de modo que la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{OB}$ es igual a $\sqrt{3}$. Calcular el área de la región cuadrangular ACBO.

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

11. En la figura, $\overline{BC}$ // $\overline{AD}$, r = 6, BC = 7 y CD = 13. Calcular el área de la región cuadrangular ABCD.



A) 140 B) 168 C) 136 D) 145 E) 196

12. Sobre los lados de un cuadrado se construyen exteriormente triángulos equiláteros. Calcular el área del cuadrilátero que se forma al unir los vértices libres de los triángulos equiláteros, si el lado del cuadrado mide "b".

A) $b^2(\sqrt{3}+1)$ B) $b^2(2\sqrt{3}-1)$ C) $3b^2$
D) $b^2(2+\sqrt{3})$ E) $b^2(4+3\sqrt{3})$

13. En un romboide ABCD la semicircunferencia de diámetro $\overline{AD}$ pasa por B e interseca a $\overline{BC}$ en P. Si BP = 8 y PC = 2, calcular el área del romboide ABCD.

A) 16 B) 20 C) 25
D) 30 E) 40

14. Se tiene un cuadrilátero bicéntrico ABCD, tal que AB = 6; BC = 5 y CD = 9. Calcular la medida del radio de la circunferencia inscrita.

A) 1 B) 2 C) $3\sqrt{2}$
D) $2\sqrt{3}$ E) 3

15. Una circunferencia es tangente a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$ de un rectángulo ABCD y además contiene a C, dicha circunferencia interseca a $\overline{CD}$ en M. Calcular el área de la región cuadrangular ABMD, si AB = 9, AD = 8.

A) 8 B) 32 C) 16
D) 40 E) 24

16. Se tiene un rectángulo ABCD, desde D se traza $\overline{DE} \perp \overline{AC}$, luego se traza $\overline{BF}$ perpendicular a la prolongación de $\overline{DE}$. Si BF = 6 y DE = 4, calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 80

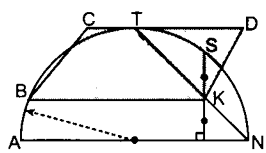
17. Se tienen dos circunferencias concéntricas de centro O. Se traza la cuerda $\overline{AB}$ que es tangente a la circunferencia menor, si los radios $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ intersecan a la circunferencia menor en N y M, respectivamente, OA = R y m∠AOB = 120°. Calcular el área de la región cuadrangular ANMB.

A) $\frac{R^2\sqrt{3}}{16}$ B) $\frac{2R^2}{15}$ C) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{16}$
D) $\frac{3R^2\sqrt{3}}{15}$ E) $\frac{7R^2\sqrt{3}}{15}$

18. La circunferencia inscrita en un △ABC, recto en B, es tangente en P, Q y M a los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente. Luego se traza $\overline{MH} \perp \overline{BC}$ (H ∈ $\overline{QC}$), siendo APHM un rombo. Calcular la relación entre las áreas de las regiones ABQM y QMC.

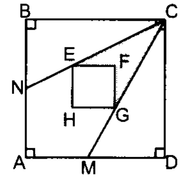
A) 1/1 B) 2/1 C) 3/1
D) 4/3 E) 5/2

19. Calcular el área de la región paralelográmica BCDK, si SK = KE = 2 y $\overline{CD}$ // $\overline{NA}$. (T es punto de tangencia).



A) $2(3 + \sqrt{21})$ B) $3(3 + \sqrt{21})$ C) $3\sqrt{21}$
D) $4(4 + \sqrt{21})$ E) $2(2 + \sqrt{21})$

20. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 8, la región cuadrangular ECGF es de área 4, EFGH es un cuadrado donde $\overline{EH}$ // $\overline{AB}$; $\overline{HG}$ // $\overline{AD}$ según se muestra en la figura. Si BN = NA, AM = MD, determinar $\overline{EF}$.



A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) 3
D) 4 E) $2\sqrt{2}$

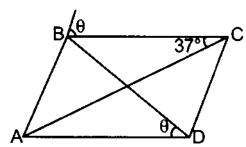
21. En un cuadrante AOB de radio 2, en $\overset{\frown}{AB}$, se ubica el punto C de modo que la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{OB}$ es igual a $\sqrt{3}$. Calcular el área de la región cuadrangular ACBO.

A) $3\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) $2\sqrt{6}$

22. Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ de un triángulo ABC se construyen los cuadrados ABFL y BOQR, exteriores al triángulo. Hallar el área de la región cuadrangular AFRC, siendo AR = 8.

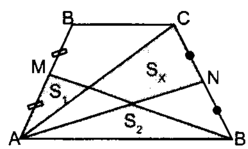
A) 16 B) 18 C) 20
D) 24 E) 32

23. Calcular el área del romboide ABCD, si AC = 15



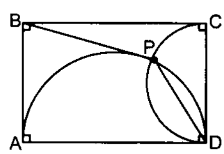
A) 36 B) 54 C) 48
D) 72 E) 108

24. En el gráfico ($\overline{BC}$ // $\overline{AD}$), AM = MB, CN = ND, $S_1 = 4$, $S_2 = 9$. Calcular S_x.



A) 13 B) 12 C) 16
D) 15 E) $\sqrt{97}$

25. Calcular el área de la región rectangular ABCD, si BP = 2 y PD = 1



A) $\sqrt{5}$
B) $2\sqrt{5}$
C) $\sqrt{7}$
D) $4\sqrt{7}$
E) $2\sqrt{7}$

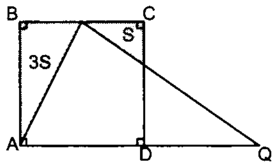
26. En un triángulo ABC de incentro I, AB = 2, BC = 4 y AC = 3. Calcular el área de la región trapecial AMNC, sabiendo que $M \in \overline{AB}$; $I \in \overline{MN}$ y $N \in \overline{BC}$

A) $\frac{5}{7}\sqrt{15}$ B) $\frac{5}{12}\sqrt{3}$ C) $\frac{6}{7}\sqrt{21}$
D) $\frac{5}{12}\sqrt{15}$ E) $\frac{13\sqrt{15}}{16}$

27. El área de la región correspondiente a un cuadrado es 100. En el cuadrado se inscribe un rectángulo, cuya diagonal mide 12. Calcular el área de la región rectangular.

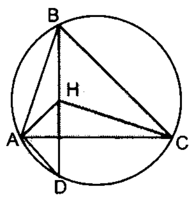
A) 10 B) 24 C) 28 D) 30 E) 36

28. Calcular el área de la región correspondiente al cuadrado ABCD, si AD = DQ.



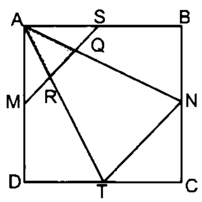
A) 4S B) 5S C) $6\sqrt{2}$S
D) 8S$(2 + \sqrt{2})$ E) 12S

29. En la figura, H es ortocentro del $\triangle$ABC, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ y AB = 8. Calcular el área de la región sombreada.



A) 64 B) 50 C) 48
D) 32 E) 24

30. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado "a". El vértice A se une con los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$; luego se traza el segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{AD}$. Hallar el área de la región triangular ARQ.



A) $a^2/9$ B) $3a^2/8$ C) $a^2/24$
D) $a^2/6$ E) $a^2/12$

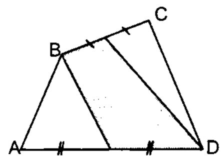
31. En un hexágono regular de lado L, se unen los puntos medios de cuatro lados opuestos dos a dos. Luego, se unen los puntos medios de los lados del rectángulo que se formó, obteniéndose un cuadrilátero. Hallar el área de la región limitada por este cuadrilátero.

A) $(\sqrt{3}/8)L^2$ B) $(3\sqrt{3}/4)L^2$ C) $(3\sqrt{3}/8)L^2$
D) $(\sqrt{3}/4)L^2$ E) $(\sqrt{3}/2)L^2$

32. Desde el vértice de uno de los ángulos agudos de un rombo se trazan perpendiculares de 2 cm de longitud hacia las prolongaciones de los lados opuestos. Si la distancia entre los pies de dichas perpendiculares es 3 cm. Hallar el área de la región limitada por el rombo.

A) $\frac{32}{3\sqrt{7}}$ cm^2 B) $\frac{30}{\sqrt{7}}$ cm^2 C) $\frac{35}{2\sqrt{7}}$ cm^2
D) $\frac{36}{5\sqrt{6}}$ cm^2 E) $\frac{39}{2\sqrt{6}}$ cm^2

33. El área de la región cuadrangular ABCD es de 48 dm^2. Calcular el área de la región sombreada.



A) 12 dm^2 B) 14 dm^2 C) 16 dm^2
D) 24 dm^2 E) 36 dm^2

34. El área de la región triangular es de 150 m^2. Además, se sabe que el segmento que une el punto de intersección de las medianas con el punto de intersección de las bisectrices es paralelo a uno de los catetos. Calcular los catetos.

A) 60 m y 5 m B) 25 m y 12 m
C) 15 m y 20 m D) 30 m y 10 m
E) 50 m y 6 m

35. Se tiene un triángulo ABC inscrito en una circunferencia. La tangente en A, a la circunferencia, corta en P a la prolongación de $\overline{CB}$; si 3(AC)(CP) = (AB)(AP) y el área de la región triangular APC es k. Hallar el área de la región triangular APB.

A) $\frac{k}{3}$ B) $\frac{2k}{5}$ C) $\frac{k}{7}$
D) $\frac{k}{5}$ E) $\frac{3}{4}k$

36. Dos circunferencias se encuentran separadas y la distancia entre sus centros A y B es 8 siendo sus diámetros de 4 y 10 respectivamente. De A, se traza una secante que corta en R y S a la otra circunferencia, donde RS = 6. Si P es la proyección de R sobre $\overline{AB}$, calcular el área de la región triangular RPB.

A) $18 + 4\sqrt{3}$ B) $\frac{24 + 7\sqrt{3}}{8}$ C) $\frac{12 + 7\sqrt{3}}{8}$
D) $\frac{20 + 5\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{28 + 4\sqrt{3}}{4}$

37. ABCD es un cuadrado, E está en $\overline{AD}$ y F está en la prolongación de $\overline{DC}$, de modo que $\overline{EB} \perp \overline{FB}$. Si el área de la región ABCD es 256 y el área de la región triangular EBF es 200, determinar $\overline{CF}$.

A) $25\sqrt{3}/3$ B) 9 C) $20\sqrt{3}/3$
D) 12 E) $17\sqrt{2}/3$

38. En un cuadrilátero convexo ABCD, se toma el punto medio M de la diagonal $\overline{AC}$. Calcular el área de la región triangular MBD, sabiendo que las áreas de las regiones de los triángulos ABD y BDC miden 40 y 60 m^2, respectivamente.

A) 15 m^2 B) 10 m^2 C) 20 m^2
D) 18 m^2 E) 25 m^2

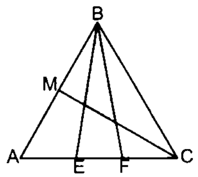
39. De todos los rectángulos de perímetro 24 y dimensiones enteras, las dimensiones del rectángulo de área máxima son:

A) 5 y 7 B) 8 y 4 C) 9 y 3
D) 8 y 6 E) 6 y 6

40. Sobre los catetos de un triángulo rectángulo ABC, de longitudes 5 y 7, respectivamente, construimos dos triángulos rectángulos isósceles ADB y BEC, tomando $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ por hipotenusas. Calcular el área de la región del polígono resultante.

A) 30 B) 26 C) 28
D) 36 E) 45

41. El área de la región del triángulo ABC es S. Si AM = MB y AE = EF = FC, hallar el área de la región sombreada.



A) $\frac{S}{20}$ B) $\frac{3S}{20}$ C) $\frac{S}{10}$
D) $\frac{S}{8}$ E) $\frac{7S}{20}$

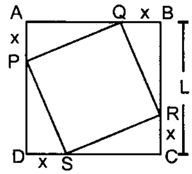
42. Las tangentes comunes interiores de dos circunferencias de 3 y 5 metros de radio, son perpendiculares. Calcular el área de la región del triángulo rectángulo formado por estas tangentes y una de las tangentes exteriores, común a las dos circunferencias.

A) $\frac{15}{2}$ m^2 B) 12 m^2 C) 15 m^2
D) 14 m^2 E) 16 m^2

43. En un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen una longitud de 50 m y 120 m, se inscribe un rectángulo que tiene dos de sus lados contenidos por los catetos y uno de sus vértices está en la hipotenusa. Determinar el área máxima de dicha región rectangular.

A) 1200 m^2 B) 1500 m^2 C) 1750 m^2
D) 2000 m^2 E) 2500 m^2

44. Sobre los lados de un cuadrado ABCD de lado igual a L, se localizan, a igual distancia de los vértices, los puntos P, Q, R y S, que al unirse determinan el cuadrilátero PQRS tal como se muestra en la figura. Hallar los valores de x que hacen que la región PQRS tenga área mínima y máxima, respectivamente.



A) L/3; L/2 B) L/2; L/4 C) 0; L/2
D) L/5; L E) L/2; 0

45. Hallar el área de la región de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R, sabiendo que el doble de su perímetro es igual al perímetro del polígono regular del mismo número de lados, pero circunscrito a la circunferencia dada.

A) $\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2$ B) $\frac{2}{3}\sqrt{3}R^2$ C) $\frac{4}{5}\sqrt{2}R^2$
D) $2R^2$ E) $\frac{6}{5}\sqrt{2}R^2$

46. Sea un cuadrilátero ABCD; los puntos medios de sus lados determinan el paralelogramo PQRS; los puntos medios de los lados de este determinan otro paralelogramo MNLT. Si los puntos medios de este último determinan un rombo que limita una región de 72 m^2, hallar el área de la región del cuadrilátero ABCD.

A) 144 m^2 B) 188 m^2 C) 288 m^2
D) 376 m^2 E) 576 m^2

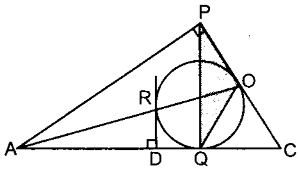
47. En un triángulo ABC, se traza el segmento BD con D sobre el lado $\overline{AC}$ y $\overline{CE}$ con E sobre el lado $\overline{AB}$. Si sabemos que $\frac{AB}{AC} = \frac{13}{36}$ y $\frac{CD}{AE} = \frac{12}{5}$, hallar $\frac{A_{\triangle BDC}}{A_{\triangle AEC}}$

A) 15/13 B) 13/15 C) 14/15
D) 15/14 E) 15/17

48. El triángulo que puede ser inscrito en una semicircunferencia de radio r, además tiene una región cuya área es máxima, hallar esta área.

A) $\frac{1}{2}r^2$ B) r^2 C) $\frac{3}{2}r^2$
D) $2r^2$ E) $3r^2$

49. En el gráfico, hallar el área de la región sombreada, si PO = 16. (Q, R y O son puntos de tangencia).



A) 256 B) 135 C) 128
D) 144 E) 121

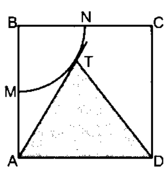
50. En un triángulo ABC, isósceles con $\overline{AB} \cong \overline{BC}$, la altura que parte de B mide 8 m y el perímetro, 32 m. Hallar el área de la región triangular.

A) 12 m^2 B) 24 m^2 C) 36 m^2
D) 48 m^2 E) 54 m^2

51. En un trapecio cuyas bases miden 3 m y 1 m, se traza una paralela a las bases para dividirlo en dos figuras equivalentes. ¿Cuál es la longitud de dicha paralela?

A) 2 m B) $\sqrt{2}$ m C) $\sqrt{3}$ m
D) $\sqrt{5}$ m E) $\sqrt{6}$ m

52. En la figura se tiene un cuadrado cuyo lado mide 2. Si M y N son puntos medios, hallar el área de la región sombreada. (T es punto de tangencia).



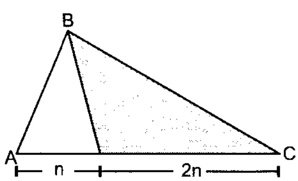
A) 1 B) 1,5 C) 2
D) 3 E) 4

53. Calcular el lado de un octógono regular cuya área de su región es uno.

A) $\frac{1}{2}\sqrt{2\sqrt{2}-1}$ B) $2\sqrt{\sqrt{2}-2}$ C) $\frac{1}{2}\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$

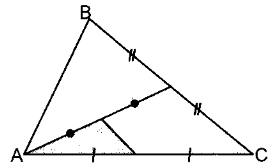
D) $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$ E) $\sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$

54. Si el área del triángulo ABC es de 90 dm^2, calcular el área de la región sombreada.



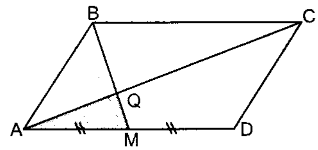
A) 15 dm^2 B) 30 dm^2 C) 60 dm^2
D) 70 dm^2 E) 80 dm^2

55. ¿Qué fracción del área de la región triangular ABC, representa el área de la región sombreada?



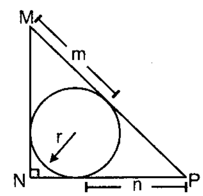
A) 1/3 B) 1/6 C) 1/4 D) 1/8 E) 1/12

56. Si el área del paralelogramo ABCD es de 24 cm^2, calcular el área de la región sombreada.



A) 0,5 cm^2 B) 1 cm^2 C) 1,5 cm^2
D) 2 cm^2 E) 3 cm^2

57. Según la figura, el área de la región triangular MNP.

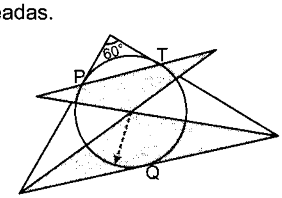


A) $r^2 + mn$ B) $(n + r)^2$ C) $(m + r)n$
D) mn E) mn^2

58. Los lados de un triángulo son 13; 13 y 10, respectivamente. Hallar el área de la región triangular.

A) Impar múltiplo de 5.
B) Múltiplo de 13.
C) Par múltiplo de 3.
D) Impar múltiplo de 3.
E) Irracional.

59. Según el gráfico, P, T y Q son puntos de tangencia. Calcular la razón entre las áreas de las regiones sombreadas.

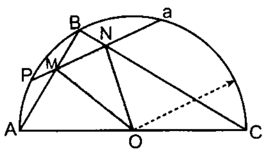


A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 6

60. En un triángulo ABC, en los lados $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubican los puntos M, N y T de modo que $m\angle MNT = m\angle NMT = m\angle BCA$. Si $\overline{MH} \perp \overline{AC}$ y $\overline{NE} \perp \overline{AC}$ (H y E en $\overline{AC}$), calcular la razón entre las áreas de las regiones triangulares ABC y HBE.

A) 2 B) 3 C) 4 D) 3/2 E) 5/2

61. Según la figura, AM = MB, CN = 3(BN) = 9 y $m\widehat{PB} = m\widehat{BQ}$. Calcular el área de la región sombreada.

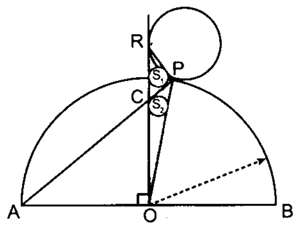


A) 9 B) 12 C) $9\sqrt{2}$ D) $9\sqrt{3}$ E) 18

62. Calcular el área de un triángulo rectángulo ABC (recto en B), sabiendo que la prolongación de la bisectriz interna $\overline{BD}$ es secante en E a la circunferencia circunscrita, BD = 4 m y DE = 5 m.

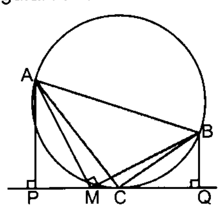
A) 36 m^2 B) 18 m^2 C) 9 m^2
D) 12 m^2 E) 6 m^2

63. En la figura, R y P son puntos de tangencia. Calcular $\dfrac{S_1 + S_2}{S_2}$, si CO = a y OB = b (S_1 y S_2 son áreas de las regiones sombreadas).



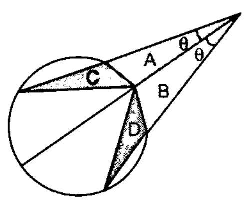
A) a^2/b^2 B) b^2/a^2 C) $b^2 + a^2/a^2$
D) $2b^2/a^2$ E) a/b

64. Según el gráfico, C es punto de tangencia, si AM = MB, AP = a, BQ = b, calcular el área de la región triangular ABC.



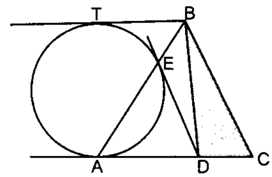
A) $\sqrt{ab(a^2+b^2)}$ B) $\sqrt{\dfrac{ab(a^2+b^2)}{2}}$ C) $\dfrac{\sqrt{ab(a^2-b^2)}}{2}$
D) $\sqrt{ab}\,(a+b)$ E) $\dfrac{\sqrt{ab}}{2}(a+b)$

65. En el gráfico, hallar la relación entre las áreas de las regiones indicadas.



A) $B^2 + D^2 = A^2 + C^2$ B) $D^2 + C^2 = AB + CD$
C) $A^2 + B^2 = AD + BC$ D) $C^2 + A^2 = BD - BC$
E) $A^2 - B^2 = BD - AC$

66. De la figura, calcular el área de la región sombreada si A, E y T son puntos de tangencia, AB = BC = AC y BT = a.

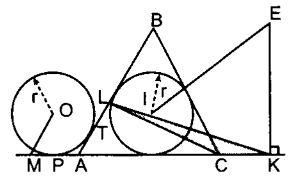


A) $a^2\sqrt{3}$ B) $a^2\sqrt{3}/2$ C) $a^2\sqrt{3}/4$
D) $2a^2$ E) $3a^2$

67. Se tiene un triángulo rectángulo MGO, recto en G, donde M es el punto medio del lado $\overline{BC}$ de un triángulo ABC de baricentro G y circuncentro O. Si MG = 3 y GO = 4, calcular el área de la región triangular ABC.

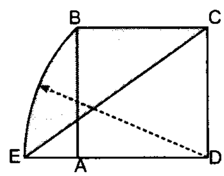
A) 36 B) $\dfrac{27\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{81}{7}$
D) $\dfrac{27\sqrt{2}}{4}$ E) $\dfrac{81\sqrt{3}}{5}$

68. En el gráfico mostrado, la circunferencia de centro I está inscrita en el triángulo ABC, $\overline{QM}$ // $\overline{BA}$, P y T son puntos de tangencia; además E es excentro del triángulo ABC relativo a $\overline{BC}$. Si AC = 4(AM), AL = LB y el área de la región LIKC es 5 m^2, calcular el área de la región triangular ABC.



A) 40 m^2 B) 30 m^2 C) 36 m^2
D) 25 m^2 E) 50 m^2

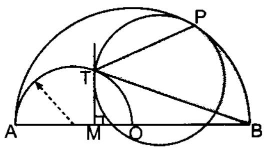
69. Calcular el área de la región sombreada, si el área de la región limitada por el cuadrado ABCD mide S.



A) $S\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\right)$ B) $S\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2} - 2}{8}\right)$
C) $S\left(\frac{\pi}{4} - 2 + \sqrt{2}\right)$ D) $S\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\right)$
E) $S\left(\frac{\pi + 2\sqrt{2} - 2}{4}\right)$

70. Del gráfico, calcular el área de la región sombreada, si AM = 9 m, MO = 3 m (T y P son puntos de tangencia).

A) 12π m^2
B) 6π m^2
C) 8π m^2
D) 24π cm^2
E) 48π m^2

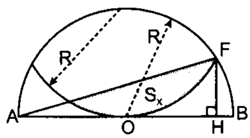


71. Se tiene dos circunferencias de centros O_1 y O_2, secantes en A y B, donde O_2 pertenece a la circunferencia de centro O_1; la prolongación de $\overline{BO_2}$ interseca a la de centro O_2, en M, y en el arco AO_2 se toma un punto P tal que la prolongación de $\overline{AP}$ interseca a la de centro O_2 en N. Si la recta PO_2 interseca a la circunferencia de centro O_2 en T y L, calcular la razón de las áreas de los triángulos mixtilíneos $\overline{LM}$ - $\overset{\frown}{MN}$ - $\overline{LN}$; $\overline{TM}$ - $\overset{\frown}{MN}$ - $\overline{TN}$.

A) 1/2 B) 2/1 C) 1/1
D) 1/3 E) 3/1

72. En la figura, calcular S_x , si AO = OB y FH = 2.

A) $4(\pi - 2)$
B) $9(\pi - 2)/2$
C) $9(\pi - 3)/4$
D) $9(\pi - 6)/4$
E) $9(\pi - 2)/4$



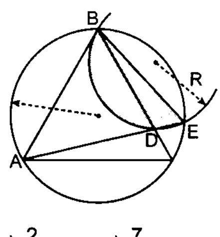
73. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, AC = $4\sqrt{3}$ y m$\angle$ABC = 30°. Tomando como centros a los vértices A y C, se trazan los arcos BE y BF, respectivamente (E y F en $\overline{AC}$). Calcular el área del triángulo mixtilíneo FBE.

A) $5\pi + 6\sqrt{3}$ B) $5\pi - 6\sqrt{3}$ C) $3\pi - 6$
D) 5π E) $6\pi - 5\sqrt{3}$

74. Se tiene una circunferencia de radio 6. Calcular el área de la región limitada por el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas que contienen un punto de dicha circunferencia.

A) 25π B) 6π C) 4π D) 16π E) 9π

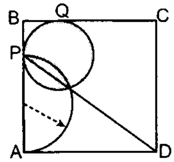
75. En la figura, el triángulo ABC es equilátero. Si la m$\angle$BAE = 45° y DE = $\sqrt{8 - 4\sqrt{3}}$, calcular el área de la región sombreada.



A) $\frac{4}{3}\pi$ B) $\frac{2}{3}\pi$ C) $\frac{7}{4}\pi$ D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

76. Según el gráfico, calcular el área del círculo sombreado, si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide $3(\sqrt{3} + 2)$ cm (P y Q son puntos de tangencia).

A) 6π
B) 4π
C) π
D) 9π
E) 25π



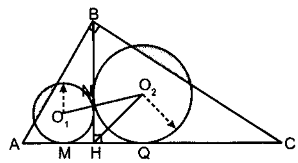
77. Calcular el área del círculo de centro O inscrito en un cuadrilátero bicéntrico ABCD, si:

$$\frac{1}{(AO)^2} + \frac{1}{(OC)^2} = \frac{1}{25}$$

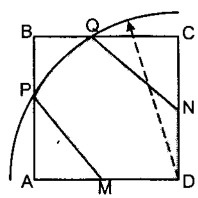
A) 5π B) 10π C) 25π D) 45π E) 125π

78. Del gráfico, calcular la razón de área de las regiones sombreadas si m$\angle O_1O_2H$ = 37°; AM = MH y BN = NH (M, T, N y Q son puntos de tangencia).

A) 1/2
B) 1/3
C) 3/4
D) 9/4
E) 9/16



79. En el cuadrado ABCD, calcular el área de la región sombreada, si AM = MD, CN = ND, BP = 1 y AP = 3.



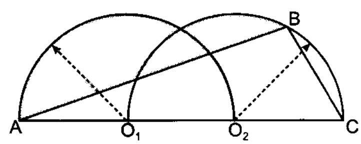
A) $\frac{10\pi}{9} + 4$ B) $\frac{6\pi}{7} + 2$ C) $\frac{16\pi}{9} + 12$

D) $\frac{10\pi}{9} + 12$ E) $\frac{10\pi}{9} + 6$

80. Dos circunferencias son tangentes exteriores en T, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las tangentes comunes exteriores (A y D en una misma circunferencia, B y C en la otra). Si la distancia de T a $\overline{AB}$ es 2 y CD= 6, calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

A) 15 B) 18 C) 12 D) 24 E) 36

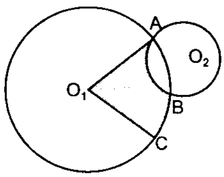
81. En la figura, hallar el área de la región sombreada, si $AO_1 = O_1O_2 = O_2C$= BC = R.



A) $\frac{R^2}{4}(2\pi - \sqrt{3})$ B) $\frac{R^2}{3}(\pi - \sqrt{3})$ C) $\frac{R^2}{2}(\pi - \sqrt{2})$

D) $\frac{R^2}{4}(\pi - \sqrt{3})$ E) $\frac{R^2}{4}(\pi - \sqrt{2})$

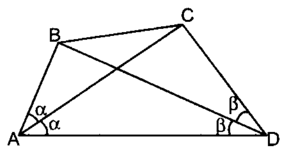
82. Si las circunferencias son ortogonales de radios 2 y $2\sqrt{3}$, $m\overset{\frown}{BC} = 40°$, O_1 y O_2 son centros, calcular el área de la región sombreada.



A) $2\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

83. En la figura, AD = AB + CD y (AC)(BD) = 8. Calcular el área de la región ABCD.

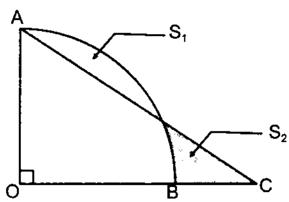
A) $6\sqrt{3}$
B) $4\sqrt{3}$
C) $2\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{3}$
E) 4



84. En un cuadrilátero ABCD. $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{M\}$ y N es un punto $\overline{MD}$. Si el producto de las áreas de las regiones ABM y CDN es 24. Calcular el producto de las áreas de las regiones BMC y AND.

A) 36 B) 12 C) 48 D) 16 E) 24

85. El radio del cuadrante AOB es 2 y OC = 3. Calcular $S_1 - S_2$.



A) $3 + \pi$ B) $\pi + 1$ C) $\pi - 2$
D) $\pi - 3$ E) π

86. A, C y E son puntos distintos de una recta, en ese orden; a un mismo lado de la recta se construyen los triángulos equiláteros ABC y CDE. Sean P y Q los baricentros de los triángulos ABC y CDE, respectivamente. Si AE = a, hallar el área de la región cuadrangular PBDQ.

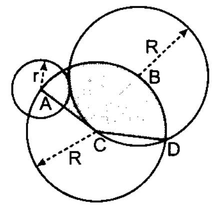
A) a^2 B) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$ C) $\dfrac{2a^2\sqrt{3}}{4}$

D) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{6}$ E) $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{12}$

87. Se tiene una región paralelográmica ABCD de área S, se traza $\overline{DH} \perp \overline{AM}$. Si M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, respectivamente, hallar el área de la región HCDN.

A) S/3 B 2S/3 C) S/4 D) S/2 E) S/5

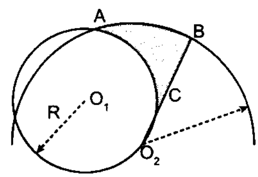
88. En la figura: A, B y C son centros de las circunferencias. Si $R = r(\sqrt{2} + 1)$, hallar el área del sector circular ACD.



A) $\dfrac{2\pi R^2}{3}$ B) $\dfrac{\pi R^2}{4}$ C) $\dfrac{\pi R^2}{12}$

D) $\dfrac{5\pi R^2}{12}$ E) $\dfrac{3\pi R^2}{5}$

89. En la figura, O_1 y O_2 son centros. Si $m\overset{\frown}{AB} = 30°$ y $m\overset{\frown}{CO_2} = 60°$, calcular el área de la región sombreada.



A) $\dfrac{\pi R^2}{6}$ B) $\dfrac{\pi R^2}{12}$ C) $\dfrac{3\pi R^2}{5}$

D) $\dfrac{2\pi R^2}{3}$ E) $\dfrac{\pi R^2}{4}$

90. Calcular el área de la región limitada por un cuadrilátero inscriptible ABCD si: $m\angle BAD = 60°$, AB = AD, BC = 2 y CD = 4.

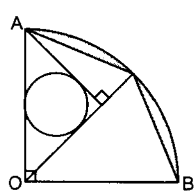
A) $9\sqrt{3}$ B) $7\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{7}$ E) 15

91. El menor lado de un trapecio rectángulo circunscrito a una circunferencia de radio R es igual a $\dfrac{3R}{2}$. Hallar el área de la región limitada por el trapecio.

A) $\dfrac{8R^2}{3}$ B) $3R^2$ C) $\dfrac{7R^2}{2}$

D) R^2 E) $\dfrac{9R^2}{2}$

92. Calcular el área de la región sombreada en el cuadrante de radio 4, si el radio de la circunferencia es 1/2.



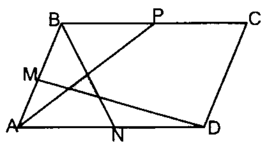
A) $\pi - 2$ B) $4\pi - 8 - \sqrt{2}$ C) $4\pi - 10$
D) $\pi - 8$ E) π

93. Se tiene una malla de longitud L con la que se desea cercar un terreno que tiene la forma de un trapecio circular. Hallar el área máxima del terreno que se puede cercar con dicha malla.

A) L^2 B) $L^2/2$ C) $\pi L^2/4$
D) $\pi L^2/8$ E) $L^2/16$

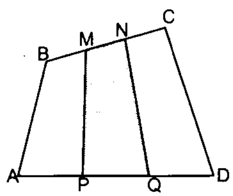
94. En la figura, el área de la reglón paralelográmica ABCD es 120. Si M, N y P son puntos medios, calcular el área de la región sombreada.

A) 2
B) 3
C) 1
D) 4
E) 5



95. En la figura, calcular el área de la región sombreada, si BM = MN = NC, AP = PQ = QD y el área de la región ABCD es 30.

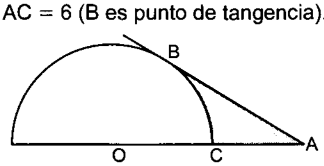
A) 20
B) 15
C) 10
D) 18
E) 25



96. Un trapecio rectángulo, cuyos lados no paralelos miden a y b, es dividido mediante una paralela a las bases en dos trapecios parciales circunscriptibles. Hallar el área de la región limitada por el trapecio rectángulo.

A) $\frac{a^2b}{a+b}$ B) $\frac{2ab^2}{a+b}$ C) $\frac{ab}{2}$
D) $\frac{(a+b)a}{2}$ E) $\frac{ab}{4}$

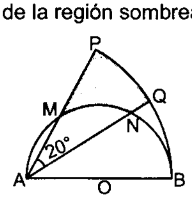
97. Calcular el área de la región sombreada, si la semicircunferencia de centro O tiene radio 6 y AB + AC = 6 (B es punto de tangencia).



A) $24 - 296\pi/45$ B) $3 + \pi$
C) $27/2 - 37\pi/10$ D) 6π
E) $27/8 - 3\pi$

98. En la figura, A y O son centros, AO = 3, $m\overset{\frown}{AM} = m\overset{\frown}{BN}$; calcular el área de la región sombreada.

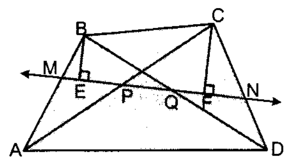
A) 2π
B) π
C) 3π
D) 4π
E) 6π



99. Se tiene el trapecio rectángulo ABCD, recto en A y B, la semicircunferencia de diámetro $\overline{CD}$ interseca a $\overline{AB}$ en los puntos L y M, respectivamente, tal que $L \in \overline{BM}$. Si BC = 4, LM = 7 y BL = 5; calcular el área de la región cuadrangular ABCD.

A) 160 B) 153 C) 150,5
D) 161,5 E) 165,5

100. Según el gráfico, P y Q son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Si BE + CF = 12 y MN = 10, calcular el área de la región cuadrangular ABCD.



A) 130 B) 120 C) 150
D) 110 E) 180

101. Se tiene un cuadrilátero ABCD inscriptible y exinscriptible a la vez, tal que AB = 2, BC = 1 y CD = 4. Calcular el radio de la circunferencia exinscrita al cuadrilátero.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\sqrt{6}$

102. En un cuadrilátero inscrito en una circunferencia sus lados consecutivos tienen como longitudes 6 y 8, además sus diagonales tienen igual longitud. Calcular el área de lá región limitada por dicho cuadrilátero.

A) 12 B) 48 C) 72
D) 24 E) 64

103. Dado un cuadrilátero ABCD, en $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ se ubica los puntos M y N, respectivamente tal que $\frac{AM}{AB} = \frac{CN}{CD}$, $\overline{MC} \cap \overline{BN} = \{P\}$; $\overline{AN} \cap \overline{MD} = \{Q\}$. Si las áreas de las regiones BPC y AQD son 3 m^2 y 4 m^2, calcule el área de la región MPNQ.

A) 5 m^2 B) 6 m^2 C) 7 m^2
D) 8 m^2 E) 10 m^2

104. En un triángulo ABC, la $m\angle ABC = 60°$, se traza las cevianas interiores $\overline{AN}$ y $\overline{CM}$ secantes en Q, tal que AM = MN = NC; BM + QN = BN + MQ. (BM)(QN) = 20 y (MQ)(BN) = 25. Calcule el área de la región cuadrangular MBNQ.

A) $5\sqrt{10}$ B) $6\sqrt{5}$ C) 20
D) $10\sqrt{5}$ E) 22,5

105. Se tiene un triángulo acutángulo ABC, se traza la altura $\overline{BH}$ y las perpendiculares $\overline{HD}$ y $\overline{HE}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en D y E, respectivamente. Si O es el circuncentro de la región triangular ABC, cuya área es 24, calcular el área de la región cuadrangular ODBE.

A) 12 B) 24 C) 48 D) 16 E) 6

106. Se tiene el rombo ABCD de centro O, en $\overline{AO}$ y $\overline{BC}$ se ubica los puntos E y F, respectivamente, tal que AE = ED = DF. Si O dista de $\overline{BC}$ 4 y $m\angle EDF = 90°$; calcular el área de la región rombal ABCD.

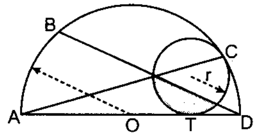
A) 16 B) 32 C) 256
D) 128 E) 64

107. Dada una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$ y centro O, se traza otra circunferencia tangente a la primera en P y a $\overline{OB}$ en Q, de modo que OQ = QB = L. Si $m\angle POQ = 60°$, calcule el área de la región $\widehat{OPQ}$.

A) $\frac{10L^2}{7}$ B) $\frac{16L^2}{7}$ C) $\frac{21L^2}{5}$

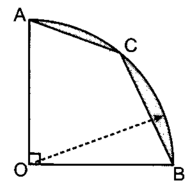
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}L^2$ E) $\frac{7L^2}{5}$

108. Calcular el área de la región sombreada, si r = 4 y $m\widehat{BC} = 90°$ (C y T son puntos de tangencia).



A) $8\pi - 4\sqrt{2}$ B) $3\pi - 4\sqrt{2}$ C) $6\pi - 4\sqrt{2}$
D) $2\pi - 4\sqrt{2}$ E) $4\pi - 4\sqrt{2}$

109. Del gráfico, calcular el área de la región sombreada, si AC = 1 y BC = $\sqrt{2}$.

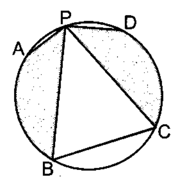


A) $\frac{5\pi}{8} - \frac{7}{4}$ B) $\frac{7}{4} - \frac{5\pi}{16}$ C) $\frac{3}{4}\left(\pi - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

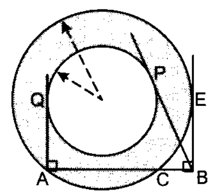
D) $\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{5}{8}(\pi\sqrt{2} - 14)$

110. Calcular el área de la región sombreada, si BC = 8, $m\widehat{DC} = 2(m\widehat{AP}) = 100°$ y $m\widehat{AB} = 2(m\widehat{PD}) = 80°$

A) 32π
B) 64π
C) 18π
D) 16π
E) 10π



111. Según la figura, el área de la región sombreada es πa^2. Hallar $\overline{BP}$, si E, P y Q son puntos de tangencia.



A) $a\sqrt{6}$ B) $a\sqrt{5}$ C) $a\sqrt{3}$
D) $a\sqrt{2}$ E) a

CLAVES

1. C	15. D	29. D	43. B	57. D	71. C	85. D	99. D
2. E	16. D	30. C	44. E	58. C	72. A	86. E	100. B
3. C	17. C	31. C	45. A	59. D	73. B	87. D	101. E
4. B	18. A	32. A	46. E	60. A	74. E	88. D	102. B
5. A	19. B	33. D	47. B	61. C	75. A	89. B	103. C
6. E	20. B	34. C	48. B	62. B	76. D	90. A	104. E
7. B	21. B	35. A	49. C	63. B	77. C	91. E	105. A
8. D	22. E	36. B	50. D	64. B	78. E	92. C	106. D
9. A	23. D	37. D	51. D	65. E	79. E	93. E	107. D
10. B	24. A	38. B	52. B	66. C	80. D	94. C	108. C
11. B	25. C	39. A	53. C	67. E	81. A	95. C	109. A
12. D	26. D	40. D	54. C	68. A	82. B	96. C	110. D
13. D	27. C	41. B	55. D	69. E	83. C	97. C	111. D
14. D	28. E	42. C	56. D	70. D	84. E	98. B	

Geometría del espacio

15 capítulo

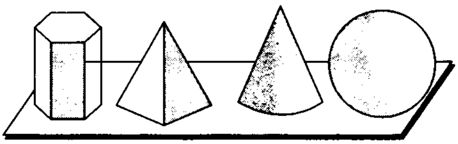
Ghiyath al-Din Abu l-Fath Omar ibn Ibrahim Jayyam Nishapurí u Omar Jayam nació en Nishapur —actual Irán— el 18 de mayo de 1048 y murió en la misma ciudad el 4 de diciembre de 1131. Fue un matemático, astrónomo y poeta persa. Durante 18 años, Omar Jayam realizó relevantes investigaciones en astronomía, que abarcaron la compilación de tablas astronómicas y, particularmente, la corrección del antiguo calendario zoroástrico, que los persas habían conservado debido a su exactitud, a pesar de que el Islam imponía a todas las naciones conquistadas su calendario lunar. Las investigaciones realizadas le permitieron calcular el error del calendario persa, que tenía un año de 365 días exactos. Para el nuevo calendario, Jayam calculó la duración del año con una exactitud pasmosa. Su error es de un día en 3770 años.

Lamentablemente, solo conocemos parte de su obra científica: la *Disertación sobre una posible demostración del postulado paralelo, de la geometría de Euclides*, la *Tesis sobre demostraciones de álgebra y comparación*, el *Tratado sobre la exactitud del sistema indio para calcular raíces de ecuaciones*, referido a ecuaciones de segundo y tercer grado; *Los problemas en aritmética y cálculo*, la *Descripción de las tablas astronómicas de Malek Shah y la Disertación sobre ciencias naturales*. Existen unos ocho trabajos más sobre física, economía, historia, filosofía, metafísica y tradiciones.

Fuente: Wikipedia

DEFINICIÓN

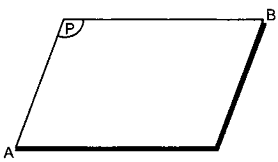
Como sabemos, la geometría plana estudia las figuras planas, esto es, aquellas que tienen todos sus puntos en un mismo plano. Ahora bien, la geometría del espacio o estereometría, tiene por objeto el estudio de las figuras sólidas o del espacio, es decir, de las figuras cuyos puntos no pertenecen todos a un mismo plano, sino al espacio tridimensional, por ejemplo: el prisma, la pirámide, el cono, la esfera, etc.



EL PLANO

Si se piensa en una superficie llana, perfectamente lisa, sin espesor, que se extiende indefinidamente en todas las direcciones, se tendrá una buena idea de lo que se supone sea una superficie plana o simplemente un plano. Por ejemplo, si la superficie del tablero de una mesa perfectamente lisa, que nos da una idea aproximada de una parte de superficie plana, la imaginamos de extensión ilimitada, tendremos la idea de un plano. Queremos decir, que la superficie lisa del tablero, extendida indefinidamente en todas direcciones, no es el plano, sino una representación física de un conjunto de puntos que en geometría conocemos como un plano.

Generalmente, un plano en el espacio (o más exactamente, una parte del plano) se representa por medio de un paralelogramo. Este plano se denota por dos letras correspondientes a vértices opuestos (plano AB), o también por una sola letra (plano P).

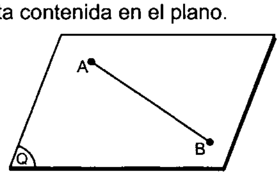


Postulados:

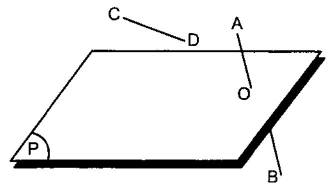
1. Todo plano contiene al menos tres puntos no colineales.

   Esto nos indica que los planos son amplios.

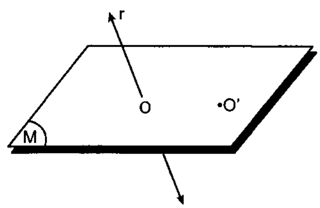
   Los puntos que están sobre un mismo plano se llaman coplanarios.
2. Dos puntos cualesquiera de un plano determinan una recta contenida en el plano.



   Así, los puntos A y B pertenecen al plano Q; ellos determinan la recta AB, contenida en el plano ($\overleftrightarrow{AB} \subset \square Q$)
3. El espacio contiene al menos cuatro puntos no coplanarios. Esto nos indica que el espacio no es llano.
4. (De separación del espacio). Los infinitos puntos del espacio que no están en un plano dado, forman dos conjuntos separados por dicho plano, llamados semiespacios, tales que:



   - Todo segmento determinado por dos puntos de un mismo semiespacio, no interseca al plano. Por ejemplo: $\overline{CD}$.
   - Todo segmento determinado por dos puntos, uno en cada semiespacio, interseca al plano. Por ejemplo: $\overleftrightarrow{AB}$.
5. Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección es un solo punto.



Hipótesis: $\overleftrightarrow{r}$, es una recta que interseca al plano M, que no la contiene.

Tesis: La intersección de $\overleftrightarrow{r}$ y M es un solo punto O.

Demostración:

1.° Supongamos que la recta "r" interseca al plano M en dos puntos O y O' (hipótesis auxiliar).

2°. Entonces, resultaría que la recta "r", determinada por los puntos O y O' del plano M, está contenida en M (por el postulado n.° 2).

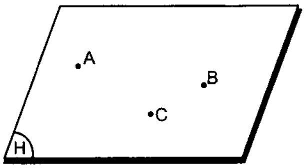
3°. Pero, según la hipótesis, el plano M no contiene a la recta "r"; luego, nuestra suposición de que $\overleftrightarrow{r}$ interseca al plano M en más de un punto es falsa y por lo tanto la recta "r" interseca al plano M en el único punto O.

Nota

El punto de intersección de una recta y un plano se llama traza o pie de la recta en el plano.

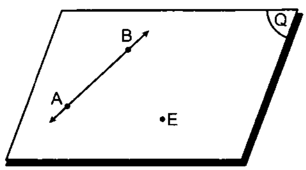
Determinación del plano. Así como en el caso de la recta, decimos que ciertos conjuntos (puntos o rectas) determinan un plano, si éste es el único que los contiene.

Postulado del plano. Tres puntos cualesquiera no colineales determinan un plano.



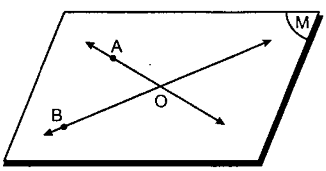
Así, los puntos no colineales A, B y C, determinan el plano H. (El único que contiene a los tres).
Cada uno de los puntos A, B y C, pertenecen al plano H y podemos escribir: A ∈ ▱H, B ∈ ▱H, C ∈ ▱H.

1. Una recta y un punto exterior a ella determinan un plano.



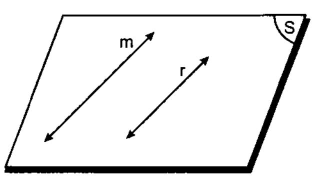
Demostrar este teorema es sencillo. Si E es un punto exterior a la recta AB, entonces A, B y E no son colineales, y de acuerdo al postulado anterior, determinan un único plano Q. Luego: $\overleftrightarrow{AB} \subset$ ▱Q y E ∈ ▱Q.

2. Dos rectas secantes determinan un plano.



Sean las rectas secantes OA y OB. Desde que los puntos A, O y B no son colineales, determinan el plano M.

3. Dos rectas paralelas determinan un plano. Así, las rectas $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$, paralelas, determinan el plano S.
$\overleftrightarrow{m} // \overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{m} \subset$ ▱S y $\overleftrightarrow{r} \subset$ ▱S



POSICIONES RELATIVAS EN EL ESPACIO

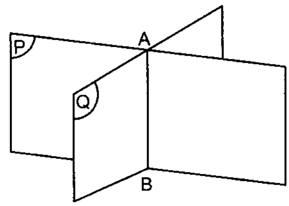
Posiciones relativas de dos planos

Dos planos distintos pueden ser secantes o paralelos.

Planos secantes

Postulado: si dos planos diferentes se intersecan, su intersección es una recta.
Así, los planos distintos P y Q se cortan en la recta AB.
La intersección de estos planos secantes se llama traza de uno de ellos sobre el otro

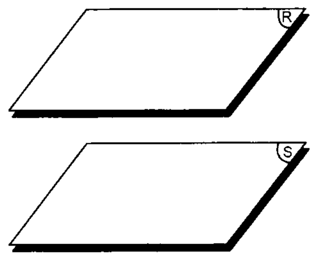
P ∩ ▱Q = $\overleftrightarrow{AB}$



Planos paralelos

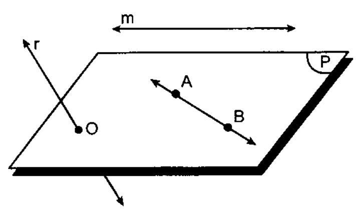
Definición: dos planos son paralelos si no se intersecan.
Si los planos R y S son paralelos, escribimos:

▱R // ▱S ⇒ ▱R ∩ ▱S = ϕ



Posiciones relativas de una recta y un plano

Una recta, con relación a un plano, puede estar contenida en dicho plano (por ejemplo $\overleftrightarrow{AB}$). Puede ser secante al plano, si su intersección con el plano es un solo punto; o puede ser paralela al plano, si no se intersecan.



- $\overleftrightarrow{AB}$: contenida en el plano P.
  $\overleftrightarrow{AB} \subset$ ▱P
- $\overleftrightarrow{r}$: secante al plano P, en el punto O.
  $\overleftrightarrow{r} \cap$ ▱P: {O}
- $\overleftrightarrow{m}$ // P. La recta y el plano no se intersecan.
  $\overleftrightarrow{m} \cap$ ▱P = ϕ

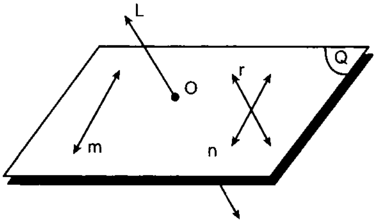
Posiciones relativas de dos rectas

Dos rectas diferentes en el espacio, pueden ser:

Secantes: es decir, se intersecan en un punto. Estas rectas son coplanarias.

Paralelas: es decir, no se intersecan y están en el mismo plano.
Alabeadas o cruzadas: si no se intersecan y no son paralelas, es decir, no están en un mismo plano.

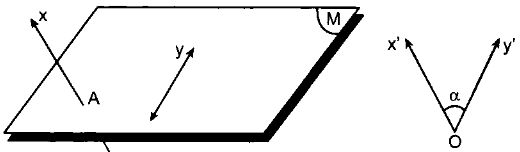
En la siguiente figura, las rectas m, n y r están contenidas en el plano Q y la recta L es secante a dicho plano, en el punto O.



Las rectas $\overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son secantes y las rectas $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son paralelas. Ninguna de las rectas $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{r}$ pasa por el punto O. La recta L es alabeada con cada una de las tres anteriores (se cruza con ellas).

◀ ÁNGULOS ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

Es el ángulo determinado por dos rayos respectivamente paralelos a las rectas dadas y cuyo origen es un punto cualquiera en el espacio.



Así, dadas las rectas alabeadas x e y, si $\overleftrightarrow{x'} // \overleftrightarrow{x}$, $\overleftrightarrow{y'} // \overleftrightarrow{y}$, entonces α es la medida del ángulo entre las rectas que se cruzan x e y.

Nota

Si por el punto A trazamos una recta $\overleftrightarrow{r}$, paralela a $\overleftrightarrow{y}$, entonces el ángulo de cruce entre $\overleftrightarrow{x}$ e $\overleftrightarrow{y}$ es el mismo que forma la recta $\overleftrightarrow{x}$ con $\overleftrightarrow{r}$.

Rectas perpendiculares. Son aquellas rectas que, cruzándose o cortándose, determinan ángulo recto.

Observaciones

En algunos cursos se usa el término ortogonalidad como sinónimo de perpendicularidad.
Algunos textos de geometría distinguen lo siguiente:

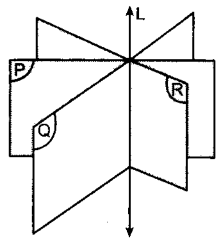
- Rectas perpendiculares: aquellas que se cortan formando ángulo recto.
- Rectas ortogonales: aquellas que se cruzan formando ángulo recto.

Nosotros, de acuerdo con la interpretación dada en la Universidad Nacional de Ingeniería, adoptaremos como rectas perpendiculares aquellas que, cortándose o cruzándose, forman ángulo recto.

Sin embargo, en algunos casos, para mencionar que dos rectas dadas son alabeadas y perpendiculares, sencillamente diremos que ellas son ortogonales, por ser este último término más cómodo.

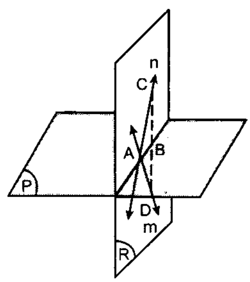
◀ HAZ DE PLANOS

Es el conjunto de todos los planos que contienen una misma recta, la cual recibe el nombre de arista del haz. La figura muestra tres de los infinitos planos que contienen a la recta L. Desde luego, es demostrable que por una recta cualquiera del espacio pasan infinidad de planos.



▱P ∩ ▱Q ∩ ▱R = $\overleftrightarrow{L}$

Teorema
Si dos planos distintos tienen un punto común, entonces tienen comunes todos los puntos de una recta y solo ellos.

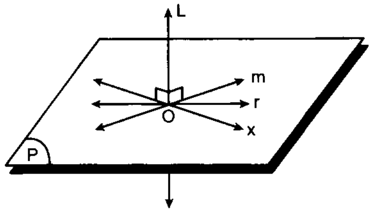


Probemos esto: supongamos que los planos P y R tienen en común el punto A. Por A tracemos dos rectas m y n contenidas en el plano R.
Si alguna de estas rectas estuviera en P, el teorema quedaría demostrado.
Si ninguna está en ▱P, tomemos un punto C sobre $\overleftrightarrow{n}$ y otro punto D en la recta $\overleftrightarrow{m}$, en distinto semiespacio que B, respecto del plano P. Esto es siempre posible, ya que el punto A divide a cada una de dichas rectas en dos semirectas, situadas en cada semiespacio determinado por ▱P.
Entonces, la recta CD cortará al plano P en un punto B, de acuerdo con el postulado n.° 5. Con seguridad, este punto es distinto del punto A, por permanecer al lado opuesto del vértice A del triángulo ACD.
Por lo tanto, los planos P y R tienen, además del punto A, otro punto común B. La recta AB estará situada en

▱P y también en ▱R, según el postulado n.° 2; luego será una recta común a ambos planos. Y, como por una recta y un punto exterior a ella no pueden pasar dos planos distintos, los planos P y R tienen comunes todos los puntos de la recta AB y solo ellos.

◀ RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

Una recta y un plano son perpendiculares, si se intersecan en un punto, y si toda recta en el plano, que pase por el punto de intersección, es perpendicular a la recta dada.

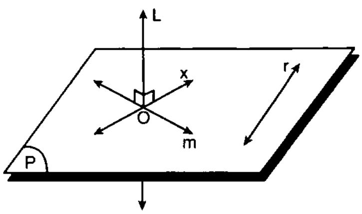


En la figura, la recta L y el plano P se intersecan en el punto O. Tres rectas de dicho plano pasan por O. Luego, por definición, si $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{r}$, $\overleftrightarrow{x}$; entonces la recta L y el plano P serán perpendiculares $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱P o ▱P $\perp \overleftrightarrow{L}$, siendo el punto O, pie de la perpendicular en el plano.

Como la figura está en perspectiva, no se notan los ángulos rectos que toma $\overleftrightarrow{L}$ con las rectas del plano.

Observaciones

- Si una recta interseca a un plano, sin ser perpendicular, se llama oblicuá al plano.
- Si una recta es perpendicular a un plano, será perpendicular a todas las rectas del plano, aun cuando no pasen por el pie de la perpendicular, ya que se cruza con ellas en ángulo recto.



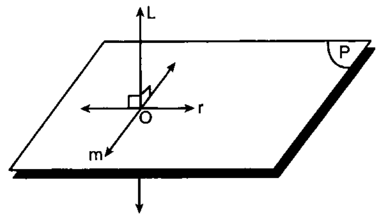
En la figura, por ejemplo, si la recta $\overleftrightarrow{L}$ es perpendicular al plano Q en el punto O; las rectas m, x, r, están contenidas en ▱Q y $\overleftrightarrow{r}$ no pasa por O, entonces $\overleftrightarrow{L}$ será perpendicular a las tres y a todas las demás rectas del plano, aunque no pasen por O. Sin embargo, como $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son alabeadas perpendiculares, diremos que ellas son ortogonales. Para $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{m}$ o $\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{x}$, simplemente diremos perpendiculares.

Condiciones para que una recta sea perpendicular a un plano

Teorema. Para que una recta sea perpendicular a un plano, es necesario y suficiente que sea perpendicular a dos rectas secantes de dicho plano.

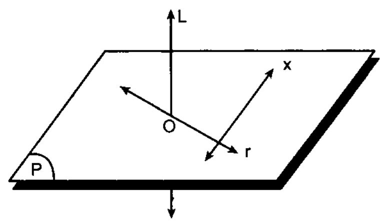
Casos:

a. Si las dos rectas pasan por el pie de la perpendicular:



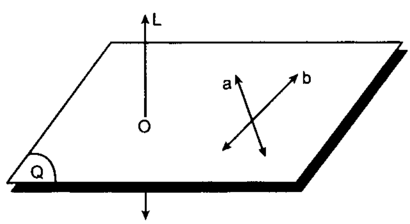
- **Hipótesis:** $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{r}$, en el punto O. m y r, rectas secantes contenidas en el plano P.
- **Tesis:** $\overleftrightarrow{L} \perp$ P, en el punto O.

b. Si solo una de las rectas secantes pasa por el pie de la perpendicular.



- **Hipótesis:** $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{r}$, en O; $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{x}$ ($\overleftrightarrow{L}$ y $\overleftrightarrow{x}$ son ortogonales). $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{x}$ rectas secantes contenidas en el plano P.
- **Tesis:** $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱P, en el punto O.

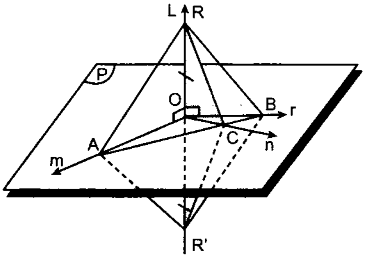
c. Si ninguna de las rectas secantes pasa por el pie de la perpendicular.



- **Hipótesis:** $\overleftrightarrow{L}$, secante el plano Q, en el punto O. $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{b}$ ($\overleftrightarrow{L}$ es ortogonal a ambas rectas). $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$, rectas secantes contenidas en el plano Q.
- **Tesis:** $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱Q, en el punto O.

Demostraciones:

a. Para demostrar que $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱P, bastará probar que una recta cualquiera "n", de dicho plano (distinta de $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$), es perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$ en el punto O, pues con esto cumpliríamos la definición de perpendicularidad entre recta y plano.



Para ello, trazamos una recta del plano P, que corte a $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{r}$, en los puntos A, C y B, respectivamente R y R' son puntos de la recta $\overleftrightarrow{L}$, tales que OR = OR'. Trazamos $\overline{RA}$, $\overline{RB}$, ...

Luego, como $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$ son mediatrices del segmento RR', en los planos RAR' y RBR', respectivamente, entonces: AR = AR' y BR = BR', por lo que: $\triangle RAB \cong \triangle R'AB$ (postulado LLL), de donde: $\angle RAB \cong \angle R'AB$ y $\triangle RAC \cong \triangle R'AC$ (Postulado LAL).

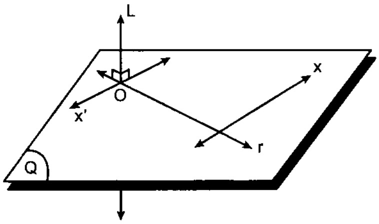
$\Rightarrow$ CR = CR'.

Esto último indica que el RCR' es isósceles y como O es punto medio de RR', deducimos que CO $\perp$ RR'

En consecuencia: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{n}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱P, tal como se quería demostrar.

b. En este caso, por el punto O trazamos $\overleftrightarrow{x'} \parallel \overleftrightarrow{x}$.



Entonces: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{x}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{x'}$, por definición de ángulos entre rectas alabeadas.

Luego, este teorema se reduce al caso (a), siendo las rectas r y x' las que pasan por el pie de la perpendicular.

c. Este caso se demuestra trazando por el punto O: $\overleftrightarrow{a'} \parallel \overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b'} \parallel \overleftrightarrow{b}$

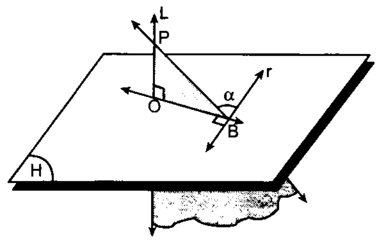
De donde: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{a'}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{b'}$

Teorema de las tres perpendiculares

Si desde el pie de una perpendicular a un plano, se traza otra perpendicular a una recta cualquiera dada en el plano, entonces, toda recta que pasa por un punto cualquiera de la primera y el punto de intersección de las dos últimas, es perpendicular a la recta dada en el plano.

- **Hipótesis:** Sea $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱H, en el punto O; $\overleftrightarrow{r}$ es una recta del plano H. Se traza $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{r}$ y se toma un punto cualquiera P, de la recta L.
- **Tesis:** $\overleftrightarrow{PB} \perp \overleftrightarrow{r}$ ($\alpha = 90°$)

Demostración:



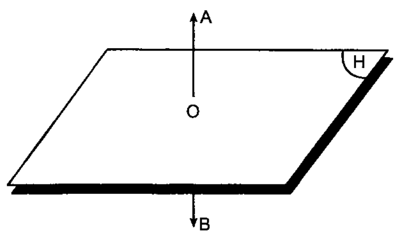
La recta "r" por hallarse en el plano H, es perpendicular a $\overleftrightarrow{L}$. También, por hipótesis, $\overleftrightarrow{r}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{OB}$; luego, $\overleftrightarrow{r}$ será perpendicular al plano que determinan las rectas L y OB; entonces, $\overleftrightarrow{r}$ será perpendicular a la recta PB de este plano:

$\overleftrightarrow{r} \perp \overleftrightarrow{PB}$ $\quad \therefore \alpha = 90°$

Existencia y unicidad del plano perpendicular a una recta

Teorema. Por un punto dado pasa un plano, y solo uno, perpendicular a una recta dada. Este teorema comprende dos casos, según el punto esté en la recta o fuera de la recta dada.

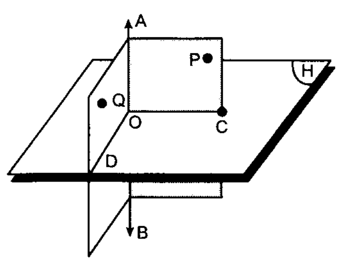
1.er caso. Si el punto dado está en la recta dada.



Hipótesis: sea O un punto de la recta AB.

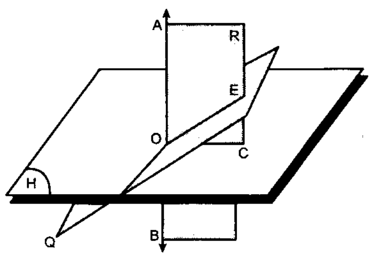
Tesis: por O pasa un plano H, y solo uno, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.

Demostración:

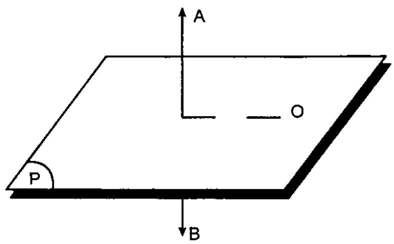


Sea P un punto fuera de la recta AB, determinándose el plano ABP.

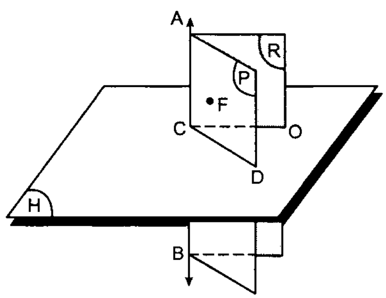
Sea Q un punto situado fuera del plano ABP, determinándose el plano ABQ.
En el plano ABP hay una recta OC perpendicular a la recta AB en el punto O.
Asimismo, en el plano ABQ hay una recta OD perpendicular a la recta AB en el punto O.
Luego, las rectas OC y OD, determinan el plano H.
Entonces, plano ▱H $\perp \overleftrightarrow{AB}$ en el punto O.
Y ▱H es único, porque si existiera otro plano Q, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ en O, entonces las intersecciones $\overleftrightarrow{OC}$ y $\overleftrightarrow{OE}$ de los planos H y Q con un plano cualquiera R que pase por $\overleftrightarrow{AB}$, serían dos rectas en el plano r, perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ en un mismo punto O. Como sabemos, esto último es imposible.



2.° caso. Si el punto dado está fuera de la recta dada.

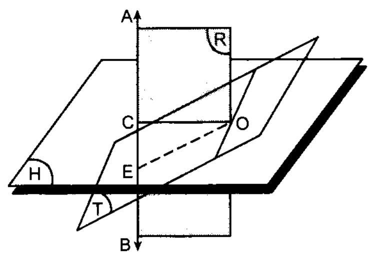


Hipótesis: sea O un punto situado fuera de la recta AB.
Tesis: por O pasa un plano H, y solo uno, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$.
Demostración:

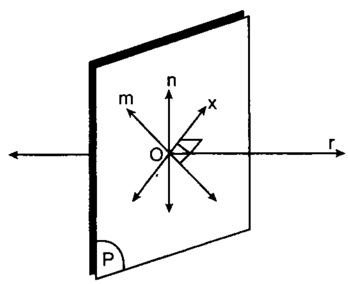


La recta AB y el punto O, determinan un plano R, en el cual existe una recta OC, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, que pasa por O.
Sea F un punto situado fuera del plano R. La recta $\overleftrightarrow{AB}$ y el punto F determinan un plano P, en el que hay una recta CD, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, en C.

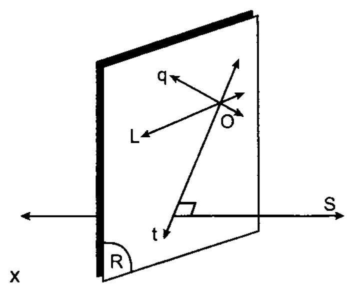
Luego, las rectas CO y CD determinan un plano H. Y como $\overleftrightarrow{CO} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, entonces, el plano H es perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, pasando por el punto O, ya que se cumple la condición de perpendicular entre recta y plano.
Además, ▱H es el único, porque si suponemos que existe un segundo plano T perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, que pasa por O, las intersecciones $\overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{OE}$ de ▱H y ▱T, respectivamente, con un plano cualquiera ▱R que pase por $\overleftrightarrow{AB}$, serían dos rectas en el plano ▱R, perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$, desde un mismo punto exterior O, lo cual, como sabemos, es imposible.



Corolario. Todas las perpendiculares a una recta, por un punto dado, están contenidas en un plano perpendicular a la recta, trazado en dicho punto.



El punto O se sitúa en la recta r, n, x, son algunas de la infinidad de rectas perpendiculares a $\overleftrightarrow{r}$, que pasan por O. Todas ellas están contenidas en el plano P, perpendicular a $\overleftrightarrow{r}$.

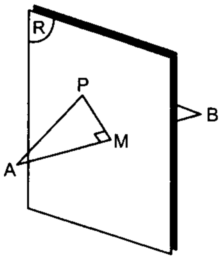


El punto O es exterior a la recta S. Por O pasa un plano R, perpendicular a $\overleftrightarrow{s}$, $\overleftrightarrow{q}$, $\overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{t}$, son algunas de la infinidad de perpendiculares a $\overleftrightarrow{s}$ y que pasan por O; todas contenidas en el plano R.

PLANO MEDIATRIZ

Se llama plano mediatriz de un segmento, al plano perpendicular a dicho segmento, trazado en su punto medio (Llamado también plano mediador).

Teorema. Todo punto situado sobre el plano mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento.

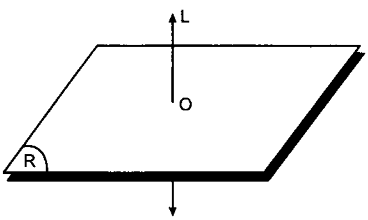


En la figura adjunta, R es el plano mediatriz del segmento AB. Si P es un punto cualquiera de dicho plano y M punto medio de $\overline{AB}$, entonces $\overline{PM} \perp \overline{AB}$ y el triángulo APB es isósceles. Por lo tanto, PA = PB.

Existencia y unicidad de recta perpendicular a un plano

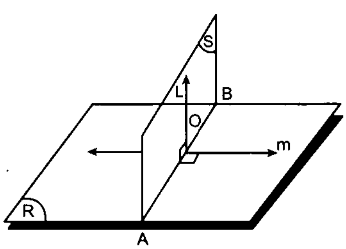
Teorema. Por un punto dado, pasa una recta, y solo una, perpendicular a un plano dado. Este teorema comprende dos casos, según el punto esté en el plano o fuera de él.

1.^{er} caso. Si el punto dado está en el plano dado.



Hipótesis: sea O un punto en el plano R.
Tesis: por O, pasa una recta L, y solo una, perpendicular al plano R.

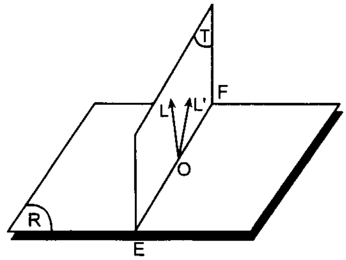
Demostración:



Sea $\overleftrightarrow{m}$, una recta en el plano R, que pasa por O.
Sea S el plano perpendicular a $\overleftrightarrow{m}$ en O.

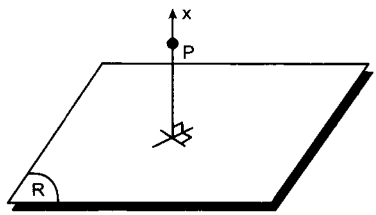
Los planos R y S se intersecan en una recta AB.
Sea $\overleftrightarrow{L}$, una recta en el plano S, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$, en el punto O...(*)
$\Rightarrow$ ya que el plano S $\perp$ $\overleftrightarrow{m}$, y $\overleftrightarrow{L}$ está contenida en S
$\therefore$ $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{m}$.
Luego:

$$\left.\begin{array}{r} \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{m} \\ \text{y por (*): } \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{AB} \end{array}\right\} \text{ Implica que } \overleftrightarrow{L} \perp \text{R, por teoría.}$$



Además, $\overleftrightarrow{L}$ es única porque de existir otra recta L', diferente de $\overleftrightarrow{L}$, perpendicular al plano R en O, entonces las dos rectas L y L' determinarían un plano T, secante con ▱R en una recta EF. Y tendríamos así, en el plano T, secante con R en una recta EF. Y tendríamos así, en el plano T, dos perpendiculares L y L' a $\overleftrightarrow{EF}$, en el mismo punto O, lo cual es imposible.

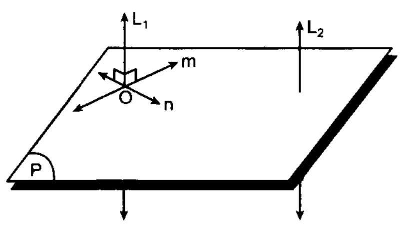
2.° caso. Si el punto dado está fuera del plano dado.



Hipótesis: sea P, un punto situado fuera, del plano R.
Tesis: por P pasa una recta x, y solo una, perpendicular al plano R.

Teorema: Si dos rectas paralelas son secantes a un mismo plano y una de ellas es perpendicular al plano dado, entonces la otra recta es también perpendicular al plano.

Demostración:



Sean L_1 y L_2 dos rectas paralelas, secantes al plano P.
La recta L_1 es perpendicular a ▱P en el punto O.

Luego, si $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son dos rectas de dicho plano que pasan por O, será $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{n}$. Entonces, como $\overleftrightarrow{L_2}$ // $\overleftrightarrow{L_1}$ el ángulo de cruce de $\overleftrightarrow{L_2}$ con $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ es el mismo entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y dichas rectas.

Por lo tanto: $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{n}$, de donde $\overleftrightarrow{L_2} \perp \square P$.

Perpendicular y oblicuas a un plano

Teorema. Si desde un punto exterior a un plano se trazan a este el segmento perpendicular y varios segmentos oblicuos:

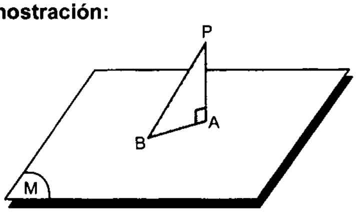
1. ° La perpendicular es menor que cualquier oblicua.
2. ° Los segmentos oblicuos cuyos pies equidistan del pie de la perpendicular, son congruentes.
3. ° De dos segmentos oblicuos, cuyos pies no equidistan del pie de la perpendicular, es mayor aquel cuyo pie dista más.

Graficamos cada caso:

1. ° **Hipótesis:** P es un punto exterior al plano M; $\overline{PA}$, perpendicular al plano M en A; $\overline{PB}$ una oblicua a M, en B.

   Tesis: PA < PB

   Demostración:

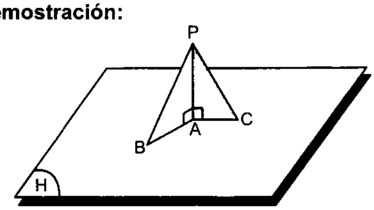


   Como $\overline{PA} \perp \square M$, por hipótesis, entonces al trazar $\overline{BA}$: $\overline{BA} \perp \overline{PA}$. Luego, en el triángulo PAB, $\overline{PB}$ es hipotenusa y $\overline{PA}$, cateto: PA < PB.

2. ° **Hipótesis:** P es un punto exterior al plano H; $\overline{PA} \perp \square H$, en A, $\overline{PB}$ y $\overline{CP}$, segmentos oblicuos al plano H en B y C, respectivamente, tal que AB = AC.

   Tesis: PB ≅ PC

   Demostración:

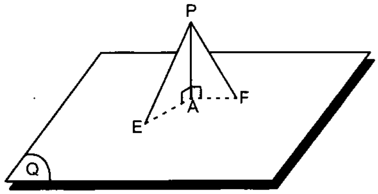


   Siendo $\overline{PA} \perp \square H$, por hipótesis, entonces $\overline{PA} \perp \overline{BA}$ y $\overline{AC}$. Luego, los triángulos rectángulos PAB y PAC son congruentes por tener en común el cateto $\overline{PA}$ y de la hipótesis AB ≅ AC.

   Entonces PB ≅ PC.

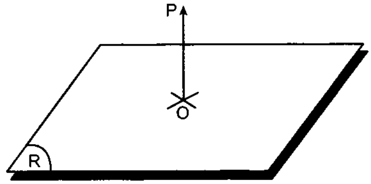
3. ° **Hipótesis:** P es un punto exterior al plano Q. $\overline{PA} \perp \square Q$ en A; $\overline{PE}$ y $\overline{PF}$ oblicuas a $\square Q$, tal que AE > AF.

   Tesis: PE > PF



◀ DISTANCIA DE UN PUNTO A UN PLANO

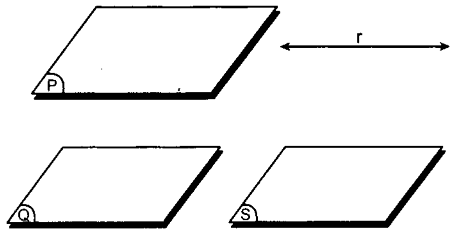
Se llama distancia de un punto a un plano, a la longitud del segmento perpendicular trazado desde el punto al plano.



Así, en la figura adjunta, si PO es perpendicular al plano R, entonces la longitud del segmento PO es la distancia del punto P, al plano R.

◀ RECTAS Y PLANOS PARALELOS

Definición: dos planos son paralelos, si no se intersecan. Análogamente, una recta y un plano son paralelos si no se intersecan.



P // Q $\qquad$ $\overleftrightarrow{r}$ // s

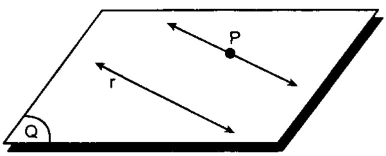
Paralelismo entre rectas en el espacio

En geometría del espacio, para afirmar que dos rectas son paralelas no es suficiente con probar que las rectas no se cortan, pues cabe la posibilidad de que las rectas sean alabeadas. Entonces, se debe demostrar que:

1.° Las rectas son coplanarias.
2.° Las rectas no se intersecan.

1. En el espacio, por un punto exterior a una recta, solo puede trazarse una paralela a la recta dada.

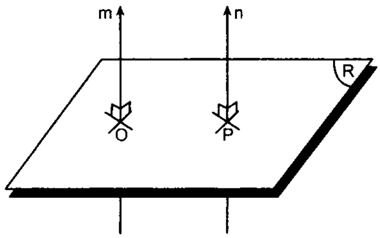
   Demostración:



Sea $\overleftrightarrow{r}$ la recta dada y P un punto exterior a ella. Luego, toda recta paralela a $\overleftrightarrow{r}$, trazada por el punto dado P, tendría que estar en el plano Q determinado por r y P; según el quinto postulado de Euclides, en este plano hay una sola paralela a $\overleftrightarrow{r}$, por el punto P.

2. Dos rectas perpendiculares a un mismo plano, son paralelas entre sí.

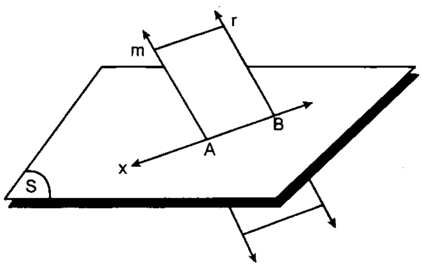
Demostración:



Sean $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$, dos rectas perpendiculares al plano R, en los puntos O y P. Sea m' una recta paralela a $\overleftrightarrow{m}$, trazada por el punto P. Como sabemos, de acuerdo con la teoría $\overleftrightarrow{m'}$ es única, $\overleftrightarrow{m'}$ es perpendicular a R, en el punto P. Además según teoría por el punto P del plano R, solo se puede trazar una perpendicular a dicho plano. Y como $\overleftrightarrow{n} \perp$ R por hipótesis; entonces $\overleftrightarrow{m'}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son una misma recta. Con lo que queda probando que $\overleftrightarrow{n}$ // $\overleftrightarrow{m}$.

3. Todo plano que corta a una de dos rectas paralelas, también corta a la otra.

Demostración:



Sean $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$ dos rectas paralelas y sea S un plano que corta a $\overleftrightarrow{m}$ en el punto A. Probemos que ▱S cortará también a $\overleftrightarrow{r}$.

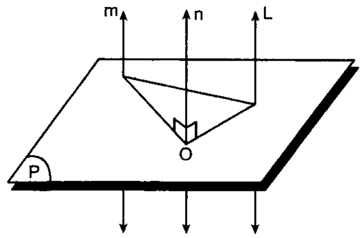
En efecto, el plano S y el que determinan las paralelas tienen un punto en común A. Luego tendrán en común los puntos de una recta x. Además, en el plano de las paralelas, como $\overleftrightarrow{x}$ corta a $\overleftrightarrow{m}$, también cortará a $\overleftrightarrow{r}$ en un punto B. El punto B es común a la recta r y al plano S, con lo que queda demostrado el teorema.

4. En el espacio, dos rectas paralelas a una tercera, son paralelas entre sí.

Hipótesis: sean $\overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{L}$, tres rectas, tales que: $\overleftrightarrow{m}$ // $\overleftrightarrow{n}$ y $\overleftrightarrow{L}$ // $\overleftrightarrow{n}$

Tesis: $\overleftrightarrow{m}$ // $\overleftrightarrow{L}$

Demostración:



Sea O un punto de la recta "n" y tracemos el plano P, perpendicular a $\overleftrightarrow{n}$ por dicho punto.

Luego: según teoría:

$\overleftrightarrow{m}$ // $\overleftrightarrow{n}$ y como $\overleftrightarrow{n} \perp$ ▱P, entonces $\overleftrightarrow{m} \perp$ ▱P

$\overleftrightarrow{L}$ // $\overleftrightarrow{n}$ y como $\overleftrightarrow{n} \perp$ ▱P, entonces $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱P

y, por ser $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{L}$ dos rectas perpendiculares a un mismo plano P, se concluye que $\overleftrightarrow{m}$ // $\overleftrightarrow{L}$.

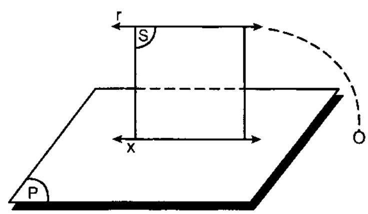
Paralelismo entre recta y plano

Según demostramos en el anterior teorema: para que una recta no contenida en un plano dado, sea paralela a dicho plano, es necesario y suficiente que sea paralela a una recta contenida en el plano.

1. Toda recta no contenida en un plano y paralela a una recta de este plano, es paralela al plano.

Hipótesis: sea "r" una recta no contenida en el plano P y paralela a la recta x, contenida en dicho plano.
Tesis: $\overleftrightarrow{r}$ // ▱P.

Demostración:



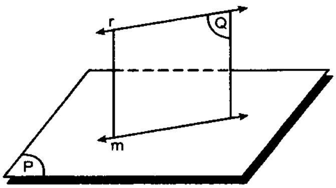
Supongamos que la recta "r" no es paralela al plano P, es decir, que lo interseca en un punto O.

Las rectas paralelas r y x, determinan un plano S secante a ▱P, según la recta x. Luego, como hemos supuesto que $\overleftrightarrow{r}$ interseca a ▱P en O, este punto pertenecerá a los planos ▱S y ▱P, por lo tanto el punto O será un punto de la recta x, intersección de dichos planos. Así, se llegaría a que las rectas r y x tienen en común el punto O, contradiciendo la hipótesis de que $\overleftrightarrow{r}$ // $\overleftrightarrow{x}$. Entonces, la suposición de que $\overleftrightarrow{r}$ interseca a ▱P, es falsa, y en consecuencia $\overleftrightarrow{r}$ // ▱P.

2. Si una recta y un plano son paralelos, ella es paralela a la intersección de este plano con cualquier otro que contenga a la recta y corte al plano dado.

Hipótesis: sea r una recta paralela al plano P y Q un plano cualquiera que contiene a $\overleftrightarrow{r}$ y se intersecan con ▱P según la recta "m".
Tesis: $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{m}$

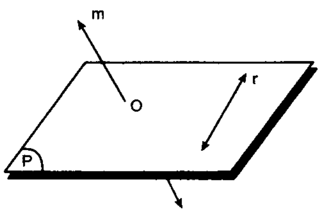
Demostración:



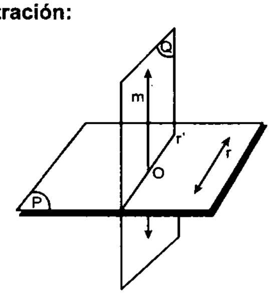
Como la recta "r" es paralela al plano P, entonces $\overleftrightarrow{r}$ no cortará a $\overleftrightarrow{m}$. Siendo además $\overleftrightarrow{r}$ y $\overleftrightarrow{m}$ coplanarias, entonces $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{m}$.

3. Si dos rectas se cruzan, por una de ellas pasa un plano, y solo uno, paralelo a la otra.

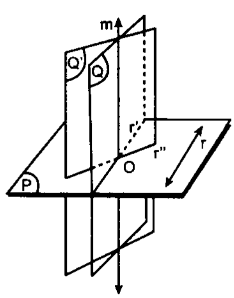
   Hipótesis: sean "m" y "r" dos rectas alabeadas. (Por comodidad grafiquemos $\overleftrightarrow{r}$ contenida en plano P y $\overleftrightarrow{m}$ secante a dicho plano en el punto O).
   Tesis: por $\overleftrightarrow{m}$ pasa un plano paralelo a $\overleftrightarrow{r}$, y solo uno.



Demostración:



En efecto, sea $\overleftrightarrow{r'}$ paralela a $\overleftrightarrow{r}$, trazada por el punto O. Luego, las rectas "m" y r', determinan un plano Q, el cual con seguridad no contiene a $\overleftrightarrow{r}$. Por lo tanto: ▱Q // $\overleftrightarrow{r}$, ya que $\overleftrightarrow{r} \parallel \overleftrightarrow{r'}$.



Y este plano Q es único, porque de existir otro plano Q' paralelo a $\overleftrightarrow{r}$, pasando por $\overleftrightarrow{m}$, la intersección de este otro plano, con ▱P, sería una recta r" que contiene al punto O. Así, en el plano P, por el punto O se tendrían dos paralelas a la recta r: r' y r". Lo cual contradice al quinto postulado de Euclides.

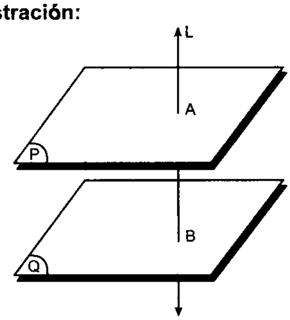
4. Toda recta paralela a dos planos secantes, es también paralela a la intersección de dichos planos. (La demostración se deja como ejercicio al lector).

Paralelismo entre planos

Dos planos son paralelos cuando no tienen punto común.

1. Dos planos perpendiculares a una misma recta, son paralelos entre sí.

   Demostración:

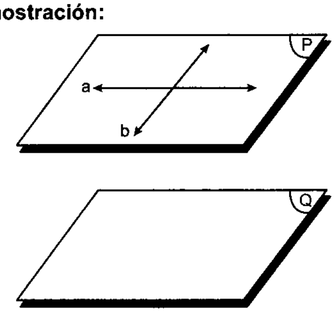


Sean ▱P y ▱Q, dos planos perpendiculares a la recta L en los puntos A y B, respectivamente. Si ▱P y ▱Q tuvieran un punto común R, este punto sería exterior a $\overleftrightarrow{L}$ y por él pasarían dos planos perpendiculares a $\overleftrightarrow{L}$, contradiciendo uno de los teoremas visto anteriormente.
Por lo tanto ▱P y ▱Q no pueden tener algún punto común; en consecuencia son paralelos.

2. Si un plano contiene a dos rectas secantes, paralelas a un segundo plano, entonces ambos planos son paralelos entre sí.

   Hipótesis: $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ son dos rectas secantes contenidas en el plano P, tales que $\overleftrightarrow{a}$ // ▱Q y $\overleftrightarrow{b}$ // ▱Q.
   Tesis: ▱P // ▱Q

   Demostración:

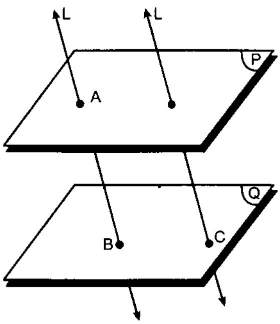


Supongamos que los planos P y Q no son paralelos; tendrían entonces en común una recta "r". Luego esta recta intersecaría, con seguridad, a alguna de las rectas $\overleftrightarrow{a}$ o $\overleftrightarrow{b}$ (o, a ambas). Si asumimos, por ejemplo, que $\overleftrightarrow{r}$ interseca a $\overleftrightarrow{a}$ en un punto C, entonces este punto por pertenecer a $\overleftrightarrow{r}$ pertenecerá al plano Q. Lo que indicaría que la recta a y el plano Q tienen en común el punto C, contradiciendo la hipótesis de que $\overleftrightarrow{a}$ y ▱Q son paralelos. Por lo tanto, los planos P y Q no se intersecan y en consecuencia son paralelos.

3. Toda recta secante a uno de dos planos paralelos, corta también al otro.

Hipótesis: ▱P y ▱Q son dos planos paralelos; $\overleftrightarrow{L}$, una recta que corta a P en el punto A.
Tesis: $\overleftrightarrow{L}$ corta a ▱Q.

Demostración:

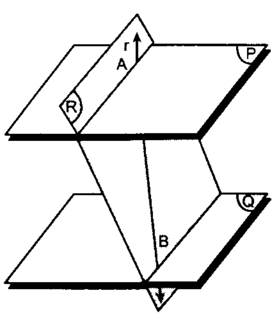


Sea L la recta paralela a $\overleftrightarrow{L}$, trazada por un punto C del plano Q. Luego, según teoría, como el plano Q corta a $\overleftrightarrow{L}$, cortará también a su paralela $\overleftrightarrow{L}$. Así, la recta L corta a los dos planos P y Q.

4. Todo plano que corta a uno de dos planos paralelos, corta también al otro.

Hipótesis: ▱P y ▱Q son dos planos paralelos; ▱R es un plano secante a ▱P.
Tesis: ▱R corta a ▱Q.

Demostración:



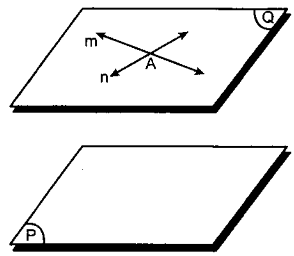
Sea $\overleftrightarrow{r}$, una recta del plano R, que corta a ▱P en el punto A. Luego, por el teorema anterior, esta recta corta también al plano Q en un punto tal como B; entonces, los planos R y Q tienen en común el punto B y tendrán comunes todos los puntos de una recta.

5. Toda recta perpendicular a uno de los planos paralelos, es también perpendicular al otro. (Demuestre el lector este teorema).

6. Por todo punto exterior a un plano dado, pasa un plano y solo uno, paralelo al primero.

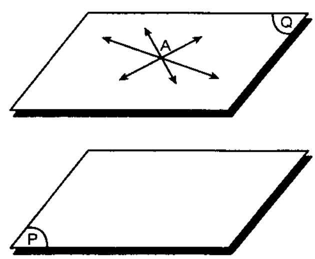
Hipótesis: sea P un plano dado y A, un punto exterior a dicho plano.
Tesis: por A pasa un plano Q, y solo uno, paralelo a P.

Demostración:



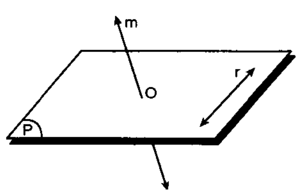
Por A, trazamos dos rectas paralelas al plano P (paralelas a dos rectas m' y n' de ▱P). El plano Q, determinado por estas rectas, es paralelo a ▱P; y este plano es único, porque de existir otro plano que pase por A, cortará a ▱Q y también a ▱P, según la teoría.

Corolario a. Todas las rectas paralelas a un plano dado, trazadas por un punto exterior, están contenidas en el plano paralelo al primero y que pasa por dicho punto.

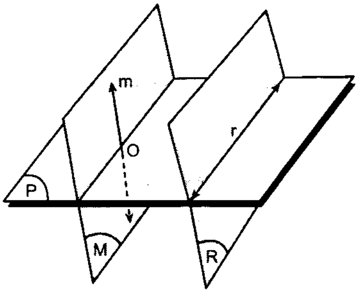


La figura muestra algunas de la infinidad de rectas paralelas al plano P, que pasan por el punto exterior A. Todas ellas están contenidas en el plano Q, paralelo a ▱P.

Corolario b. Por dos rectas alabeadas dadas, pasan dos planos, y solo dos, paralelos entre sí, y que contienen cada uno, una de dichas rectas.



(a)



(b)

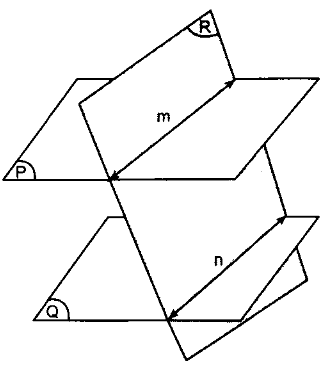
La figura (a) muestra dos rectas alabeadas m y r, estando $\overleftrightarrow{r}$ contenida en el plano P y $\overleftrightarrow{m}$, secante a ▱P.
La figura (b) indica los planos M y R, únicos, paralelos entre sí, que contienen a $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$, respectivamente.

7. Dos planos paralelos a un tercero, son paralelos entre sí.

   Demostración: sí los dos planos paralelos al tercero, no fueran paralelos entre sí, entonces tendrían en común un punto, por el cual pasarían dos planos paralelos al tercero, contradiciendo un teorema visto anteriormente. Por lo tanto, los dos planos son paralelos entre sí.

8. Si dos planos paralelos se intersecan con un tercer plano, las rectas de intersección son paralelas entre sí.

   Demostración:



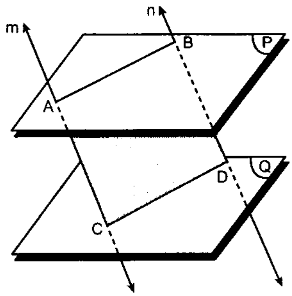
▱P y ▱Q son dos planos paralelos cortados por el plano ▱R, según las rectas m y n.
Como $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ están en un mismo plano R y no se cortan, por situarse en planos paralelos, entonces: $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{n}$.

9. Los segmentos de rectas paralelas, comprendidos entre planos paralelos, son congruentes.

   Hipótesis: $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son rectas paralelas intersecadas por los planos paralelos P y Q, según $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

   Tesis: AC = BD

   Demostración:



Las rectas "m" y "n", determinan un plano en el que $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$. El cuadrilátero ABDC tiene sus lados opuestos paralelos; entonces es un paralelogramo. De donde: AC = BD.

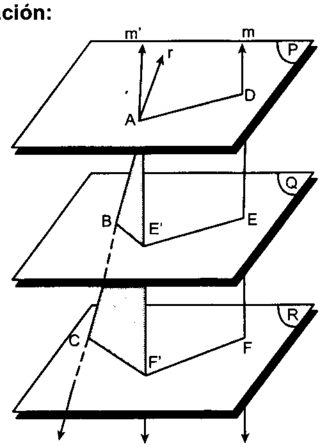
TEOREMA DE TALES EN EL ESPACIO

Tres o más planos paralelos determinan sobre dos rectas secantes cualesquiera, segmentos proporcionales.

Hipótesis: sean $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$, dos rectas que intersecan a los planos paralelos P, Q y R en los puntos A, B, C, D, E y F, respectivamente.

Tesis: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

Demostración:



Sea m' la recta que pasa por el punto A y es paralela a $\overleftrightarrow{m}$, intersecando a los planos Q y R en los puntos E' y F'. Luego, m' y r determinan un plano secante a los P, Q y R; de tal manera que BE' y CF' son paralelos, en el que usamos el teorema de Tales: $\frac{AB}{BC} = \frac{AE'}{E'F'}$

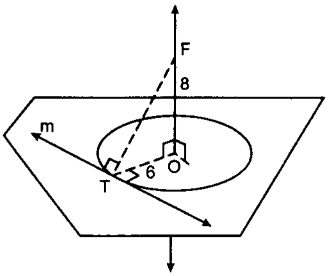
Pero, por el teorema anterior:
AE' = DE y E'F'= EF, por lo tanto: $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$

Ejemplos:

1. Se tiene una circunferencia de centro O y diámetro 12 cm. Por O, pasa una recta L perpendicular al

plano de la circunferencia. F es un punto L, tal que OF = 8 cm. Hallar la distancia de F a cualquier recta tangente a la circunferencia.

Resolución:



radio = $\frac{12}{2}$ = 6 cm

Sea $\overleftrightarrow{m}$, una recta tangente a la circunferencia, en el punto T.

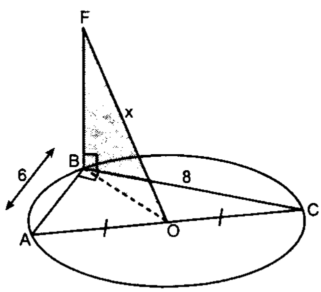
$\Rightarrow \overline{OT} \perp \overleftrightarrow{m}$

Según el teorema de las tres perpendiculares, será $\overline{FT} \perp \overleftrightarrow{m}$. Luego, $\overline{FT}$ es la distancia de F a $\overleftrightarrow{m}$.

En ⊾FOT: $(FT)^2 = 6^2 + 8^2$ ∴ FT = 10

2. En una circunferencia de centro O, se inscribe un triángulo ABC, recto en B. Se eleva $\overline{BF}$, perpendicular al plano ABC, de modo que BF = AC. Si AB = 6 y BC = 8, hallar $\overline{OF}$.

Resolución:



$(AC)^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow AC = 10 \Rightarrow BF = 10$

OB = OA = OC = radio = 5

$\overline{FB} \perp$ plano ABC $\Rightarrow \overline{FB} \perp \overline{BO}$

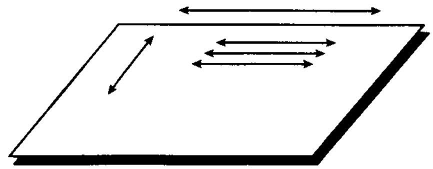
En ⊾OBF, teorema de Pitágoras:

$x^2 = (BF)^2 + (OB)^2 \Rightarrow x^2 = 10^2 + 5^2 = 125$

∴ $OF = x = 5\sqrt{5}$

3. Indicar verdadero (V) o falso (F):
   I. Tres puntos determinan siempre un plano.
   II. Dos rectas determinan siempre un plano.
   III. Si una recta es paralelas a un plano, será paralela a todas las rectas contenidas en dicho plano.
   IV. Si una recta es perpendicular a un plano, será perpendicular a todas las rectas contenidas en dicho plano.

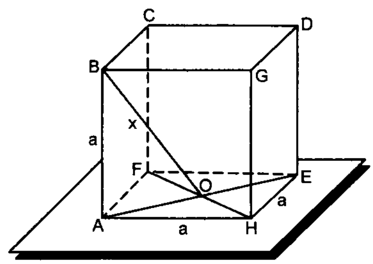
Resolución:



I. Tres puntos no colineales determinan un plano. (F)
II. Dos rectas secantes o dos rectas paralelas, determinan un plano. (F)
III. Si una recta es paralelas a un plano, será paralela a infinitas rectas paralelas de dicho plano, pero no a todas. (F)
IV. Teoría. (V)

4. En un cubo, cuyas aristas tienen longitud "a" cada una, hallar la distancia de un vértice al centro de una cara opuesta.

Resolución:



Sea O, centro de la cara AFEH y B un vértice de la cara opuesta BCDG, hallemos BO = x.

Como: $\overline{BA} \perp \overline{AF}$ y $\overline{BA} \perp \overline{AH} \Rightarrow \overline{BA} \perp$ plano AFEH

Luego: $\overline{BA} \perp \overline{AO}$

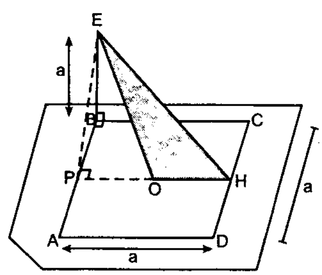
$AO = OE = \frac{AE}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

En ⊾OAB: $x^2 = (AB)^2 + (AO)^2 \Rightarrow x^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$

∴ $x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

5. ABCD, es un cuadrado de lado a. Por B, se eleva $\overline{BE}$ perpendicular al plano ABCD, tal que BE = a. Si O es centro del cuadrado y H punto medio de $\overline{CD}$, hallar el área de la región triangular EOH.

Resolución:



Al prolongar $\overline{HO}$ hasta P:

$\overline{HP} \perp \overline{AB}$ y $AP = PB = \frac{a}{2}$

Teorema de las tres perpendiculares:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{EB} \perp \text{plano } ABCD \\ \text{y } \overline{BP} \perp \overline{PH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{EP} \perp \overline{PH}$$

$\overline{EP}$ es altura del $\triangle EOH$. Luego:

$$S_{EOH} = \frac{1}{2}(OH)(EP) = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)(EP) \quad ...(1)$$

En el ⊾EBP:

$$(EP)^2 = (EB)^2 + (BP)^2 \Rightarrow (EP)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

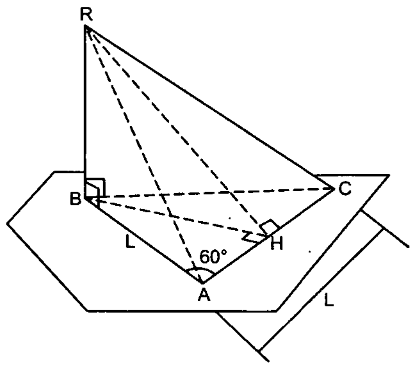
$$EP = \frac{a}{2}\sqrt{5} \quad ...(2)$$

$$(2) \text{ en } (1): S_{EOH} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{5}\right)$$

$$\therefore\ S_{EOH} = \frac{a^2}{8}\sqrt{5}$$

6. ABC es un triángulo equilátero de lado L, por B se eleva $\overline{BR}$ perpendicular al plano ABC, de modo que: BR = L/2. Se trazan luego $\overline{RA}$ y $\overline{RC}$. Hallar el área de la región triangular ARC.

Resolución:



Por el teorema de las tres perpendiculares:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{RB} \perp \text{plano } ABC \\ \text{y } \overline{BH} \perp \overline{AC}\end{array}\right\} \therefore\ \overline{RH} \perp \overline{AC}$$

Luego: $S_{ARC} = \frac{1}{2}(AC)(RH)$

$$\Rightarrow S_{ARC} = \frac{1}{2}(L)(RH) \quad ...(1)$$

En ⊾AHB (notable): $BH = \frac{L}{2}\sqrt{3}$

En ⊾RBH, teorema de Pitágoras:

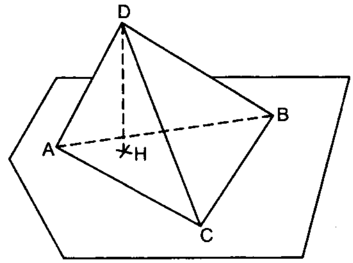
$$(RH)^2 = (RB)^2 + (BH)^2$$

$$(RH)^2 = \left(\frac{L}{2}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow RH = L \quad ...(2)$$

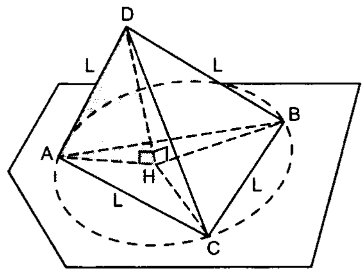
$$(2) \text{ en } (1): S_{ARC} = \frac{1}{2}(L)(L)$$

$$\therefore\ S_{ARC} = \frac{L^2}{2}$$

7. El sólido ABCD de la figura, se llama tetraedro. Las regiones triangulares ABC, ABD, ACD y BCD se llaman caras; los puntos A, B, C y D, son los vértices y las aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$. Se llama altura del tetraedro, a la distancia de un vértice a la cara opuesta. (Por ejemplo $\overline{DH}$).
Si las caras del tetraedro son triángulos equiláteros, el sólido es regular.
En un tetraedro regular, cuyas aristas tienen longitud L, hallar la longitud de la altura.



Resolución:



Como el tetraedro es regular:

AB = BC = AC = AD = CD = BD = L

Es fácil demostrar que H es el centro del $\triangle ABC$.

En efecto: ⊾AHD ≅ ⊾CHD ≅ ⊾BHD. Por tener igual hipotenusa (L) y el cateto común $\overline{DH}$.

⇒ HA = HB = HC (H es circuncentro del $\triangle ABC$)

$$AH = \frac{AC}{\sqrt{3}} \Rightarrow AH = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

En ⊾AHD: $(DH)^2 = (AD)^2 - (AH)^2$

$$(DH)^2 = L^2 - \left(\frac{L}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \therefore\ DH = \frac{L}{3}\sqrt{6}$$

8. Hallar el máximo número de planos que determinan "n" puntos del espacio.

Resolución:

El máximo número de planos que determinan "n" puntos del espacio, ocurrirá cuando no existan tres en línea recta ni cuatro coplanarias.

$$C_3^n = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

ya que cada tres puntos no colineales determinan un plano.

9. Hallar el máximo número de planos que determinan "n" rectas del espacio.

Resolución:

Hallamos el número máximo de planos que determinan "n" rectas del espacio:

$$C_2^n = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

y esto ocurrirá cuando no hayan tres rectas coplanarias, ya que cada dos rectas, secantes o paralelas, determinan un plano.

10. Hallar el máximo número de planos que determinan 10 rectas y 12 puntos del espacio.

Resolución:

Las 10 rectas determinan, como máximo:

$$C_2^{10} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = 45 \text{ planos}$$

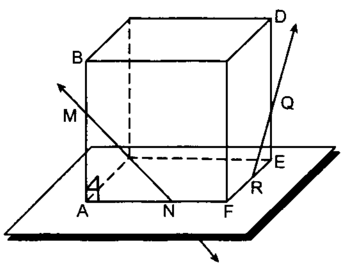
Los 12 puntos, como máximo, determinan:

$$C_3^{12} = \frac{12!}{3!(12-3)!} = \frac{12!}{3!9!} = 220 \text{ planos.}$$

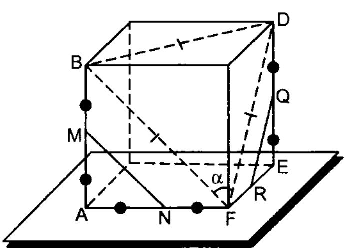
Como cada recta determina con un punto exterior a ella, un plano; el máximo número de planos que determinan las 10 rectas con los 12 puntos es: $10 \times 12 = 120$.

Sumando los resultados parciales:
$45 + 220 + 120 = 385$ planos.

11. La figura muestra un cubo. M, N, R y Q, son puntos medios de las aristas $\overline{AB}$, $\overline{AF}$, $\overline{EF}$ y $\overline{DE}$, respectivamente. Hallar la medida del ángulo de cruce entre las rectas MN y RQ.



Resolución:



Como: $\overline{BF} \parallel \overline{MN}$ y $\overline{DF} \parallel \overline{RQ}$

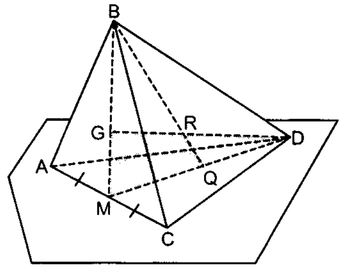
$\Rightarrow$ BFD da el ángulo de cruce entre $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{RQ}$ ($m\angle BFD$, mide α).

BD = BF = FD, por ser diagonales de los cuadrados y congruentes.

($\triangle BFD$: equilátero: $\alpha = 60°$)

12. En un tetraedro ABCD (no necesariamente regular), G y Q son baricentros de las caras ABC y ACD, respectivamente. Demostrar que $\overline{BQ}$ y $\overline{DG}$ son secantes, en un punto que llamaremos R y que se cumple: $\frac{DR}{RG} = \frac{BR}{RQ} = 3$

Resolución:



Como las prolongaciones de $\overline{BG}$ y $\overline{DQ}$ concurren en el punto medio de $\overline{AC}$ (M), entonces $\overline{BQ}$ y $\overline{DG}$ estarán contenidas en el plano MBD y por lo tanto serán secantes.

Ahora, en el $\triangle MGD$, por el teorema de Menelao para la transversal $\overline{BQ}$:

$$\left(\frac{MQ}{QD}\right)\left(\frac{DR}{RG}\right)\left(\frac{GB}{BM}\right) = 1 \qquad ...(\alpha)$$

Pero, por propiedad del baricentro:

$$\frac{MQ}{QD} = \frac{1}{2} \text{ y } \frac{GB}{BM} = \frac{2}{3}$$

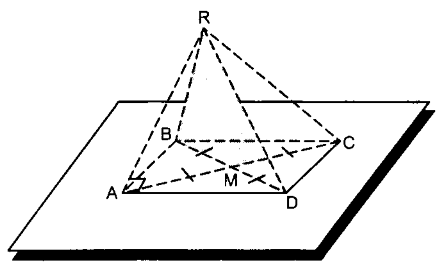
$$\Rightarrow \text{en } (\alpha)\text{: } \frac{1}{2}\left(\frac{DR}{RG}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = 1 \quad \Rightarrow \frac{DR}{RG} = 3$$

$\therefore$ En forma análoga se demuestra que $\frac{BR}{RQ} = 3$

13. Sea R un punto exterior al plano que contiene a un rectángulo ABCD. Probar que se cumple:

$$(RA)^2 + (RC)^2 = (RB)^2 + (RD)^2$$

Resolución:



Llamemos M, al punto de intersección de las diagonales del rectángulo. Se traza $\overline{RM}$.

Por el teorema de la mediana:

$$\triangle BRD \Rightarrow (RB)^2 + (RD)^2 = 2(RM)^2 + \frac{BD^2}{2} \quad ...(1)$$

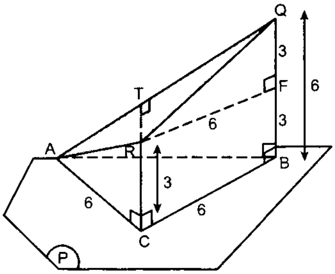
$$\triangle ARC \Rightarrow (RA)^2 + (RC)^2 = 2(RM)^2 + \frac{AC^2}{2} \quad ...(2)$$

Pero, AC = BD. Por lo tanto (1) = (2).

Entonces: $(RA)^2 + (RC)^2 = (RB)^2 + (RD)^2$

14. ABC es un triángulo equilátero de lado 6 cm, contenido en un plano P. Se elevan: $\overline{BQ} \perp P$ y $\overline{CR} \perp P$, de modo que BQ = 6 cm y CR = 3 cm. Hallar el área de la región triangular AQR.

Resolución:



Se tiene: $\triangle S_{AQR} = \frac{1}{2}(AQ)(RT)$ ...(1)

En ◺ABQ: AB = BQ = 6

$\Rightarrow AQ = 6\sqrt{2}$ ...(2)

Se traza $\overline{RF} \perp \overline{QB}$

En ◺ACR: $(AR)^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow AR = 3\sqrt{5}$

En ◺RFQ: $(RQ)^2 = 3^2 + 6^2 \Rightarrow RQ = 3\sqrt{5}$

AR = RQ ⇒ △ARQ, isósceles

Luego: $AT = TQ = \frac{AQ}{2} = \frac{6\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2} \Rightarrow AT = 3\sqrt{2}$

En ◺ATR: $(RT)^2 + (AT)^2 = (AR)^2$

$\Rightarrow (RT)^2 + (3\sqrt{2})^2 = (3\sqrt{5})^2$

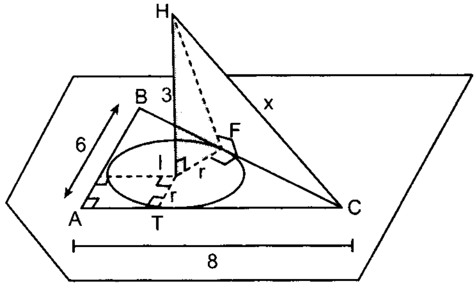
$\Rightarrow RT = 3\sqrt{3}$ ...(3)

Sustituyendo (2) y (3), en (1):

$S_{AQR} = \frac{1}{2}(6\sqrt{2})(3\sqrt{3}) \quad \therefore S_{AQR} = 9\sqrt{6}$

15. BAC es un triángulo recto en A, AB = 6 y AC = 8. Por su incentro I, se eleva $\overline{IH}$ perpendicular al plano ABC, siendo IH = 3. Hallar $\overline{HC}$.

Resolución:



Sean F y T, puntos de tangencia de la circunferencia inscrita en el △ABC, a los lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$.

⇒ IT = IF = r (inradio)

Por el teorema de Pitágoras en ◺ABC: BC = 10.

Por el teorema de Poncelet: BC + 2r = AB + AC

⇒ 10 + 2r = 6 + 8 ⇒ r = 2

Luego: AT = r = 2 ∧ TC = 8 − 2 = 6 = CF

Por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overline{HF} \perp \overline{BC}$, por ser $\overline{HI} \perp$ plano ABC, $\overline{IF} \perp \overline{BC}$.

En ◺HFC:

$x^2 = (HF)^2 + (CF)^2 \Rightarrow x^2 = (HF)^2 + 6^2$ ...(1)

En ◺HIF: $(HF)^2 = 3^2 + r^2 \Rightarrow (HF)^2 = 3^2 + 2^2$ ...(2)

De (2) en (1): $x^2 = 6^2 + 3^2 + 2^2$

∴ x = 7

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En la figura, $\overleftrightarrow{ST}$ es la intersección de los planos H y R.

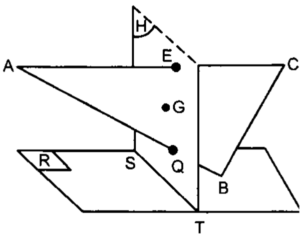
$\overline{AC} \cap$ ▱H: {E}: B ∈ ▱R

$\overline{AB} \cap$ ▱H: {Q}:

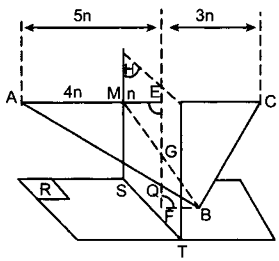
$\overline{AC}$ // ▱R

G ∈ ▱H y G es baricentro del △ABC.

Si: $\frac{AE}{EC} = \frac{5}{3}$; hallar: $\frac{AQ}{QB}$



Resolución:



$\frac{AE}{EC} = \frac{5}{3} \Rightarrow$ Sean: AE = 5n y EC = 3n

Con las prolongaciones hechas: $\overline{FB} // \overline{AC}$

BG = 2(GM) (propiedad del baricentro)

AM = MC ⇒ AM = 4n y ME = n.

$\triangle FGB \sim \triangle EGM \Rightarrow \frac{FB}{n} = \frac{r}{2r} \Rightarrow FB = \frac{n}{2}$

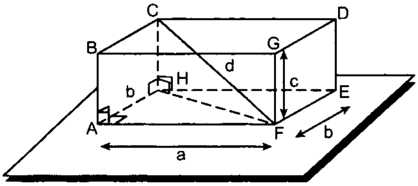
$\triangle EQA \sim \triangle FQB \Rightarrow \dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{AE}{FB} \Rightarrow \dfrac{AQ}{QB} = \dfrac{4n+n}{\frac{n}{2}}$

$\therefore \dfrac{AQ}{QB} = 10$

2. Un paralelepípedo rectangular recto, es el sólido formado por 6 regiones rectangulares llamadas caras. Dos caras opuestas cualesquiera son congruentes entre sí y ubicadas en planos paralelos. Llamemos a, b y c, las longitudes de tres aristas concurrentes en un vértice. Si "d" es longitud de una diagonal del paralelepípedo, demostrar que:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Resolución:

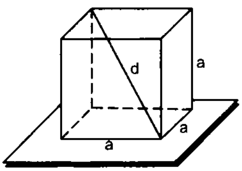


La figura muestra un paralelepípedo rectangular recto (semejante a una caja rectangular).

- A, B, C,... son los vértices.
  $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CH}$,... son las aristas.
- $\overline{CF}$, $\overline{HG}$, $\overline{BE}$, $\overline{AD}$, son diagonales del sólido (unen dos vértices de caras diferentes).
- Sean: AF = a, EF = b y GF = c. Además: CF = d.
- En el $\triangle CHF$, $\overline{CH} \perp \overline{HF}$, Por ser $\overline{CH} \perp$ plano AHEF:
  $d^2 = (HF)^2 + (CH)^2$ ...(1) (teorema de Pitágoras)
- Siendo: CH = c y en el ⊿HAF: $(HF)^2 = a^2 + b^2$
- Al sustituir en (1): $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

3. En un cubo, la longitud de una diagonal en términos de la longitud a de una arista es:

Resolución:

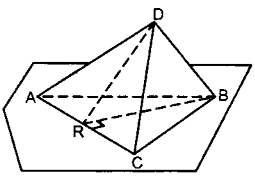


Por propiedad: $d^2 = a^2 + a^2 + a^2$ (para el cubo)

$\Rightarrow d^2 = 3a^2 \quad \therefore d = a\sqrt{3}$ (fórmula)

4. Dos aristas opuestas de un tetraedro, son perpendiculares entre sí. Demostrar que por una de ellas es posible pasar un plano perpendicular a la otra.

Resolución.



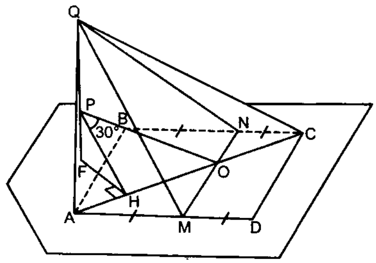
Sea ABCD el tetraedro, donde las aristas opuestas $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ son perpendiculares entre sí, según dato.

Tracemos $\overline{BR} \perp \overline{AC}$. Entonces: plano BRD $\perp \overline{AC}$,

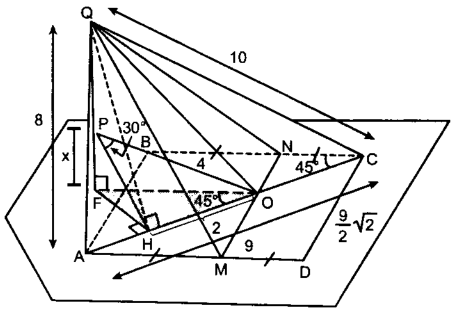
ya que: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$ por hipótesis.

$\overline{AC} \perp \overline{BR}$ por construcción.

5. En el gráfico mostrado ABCD es un cuadrado de centro O y lado $\frac{9}{2}\sqrt{2}$ m, QN = QM, $\overline{QF}$ es perpendicular al plano que contiene a ABCD y F se encuentra en dicho plano. Calcular PF, sí: AQ = 8 m, QC = 10 m y m∠OPH = 30°.



Resolución:



Teorema de proyección de la mediana; $\triangle AQC$:

$10^2 - 8^2 = 2(9)(OH) \Rightarrow OH = 2$

⊿OPH (30°; 60°): OP = 4

⊿FHO (45°; 45°): $FO = 2\sqrt{2}$

⊿PFO: $x = 2\sqrt{2}$

6. Dadas tres rectas alabeadas, $\overleftrightarrow{x}$, $\overleftrightarrow{y}$, $\overleftrightarrow{z}$, contenidas en planos paralelos. ¿Cuántas rectas son posibles de trazar, de modo que intersequen a las anteriores?

Resolución:

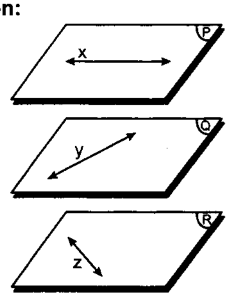


Fig. (1)

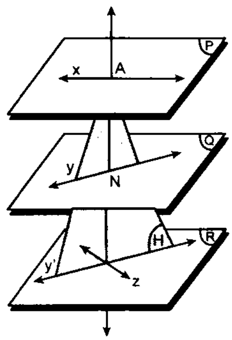


Fig. (2)

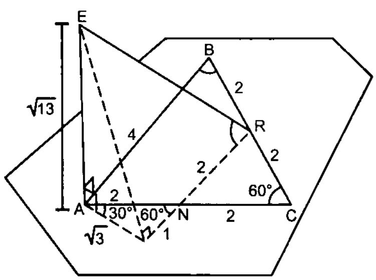
Consideramos la fig. (1) que cumple con la condición de que x, y, z se ubiquen en planos paralelos P, Q, R. Para dar solución al problema, tomemos un punto cualquiera A, sobre $\overleftrightarrow{x}$.

Luego, el plano H, determinado por A y la recta y, interseca a $\overleftrightarrow{z}$ en un punto M. Es claro que ▱H interseca a la $\overleftrightarrow{z}$ en un punto M. Es claro que ▱H interseca a $\overleftrightarrow{z}$, porque la intersección de H y R es una recta y' paralela a $\overleftrightarrow{y}$ (según teoría) y de hecho y' intersecará a $\overleftrightarrow{z}$.

Así, la recta AM soluciona el problema, puesto que también interseca a $\overleftrightarrow{y}$, en el punto N. Como el punto A es arbitrario, existirán infinidad de rectas que cumplen la condición, basta variar dicho punto sobre $\overleftrightarrow{x}$.

7. ABC es un triángulo equilátero de lado 4 cm. Por A, se traza $\overline{AE}$ perpendicular al plano ABC, tal que AE = $\sqrt{13}$ cm. Si R es punto medio de $\overline{BC}$, hallar la medida del ángulo con que se cruzan los segmentos AB y ER.

Resolución:



Se traza por R una paralela a $\overline{AB}$, cortando $\overline{AC}$ en N, x es la medida del ángulo pedido.

Sea $\overline{AQ} \perp \overline{RN}$

Según el teorema de las tres perpendiculares: $\overline{EQ} \perp \overline{QR}$

△RNC, equilátero: RN = 2

⊿AQN, notable (30°; 60°)

$NQ = \dfrac{AN}{2} = 1$ y $AQ = \sqrt{3} \Rightarrow QR = 3$

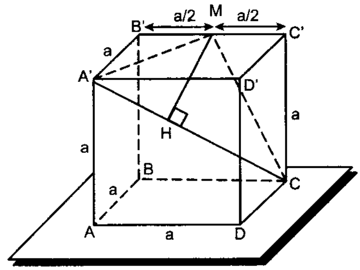
En △EAQ, teorema de Pitágoras:

$(EQ)^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow EQ = 4$

Luego: $\dfrac{EQ}{QR} = \dfrac{4}{3}$ ∴ En ⊿EQR: x = 53°

8. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$ son aristas laterales de un cubo (ABCD es una cara). Hallar la distancia del punto medio M de $\overline{B'C'}$ a la diagonal $\overline{A'C}$, si AB = a.

Resolución:



$\overline{MH} \perp \overline{A'C}$

En ⊿A'B'M: $(A'M)^2 = a^2 + \left(\dfrac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow A'M = \dfrac{a}{2}\sqrt{5}$

Como ⊿MC'C ≅ ⊿A'B'M: MC = A'M.

⇒ △A'MC (isósceles)

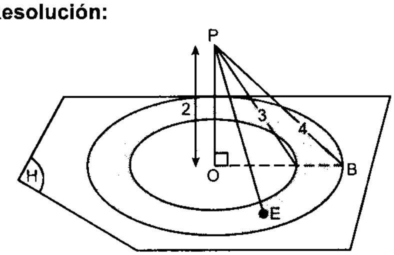
Luego: $A'H = HC = \dfrac{A'C}{2} = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Finalmente, en ⊿A'HM: $(MH)^2 = (A'M)^2 - (A'H)^2$

$\Rightarrow (MH)^2 = \left(\dfrac{a}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \left(\dfrac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2$ ∴ $\dfrac{a}{2}\sqrt{2}$

9. ¿Cuál es el lugar geométrico de los puntos de un plano H cuya distancia a un punto P, situado a 2 metros del plano, varía entre 3 y 4 metros?

Resolución:



Del gráfico, la respuesta es E

PO = 2, es la distancia del punto P al plano H.

PA = 3 y PB = 4

$\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ son radios de dos círculos concéntricos.

∴ Se observa que: $3 \leq PE \leq 4$

10. Dadas las siguientes proposiciones. ¿Cuáles son correctas?

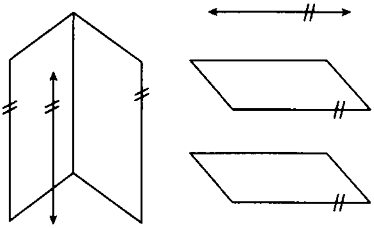
I. Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre sí.

II. Si la recta $\overleftrightarrow{L_1}$ es paralela al plano P, un plano Q contiene a $\overleftrightarrow{L_1}$ y ▱Q interseca a ▱P en una recta $\overleftrightarrow{L_2}$, entonces $\overleftrightarrow{L_2}$ es paralelo a $\overleftrightarrow{L_1}$.

III. Dos rectas perpendiculares a una tercera necesariamente son paralelos.

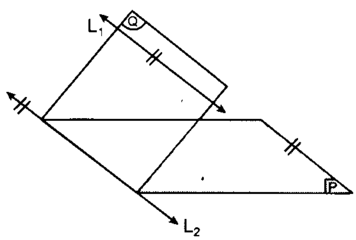
Resolución:

I. Los planos paralelos a una recta dada pueden ser secantes o paralelas entre sí.



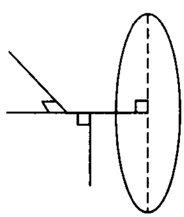
La proposición es falsa.

II. Si $\overleftrightarrow{L_2}$ es paralelo a $\overleftrightarrow{L_1}$. se cumple:



La proposición es verdadera.

III. Pueden ser alabeadas o cruzadas.



La proposición es falsa.

$\therefore$ FVF

11. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelas entre sí.
II. Por un punto de un plano solo se puede trazar una recta perpendicular al plano.
III. Todas las rectas paralelas entre sí son coplanares.

Resolución:

I. Si dos rectas paralelas al mismo plano; las rectas pueden ser cruzadas, secantes o paralelas.
La proposición es falsa.
II. Veamos el caso recíproco; por un punto de una recta solo puede pasar un plano que le sea perpendicular.
La proposición verdadera.
III. Las rectas que pasan por los puntos de la circunferencia dada se llama la directriz de la superficie cilíndrica, dichas rectas son paralelas entre sí y no son coplanares.
La proposición es falsa.

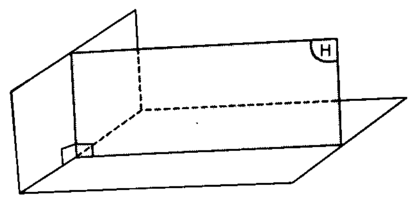
$\therefore$ FVF

12. Indicar el valor de verdad en las siguientes proposiciones.

I. Si las proyecciones ortogonales de una figura sobre dos planos perpendiculares son rectas, entonces dicha figura es una recta.
II. Si dos planos son perpendiculares a un tercer plano, entonces los dos primeros planos son paralelos.
III. Si las medidas de los ángulos entre una recta y dos planos son con congruentes, entonces dichos planos son paralelos.

Resolución:

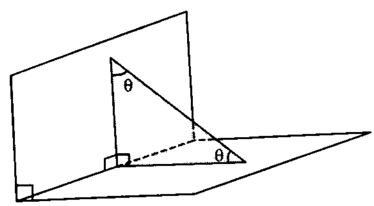
I.



Las proyecciones ortogonales del plano H sobre dos planos perpendiculares son rectas.
La proposición es falsa.

II. Si dos planos son perpendiculares, todo plano perpendicular a su intersección es perpendicular a ambos.
La proposición es falsa.

III.



Según la figura, la proposición es falsa.

$\therefore$ FFF

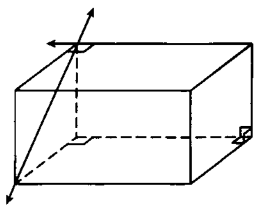
13. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La proyección ortogonal de dos rectas paralelas sobre un plano son 2 rectas paralelas.
II. La proyección ortogonal de 2 rectas perpendiculares sobre un plano forman un ángulo agudo.
III. La proyección ortogonal de 2 rectas cruzadas sobre un plano son dos rectas paralelas.

Resolución:

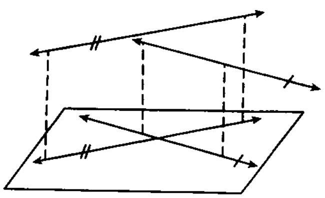
I. La proyección ortogonal de dos rectas paralelas sobre un plano de proyección, serán paralelas o aparecerán como puntos.
La proposición es verdadera.

II.



Según la figura, la proposición es falsa.

III.



Según la figura, la proposición es falsa.

∴ VFF

14. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

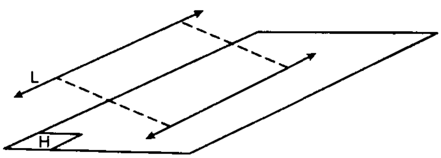
I. Sean una recta y un plano; si la recta es paralela a una recta del plano, entonces la recta es paralela al plano.

II. Sean dos rectas cruzadas, por todo punto exterior a dichas rectas se traza un plano paralelo a las rectas dadas.

III. Si dos planos tienen un punto común, entonces tienen una recta común.

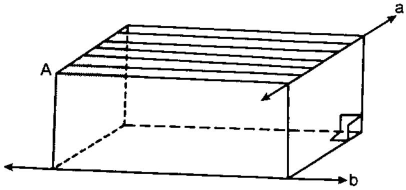
Resolución:

I.



Según la figura, la proposición es verdadera.

II.



Según la figura, la proposición es falsa.

III. La proposición es verdadera.

∴ VFV

15. Si un plano es paralelo a una línea recta. Entonces es verdad que:

I. Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.

II. Todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada.

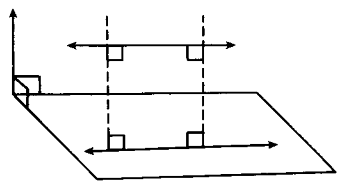
III. Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.

IV. Toda recta perpendicular a la recta dada será paralela al plano.

V. Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

Resolución:

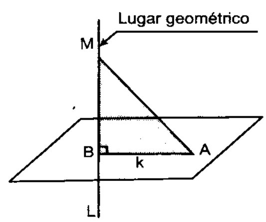
Si un plano es paralelo a una recta, toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.



∴ Es verdad solo III.

16. Dados dos puntos fijos A y B; sea K un valor dado. Hallar el lugar geométrico de los puntos M del espacio tales que: $(MA)^2 - (MB)^2 = K^2$

Resolución:

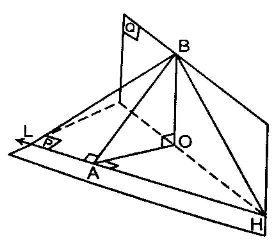


Para todo punto M de L, se cumple:

$(MA)^2 - (MB)^2 = K^2$.

17. Sea L una recta de un plano P; O un punto exterior al plano; se une O con un punto A de $\overleftrightarrow{L}$ y se traza por O el plano Q perpendicular a $\overline{OA}$. Demostrar que las rectas de intersección de los planos Q y P, cuando A se desplaza en $\overleftrightarrow{L}$, pasan por un punto fijo.

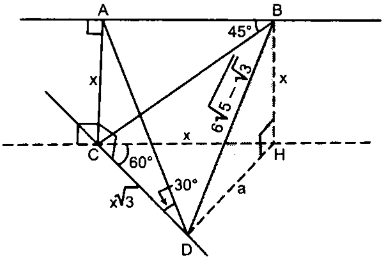
Resolución:



Cuando cumple el teorema de las tres perpendiculares, las rectas de intersección de los planos Q y P, cuando A se desplaza en L, pasan por el punto fijo H.

18. Dos rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ se cruzan determinando un ángulo que mide 60°. Si AC es la mínima distancia, y la m∠ABC = 45°, m∠ADC = 30° y $BD = 6\sqrt{5-\sqrt{3}}$ m. Calcular $\overline{AC}$, (en m).

Resolución:



Por propiedad:

$\triangle DCH$: $a^2 = (x\sqrt{3})^2 + x^2 - x(x\sqrt{3})$

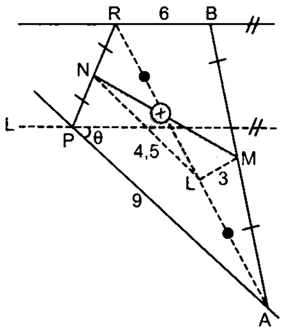
$a = \sqrt{4x^2 - x^2\sqrt{3}}$

⊾BHD: $36(5-\sqrt{3}) = x^2 + 4x^2 - x^2\sqrt{3}$

$36(5-\sqrt{3}) = x^2(5-\sqrt{3}) \Rightarrow x = 6$

19. $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$ se cruzan en el espacio, AP = 9 cm y BR = 6 cm respectivamente. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{PR}$, sabiendo que es el mayor entero posible (en cm).

Resolución:



Se traza L // $\overleftrightarrow{RB}$

$\triangle PRA$; por Teorema de puntos medios: NL = 4,5

$\triangle ABR$: LM = 3

$\triangle LNM$; por teorema:

$4{,}5 - 3 < x < 4{,}5 + 3 \Rightarrow 1{,}5 < x < 7,5$

∴ El mayor valor entero de x es 7 m.

20. Calcular el número máximo de planos, que se pueden determinar con 10 puntos en el espacio, tal que 3 puntos no son colineales.

Resolución:

Con tres puntos no colineales se determina un plano, el número máximo de planos que se puede formar con 10 puntos, serán las combinaciones de todos ellos tomados de tres en tres, es decir:

$$C_3^{10} = \frac{10!}{3!(10-3)!}$$

$$C_3^{10} = \frac{10\times 9\times 8\times 7!}{6\times 7!}$$

$$C_3^{10} = \frac{10\times 3\times 3\times 2\times 4}{6}$$

$$C_3^{20} = 120$$

21. Determinar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. Tres puntos siempre determinan un plano.

II. La intersección de tres planos secantes siempre determinan un punto.

III. El número mínimo de planos que determinan 4 rectas paralelas es uno.

Resolución:

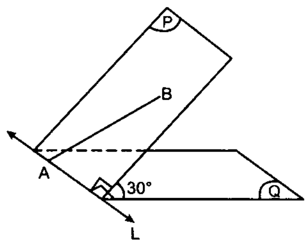
I. No siempre, porque si los 3 puntos son colineales, entonces no existe plano alguno.
La proposición es falsa.

II. No siempre, porque existen más casos cuando tres planos son secantes.
La proposición es falsa.

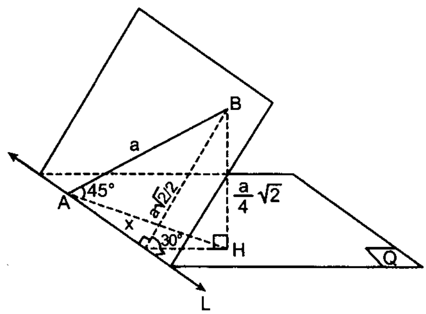
III. Cuando las 4 rectas paralelas son coplanares, el mínimo número de planos que determinan es uno.
La proposición es verdadera.

∴ FFV

22. Dos planos P y Q se intersecan en una recta L. Si un segmento AB de longitud "a" se encuentra en el plano P e interseca a la recta L formando un ángulo, cuya medida es 45°. Hallar la longitud de la proyección del segmento sobre el plano Q.



Resolución:

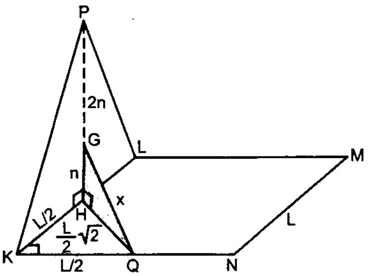


◺ABH; por el teorema de Pitágoras:

$$x^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 \Rightarrow x^2 = \frac{7a^2}{8} \quad \therefore\ x = \frac{1}{2}(a)\left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$$

23. El cuadrado KLMN y el triángulo equilátero KLP, se encuentran en planos perpendiculares. Si G es el baricentro de la región triangular KLP y Q es punto medio $\overline{KN}$ y MN= L, hallar la longitud de $\overline{GQ}$.

Resolución



$$3n = \frac{L}{2}\sqrt{3} \Rightarrow n = \frac{L}{6}\sqrt{3}$$

◺HQK: $HQ = \frac{L}{2}\sqrt{2}$

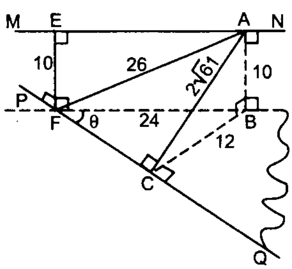
◺GHQ: $x^2 = \left(\frac{L\sqrt{3}}{6}\right)^2 + \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$$x^2 = \frac{L^2}{12} + \frac{L^2}{2} \Rightarrow x^2 = \frac{L^2 + 6L^2}{12}$$

$$x^2 = \frac{7L^2}{12} \Rightarrow x = \frac{L\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \quad \therefore\ x = \frac{L\sqrt{21}}{6}$$

24. La distancia entre dos rectas $\overleftrightarrow{MN}$y $\overleftrightarrow{PQ}$ que se cruzan, está dada por el segmento EF de 10 m de longitud ($E \in \overleftrightarrow{MN}$ y $F \in \overleftrightarrow{PQ}$). Si un punto A de MN dista de F y PQ 26 m y $2\sqrt{61}$ m respectivamente, hallar la medida del ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$.

Resolución:



◺FAB: FB = 24

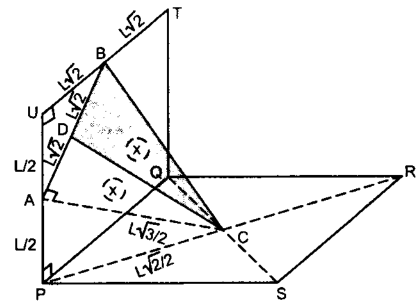
◺ABC: BC = 12

◺FBC notable: FB = 2(BC) = 24

$\therefore\ \theta = 30°$

25. Las regiones cuadradas PQRS y PQTU son perpendiculares, siendo C el centro del cuadrado PQRS, cuyo lado mide L. Si A, B y D son puntos medios de $\overline{UP}$, $\overline{UT}$ y $\overline{AB}$ respectivamente, hallar el área de la región triangular CDB.

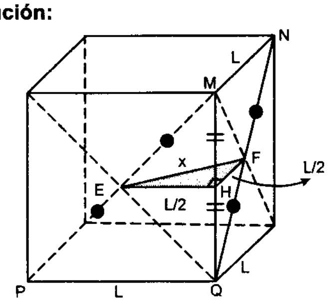
Resolución:



◺ABC: $2x = \frac{1}{2}\left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore\ x = \frac{L^2\sqrt{6}}{16}$

26. Los segmentos $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se cruzan ortogonalmente. Si MN = PQ = L, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$.

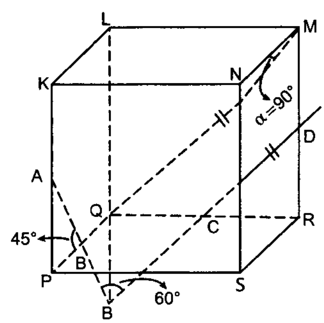
Resolución:



El sólido es un rectoedro $\quad \therefore$ ◺EHF: $x = \frac{L}{2}\sqrt{2}$.

27. En un hexaedro regular KLMN - PQRS. Si A, B, C y D son puntos medios de $\overline{KP}$, $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RM}$, hallar la suma de las medidas del ángulo que forman al cruzarse $\overline{AB}$ con $\overline{CD}$; $\overline{CD}$ con $\overline{NM}$ y $\overline{AB}$ con $\overline{NM}$.

Resolución:



Las medidas de los ángulos formados por:

$\overline{AB}$ con $\overline{CD}$ el 60°

$\overline{CD}$ con $\overline{NM}$ es α = 90°

$\overline{AB}$ con $\overline{NM}$ es 45° $\quad \therefore$ La suma es: 195°

28. ¿Cuántos planos como máximo se determinan con 15 puntos?

Resolución:

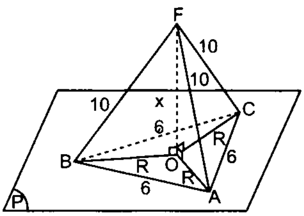
Se sabe que tres puntos no colineales determinan un plano. Si n es la cantidad de puntos por análisis combinatorio se tendría que la cantidad de planos sería:

$$C_3^n = \frac{n!}{(n-3)!3!} \Rightarrow C_3^n = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

Para n = 15: 455 planos.

29. Desde un punto exterior a un plano se trazan tres segmentos oblicuos de 10 cm de longitud, de manera que sus pies son los vértices de un triángulo equilátero de 18 cm de perímetro. Calcular la distancia del punto al plano.

Resolución:



Sea F un punto exterior al plano P, se trazan las oblicuas FA = FB = FC = 10 cm; A, B y C son los vértices de un triángulo equilátero cuyo lado será igual a 6 cm. Sea FO = x la distancia del punto F al plano P.

Los triángulos rectángulos AOF, BOF y COF son congruentes, luego: OA = OB = OC = R; O será el centro del triángulo equilátero. Entonces: $AB = R\sqrt{3}$ (fórmula del lado del triángulo equilátero).

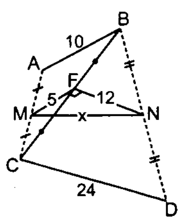
$6 = R\sqrt{3}$; $R = 2\sqrt{3}$

⊾BOF: $x^2 + R^2 = 10^2 \Rightarrow x^2 + (2\sqrt{3})^2 = 10^2$

$\therefore x = 2\sqrt{22}$

30. Se tienen los segmentos ortogonales AB = 10 cm y CD = 24 cm. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Resolución:



Sea MN = x

Unimos B con C y en el triángulo ABC trazamos $\overline{MF} // \overline{AB}$; luego, BF = FC y $MF = \frac{AB}{2} = 5$.

(Teorema de los puntos medios).

En el triángulo CBD unimos F con N,

Luego: $\overline{FN} // \overline{CD}$; $FN = \frac{CD}{2} = 12$

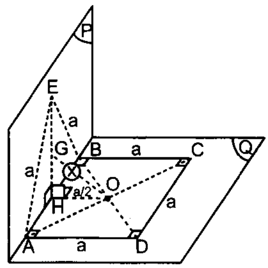
(Teorema de los puntos medios).

Como $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son ortogonales: $m\angle MFN = 90°$

⊾MFN: $x^2 = 5^2 + 12^2$ $\quad\therefore x = 13$ cm

31. Se tiene un cuadrado ABCD y un triángulo equilátero ABE situado en planos perpendiculares respectivamente. Si: AB = a. Hallar la longitud del segmento que une los centros de dichos polígonos regulares.

Resolución:



Sean P y Q los planos perpendiculares en los cuales están situados el triángulo equilátero ABE y el cuadrado ABCD respectivamente.

En el △ABE trazamos la altura $\overline{EH}$ entonces:

$EH = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ (altura del triángulo equilátero)

Sea G el centro del △ABC ⇒ EG = 2(GH)

Luego: $GH = \frac{a}{6}\sqrt{3}$

Sea O el centro del cuadrado ABCD:

⇒ $\overline{OH} \perp \overline{AB}$ y $\overline{OH} = \frac{a}{2}$

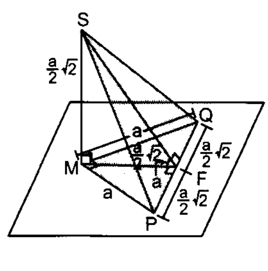
Sea GO = x; la distancia pedida: $m\angle GHO = 90°$ ya que los planos P y Q son perpendiculares.

Luego: $x^2 = (GH)^2 + (HO)^2$

$$x^2 = \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \therefore x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

32. Sea PMQ un triángulo rectángulo isósceles tal que: MP = MQ = a por M se traza una perpendicular al plano del triángulo y se construye $MS = \frac{a}{2}\sqrt{2}$; se trazan los segmentos SP y SQ. Determinar la medida del ángulo diedro cuya arista es $\overline{PQ}$.

Resolución:



En el ⊾PMQ trazamos la altura $\overline{MF}$; como $PQ = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow MF = PF = FQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Por el teorema de las tres perpendiculares tenemos que: $\overline{SF} \perp \overline{PQ}$ luego, la $m\angle MFS = \alpha$ es la medida del diedro de arista $\overline{PQ}$.

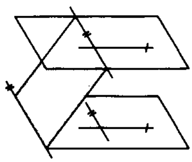
⊾SMF: $SM = MF = \frac{a}{2}\sqrt{2}$ $\quad \therefore \alpha = 45°$

33. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

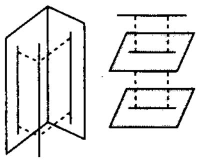
I. Todo plano determinado por dos rectas paralelas a otro plano, es siempre paralelo al segundo.
II. Todos los planos paralelos a una recta son paralelos entre sí.
III. Todo plano perpendicular a una reta situada en un plano es perpendicular al plano.

Resolución:

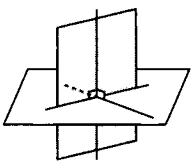
I. Falsa
Todo plano determinado por dos rectas paralelas a otro plano, puede ser secante o paralela al plano dado.



II. Falsa
Los planos paralelos a una recta dada pueden ser secantes o paralelas entre sí.



III. Verdadera
Si dos planos son perpendiculares, una recta perteneciente a uno de ellos y perpendicular a la intersección de los planos será también perpendicular al otro plano.



$\therefore$ FFV

34. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

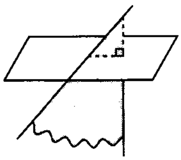
I. Dos rectas perpendiculares a una tercera recta son necesariamente paralelas entre sí.
II. El lugar geométrico de los pies de los segmentos oblicuos de igual longitud trazados desde un mismo punto a un plano es una circunferencia.
III. Por una recta cualquiera del espacio se puede trazar un plano perpendicular a otro plano dado.

Resolución:

I. **Falsa**
En el espacio, dos rectas perpendiculares a una tercera, pueden ser rectas alabeadas, secantes o paralelas.

II. **Verdadera**
Por ejemplo, el cono de revolución.

III. **Verdadera**
Por una recta oblicua a un plano se puede trazar un solo plano perpendicular al primero.



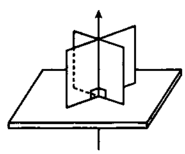
$\therefore$ FVV

35. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

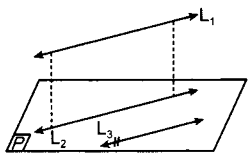
I. Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que contiene a la recta es perpendicular al plano dado.
II. Dada tres rectas paralelas entre si, entonces estas son coplanarias.
III. Dadas dos rectas que se cruzan, entonces siempre existe una recta perpendicular a ambas.

Resolución:

I. **Verdadera**



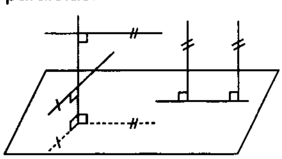
II. **Falsa**
En el espacio tres rectas paralelas no necesariamente están en el mismo plano.



$\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \,//\, \overleftrightarrow{L_3}$

$\overleftrightarrow{L_1} \not\subset \square P$

III. **Verdadera**
En el espacio, dos rectas perpendiculares a una tercera, pueden ser rectas cruzadas, secantes o paralelas.



$\therefore$ VFV

36. Determinar el valor de verdad de:

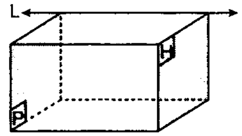
I. Si L es una recta dada y P un plano, entonces siempre existe otro plano paralelo a P y que contiene a L.

II. Una recta perpendicular a la Intersección de dos planos perpendiculares entre sí, está siempre contenida en uno de ellos.

III. Si dos rectas se cruzan, por una de ellas puede pasar un único plano paralelo a la otra recta.

Resolución:

I. **Falsa**

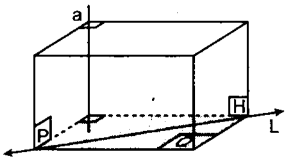


En el gráfico vemos que ▱P // ▱H, pero $\overleftrightarrow{L} \not\subset$ ▱H

La proposición solo se cumplirá si $\overleftrightarrow{L} \subset$ ▱H

II. **Falsa**

Nuevamente un rectoedro.



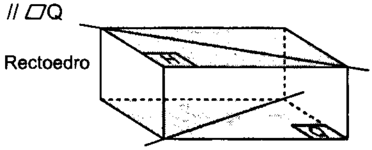
P ⊥ H; P ⊥ Q; H ⊥ Q ⇒ $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{L}$

Luego L no necesariamente está incluido en el plano P o en el plano H.

En consecuencia, la proposición es falsa.

III. **Verdadera**

▱H // ▱Q



∴ FFV

37. Se tiene las rectas cruzadas L_1 y L_2, y un punto A que no pertenece a L_1 tampoco a L_2 entonces: indique el valor de verdad de:

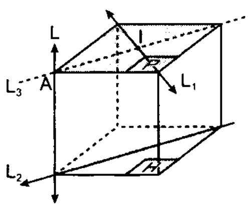
I. Siempre es posible trazar por A una recta que interseca a L_1 y a L_2.

II. Siempre es posible trazar por A una recta perpendicular a L_1 y L_2.

III. Siempre es posible trazar un plano que contenga al punto A y que sea paralela a L_1 y a L_2.

Resolución:

El sólido es un rectoedro.



I. **Falsa**

$\overleftrightarrow{L_3} \cap \overleftrightarrow{L_1} = I \wedge \overleftrightarrow{L_3} + \overleftrightarrow{L_2} = \varnothing$

II. **Verdadera**

$\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱P ∧ $\overleftrightarrow{L} \perp$ ▱H

En consecuencia, L es perpendicular a $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.

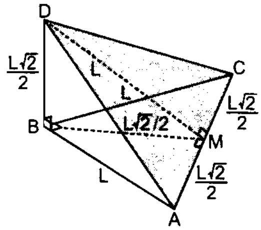
III. **Falsa**

A ∈ ▱P ∧ $\overleftrightarrow{L_1} \subset$ ▱P ⇒ $\overleftrightarrow{L_1}$ no paralelo ▱P.

∴ FVF

38. Sea ABC un triángulo recto en B y BA = BC = L, del vértice B se raza el segmento BD perpendicular al triángulo tal que BD = $\frac{L\sqrt{2}}{2}$. Hallar el área de la región triangular ADC.

Resolución:



⊾DBM: $(DM)^2 = \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$(DM)^2 = \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{2} = L^2 \Rightarrow DM = L$

$\Rightarrow A_{\Delta ADC} = \frac{1}{2}(L\sqrt{2})(L) \quad \therefore A_{\Delta ADC} = \frac{L^2\sqrt{2}}{2}$

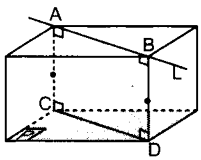
39. Indicar el valor de verdad de los siguientes enunciados:

I. Sea el plano P y la recta L, A ∈ $\overleftrightarrow{L}$, B ∈ $\overleftrightarrow{L}$, siendo las proyecciones ortogonales de estos puntos sobre P los puntos C y D, respectivamente, si AC = BD. Entonces $\overleftrightarrow{L}$ // ▱P.

II. Si dos rectas no son paralelas ni se intersecan, entonces dichas rectas se cruzan.

III. Si tiene 4 puntos cualesquiera no coplanarios en el espacio, existirá un punto que equidista de estos 4 puntos.

Resolución:



I. **Verdadera**

Sabemos que CABD es un rectángulo

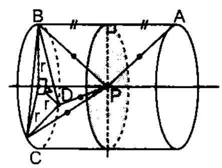
AC = BD ∧ $\overline{AB}$ // $\overline{CD}$ ⇒ $\overleftrightarrow{L}$ // ▱P.

II. **Verdadera**

Es evidente la proposición, en consecuencia es verdadera

III. **Verdadera**

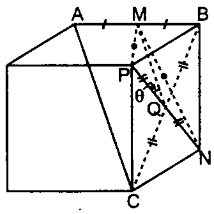
P es el punto equidistante de A, B, C y D



∴ VVV

40. En un cubo la diagonal de un cubo y la diagonal de una cara, se cruzan, halle la medida del ángulo formado.

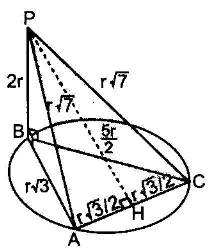
Resolución:



Se traza $\overline{QM}$ // $\overline{CA}$, entonces θ es la medida del ángulo buscado.
El $\triangle$PMN es isósceles PM = MN y como PQ = QN, entonces $\overline{MQ}$ es mediatriz de $\overline{PN}$. $\therefore$ θ = 90°

41. El triángulo equilátero ABC está inscrito en una circunferencia de radio r. Por B se traza $\overline{BP}$ perpendicular al plano de la circunferencia, tal que BP = 2r, calcule el área de la región triangular APC.

Resolución:



$\triangle$PBC: $PC = r\sqrt{7}$; $\triangle$PBA: $PA = r\sqrt{7}$; $\triangle$PHC: $PH = \frac{5\pi}{2}$

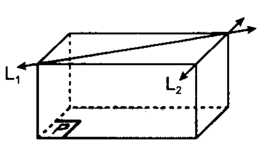
$\Rightarrow A_{\triangle APC} = \frac{1}{2}(r\sqrt{3})\left(\frac{5r}{2}\right) \quad \therefore A_{\triangle APC} = \frac{5\sqrt{3}}{4}r^2$

42. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas a un plano P; entonces, las rectas L_1 y L_2 son rectas paralelas.
II. Una recta es paralela a un plano P y también a otro plano Q. Entonces P y Q son planos paralelos.
III. Dos rectas paralelas L_1 y L_2, son paralelas a un plano P, entonces el plano Q determinado por L_1 y L_2 será paralelo al plano P.

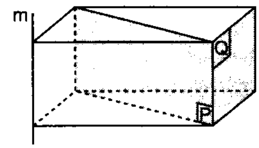
Resolución:

I. **Falsa**



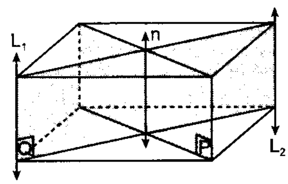
$\overleftrightarrow{L_1} // \square P \wedge \overleftrightarrow{L_2} // \square P$
Pero $L_1 \wedge L_2$ no son paralelos.

II. **Falsa**



$\overleftrightarrow{m} // \square P \wedge \overleftrightarrow{m} // \square Q$
Pero los planos P y Q no son paralelos.

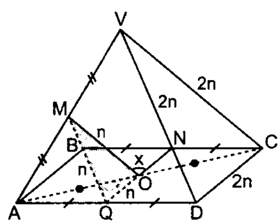
III. **Falso**



$\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2}$; $\overleftrightarrow{L_1} // \square P \wedge \overleftrightarrow{L_2} // \square P \Rightarrow \square P \cap \square Q = \overleftrightarrow{n}$
$\therefore$ FFF

43. ABCD es un paralelogramo contenido en el plano H y V es un punto exterior. Si $\overline{AC} \cap \overline{BD}$ = O, M es punto medio de $\overline{AV}$, N punto medio de $\overline{BC}$, y VD = VC = CD, calcular m∠MON.

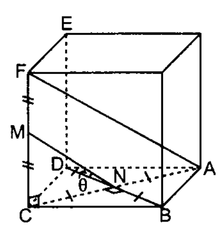
Resolución:



$\triangle$AVC: $\overline{MO}$ es base media y MO = n.
$\triangle$AVD; $\overline{MQ}$ es base media y MQ = n
Pero: QO= ON = n, entonces el $\triangle$QMO es equilátero.
$\therefore$ x = 120

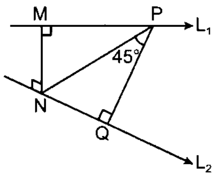
44. Los cuadrados ABCD y CDEF están ubicados en planos perpendiculares. Halle la medida del ángulo que determinan los segmentos BD y AF.

Resolución:

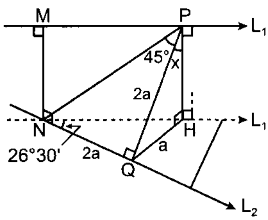


$\triangle$FCA: $\overline{MN}$ es base media y θ es la medida del ángulo buscado.
Por el teorema de las tres perpendiculares: θ = 90°

45. En la figura mostrada, las rectas L_1 y L_2 se cruzan y determinan un ángulo que mide 26°30'. Calcular la medida del ángulo determinado por $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$.



Resolución:



Por H, se traza $\overleftrightarrow{L} // \overleftrightarrow{L_1}$

Trazamos $\overline{PH} \perp \overleftrightarrow{L_1}$, pero $\overline{PQ} \perp \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow \overline{HQ} \perp L_2$

(Por teorema de las tres perpendiculares)

⊾PQN isósceles: PQ = QN = 2a

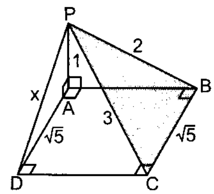
⊾HQN (53°/2 y 127°/2): NQ = 2a ⇒ QH = a

⊾PHQ (notable): PQ = 2(QH) = 2a

$\therefore$ x = 30°

46. Se ubica el punto P, exterior al plano que contiene al rectángulo ABCD, de manera que PA = 1; PB = 2 y PC = 3. Hallar $\overline{PD}$.

Resolución:



Si: $\overline{PA} \perp \square ABCD$ y $\overline{AB} \perp \overline{BC} \Rightarrow \overline{PB} \perp \overline{BC}$

⊾PBC (Teorema de Pitágoras):

$(BC)^2 = 3^2 - 2^2 \Rightarrow BC = \sqrt{9-4} \Rightarrow BC = \sqrt{5}$

⊾PAD: $x^2 = 1^2 + (\sqrt{5})^2 \Rightarrow x = \sqrt{1+5}$

$\therefore x = \sqrt{6}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

En un triángulo ABC en el espacio, la altura relativa a $\overline{AC}$ es $5\sqrt{3}$ cm. Sus vértices A y C están en un plano horizontal P y el vértice B es exterior a P de modo que el diedro B-AC-B' (B' es la proyección de B sobre P) mide 37°. Si AB' = 10 cm, entonces la longitud de $\overline{AB}$ (en cm) es:

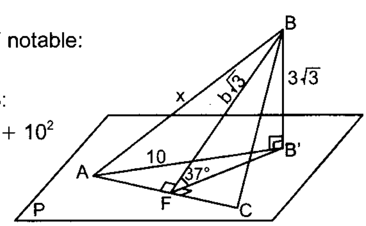
A) 10 B) 10,6 C) $\sqrt{127}$
D) $5\sqrt{6}$ E) $6\sqrt{5}$

Resolución:

1.° En el ⊾BB'F notable:
BB' = $3\sqrt{3}$

2.° En el ⊾AB'B:
$x^2 = (3\sqrt{3})^2 + 10^2$

$x = \sqrt{127}$



Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Sean P_1, P_2, P_3 planos paralelos. La recta L_1 corta al plano P_1 en A, al plano P_2 en B y al plano P_3 en C, de tal manera que AB = $\frac{1}{3}$BC + 1. Otra recta L_2 corta al plano P_1 en F, al plano P_2 en E y al plano P_3 en D.
Si FE = $\frac{1}{2}$ED, halle $\overline{BC}$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 8

Resolución:

Piden: 3x

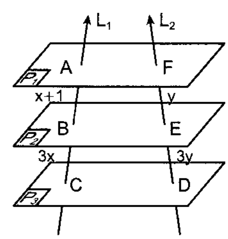
Teorema de Tales:

$\frac{x+1}{3x} = \frac{y}{2y}$

Resolviendo: x = 2

Luego: BC = 3x = 3(2)

$\therefore$ BC = 6



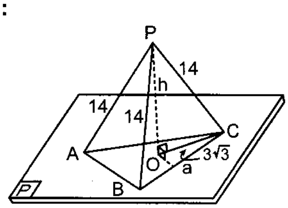
Clave: D

PROBLEMA 3 (UNI 2013 - I)

Desde un punto exterior a un plano se trazan tres oblicuas congruentes de 14 m de longitud, de modo que sus pies son los vértices de un triángulo equilátero cuya área es $\frac{81}{4}\sqrt{3}$ m². Calcule la distancia del punto al plano.

A) 9 B) 10 C) 11 D) 12 E) 13

Resolución:



Piden: h

Dato: $A_{\Delta ABC} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4} \Rightarrow \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{81\sqrt{3}}{4} \Rightarrow a = 9$

O: circuncentro del $\Delta ABC \Rightarrow OC = 3\sqrt{3}$

⊾POC, por el teorema de Pitágoras:

$14^2 = h^2 + (3\sqrt{3})^2 \quad \therefore\ h = 13$

Clave: E

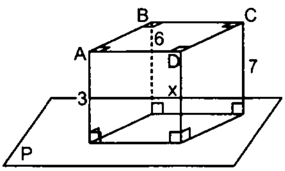
PROBLEMA 4 (UNI 2014 - I)

Dado un cuadrado ABCD de lado a > 6, exterior a un plano P. Si las distancias de A, B y C al plano P son 3; 6 y 7 respectivamente, halle la distancia de D al plano P.

A) 3 B) 3,5 C) 4 D) 4,5 E) 5

Resolución:

Piden: distancia del punto D al plano



Propiedad en las regiones paralelográmicas

$3 + 7 = 6 + x \quad \therefore\ x = 4$

Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2014 - I)

Sea ABCD un rectángulo, M punto medio de $\overline{BC}$, $\overline{PM}$ perpendicular al plano ABC, O centro del rectángulo, si BC = 2(AB) = 8 y PM = AB, entonces el área de la región triangular APO es:

A) $2\sqrt{6}$ B) $3\sqrt{6}$ C) $4\sqrt{6}$
D) $7\sqrt{6}$ E) $8\sqrt{6}$

Resolución:

Piden: $A_{\Delta APO}$

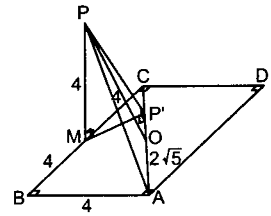
ΔABC = Notable 53°/2

$\Rightarrow CA = 4\sqrt{5} \wedge OA = 2\sqrt{5}$

Luego, por teorema 3 ⊥

$\Delta CMP'$: Notable 53°/2

$\Rightarrow MP' = \dfrac{4\sqrt{5}}{5}$



Observamos ΔMPP: Pitágoras

$4^2 + \left(4\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 = (PP')^2 \Rightarrow PP' = \dfrac{4}{3}\sqrt{30}$

Finalmente: $A_{\Delta APO} = \dfrac{4\sqrt{30}}{5} \times \dfrac{2\sqrt{5}}{2} = 4\sqrt{6}$

$\therefore\ A_{\Delta APO} = 4\sqrt{6}$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

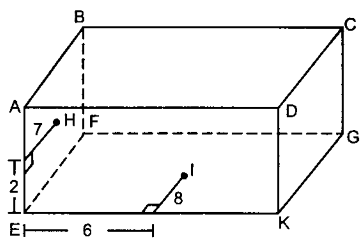
1. La proyección de un segmento de 17 cm de longitud sobre un plano, mide 15 cm. Determinar las distancias de sus extremos al plano, sabiendo que la suma de tales distancias es 28 cm.

A) 11 y 17 B) 15 y 13 C) 23 y 5
D) 12 y 16 E) 10 y 18

2. Desde un punto exterior a un plano se trazan cuatro segmentos oblicuos congruentes de 15 cm de longitud, de manera que sus pies son los vértices de un cuadrado de $36\sqrt{2}$ cm de perímetro.
Calcular la distancia del punto al piano.

A) 10 B) 11 C) 14
D) 12 E) 16

3. La figura representa una caja. En el punto H sobre la cara ABFE se encuentra una hormiga, y en el punto I sobre la cara EFGK se encuentra su comida. Calcular la mínima distancia recorrida por la hormiga para llegar a I.



A) $6 + \sqrt{5}$ B) $2 + \sqrt{37}$ C) 8
D) $\sqrt{65}$ E) 9

4. Dados 20 puntos no colineales y no coplanares, calcular el número máximo de planos que se determinen con estos puntos.

A) 1140 B) 1150 C) 1160
D) 1170 E) 1180

5. Se tiene 10 rectas secantes y 8 puntos no colineales y no coplanares. Calcular el número máximo de planos que se pueden determinar.

A) 180 B) 181 C) 182
D) 183 E) 184

6. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:
I. En todo plano hay infinitos puntos y rectas.
II. Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.
III. Dos rectas cruzadas pueden estar en un mismo plano.

A) VVF B) VFV C) FFF
D) VVV E) VFF

7. Dados los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ alabeados; AD = 21 y BC = 30. Calcular el máximo valor entero del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

A) 25 B) 27 C) 28
D) 26 E) 30

8. Dados dos planos no paralelos, se toma un segmento $\overline{AD}$, perteneciente a uno de los planos. Si $\overline{BC}$ es la proyección de $\overline{AD}$ sobre el otro plano, el área de la región ABCD es 60 m^2 y $\frac{BC}{6} = \frac{DC}{3} = \frac{AB}{2}$. Calcular $\overline{AB}$.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

9. Un punto P dista 12 cm de un plano. Un segmento de recta AB está en el plano. Calcular la distancia desde $\overline{AB}$ al pie de la perpendicular bajada desde P al plano, si AP = BP = 13 y AB = 8.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}$ E) 3

10. En el plano P se tiene un ángulo ABC de 60°; S es un punto exterior al plano, tal que sus distancias al vértices B y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ son 25; 20 y 7, respectivamente. Calcular la distancia de S al plano P.

A) $\sqrt{37}$ B) $\sqrt{39}$ C) $\sqrt{38}$
D) $\sqrt{31}$ E) 6

11. Indicar con (V) si es verdadero o con (F) si es falso:
I. Toda recta paralela a un plano, es paralela a todas las rectas de dicho plano.
II. Si $\overleftrightarrow{a} \,//\, \square P \wedge \overleftrightarrow{b} \subset \square P \Rightarrow \overleftrightarrow{a} \,//\, \overleftrightarrow{b}$
III. Si $\overleftrightarrow{a} \subset \square P$; $\overleftrightarrow{b} \subset \square Q \wedge \square P \,//\, \square Q \Rightarrow \overleftrightarrow{a} \not\times \overleftrightarrow{b}$
IV. Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano, entonces la primera recta es perpendicular a dicho plano.

A) VVVV B) VVFF C) FFFF
D) VFVF E) VFFV

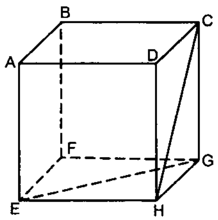
12. ABCD es un rectángulo y $\overline{AE}$ es un segmento perpendicular al plano de dicho rectángulo. Calcular la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$, si AE = 15 y AD = 20.

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

13. Determinar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto del espacio a las rectas que se encuentran en un plano dado y que concurren en un punto.

A) Triángulo equilátero B) Un círculo
C) Una circunferencia D) Un cuadrado
E) Una elipse

14. La figura que a continuación se presenta es un cubo. Hallar la medida del ángulo que forman $\overline{EG}$ y $\overline{CH}$.



A) 90° B) 45° C) 30°
D) 60° E) 53°

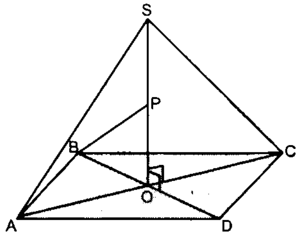
15. En una mesa se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. Si la altura y la base de la lámina miden a y b cm, respectivamente, ¿qué relación debe existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base, la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado?

A) $a < b$ B) $a = b$ C) $a > b$
D) $a = \sqrt{2}b$ E) $b = \sqrt{2}a$

16. En una mesa se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base; la altura y la base de la lámina miden $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$, respectivamente. Si la lámina empieza a girar sobre su base, hallar la medida del ángulo que forma una de las diagonales de la lámina con el plano de la mesa cuando la proyección de ésta sobre aquella sea un cuadrado.

A) 18,5° B) 22,5° C) 30°
D) 37° E) 45°

17. En la figura, $SP = PO$; $AB = 1$; $BC = \sqrt{7}$ y $\overline{SO}$ es perpendicular al rectángulo ABCD. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{BP}$ y el triángulo ASC, si $\overline{SC}$ forma 60° con el plano del rectángulo.



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

18. Si una recta es perpendicular a tres dadas:

A) Las rectas dadas tienen que ser paralelas.
B) Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.
C) Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
D) Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E) Las tres rectas dadas deben estar contenidas en un mismo plano.

19. Señalar lo correcto:

I. Un cubo tiene 3 diagonales.
II. Toda pirámide tiene solo una apotema.
III. El volumen de una esfera es directamente proporcional a su radio.

A) Solo I B) Solo II C) Solo IV
D) I y III E) Ninguna

20. Señalar lo correcto:

I. La razón entre los volúmenes de 2 cubos es igual a la razón de sus alturas.
II. Si dos sólidos son equivalentes, entonces sus áreas son iguales.
III. El número de caras de un dodecaedro regular es igual al número de aristas de un octaedro regular.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) Ninguna

21. Si desde un punto exterior a un plano se trazan la perpendicular y varias oblicuas, señalar lo correcto:

I. La perpendicular es menor que cualquier oblicua.
II. De las oblicuas, es mayor aquella cuyo pie dista más del pie de la perpendicular.
III. Si una de las oblicuas es perpendicular a una recta del plano, entonces dicha recta forma 90° con la perpendicular.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) Todos

22. Si una recta es perpendicular a un plano, señalar lo correcto.

I. Es perpendicular solo a las rectas que pasan por su pie y pertenecen al plano.
II. Es perpendicular a algunas rectas del plano.
III. Es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y III E) Todos

23. Señalar lo correcto:

I. El ángulo entre dos rectas ortogonales mide 90°.
II. Las rectas alabeadas determinan un plano.
III. Las rectas secantes no necesariamente determinan un plano.

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

24. Calcular la distancia de un vértice a la diagonal de un cubo, en el cual su área lateral es igual a 24 m^2.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

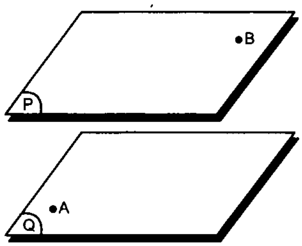
25. Se tiene un juego de 7 esferas ordenadas de tal manera que el volumen de cada una es el doble del que la precede. Hallar la relación entre los radios de la última y primera de dichas esferas.

A) 1/16 B) 1/4 C) 1/2
D) 1/8 E) 1/2

26. Se tiene un tetraedro regular de $\sqrt{2}$m de arista. Hallar la distancia de un vértice al centro de la cara opuesta.

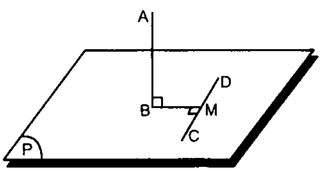
A) 1 B) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ C) $3\sqrt{3}$
D) $\frac{2}{3}\sqrt{2}$ E) $3\sqrt{2}$

27. Los planos P y Q son paralelos y su distancia es 20. Calcular la proyección de AB sobre el plano Q, si $\overline{AB} = 25$.



A) 15 B) 17 C) 20
D) 25 E) 30

28. En la figura, $\overline{AB}$ es perpendicular al plano P, $\overline{MC}$ pertenece al plano P. Calcular $\overline{AC}$, si AB = 12; BM = 9 y MC = 8.



A) 15 B) 16 C) 17
D) 20 E) 25

29. Un segmento de recta de 26 cm, une el punto A del plano X con el punto B del plano Y, X e Y son planos paralelos la proyección de AB sobre X o Y mide 24 m. Hallar la distancia entre X e Y.

A) 13 m B) 10 m C) 12 m
D) 25 m E) 12,5 m

30. Se han determinado como máximo 45 planos utilizando "n" rectas secantes. Calcular "n".

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

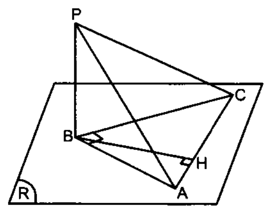
31. Dos puntos A y B, situados a uno y otro lado de un plano X, distan de dicho plano, 6 cm y 9 cm, respectivamente. Si la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el plano es 30 cm. Hallar la distancia entre los puntos A y B.

A) $15\sqrt{5}$ cm B) 15 cm C) $12\sqrt{3}$ cm
D) $12\sqrt{5}$ cm E) 12 cm

32. Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante L_1, los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$ y sobre otra L_2, secante, los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$. Si: $\underline{AB}$ = 8 m, CD = 12 m y FD − EB = 1m. Calcular $\overline{CF}$.

A) 4 m B) 7 m C) 5 m
D) 1 m E) 9 m

33. En el gráfico, $\overline{PB}$ es perpendicular al plano R, AH = 2; HC = 8; PB = 3. Calcular el área de la región APC.



A) 20 B) 21 C) 22
D) 25 E) 26

34. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

A) Por una recta paralela a un plano solo se puede trazar un plano perpendicular al primero.
B) Si dos planos son paralelos las intersecciones de estos con un tercero son paralelos.
C) Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.
D) Toda recta paralela a un plano es paralela a cualquier recta contenida en dicho plano.
E) Si una recta AB y un plano P son perpendiculares a una recta, la recta AB y el plano P son paralelas entre sí.

35. Un plano queda determinado unívocamente por:

I. Tres puntos no colineales.
II. El movimiento de una recta que se desplaza paralelamente a sí misma.
III. Dos rectas paralelas.
IV. Una recta que se mueve pasando siempre por un punto fijo.

De estas proposiciones son ciertas.

A) I y II B) I y III C) II y III
D) II y IV E) III y IV

36. Indicar falso o verdadero, según corresponda:

I. Si una recta es paralela a un plano, entonces dicha recta será paralela a todas las rectas contenidas en dicho plano.

II. Si un conjunto de rectas son paralelas, necesariamente dichas rectas son coplanares.

III. Si una recta es perpendicular a otras tres dadas, las rectas dadas necesariamente tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.

A) FVV B) FVF C) VFF
D) FFF E) VVF

37. Indicar con falso o verdadero, según corresponda:

I. Dos rectas siempre forman un plano.

II. La intersección de tres planos siempre es una recta.

III. Si dos rectas forman ángulos congruentes con un mismo plano, entonces dichas rectas necesariamente son paralelas entre sí.

A) FFF B) VVV C) FFV
D) VFF E) VVF

38. Las proyecciones de un segmento de recta AB sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano miden, respectivamente 12 cm, 5 cm. Hallar la medida del segmento AB.

A) 17 cm B) 15 cm C) 14 cm
D) 13 cm E) 7 cm

39. La distancia de un punto P a una recta contenida en un plano es de 13 cm. La distancia de la recta al pie de la perpendicular que va de P al plano es de 12 cm. Hallar la distancia del punto al plano.

A) 6 cm B) $\sqrt{11}$ cm C) 5 cm
D) 2,5 cm E) 11 cm

40. La línea de máxima pendiente:

A) Mide el ángulo que forman dos planos cualesquiera.
B) Mide el ángulo que forma un plano cualquiera con otro vertical.
C) Mide el ángulo que forma un plano cualesquiera con otro horizontal.
D) Mide el ángulo que forma una recta con un plano.
E) Ninguna de las anteriores.

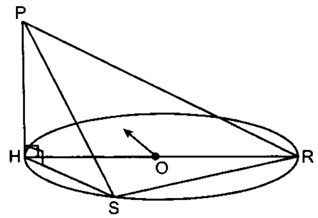
41. Señalar la proposición incorrecta.

A) Toda recta perpendicular a un plano es perpendicular a cualquier recta contenida en el plano.
B) Si una recta y un plano P son perpendiculares, todo plano que pasa por la recta es perpendicular al plano P.
C) Dos segmentos son iguales y paralelos que cortan a un plano forman como él ángulos iguales.
D) Por un punto de un plano solo puede pasar un plano que le sea perpendicular.
E) Por un punto de una recta solo puede pasar un plano que le sea perpendicular.

42. Si una recta es perpendicular a tres rectas dadas.

A) Las tres rectas dadas tienen que ser paralelas.
B) Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga la perpendicular.
C) Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
D) Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

43. En el gráfico, $m\angle RHS = 30°$; $OH = 5$; $PH = 5\sqrt{3}$. Calcular el área de la región PSR.



A) 25 B) $\frac{25\sqrt{6}}{2}$ C) $26\sqrt{3}$
D) $25\sqrt{3}$ E) 28

44. Indicar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

I. Si las proyecciones ortogonales de una figura sobre dos planos perpendiculares son rectas, entonces dicha figura es una recta.

II. Si dos planos son perpendiculares a un tercero, entonces los dos primeros son paralelos.

III. Si las medidas de los ángulos entre una recta y dos planos son iguales, entonces dichos planos son paralelos.

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FVV E) FFF

45. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

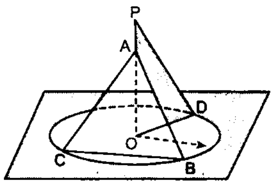
I. Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano, dicha recta es perpendicular al plano.

II. Si una recta es paralela a dos rectas contenidas en un plano, dicha recta es paralela al plano.

III. Dos rectas alabeadas pueden ubicarse en planos secantes.

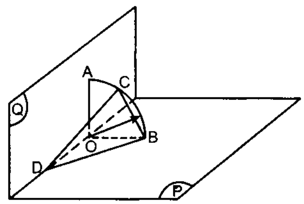
A) VVF B) VVV C) FFF
D) FFV E) VFV

46. Según el gráfico $\overline{PO}$ es perpendicular al plano que contiene a la circunferencia, PA = 1, AO = **3** y los triángulos POD y ABC son semejantes. Calcular el área de la región PBC.



A) $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{5\sqrt{39}}{2}$ C) $\frac{5\sqrt{15}}{3}$
D) $\frac{5\sqrt{15}}{2}$ E) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$

47. En el gráfico, los planos P y Q son perpendiculares. En la Intersección se ubica el punto O. Luego con radio OA, se construye el cuadrante AOB, $\overline{AO} \perp \square P$ $\overline{OB} \perp \square Q$, $m\overset{\frown}{CB} = 74°$, OD = 24 y R = 10. Calcular el área de la región triangular CBD.



A) $48\sqrt{10}$ B) $38\sqrt{10}$ C) $48\sqrt{5}$
D) $30\sqrt{5}$ E) $20\sqrt{10}$

48. Analizar la verdad o falsedad de las proposiciones. Un plano se engendra por una recta que se mueve:
I. Resbalando sobre dos rectas que se cortan o sobre dos paralelas.
II. Pasando por un punto fijo y resbalando sobre una recta fija.
III. Permaneciendo perpendicularmente a una recta fija en un punto fijo y girando alrededor de ella.

A) VVV B) FFV C) VFV
D) VFF E) FFF

49. Analizar las siguientes proposiciones:
I. Si una recta es paralela a un plano, la paralela trazada a dicha recta por un punto del plano, están contenida en el plano.
II. Si una recta toca un solo punto de una circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por dicho punto esta recta será tangente a la circunferencia.
III. Si un plano es perpendicular a la intersección de otros dos planos, dicho plano será perpendicular a estos dos.

A) VVV B) VFV C) FFF
D) FVF E) VVF

50. Indicar falso o verdadero según corresponda:
I. Si dos planos son paralelos, las intersecciones de estos a un tercero son paralelas.
II. Por una recta paralela a un plano se puede trazar un plano perpendicular al primero.
III. Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.
IV. Si una recta AB y un plano P son perpendiculares a una recta CD, la recta AB y el plano P son paralelos entre sí.
V. Dos rectas paralelas a un plano son siempre paralelas entre sí.

A) VVVVF B) VVVFV C) FFFVV
D) VVVVV E) FFFFF

51. Sobre un plano H se tiene el punto A y el segmento $\overline{CD}$, siendo B un punto exterior al plano. Hallar la medida del ángulo que forman $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, si: AB = 8 m, CD = 10 m, el segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ mide 3 m.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

52. En un plano P está contenido un triángulo isósceles ABC (AB = BC) de incentro I. Por I se traza $\overline{IM}$ perpendicular al plano P. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{AC}$ y $\overline{BG}$. Si G es baricentro del triángulo AMC.

A) 60° B) 75° C) 90°
D) 72°30' E) 53°30'

53. Se tienen 2 rayos AB y MN, de modo que se cruzan formando un ángulo de 60° y además $\overline{AM}$ es la menor distancia. Hallar la medida del ángulo que forman los segmentos $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$, sabiendo que AB = MN = 2(AM).

A) 30° B) 45° C) 63°30'
D) 37° E) 62°30'

54. Se tienen 2 regiones rectangulares ABCD y ADEF ubicados en planos perpendiculares. Si el segmento $\overline{BE}$ forman un ángulo de 53° y 30° con dichos planos. Calcular la menor distancia entre $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$, sabiendo que BE = 10 m.

A) $\frac{40}{\sqrt{79}}$ B) 25 C) 18

D) $\frac{20}{\sqrt{89}}$ E) $\frac{40}{\sqrt{89}}$

55. Dados 20 puntos no colineales y no coplanares, calcule el número máximo de planos que se determinen con estos puntos.

A) 1140 B) 1150 C) 1160
D) 1170 E) 1180

56. Se tiene 10 rectas secantes y 8 puntos no colineales y no coplanares. Calcule el número máximo de planos que se pueden determinar.

A) 180 B) 181 C) 182
D) 183 E) 184

57. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

I. En todo plano hay infinitos puntos y rectas.
II. Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas entre sí.
III. Dos rectas cruzadas pueden estar en un mismo plano.

A) VVF B) VFV C) FFF
D) VVV E) VFF

58. Indicar verdadero (V) o falso (F):

I. Dos rectas paralelas al mismo plano son paralelas entre sí.
II. Por un punto de un plano solo se puede trazar una perpendicular al plano.
III. Todas las rectas paralelas entre sí son coplanarias

A) FVF B) VVV C) FFV
D) FFF E) VFF

59. Un punto P dista 12 cm de un plano. Un segmento de recta AB está en el plano. Calcular la distancia desde $\overline{AB}$ al pie de la perpendicular bajada desde P al plano, si: AP = BP = 13 y AB = 8.

A) 2 B) $2\sqrt{2}$ C) $3\sqrt{2}$
D) $\sqrt{6}$ E) 3

60. Si una recta es perpendicular a tres rectas dadas, indicar lo correcto.

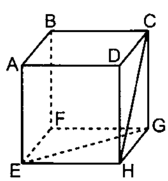
A) Las rectas dadas tienen que ser paralelas.
B) Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga a la perpendicular.
C) Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
D) Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
E) Las tres rectas dadas deben estar contenidas en un mismo plano.

61. Determinar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares trazadas desde un punto del espacio a las rectas que se encuentran en un plano dado y que concurren en un punto.

A) Triángulo equilátero B) Círculo
C) Circunferencia D) Cuadrado
E) Elipse

62. La figura que a continuación se presenta es un cubo. ¿Cuál es la medida del ángulo que forman $\overline{EG}$ y $\overline{CH}$?

A) 90°
B) 45°
C) 30°
D) 60°
E) 53°



63. En una mesa se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. Si la altura y la base de la lámina miden a y b, respectivamente, ¿qué relación debe existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base, la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado?

A) $a < b$ B) $a = b$ C) $a > b$
D) $a = \sqrt{2}b$ E) $b = \sqrt{2}a$

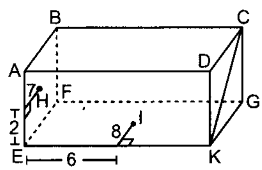
64. La proyección de un segmento de longitud 17, sobre un plano, mide 15. Determinar las distancias de sus extremos al plano, sabiendo que la suma de tales distancias es 28

A) 11 y 17 B) 15 y 13 C) 23 y 5
D) 12 y 16 E) 10 y 18

65. Desde un punto exterior a un plano se trazan cuatro segmentos oblicuos congruentes de longitud 15, de manera que sus pies son los vértices de un cuadrado de perímetro $36\sqrt{2}$. Calcular la distancia del punto al plano.

A) 10 B) 11 C) 14
D) 12 E) 16

66. La figura representa una caja. En el punto H sobre la cara ABFE se encuentra una hormiga, y en el punto 1 sobre la cara EFGK se encuentra su comida. Calcular la mínima distancia recorrida por la hormiga para llegar a I.



A) $6 + \sqrt{5}$ B) $2 + \sqrt{27}$ C) 8
D) $\sqrt{65}$ E) 9

67. En el plano P se tiene un ángulo ABC de 60°; S es un punto exterior al plano, tal que sus distancias al vértice B y los lados $\overline{BC}$ y $\overline{BA}$ son 25; 20 y 7, respectivamente. Calcular la distancia de S al plano P.

A) $\sqrt{37}$ B) $\sqrt{39}$ C) $\sqrt{38}$
D) $\sqrt{31}$ E) 6

68. Indicar verdadero (V) o falso (F), según corresponda:

I. Toda recta paralela a un plano, es paralela a todas las rectas de dicho plano.
II. Si $\overleftrightarrow{a} \parallel \square P \wedge \overleftrightarrow{b} \subset \square P \Rightarrow \overleftrightarrow{a} \parallel \overleftrightarrow{b}$
III. Si $\overleftrightarrow{a} \subset \square P$; $\overleftrightarrow{b} \subset Q \wedge \square P \parallel \square Q \Rightarrow \overleftrightarrow{a} \not\parallel \overleftrightarrow{b}$
IV. Si una recta es perpendicular a dos rectas contenidas en un plano, entonces la primera recta es perpendicular a dicho plano

A) VVVV B) VVFF C) FFFF
D) VFVF E) VFFV

69. Dados los segmentos de recta AB y CD alabeados; AD = 21 y BC = 30. Calcular el máximo valor entero del segmento que une los puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

A) 25 B) 27 C) 28
D) 26 E) 30

70. Dados dos planos no paralelos, se toma un segmento AD, perteneciente a uno de los planos. Si $\overline{BC}$ es la proyección de $\overline{AD}$ sobre el otro plano, el área de la región ABCD es 60 y $\frac{BC}{6}=\frac{DC}{30}=\frac{AB}{2}$, calcular $\overline{AB}$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

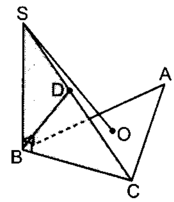
71. ABCD es un rectángulo y AE es un segmento perpendicular al plano de dicho rectángulo. Calcular la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$, si: AE = 15 y AD = 20.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

72. En una mesa se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base; la altura y la base de la lámina miden $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$, respectivamente. Si la lámina empieza a girar sobre su base, ¿cuál será la medida del ángulo que forman una de las diagonales de la lámina con el plano de la mesa cuando la proyección de esa sobre aquella sea un cuadrado?

A) 18,5° B) 22,5° C) 30° D) 37° E) 45°

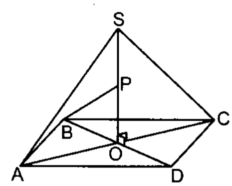
73. En la figura, $\overline{SB}$ es perpendicular al triángulo equilátero ABC; SB = AC; O es centro del $\triangle$ABC y SD = DC. Calcular el valor del ángulo entre $\overline{BD}$ y $\overline{SO}$.



A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{8}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ C) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$

D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{7}\right)$ E) $\arccos\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$

74. En la figura, SP = PO; AB = 1; BC = $\sqrt{7}$ y $\overline{SO}$ es perpendicular al rectángulo ABCD. Calcular la medida del ángulo que forman $\overline{BP}$ y el triángulo ASC, si $\overline{SC}$ forma 60° con el plano del rectángulo.



A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

CLAVES

1. E	11. C	21. E	31. A	41. D	51. B	61. C	71. C
2. D	12. C	22. C	32. E	42. C	52. C	62. D	72. C
3. D	13. C	23. A	33. D	43. B	53. C	63. C	73. A
4. D	14. D	24. B	34. D	44. E	54. E	64. E	74. A
5. B	15. C	25. D	35. B	45. D	55. D	65. D	
6. A	16. C	26. B	36. D	46. D	56. B	66. B	
7. A	17. A	27. A	37. A	47. A	57. A	67. A	
8. D	18. C	28. C	38. D	48. A	58. A	68. C	
9. E	19. E	29. B	39. C	49. B	59. E	69. A	
10. A	20. C	30. C	40. D	50. B	60. C	70. D	

Ángulos diedros y triedros

16 capítulo

Gaspard Monge nació el 9 de mayo de 1746 y murió el 28 de julio de 1818. Fue un matemático francés, inventor de la geometría descriptiva. Estudió en las escuelas de Beaune y Lyon y en la escuela militar de Mézières. A los 16 años fue nombrado profesor de física en Lyon, cargo que ejerció hasta 1765. Tres años más tarde fue profesor de matemáticas y en 1771 profesor de física en Mézières. Entró en la Academia Real de Ciencias en 1780 y publicó ocho años más tarde su *Traité de statistique*. Contribuyó a fundar la École Polytechnique en 1794, en la que dio clases de geometría descriptiva durante más de diez años. Entró en el instituto de Francia en 1795. Años después, es nombrado miembro del Senado, director de la Escuela Politécnica (1802) y conde de Pelusio.

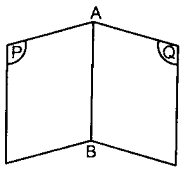
Monge es considerado el inventor de la geometría descriptiva. La geometría descriptiva es la que nos permite representar superficies tridimensionales de objetos sobre una superficie bidimensional. Existen diferentes sistemas de representación que sirven a este fin, como la perspectiva cónica, el sistema de planos acotados, etc., pero quizás el más importante es el sistema diédrico, también conocido como sistema Monge, que fue desarrollado por Monge en su primera publicación en el año 1799.

Fuente: Wikipedia

ÁNGULOS DIEDROS

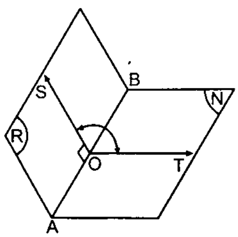
Un ángulo diedro es la reunión de una recta y dos semiplanos no coplanarios que tienen dicha recta común. La recta se llama arista del diedro y la reunión de la arista con cualquiera de los dos semiplanos, es una cara del diedro. Así, en la figura adjunta, la reunión de los semiplanos P y Q, y su arista AB es un ángulo diedro. La recta AB es la arista del diedro y las caras: P y Q.

Podemos denotar el diedro como P-AB-Q o sencillamente AB, si no hay otro diedro con la misma arista.



Ángulo plano o rectilíneo de un ángulo diedro

Es el ángulo que forman dos rayos perpendiculares a la arista en uno de sus puntos, y situados uno en cada cara.



En la figura adjunta $\overrightarrow{OS}$ y $\overrightarrow{OT}$ son dos rayos perpendiculares a la arista AB, estando $\overrightarrow{OS}$ en la cara R y $\overrightarrow{OT}$ en N. Luego, $\angle SOT$ es un ángulo plano del diedro R-AB-N. Es evidente que todo diedro tiene infinidad de ángulos planos. Cada uno de ellos es en realidad la intersección del ángulo diedro con un plano perpendicular a la arista.

Medida de un ángulo diedro

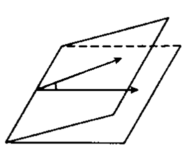
Es la medida de cualquiera de sus ángulos planos.

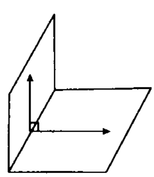
Congruencia de dos ángulos diedros

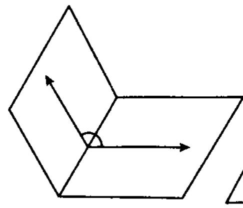
Se dice que dos diedros son congruentes, si sus ángulos planos son respectivamente congruentes.

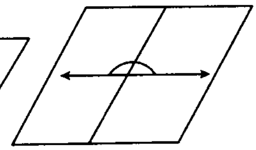
Clasificación de los diedros

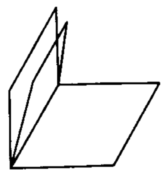
Tal como en geometría plana, los diedros se clasifican según su medida (agudos, obtusos, etc.) o su posición (consecutivos, adyacentes, opuestos por la arista). De igual modo, se tienen diedros complementarios y suplementarios.

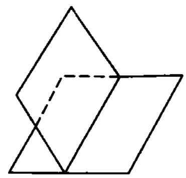

D. agudo


D. recto


D. obtuso

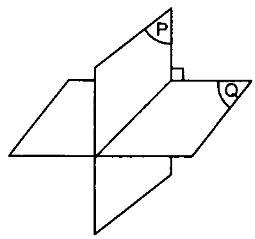

D. llano


D. consecutivos

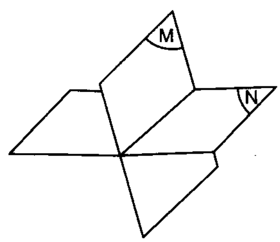

Diedros adyacentes

PLANOS PERPENDICULARES Y OBLICUOS

Dos planos secantes son perpendiculares, si contienen un ángulo diedro recto. En caso contrario se llaman oblicuos.



Planos perpendiculares P ⊥ Q



Planos oblicuos M $\not\perp$ N

Teoremas

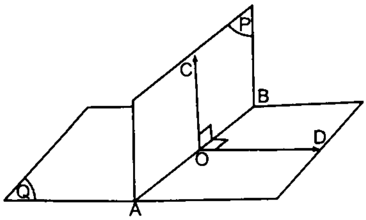
1. Si una recta es perpendicular a un plano, entonces todo plano que contenga a la recta será perpendicular al plano dado.

   Hipótesis: Sea OC una recta perpendicular al plano Q, en el punto O, y P un plano cualquiera que contiene a $\overleftrightarrow{OC}$.

   Tesis: P ⊥ Q

   Demostración:
   Sea $\overleftrightarrow{AB}$, la recta de intersección de los planos P y Q. Entonces, como por hipótesis: $\overleftrightarrow{OC} \perp$ Q, luego $\overleftrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (definición de recta perpendicular a un plano). Sea $\overleftrightarrow{OD}$ una recta del plano Q, perpendicular a

$\overleftrightarrow{AB}$. Así, COD es un ángulo plano del diedro C-AB-D, determinado por los planos P y Q. Pero $\overleftrightarrow{CO}$ es perpendicular a $\overleftrightarrow{OD}$ (ya que $\overleftrightarrow{CO} \perp$ Q). En consecuencia, el diedro C-AB-D es recto y el plano P $\perp$ plano Q.



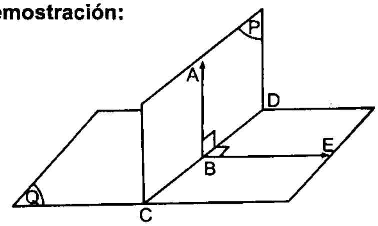
2. Si dos planos son perpendiculares, entonces toda recta situada en uno de ellos y perpendicular a su intersección, es perpendicular al otro plano.

Hipótesis: Sean P y Q dos planos perpendiculares y $\overleftrightarrow{CD}$ es intersección.

Sea $\overleftrightarrow{AB}$ una recta contenida en P y perpendicular a $\overleftrightarrow{CD}$, en el punto B.

Tesis: $\overleftrightarrow{AB} \perp$ Q.

Demostración:



En el plano Q, tracemos $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$; luego, como $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ por hipótesis, el $\angle$ABE es ángulo plano del diedro. P-CD-Q.

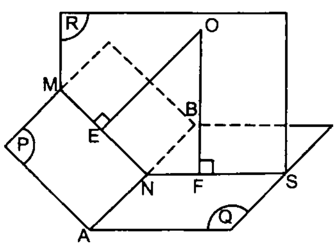
Siendo: plano P $\perp$ plano Q, por hipótesis, entonces el diedro P-CD-Q es recto. Por lo tanto $\angle$ABE es recto. De donde $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular al plano Q, ya que $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$.

3. Todo plano perpendicular a las caras de un diedro, es perpendicular a la arista del diedro.

Hipótesis: Sea el diedro P-AB-Q y R el plano perpendicular a las caras, según las rectas MN y NS.

Tesis: R $\perp$ $\overleftrightarrow{AB}$

Demostración:



Por un punto O del plano R, trazamos $\overleftrightarrow{OE} \perp \overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{OF} \perp \overleftrightarrow{NS}$.

Luego, por el teorema anterior: $\overleftrightarrow{OE} \perp$ P y $\overleftrightarrow{OF} \perp$ Q. Así tenemos que $\overleftrightarrow{OE}$ y $\overleftrightarrow{OF}$ son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$ (por estar contenida $\overleftrightarrow{AB}$ en P y Q).

Entonces, como $\overleftrightarrow{AB}$ es perpendicular a dos rectas secantes del plano R, ($\overleftrightarrow{OE}$ y $\overleftrightarrow{OF}$), será perpendicular al plano. Por lo tanto $\overleftrightarrow{AB} \perp$ R $\vee$ R $\perp$ $\overleftrightarrow{AB}$.

SEMIPLANO BISECTOR

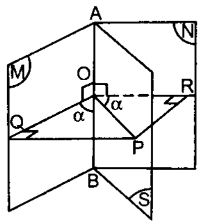
En un diedro, es el semiplano que lo divide en dos diedros congruentes.

Teorema

Todo punto situado sobre el semiplano bisector de un diedro, equidista de las caras del diedro.

En la figura adjunta, S es el semiplano bisector del diedro M-AB-N.

P es un punto cualquiera de S.



Al trazar $\overleftrightarrow{PQ} \perp$ M y $\overleftrightarrow{PR} \perp$ N, el plano QPR es perpendicular a las caras del diedro; por tanto, también lo será a la arista AB, en el punto O (teorema anterior).

Así, $\overleftrightarrow{OQ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{OR} \perp \overleftrightarrow{AB}$; luego, QOR es un ángulo plano del diedro y OP su bisectriz. De donde, por geometría plana, en el plano QPR.

$$PQ = PR$$

Nota

La demostración de las siguientes proposiciones se dejan como ejercicio al lector.

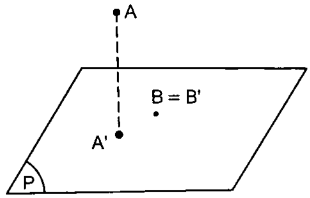
- Por una recta de un plano, se puede trazar a éste un plano perpendicular, y solo uno.
- Por un punto cualquiera pasan infinidad de planos perpendiculares a un plano dado.
- Todo plano perpendicular a una recta situada en otro plano, será también perpendicular a este plano.
- Por una recta, que no sea perpendicular a un plano, solo pasa un segundo plano perpendicular al primero.
- Todo plano perpendicular a la arista de un diedro, es perpendicular a las caras del diedro.
- Dados dos planos perpendiculares, entonces toda recta perpendicular a uno de ellos, en cualquier punto de su intersección, estará contenida en el otro plano.
- Si dos planos son perpendiculares, entonces una recta perpendicular a uno de ellos, trazada por un punto cualquiera del otro, estará contenida en este último.

PROYECCIONES EN EL ESPACIO

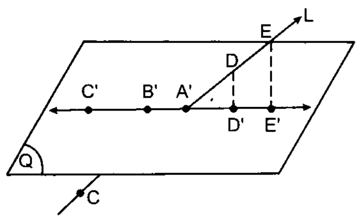
Se llama proyección de un punto sobre un plano, al pie de la perpendicular trazada del punto al plano.

En la figura adjunta, A' es la proyección del punto A sobre el plano P.

La perpendicular AA' se llama **proyectante** y P es el **plano de proyección**. Si B es un punto situado en el plano P, la proyección de B es el mismo.



La **proyección de una recta sobre un plano**, es el conjunto de puntos del plano que son proyecciones de los puntos de la recta.



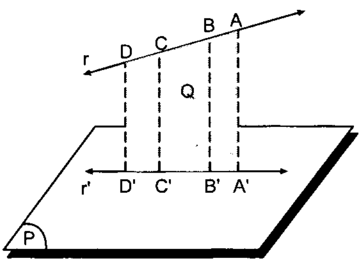
Por ejemplo en la figura: A', B', C'... son las proyecciones de los puntos A, B, C, ... respectivamente.
La proyección de la recta L sobre el plano Q es la línea C'B'D'E', que según demostramos a continuación, es una recta.

Teorema. La proyección de una recta sobre un plano no perpendicular a ella, es una recta.

Hipótesis: Sea $\overleftrightarrow{r}$, una recta no perpendicular al plano P.

Tesis: La proyección de $\overleftrightarrow{r}$ sobre P es una recta.

Demostración:

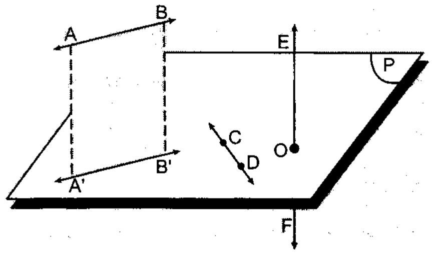


Sea A un punto de la recta r y A' su proyección sobre el plano P. Luego $\overleftrightarrow{r}$ y A' determinan un plano Q, perpendicular al plano P, por ser $\overline{AA'} \perp P$.

Sea $\overleftrightarrow{r'}$, la recta de intersección de los planos P y Q. Entonces, si por cada punto de $\overleftrightarrow{r}$ trazamos perpendiculares al plano P, todas ellas estarán contenidas en el plano Q y los pies de estas perpendiculares, que son proyecciones de los puntos de $\overleftrightarrow{r}$ sobre el plano P serán puntos de $\overleftrightarrow{r'}$. Por lo tanto, la recta $\overleftrightarrow{r'}$ es la proyección de $\overleftrightarrow{r}$ sobre el plano P.

Observación

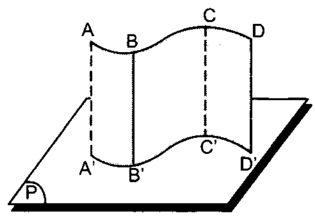
Si una recta es paralela a un plano, su proyección sobre dicho plano es una recta paralela a ella; si está contenida en el plano, su proyección es la misma recta, y si es perpendicular al plano su proyección es un punto. En este último caso diremos que la recta está proyectada de punta.

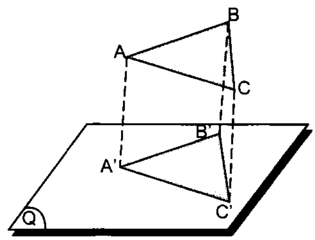


$\overleftrightarrow{AB} \parallel P$; $\overleftrightarrow{CD} \subset P$; $\overleftrightarrow{EF} \perp P$

Proyección de una figura cualquiera

Si F es una figura cualquiera en el espacio, y P un plano, entonces la proyección de F sobre P es el conjunto de todos los puntos que son proyecciones de los puntos de la figura F sobre el plano P.



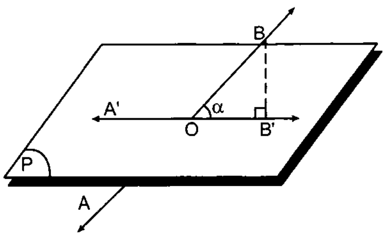


Por ejemplo, la proyección de una línea curva es generalmente una línea curva; la de un triángulo, es un triángulo, etc., pudiendo ocurrir que sea un segmento, en el caso de que la línea o el triángulo están contenidos en un plano perpendicular al plano de proyección.

Ángulo entre recta y plano

Se llama ángulo entre una recta y un plano al ángulo determinado por la recta y su proyección en dicho plano.

Así, en la figura adjunta, la recta AB interseca al plano P en el punto O, y su proyección en dicho plano es $\overleftrightarrow{A'B'}$ luego, α el ángulo entre la recta AB y el plano P.

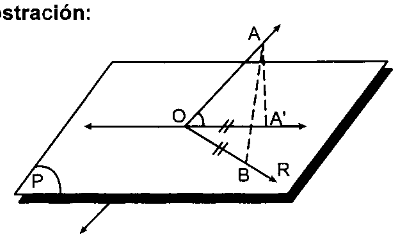


Teorema. El ángulo entre una recta y un plano es menor que el ángulo que toma la recta con cualquier otro rayo que parte del punto de intersección y está contenido en el plano.

Hipótesis: Sea $\overleftrightarrow{OA}$ una recta, y $\overleftrightarrow{OA'}$ su proyección sobre el plano P. Sea $\overrightarrow{OR}$ cualquier otro rayo en el plano P.

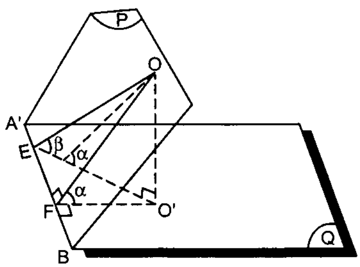
Tesis: $\angle AOA' < \angle AOR$

Demostración:



$\overline{AA'}$ es perpendicular al plano P, por ser la proyectante. Tomemos un punto B de $\overrightarrow{OR}$, tal que OB = OA' ...(1) y tracemos $\overline{AB}$. Luego, como $\overleftrightarrow{AA'} \perp$ P y $\overline{AB}$ es una oblicua al plano, trazada desde el mismo punto A: AA' < AB ... (2), entonces, en los triángulos AOA' y AOB, se tiene: $\angle AOA' < \angle AOB$ (por relaciones (1) y (2)), con lo cual queda demostrado el teorema.

Línea de máxima pendiente



Teorema. Sean P y Q, dos planos secantes según la recta AB. Entonces, las rectas del plano P, que forman un ángulo máximo con el plano Q son perpendiculares a $\overleftrightarrow{AB}$.

Hipótesis: $\overleftrightarrow{OE}$ y $\overleftrightarrow{OF}$ son dos rectas contenidas en el plano P y $\overleftrightarrow{OF} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\angle OFO' = \alpha$ y $\angle OEO' = \beta$

Tesis: $\alpha > \beta$

Demostración:

Como O' es la proyección de O sobre el plano Q, por lo tanto, $\overline{OO'} \perp$ Q. Luego, por hipótesis $\overline{OF} \perp \overleftrightarrow{AB}$; entonces, pon el teorema de las tres perpendiculares: $\overline{O'F} \perp \overleftrightarrow{AB}$. Además $\overline{O'E}$ es proyección de $\overline{OE}$ sobre Q. Y, siendo en el $\triangle O'FE$: $\overline{O'F} < \overline{O'E}$; existe un punto R, tal que O'R = O'F.

De donde: $\triangle O'RO \cong \triangle O'FO$ $\quad \therefore \angle ORO' = \angle OFO'$ $\Rightarrow \angle ORO' = \alpha$, observándose en el $\triangle OER$, que:

$\alpha = \beta + \angle EOR$ ...(teorema del $\angle$ externo) $\quad \therefore \alpha > \beta$

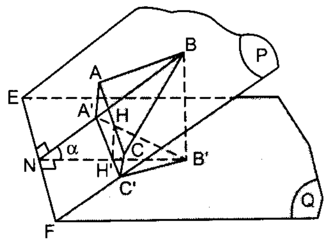
En el gráfico anterior, si Q es un plano horizontal, la recta OF se llama "línea de máxima pendiente" del plano P, respecto al plano Q.

Proyecciones de regiones planas

Teorema. El área de la proyección de una región triangular, sobre un plano, es igual al área de dicha región triangular multiplicada por el coseno del diedro que forman el plano del triángulo proyectante y el plano de proyección.

1.° **Hipótesis:** Sea P y Q dos planos secantes en $\overleftrightarrow{EF}$; ABC es un triángulo contenido en P, tal que $\overline{AC}$ // $\overline{EF}$ y A'B'C' su proyección en Q, α mide el diedro P-EF-Q.

Tesis: Área $\triangle A'B'C'$ = (área $\triangle ABC$)cosα.



Demostración:

Como α es un ángulo plano del diedro P-EF-Q, entonces $\overline{BN} \perp \overline{EF}$ y $\overline{B'N} \perp \overline{EF}$. Además, según hipótesis: $\overline{AC}$ // $\overline{EF}$ $\therefore \overline{AC}$ // Q, por lo que A'C' = AC y $\overline{BN} \perp \overline{AC}$, $\overline{B'N} \perp \overline{A'C'}$.

Si por H se traza paralela a $\overline{NB'}$, dicha paralela estará contenida en el plano NBB' y se prueba fácilmente que B'H' = (BH)cosα.

Luego: área $\triangle A'B'C' = \dfrac{(A'C')(B'H')}{2}$

Esto es: área $\triangle A'B'C' = \dfrac{(AB)(BH)}{2}\cos\alpha$

De donde: área $\triangle A'B'C'$ = (área $\triangle ABC$)cosα.

2.° Si el $\triangle ABC$ no tiene algún lado paralelo a $\overline{EF}$, trazamos $\overline{BM}$ // $\overline{EF}$.

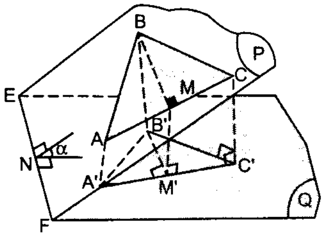
Luego:

Área $\triangle A'B'M'$= (área $\triangle ABM$)cosα

Área $\triangle B'M'C'$ = (área $\triangle BMC$)cosα

De donde, al sumar miembro a miembro:

Área $\triangle A'B'C'$ = (área $\triangle ABC$)cosα



Teorema. El área de la proyección de una región poligonal, sobre un plano, es igual al área de dicha región por el coseno del ángulo que forman el plano del polígono proyectante y el plano de proyección.

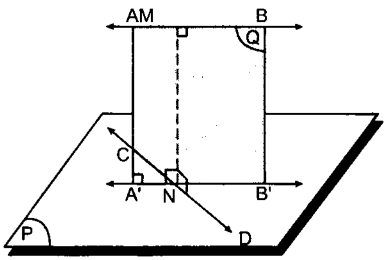
Este teorema es fácil de demostrar, teniendo en cuenta que un polígono cualquiera se puede descomponer en triángulos.

Así mismo, el teorema es válido para todo tipo de región plana, sea cual fuera su forma.

MÍNIMA DISTANCIA ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

La mínima distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio, es la longitud del segmento perpendicular a ambas.

a. Según hemos demostrado anteriormente, si dos rectas se cruzan entonces por una de ellas pasa un plano paralelo a la otra. Esto nos sugiere una forma de determinar la misma distancia entre tales rectas.



Sean, por ejemplo, $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ dos rectas alabeadas, luego, por CD pasa un plano P, paralelo a $\overleftrightarrow{AB}$. En seguida, proyectamos la recta AB sobre P, determinando el plano Q perpendicular a P. Si por el punto de intersección N, de las rectas A'B' y CD, trazamos la perpendicular al plano P, ésta se hallará en el plano Q, cortando a $\overleftrightarrow{AB}$ en M. Entonces, como:

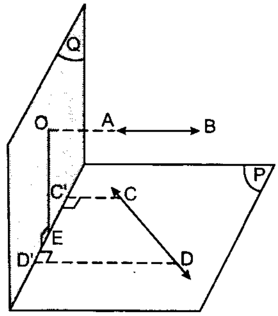
$\overleftrightarrow{MN} \perp P \quad \therefore\ MN \perp \overleftrightarrow{CD}$ y $\overleftrightarrow{MN} \perp \overleftrightarrow{A'B'}$

Siendo $\overleftrightarrow{A'B'} \perp \overleftrightarrow{AB}$, también: $\overline{MN} \perp \overleftrightarrow{AB}$

Es decir, hemos demostrado la existencia de un segmento MN, perpendicular a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, teniendo sus extremos sobre dichas rectas. MN es la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$. Nótese que cualquier punto de la recta AB, equidista del plano P. De manera que para determinar la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$, basta calcular la distancia de un punto cualquiera sobre AB, al plano P.

AA' = MN = BB' = ...

b. En la práctica, a veces es conveniente proyectar ambas rectas en un plano perpendicular a una de ellas. Como en la figura adjunta, donde el plano Q es perpendicular a la recta AB. El punto O es la proyección de $\overleftrightarrow{AB}$ sobre Q y C'D' la proyección de $\overleftrightarrow{CD}$ en Q. ($\overleftrightarrow{C'D'}$ es la misma recta de intersección entre P y Q).

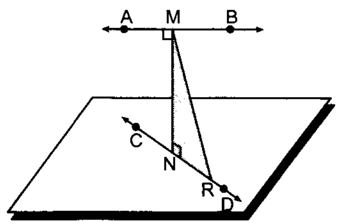


Luego, si trazamos $\overline{OE} \perp P$, $\overline{OE}$ estará contenido en Q y $\overline{OE} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overline{OE} \perp \overleftrightarrow{CD}$. Es decir, $\overline{OE}$ nos da la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.

Por último, si en el plano Q, se conocen las longitudes OD', OC' y C'D', será fácil calcular $\overline{OE}$, (Grafique el lector, el segmento que conecta perpendicularmente a $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$).

Nota

Desde luego, existen infinidad de segmentos que tienen sus extremos en ambas rectas alabeadas, sin embargo, el de menor longitud es aquel perpendicular a las dos.

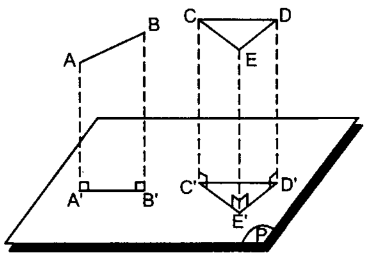


MN < MR

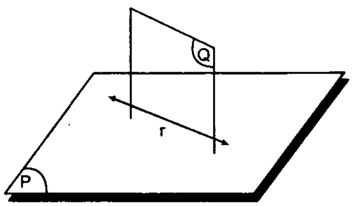
Observaciones:

1. Se dice que una figura plana se proyecta en verdadera magnitud (VM) sobre un plano, cuando el plano que la contiene es paralela al plano de proyección.

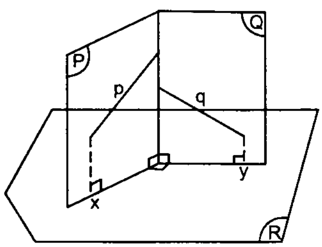
   En la figura adjunta, el segmento AB no es paralelo al plano P; luego, $\overline{A'B'}$ no están en VM(A'B' < AB). El plano que contiene al △CDE es paralelo al plano P. Entonces C'D'E está en VM.



2. Se dice que un plano se proyecta de canto, sobre otro plano, si le es perpendicular. Sean por ejemplo los planos perpendiculares P y Q, según la recta r. Luego, diremos que el plano Q se proyecta de canto en el plano P.

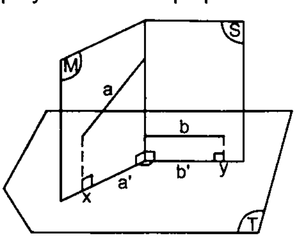


3. Si dos planos son perpendiculares entre sí y perpendiculares a un tercer plano, entonces dos rectas cualesquiera en los dos primeros, tienen sus proyecciones perpendiculares entre sí en el tercer plano.



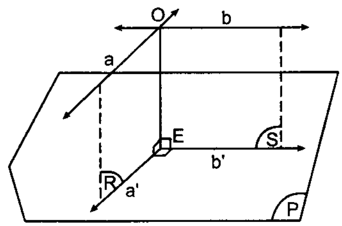
Sean P y Q, dos plano perpendiculares entre sí, y perpendiculares además al plano R; $\overleftrightarrow{p}$ está contenida en P y $\overleftrightarrow{q}$ en Q.
$\overleftrightarrow{x}$ es la proyección de $\overleftrightarrow{p}$ en R; y es la proyección de $\overleftrightarrow{q}$ en R. Luego: $\overleftrightarrow{x} \perp \overleftrightarrow{y}$, por ser intersecciones de planos respectivamente perpendiculares. Nótese que el hecho de que las proyecciones $\overleftrightarrow{x}$ e $\overleftrightarrow{y}$, de las rectas p y q, sean perpendiculares no significa que $\overleftrightarrow{p}$ y $\overleftrightarrow{q}$ lo sean.

4. a) Si dos rectas perpendiculares se proyectan sobre un plano paralelo a una de ellas, entonces sus proyecciones son perpendiculares entre sí.



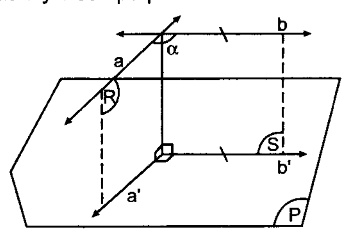
Sean las rectas a y b, de modo que: $\overleftrightarrow{a} \perp \overleftrightarrow{b}$, y $\overleftrightarrow{b}$ es perpendicular a la intersección de M y S, por lo que el plano T, paralelo a $\overleftrightarrow{b}$, será perpendicular a M y S.
Luego, en T: $\overleftrightarrow{a'} \perp \overleftrightarrow{b'}$.

b) Si dos rectas perpendiculares $\overleftrightarrow{a}$ y $\overleftrightarrow{b}$ se proyectan sobre un plano P, según las rectas $\overleftrightarrow{a'}$ y $\overleftrightarrow{b'}$, y dichas proyecciones son perpendiculares entre sí, entonces por lo menos una de las rectas $\overleftrightarrow{a} \vee \overleftrightarrow{b}$, es paralela al plano P.



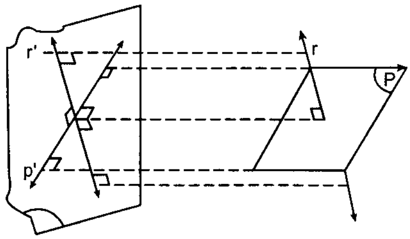
Consideremos el gráfico adjunto, y supongamos que $\overleftrightarrow{a'}$ no es paralela al plano P.
Sea S el plano determinado por las rectas b y b'.
Luego: $\overleftrightarrow{b'} \perp \overleftrightarrow{a'}$ (por hipótesis) y $\overleftrightarrow{b'} \perp$ proyectante $\overline{OE}$, por lo tanto: $\overleftrightarrow{b'} \perp R$ ...(1).
Asimismo, $\overleftrightarrow{a'} \perp \overleftrightarrow{b'}$ y $\overleftrightarrow{a'} \perp$ proyectante OE
$\therefore$ $\overleftrightarrow{a'} \perp S$, por lo que $\overleftrightarrow{a'} \perp \overleftrightarrow{b}$, ya que $\overleftrightarrow{b'}$ está contenida en S.
Así: $\overleftrightarrow{b} \perp \overleftrightarrow{a}$ (por hipótesis) y $\overleftrightarrow{b} \perp \overleftrightarrow{a'}$ (por lo anterior).
De donde: $\overleftrightarrow{b} \perp R$ ...(2).
Entonces, con (1) y (2): $\overleftrightarrow{b} \,//\, \overleftrightarrow{b'}$, y por lo tanto $\overleftrightarrow{b} \,//\, P$.

c) Si dos rectas a y b, se proyectan sobre un plano P paralelo a una de ellas y sus proyecciones $\overleftrightarrow{a'}$ y $\overleftrightarrow{b'}$ forman ángulo recto, entonces las rectas a y b son perpendiculares entre sí.



Consideremos el gráfico adjunto y suponiendo que $\overleftrightarrow{b}$ es paralelo al punto P, tenemos: $\overleftrightarrow{b} \perp \overleftrightarrow{b'}$ y como $\overleftrightarrow{b'} \perp R$.
$\therefore$ $\overleftrightarrow{b}$ = R. Luego: $\overleftrightarrow{b} \perp \overleftrightarrow{a}$, $\alpha = 90°$.

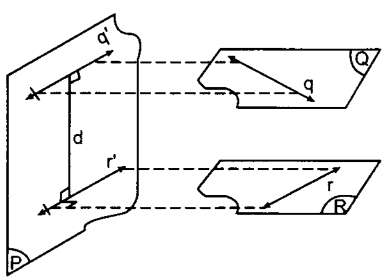
5. Si una recta y un plano son perpendiculares, y se proyectan sobre un plano paralelo a la recta (o perpendicular al plano), entonces la recta se proyecta en "verdadera magnitud" y el plano de canto, siendo además ambas proyecciones perpendiculares.



Por ejemplo, en la figura adjunta, la recta r y el plano P son perpendiculares entre sí. S es un plano de proyección paralelo a $\overleftrightarrow{r}$. Luego, $\overleftrightarrow{r}$ se proyecta según $\overleftrightarrow{r}$ ($\overleftrightarrow{r'}$ // $\overleftrightarrow{r}$) y la recta p' es la proyección de canto, del plano P, en S, donde p' ⊥ $\overleftrightarrow{r'}$.

Cabe señalar que toda recta contenida en P y perpendicular a S se proyecta de punta en dicho plano. Así mismo, todo segmento de recta contenido en P y paralelo a S, se proyecta en verdadera magnitud sobre S.

6. Si dos rectas alabeadas se proyectan sobre un plano perpendicular a los planos paralelos que las contienen, entonces sus proyecciones son rectas paralelas y la mínima distancia entre dichas rectas alabeadas es igual a la distancia entre las proyecciones paralelas.



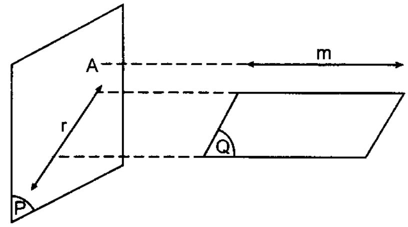
En efecto, según la figura adjunta, sean $\overleftrightarrow{q}$ y $\overleftrightarrow{r}$ las rectas alabeadas situadas en los planos paralelos Q y R, (según teoría, Q y R son únicos). Sea P un plano de proyección perpendicular a Q y R: $\overleftrightarrow{q'}$ y $\overleftrightarrow{r'}$ son las proyecciones de canto de Q y R, siendo además proyecciones de $\overleftrightarrow{q}$ y $\overleftrightarrow{r}$, así como de todas las rectas no perpendiculares a P, contenidas en Q y R. (Las perpendiculares se proyectan de punta).

Luego, $\overleftrightarrow{q'}$ es paralela a $\overleftrightarrow{r'}$ y d la distancia entre ellas, es la distancia entre los planos Q y R, y en consecuencia la mínima distancia entre las rectas alabeadas $\overleftrightarrow{q}$ y $\overleftrightarrow{r}$.

Nota

Como ejercicio, grafique el lector, el segmento que conecta perpendicularmente a $\overleftrightarrow{q}$ y $\overleftrightarrow{r}$.

7. Si una recta y un plano son paralelos, y se proyectan sobre un plano perpendicular a la recta, entonces dicha recta se proyecta de punta y el plano de canto.

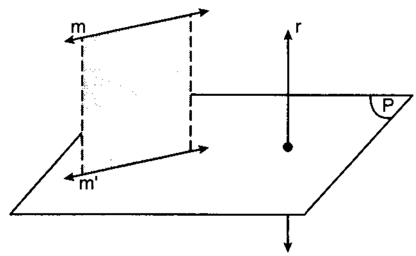


En la figura: $\overleftrightarrow{m}$ // Q y P es un plano de proyección perpendicular a $\overleftrightarrow{m}$; por lo tanto P ⊥ Q.

El punto A y la recta r son proyecciones de $\overleftrightarrow{m}$ y Q en P, respectivamente.

Todos los segmentos contenidos en Q y perpendiculares a $\overleftrightarrow{m}$, se proyectan en verdadera magnitud.

8. Si una recta $\overleftrightarrow{r}$ es perpendicular a un plano P, entonces toda recta perpendicular a r, se proyecta en forma paralela sobre P.



En efecto, según el gráfico: $\overleftrightarrow{r}$ ⊥ P y m ⊥ $\overleftrightarrow{r}$.

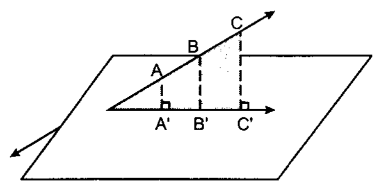
Por lo tanto: $\overleftrightarrow{m}$ // P.

Luego, m' es la proyección de $\overleftrightarrow{m}$ sobre P: $\overleftrightarrow{m'}$ // $\overleftrightarrow{m}$.

Nótese que todo segmento perpendicular a r se proyectará sobre P en su verdadera magnitud.

Además, todo plano que contenga a $\overleftrightarrow{r}$ se proyectará sobre P, de canto.

9. Si A, B y C son tres puntos de una recta y A', B' y C' sus proyecciones sobre cualquier plano, entonces:



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

En particular, si B es punto medio de $\overline{AC}$, B' lo será de $\overline{A'C'}$.

Problemas sobre mínima distancia entre rectas alabeadas

En algunos problemas de este tipo, no es sencillo graficar el segmento que indica la mínima distancia entre rectas que se cruzan, pero siempre es posible determinar la longitud de dicho segmento. Para ello, el lector debe leer detenidamente y comprender.

Método 1. Proyectamos ambas rectas en un plano perpendicular a una de ellas. Esta recta se proyectará como un punto. La mínima distancia pedida queda determinada por la longitud del segmento perpendicular trazado desde dicho punto, a la proyección de la otra recta.

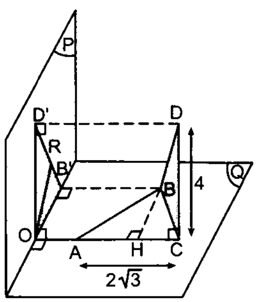
Por supuesto, todos los segmentos paralelos al plano de proyección, se proyectarán en él en su verdadera magnitud (estos segmentos han de ser perpendiculares a la recta que se proyecta de punta).

Veamos el siguiente ejemplo:

En un plano Q, está contenido el triángulo equilátero ABC, de lado $2\sqrt{3}$ cm. Por el vértice C, se levanta $\overline{CD}$ perpendicular a Q, siendo CD = 4 cm. Hallar la mínima distancia entre las rectas que contienen a los segmentos AC y BD.

Resolución:

Del gráfico, sea P un plano perpendicular a $\overline{AC}$.
Luego: P ⊥ Q. (Teorema).
Proyectamos el conjunto sobre P.



O ⇒ Proyección de $\overline{AC}$.
$\overline{B'D'}$ ⇒ Proyección de $\overline{BD}$.
$\overline{OD'}$ ⇒ Proyección de $\overline{CD}$.
Como $\overline{CD} \perp \overline{AC}$ $\therefore$ $\overline{CD} // \overline{OD'}$ y OD' = CD = 4.
($\overline{CD}$ se proyecta en su verdadera magnitud).

La longitud del segmento OR($\overline{OR} \perp \overline{B'O'}$), da la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, pudiéndose hallar en el D'O'B', teniendo en cuenta que OB' es la proyección en verdadera magnitud de la altura $\overline{BH}$ del △ABC: OB' = BH, donde:

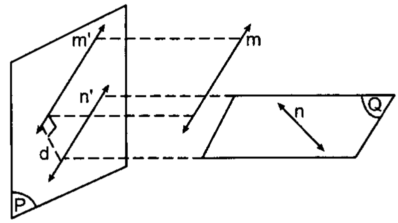
$$BH = \frac{2\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}) = 3 \Rightarrow OB' = 3$$

Luego: $$\frac{1}{(OR)^2} = \frac{1}{(OD')^2} + \frac{1}{(OB')^2} \Rightarrow \frac{1}{(OR')^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2}$$

$\therefore$ OR = 2,4 cm

Método 2. En este caso:

a. Formamos un plano que contenga a una de las rectas y sea paralelo a la otra, (según teorema este plano es único).
b. Proyectamos el conjunto sobre un plano perpendicular al formado en (a).
c. El plano formado en (a) y la otra recta, se proyectan según dos rectas paralelas. La separación entre estas rectas de la mínima distancia pedida.



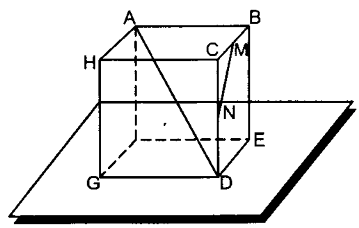
Así, para el gráfico:

- $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ son las rectas alabeadas.
- Q // $\overleftrightarrow{m}$; P es el plano de proyección perpendicular a Q.
- $\overleftrightarrow{m'}$: proyección de $\overleftrightarrow{m}$ en P.
- $\overleftrightarrow{n'}$: proyección de Q en P (es la misma proyección de $\overleftrightarrow{n}$).
- d: mínima distancia pedida.

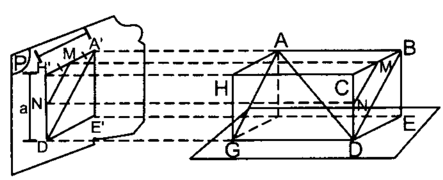
Ejemplos:

1. La figura adjunta, muestra un cubo de arista a.
   - M es punto medio de BC.
   - N es punto medio de CD.

   Hallar la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{MN}$.



Resolución:



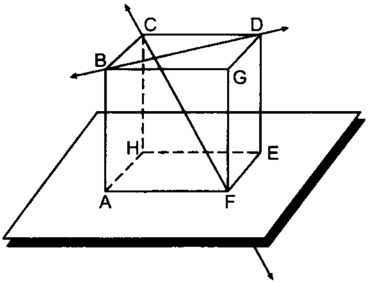
Como $\overline{AG} // \overline{BD}$ y $\overline{MN} // \overline{BD}$, entonces: $\overline{AG} // \overline{MN}$. Luego, el plano AGD es paralelo a $\overline{MN}$. Proyectamos el conjunto sobre un plano P, perpendicular al plano AGD. Así tenemos que P // AHG y BCDE, ya que ambos planos son perpendiculares al plano AGD.

$\overline{M'N'}$ → Proyección de $\overline{MN}$; $\overline{A'D'}$ → Proyección del plano AGD (y de toda recta contenida en él).

La distancia entre $\overline{M'N'}$ y $\overline{A'D'}$ soluciona el problema y es igual a la cuarta parte de la longitud de la diagonal del cuadrado A'H'D'E'.

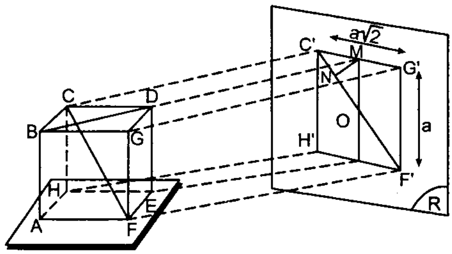
Respuesta: $\frac{a\sqrt{2}}{4}$

2. En la figura, la arista del cubo tiene longitud a. Hallar la mínima distancia entre las rectas BD y CF



Resolución:

Proyectamos la figura, sobre un plano R, perpendicular a $\overleftrightarrow{BD}$.



$\overleftrightarrow{BD}$ se proyecta según el punto M.

Todas las perpendiculares a $\overleftrightarrow{BD}$, se proyectan en VM, de modo que: C'G' = CG = $a\sqrt{2}$ y C'H' = CH = a.

$\overline{MN}$, es la mínima distancia pedida y se puede hallar en el △C'MO:

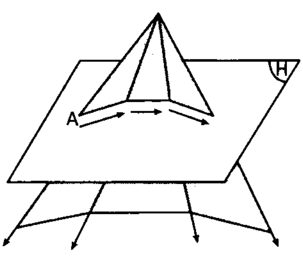
$$\frac{1}{(MN)^2} = \frac{1}{(C'M)^2} + \frac{1}{(OM)^2} \Rightarrow \frac{1}{(MN)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

$$\therefore\ MN = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

ÁNGULOS POLIEDROS

Superficie piramidal

La figura 1, muestra una poligonal contenida en el plano H, siendo A uno de sus extremos.

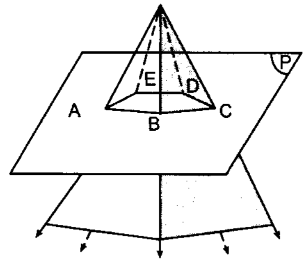


El punto O es exterior al plano H.

Luego, si el rayo $\overrightarrow{OA}$ se traslada a lo largo de la poligonal, manteniendo fijo el origen, se genera una superficie piramidal.

$\overrightarrow{OA}$ es la generatriz de la superficie; el punto O es el vértice y la poligonal recibe el nombre de directriz.

En este caso la superficie generada es abierta.



Si la directriz es un polígono, como en la figura 2, la superficie piramidal generada es cerrada.

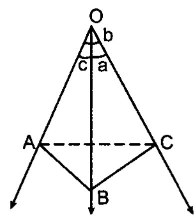
Ángulo poliedro

Llamado también ángulo sólido o anguloide, es la figura determinada por una superficie piramidal cerrada. La fig. 2 muestra un ángulo poliedro.

Los rayos $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, ... se llaman aristas; el punto O es el vértice; tanto las regiones planas determinadas por dos aristas consecutivas, como los ángulos ∠AOB, ∠BOC,..., son las caras y los ángulos diedros determinados por caras consecutivas son los diedros del anguloide.

Según el número de caras (3; 4; 5;... n) un anguloide recibe el nombre de ángulo triedro, ángulo tetraedro, ángulo pentaedro, ángulo eneaedro, etc.

ÁNGULOS TRIEDROS



Es el ángulo poliedro de tres caras. Sus elementos son:

Tres caras: m∠BOC = a, m∠AOC = b, m∠AOB = c.

Tres diedros: OA, OB, OC (o simplemente A, B, C).

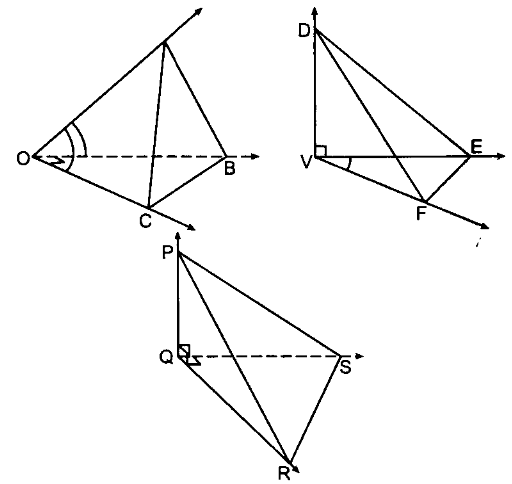
El tiedro de la figura adjunta se denota: O-ABC.

Clasificación de los ángulos triedros

De acuerdo a sus caras un triedro puede ser:

a. Escaleno, si sus tres caras son desiguales ($a \neq b \neq c$).
b. Isósceles o isoedro, si tiene dos caras congruentes.
c. Equilátero, si sus tres caras son congruentes ($a = b = c$).
d. Rectángulo, si una cara mide 90° ($a = 90° \wedge b, c \neq 90°$).
e. Birrectángulo, si tiene dos caras de 90° ($a = 90°$, $b = 90°$, $c \neq 90°$).
f. Trirrectángulo, si cada cara mide 90° ($a = b = c = 90°$).

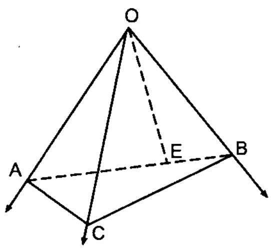
La siguiente figura muestra triedros rectángulo, birrectángulo y trirrectángulo; respectivamente, de vértices O, V y Q.



Relaciones entre caras

Teoremas

1. En todo triedro una cara es menor que la suma de las otras dos y mayor que su diferencia.



Hipótesis: Sean ∠AOB, ∠AOC y ∠BOC las caras del triedro OABC, con ∠AOB mayor que las otras dos y ∠AOC > ∠BOC.

Tesis: ∠AOB < ∠AOC + ∠BOC y
∠AOB > ∠AOC − ∠BOC

Demostración:

Sea E un punto contenido en la cara AOB y situado en $\overline{AB}$, tal que: ∠AOE ≅ ∠AOC. Además el punto C puede ser tal que OE = OC.

En consecuencia △AOE ≅ △AOC (postulado LAL).

Luego: AE = AC ...(1)

En el triángulo ABC se cumple: AE + EB < AC + BC. De donde, cancelando AE y AC por ser iguales:

EB < BC ...(2)

Esto implica que ∠EOB < ∠BOC, ya que nos triángulos OEB y BOC tienen OE = OC, OB común y EB < BC.

Así: ∠EOB < ∠BOC, sumando ∠AOE = ∠AOC a uno y otro miembro.

∠AOE + ∠EOB < ∠BOC + ∠AOC

∴ ∠AOB < ∠BOC + ∠AOC

Asimismo podemos escribir: ∠AOC < ∠AOB + ∠BOC, para la cara ∠AOC : ∠AOB + ∠BOC > ∠AOC.

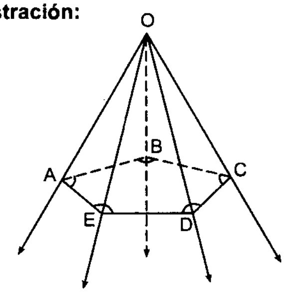
∴ ∠AOB > ∠AOC − ∠BOC

2. En todo ángulo poliedro, la suma de las caras es mayor que 0° y menor que 360°.

Hipótesis: Sea el ángulo pentaedro OABCDE. (En general un ángulo eneaedro).

Tesis:
0° < ∠AOB + ∠BOC + ∠COD + ∠DOE + ∠EOA < 360°

Demostración:



ABCDE, es un polígono determinado por el plano secante a las caras del anguloide.

Por el teorema anterior:

Triedro A: ∠EAB < ∠OAE + ∠OAB
Triedro B: ∠ABC < ∠OBA + ∠OBC
Triedro C: ∠BCD < ∠BCO + ∠OCD
Triedro D: ∠CDE < ∠CDO + ∠ODE
Triedro E: ∠AED < ∠AEO + ∠OED

Sumando miembro a miembro:

∠EAB + ∠ABC + ∠BCD + ∠CDE + ∠AED <
∠OAE + ∠OAB + ∠OBA + ∠OBC + ∠BCD + ...

Donde el primer miembro representa la suma de ángulos internos del polígono ABCDE y el segundo miembro es la suma de ángulos en los triángulos, menos los ángulos en el vértice O.

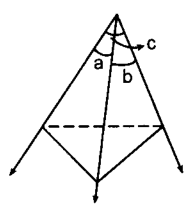
180°(5 − 2) < 5(180°) − suma de ángulos en O

Luego: suma de ángulos en O < 360°.

0° < ∠AOB + ∠BOC + ∠COD + ∠DOE + ∠EOA < 360°

Nota

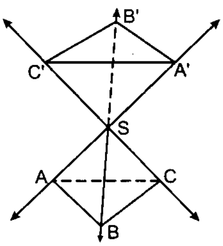
Según este teorema, si a, b y c son las caras de un triedro, entonces:



0° < a + b + c < 360°

Definiciones

1. Se llama simétrico de un triedro S-ABC, al triedro S-A'B'C', determinado por los rayos SA', SB' y SC', opuestos de $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$ y $\overrightarrow{SC}$, respectivamente.



Triedros simétricos

2. Dado un triedro O-ABC y un punto cualquiera O' del espacio, se trazan $\overrightarrow{O'A'}$, $\overrightarrow{O'B'}$ y $\overrightarrow{O'C'}$, rayos perpendiculares a las caras OBC, OAC y OAB, respectivamente, de modo que $\overrightarrow{O'A'}$ y $\overrightarrow{OA}$ tengan sus sentidos hacia un mismo semi-espacio con respecto al plano OBC, asimismo $\overrightarrow{O'B'}$ y $\overrightarrow{OB}$ a un mismo lado del plano OAC y $\overleftrightarrow{O'C'}$ y $\overleftrightarrow{OC}$ de un mismo lado del plano OAC.

   El triedro O'A'B'C' se llama polar o suplementario del triedro O-ABC.

Triedros suplementarios

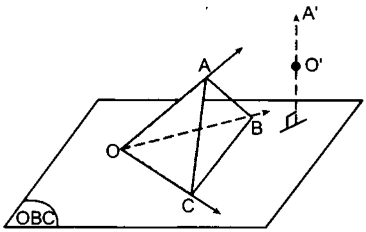


Fig. 1

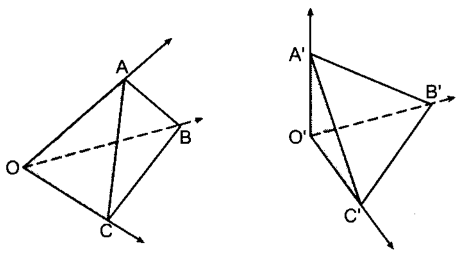


Fig. 2 Triedros suplementarios

La figura 1 indica cómo deben graficarse las aristas del triedro polar.
La figura 2 muestra los triedros suplementarios.

Teoremas:

1. Si el triedro O'-A'B'C' es suplementario del triedro O-ABC, entonces el triedro OABC es también el suplementario del triedro O'-A'B'C'.

   Demostración:
   Bastará probar que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ son, respectivamente, perpendiculares a los planos O'B'C', O'A'C' y O'A'B', cumpliendo así con la definición dada.

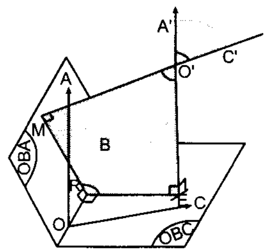
   Bien, en los gráficos anteriores:

   $\overrightarrow{O'A'} \perp$ OBC (hipótesis) $\therefore$ $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{O'A'}$ ...(1)

   $\overrightarrow{O'B'} \perp$ OAC (hipótesis $\therefore$ $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{O'B'}$ ...(2)

   Luego, de (1) y (2): $\overrightarrow{OC}$ será perpendicular al plano O'A'B', que contiene a $\overrightarrow{O'A'}$ y $\overrightarrow{O'B'}$. De modo análogo se concluye que: $\overrightarrow{OA} \perp$ O'B'C' $\wedge$ $\overrightarrow{OB} \perp$ O'A'C'

2. Dados dos triedros suplementarios, cada cara de uno de ellos es el suplemento del correspondiente diedro del otro.



Demostración:

Considerando la figura adjunta, donde se muestran las caras OAB y OBC del triedro OARC y la cara O'A'C' de su triedro suplementario O'-A'B'C', trazado con vértice en O', tenemos que:

Las prolongaciones de C'O' y A'O' interceptan a los planos OAB y OBC, en los puntos M y E; respectivamente.

El plano determinado por $\overrightarrow{MC'}$ y $\overrightarrow{EA'}$ es perpendicular a los planos OAB y OBC (por ser MC' $\perp$ OAB y $\overrightarrow{EA'} \perp$ OBC), por lo que también será perpendicular a $\overleftrightarrow{OB}$, en el punto $\overleftrightarrow{R}$. Luego. $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{MR}$ $\wedge$ $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{ER}$.

$\therefore$ $\angle$MRE es un ángulo plano del diedro OB. Entonces, en el cuadrilátero O'MRE.

$\angle$MO'E + $\angle$MRE = 180°, pero $\angle$MO'E = $\angle$A'O'C'

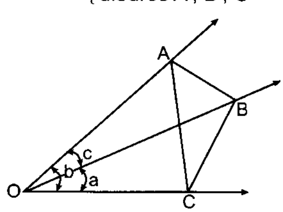
$\therefore$ Diedro OB + cara A'O'C' = 180°

Análogamente se demuestran los otros casos.

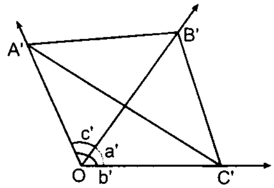
En conclusión, si a continuación graficamos los triedros O-ABC y O'-A'B'C, donde:

$$\text{Triedro O-ABC} \begin{cases} \text{caras a, b, c} \\ \text{diedros A, B, C} \end{cases}$$

$$\text{Triedro O'-A'B'C'} \begin{cases} \text{caras a', b', c'} \\ \text{diedros A', B', C'} \end{cases}$$



Se tendrá: $\begin{cases} a + A' = 180° \\ b + B' = 180° \\ c + C' = 180° \end{cases}$



también: $\begin{cases} A + a' = 180° \\ B + b' = 180° \\ C + c' = 180° \end{cases}$

3. En todo triedro, la suma de los diedros está comprendida entre 180° y 540°. Para la demostración, consideremos un triedro O-ABC y O'-A'B'C', su triedro polar, llamando A, B, C, los diedros del primero y a', b', c' las caras del segundo; de acuerdo a un teorema visto anteriormente tenemos que:

$$0° < a' + b' + c' < 360°$$

Pero: $a' = 180° - A$; $b' = 180° - B$; $c' = 180° - C$

Luego:

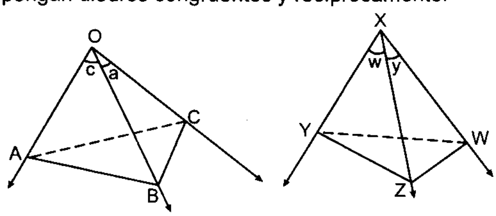
$0° < (180° - A) + (180° - B) + (180° - C) < 360°$

$-540° < -A - B - C < -180°$

De donde: $180° < A + B + C < 540°$

Congruencia de ángulos triedros

Dos ángulos triedros O-ABC y X-YZW son congruentes, si sus caras y ángulos diedros son respectivamente congruentes, de modo que a caras congruentes se opongan diedros congruentes y recíprocamente.



Es decir, las caras:

$a = y$, $b = z$, $c = w$, y los diedros: $A = Y$, $B = Z$, $C = W$

Si dos triedros son congruentes, sus triedros polares también lo son.

Demostración:

Sean O'–A'B'C' y X'–Y'Z'W', triedros polares de los triedros congruentes OABC y XYZW, respectivamente.

Por un teorema anterior sabemos que:

$a' = 180° - A$; $y' = 180° - Y$.

Pero, como $A = Y$, por hipótesis, entonces: $a' = y'$

También: $b' = 180° - B$, $z' = 180° - Z$. Siendo $B = Z$.

$\therefore b' = z'$

Análogamente: $c' = x'$. Así tenemos que las tres caras de los triedros polares son respectivamente congruentes.

Para probar que los diedros son también congruentes:

$A' = 180° - a$, $Y' = 180° - y$. Como $a = y$, entonces: $A' = Y'$.

Así mismo: $B' = 180° - b$, $Z' = 180° - z$; con $B = z$

$\therefore B' = Z'$

Además, se llega a que $C' = W'$

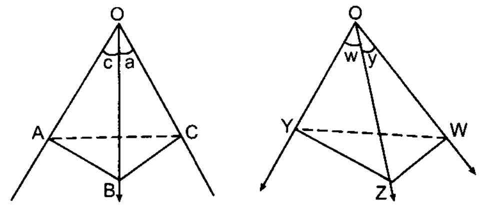
En consecuencia, los triedros O-A'B'C' y X'-Y'Z'W' son congruentes.

Casos de congruencia de triedros

Los casos de congruencia de triedros son análogos a los de congruencia de triángulos.

1. Dos triedros son congruentes si tienen dos caras y el ángulo diedro comprendido, respectivamente congruentes.

   Para la figura adjunta, el postulado indica que si:



$a = y$

$c = w$

y $B = Z$

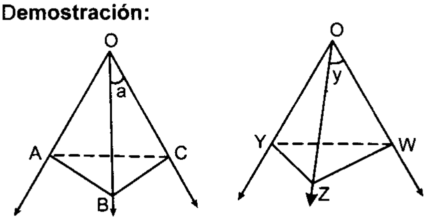
Entonces: triedro O-ABC ≅ triedro X-YZW

2. Dos triedros son congruentes si tienen una cara y los ángulos diedros adyacentes, respectivamente congruentes.

   Hipótesis: Sean los triedros OABC y XYZW, tal es que $a = y$, $B = Z$, $C = W$.

   Tesis: Triedro O-ABC ≅ triedro XYZW.

   Demostración:



Sean O'-B'C'C' y X'-Y'Z'W', triedros suplementarios de O-ABC y XYZW, respectivamente.

Probemos que O'A'B'C' y X'Y'Z'X' son congruentes.

Veamos:

$b' = 180° - B$, $z' = 180° - Z$ (por teorema)

Pero: $B = Z$, (hipótesis). Entonces: $b' = z'$.

También:

$A' = 180° - a$, $Y' = 180° - y$. Como: $a = y$, (hipótesis).

$\therefore A' = Y'$

Así tenemos que los triedros O'-A'B'C' y X'-Y'Z'W' son congruentes, ya que tienen dos caras y el diedro comprendido, respectivamente congruentes, cumpliendo el postulado. Entonces, según un teorema anterior, los triedros O-ABC y X-YZW serán también congruentes.

3. Dos triedros son congruentes si tienen sus tres caras respectivamente congruentes.

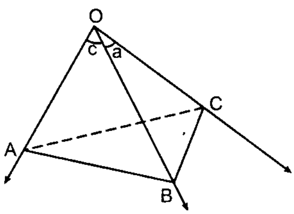
4. Dos triedros son congruentes si tienen sus tres diedros respectivamente congruentes.

Nota

Las demostraciones de los casos 3.° y 4.° se dejan como ejercicio al lector.

5. Dos diedros simétricos son congruentes entre sí. (La demostración de este teorema es sencillo y se deja como ejercicio al lector).

Relación entre caras y diedros de un triedro



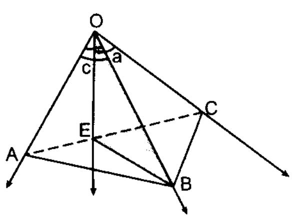
Teoremas

1. Si dos caras de un triedro son congruentes, entonces los diedros opuestos a dichas caras son congruentes.

   Hipótesis: Sea el triado O-ABC, con las caras a y c congruentes.

   Tesis: A = C

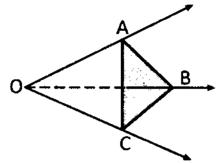
   Demostración:



   Trazamos $\overleftrightarrow{OE}$, bisectriz de la cara $\angle$AOC. Luego, se determinan dos triedros O-AEB y O-EBC, congruentes, ya que:
   a = c (hipótesis)

   $\angle$AOE = $\angle$EOC y $\angle$EOB común; tienen sus tres caras respectivamente congruentes. Por tanto, a caras congruentes, en triedros congruentes, se oponen diedros congruentes: A = C (se oponen a $\angle$EOB).

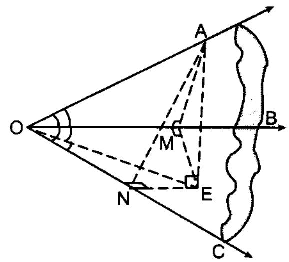
2. Si dos diedros de un triedro son congruentes, entonces las caras opuestas a dichos diedros son congruentes.



   Hipótesis: Consideremos el triedro OABC, donde los diedros B y C son congruentes.

   Tesis: AOC $\cong$ AOB

   Demostración:



   Trazamos $\overline{AE}$, perpendicular al plano BOC y luego, $\overline{EM}$ y $\overline{EN}$, perpendiculares a $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OC}$, respectivamente.

   Luego, por el teorema de las tres perpendiculares: $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{OB}$ y $\overline{AN} \perp \overleftrightarrow{OC}$.

   $\angle$AME y $\angle$ANE son ángulos planos de los diedros B y C

   $\therefore$ $\angle$AME $\cong$ $\angle$ANE.

   Luego $\triangle$AEM $\cong$ $\triangle$AEN, entonces EM = EN y AM = AN.

   Enseguida: $\triangle$OME $\cong$ $\triangle$ONE

   $\therefore$ OM = ON y finalmente:

   $\triangle$OMA $\cong$ $\triangle$ONA De donde: $\angle$AOB $\cong$ $\angle$AOC, tal como se quería demostrar.

3. Si un triedro tiene dos diedros desiguales, las caras opuestas son desiguales y al mayor diedro se opone mayor cara.

   Teorema. Si un triedro tiene dos caras desiguales, los diedros opuestos son desiguales y a mayor cara se opone mayor diedro.
   (Demuestre estos teoremas)

Ejemplos:

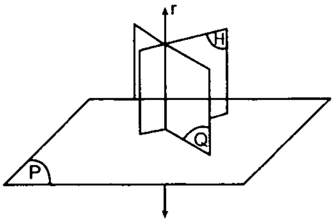
1. ¿Cuántas de las siguientes proposiciones no son falsas?
   I. Por una recta perpendicular a un plano, pasan infinidad de planos perpendiculares al primero.
   II. Por una recta paralela a un plano, pasan infinidad de planos paralelos al primero.
   III. Dos planos perpendiculares a una misma recta, son paralelos entre sí.
   IV. Dos planos perpendiculares a un tercer plano, son paralelos entre sí.
   V. Dos rectas perpendiculares a un mismo plano, son paralelos entre sí.

Resolución:

I. Verdadera II. Falsa III. Verdadera
IV. Falsa V. Verdadera

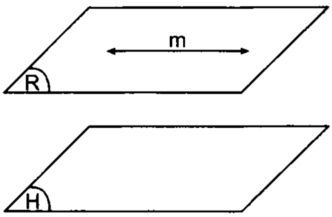
Veamos por qué:

I.



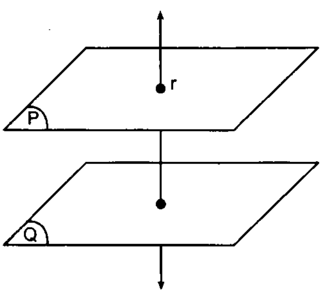
$r \perp P$
$H \perp P$ y $Q \perp P$

II.



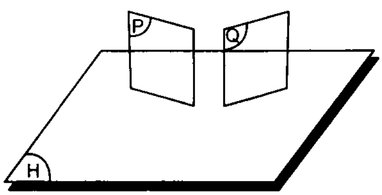
m // H
R // H, R es único

III.



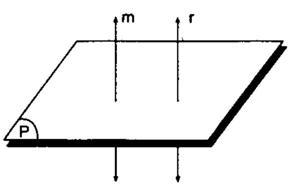
$P \perp r$; $Q \perp r$ $\therefore$ P // Q

IV. R es único



$P \perp H$ y $Q \perp H$
No necesariamente P y Q
Son paralelos.

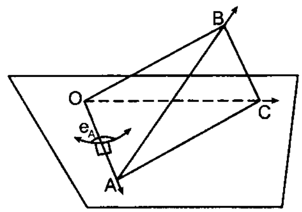
V.



$\overleftrightarrow{m} \perp P$ y $\overleftrightarrow{r} \perp P$ $\therefore$ $\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{r}$

2. Indicar verdadero (V) o falso (F).
   I. En todo triedro, la suma de las medidas de los tres diedros exteriores es mayor que 0° y menor que 360°.
   II. Si A, B, C, son las medidas de los diedros de un triedro, entonces: $B + C < 180° + A$.

Resolución:



I. Sea el triedro O-ABC, con e_A, e_B y e_C, como medidas de sus diedros exteriores.
Se sabe que para los diedros A, B y C.
$180° < A + B + C = 540°$ ...(1)

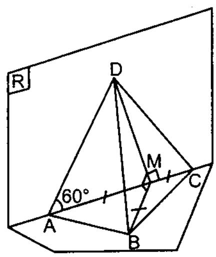
Pero: $A = 180° - e_A$
$B = 180° - e_B$
$C = 180° - e_C$

De donde:
En (1):
$180° < (180° - e_A) + (180° - e_C) < 540°$
$-360° < -(e_A + e_B + e_C) < 0°$
$360° > e_A + e_B + e_C > 0°$
$\therefore$ Verdadera (V)

II. Considerando el mismo gráfico; las caras del triedro polar, mide: (180° – A), (180° – B) y (180° – C).
Deben cumplir: $(180° - A) - (180° - B) < (180° - C)$.
De donde: $B + C < 180° + A$. $\therefore$ Verdadera (V)

3. ABC es un triángulo recto en B . ACD es un triángulo equilátero contenido en un plano perpendicular al plano ABC. Si AC = 8, hallar BD.

Resolución:



Plano R $\perp$ plano ABC
Se traza $\overline{DM} \perp$ plano ABC
$\Rightarrow$ DM estará contenido en el plano R.
$\overline{DM} \perp \overline{BM}$

$\triangle$ABC: $BM = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{8}{2} \Rightarrow BM = 4$

$\triangle$ADC, equilátero:

$DM = \dfrac{AD}{2}\sqrt{3} = \dfrac{8}{2}\sqrt{3} \Rightarrow DM = 4\sqrt{3}$

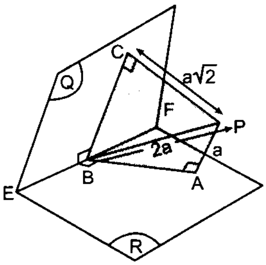
Teorema de Pitágoras, en el ⊾BMD:

$(BD)^2 = (BM)^2 + (DM)^2$

$(BD)^2 = 4^2 + (4\sqrt{3})^2 \quad \therefore\ BD = 8$

4. Dado un diedro R-EF-Q y un punto P interior, se trazan $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$, perpendiculares a la cara R, a la arista $\overline{EF}$ y a la cara Q, respectivamente. Si: $PA = \frac{PB}{2} = \frac{PC}{\sqrt{2}}$. Hallar la medida del diedro.

Resolución:



Sea. $PA = \frac{PB}{2} = \frac{PC}{\sqrt{2}} = a$

$\Rightarrow PA = a;\ PB = 2a$ y $PC = a\sqrt{2}$

Como $\overline{EF} \perp \overline{PA}$ y $\overline{EF} \perp \overline{PC}$

Entonces $\overline{EF} \perp$ plano PAC y $\overline{PB}$ estará contenido en dicho plano. Se observa que son notables los triángulos rectángulos PAB y PCB.

$m\angle PBA = 30°$, porque $PA = \frac{PB}{2}$ y $m\angle PBC = 45°$, porque $PC = \frac{PB}{\sqrt{2}}$

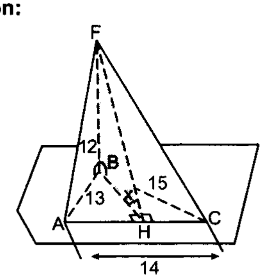
Entonces:

Diedro EF : $m\angle ABC = m\angle PBA + m\ \angle PBC$

$\therefore$ Diedro EF: $30° + 45° = 75°$

5. En un triángulo ABC, se tiene que AB = 13, BC = 15 y AC = 14. Se eleva por B, BF perpendicular al plano ABC, siendo BF = 12. Hallar la medida del triángulo diedro que determinan los planos AFC y ABC.

Resolución:



En el plano ABC, se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. Por el teorema de las tres perpendiculares: $\overline{FH} \perp \overline{AC}$

$\angle FHB$, es un ángulo plano del diedro que determinan los planos AFC y ABC.

Teorema de Herón, en el $\triangle ABC$:

$$p = \frac{13 + 14 + 15}{2} = 21$$

$$BH = \frac{2}{14}\sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = \frac{1}{7}\sqrt{21(8)(7)(6)}$$

$BH = 12$

Luego, el triángulo rectángulo FBH es isósceles $(BF = 12 = BH) \quad \therefore\ x = 45°$

6. Dos caras de un triedro miden 84° y 114°, respectivamente. Hallar los valores enteros, mínimo y máximo de la medida de la tercera cara.

Resolución:

Sea x la medida de la tercera cara. Se deben cumplir.

$x > 114° - 84° \Rightarrow x > 30°$ ...(I)

También:

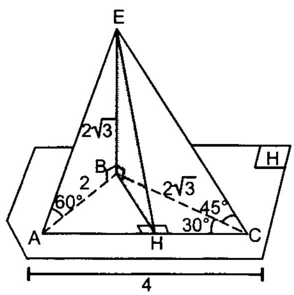
$x + 84° + 114° < 360° \Rightarrow x < 162°$ ...(II)

De (I) y (II): mínimo valor entero: 31°

máximo valor entero: 161°

7. Desde un punto E exterior a un plano H, se trazan $\overline{EA}$, $\overline{EB}$ y $\overline{EC}$ (A, B y C sobre H). Si estos segmentos forman ángulos de 60°, 90° y 45°, respectivamente y $\overline{AB} \perp \overline{BC}$; hallar el área de la región triangular AEC, sabiendo que AB = 2 cm.

Resolución:



$\triangle ABE$: $BE = AB\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

$\triangle EBC$: $BC = BE = 2\sqrt{3}$

$\triangle ABC$: notable, porque:

$BC = AB\sqrt{3} \Rightarrow \angle ACB = 30°$

y $AC = 2AB = 2(2) = 4$

Al trazar $\overline{BH} \perp \overline{AC}$:

$BH = \frac{BC}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ ...(en $\triangle BHC$)

Teorema de las tres perpendiculares: $\overline{EH} \perp \overline{AC}$.

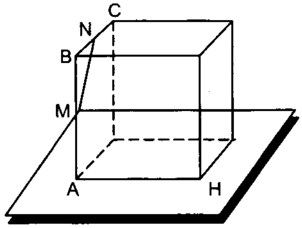
En el ⊾EBH:

$(EH)^2 = (BE)^2 + (BH)^2 = (2\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2 \Rightarrow EH = \sqrt{15}$

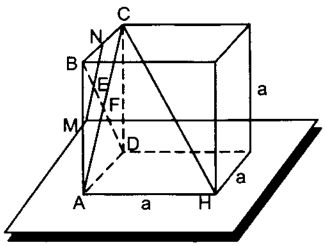
Finalmente:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}(AC)(EH) = \frac{1}{2}(4)(\sqrt{15}) = 2\sqrt{15}\ cm^2$$

8. La figura muestra un cubo de arista a M es punto medio de $\overline{AB}$ y N es punto medio de $\overline{BC}$. Hallar la mínima distancia entre las rectas que contienen a $\overline{MN}$ y $\overline{CH}$.



Resolución:



Como $\overline{MN}$ // $\overline{AC}$ ⇒ $\overline{MN}$ es paralelo al plano ACH. Toda recta perpendicular al plano ACH será también perpendicular a $\overline{MN}$. En particular, $\overline{BD}$ ⊥ plano ACH, por ser $\overline{BD}$ ⊥ $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ = $\overline{AH}$.

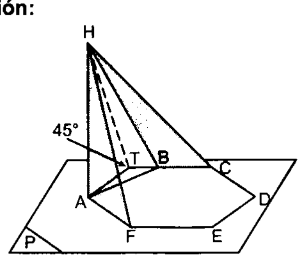
Si BD intersecan a $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ en los puntos E y F, respectivamente, entonces $\overline{EF}$ da la mínima distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{CH}$, que es la misma que hay entre $\overline{MN}$ y el plano ACH. En el cuadrado ABCD, F es el centro.

$$EF = BE = \frac{BF}{2} \Rightarrow EF = \frac{BF}{2} = \frac{1}{2}(BF)$$

$$\Rightarrow EF = \frac{1}{2}\left(\frac{BD}{2}\right) = \frac{1}{4}(BO) \quad \therefore EF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$$

9. ABCDEF es un hexágono regular contenido en un plano P. Se eleva por A, $\overline{AH}$ ⊥ P, de modo que los planos HBT y P formen un diedro de 45°. Si el área (△AHF) = 8 cm^2, hallar área (△HBC).

Resolución:



Se trata $\overline{AT}$ ⊥ $\overline{BC}$ ⇒ $\overline{HT}$ ⊥ $\overline{BC}$, según el teorema de las tres perpendiculares.

∠HTA = 45° (ángulo plano del ángulo diedro que determinan los planos HBC y P).

Se tienen: $\text{área}(\triangle HBC) = \frac{BC(HT)}{2}$

y $\text{área}(\triangle AHF) = \frac{AF(HA)}{2}$

Dividiendo miembro a miembro, y como BC = AF:

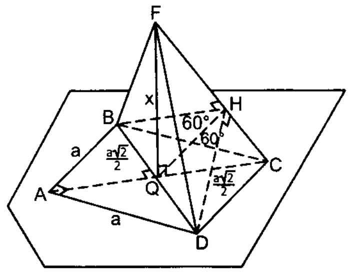
$$\frac{\text{área}(\triangle HBC)}{\text{área}(\triangle AHF)} = \frac{HT}{HA}$$

Pero: área (△AHF) = 8 cm^2 y $\frac{HT}{HA} = \sqrt{2}$

$\therefore$ área (△HBC) = $8\sqrt{2}$ cm^2

10. Por el centro Q de un cuadrado ABCD, se eleva $\overline{QF}$ perpendicular al plano que lo contiene. Si AB = a, hallar la longitud de $\overline{QF}$ para que los planos BFC y CFD determinen un dentro de medida 120° (diedro B-FC-D).

Resolución:



QF = x

BHD es un ángulo plano del diedro B-FC-D.

m∠BHD = 120°

m∠BHQ = m∠DHQ = 60°

En el cuadrado ABCD: $BQ = \frac{a\sqrt{2}}{2} = QC$.

En el ⊾BQH (notable):

$$QH = BQ\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow QH = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

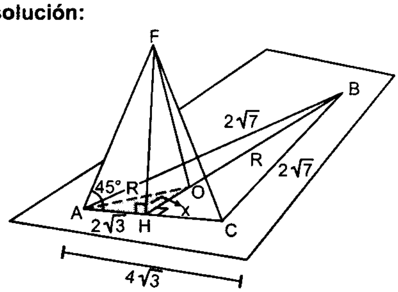
Por relación métrica, en el triángulo rectángulo FQC:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(QC)^2} = \frac{1}{(QH)^2} \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^2}$$

$$\therefore x = \frac{a}{2}$$

11. O es circuncentro de un triángulo isósceles ABC (AB = BC). Se eleva, por O, $\overline{OF}$ perpendicular al plano ABC. Si AB = $2\sqrt{7}$; AC = $4\sqrt{3}$ y $\overline{AF}$ forma con el plano ABC un ángulo de 45°, hallar la medida del diedro que determinan los planos AFC y ABC.

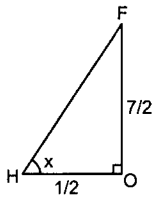
Resolución:



O ⇒ circuncentro de $\triangle ABC$
⇒ OA = OB = R ⇒ circunradio.
En ⊾AHB: $(BH)^2 = (AB)^2 - (AH)^2$
$(BH)^2 = (2\sqrt{7})^2 - (2\sqrt{3})^2$
BH = 4
En ⊾AHO: HO = BH − R ⇒ HO = 4 − R
Teorema de Pitágoras: $(AH)^2 + (HO)^2 = (AO)^2$

$$(2\sqrt{3})^2 + (4 - R)^2 = R^2 \Rightarrow R = \frac{7}{2}$$

Entonces:
OH = 4 − R ⇒ OH = 1/2 y como OF = OA, por ser el $\triangle AOF$ isósceles: $OF = \frac{7}{2}$
Finalmente: en el ⊾HOF:
$\therefore$ tanx = 7
x = arctan7



12. Se tiene un hexágono regular ABCDEF contenido en un plano P. Por el centro O del hexágono, se eleva $\overline{OH} \perp$ P. Si AB = 4 y OH = $2\sqrt{6}$, hallar la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{HE}$.

Resolución:

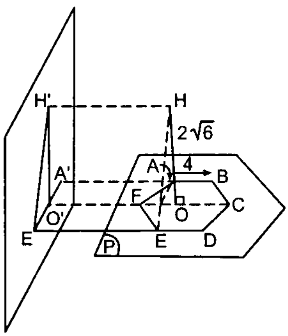


Fig. 1

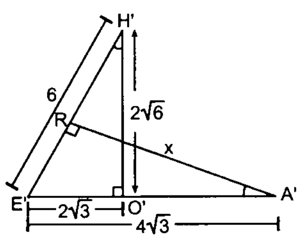


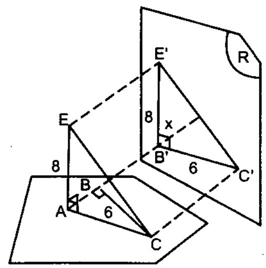
Fig. 2

Sea T, un plano perpendicular a $\overline{AB}$, se hacen las proyecciones sobre T.
Todas las perpendiculares a $\overline{AB}$, se proyectan en verdadera magnitud. Por eso:
H'O' = HO = $2\sqrt{6}$ y A'E' = AE = $4\sqrt{3}$

Como $\overline{AB}$ se proyecta según el punto A' la figura 2, da la forma de hallar la mínima distancia x entre $\overline{AB}$ y $\overline{HE}$.
Se observa: E'O' = O'A' = $2\sqrt{3}$
⊾E'O'H': E'H' = 6 (teorema de Pitágoras)
⊾E'RA' − ⊾E'O'H': $\frac{x}{2\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{3}}{6}$ $\therefore x = 4\sqrt{2}$

13. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B. Por el vértice A, se eleva $\overline{AE}$ perpendicular al plano ABC. Si AE = 8 y BC = 6, hallar la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{EC}$.

Resolución:

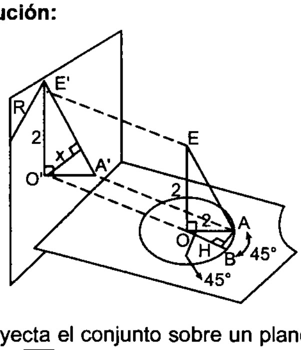


Se proyecta la figura sobre un plano R, perpendicular a $\overline{AB}$.
$\overline{AB}$ se proyecta como un punto (B') y $\overline{AE}$ así como $\overline{BC}$, en verdadera magnitud por ser perpendicular a $\overline{AB}$.
El segmento de longitud x, da la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{EC}$.
Por relación métrica, en el triángulo rectángulo contenido en el plano R:

$$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} \qquad \therefore x = 4{,}8$$

14. En una circunferencia de centro O y radio 2 cm, se tiene la cuerda $\overline{AB}$, de modo que m$\overset{\frown}{AB}$ = 45°. Se eleva $\overline{OE}$, perpendicular al plano a la circunferencia, siendo OE = 2 cm. Hallar la mínima distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{OB}$.

Resolución:



Se proyecta el conjunto sobre un plano R perpendicular a $\overline{OB}$. Este segmento se proyecta como un punto O' y todas las perpendiculares a él, en verdadera magnitud. Así: O'E' = OE = 2. Si $\overline{AH} \perp \overline{OB}$, entonces en R: O'A' = AH.

Pero, en el ⊿AHO: $AH = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\Rightarrow O'A' = \sqrt{2}$

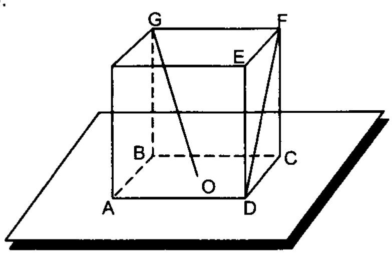
- La distancia de O' a A'E' es la mínima distancia entre $\overline{AE}$ y $\overline{OB}$: x.

  Por relación métrica:

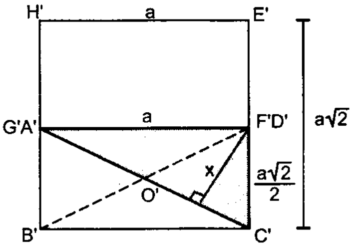
  $$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{(\sqrt{2})^2} \qquad \text{...(en ⊿A'O'E')}$$

  De donde: $x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

15. La arista del cubo, mide a. El punto O es centro de la cara ABCD. Hallar la mínima distancia entre $\overline{GO}$ y $\overline{FD}$.



Resolución:



- Si se proyecta el conjunto sobre un plano perpendicular a $\overline{FD}$, esta recta se proyectará como un punto (F'D') y la distancia de este punto a G'O', (proyección de $\overline{GO}$), dará la mínima distancia pedida (x), según el gráfico adjunto.
- En el triángulo rectángulo del cual x es altura:

  $$\frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} \qquad \text{(relación métrica)}$$

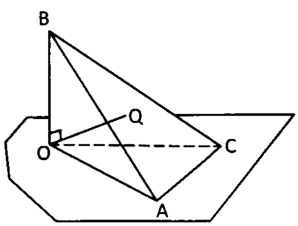
  De donde: $x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

PROBLEMAS RESUELTOS

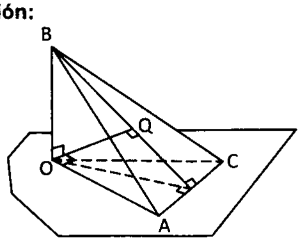
1. El tetraedro O-ABC, es trirrectángulo en el vértice O. $\overline{OQ} \perp$ plano ABC.

   Demostrar que:

   $$\frac{1}{(OA)^2} + \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OC)^2} = \frac{1}{(OQ)^2}$$



Resolución:



$\overline{OQ}$ debe estar en un plano perpendicular al ABC. Veamos:

Se traza $\overline{OR} \perp \overline{AC}$. Por el teorema de las tres perpendiculares: $\overline{BR} \perp \overline{AC}$. El plano BOR es perpendicular al plano ABC. En BCR estará $\overline{OQ} \perp$ plano ABC.

Por relación métrica, en los triángulos rectángulos:

$$\triangle BOR \Rightarrow \frac{1}{(OQ)^2} = \frac{1}{(OR)^2} + \frac{1}{(OB)^2} \qquad \text{...(1)}$$

$$\triangle AOC \Rightarrow \frac{1}{(OR)^2} = \frac{1}{(OA)^2} + \frac{1}{(OC)^2} \qquad \text{...(2)}$$

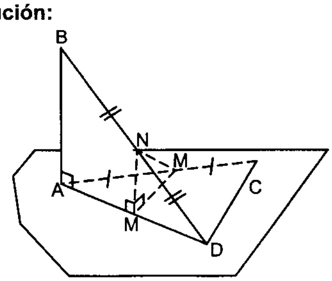
(2) en (1):

$$\therefore \frac{1}{(OQ)^2} = \frac{1}{(OA)^2} + \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OC)^2}$$

2. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son segmentos alabeados y perpendiculares. $\overline{AC}$ es perpendicular a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

   Si: $(AB)^2 + (CD)^2 = 256$, hallar la distancia entre los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Resolución:



$(AB)^2 + (CD)^2 = 256$ ... (dato)

Sean: M punto medio de $\overline{AC}$ y N, punto medio de $\overline{BD}$, incógnita: MN.

Si H es punto medio de $\overline{AD}$

$NH = \frac{AB}{2}$ y $\overline{NH} \parallel \overline{AB}$, en $\triangle BAD$

$MH = \frac{CD}{2}$ y $\overline{MH} \parallel \overline{CD}$, en $\triangle ACD$

Por dato: $\overline{AB} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{MH} = \overline{NH}$

En el triángulo rectángulo NHM, teorema de Pitágoras:

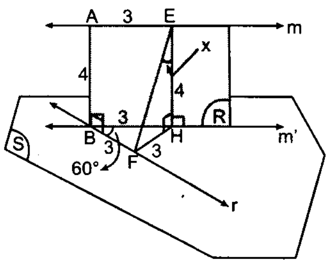
$(MN)^2 = (MH)^2 + (NH)^2$

$\Rightarrow (MN)^2 = \left(\frac{CD}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \frac{(AB)^2 + (CD)^2}{4}$

Con el dato: $(MN)^2 = \frac{256}{4}$ $\therefore$ MN = 8

3. m y r son dos rectas alabeadas que se cruzan con un ángulo de 60°, $A \in \overleftrightarrow{m}$, $B \in \overleftrightarrow{r}$ y AB = 4 cm es la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{r}$. Sobre m se toma el punto E y en $\overleftrightarrow{r}$ el punto F, de modo que AE = BF = 3 cm. Hallar la medida del ángulo con que se cruzan $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$.

Resolución:



Grafiquemos $\overleftrightarrow{r}$ en un plano S paralelo a $\overleftrightarrow{m}$, m' es la proyección de $\overleftrightarrow{m}$ sobre S.

El plano R $\perp$ plano S.

Se observa: $\triangle$BFH, equilátero

HF = 3 ... (1)

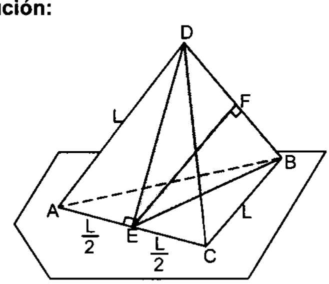
x, da la medida del ángulo de cruce entre $\overline{AB}$ y $\overline{EF}$, ya que $\overline{EH} \parallel \overline{AB}$.

Como EH = AB $\Rightarrow$ EH = 4 ... (2)

Con (1) y (2), en $\triangle$EHF, recto en H: x = 37°

4. La mínima distancia entre dos aristas opuestas de un tetraedro regular, de aristas con longitud L, es:

Resolución:



Consideremos el tetraedro regular ABCD. Hallamos la mínima distancia entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

Si $\overline{DE} \perp \overline{AC}$ $\therefore$ AE = EC y luego $\overline{BE} \perp \overline{AC}$. El plano BED es perpendicular a AC. Entonces, si $\overline{EF} \perp \overline{BD}$, $\overline{EF}$ da la mínima distancia entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$, por ser $\overline{EF}$ perpendicular a ambas rectas.

Así: $DE = EB = \frac{L}{2}\sqrt{3}$ y $DF = FB = \frac{L}{2}$

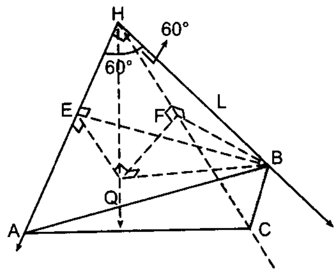
En el ◺EFB, por el teorema de Pitágoras:

$(EF)^2 + (FB)^2 = (EB)^2 \Rightarrow (EF)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \left(\frac{L}{2}\sqrt{3}\right)^2$

$\therefore EF = \frac{L\sqrt{2}}{2}$

5. En un triedro H-ABC, se sabe que: m∠AHC = 90°, m∠AHC = m∠BHC = 60°. Hallar la medida del ángulo que forma HB con el plano AHC.

Resolución:



Se traza $\overline{BQ} \perp$ plano AHC.

$\overline{HQ}$ es la proyección de HB en dicho plano.

Se trazan $\overline{QE} \perp \overline{HA}$ y $\overline{QF} \perp \overline{HC}$

Sea: HB = L. Luego:

$\triangle HFB \Rightarrow HF = \frac{L}{2}$; $\triangle HEB \Rightarrow HE = \frac{L}{2}$

EHFQ es un cuadrado. Luego: $HQ = HF\sqrt{2}$

$\Rightarrow HQ = \frac{L}{2}\sqrt{2}$

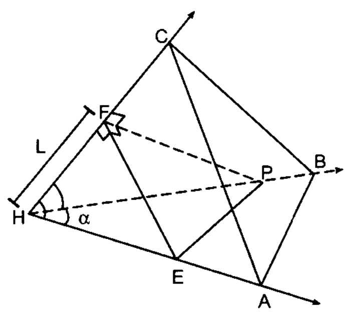
Entonces, en el $\triangle$HQB, recto en Q:

$HQ = \frac{HB}{2}\sqrt{2}$

$\therefore$ m∠BHQ = 45°

6. En un triedro H-ABC, el diedro C mide 90° y las caras: a = b = 45°. ¿Cuánto mide la cara c?

Resolución:



Sea F, un punto de $\overline{HC}$

Se trazan: $\overline{FE} \perp \overline{HC}$ y $\overline{FP} \perp \overline{HC}$

Estando E en $\overline{HA}$ y P en $\overline{HB}$.

∠EFP es un ángulo plano del diedro C

$\Rightarrow$ m∠EFP = 90°

Si HF = L, entonces:

$\left.\begin{array}{l} \text{◺HFP} \Rightarrow FP = L \text{ y } HP = L\sqrt{2} \\ \text{◺HFE} \Rightarrow FE = L \text{ y } HE = L\sqrt{2} \end{array}\right\}$ FP = FE; $\triangle$EFP: $EP = L\sqrt{2}$

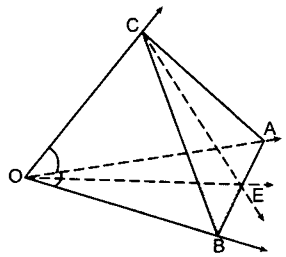
En conclusión: $EP = HP = HE = L\sqrt{2}$

$\triangle$EHP, equilátero $\therefore \alpha = 60°$

7. Dado un triedro O-ABC, la arista $\overline{OC}$ forma con la bisectriz $\overline{OE}$ de la cara opuesta, un ángulo que mide la mitad de dicha cara. Demostrar que:

diedro A + diedro B = diedro C

Resolución:



Recordemos, según un teorema de este capítulo, que si dos caras de un triedro son congruentes, entonces los diedros opuestos a dichas caras son congruentes.

Luego:

Triedro O-AEC:

cara EOC = cara AOE

$\Rightarrow$ diedro E-OC-A = diedro E-OA-C ... (1)

Triedro O-EBC:

cara BOE = cara EOC

$\Rightarrow$ diedro E-OC-B = diedro E-OB-C ...(2)

Sumando miembro a miembro, lo de (1) y (2):

diedro E-OC-A + diedro E-OC-B =

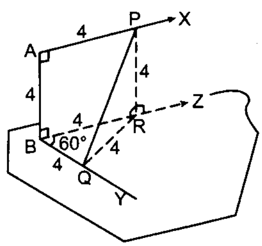
diedro E-OA-C+diedro E-OB-C

Es decir:

$\therefore$ Diedro C : diedro A + diedro B

8. Se tienen los rayos $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$ que se cruzan tomando un ángulo que mide 60° y cuya perpendicular común es $\overline{AB}$. Sobre $\overrightarrow{AX}$ se ubica el punto P y sobre $\overrightarrow{BY}$ el punto Q, tal que AP = AB = BQ = 4 cm. Calcular PQ.

Resolución:



Trazamos $\overrightarrow{BZ}$ // $\overrightarrow{AX}$

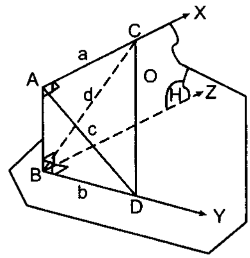
Luego: m$\angle$ZBY = 60°

$\overline{PR}$ // $\overline{AB}$ y $\overline{AB} \perp$ Plano ZBY $\Rightarrow$ PR $\perp$ Plano ZBY

⊾PRQ: PQ = $4\sqrt{2}$

9. Se tienen los rayos $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BY}$ que se cruzan formando un ángulo recto y cuya perpendicular común es $\overline{AB}$. Sobre $\overrightarrow{AX}$ se ubica el punto C y sobre $\overrightarrow{BY}$ el punto D, tal que: $(AC)^2 + (BD)^2 + (AD)^2 + (BC)^2 = 18$. Calcular CD.

Resolución:



CD = m

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 18$

Trazamos $\overrightarrow{BZ}$ // $\overrightarrow{AX}$ $\Rightarrow$ $\angle$ZBY = 90°

$\overline{BD} \perp$ plano H $\Rightarrow$ $\overline{BD} \perp \overline{BC}$

⊾DBC: $m^2 = b^2 + d^2$ ... (1)

BZ $\perp$ plano ABD y $\overrightarrow{AX}$ // $\overrightarrow{BZ}$

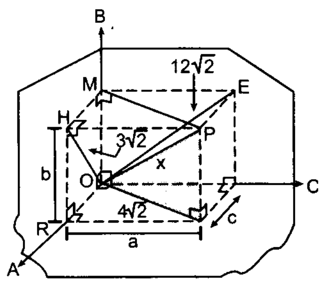
⊾DAC: $m^2 = a^2 + c^2$ ... (2)

(1) + (2): $2m^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

$\therefore$ m = 3

10. En la región interior a un triedro trirrectángulo de vértice O, se toma el punto P. Hallar OP, sabiendo que las proyecciones de OP sobre las caras del triedro, tienen longitudes $3\sqrt{2}$, $4\sqrt{2}$ y $12\sqrt{2}$ cm, respectivamente.

Resolución:



Consideremos el gráfico adjunto, donde el triedro es O-ABC.

OP = x

Con las distancias elegidas a, b y c, usando el teorema de Pitágoras:

$x^2 = a^2 + b^2 + c^2$ ... (1)

⊾OME $\Rightarrow$ $(OM)^2 + (EM)^2 = (OE)^2$

$b^2 + a^2 = 288$ ... (2)

⊾OMH = $(OM)^2 + (MH)^2 = (OH)^2$

$b^2 + c^2 = 18$ ... (3)

⊾ORF $\Rightarrow$ $(OR)^2 + (RF)^2 = (OF)^2$

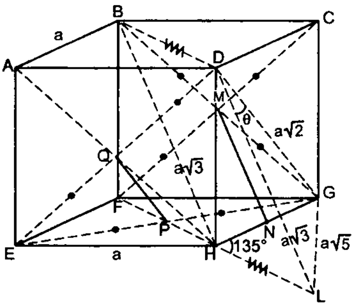
$c^2 + a^2 = 32$ ... (4)

Sumando miembro a miembro, las expresiones (2), (3) y (4):

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 = 338$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 169$
Finalmente, reemplazando en (1): $x^2 = 169$
$\therefore\ x = 13$

11. En un cubo ABCD - EFGH los centros de las caras BFGC, EFGH, AEHD son M, P y Q respectivamente, si N es punto medio de $\overline{HG}$, calcular la medida del ángulo que forman las rectas $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{PQ}$.

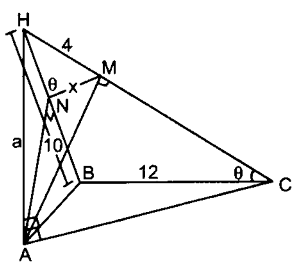
Resolución:



$\overline{PQ} \,//\, \overline{DG} \wedge \overline{MN} \,//\, \overline{BH}$
$\Rightarrow$ $\overline{BH}$ y $\overline{DG}$ forman un ángulo cuyo valor se quiere hallar.
Trazamos $\overline{DL} \,//\, \overline{BH}$ ($L \in \overrightarrow{FH}$)
$\Rightarrow BH = DL = a\sqrt{3}$
$\triangle LHG$: $LG = a\sqrt{5}$
$\triangle DHG$: $DG = a\sqrt{2}$
$\triangle LDG$: $(a\sqrt{5})^2 = (a\sqrt{2})^2 + (a\sqrt{3})^2$
Cumple la igualdad.
$\therefore\ \theta = 90°$
Triángulo LDG es rectángulo, recto en D.

12. En un triángulo ABC; por el vértice A se traza una perpendicular $\overline{AH}$ al plano que lo contiene, luego las perpendiculares $\overline{AM}$ y $\overline{AN}$ a los segmentos $\overline{HC}$ y $\overline{HB}$ respectivamente, si BC = 12, HB = 10 y HM = 4, hallar la longitud del segmento $\overline{MN}$.

Resolución:

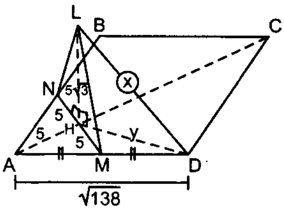


Por R.M.:
$\triangle HAB$: $a^2 = 10HN$ ... (1)
$\triangle HAC$: $a^2 = 4HC$ ... (2)
(1) = (2):
$10HN = 4HC$
Cumple el teorema de las secantes.

Entonces el cuadrilátero BNMC es inscriptible
$\triangle NHM \sim \triangle CHB$
$\Rightarrow \dfrac{x}{12} = \dfrac{4}{10}$ $\quad\therefore\ x = 4{,}8$

13. Un rectángulo ABCD y un triángulo equilátero MN. Están en planos perpendiculares (M y N son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{AB}$ respectivamente). Si $BC = \sqrt{138}$ y $CD = \sqrt{262}$, hallar la distancia de L a D.

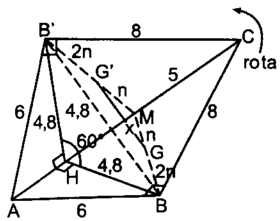
Resolución:



Por teorema de la mediana.
$\triangle AHD$: $5^2 + y^2 = 2(5)^2 + \dfrac{138}{2}$
$y^2 = 94$
$\triangle LHD$; por Pitágoras: $x^2 = (5\sqrt{3})^2 + 94$
$x^2 = 75 + 94 = 169 = 13^2$ $\quad\therefore x = 13$

14. Se tiene un triángulo rectángulo ABC (recto en B) cuyos lados AB = 6, BC = 8, luego tomando como eje de giro a la hipotenusa, se rota dicho triángulo un ángulo que mide 60°. Calcular la distancia entre los baricentros del triángulo en su posición inicial y final.

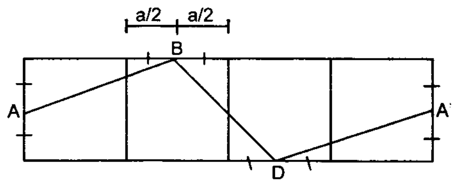
Resolución:



$\triangle G'MG \sim \triangle B'MB$
$\Rightarrow \dfrac{x}{4{,}8} = \dfrac{n}{3n} \Rightarrow x = \dfrac{4{,}8}{3}$
$x = 1{,}6 = \dfrac{16}{10}$ $\quad\therefore\ x = \dfrac{8}{5}$

15. En un hexaedro regular KLMNPQRS de arista a, A es punto medio de $\overline{PK}$, B es punto medio de $\overline{LM}$, D es punto medio de $\overline{SR}$. Si una araña está en el punto A y se dirige hacia el punto B, hallar la mínima longitud que recorre la araña.

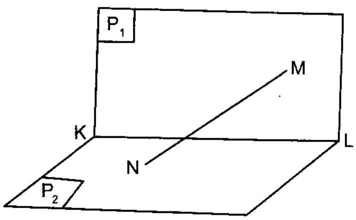
Resolución:



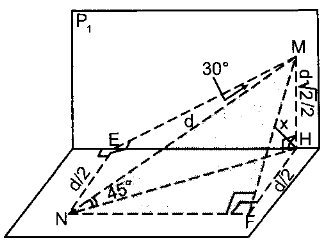
$AB = DA' = \frac{a}{2}\sqrt{10} \wedge BD = a\sqrt{2}$

Luego: $x = a(\sqrt{10} + \sqrt{2})$

16. En la figura P_1 y P_2 son dos planos perpendiculares, $\overline{MN}$ es un segmento tal que $M \in P_1$ y $N \in P_2$, $MN = d$. Si la medida del ángulo entre $\overline{MN}$ y P_1 es igual a 30, la medida del ángulo entre $\overline{MN}$ y P_2 es igual a 45, hallar la distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{KL}$:



Resolución:



$\triangle$NEM notable: $NE = \frac{d}{2}$

$\triangle$NMH notable: $NH = MH = d\sqrt{2}/2$

$\triangle$MHF: $\frac{1}{x^2} = \left[\frac{1}{\frac{d\sqrt{2}}{2}}\right]^2 + \left[\frac{1}{\frac{d}{2}}\right]^2$

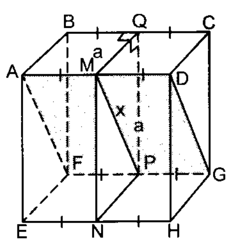
$\therefore\ x = \frac{d\sqrt{6}}{6}$

17. En un hexaedro regular ABCD-EFGH de arista a, si M, N, P y Q son puntos medios de $\overline{AD}$, $\overline{EH}$, $\overline{FG}$ y $\overline{BC}$, respectivamente, hallar la intersección entre los planos AFGD y MNPQ.

Resolución:

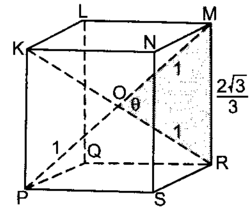
La intersección de los planos AFGD y MNPQ es $\overline{MP}$.

$\triangle$MQP: $x = a\sqrt{2}$



18. Sea el hexaedro regular KLMN-PQRS. Si O es el centro de dicho hexaedro, entonces el coseno de la medida del ángulo ROM.

Resolución:



$\triangle$OMR; por ley de cosenos:

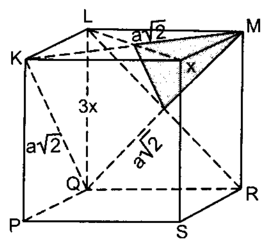
$\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}\right]^2 = 1 + 1 - 2(1)(1)\cos\theta$

$2\cos\theta = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$

$\therefore\ \cos\theta = \frac{1}{3}$

19. En un hexaedro regular KLMN-PQRS de arista a. Si A y B son los centros de las caras QRML y KLMN, entonces el área de la región triangular ABM.

Resolución:



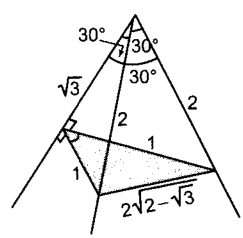
De la fig.: $4x = \frac{(a\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ x = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

20. En un triedro, cada diedro mide 150° ¿Cuánto mide una de las caras?

Resolución:

Usando su triedro polar.



Por ley de cosenos:

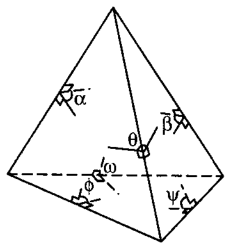
$4(2 - \sqrt{3}) = 2 - 2\cos(180° - x)$

Simplificando: $\cos x = 3 - 2\sqrt{3}$

$\therefore\ x = \arccos(3 - 2\sqrt{3})$

21. Se tiene un tetraedro escaleno A-BCD, entre que límites se encuentra la suma de los diedros del tetraedro.

Resolución:

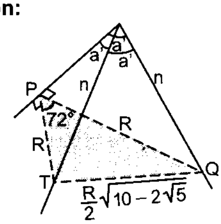


Por teorema:
$180° < \alpha + \beta + \theta < 540°$
$180° < \alpha + \omega + \phi < 540°$
$180° < \phi + \theta + \psi < 540°$
$180° < \beta + \omega + \psi < 540°$

Sumando:
$4(180°) < 2(\alpha + \beta + \theta + \omega + \psi) < 4(540°)$
$360° < \alpha + \beta + \theta + \omega + \psi < 1080°$

22. Sea un triedro equilátero cuyas caras miden 108° cada una. ¿Cuántos mide uno de los ángulos diedros?

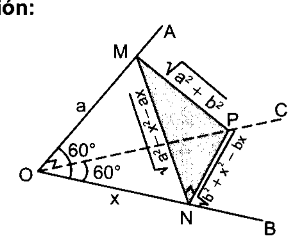
Resolución:



Usando el triedro polar
$a' = 180° - x \Rightarrow \cos a' = \cos(180° - x)$
$\cos a' = -\cos x$
Además: $R = n\,\text{sen}\,a'$
$\triangle TOQ$; por ley de cosenos:
$\frac{R^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 2n^2 - 2n^2\cos a'$
$\frac{(n\,\text{sen}\,a')^2}{4}(10 - 2\sqrt{5}) = 2n^2(1 - \cos a')$
$\text{Sen}^2 a'(5 - \sqrt{5}) = 4(1 - \cos a')$
$(1 - \cos^2 a')(5 - \sqrt{5}) = 4(1 - \cos a')$
$(1 + \cos a')(1 - \cos a')(5 - \sqrt{5}) = 4(1 - \cos a')$

23. Un plano interseca a las aristas de un triedro O-ABC con los puntos M, N y P respectivamente. Tal que: $m\angle MON = m\angle PON = 60°$ y $m\angle MOP = m\angle MNP = 90°$, OM + OP = 8. Hallar ON.

Resolución:

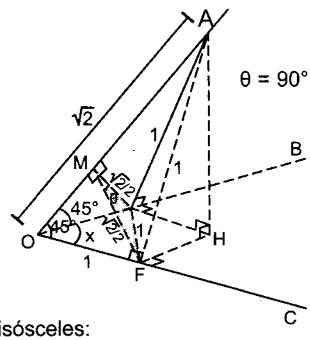


Dato: a + b = 8
$\triangle$MNP; por el teorema de Pitágoras:
$a^2 + b^2 = a^2 + x^2 - ax + b^2 + x^2 - bx$

$x(a + b) = 2x^2 \Rightarrow x = \frac{a+b}{2}$
$\Rightarrow x = \frac{8}{2} \Rightarrow x = 4$
$1 + \cos a' = \frac{4}{5 - \sqrt{5}}$
$\cos a' = \frac{4}{5 - \sqrt{5}} - 1$ $\cos a' = \frac{4 - 5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}}$
$\cos a' = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{\sqrt{5}(\sqrt{5} - 1)}$ $\cos a' = \frac{\sqrt{5}}{5}$
$-\cos x = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\therefore\ x = \arccos\left[-\frac{1}{\sqrt{5}}\right]$

24. En un triedro O - ABC, si el diedro A mide 90° y sus caras b = c = 45. Hallar la medida de la cara.

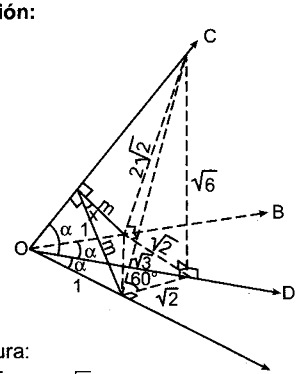
Resolución:



$\triangle$FME, isósceles:
$ME = MF = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow EF = 1$
$\triangle$OEF: equilátero
$\therefore\ x = 60°$

25. En el triedro O-ABC, $\overleftrightarrow{OC}$ determina con la bisectriz $\overleftrightarrow{OD}$ de la cara opuesta, un ángulo de medida igual a la mitad de dicha cara. Si la suma de las medidas de los diedros $\overleftrightarrow{OA}$ y $\overleftrightarrow{OB}$ es 120. Calcular la medida del diedro $\overleftrightarrow{OC}$.

Resolución:



De la figura:
$m = \frac{2\sqrt{2}}{2}; a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$
Por ley de cosenos:
$a^2 = 2\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]^2 - 2\left[\frac{2\sqrt{2}}{3}\right]^2\cos x = \left[\frac{2\sqrt{6}}{3}\right]^2$

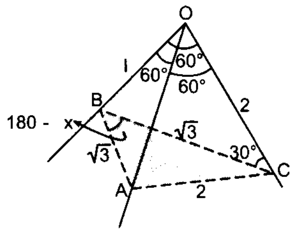
Simplificando: $\cos x = -\frac{1}{2}$

$\therefore\ x = 120°$

26. Se tiene un ángulo triedro, donde cada diedro mide 120°. ¿Cuánto mide una cara del ángulo triedro?

Resolución:

Usando el triedro polar del triedro dado:



Por ley de cosenos:

$4 = 2(3) - 2(3)\cos(180° - x)$

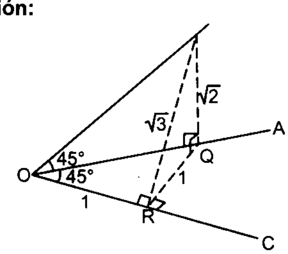
$6\cos(180° - x) = 6 - 4 = 2$

$\cos(180° - x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{3}$

$\therefore\ x = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right)$

27. En un triedro, O-ABC, las caras AOB y AOC miden 45° cada una, si la medida del ángulo diedro $\overleftrightarrow{OA}$ es 90°, hallar la medida del diedro $\overleftrightarrow{OC}$.

Resolución:

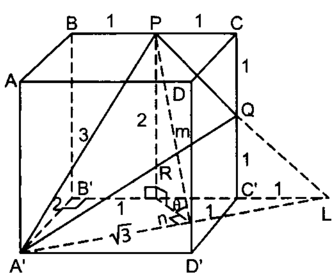


$\triangle PQR$: $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3}\ \therefore\ \theta = \arccos\left[\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$

28. Dado un cubo ABCD - A'B'C'D'. Se ubican los puntos medios de P y Q de $\overline{BC}$ y $\overline{CC'}$. Hallar la medida del ángulo diedro agudo determinado por el plano A'PQ y el plano A'B'C'D'.

Resolución:



$\triangle A'B'L \sim \triangle RHL$

$\Rightarrow \frac{n}{2} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow n = \frac{4}{\sqrt{13}}$

$\triangle RHL$: $HL^2 = 4 - \frac{16}{13} \Rightarrow HL = \frac{6}{\sqrt{13}}$

$\triangle PHL$: $m^2 = (2\sqrt{2})^2 - \frac{36}{13} \Rightarrow m = \frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{13}}$

$\triangle PRH$: $\cos\theta = \dfrac{\frac{4}{\sqrt{13}}}{\frac{2\sqrt{17}}{\sqrt{13}}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{17}}$

$\therefore\ \theta = \arccos\left[\frac{2}{\sqrt{17}}\right]$

29. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

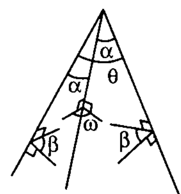
I. En todo triedro a caras congruentes se oponen diedros congruentes.

II. Un triedro equilátero es aquel cuya media de los ángulos de sus caras miden 60° cada uno.

III. En todo triedro la suma de las medidas de los ángulos de sus caras está entre 180° y 540°.

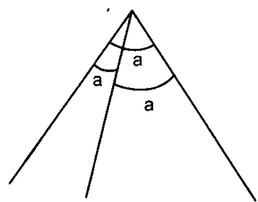
Resolución:

I.



La proposición es verdadera.

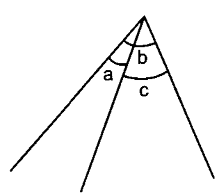
II.



Es un triedro equilátero.

La proporción es falsa.

III.

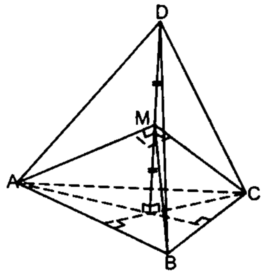


$0° < a + b + c < 360°$

La proposición es falsa.

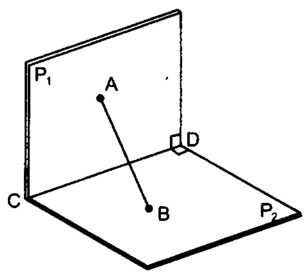
30. En un tetraedro regular ABCD se traza la altura $\overline{DH}$, sea M punto medio de $\overline{DH}$. Hallar la medida del ángulo diedro determinado por los planos AMC y BMC.

Resolución:

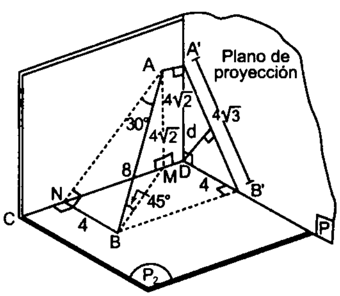


M - ABC es un triedro trirrectángulo.
Luego la medida del ángulo diedro determinado por los planos AMC y BMC es 90°.

31. En la figura P_1 y P_2 son dos planos perpendiculares. $\overline{AB}$ es un segmento tal que $A \in P_1$ y $B \in P_2$; si AB = 8, la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y P_1 es igual a 30°, la medida del ángulo entre $\overline{AB}$ y P_2 es igual a 45°, calcule la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.



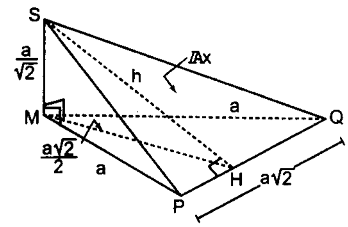
Resolución:



Piden d $(\overline{AB}, \overline{CD})$
Se traza $(\overline{BN} \perp \overline{CD}) \Rightarrow \overline{BN} \perp \square P_1$
Por dato $m\angle BAN = 30° \Rightarrow$ ⊿BAN: BN = 4
Se traza $\overline{AM} \perp \overline{CD} \Rightarrow \overline{AM} = \square P_2$
Por dato: m∢ABM = 45° $\Rightarrow$ ⊿AMB
$AM = 4\sqrt{2}$
Se traza $\square P \perp \overline{CD}$
$\Rightarrow \square P \perp \square P_1 \wedge \square P \perp \square P_2$
Luego
D: Proy. de $\overline{CD}$ sobre $\square P$
A': Proy. A sobre $\square P$
B': Proy. B sobre $\square P \Rightarrow d_{(AB,\,CD)} = d_{(D,\overline{A'B'})} = d$
En el ⊿A'DB': $(4)(4\sqrt{2}) = (4\sqrt{3})\,d \quad \therefore\ d = \dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

32. Sea PMQ un triángulo recto en M y MP = MQ = a. Del vértice M se levanta el segmento $\overline{MS}$ perpendicular al triángulo tal que $MS = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$. Halle el área del triángulo QSP.

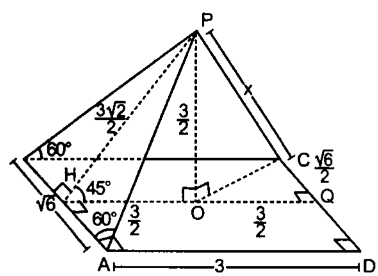
Resolución:



Piden $A_{(TQSP)} = A_x$
Entonces se traza $\overline{MH} = \overline{PQ}$
$\Rightarrow$ Por el teorema de las 3 perpendiculares $\overline{SH} = \overline{PQ}$
Pero ⊿PMQ (isósceles)
$MH = \dfrac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A_x = \dfrac{a\sqrt{2}h}{2}$
Pero ⊿SMH: h = a $\quad \therefore\ A_x = \dfrac{a^2\sqrt{2}}{2}$

33. Se tiene un rectángulo ABCD tal que $AB = \sqrt{6}$ y BC = 3. Se construye el triángulo equilátero PAB que forma un ángulo diedro de 45° con el plano del rectángulo. Halle la distancia entre P y C.

Resolución:

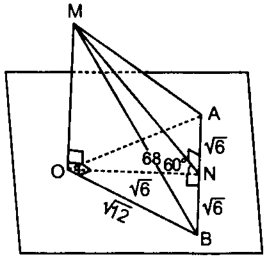


Piden: PC = x
Datos: $AB = \sqrt{6}$, BC = 3
y medida del diedro AB igual a 45°
como $PH = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$
$\Rightarrow OP = OH = \dfrac{3}{2} \wedge OQ = \dfrac{3}{2}$

- ⊿OQC: $OC = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$
- ⊿POC: $x = \sqrt{6}$

34. En un triángulo rectángulo isósceles AOB, recto en O; $AO = BO = \sqrt{12}$ m se levanta OM perpendicular al plano del triángulo. Hallar $\overline{OM}$, si el diedro formado por los triángulos AMB y AOB mide 60°.

Resolución:

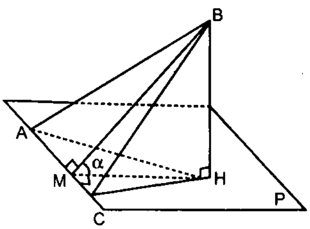


- $AO = OB = \sqrt{12}$
- $AN = NB = ON = \sqrt{6}$
- ⊾MON: (30° y 60°)

$\therefore\ x = \sqrt{6}(\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}$ m

35. La proyección de un triángulo sobre un plano es un triángulo cuya área es la mitad del área de la región triangular dada. Hallar la medida del diedro que forma el triángulo con el plano de proyección.

Resolución:

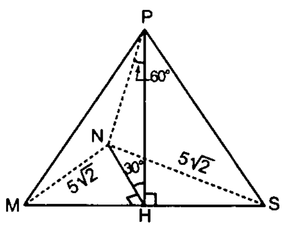


- $A\triangle AHC = \frac{1}{2} A\triangle AHC$
- $\frac{AC(HM)}{2} = \frac{1}{2}\frac{(AC)(BM)}{2}$
- $HM = \frac{BM}{2}$
- ⊾MHB = 30° y 60°

$\therefore\ \alpha = 60°$

36. En un triángulo rectángulo isósceles MNS recto en N, $MN = 5\sqrt{2}$ m, por N se levanta NP perpendicular al plano del triángulo. Si el diedro MS mide 30°, hallar el área del triángulo MPS.

Resolución:

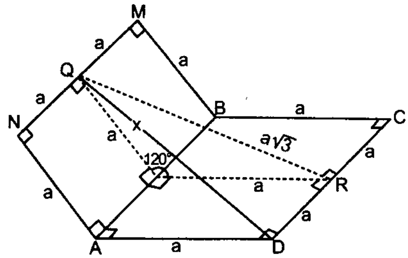


- ⊾MNS: $MS = 5\sqrt{2}(\sqrt{2}) = 10$
- $MH = HS = NH = 5$
- ⊾PNH: (30° y 60°) $\Rightarrow PH = 5\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}}$

$\therefore\ A\triangle MPS = \frac{1}{2}(10)\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{50\sqrt{3}}{3}$ m^2

37. Las regiones rectangulares ABCD y ABMN determinan un diedro que mide 120. Si $2BM = AB = 2BC = 2a$. Halle la distancia de D al punto medio de $\overline{MN}$.

Resolución:

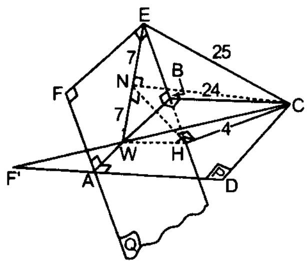


- ΔQER isósceles: $QE = ER = a\ \wedge$ $m\angle QER = 120° \Rightarrow QR = a\sqrt{3}$
- ⊾QRD: $x^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$

$\therefore\ x = 2a$

38. ABCD y ABEF son regiones rectangulares contenidos en los planos P y Q respectivamente, F' es un punto en la prolongación de $\overline{DA}$ tal que $\overline{F'C} \cap \overline{AB} = \{W\}$, WC = EC = 25, EW = 14, si la distancia de C al plano Q es 4 u, halle la medida del ángulo diedro determinado por el plano Q y el plano que contiene a F'CE.

Resolución:



- $\overline{CH} \perp Q \Rightarrow \overline{CH} = \overline{NH}$

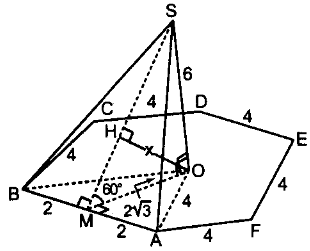
Luego, θ es la medida del ángulo diedro pedido.

- ⊾CHN: $\text{sen}\theta = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$

$\therefore\ \theta = \text{arcsen}\frac{1}{6}$

39. Dado un hexágono regular ABCDEF de y de centro el punto O y AB = 4. Se traza $\overline{OS}$ perpendicular al plano del hexágono, de modo que el diedro S-$\overline{AB}$-O mide 60°. Halle la distancia del punto O al plano ABS.

Resolución:

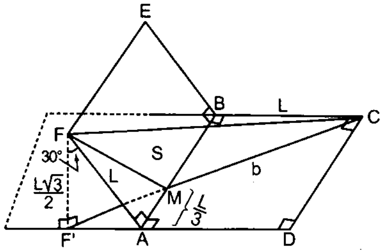


$\triangle$SOM: $MO = 2\sqrt{3} \Rightarrow SO = 6$

Luego: $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{36} \quad \therefore\ x = 3$

40. Se tienen dos regiones cuadradas ABCD y ABEF formando un ángulo diedro que mide 120°. La proyección de F sobre el plano ABCD es F'. Halle el área de la región triangular obtenida al intersecar el ángulo diedro con la región triangular FF'C, si AB = L.

Resolución:



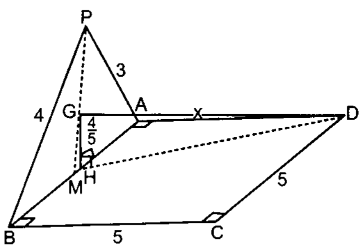
$\triangle$MBC: $b^2 = \left(\dfrac{2L}{3}\right)^2 + L^2 + L^2$

$b = \dfrac{L}{3}\sqrt{13}$

Luego: $S = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3}\sqrt{13}\right)\left(\dfrac{L\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore\ S = \dfrac{\sqrt{39}}{12}L^2$

41. Un cuadrado ABCD y un triángulo rectángulo APB están contenidos en dos planos perpendiculares. Halle la distancia entre el vértice D y el baricentro del triángulo APB; si se sabe que: AP = 3 y BP = 4.

Resolución:



- $\triangle$APB: $AH = \dfrac{34}{15}$
- $\triangle$HAD: $(HD)^2 = \left(\dfrac{34}{15}\right)^2 + 5^2 \quad ...(1)$
- $\triangle$GHD: $x^2 = \left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + (HD)^2 \quad ...(2)$

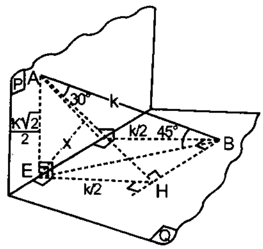
(1) en (2):

$x^2 = \dfrac{16}{25} + \dfrac{34^2}{15^2} + 25$

Por lo tanto simplificando: $x = \dfrac{\sqrt{277}}{3}$

42. Dados 2 planos P y Q perpendiculares entre sí, una recta interseca a los planos P y Q en los puntos A y B respectivamente. Si AB = K, m∠(AB, P) = 30°, m∠(AB, Q) = 45°. Halle la distancia entre AB y la recta de intersección de los planos.

Resolución:

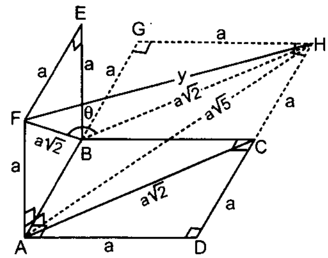


$\triangle$AEH; por R. métricas

$\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2}{k^2} + \dfrac{4}{k^2} \quad \therefore\ x = \dfrac{k\sqrt{6}}{6}$

43. Dos regiones cuadradas están contenidos en planos perpendiculares: ABCD y ABEF. Halle la medida del ángulo que determinan las rectas $\overleftrightarrow{AC}$ y $\overleftrightarrow{BF}$.

Resolución:



Se traza por B; $\overline{BH} \parallel \overline{AC}$

$\Rightarrow$ θ es la medida del ángulo pedido.

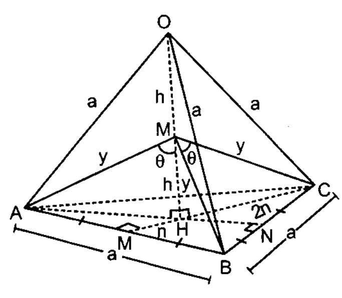
- $\triangle$FBH; por ley de cosenos
  $y^2 = 2a^2 + 2a^2 - 2(a\sqrt{2})^2\cos\theta \quad ...(1)$
- $\triangle$FAH: $y^2 = a^2 + 5a^2 = 6a^2 \quad ...(2)$

(2) en (1): $6a^2 = 4a^2 - 4a^2\cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{1}{2} \quad \therefore\ \theta = 120°$

44. Demostrar que en todo tetraedro regular, al unir el punto medio de una de sus alturas con los vértices de la cara opuesta al vértice de donde se traza la altura, se determina un triedro trirectángulo.

Resolución:



$2h = \dfrac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow h = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

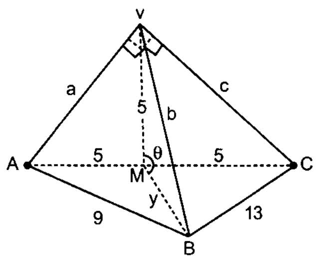
Pero: $y = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

$\triangle BMC$: $\theta = 90°$

Esto demuestra que el triedro M-ABC es un triedro trirrectángulo.

45. Se tiene el triedro V-ABC trirrectángulo, se toma M punto medio de $\overline{AC}$. Si AB = 9, BC = 13 y AC = 10, halle la m∠VMB.

Resolución:



$\triangle ABC$; por teorema de la mediana

$9^2 + 13^2 = 2y^2 + \dfrac{10^2}{2}$

$\Rightarrow y = 10$

⊾AVB: $a^2 + b^2 = 81$

⊾AVC: $a^2 + c^2 = 100$

⊾BVC: $b^2 + c^2 = 169$

Sumando: $2(a^2 + b^2 + c^2) = 350$

$\underbrace{a^2 + b^2}_{81} + c^2 = 175°$

$81 + c^2 = 175 \Rightarrow c^2 = 94$

También: $a^2 = 6$ y $b^2 = 75$

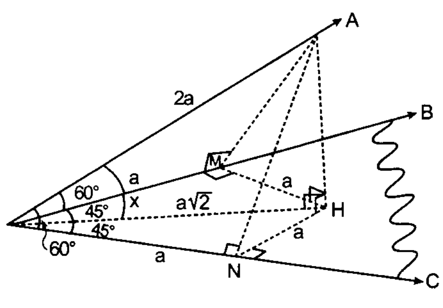
$\triangle VMB$; por ley de cosenos:

$75 = 25 + 100 - 2(5)(10)\cos\theta$

De donde: $\cos\theta = \dfrac{1}{2} \quad \therefore \theta = 60°$

46. En un triedro O-ABC, m∠BOC = 90°, m∠AOB = m∠AOC = 60°. Halle la medida del ángulo que forma la recta $\overleftrightarrow{OA}$ con el plano OBC.

Resolución:



- ⊾OMP y ⊾ONP notables (30° y 60°)
- ⊾OMH ≅ ⊾ONH

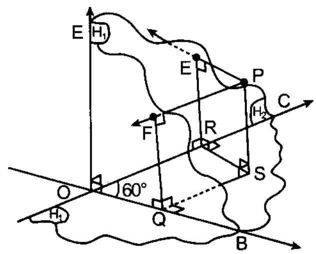
$\Rightarrow OM = MH = ON = NH = a;\ OH = a\sqrt{2}$

- ⊾PHO: $\cos\theta = \dfrac{a\sqrt{2}}{2a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore \theta = 45°$

47. Se tiene un ángulo triedro O-ABC tal que c = b = 90° y a = 60°. Halle la suma de las medidas de los ángulos diedros OC y OB.

Resolución:

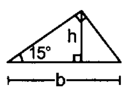


- $\overleftrightarrow{AO} \perp H;\ H_1 \perp H;\ H_2 \perp H \Rightarrow \overline{FQ} \perp \overline{QS}$ y $\overline{ER} \perp RS$

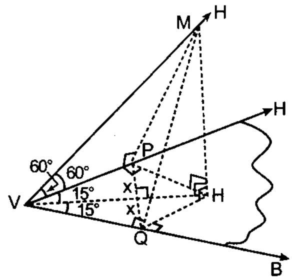
Por lo tanto la suma de las medidas de los ángulos diedros $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$ es: 180°

48. Se traza un plano secante a un ángulo triedro V-ABC cuyas medidas de sus caras son 60°, 60° y 30°, a VA, VB, VC en M, Q y P respectivamente, de manera que MP = MQ, la proyección de $\overline{VM}$ sobre la cara que mide 30 es VH y mide 8, los planos que contiene a MPH y MQH son perpendiculares a $\overrightarrow{VC}$ y $\overrightarrow{VB}$ respectivamente, halle PQ.

Resolución:



$\Rightarrow h = \dfrac{b}{4}$



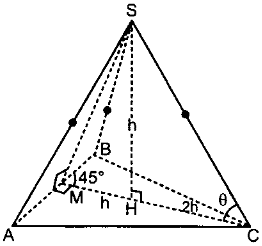
⊾VPH: m∠PVH = 15° ∧ VH = 8

$\Rightarrow x = \dfrac{8}{4} \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ PQ = 4

49. Un plano secante a las aristas de un triedro equilátero de vértice S determina en sus aristas los puntos A, B y C tal que SA = SB = SC. Si los planos SAB y ABC forman un ángulo diedro que mide 45°. Halle la medida del ángulo que forma la recta $\overleftrightarrow{SC}$ y el plano ABC.

Resolución:



$\triangle$SHM isósceles: SH = MN = h

H: baricentro del $\triangle$ABC equilátero

$\Rightarrow$ HC = 2 h

$\triangle$SHC: $\tan\theta = \dfrac{h}{2h}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ \theta = \arctan\left(\dfrac{1}{2}\right)$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2010 - I)

Sobre un rectángulo ABCD, desde un punto exterior P, se traza el segmento PB perpendicular al plano ABC, M y N son los puntos medios de los segmentos AD y DC, respectivamente.

Si AB = PB, BC = 4 y AB = 2, entonces la medida del diedro P-MN-N es:

A) $\arctan\sqrt{5}$ B) $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ C) $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

D) $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{4}$ E) $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Resolución:

Nos piden: medida del diedro P-MN-B

Datos: $\overline{PB} \perp \square$ABCD

M y N: puntos medios

Haciendo uso del teorema de las tres perpendiculares podemos indicar en R, como la medida del ángulo diedro.

Del gráfico: $\tan\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \dfrac{53°}{2}$

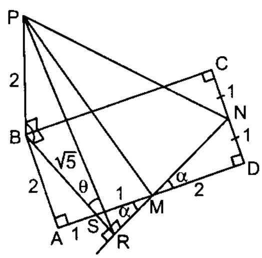
En el $\triangle$BAS: $\tan\alpha = \dfrac{AS}{2}$

$\tan\alpha = \dfrac{AS}{2}$

$\tan\dfrac{53°}{2} = \dfrac{AS}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{AS}{2}$

$\Rightarrow$ AS = 1 y BS = $\sqrt{5}$



En el $\triangle$SRM:

MS = 1 y SR = $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

Luego: BR = BS + SR = $\sqrt{5} + \dfrac{\sqrt{5}}{5} = \dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

$\tan\theta = \dfrac{2}{BR} = \dfrac{2}{\left(\dfrac{6\sqrt{5}}{5}\right)}$

$\Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \quad \therefore\ \theta = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)$

Clave: C

PROBLEMA 2 (UNI 2010 - II)

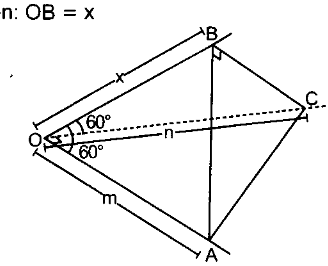
Un plano interseca a las aristas de un triedro con vértice O en los puntos A, B y C de modo que:
m$\angle$AOB = m$\angle$COB = 60° y m$\angle$AOC = m$\angle$ABC = 90°

Halle OB (en metros), si OA + OC = 10 m

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Resolución:

Nos piden: OB = x



Dato: m + n = 10

Por teorema de cosenos en el $\triangle$OAB:

$AB^2 = m^2 + x^2 - 2(m)(x)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

En el $\triangle$OBC: $BC^2 = n^2 + x^2 - 2(n)(x)\left(\dfrac{1}{2}\right)$

En el $\triangle$AOC por Pitágoras:

$m^2 + x^2 - mx + n^2 + x^2 - nx = m^2 + n^2$

De donde: $2x = m + n \quad \therefore\ x = 5$ m

Clave: C

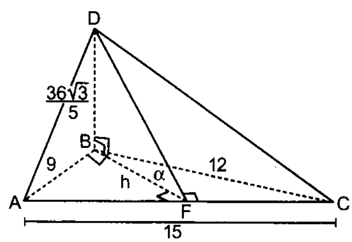
PROBLEMA 3 (UNI 2011 - I)

Por el vértice B de un triángulo rectángulo ABC (recto en B). Se traza $\overline{BD}$ perpendicular al plano ABC, el punto D se une con las vértices A y C. Si AB = 9, BC = 12 y BD = $\dfrac{36\sqrt{3}}{5}$, entonces la medida del diedro AC (en grados sexagesimales) es:

A) 37° B) 45° C) 53° D) 54° E) 60°

Resolución:

Graficando:



En el ⊿ABC, por RM: $15h = 9(12) \Rightarrow h = \frac{36}{5}$

En el ⊿DBF: Ángulos notables (30° y 60°)

$\therefore\ \alpha = 60°$

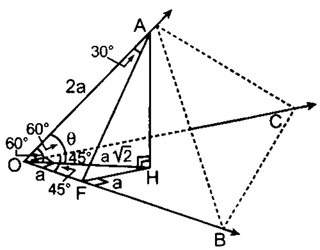
Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - I)

En un triedro O-ABC, las caras $\angle BOC$, $\angle AOB$ y $\angle AOC$ miden 90°, 60° y 60° respectivamente. Entonces la tangente del ángulo que determina OA con el plano OBC es:

A) 1/3 B) 1/2 C) 1
D) 2 E) 3

Resolución:



Piden: $\tan\theta$

$\overline{AH} \perp$ ▱OBC

Teorema de las tres perpendiculares

1.ª $\perp \overline{AH}$, 2.ª $\perp \overline{FH}$, 3.ª $\perp \overline{AF}$

⊿AHO Ángulos notables (45° y 45°)

$\theta = 45° \quad \therefore\ \tan\theta = 1$

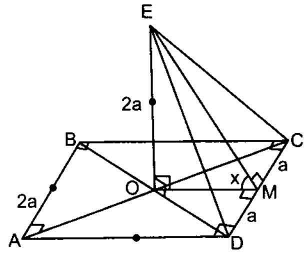
Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

ABCD es un cuadrado y desde su centro O se traza un segmento $\overline{OE}$ perpendicular al plano ABC, si OE = AB entonces la medida del diedro E-DC-B es:

A) $\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $\arctan(1)$ C) $\arctan\left(\frac{3}{2}\right)$
D) $\arctan(2)$ E) $\arctan\left(\frac{5}{2}\right)$

Piden: x



En el ⊿EOM: $\tan x = \frac{2a}{a} = 2$

$\therefore\ x = \arctan(2)$

Clave: D

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea el ángulo triedro A-BCD, AD = AB = AC, el diedro $\overline{AB}$ mide 90°, las caras DAC Y BAC, miden 90° y la cara DAB mide 60°. Calcular la medida del diedro $\overline{BC}$.

   A) $\arctan\sqrt{2}$ B) $\arctan\sqrt{3}$ C) $\arctan\sqrt{5}$
   D) $\arctan\sqrt{6}$ E) $2\arctan\sqrt{6}$

2. Las caras de un ángulo triedro miden 45°; 45° y 60°, respectivamente, por su vértice se traza un rayo perpendicular a una de las caras cuyo ángulo plano mide 45°. Calcular la medida del ángulo formado por el rayo y la arista opuesta a la cara mencionada.

   A) 15° B) 30° C) 45°
   D) 37° E) 22,5°

3. En un triedro trirrectángulo O-ABC, se ubica el incentro I del triángulo AOC, luego se trazan $\overline{IL}$ perpendicular a la región AOC, respectivamente (L se encuentra en la región triangular ABC). Si: BO = $12\sqrt{2}$ cm, BC = $12\sqrt{2}$ cm y AB = 20 cm, calcular el área de la región triangular LOC.

   A) $7\sqrt{41}$ cm^2 B) $6\sqrt{41}$ cm^2 C) $7\sqrt{39}$ cm^2
   D) $6\sqrt{39}$ cm^2 E) $6\sqrt{43}$ cm^2

4. El plano de una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$, es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. En la semicircunferencia se ubica el punto F, de modo que m$\overset{\frown}{FB}$ = 60°. Calcular la medida del ángulo diedro formado por los planos AFC y ABCD.

   A) $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$ B) $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$ C) $\arctan\sqrt{3}$
   D) $\arctan\frac{\sqrt{2}}{3}$ E) $\arctan\frac{\sqrt{6}}{3}$

5. Se tiene un triángulo equilátero ABC de lado cuya longitud es 24 m. Por el vértice B se levanta la perpendicular $\overline{BE}$ al plano del triángulo y luego se une E con A y C, de modo que al diedro $\overline{AC}$ mide 30°. Calcular la distancia del vértice B al plano AEC.

   A) 12 m B) $12\sqrt{3}$ m C) 3 m
   D) $6\sqrt{3}$ m E) $4\sqrt{3}$ m

6. En un triángulo rectángulo, recto en B, se traza la altura $\overline{BH}$, luego se traza $\overline{AP}$ perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC de modo que la m∠APH = m∠PCA. Calcular la medida del diedro $\overline{BC}$.

   A) 37° B) 53° C) 53°/2
   D) 45° E) 30°

7. En una circunferencia, de centro O, se trazan las cuerdas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ las cuales se intersecan perpendicularmente en M y por O se traza $\overline{OP}$ perpendicular al plano que contiene a la circunferencia de modo que: $\frac{MD}{5} = \frac{MC}{4} = \frac{OP}{3} = \frac{AM}{2}$
   Calcular la medida del diedro determinado por la región triangular CPD, y el plano que contiene a la circunferencia.

   A) 53° B) 45° C) 37°
   D) 37°/2 E) 53°/2

8. En un triedro trirrectángulo O-ABC: OA = 20; OC = 15 y OB = 16. ¿Cuánto dista el baricentro de la región AOC del plano que contiene al △ABC?

   A) 2,4 B) 2,6 C) 2,8
   D) 3,2 E) 3,4

9. Dos diedros de un triedro miden 135° y la cara comprendida mide 90°. Calcular la medida del tercer diedro.

   A) 90° B) 45° C) 120°
   D) 135° E) 100°

10. Sea el triedro O-ABC; en $\overline{OC}$ se ubica el punto P de modo que PO = 10 y la distancia de P al plano determinado por OA y $\overline{OB}$ es de $5\sqrt{2}$. Calcular m∠AOC, si m∠AOB = 53° y m∠COB = 60°.

    A) $\arctan\left(\frac{\sqrt{51}}{7}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{\sqrt{37}}{5}\right)$ C) 53°
    D) 45° E) 30°

11. En las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

    I. Un ángulo diedro es la reunión de dos semiplanos que tienen una recta común llamada arista.
    II. La medida de un ángulo diedro es un número real y positivo además es la misma de su ángulo rectilíneo.
    III. Planos perpendiculares son aquellos que se intersecan formando diedros adyacentes suplementarios.

    A) FFF B) VVV C) FVV
    D) FVF E) VFV

12. En un triedro O-ABC, si a = 53°, b = 37° y c = 60°, calcular la medida del diedro $\overline{OA}$.

    A) $\arccos\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$
    C) $\arccos\left(\frac{3}{8}\sqrt{3}\right)$ D) $\arcsen\left(\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$
    E) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)$

13. Los rectángulos congruentes ABCD y ABC'D' forman un diedro de 60°. Si BC = 2(AB), calcular la medida del ángulo que forman las rectas $\overline{AC'}$ y $\overline{BD}$.

A) $\arccos\frac{3}{7}$ B) $\arccos\frac{1}{3}$ C) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$
D) $\arccos\left(\frac{1}{5}\right)$ E) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$

14. En las siguientes proposiciones, indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponde:

I. En todo triedro la suma de las medidas de los ángulos diedros es mayor que 180° pero menor que 540°.
II. En todo triedro la suma de las medidas de dos diedros es menor al tercero aumentado en 180.
II. Dos triedros son congruentes si tienen sus tres diedros, respectivamente, congruentes.

A) FVV B) FFV C) VFF
D) VVV E) VFV

15. Las medidas de los ángulos diedros de un triedro están en progresión aritmética de razón r. ¿Entre qué valores está la medida del ángulo diedro intermedio?

A) ⟨60°; 180°⟩ B) ⟨60°; 180 − r⟩
C) ⟨60°; 180 − 2r⟩ D) ⟨60°; 120 − r⟩
E) ⟨60°; 120°⟩

16. Se llama recta de máxima pendiente:

A) Con respecto a un plano Q aquella recta perpendicular a este plano.
B) De un plano P con respecto a otro Q al cual interseca a la recta perpendicular a la intersección de ambos.
C) Con respecto a un plano Q si es paralela al plano.
D) Aquella recta que pertenece a un plano P y forma con un plano horizontal un ángulo de 45°.
E) De un plano P con respecto a un plano horizontal a la recta contenida en P y es perpendicular a la intersección de ambos planos.

17. Se tiene el ángulo triedro O-ABC donde dos de sus caras tienen por medidas a 53° y la cara BOC a 60°, en la arista $\overline{OA}$ se ubica el punto P y se traza $\overline{PQ}$ perpendicular a la cara opuesta (Q ∈ a dicha cara), luego $\overline{QH} \perp \overline{QP}$ y se pide calcular QH, si se sabe que PQ = $\sqrt{13}$

A) $\frac{2\sqrt{39}}{5}$ B) $\frac{2\sqrt{13}}{5}$ C) $\frac{\sqrt{13}}{4}$
D) $\frac{\sqrt{39}}{3}$ E) $\frac{2\sqrt{39}}{7}$

18. Se tiene los rectángulos ABCD y ADEF que forman un diedro de 120°, además AB = AF = 8 m. Calcular la distancia entre $\overline{AD}$ y $\overline{BE}$.

A) $2\sqrt{3}$ B) 4 C) $4\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{3}/3$ E) 3

19. Por el vértice A de un triángulo equilátero de lado 6 m, se levanta AH perpendicular al plano del triángulo, luego se une H con B y C. Calcular la distancia de A al plano HBC, si el diedro H - BC - A mide 60°.

A) $2\sqrt{3}$ m B) $3\sqrt{2}$ m C) 4,5 m
D) 3,5 m E) 5,4 m

20. Si ABCD y AEB los vértices de un cuadrado y de un triángulo equilátero que se encuentran formando un diedro recto, calcular la longitud del segmento que une los centros de gravedad de las dos figuras, siendo la longitud del lado del cuadrado igual a $\sqrt{3}$ m.

A) 1 m B) 2 m C) 0,5 m D) 1,5 m E) 3 m

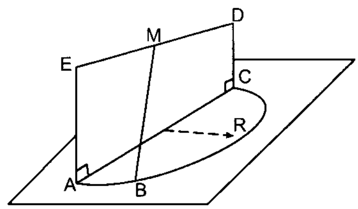
21. Se tiene una región cuadrada ABCD, en $\overline{AB}$ se ubica el punto P de modo que AP = 6(PB). Si dicha región gira 60° respecto a $\overline{CD}$ hasta la posición de la región A'B'CD, calcular la m∠PBA'.

A) $\arcos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ B) 53° C) $\arcos\left(\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$
D) 37° E) 30°

22. Se tiene un rectángulo ABCD, en $\overline{AC}$ se ubica el punto M, luego se traza $\overline{MP}$ perpendicular al plano del rectángulo, de modo que los diedros que forman la región ABCD con las regiones APD y DPC son complementarios. Si el producto de distancias de M a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ es 18, calcular MP.

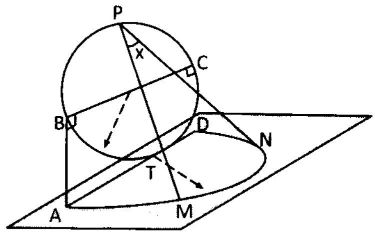
A) $\sqrt{6}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 2
D) $3\sqrt{2}$ E) 3

23. Si el trapecio ACDE está en un plano perpendicular al plano de la semicircunferencia, EM = MD, AE + CD = 16; R = 12 y m$\overset{\frown}{AB}$ = 30°, calcular la distancia entre $\overline{AC}$ y $\overline{MB}$.



A) $2\sqrt{3}$ B) 3,6 C) 4,8
D) $2\sqrt{2}$ E) 2,4

24. El círculo y el semicírculo están ubicados en planos perpendiculares, además T es punto de tangencia y m$\overset{\frown}{MN}$ = m$\overset{\frown}{BP}$ = 90°. Calcular x.



A) 37° B) 53° C) $\arcos\left(\frac{\sqrt{5}}{4}\right)$
D) 45° E) $\arcos\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$

25. Un poliedro convexo está limitado por regiones triangulares, cuadrangulares y 3 regiones hexagonales. Si el número de caras y vértices es 13 y 16, respectivamente, calcular el número de regiones triangulares que limitan a este poliedro.

A) 2 B) 5 C) 4
D) 3 E) 6

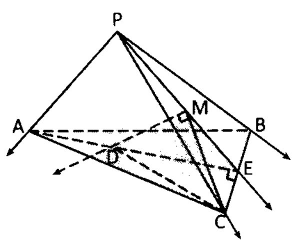
26. En un triedro equilátero A-BCD se ubican los puntos M y N en $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$, respectivamente. Si m∠ANM = 90°, m∠NMD = 45° y m∠MAD = 60°, calcular la medida del ángulo diedro determinado por las regiones triangulares AMD y MND.

A) $\arcsen\left(\frac{2}{3}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$ C) $\arcsen\left(\frac{1}{3}\right)$
D) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$ E) $\arcsen\left(\frac{3}{4}\right)$

27. Si las medidas de las caras de un triedro son α, 80° y 120°. Entonces se puede afirmar que

A) $20° < \alpha < 200°$ B) $40° < \alpha < 200°$
C) $40° < \alpha < 160°$ D) $20° < \alpha < 160°$
E) $60° < \alpha < 120°$

28. En el gráfico, el triedro P-ABC es un trirrectángulo. Calcular la medida del diedro $\overleftrightarrow{MC}$ en el triedro M-CDE.



A) 45° B) 135° C) 90°
D) 75° E) 60°

29. Un rectángulo ABCD y un triángulo equilátero ABP se ubican en planos distintos; además, AP = $2\sqrt{3}$ y el área de la región rectangular ABCD es $10\sqrt{3}$. Si PD = $2\sqrt{13}$, calcular la medida del ángulo diedro entre los planos que contienen al triángulo y al rectángulo.

A) 120° B) 100° C) 150°
D) 135° E) 127°

30. La recta $\overleftrightarrow{L}$ interseca a los planos P y Q en los puntos M y N, respectivamente. Se traza $\overline{MM'}$ y $\overline{NN'}$ perpendiculares a los planos Q y P, respectivamente, además m∠NMN' = 30°, m∠NMM' = 45° y MN = $2\sqrt{2}$. Si M'N' = $\sqrt{3}$, calcular m∠N'MM'.

A) $\arcos\left(\frac{7\sqrt{6}}{24}\right)$ B) $\arcos\left(\frac{2\sqrt{6}}{13}\right)$
C) $\arcos\left(\frac{2\sqrt{5}}{23}\right)$ D) $\arcos\left(\frac{\sqrt{6}}{24}\right)$
E) $\arcos\left(\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$

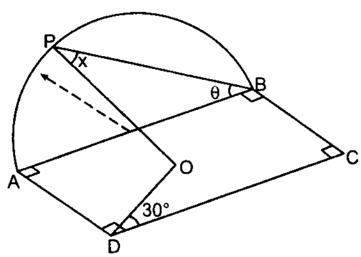
31. En un triángulo ABC, recto en B, la m∠BAC = 53°, por B se traza la perpendicular $\overline{BP}$ al plano que contiene al triángulo y $\overline{BP}$ = $12\sqrt{3}$. Calcular la medida del diedro que determina los planos ABC y APC si el área de la región ABC es 150.

A) 75° B) 30° C) 37°
D) 45° E) 60°

32. Perpendicular al plano del hexágono regular ABCDEF, se construye el triángulo equilátero CDP. Calcular la medida del diedro que determina el plano del hexágono y el triángulo APF.

A) 14° B) 15° C) 53°/2
D) 37°/2 E) 30°

33. En el gráfico, la semicircunferencia y el rectángulo ABCD se ubican en planos perpendiculares. Si el ángulo que forma $\overline{PO}$ con el plano de la semicircunferencia mide θ, calcular x. Considere O como centro del rectángulo.



A) 30° B) 60° C) 45°
D) $\arcos\left(\frac{3}{4}\right)$ E) 37°

34. En un triángulo ABC, AB = 32, BC = 24, AC = 28. Se traza la bisectriz interior BL, en el triángulo CLB se traza la altura LH, y por L se traza $\overline{PL}$ perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC.

Si PL = $3\sqrt{15}$, calcular las medidas del diedro entre los planos PCB y ABC.

A) 37° B) 40° C) 60°
D) 30° E) 45°

35. ¿Cuántos tipos de ángulos poliedros pueden tener todas sus caras que midan 60°?

A) 3 B) 1 C) 7 D) 5 E) 4

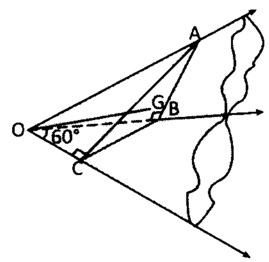
36. En un triedro O-ABC se ubica en $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OA}$ los puntos P, R y Q, respectivamente, de modo que $\overline{PQ}$ y $\overline{RQ}$ son perpendiculares a $\overline{OA}$. Si $A_{\Delta RQP} = 21$ y $A_{\Delta ORP} = 35$, calcular la medida del ángulo entre $\overline{OA}$ y la cara OPR.

A) 45° B) 53°
C) arcsen(4/7) D) arcsen(3/4)
E) 37°

37. En un triedro, dos de sus caras miden 45°, y la medida del diedro comprendido entre dichas caras es 90°. Calcular la medida de la otra cara.

A) 120° B) 45° C) 60°
D) 90° E) 30°

38. En el gráfico se muestra un triedro equilátero. Calcular OG si G es baricentro de la región triangular ABC y AO = 12.



A) 4 B) $\sqrt{10}$ C) $2\sqrt{11}$
D) $6\sqrt{2}$ E) $4\sqrt{11}$

39. En un triedro O-ABC se ubican en $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ los puntos P, Q y R, respectivamente, de modo que $\overline{PR} \perp \overline{OC}$ y $\overline{PQ} \perp \overline{OB}$. Los diedros $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden 143° y 30°, respectivamente, PR = 6, y la cara BOC mide 30°, calcular QR.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{7}$ C) $\sqrt{5}$
D) $4\sqrt{2}$ E) 4

40. En un triedro OABC se ubican en $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ los puntos M, N y P, respectivamente; además, m∠AOB = 30°, m∠AOC = 60° y el diedro en $\overline{OB}$ mide 45°. Si OM = $2\sqrt{2}$, calcular NP. Considere $\overline{MP}$ y $\overline{MN}$ perpendiculares a $\overline{OC}$ y $\overline{OB}$, respectivamente.

A) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{15}+1)}{\sqrt{7}}$ B) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+5)}{\sqrt{7}}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{15}+1)}{\sqrt{7}}$
D) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{7}}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{7}}$

41. Calcular el número de aristas de un poliedro cuyo número de caras es igual al número de vértices, además, la suma de las medidas de los ángulos interiores de sus caras es 2520°.

A) 10 B) 16 C) 12 D) 18 E) 20

42. Un poliedro están formado por 4 regiones triangulares, 4 cuadrangulares y 5 hexagonales. Calcular la suma de medidas de los ángulos interiores de sus caras.

A) 7320° B) 4040° C) 2360°
D) 5040° E) 5760°

43. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es falsa?

A) Dos planos perpendiculares a una misma recta son paralelos entre sí.
B) Si una recta es paralela a una recta contenida en un plano, es paralela al plano.
C) Si una recta es perpendicular a una recta contenida en un plano, todo plano que pase por la primera es perpendicular al plano que contiene a la segunda.
D) Si dos planos son perpendiculares toda recta perpendicular a uno de ellos es paralela al otro.
E) Dos rectas perpendiculares a un mismo plano son paralelas entre sí.

44. Calcular el máximo número de planos que determinan 8 rectas paralelas y 6 puntos en el espacio.

A) 48 B) 72 C) 84
D) 96 E) 106

45. Si un plano es paralelo a una recta:

A) Toda perpendicular a la recta será paralela al plano.
B) Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.
C) Todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada.
D) Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

46. Dados los planos secantes P y Q, en P está contenido el triángulo ABC y en Q su proyección, el triángulo $A_1B_1C_1$.
Si $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$, m∠ACB = 90°, m∠BAC = 30° y m∠$A_1B_1C_1$ = 45°, calcular el coseno del ángulo diedro formado por los planos secantes P y Q.

A) $\sqrt{3}/2$ B) $\sqrt{2}/2$ C) $\sqrt{3}/3$
D) $\sqrt{6}$ E) 1/2

47. Las caras de un ángulo diedro son cortadas en los puntos M y N por una recta, siendo A la proyección ortogonal de estos puntos sobre la arista, la mitad del ángulo diedro es igual a la semidiferencia de los ángulos $\angle$ANM, $\angle$AMN; y si estos últimos están en la relación de 3 a 1. ¿Cuál es el valor del ángulo diedro?

A) 30° B) 40° C) 50° D) 60° E) 70°

48. En el plano P, se tiene el triángulo ABC, cuyo ángulo A mide 60°. Se tiene un punto S fuera del plano P. Si las distancias, de S al punto A es igual a 25 cm, de S al lado $\overline{AC}$ igual a 20 cm, y de S al lado $\overline{AB}$ igual a 7 cm. Hallar la distancia de S al plano P.

A) $\sqrt{37}$ cm B) $\sqrt{39}$ cm C) $\sqrt{38}$ cm
D) 6 cm E) $\sqrt{31}$ cm

49. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es verdadera?

A) Si dos rectas son paralelas a un plano son siempre paralelas entre sí.
B) Todo plano determinado por dos paralelas a otro plano, es siempre paralelo al segundo.
C) Por una recta oblicua a un plano, se pueden trazar infinito número de planos perpendiculares al primero.
D) Toda recta paralela a uno de dos planos que se cortan, perpendicularmente, es siempre perpendicular al otro.
E) Todo plano perpendicular a una recta situada en un plano es perpendicular al plano.

50. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es verdadera?

A) Todos los planos paralelos a un plano dado son paralelos entre sí.
B) Todos los planos paralelos a una recta, son paralelos entre sí.
C) Si un plano corta a una de tres rectas paralelas, también corta a las otras dos.
D) Si una recta es paralela a un plano la paralela trazada a dicha recta por un punto de plano, está contenida en el plano.
E) Por cualquier punto exterior a un plano, sólo puede trazarse un plano paralelo al primero.

51. ¿Cuál de las afirmaciones es falsa?

A) Por un punto cualquiera del espacio, se puede trazar una recta que corte a otras dos rectas que no son paralelas y no se cortan.
B) Por un punto cualquiera del espacio, se puede trazar un plano perpendicular a otro plano y paralelo a una recta.
C) Por un punto cualquiera del espacio, se puede trazar un plano perpendicular a dos planos dados.
D) Por una recta cualquiera del espacio, se puede trazar un plano perpendicular a otra recta dada.
E) Por una recta cualquiera del espacio, se puede trazar un plano perpendicular a otro plano dado.

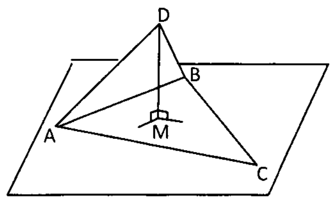
52. Hallar el lugar geométrico de los pies de las perpendiculares bajadas desde un punto dado del espacio, a las rectas que se encuentran en un plano dado y que se cruzan en un punto.

A) Es un triángulo equilátero.
B) Es un círculo.
C) Es una circunferencia.
D) Es un cuadrado.
E) Es una elipse.

53. Se tienen los segmentos alabeados $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ ortogonales: AB = 4 y CD = 6. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de AC y BD.

A) 3 B) 4 C) $\sqrt{13}$
D) $\sqrt{11}$ E) $\sqrt{15}$

54. En el gráfico, ABC es un triángulo equilátero de ortocentro M, $\overline{MD}$ perpendicular al plano del triángulo. Calcular la medida del diedro formado por ABC y ABD.
(MD = $\sqrt{27}$, AC = 6).



A) 90° B) 45° C) 30°
D) 60° E) arctan3

55. Dado un triángulo rectángulo AOB, siendo OA = OB = 2a; en O, se levanta una perpendicular al plano AOB, sobre la que se forma M, OM = $a\sqrt{6}$ y luego se une M con los puntos A y B.
Calcular la medida del diedro AB.

A) 30° B) 75° C) 60°
D) 48° E) 45°

56. Los planos que contienen a los rectángulos ABCD y BCEF forman un ángulo diedro recto, tal que: BC = 8 y BF = 6, hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{FD}$ y $\overline{AB}$.

A) 4 B) 4,5 C) 5 D) 5,5 E) 6

57. Sea ABC triángulo equilátero se levanta $\overline{CF}$ perpendicular al plano del triángulo ABC de modo que

$\overline{CF} \cong \overline{BA}$. Calcular la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFB.

A) 30°
B) $\text{arcsen}\frac{2\sqrt{7}}{7}$
C) $\text{arcsen}\frac{\sqrt{7}}{7}$
D) $\text{arcsen}\frac{3\sqrt{7}}{7}$
E) $\text{arcsen}\frac{\sqrt{6}}{3}$

58. En una mesa, se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. SI la altura y la base la lámina miden a cm y b cm, respectivamente, ¿determinar qué relación debe existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base, la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado.

A) $a < b$
B) $a = b$
C) $a > b$
D) $a = \sqrt{2b}$
E) $b = \sqrt{2}a$

59. Los vectores $\overleftrightarrow{OG}$, $\overleftrightarrow{OC}$ y $\overleftrightarrow{OH}$ son mutuamente perpendiculares y son de igual longitud ($|\overleftrightarrow{OG}| = |\overleftrightarrow{OC}| = |\overleftrightarrow{OH}| = a$). Sea P el baricentro del $\triangle CGH$. Hallar la suma de las distancias trazadas desde P a los tres planos formados por los tres tomados dos a dos.

A) 2a
B) 3a
C) $\frac{2}{3}a$
D) a
E) $\frac{3}{2}a$

60. Dado un triedro S-ABC, si $\overrightarrow{SC}$ forma con la bisectriz de la cara opuesta un ángulo igual a la mitad de dicha cara, calcular el diedro C, si: diedro A + diedro B = 120°.

A) 90°
B) 45°
C) 135°
D) 60°
E) 120°

61. Dado un triángulo ABC, equilátero se traza $\overline{AE}$, perpendicular al plano del triángulo. Si: AE = BC, calcular la medida del ángulo con que se cruzan $\overleftrightarrow{EB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) 75°
B) 90°
C) 120°
D) 150°
E) $\text{arccos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$

62. Dado un triángulo ABC . AB = 15; BC = 8 y AC = 17. Por el incentro I se eleva $\overline{ID}$, perpendicular al plano ABC, siendo: $ID = \sqrt{247}$. Calcular la medida del ángulo DAB.

A) 37°
B) 53°
C) 60°
D) 45°
E) 75°

63. Sobre una circunferencia de centro O y radio cuya longitud es 10 m, se ubican los puntos A y B, tal que: $m\overset{\frown}{AB} = 127°$. Por B se levanta $\overline{BP}$, perpendicular al plano del círculo, siendo BP = 24 m. Calcular el área de la región triangular AOP.

A) $32\sqrt{10}$
B) $45\sqrt{10}$
C) $38\sqrt{10}$
D) $40\sqrt{10}$
E) $42\sqrt{10}$

64. Un plano se engendra por una recta que se mueve:
I. Resbalando sobre dos rectas que se cortan o sobre dos paralelas.
II. Pasando por un punto fijo y resbalando sobre una recta fija.
III. Permaneciendo perpendicular a una recta fija en un punto fijo y girando alrededor de esta línea.

De estas proposiciones se puede afirmar que son:

A) Todas son falsas.
B) Solo la I es correcta.
C) Solo la II es correcta.
D) Solo la III es correcta.
E) Todas son correctas.

65. De las siguientes afirmaciones:
I. En todo triedro convexo, un diedro exterior es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.
II. La distancia mínima entre dos rectas que se cruzan en el espacio es el segmento perpendicular a ambos cuyos extremos se encuentran una en cada recta.
III. La proyección de toda poligonal sobre un plano es otra poligonal.

Son verdaderas:

A) Todas
B) Solo II
C) Solo I y III
D) Solo I y II
E) Solo II y III

66. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones no es falsa?

A) Por un punto exterior a un plano pasa un solo plano no perpendicular en él.
B) Dos rectas que forman ángulos iguales con un plano, son paralelas entre sí.
C) Dos rectas paralelas a un plano son paralelas entre sí.
D) En el espacio, dos rectas perpendiculares en una tercera son paralelas entre sí.
E) Ninguna de las anteriores.

67. Indicar con falso o verdadero, según corresponda:
I. La intersección de tres planos secantes no siempre es una recta.
II. 4 puntos no alineados ni coplanares, determinan como máximo cuatro planos.
III. Sea P un plano y A una región triangular contenida en el plano P. Luego (P−A) es una región convexa.

A) FFV
B) VVV
C) VVF
D) VFV
E) VFF

68. Se tiene 8 puntos en el espacio, ellos determinan como máximo $\overline{ab}$ planos. Si: (a + b) representa el número de lados de un polígonos convexo, calcular el número de diagonales de dicho polígono.

A) 64 B) 56 C) 35
D) 44 E) 55

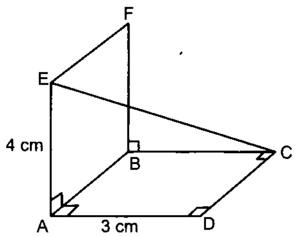
69. Sea ABC un triángulo isósceles, AB = BC = 5 y AC = 6. Se levanta $\overline{BQ}$ perpendicular al plano de dicho triángulo, de modo que BQ = AC. Calcular la medida del diedro que forman los planos ABC y AQC.

A) 30° B) 45° C) 37°
D) $\arctan\frac{3}{2}$ E) $\arctan\frac{4}{5}$

70. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo regular ABC mide $2\sqrt{3}$ dm. Por B se levanta $\overline{BF}$ perpendicular al plano del triángulo. Si $\overline{BF}$ mide 2 dm, calcular el área de la región triangular AFC.

A) $\frac{3}{4}\sqrt{31}$ dm^2 B) $3\sqrt{31}$ dm^2 C) $31\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm^2
D) $31\frac{\sqrt{2}}{4}$ dm^2 E) $6\sqrt{31}$ dm^2

71. Hallar la menor distancia entre $\overline{EC}$ y $\overline{AB}$ en la figura mostrada.



A) 1 cm B) 2 cm C) 2,4 cm
D) 5,5 cm E) 5 cm

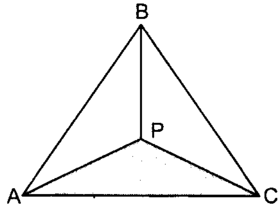
72. Si dos o más rectas forman el mismo ángulo con un plano.

A) Estas rectas tendrán longitudes iguales.
B) Estas rectas serán paralelas.
C) Estas rectas serán paralelas únicamente cuando el ángulo que forman con el plano es 90°.
D) Estas rectas no necesariamente tienen que ser paralelas.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

73. Por el circuncentro O del triángulo equilátero ABC, se traza $\overline{OP}$ perpendicular al plano del triángulo. Marcar H ortocentro del triángulo APB y calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{HC}$.
(AC = AD).

A) 37° B) 45° C) 60°
D) 53°/2 E) 90°

74. En la figura, hay un triedro cuyas caras son mutuamente ortogonales y la longitud de sus aristas es: PA = PB = PC = 6 m. Hallar el área de la región triangular ABC.



A) $18\sqrt{2}$ m^2 B) $18\sqrt{3}$ m^2 C) $16\sqrt{3}$ m^2
D) $16\sqrt{2}$ m^2 E) $12\sqrt{3}$ m^2

75. Un triángulo equilátero ABC está en un plano perpendicular a un cuadrado ABCDE. El segmento de recta que une el punto medio de lado $\overline{AC}$ con el punto medio del lado $\overline{BD}$ del cuadrado mide 1 m. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo o del cuadrado?

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 1,5
D) 1 E) 2

76. Por el vértice A de un triángulo ABC, se levanta la perpendicular $\overline{AM}$ al plano del triángulo. Se trazan las perpendiculares $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ a $\overline{MB}$ y $\overline{MC}$ respectivamente. Si MQ = 5 cm, PB = 6 cm; MP = 4 cm y m∠BMC = 30°, hallar el área de la región triangular BMC.

A) 10 cm^2 B) 15 cm^2 C) 18 cm^2
D) 20 cm^2 E) 30 cm^2

77. Un triángulo se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo sobre P tiene 20 cm^2 de área, hallar el área del triángulo.

A) 10 cm^2 B) $10\sqrt{2}$ cm^2 C) 20 cm^2
D) $20\sqrt{2}$ cm^2 E) $30\sqrt{2}$ cm^2

78. Por el vértice B de un cuadrado ABCD, se traza una perpendicular $\overline{BP}$ al plano del cuadrado, M es punto medio de $\overline{AD}$; si la distancia de P a la recta que contiene al vértice C y M es $4\sqrt{6}$ y la distancia de P al plano del cuadrado es 4, hallar el lado del cuadrado.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 15

79. Se tiene un triedro O-ABC, donde las caras AOB y AOC miden 60°, sobre $\overleftrightarrow{OA}$, $\overleftrightarrow{OB}$ y $\overleftrightarrow{OC}$ se toman los puntos Q, R y P respectivamente, tal que: m∠PQR = 90°. Calcular la medida del diedro $\overleftrightarrow{OA}$. Si: OQ = OR = OP.

A) $2\arctan\sqrt{2}$ B) $\arctan 2\sqrt{2}$ C) $\arctan\sqrt{9}$
D) $2\arctan\sqrt{3}$ E) 30°

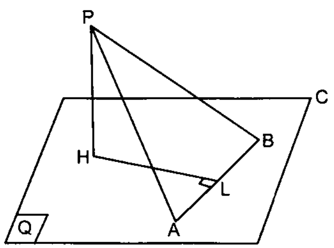
80. Se tiene un diedro de 90°, formado por las caras P y Q una secante a dichas caras intersecta a P y Q en A y B respectivamente. Calcular la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y la arista de dicho diedro, sabiendo que $\overline{AB}$ forma con P un ángulo de 37°/2 y $\overline{AB}$ forma con Q un ángulo de 53°/2. Además: $AB = \sqrt{10}$ m.

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$m B) $\sqrt{6}$ m C) $\frac{\sqrt{7}}{3}$m
D) $2\sqrt{2}$ m E) $\frac{\sqrt{6}}{3}$m

81. Se tiene un triedro O-ABC, en el cual la cara BOC = 90° y las caras AOB y AOC mide 60° cada una. Calcular la medida del ángulo que forma $\overline{OA}$ y su cara BOC.

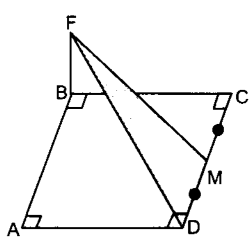
A) 30° B) 60° C) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$
D) 45° E) $\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$

82. En el gráfico, $\overline{PH}$ es perpendicular al plano Q, PH = 12, AP = BP = 13 y AB = 8. Calcular HL.



A) 2 B) $\sqrt{2}$ C) 3
D) $3\sqrt{2}$ E) $\sqrt{6}$

83. En el gráfico, $\overline{BF}$ es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. Si AB = BF = BC = a y M es punto medio de $\overline{CD}$, hallar el área de la región sombreada.



A) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{a^2}{4}$
D) $\frac{3a^2}{8}$ E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

84. Se tiene dos segmentos de rectas perpendiculares, y por cada una de ellas trazamos planos paralelos entre sí.

A) Si el punto medio de uno de los segmentos lo unimos con los extremos de la otra recta, el plano que se forma será perpendicular a los dos planos paralelos.
B) Si por uno de los extremos de una de las rectas dadas trazamos una perpendicular a uno de los planos paralelos, el plano que se forma por la recta dada y la perpendicular a la otra recta dada.
C) Si los extremos de cada una de las rectas, los unimos con el punto medio de la otra recta, los planos que se forman serán perpendiculares entre sí.
D) Si los extremos de cada una de las rectas los unimos con el punto medio de la otra recta. La recta de intersección de los planos formados será perpendicular a una de las rectas dadas.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

85. Cuando dos planos son perpendiculares

A) Todo plano perpendicular a uno de ellos lo es también al otro.
B) Toda recta perpendicular a la intersección de ambos debe estar contenida en uno de ellos.
C) Todas las rectas de uno de ellos son perpendiculares al otro.
D) No siempre se cortan.
E) Todo plano perpendicular a su interacción es perpendicular a ambos.

86. Graficar al triángulo ABC y levante $\overline{BQ}$ perpendicular al plano ABC. Si BQ = 4, 8 dm, AB = 6 dm, BC = 8 dm y AC = 10 dm. Calcular el valor del ángulo diedro $\overline{AC}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

87. Uno de los catetos de un triángulo isósceles está contenida en el plano P y el otro forma con dicho plano un ángulo de 45°. Calcular el ángulo que forma su hipotenusa con el plano P.

A) 45° B) 30° C) 60°
D) $\text{arcsen}\frac{1}{5}$ E) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}$

88. La recta l de intersección de dos planos x e y, perpendiculares entre sí, es paralela a una recta R del plano x y a una recta S del plano y si la distancia entre l y R es de 16 cm, y la distancia entre l y S es de 12 cm. ¿Cuál es la distancia entre R y S?

A) 14 cm B) 25 cm C) $4\sqrt{28}$ cm
D) $10\sqrt{3}$ cm E) 20 cm

89. Calcular el máximo valor entero de las caras de un triedro si las caras dos miden 100° y 120°.

A) 100° B) 112° C) 139°
D) 140° E) 141°

90. Calcular el máximo valor de una cara de un triedro equilátero.

A) 100° B) 110° C) 130° D) 119° E) 141°

91. Se tiene un diedro formado por los planos P y Q cuya recta de intersección es xy. Si desde un punto R exterior a las caras del diedro, trazamos RS perpendicular al plano P y RT perpendicular al plano Q.

A) La recta xz no tiene que ser perpendicular al plano RST.
B) RST no es un plano
C) El plano RST será perpendicular a las dos caras del diedro.
D) El plano RST será perpendicular a una de las caras del diedro.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

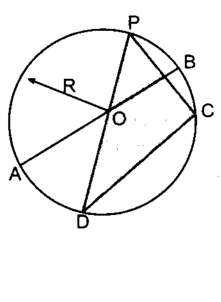
92. Sea $\mathscr{C}$ un círculo de centro O y un cuadrado ABCD que se encuentran contenidos en planos perpendiculares (sea $\overline{AB}$ una cuerda de $\mathscr{C}$). Se marca M en $\overline{DC}$, de modo que: 3DM = 5MC, AB = 8 dm y OA = 5 dm.
Calcular la distancia de M a $\overline{OB}$.

A) 41/5 dm B) $4\sqrt{3}$ dm C) 42/5 dm
D) 40/7 dm E) 40/3 dm

93. ¿Cuál de las afirmaciones es correcta?

A) Si una recta toca un solo punto de una circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, esta recta será tangente a la circunferencia.
B) En todo tetraedro, la sección producida por un plano paralelo a una de las aristas, es un paralelogramo.
C) Por una recta se puede trazar un plano perpendicular a otra recta dada.
D) Por dos rectas que no son paralelas y no se cortan, puede pasar más de dos planos paralelos entre sí.
E) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.

94. Calcular la medida del diedro formado por los semicírculos de radio R. Si el área de la región PCD es $\frac{R^2}{2}$, además: $\overline{CD} // \overline{AB}$, $m\widehat{CD} = 90°$ (P punto máximo del semicírculo)



A) 40° B) 30° C) 37°
D) 53° E) 45°

95. Un triángulo se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo sobre el plano P tiene 20 cm^2 de área, encontrar en cm^2 el área del triángulo del espacio.

A) $20\sqrt{2}$ B) $18\sqrt{2}$ C) $24\sqrt{2}$
D) 24 E) 30

96. Se tiene una circunferencia de diámetro AD y un cuadrado ABCD de centro O contenidos en planos perpendiculares. En el plano de la circunferencia se ubica un punto P exterior a ella tal que $\overline{AP}$ y $\overline{DP}$ son secantes a la circunferencia M y N respectivamente. Si m∠APD = 45°, calcular m∠MON.

A) 60° B) 45° C) 53°
D) 37° E) 36°

97. Los triángulos equiláteros ABC y ABD están contenidos en planos que forman un diedro que mide 45°. En $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$ se ubica los puntos E y F respectivamente, tal que $\frac{BE}{EC} = \frac{FC}{AF} = \frac{3}{2}$. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{EF}$ y el plano que contiene al triángulo ABD.

A) $\arcsen\left(\frac{3}{4}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{3}{2}\right)$
C) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{42}}{28}\right)$ D) $\arcsen\left(\frac{21}{4}\right)$
E) $\arcsen\left(\frac{\sqrt{67}}{11}\right)$

98. De las siguientes proposiciones, ¿cuáles son verdaderas?

I. Puede haber en el espacio cuatro rectas alabeadas que son ortogonales dos a dos.
II. Hay en el espacio una recta que interseca a tres rectas alabeadas dos a dos.
III. Hay solo una recta que es ortogonal a tres rectas alabeadas dos a dos.

A) I y II B) II y III C) I y III
D) Solo I E) Solo II

99. Se tiene dos rectas alabeadas, en una de ellas están los puntos A y C y en la otra los puntos B y D, tal que AB es la distancia entre dichas rectas, AC es la distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$; además AB = m y AC = n. ¿A qué distancia del plano que contiene el triángulo ABC está el punto D si el ángulo entre $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ es el complemento del ángulo entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$?

A) $\frac{(m+n)}{2}$ B) m + n C) $\sqrt{m^2+n^2}$
D) $\frac{mn}{(m+n)}$ E) $\sqrt{mn}$

100. Por el circuncentro O del triángulo equilátero ABC se traza $\overline{OP}$ perpendicular a su respectivo plano, H es el ortocentro del triángulo APB. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AP}$ y $\overleftrightarrow{HC}$.

A) 60° B) 75° C) 120°
D) 90° E) 45°

101. Exterior a un plano P se ubica un segmento AB, sobre dicho plano se ubica los puntos M, tal que $(AM)^2 - (BM)^2$ es constante. ¿Cuál es lugar geométrico de M?

A) Una parábola. B) Una circunferencia.
C) Una recta. D) Una hipérbola.
E) Un círculo.

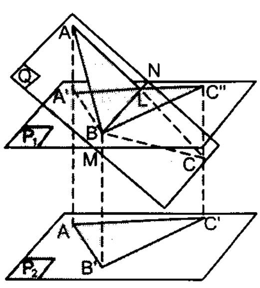
102. Se tiene un ángulo tetraedro V-ABCD, en el cual $m\angle AVD = m\angle BVC = 30°$, $m\angle AVB = 120°$. Calcular $m\angle DVC$, se sabe que la cara DVC forma con la cara AVB un ángulo diedro que mide 30° y además las proyecciones de las aristas VD y VC sobre la cara AVB son isogonales de las lados de esta cara.

A) 70° B) 74° C) 80°
D) 90° E) 106°

103. Dado un plano P, luego se traza $\overleftrightarrow{AB}$ oblicua al plano. Por $\overleftrightarrow{AB}$ se traza dos planos secantes a P que forman con él diedros de medida β. Si la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AB}$ y el plano P es α, calcular la medida del ángulo formado por las intersecciones de cada plano con el plano P.

A) $2\arcsen\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right)$ B) $2\arccos\left(\frac{\tan\alpha}{\tan\beta}\right)$
B) $2\arcsen\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right)$ D) $2\arctan\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta}\right)$
E) $2\arcsen\left(\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}\right)$

104. En el gráfico mostrado, los triángulos ABL y C"BL son congruentes, $A'B' = \sqrt{40}$, $B'C' = 7$ y $A'C' = $ **9**. Si los planos P_1 y P_2 son paralelos, calcular la medida del diedro formado por los planos P_2 y Q (A', B' y C' son las proyecciones ortogonales de A, B y C sobre el plano P_2).



A) 30° B) 45° C) 53°
D) 60° E) 37°

105. En un cuadrante AOB, de centro O, en $\overline{OB}$ se ubica su punto medio M, con diámetro AM se traza una semicircunferencia no coplanar al cuadrante tal que OP = PB, siendo P el punto medio de la semicircunferencia. Calcular la media del ángulo diedro formado por los planos que contienen a la semicircunferencia y al cuadrante.

A) 30° B) 37° C) 53°
D) 45° E) 60°

106. En un triedro O-ABC, en $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ se ubica los puntos M, N y Q respectivamente, tal que OM = 9, ON = 12 y OQ = 16. Si los ángulos MON y NOQ son obtusos, calcular el mínimo valor entero del perímetro de la región triangular MNQ.

A) 45 B) 43 C) 44
D) 40 E) 38

107. Indique el valor de verdad de las proposiciones.

I. Si una recta tiene solo un punto en común con una circunferencia y es perpendicular al radio que pasa por dicho punto, esta recta sería tangente a la circunferencia.
II. Todo plano determinado por dos paralelas a otro plano, es siempre paralelo al segundo.
III. Por dos rectas que se cruzan en el espacio pueden pasar más de dos planos paralelos entre sí.
IV. Si una recta es paralela a un plano, la paralela trazada a dicha recta por un punto del plano, está contenida en el plano.

A) VFVF B) VVFV C) VFFV
D) FFVV E) FFFV

108. En un plano P se ubica un punto M por el cual se levanta una perpendicular al plano. Luego sobre dicha perpendicular se ubica un punto N por el cual se traza un plano Q paralelo al plano P; entonces se puede afirmar que

I. Si una recta es secante a los planos, entonces las medidas de los ángulos entre la recta y dichos planos son diferentes.
II. El plano Q no es perpendicular a la recta MN.
III. Si dos ángulos que están en los planos P y Q tienen sus lados respectivamente paralelos y del mismo sentido, entonces las medidas son iguales.

A) Solo I es correcto B) Solo II es correcto
C) Solo III es correcto D) I y II son correctos
E) I y III son correctos

109. La proyección de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, sobre un plano no paralelo a dicho triángulo es A'B'C' (A', B' y C' son las proyecciones ortogonales de A, B y C respectivamente), tal que

$\overline{AB}$ es paralelo al plano de proyección. Si AB = b y B'C' = a, calcular la distancia entre $\overline{CC'}$ y la mediana AM del triángulo ABC.

A) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ B) $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+4b^2}}$ C) $\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

D) $\dfrac{ab}{a+b}$ E) $\dfrac{ab}{a+4b}$

110. En el espacio se traza dos rayos AX y BY que no se encuentran en un plano y el ángulo entre los dos rayos mide 90°, su perpendicular común es AB, en los rayos AX y BY se encuentran los puntos M y P respectivamente tal que $2(AM)(BP) = (AB)^2$. Calcular la distancia del punto medio de $\overline{AB}$ a la recta MP, si AB = a.

A) a B) $\dfrac{a}{2}$ C) $\dfrac{a}{4}$

D) $\dfrac{a}{3}$ E) $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$

111. En un triedro trirrectángulo O-ABC; si $AB = \sqrt{2}(OC)$, $BC = \sqrt{2}(OA)$ y $AC = \sqrt{2}(OB)$, calcular $m\angle ABC$.

A) 90° B) 30° C) 45°
D) 60° E) 53°

112. En un plano H se ubica el triángulo ABC. Por A se traza una perpendicular AQ al plano H. Si AB = 15, BC = 13, CA = 14 y AQ = 9, calcular la distancia entre $\overleftrightarrow{QB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$.

A) 5,4 B) 7,2 C) 5
D) 6 E) 9

113. Sean $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ rectas alabeadas, en $\overleftrightarrow{L_1}$ se ubica los puntos A y B; luego en $\overleftrightarrow{L_1}$ se ubica los puntos R y S tal que AR es la distancia entre dichas rectas. En AR se ubica el punto M que equidista de $\overleftrightarrow{L_1}$, $\overleftrightarrow{L_2}$ y $\overleftrightarrow{BS}$. Si AB = m y RS = n, calcular BS.

A) m + n B) $\dfrac{mn}{m+n}$ C) m − n

D) $\dfrac{m+n}{2}$ E) $\dfrac{2mn}{m+n}$

114. Dado un cuadrado ABCD, por A se traza $\overline{AQ}$ perpendicular al plano que contiene al cuadrado. Si AB = a y AQ = b, calcular la medida del diedro determinado por las regiones BQC y DQC.

A) $\arccos\left(\dfrac{a}{b}\right)$ B) $\arccos\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)$

C) $\arccos\left(\dfrac{-a^2}{a^2+b^2}\right)$ D) $\arccos\left(\dfrac{a^2+b^2}{b^2}\right)$

E) $\arccos\left(\dfrac{a^2-b^2}{b^2}\right)$

115. El ángulo diedro entre los planos P y Q mide α. En el plano P se encuentra un cuadrado cuyo lado mide L, calcular el perímetro de la proyección del cuadrado sobre el plano Q tal que este sea máximo.

A) $2L\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ B) $L\sqrt{2}\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

C) $2L\sqrt{1+\cos^2\alpha}$ D) $L\sqrt{1+\cos^2\alpha}$

E) $L\sqrt{2}\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

116. En un triángulo isósceles ABC de base AC, en los lados AB y BC se ubica los puntos M y N respectivamente. Siendo MN = a, AN = b y MC = c, se cumple que:

A) $b^2 = a^2 + c^2$ B) $a^2 = b^2 - c^2$
C) $a^2 < b^2 + c^2$ D) $b - c < a < b + c$
E) $b^2 - c^2 < a^2 < b^2 + c^2$

CLAVES

1. D	16. E	31. E	46. C	61. E	76. B	91. C	106. B
2. C	17. A	32. C	47. D	62. B	77. D	92. A	107. E
3. B	18. B	33. D	48. A	63. D	78. A	93. E	108. C
4. A	19. C	34. E	49. E	64. E	79. B	94. E	109. A
5. D	20. A	35. A	50. B	65. B	80. E	95. A	110. B
6. D	21. D	36. E	51. D	66. E	81. D	96. A	111. D
7. A	22. D	37. C	52. C	67. C	82. C	97. C	112. B
8. D	23. C	38. C	53. C	68. D	83. B	98. E	113. A
9. C	24. A	39. B	54. E	69. D	84. E	99. E	114. C
10. A	25. C	40. A	55. C	70. B	85. E	100. D	115. A
11. D	26. B	41. B	56. C	71. C	86. C	101. C	116. B
12. A	27. C	42. E	57. B	72. D	87. B	102. D	
13. D	28. C	43. B	58. D	73. E	88. E	103. A	
14. D	29. A	44. D	59. C	74. B	89. C	104. E	
15. A	30. A	45. E	60. D	75. D	90. D	105. E	

Poliedros | 17 capítulo

Niccolo Fontana (1499-13 de diciembre de 1557) fue un matemático italiano apodado Tartaglia (tartamudo), debido a que en su niñez recibió una herida cuando las tropas de Gastón de Foix tomaban Brescia, su ciudad natal. Huérfano y sin medios materiales para proveerse una instrucción, llegó a ser uno de los principales matemáticos del siglo XVI. Enseñó y explicó esta ciencia sucesivamente en Verona, Vicenza, Brescia y finalmente Venecia, en la misma pobreza que le acompañó toda su vida.

Creador de un método para resolver ecuaciones de tercer grado, estando ya en Venecia, en 1535 su colega del Fiore, discípulo de Scipione del Ferro de quien había recibido la fórmula para resolver las ecuaciones cúbicas, le propone un duelo matemático que Tartaglia acepta. A partir de este duelo, y en su afán de ganarlo, Tartaglia desarrolla la fórmula general para resolver las ecuaciones de tercer grado; por lo que consigue resolver todas las cuestiones que le plantea su contrincante, sin que este logre resolver ninguna de las propuestas por Tartaglia. Otras aportaciones destacables de Tartaglia fueron los primeros estudios de aplicación de las matemáticas a la artillería en el cálculo de la trayectorias de los proyectiles, así como por la expresión matemática para el cálculo del volumen de un tetraedro cualquiera en función de las longitudes de sus lados, la llamada fórmula de Tartaglia, una generalización de la fórmula de Herón (usada para el cálculo del área del triángulo).

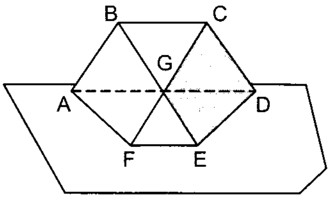
Fuente: Wikipedia

SÓLIDO

Una figura que encierra una región del espacio mediante superficies.

POLIEDRO

Es un sólido formado por polígonos que constituyen las caras. Los vértices del sólido son los de sus caras y las aristas del poliedro son los lados de los polígonos.
Los poliedros pueden ser convexos y no convexos o cóncavos.

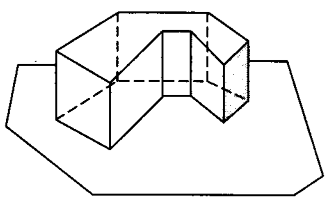


- Caras: BGC, FGE, ABGF, ...
- Vértices: A, B, C, ...
- Aristas: $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ...
- Diagonales: $\overline{BE}$, $\overline{FC}$, ...
  (unen dos vértices ubicados en diferentes caras).

Poliedro convexo

Un poliedro se llama convexo, si determina sobre una recta secante a su superficie, como máximo, dos puntos de intersección.

Poliedro no convexo o cóncavo



Es aquel que determina sobre una recta secante más de dos puntos de intersección.
El nombre del poliedro depende del número de caras y puede ser: tetraedro (4 caras); pentaedro (5 caras); hexaedro (6 caras), etc.

Propiedades:

Si V, C y A, representan los números de vértices, caras y aristas de un poliedro, respectivamente, entonces:

1.° Las medidas de los ángulos, en todas las caras, suman: $360°(V - 2)$

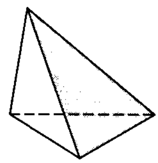
2.° La suma del número de caras y vértices, excede en dos al total de aristas: $C + V = A + 2$
(Teorema de Euler)

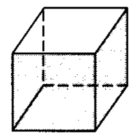
Por ejemplo, para la figura 1: $C = 6$; $V = 7$ y $A = 11$. Se verifica que:
$C + V = A + 2 = 13$ (2.ª propiedad)

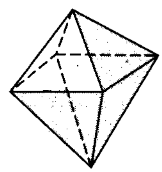
Para la propiedad n.° 1: suma de medidas de los ángulos en los 2 triángulos y los 4 cuadriláteros:
$2(180°) + 4(360°) = 1800°$; lo cual verifica:
$360°(V - 2) = 360°(7 - 2) = 360°(5) = 1800°$

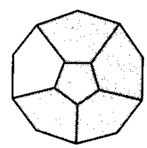
Poliedros regulares

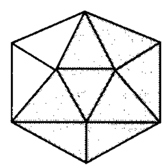
Son aquellos que tienen por caras, polígonos regulares. Se demuestra que solo existen 5 poliedros regulares: tres formados por triángulos equiláteros, uno por cuadrados y otro por pentágonos regulares.


Tetraedro


Hexaedro


Octaedro


Dodecaedro


Icosaedro

POLIEDRO REGULAR	Forma de las caras	C	V	A
Tetraedro	Triángulos equiláteros	4	4	6
Octaedro	Triángulos equiláteros	8	6	12
Hexaedro	Cuadrados	6	8	12
Dodecaedro	Pentágonos	12	20	30
Icosaedro	Triángulo equiláteros	20	12	30

Nota

Se llaman conjugados, aquellos poliedros regulares en los que el número de caras de uno, es igual al número de vértices de otro, (uniendo los centros de las caras de uno, se obtiene el otro). Son conjugados: octaedro y hexaedro; icosaedro y dodecaedro.

Ejemplos:

1. El área de la superficie de un icosaedro regular, de arista a, es:

   Resolución:

   Son 20 triángulos equiláteros.

   $\therefore\ S = 20\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 5a^2\sqrt{3}$

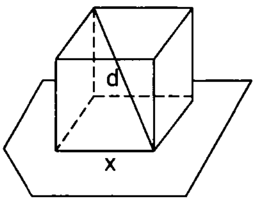
2. ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos en todas las caras de un dodecaedro regular?

   Resolución:

   El dodecaedro regular está formado por 12 pentágonos regulares. La suma de las medidas de los ángulos en cada cara es 180°(S − 2) = 540°. Como son 12, entonces: 12(540°) = 6480°.

3. El área de la superficie total de un cubo es igual al cuadrado de la longitud de su diagonal, por dos.

   Resolución

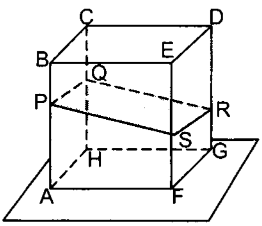


   Se sabe, para un cubo de arista x y diagonal d:

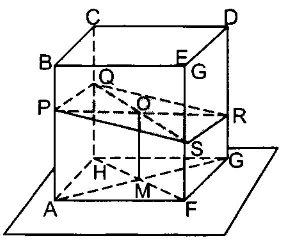
   $x\sqrt{3} = d \Rightarrow x = \frac{d}{\sqrt{3}}$

   $S_{total} = 6_{A\square} = 6x^2 = 6\left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad \therefore\ S_{total} = 2d^2$

4. La figura muestra un cubo PQRS es un cuadrilátero que tiene sus vértices en cuatro aristas del cubo. Demostrar que: PA + RG = QH + SF



   Resolución:



   $\overline{PQ}$ y $\overline{RS}$, son paralelos, por estar contenidos en el mismo plano y no intersecarse. Análogamente $\overline{QR}$ y $\overline{PS}$ son paralelas. Por lo tanto, PQRS es un paralelogramo.

   $\overline{OM}$ es mediana de los trapecios PAGR y QHFS. Así:

   $OM = \frac{PA + RG}{2}$ y $OM = \frac{QH + SF}{2}$

   Entonces:

   $\frac{PA + RG}{2} = \frac{QH + SF}{2}$

   $\therefore\ PA + RG = QH + SF$

5. Un poliedro convexo está formado por 8 triángulos, 2 pentágonos y 5 hexágonos. Hallar el número de vértices.

   Resolución:

   Las medidas de los ángulos en todas las caras suman:

   $$\left.\begin{array}{lll} \text{8 triángulos} & \Rightarrow & 8(180°) = 1440° \\ \text{2 pentágonos} & \Rightarrow & 2(540°) = 1080° \\ \text{5 hexágonos} & \Rightarrow & 5(720°) = 3600° \end{array}\right\}(+)$$

   Es decir: $\sum \text{caras} = 6120°$

   $\Downarrow$

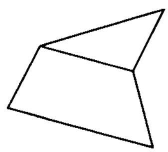
   Pero, por fórmula = 360°(V − 2) = 6120°

   $\therefore\ V = 19.$

6. Un poliedro está formado por 6 triángulos, 4 pentágonos y 7 cuadriláteros convexos. Hallar el número de aristas.

   Resolución:

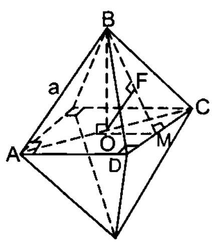
   Cada arista es un lado para dos polígonos, en caras adyacentes. Por lo tanto, si sumamos los números de lados de los 8 triángulos, 4 pentágonos y 7 cuadriláteros, tendremos el doble del número de aristas. Así:



   $2A = 6(3) + 4(5) + 7(4) \quad \therefore\ A = 33$

7. En un octaedro regular de arista a, hallar la distancia del centro a una cara.

   Resolución:



   Las diagonales de un octaedro regular son congruentes (esto es fácil demostrar)

   $AO = OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

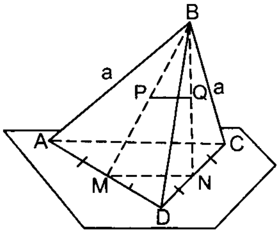
$OM = \frac{a}{2}$

En $\triangle MOB$: $\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OM)^2}$

$\frac{1}{(OF)^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad \therefore OF = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

8. Hallar la distancia entre los baricentros de dos caras de un tetraedro regular de arista a.

Resolución:



Sea ABCD el tetraedro.
P baricentro de ABD
Q baricentro de DBC

$\triangle PBQ \sim \triangle MBN$: $\frac{PQ}{MN} = \frac{BP}{BM}$ ...(1)

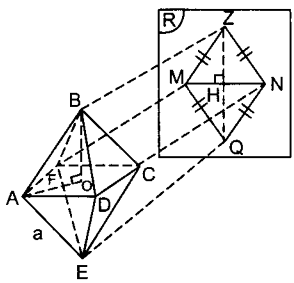
Siendo: $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$(en $\triangle ABC$) y $\frac{BP}{BM} = \frac{2}{3}$

(P: baricentro)

En (1): $\frac{PQ}{a/2} = \frac{2}{3} \quad \therefore PQ = \frac{a}{3}$

9. Hallar el área de la proyección de un octaedro regular sobre un plano perpendicular a una arista, cada arista del octaedro mide a.

Resolución:



Sea **R** un plano perpendicular a la arista $\overline{AF}$; $\overline{AD}$ y $\overline{FC}$ se proyectan en verdadera magnitud.

$\Rightarrow$ MN = a (MZNQ es un rombo).

$ZH = BO = AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow ZQ = a\sqrt{2}$

$\therefore$ El área: $S_{MZNQ} = \frac{MN(ZQ)}{2} = \frac{a(a\sqrt{2})}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

10. Un poliedro convexo está formado por 4 triángulos y 5 cuadriláteros. Hallar el número de diagonales de este sólido.

Resolución:

Si V es el número de vértices, el número de diagonales del sólido es:

n.° diag. sólido: $C_2^V - A -$ n.° diag. caras ...(1)

Donde: C_2^V = combinación de todos los vértices, de dos en dos.

$C_2^V = \frac{V!}{2!(V-2)!}$ ...(2)

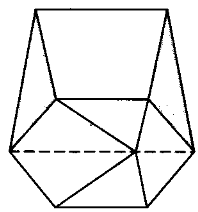
A = número de aristas: $\frac{\text{n. aristas}\,\triangle(4) + \text{n. aristas}\,\square(5)}{2}$

$A = \frac{4(3)+5(4)}{2} = 16 \Rightarrow A = 16$ ...(3)

(Se divide por 2, ya que cada arista se cuenta dos veces).

Por otro lado:

n.° diag. caras: n.° diag. $\square(5) = 2(5) = 10$ ...(4)



El número de vértices V se obtiene con el teorema de Euler:

$C + V = A + 2 \Rightarrow 9 + V = 16 + 2 \Rightarrow V = 9$

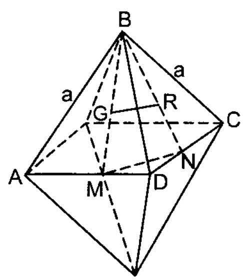
En (2): $C_2^V = \frac{9!}{2!7!} = \frac{9(8)}{2} = 36$

En (1): n.° diag. sólido: 36 − 16 − 10

$\therefore$ n.° diag. sólido: 10

11. Hallar la distancia entre los baricentros de dos caras adyacentes de un octaedro regular de arista a.

Resolución:



Sean: G $\Rightarrow$ baricentro de ABD
R $\Rightarrow$ baricentro de BCD

$\triangle MBN \sim \triangle GBR$: $\frac{GR}{MN} = \frac{BG}{BM}$ ...(1)

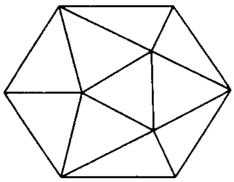
Siendo: $MN = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ y

$\frac{BG}{BM} = \frac{2}{3}$(propiedad del baricentro)

En (1): $\dfrac{GR}{\dfrac{a\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{2}{3}$ $\therefore GR = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$

12. ¿Cuántas diagonales tiene un icosaedro regular?

Resolución:



Se hacen las combinaciones de todos los vértices, de dos en dos, y a esta cantidad se le resta el número de aristas y el número de diagonales en las caras:

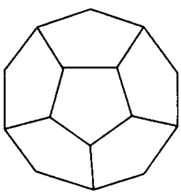
n.° diag. icosaedro: $C_2^{12} - 30 - \underset{\text{n.° diagonales en las caras}}{\underset{\downarrow}{0}}$

n.° diag. icosaedro: $\dfrac{12!}{(2!)(12-2)!} - 30$

$\therefore$ n.° diag. icosaedro: $66 - 30 = 36$

13. ¿Cuántas diagonales tiene un dodecaedro regular?

Resolución:



(20 vértices)

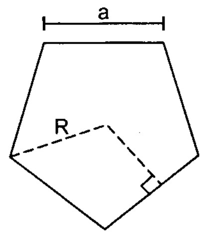
n.° diag. dodecaedro: C_2^{20} – n.° aristas – n.° diag. caras

n.° diag. dodecaedro: $\dfrac{20!}{2!(18!)} - 30 - 12(5)$

$\therefore$ n.° diag. dodecaedro: 100

14. Hallar el área de la superficie de un dodecaedro regular de arista a.

Resolución:



Son 12 pentágonos regulares de lado a. Se sabe que para un pentágono regular:

$L_5 = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}}$

$\Rightarrow a = \dfrac{R}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}} \Rightarrow R = \dfrac{2a}{\sqrt{10 - \sqrt{20}}}$

Y la apotema: $ap_5 = \dfrac{R}{4}(\sqrt{5} + 1) = \dfrac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{10 - \sqrt{20}}}$

Luego, el área de una cara:

$S_1 = \dfrac{5}{2}(L_5)(ap_5)$

$S_1 = \dfrac{5a}{2}\left(\dfrac{a(\sqrt{5} + 1)}{2\sqrt{10 - \sqrt{20}}}\right) \Rightarrow S_1 = \dfrac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

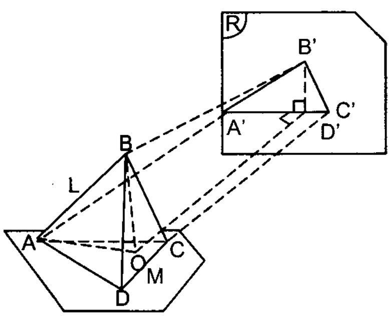
$\therefore S_{dodecaedro} = 12S_1 = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el área de la proyección de un tetraedro regular de arista L, sobre un plano perpendicular a una arista.

Resolución:

Sea ABCD el tetraedro y R un plano perpendicular a la arista C:



$\overline{CD}$ se proyecta como un punto y por ser $\overline{AB} \perp \overline{CD}$, $\overline{AB}$ se proyectará en verdadera magnitud (todas las perpendiculares a $\overline{CD}$, se proyectan en verdadera magnitud).

Luego: $S_{proyección} = \dfrac{1}{2}(A'C')h$ ...(1)

Siendo: $A'C' = AM = \dfrac{L}{2}\sqrt{3}$ ...(2)

y h = BO = altura del tetraedro.

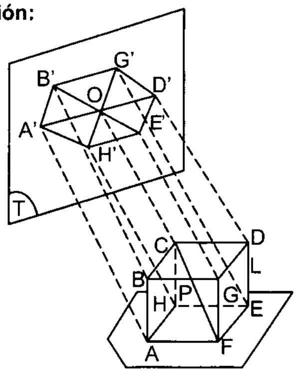
$\Rightarrow h = L\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ ...(3)

Con (2) y (3), en (1):

$S_{proyección} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{L}{2}\sqrt{3}\right)L\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ $\therefore S_{proyección} = \dfrac{L^2}{8}\sqrt{2}$

2. En un cubo de arista L, hallar el área de la proyección obtenida sobre un plano perpendicular a una diagonal.

Resolución:



Proyectamos el cubo sobre un plano T, perpendicular a la diagonal $\overline{FC}$. Todas las perpendiculares a $\overline{FC}$, serán paralelas a T y se proyectarán en verdadera magnitud. La proyección resulta la región correspondiente a un hexágono regular, de lado x. Además, x es la distancia de D a $\overline{CF}$.

En el △CDF: DP = x; DF = $L\sqrt{2}$

Por relación métrica:

$$\frac{1}{(DP)^2}=\frac{1}{(CD)^2}+\frac{1}{(DF)^2}\Rightarrow\frac{1}{x^2}=\frac{1}{L^2}+\frac{1}{(L\sqrt{2})^2}$$

De donde: $x^2 = \frac{2}{3}L^2$

Y el área de la proyección:

$$S=\frac{3}{2}x^2\sqrt{3}=\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}L^2\right)\sqrt{3}\quad\therefore S=L^2\sqrt{3}$$

3. Hallar el número de segmentos que unen los puntos medios de todas las aristas de un icosaedro regular.

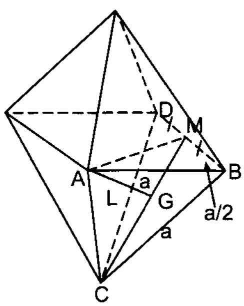
Resolución:

El icosaedro regular tiene 30 aristas. Luego, hay que combinar 30 puntos medios, de dos en dos:

$\therefore\ C_2^{30}=\frac{30!}{2!(28!)}=435$ segmentos.

4. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide L, calcular el área de la superficie total del octaedro.

Resolución:



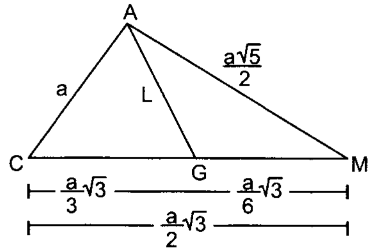
Sea a la arista del octaedro.

En ⊾BM: $AM^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Como el △DBC es equilátero $\Rightarrow$ CM = $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

Como G es el baricentro del △DBC,

$\Rightarrow CG = \frac{a\sqrt{3}}{3};\ GM = \frac{a}{6}\sqrt{3}$



Observa el triángulo MAC:

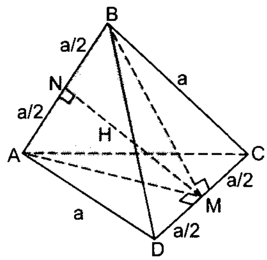
Aplicando el teorema de Stewart:

$$L^2\frac{a\sqrt{3}}{2}=a^2\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)+a^2\frac{5}{4}\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)-\frac{a\sqrt{3}}{3}\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)\frac{a\sqrt{3}}{2}\Rightarrow a=L$$

Por lo tanto, el área: $A = 2a^2\sqrt{3} = 2L^2\sqrt{3}$

5. Dado un tetraedro regular de arista a, calcular el área de la sección determinada por un plano de simetría que pasa por una de sus aristas.

Resolución:



Triángulo rectángulo notable BMC = $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

⊾BNM: $H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2$

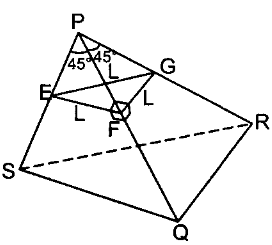
$$H^2=\frac{3a^2}{4}-\frac{a^2}{4}\Rightarrow H^2=\frac{2a^2}{4}\Rightarrow H=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Triángulo AMB:

$$\therefore\ \text{Área}=\frac{(AB)H}{2}=\frac{a\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)}{2}=\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$$

6. En un tetraedro PQRS, el ángulo diedro correspondiente a una arista PQ es recto y los ángulos QPR y QPS miden 45°, entonces el ángulo RPS mide:

Resolución:



Se observa que:

$\triangle$EFP: triángulo notable de 45° $\Rightarrow$ PF = EF = L

$\triangle$PFG: triángulo notable de 45° $\Rightarrow$ PF = FG = L

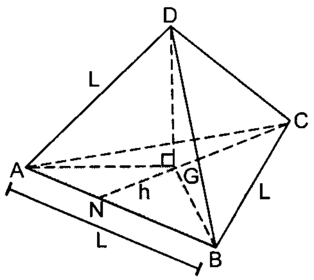
Se deduce que: $PG = L\sqrt{2}$ y $PE = L\sqrt{2}$

Además en $\triangle$EFG: $EG = L\sqrt{2}$

Por lo tanto el $\triangle$EGP es equilátero, luego el ángulo GPE mide 60°.

7. Hallar el área de la proyección de una cara de un tetraedro regular sobre otra cara si el área total es 600 m^2.

Resolución:



El área total del tetraedro: $L^2\sqrt{3}$

$\Rightarrow L^2\sqrt{3} = 600 \Rightarrow L^2 = \dfrac{600}{\sqrt{3}} \Rightarrow L^2 = 200\sqrt{3}$

Como G es baricentro del $\triangle$ABC.

$\Rightarrow GN = \dfrac{1}{3}CN$; pero: $CN = \dfrac{L}{2}\sqrt{3}$

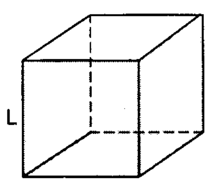
Luego: $GN = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{L}{2}\sqrt{3}\right) = \dfrac{L\sqrt{3}}{6}$

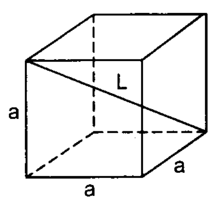
Área del $\triangle$AGB: $S_{\triangle AGB} = \dfrac{Lh}{2} = \dfrac{L(L\sqrt{3}/6)}{2} = \dfrac{L^2\sqrt{3}}{12}$

$\therefore S_{\triangle AGB} = \dfrac{200\sqrt{3}(\sqrt{3})}{12} = 50\ m^2$

8. ¿Qué relación existe entre las áreas de dos hexaedros regulares si se sabe que la arista de uno de ellos es igual a la diagonal de otro?

Resolución:





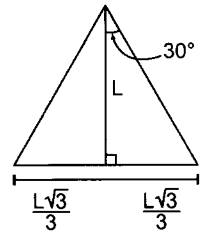
Cubo 1: $A_1 = 6\ L^2$ Cubo 2: $A_2 = 6\ a^2$

$L^2 = a^2 + a^2 + a^2 \Rightarrow L^2 = 3\ a^2$

$\Rightarrow \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{6\ a^2}{6\ L^2} = \dfrac{a^2}{L^2} = \dfrac{a^2}{3\ a^2} \quad \therefore \dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{1}{3}$

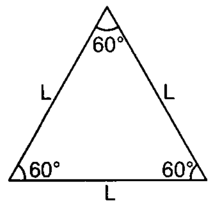
9. Un octaedro regular tiene la altura de una de sus caras igual a la arista de una cara de un icosaedro regular. Hallar la relación de las áreas totales de los poliedros.

Resolución:



Un octaedro regular está formado por 8 triángulos equiláteros, sea L la altura de una cara, entonces el lado es: $2L\sqrt{3}/3$, el área del octaedro (A_8) es:

$$A_8 = 8\left(\frac{2L\sqrt{3}}{3}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow A_8 = \frac{8L^2\sqrt{3}}{3}$$

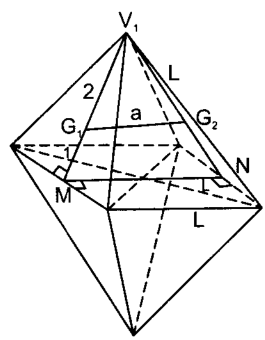


Un icosaedro regular está formado por 20 triángulos equiláteros, sea L el lado de cada cara, entonces:

$$A_{20} = 20\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right) = 5L^2\sqrt{3} \qquad \therefore \frac{A_8}{A_{20}} = \frac{\frac{8L^2\sqrt{3}}{3}}{5L^2\sqrt{3}} = \frac{8}{15}$$

10. Hallar el área del octaedro regular donde la distancia entre los centros de gravedad de dos caras opuestas que tienen un vértice común es a.

Resolución:



Sea G_1 y G_2 los centros de gravedad de 2 caras opuestas; se forma el triángulo V_1MN, observe que este triángulo con el triángulo $V_1G_1G_2$ son semejantes, por lo tanto:

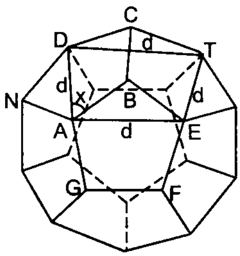
$\dfrac{L}{a} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow L = \dfrac{3a}{2}$

El área del octaedro es:

$A_8 = 8\left(\dfrac{3a}{2}\right)^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} \quad \therefore A_8 = \dfrac{9a^2}{2}\sqrt{3}$

11. En un dodecaedro regular de caras adyacentes ABCDN y ABEFG. Hallar la medida del ángulo que determinan las rectas AD y GF.

Resolución:



Piden: ángulo entre $\overline{AD}$ y $\overline{FG}$

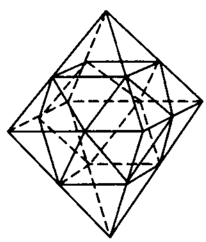
Como: $\overline{AE} \parallel \overline{GF} \Rightarrow x =$ ángulo entre ($\overline{AD}$ y $\overline{FG}$)

$\overline{AD} \parallel \overline{ET}$ y $\overline{DT} \parallel \overline{AE}$

$\square$ADTE es un cuadrado $\therefore x = 90°$

12. Al unir los puntos medios de las aristas de un octaedro regular se determina un poliedro de .... caras.

Resolución:

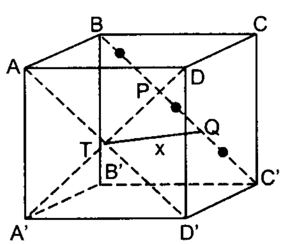


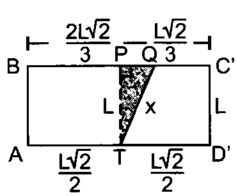
Al unir los puntos medios de todas las aristas de un octaedro regular se obtiene un poliedro de 16 caras.

Rpta.: 16 caras

13. En el hexaedro regular ABCD–A'B'C'D' de arista L, calcular la distancia del centro de la cara ADD'A' a un punto de trisección de la diagonal $\overline{BC'}$ en la cara opuesta.

Resolución:



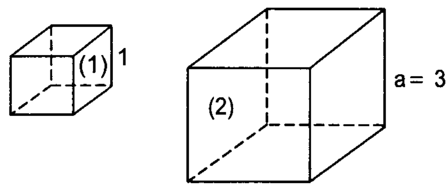


$$PQ = \frac{2L\sqrt{2}}{3} - \frac{L\sqrt{2}}{3} = \frac{L\sqrt{2}}{6};\ x^2 = L^2 + \left(\frac{L\sqrt{2}}{6}\right)^2$$

$$\therefore x = L\sqrt{\frac{19}{18}}$$

14. Se tiene 27 cúbicos de arista igual a 1, con ellos se forma un cubo mayor que es pintado exteriormente en forma total. Al desarmar el cubo. Hallar el área que ha quedado sin pintar en todos los cubitos.

Resolución:



$V_{(2)} = 27V_{(1)}$

$V_{(2)} = 27 = a^3 \Rightarrow a = 3$

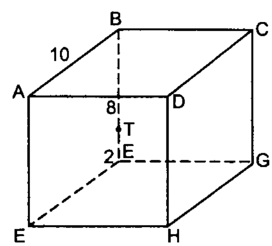
Área no pintada $= 27A_{(1)} - A_{pintada}$

$x = 27(6)(1)^2 - 6(a)^2$

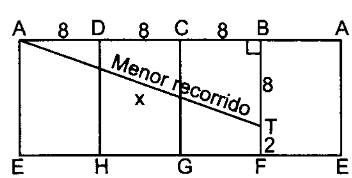
$\therefore x = 108$

15. En un hexaedro regular ABCDEFGH, en la arista BF se ubica el punto T. Si AB = 10 m, TB = 8 m. Hallar la longitud del camino más corto partiendo de A hasta llegar al punto T recorriendo 3 caras verticales del poliedro (en m).

Resolución:



Desarrollando:

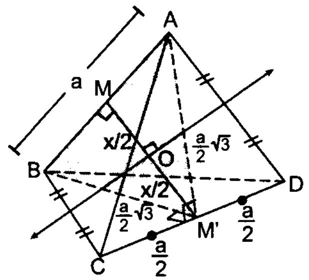


$x^2 = 8^2 + 24^2$

$\therefore x = 8\sqrt{10}$ m

16. Sea M el punto medio de la arista AB del tetraedro regular ABCD. Si el simétrico de M respecto a su eje se simetría que pasa por $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, es M'. Si la arista del tetraedro mide a. Hallar MM'

Resolución:



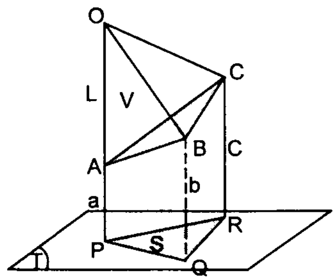
Piden: MM' = x $\Rightarrow$ MO = OM' = x/2

$AM' = BM' = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

⊾BMM': $x^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \therefore\ x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

17. Un tetraedro regular se proyecta sobre un plano perpendicular a una arista. Si la longitud de la arista del tetraedro es L; calcular el área de dicha proyección.

Resolución:



$V = V_{OBC-ADR} - V_{ABC-PQR}$

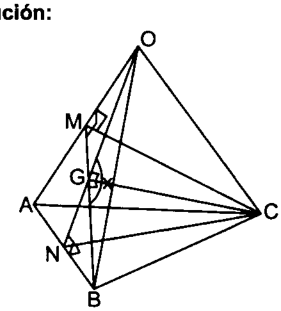
$V = S\left(\frac{a+L+b+c}{3}\right) - S\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

$V = \frac{S}{3}L$, Pero: $V = \frac{L^3\sqrt{2}}{12} \Rightarrow \frac{L^3\sqrt{2}}{12} = \frac{S}{3}L$

$\therefore\ S = \frac{L^2\sqrt{2}}{4}$

18. En un tetraedro regular, hallar la medida del ángulo diedro obtuso determinado por dos de sus planos de simetría.

Resolución:



Donde los planos BMC y ONC son planos de simetría.

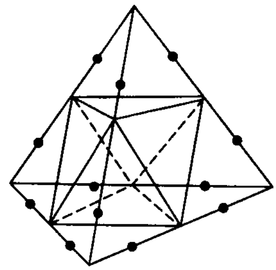
G: Centro de la cara AOB.

m∠OGB = 120°

$\therefore$ x = 120°

19. Al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular, se determina un: ....

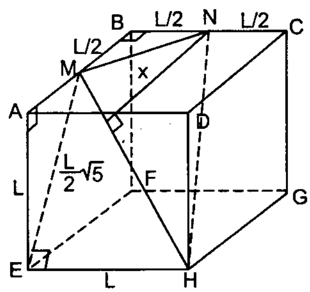
Resolución:



Al unir los puntos medios de las aristas de un tetraedro regular se obtiene un decaedro regular.

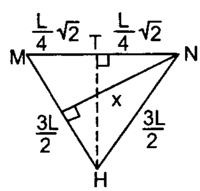
20. En un cubo ABCD-EFGH de arista L se ubican los puntos medios N y M en $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente, calcular la distancia de N a $\overline{HM}$.

Resolución:



Piden: d (N: $\overline{MH}$) = x

$MN = \frac{L}{2}\sqrt{2}$; ⊾MEH: $MH = \frac{3L}{2} = HN$

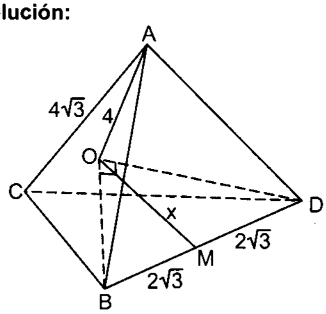


$TH = \frac{L\sqrt{34}}{4} \Rightarrow \frac{3L}{2}x = \frac{L}{2}\sqrt{2}\left(\frac{L\sqrt{34}}{4}\right)$

$\therefore\ x = \frac{L}{6}\sqrt{17}$

21. ABCD es un tetraedro regular M es el punto medio de la arista $\overline{DB}$ y O es el centro de la cara ABC, si OA = 4 m, hallar la longitud de $\overline{OM}$ (en m).

Resolución:



Piden: OM = x

$AC = 4\sqrt{3}$, como O es un centro de la cara ABC

$\Rightarrow \overline{DO} \perp \triangle ABC$

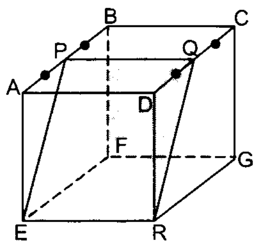
$\Rightarrow \overline{DO} \perp \overline{OB}$

⊾BOD: $BM = MD = MO = 2\sqrt{3}$

$\therefore x = 2\sqrt{3}$ m

22. Dado un cubo ABCDEFGR. Si P y Q son puntos medios de los lados AB y CD, indicar el polígono que ese determina cuando es intersectado por el plano (P, Q, R).

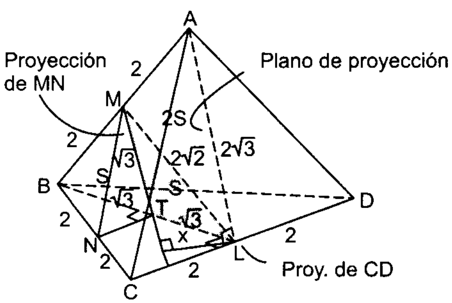
Resolución:



La sección determinada en el cubo por el plano secante que pasa por los puntos P, Q y R es una región cuadrangular.

23. En un tetraedro regular ABCD de 4 de arista, M y N son puntos medios de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$. Hallar la mínima distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$.

Resolución:



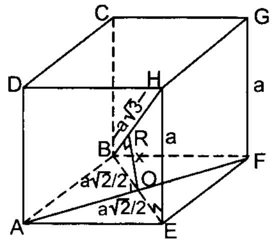
Piden: d (L; $\overline{MT}$) = x

$4S = \dfrac{(4)(2\sqrt{2})}{2} \Rightarrow S = \sqrt{2}$

$S = \sqrt{3}\dfrac{x}{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{3}\dfrac{x}{2} \quad \therefore x = 2\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

24. En un cubo ABCD-EFGH de arista a. Calcular la distancia entre las rectas $\overleftrightarrow{BH}$ y $\overleftrightarrow{AF}$.

Resolución:

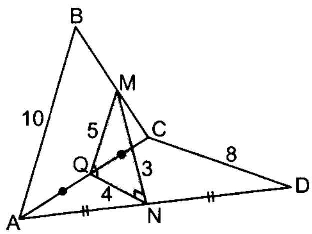


⊾BRO ~ ⊾BEH:

$\Rightarrow \dfrac{x}{a} = \dfrac{a\sqrt{2}/2}{a\sqrt{3}} \quad \therefore x = \dfrac{a\sqrt{6}}{6}$

25. Los triángulos ABC y ACD están en dos planos secantes, si AB = 10, CD = 8 y el segmento que une los puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 3, hallar la medida del ángulo que forman los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$.

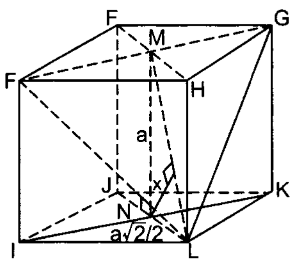
Resolución:



⊾MNQ: $\tan\theta = \dfrac{3}{4} \quad \therefore \theta = \arctan\left(\dfrac{3}{4}\right)$

26. Si en un hexaedro regular EFGH-IJKL, su arista es a; hallar la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{IK}$ y $\overleftrightarrow{LG}$.

Resolución:



⊾MNL: $\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{2}{a^2} \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{3}{a^2} \quad \therefore x = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

27. En un poliedro convexo, el número de caras, más el número de vértices y más el número de aristas es 28. Si las medidas de los ángulos de todas las caras suman 1800. Hallar el número de caras.

Resolución:

Piden: n.° de caras = C

Dato: C + V + A = 28

Por Euler: C + V = A + 2

$\Rightarrow A + 2 + A = 28 \Rightarrow A = 13$

Dato: $S\angle int = 1800°$

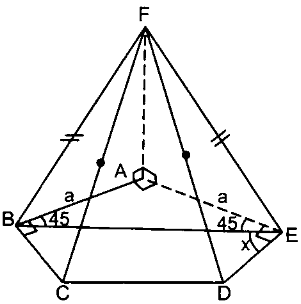
$\Rightarrow 360°(V - 2) = 1800° \Rightarrow V = 7$

Ahora: C + V = A + 2

$\Rightarrow C + 7 = 13 + 2 \quad \therefore C = 8$

28. ABCDEF es un poliedro de 6 caras y en donde sus aristas cumplen las siguientes condiciones: $\overline{FE} = \overline{FB}$. $\overline{FA} \perp \overline{AB}$; $\overline{FA} \perp \overline{AE}$; FD = FC, $\overline{BA} \perp \overline{EA}$, $\overline{CB} \perp \overline{AB}$, $\overline{DE} \perp \overline{AE}$, calcular la m∠BED.

Resolución:



Piden: m∠BED = x

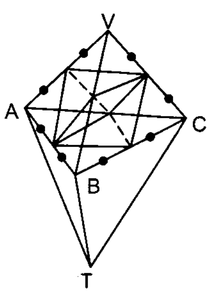
◺FAB ≅ ◺FAE ⇒ BA = AE = a

◺BAE: isósceles

$\Rightarrow m\angle ABE = m\angle AEB = 45° \quad \therefore x = 45°$

29. Se tiene un hexaedro cuyas caras triangulares son regulares. Hallar el poliedro que se forman al unir los puntos medios de todas sus aristas.

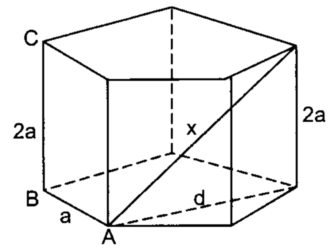
Resolución:



Como en la parte superior hay 5 caras ⇒ el poliedro que se contiene al unir los puntos enteros tiene 10 caras.

30. Sea un prisma pentagonal regular $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ son aristas básicas y laterales respectivamente. Si AB = a, BC = 2(AB) entonces determinar la longitud de la mayor diagonal que se puede trazar en el prisma.

Resolución:



$x^2 = 4a^2 + d^2$

El pentágono regular: $d = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$

$x^2 = 4a^2 + \frac{a^2}{4}(6 + 2\sqrt{5}) \quad \therefore x = \frac{a}{2}\sqrt{22 + 2\sqrt{5}}$

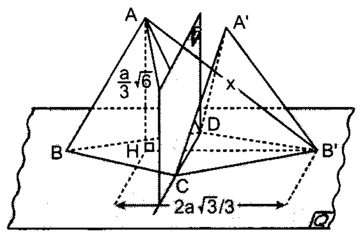
31. ¿Cuántos planos de simetría tiene un tetraedro regular?

Resolución:

El tetraedro regular tiene 6 planos de simetría.

32. Un tetraedro regular ABCD tiene a su cara BCD contenida en un plano Q. Si A'B'C'D es el tetraedro simétrico con respecto a un plano P perpendicular a Q y la arista de los tetraedros miden a; halle AB'.

Resolución:



◺AHB': $x^2 = \left[\frac{a\sqrt{6}}{3}\right]^2 + \left[\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right]^2$

Simplificando: $x = a\sqrt{2}$

33. Un octaedro regular cuya arista mide a, halle la distancia entre 2 caras opuestas.

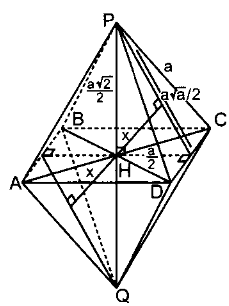
Resolución:

◺PHM;

por relaciones métricas:

$\frac{a\sqrt{2}}{2}\left(\frac{a}{2}\right) = x\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$

$\therefore 2x = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

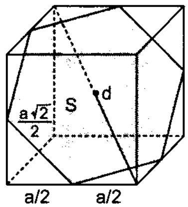


34. En un hexaedro regular se unen consecutivamente los puntos medios de dos aristas consecutivas de cada cara si el área de la sección obtenida es $6\sqrt{3}$ cm^2. Halle la longitud de la diagonal de dicho poliedro.

Resolución:

Dato: $S = 6\sqrt{3}$

De la figura: $S = 6\left[\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]^2\frac{\sqrt{3}}{4}$



Igualando: $6\sqrt{3} = 6\left[\frac{a^2}{2}\right]\frac{\sqrt{3}}{4}$

$a^2 = 8 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$

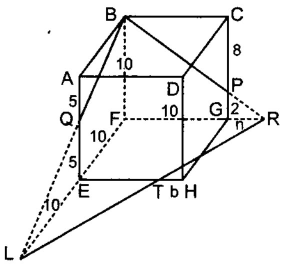
Luego: $d^2 = a^2 + 2a^2 = 3a^2$

$d = a\sqrt{3}$

$\therefore\ d = 2\sqrt{6}$ cm

35. En un hexaedro regular ABCD−EFGH cuya arista mide 10, $Q \in \overline{AE}$, $P \in \overline{CG}$, AQ = QE, CP = 4PG, el plano que pasa por los puntos B, Q y P interseca a la arista $\overline{EH}$ en T. Hallar $\frac{TE}{TH}$

Resolución:



$\triangle BFR \sim \triangle PGR$

$\frac{10}{2} = \frac{10+n}{n}$

$5n = 10 + n$

$4n = 10 \Rightarrow n = \frac{5}{2}$

$\triangle LFR$: $2a = 10 + \frac{5}{2}$

$\Rightarrow 4a = 20 + 5 = 25$

$\Rightarrow a = \frac{25}{4}$; $b = \frac{15}{4}$

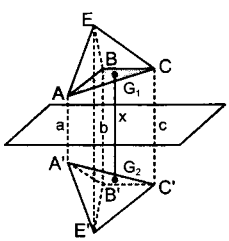
Luego: $\frac{a}{b} = \frac{\frac{25}{4}}{\frac{15}{4}}$ $\quad\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{5}{3}$

36. ABCE y EB'C'A' son poliedros simétricos respecto a un plano P de manera que $\overline{BC}$ // P, AEC ⊥ P, si BB' + CC' + AA' = 12, halle la distancia entre los baricentros de los triángulos ABC y A'B'C'.

Resolución:

Piden: $G_1G_2 = x = ?$

Dato: $a + b + c = 12$



Propiedad:

$x = \frac{a+b+c}{3}$

$x = \frac{12}{3}$

$\therefore\ x = 4$

37. Halle el área de la región limitada por la sección hecha en un tetraedro regular de 10 cm de arista por un plano de simetría que pasa por una de sus aristas (en cm^2)

Resolución:

Piden: $A_{\Delta PAD} = S$

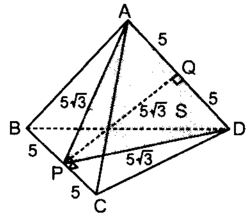
$AP = PD = 5\sqrt{3}$

$AQ = QD = 5$

$\triangle PQD$: $PQ = 5\sqrt{2}$

$S = \frac{(10)(5\sqrt{2})}{2}$

$\therefore\ S = 25\sqrt{2}$ cm^2



38. Determine la medida del menor ángulo formado por los ejes de simetría de un hexaedro regular.

Resolución:

Piden:

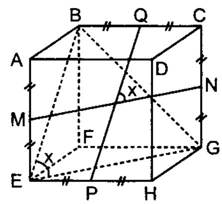
Ángulo entre $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$: x

$\overline{EB}$ // $\overline{PQ}$ y $\overline{MN}$ // $\overline{EG}$

$\Rightarrow m\angle BEG = x$

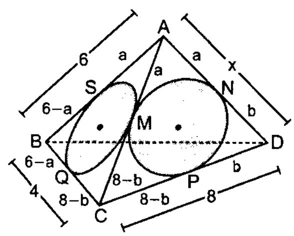
$\triangle BEG$: equilátero

$\therefore\ x = 60°$



39. En el tetraedro ABCD, los incírculos de los triángulos ABC y ADC son tangentes a $\overline{AC}$ en M. Hallar $\overline{AD}$ si: $\overline{AB} = 6$; $\overline{BC} = 4$; $\overline{CD} = 8$

Resolución:



Sea: $\overline{AN} = a$ y $\overline{DN} = b$

Siendo: $x = a + b$

Como: $\overline{AN} = \overline{AM} = \overline{AS} = a$

Entonces: $\overline{BS} = \overline{BQ} = 6 - a$

Como: $\overline{DN} = \overline{DP} = b$

Entonces: $\overline{PC} = \overline{CM} = \overline{CQ} = 8 - b$

Del gráfico: $\overline{BC} = \overline{BQ} + \overline{QC}$

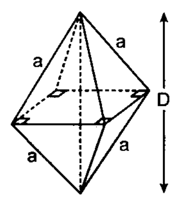
Reemplazando: $4 = (6 - a) + (8 - b)$

De donde: $x = a + b = 10$ $\quad\therefore\ x = 10$

40. Calcular el volumen del octaedro regular de diagonal D

Resolución:

Grafiquemos de acuerdo a los lados del problema, veamos



Sabemos que el volumen del octaedro regular es: $V = a^3\frac{\sqrt{2}}{3}$

pero: $D = a\sqrt{2}$

Entonces: $a = \frac{D}{\sqrt{2}}$

Por lo tanto el volumen será: $V = \left(\frac{D}{\sqrt{2}}\right)^3\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{D^3}{6}$

41. Calcular el volumen del cubo en el cual, se ha tomado un punto interior, de modo que la suma de sus distancias a las 6 caras es 12 cm.

Resolución:

Grafiquemos de acuerdo a los datos del problema, veamos:

"O" es el punto interior al cubo

Del gráfico observamos que:

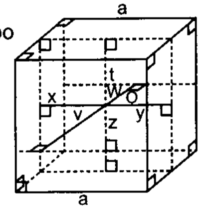
$x + y = a$

$v + w = a$

$t + z = a$

Sumemos como indica el dato:

$$\underbrace{x + y + v + w + t + z}_{12} = 3a$$



$12 = 3a$; de donde: $a = 4$

El volumen del cubo será: $V = a^3 = 4^3 = 64\ cm^3$

42. En un tetraedro regular P–ABC, se traza la altura $\overline{PH}$, en la cual se ubica el punto Q tal que QB = QP, AB = 12. Halle: QC–QH.

Resolución:

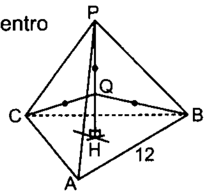
Piden: QC = QH

Como QB = QP ⇒ Q es el centro del tetraedro regular

⇒ QC = QP = QB = QA

y PQ = 3(QH)

$PH = 12\dfrac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow PH = 4\sqrt{6}$



Ahora: $QH = \sqrt{6}$ y $PQ = 3\sqrt{6}$

$\Rightarrow QC - QH = 3\sqrt{6} - \sqrt{6}$

$\therefore QC - QH = 2\sqrt{6}$

43. En un hexaedro regular ABCD – EFGH, se ubican los puntos medios M y N de las aristas AD y FG respectivamente. Halle la medida del ángulo que determinan $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$.

Resolución:

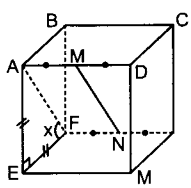
Nos piden:

Ángulo entre $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$

Como $\overline{AF}$ // $\overline{MN}$

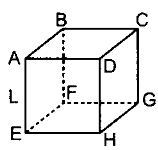
⇒ x: Ángulo entre $\overline{MN}$ y $\overline{EF}$

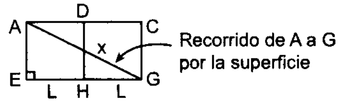
∴ x = 45°



44. Si ABCD–EFGH es un cubo de arista L, entonces la longitud de menor camino para ir de A a G recorriendo la superficie cúbica es:

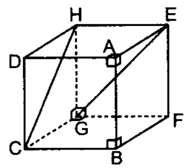
Resolución:





$\therefore x = L\sqrt{5}$

45. En el cubo que se muestra, calcule la medida del ángulo que forman $\overline{CH}$ y $\overline{EG}$.



Resolución:

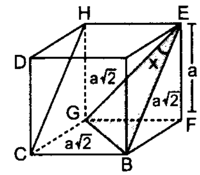
Piden la medida del ángulo formado por $\overline{CH}$ y $\overline{EG}$ (segmentos alabeados)

⇒ se traza $\overline{EB}$ // $\overline{HC}$

x: medida del ángulo pedido

Como $GE = EB = GB = a\sqrt{2}$

⇒ △GBE (equilátero) ∴ x = 60°



46. Se desea construir un objeto de la forma de un poliedro cuyas caras serían regiones cuadrangulares y regiones triangulares. ¿Con cuántas regiones triangulares se debe construir este objeto para que su número de vértices sea igual al número de caras?

Resolución:

Por condición del problema: $A = \dfrac{4(m) + 3(n)}{2}$

Donde m es el n.° de regiones cuadrangulares, n es el número de regiones triangulares.

Luego, el número de caras es: C = m + n

Por dato: V = C,

Por el T. de Euler: C + V = A + 2

$$m + n + m + n = \frac{4m + 3n}{2} + 2$$

$4m + 4n = 4m + 3n + 4 \quad \therefore n = 4$

47. Un poliedro que tiene 12 vértices y 21 aristas está formado por 2 p triángulos, c cuadriláteros y p pentágonos, todos convexos, entonces p y c son respectivamente.

Resolución:

Datos

El poliedro tiene 12 vértices y 21 aristas

El poliedro está formado por 2p triángulos, c cuadriláteros y p pentágonos, entonces tiene 3p + c caras.

Teorema de Euler

n.° de caras + n° de vértices = n.° aristas + 2

Reemplazando

$(3p + c) + (12) = (21) + 2 \qquad \ldots(I)$

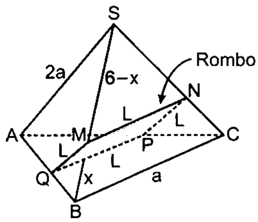
Por propiedad

$$21 = \frac{(2p)(3)+(c)(4)+(p)(5)}{2}$$

De (I) y (II) $\quad \therefore\ p = 2;\ c = 5$

48. En un tetraedro S – ABC se trazan un plano paralelo a las aristas $\overline{SA}$ y $\overline{BC}$, el cual corta en M a $\overline{SB}$. Calcular $\overline{BM}$ para que la sección obtenida sea un rombo, siendo: $\overline{SA} = 2\overline{BC}$, $\overline{SB} = 6$

Resolución:



En el triángulo equilátero SMN es equivalente al triángulo equilátero.

SBC: $\frac{a}{L} = \frac{6}{6-x}$

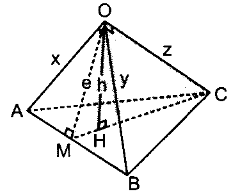
En el triángulo equilátero BMQ es equivalente al triángulo equilátero.

ASB: $\frac{2a}{L} = \frac{6}{x}$

De (2) y (3) se obtiene: $2\left(\frac{6}{6-x}\right) = \frac{6}{x} \quad \therefore\ x = 2$

49. En un tetraedro O–ABC; el triedro O es trirrectángulo. Halle la distancia trazada del vértice O a la cara ABC, si: $\frac{1}{(OA)^2} + \frac{1}{(OB)^2} + \frac{1}{(OC)^2} = \frac{1}{4a^2}$

Resolución:



$\triangle AOB$: $\frac{1}{e^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \quad \ldots(1)$

$\triangle MOC$: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{e^2} + \frac{1}{z^2} \quad \ldots(2)$

(1) en (2): $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{4a^2}$

$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} \quad \therefore\ h = 2a$

50. Halle el volumen del tetraedro regular ABCD, sabiendo que la distancia del baricentro de la cara ABC, a la altura del tetraedro que parte de B es de $\frac{\sqrt{3}}{9}$ cm.

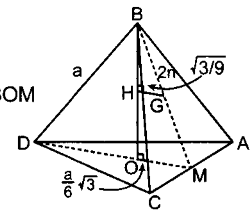
Resolución:

Piden $V_{\text{tetraedro}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$

Dato: $HG = \frac{\sqrt{3}}{9}$

Calculo de a $\triangle BHG \sim \triangle BOM$

$$\frac{\frac{a}{6}\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{9}} = \frac{3n}{2n} \Rightarrow a = 1$$



$\therefore\ V_{\text{tetraedro}} = \frac{\sqrt{2}}{12}$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

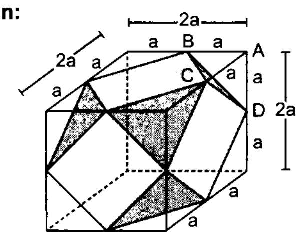
PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

En un hexaedro regular los puntos de sus aristas son los vértices de un poliedro.

Determine la relación: $\frac{\text{volumen del poliedro}}{\text{volumen del hexaedro}}$

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{3}{4}$ D) $\frac{5}{6}$ E) 2

Resolución:



$V_{\text{hexaedro}} = (2a)^3 = 8a^3$

$V_{\text{poliedro}} = V_{\text{hexaedro}} - 8V_{A-BCD} = 8a^3 - 8\left(\frac{1}{3}\frac{a^2}{2}a\right)$

$V_{\text{poliedro}} = 8a^3 - \frac{8}{6}a^3 = \frac{40}{6}a^3 = \frac{20}{3}a^3$

$$\therefore\ \frac{V_{\text{poliedro}}}{V_{\text{hexaedro}}} = \frac{\frac{20}{3}a^3}{8a^3} = \frac{5}{6}$$

Clave: D

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

La arista de un octaedro regular mide 6 m. Calcule la distancia (en m) del centro del octaedro a una cara.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$
D) $\sqrt{8}$ E) 3

Resolución:

OM = 3

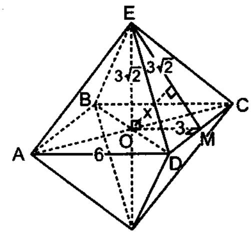
EO = $3\sqrt{2}$

EM = $3\sqrt{3}$

⊾EOM por relaciones métricas

$3\sqrt{3}x = 3\sqrt{2}(3)$

$\therefore\ x = \sqrt{6}$ m



Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Si en un hexaedro regular, la distancia de un vértice a una de las diagonales que no contenga a este vértice es $\sqrt{2}$ m, entonces la longitud de esta diagonal es:

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{6}$ C) $\sqrt{7}$ D) $\sqrt{8}$ E) $\sqrt{9}$

Resolución:

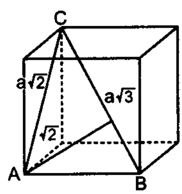
Piden $a\sqrt{3}$

Teorema:

$\triangle ABC$: $a(a\sqrt{2}) = a\sqrt{3}(\sqrt{2})$

$a = \sqrt{3}$

$\therefore\ a\sqrt{3} = \sqrt{9}$ m



Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Calcule la medida de un ángulo formado entre una arista lateral y la base de un tetraedro regular.

A) $\arctan(\sqrt{2})$ B) $\text{arcsen}(\sqrt{2})$ C) $\arccos(\sqrt{3})$

D) $\arccos(\sqrt{2})$ E) $\text{arccot}(\sqrt{3})$

Resolución:

Piden: x

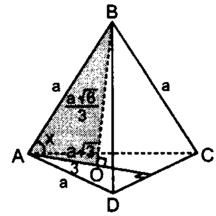
Se sabe que en el tetraedro regular se cumple:

$AO = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$

$BO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow$ ⊾AOB: $\tan x = \dfrac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \sqrt{2}$

$\therefore\ x = \arctan(\sqrt{2})$



Clave: A

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

En un tetraedro regular de arista a, la distancia desde el entro de una de sus caras a cada una de las caras restantes es:

A) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$ B) $\dfrac{a}{\sqrt{3}}$ C) $\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$

D) $\dfrac{a}{\sqrt{6}}$ E) $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$

Resolución:

Piden: x

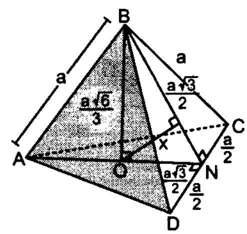
O: Baricentro del $\triangle ABC$

$BO = \dfrac{a\sqrt{6}}{3}$

$\triangle BON$: relaciones métricas

$\dfrac{a\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{6}\right) = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}x$

$\therefore\ x = \dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{2}{3}}a$



Clave: E

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se tiene un poliedro convexo formado por 10 regiones cuadrangular. Calcular el número de aristas de dicho poliedro.

A) 12 B) 14 C) 16
D) 18 E) 20

2. Calcular el número de aristas de aquel poliedro, cuyo número de caras y el número de aristas están en la relación de 2 a 3. Además, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es igual a 3600°.

A) 20 B) 24 C) 28
D) 30 E) 32

3. Un poliedro convexo está formado por n regiones triangulares y m regiones cuadrangulares. Además, el número de caras y el número de vértices de dicho poliedro son 14 y 19, respectivamente. Calcular (n − m).

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. ¿Cuál de las siguientes preposiciones es falsa?

A) En todo triedro, pueden existir 2 caras iguales.
B) En todo triedro, pueden existir 3 caras iguales.
C) En todo poliedro, la suma de los diedros es menor que 6 rectos y mayor que 2 rectos.
D) En un tetraedro, la suma de los diedros es menor que 12 rectos y mayor que 4 rectos.
E) La suma de las caras de un dodecaedro regular, es 6480°.

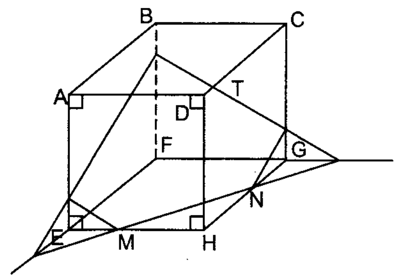
5. Respecto a un tetraedro cualquiera, si s, en la suma de todos los ángulos diedros, señalar la afirmación correcta:

A) 2 rectos < s < 6 rectos
B) 4 rectos < s < 12 rectos
C) S puede formar cualquier valor
D) 3 rectos < s < 9 rectos
E) 2 rectos < s < 8 rectos

6. Se da un cubo de aristas a. Tomando como referencia un vértice, construya un tetraedro regular, uniendo vértices no adyacentes con rectas contenidas en las caras.
Construya un octaedro regular, uniendo los centros de cada cara del cubo. La razón entre el área total del tetraedro y el área total del octaedro, es:

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{1}{2}$ C) 1
D) 2 E) 3

7. En un hexaedro regular ABCD-EFGH de aristas laterales $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$, los puntos M y N son puntos medios de las aristas $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$. El punto T es el centro de la cara BCGF, si la arista del hexaedro mide L cm.
Hallar el área de la sección determinada en el interior del hexaedro por el plano que pasa por los puntos M, N y T.



A) $\frac{7L^2\sqrt{6}}{8}$ cm² B) $\frac{7L^2\sqrt{6}}{18}$ cm² C) $\frac{7L^2\sqrt{6}}{9}$ cm²
D) $\frac{7L^2\sqrt{6}}{16}$ cm² E) $\frac{7L^2\sqrt{6}}{12}$ cm²

8. La suma de todos los ángulos diedros de un tetraedro cualquiera está comprendido entre:

A) 4 rectos y 12 rectos
B) 4 rectos y 24 rectos
C) 6 rectos y 16 rectos
D) 6 rectos y 24 rectos
E) 2 rectos y 6 rectos

9. Considerando como vértices los puntos donde se cortan las dos diagonales de cada cara de un hexaedro regular, se obtiene un octaedro, también regular. Si las aristas del hexaedro mide a cm, hallar la medida de las caras del octaedro.

A) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$ cm² B) $\frac{a^2}{4}$ cm² C) $\frac{a^2}{8}$ cm²
D) $\frac{3a^2}{8}$ cm² E) $\frac{3a^2}{4}$ cm²

10. En un cubo, las caras opuestas son ABCD y EFGH, siendo las aristas que las conectan $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. El ángulo que forma $\overline{BE}$ con $\overline{AH}$ mide:

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 75° E) 90°

11. En un tetraedro OABC, se cumple: m∠COB = 60°, m∠AOB = 45°, m∠AOC = 45°. Hallar el valor del ángulo diedro correspondiente a la arista OA.

A) 45° B) 60° C) 75°
D) 90° E) 120°

12. Un poliedro que tiene 12 vértices y 21 aristas está formado por 2p triángulos, c cuadriláteros y p pentágonos, todos convexos. Entonces, p y c son, respectivamente:

A) 1 y 8 B) 3 y 2 C) 2 y 5
D) 3 y 4 E) 4 y 1

13. Un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son a, b, c (siendo c la altura). Sea: a = c = 4 cm. Suponiendo que el área total es igual a 4 veces el área de uno de los rectángulos diagonales verticales, entonces, dicha área total, en cm^2, es:

A) 76 B) 78 C) 80
D) 82 E) 84

14. ¿Cuántas diagonales tiene aquel poliedro convexo que está limitado por 6 regiones cuadrangulares y 8 regiones triangulares.

A) 38 B) 36 C) 34
D) 32 E) 30

15. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es o son correctas?

I. Si dos rectas son paralelas al plano E, entonces, el plano determinado por dicha rectas es paralela a E.
II. Si un triedro tiene dos caras de 90°, necesariamente es un triedro trirrectángulo.
III. Para calcular el área de un poliedro regular, basta hallar el área de una de sus caras y multiplicarla por el número de ellas.

A) Solo I B) Solo II C) Solo III
D) I y II E) II y III

16. En un tetraedro regular, si el segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas es $\overline{MN}$. El lado del tetraedro, será:

A) $MN\sqrt{3}$ B) $MN\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $MN\sqrt{2}$
D) $MN\frac{\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{2}{3}MN$

17. Dado el hexaedro regular ABCD-EFGH de aristas lateras $\overline{AE}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$ y $\overline{DH}$. Los puntos M y N son puntos medios de las aristas $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$. Hallar la medida del ángulo diedro entre el plano MNB y el plano EFGH.

A) $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

C) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ D) $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$

E) $\arccos\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$

18. Se tiene un cubo de arista a, hallar el área del triángulo PQR, si P es centro del cubo Q y R son puntos medios en la aristas.

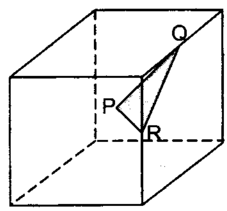
A) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

B) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

C) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

D) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$

E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$



19. En un triedro trirectángulo O-ABC se sabe que: OA = 1 cm; OB = 2 cm y OC = 3 cm. Hallar la distancia de O a la sección plana ABC.

A) 5/7 B) 6/7 C) 1
D) 4/7 E) 5/8

20. Se tiene un tetraedro regular de arista a Hallar el volumen del tetraedro regular que se forma al unir los baricentros de las caras:

A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$ B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{81}$ C) $\frac{a^3\sqrt{2}}{162}$

D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{216}$ E) $\frac{a^3\sqrt{2}}{324}$

21. En el triedro isósceles:
O-ABC: b = c = 60° y a = 90°.
Sobre $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$ se ubican los puntos M, N y L, respectivamente tal que: ON + OL = $8\sqrt{2}$ y $m\angle LMN = 90°$. Calcular la longitud de $\overline{OM}$.

A) $8\sqrt{2}$ cm B) 8 cm C) 16 cm
D) $4\sqrt{2}$ cm E) 4 cm

22. O es el centro de un hexaedro regular ABCD-EFGH; M y N son los puntos medios de $\overline{CD}$ y $\overline{CG}$, respectivamente. Si el área de la región triangular OMN es S, calcular el área total del hexaedro regular.

A) $8S\sqrt{3}$ B) $16S\sqrt{3}$ C) $24S\sqrt{3}$
D) $12S\sqrt{3}$ E) 9S

23. En un tetraedro ABCD, se tiene que:
AC = AD y BC = BD. Hallar la medida del ángulo que forman las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

A) 45° B) 60° C) 90°
D) 30° E) 120°

24. Se tiene un triedro trirectángulo O-ABC, se traza $\overline{OH}$ perpendicular a la sección plana ABC. Hallar el área de la cara BOC, si las áreas de las caras ABC y BHC miden 20 y 10 cm^2, respectivamente.

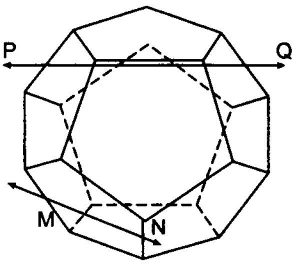
A) $10\sqrt{2}\ cm^2$ B) 5 cm^2 C) $5\sqrt{2}\ cm^2$
D) $15\sqrt{2}\ cm^2$ E) 10 cm^2

25. En un hexaedro regular ABCD–EFGH, de volumen 64, en $\overline{CH}$ se ubica el punto M, de modo que:

MH = 3MC. Si: $\overline{AM}$ interseca en N al plano que contiene a la cara EFGH, calcular MN.

A) $3\sqrt{37}$ B) $2\sqrt{7}$ C) $7\sqrt{19}$
D) $3\sqrt{26}$ E) $5\sqrt{11}$

26. En el gráfico, se muestra un dodecaedro regular, siendo P, Q, M y N puntos medios de las aristas respectivas. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{PQ}$ y $\overleftrightarrow{MN}$.



A) 18° B) 36° C) 54° D) 72° E) 45°

27. En un tetraedro regular ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Si la distancia entre $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$ es $3\sqrt{2}$, calcular el área de la superficie del poliedro conjugado del tetraedro inscrito en él.

A) $4\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) $16\sqrt{3}$
D) $6\sqrt{3}$ E) $5\sqrt{3}$

28. Se tiene un hexágono regular ABCDEF de lado a en un plano P, CDL es un triángulo equilátero perpendicular a dicho plano. El área del triángulo ALF equivalente al área total de un tetraedro regular de arista:

A) $\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$ B) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$ C) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{15}}{6}}$
D) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{5}}{12}}$ E) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{15}}{12}}$

29. En un tetraedro regular A-BCD, se traza la altura $\overline{AA'}$ y sobre dicha altura se toma $AM = \frac{1}{3}\overline{AA'}$. M se une con los vértices B, C y D. Determinar la suma de las caras del triedro.

A) $3\arccos\frac{7}{34}$ B) $3\arccos\frac{6}{26}$
C) $3\operatorname{arcsen}\frac{7}{34}$ D) $3\arccos\frac{1}{4}$
E) $3\arccos\frac{1}{17}$

30. En el octaedro regular E-ABCD-F, M es punto medio de $\overline{EC}$. Calcular el ángulo formado por $\overleftrightarrow{AM}$ y $\overleftrightarrow{DF}$.

A) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{5}$ B) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$ C) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$
D) $\arccos\frac{\sqrt{10}}{10}$ E) $\arccos\frac{\sqrt{5}}{10}$

31. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

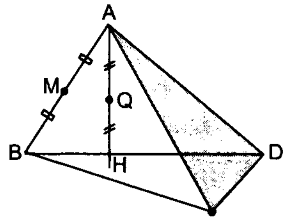
I. En los vértices de todo poliedro regular se forman ángulos diedros.
II. El icosaedro regular tiene 100 diagonales.
III. En un dodecaedro hay 20 vértices.
IV. Las diagonales de un octaedro regular son perpendiculares.

A) FVFV B) VVVV C) FFFV
D) VFVF E) FFFF

32. Dado el cubo ABCD-EFGH de arista a, M y N son puntos medios de $\overline{AE}$ y $\overline{CG}$. Siendo O el centro de la cara CDHG, hallar la distancia del punto de intersección entre $\overline{OF}$ y el plano que contiene a MBNH, a la cara EFGH.

A) $\frac{2a}{5}$ B) $\frac{3a}{5}$ C) $\frac{a}{4}$
D) $\frac{3a}{8}$ E) $\frac{a}{5}$

33. ABCD es un tetraedro regular, cuya altura es $\overline{AH}$. Calcular el ángulo que forman las rectas $\overline{HM}$ y $\overline{DQ}$.



A) 120° B) 127° C) 135°
D) 150° E) 165°

34. La longitud del segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular es de $\sqrt{2}$ cm. ¿Cuál es la longitud de la arista?

A) 1 cm B) 2 cm C) 3 cm
D) $\sqrt{2}$ cm E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm

35. Se tiene un cubo ABCD-EFGH y un punto interior P. Si: $(PA)^2 + (PC)^2 - (PB)^2 = a^2$, hallar PD.

A) a B) 2a C) $\frac{a}{2}$
D) $\frac{3a}{2}$ E) 3a

36. Calcular el radio de la esfera inscrita en un octaedro regular, cuyo volumen es igual a $4\sqrt{3}$ cm^3

A) $\sqrt{3}$ B) 3 C) $\sqrt{6}$
D) $\sqrt{2}$ E) 1

37. En un tetraedro P-ABC trirectángulo en P, $PA = PB = PC = 3\sqrt{2}$. Calcular la diagonal de cubo inscrito en el tetraedro, donde uno de los ángulos sólidos del cubo es P.

A) 3 B) $\sqrt{6}$ C) 4
D) $2\sqrt{3}$ E) 6

38. Se tiene el hexaedro regular ABCD-EFGH, cuyas aristas mide 7. Calcular la menor distancia entre las rectas AC y MG, siendo M punto medio de la arista AD.

A) $\sqrt{9}$ B) $\sqrt{3}$ C) 3
D) $\frac{7}{3}$ E) $\sqrt{2}$

39. Calcular la medida del ángulo diedro formado por dos caras adyacentes de un tetraedro regular.

A) $\arctan\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ B) 90°
C) 60° D) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
E) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

40. En un hexaedro regular ABCD−EFGH, P es el centro de la cara ABCD, M es punto medio de la arista FG; de modo que:

$(EP)^2 + (BH)^2 + (DG)^2 + (AM)^2 = 140\text{ cm}^2$

Calcular el área de la sección diagonal ubicada en dicho hexaedro.

A) 16 cm^2 B) $16\sqrt{2}$ cm^2 C) 24 cm^2
D) $12\sqrt{3}$ cm^2 E) 18 cm^2

41. En un hexaedro ABCD-EFGH, O es el centro de la cara ABCD, P de $\overline{AG}$; de tal manera que:
$m\angle OPA = 90°$ y $OF = 2\sqrt{5}$.
Calcular: $(PG)^2 - (AP)^2$

A) 200 B) 180 C) 160
D) 140 E) 120

42. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide $2\sqrt{3}$. Calcular el área de la sección diagonal ubicada en dicho octaedro.

A) 12 B) $6\sqrt{6}$ C) 16
D) $8\sqrt{3}$ E) 18

43. Se tiene un tetraedro regular E-ABC, la mayor distancia de E a la circunferencia exinscrita al triángulo ABC relativa al lado BC es igual a $6\sqrt{19}$. Calcular el volumen de dicho tetraedro.

A) 180 B) $144\sqrt{2}$ C) $36\sqrt{6}$
D) 200 E) $120\sqrt{5}$

44. En un tetraedro P-ABC, trirectángulo en P, se trazan las alturas PL, PM y PN de las caras APB, BPC y APC, respectivamente, de tal manera que:

$$\frac{1}{(PL)^2} + \frac{1}{(PM)^2} + \frac{1}{(PN)^2} = \frac{1}{2}$$

Calcular la distancia de P a la cara ABC.

A) 1 B) $\sqrt{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) 2 E) $\frac{1}{2}$

45. El volumen de un tetraedro regular es igual a $\frac{9}{4}\sqrt{2}$.
Calcular la longitud de la altura de dicho tetraedro.

A) $3\sqrt{2}$ B) 3 C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{6}$ E) 2

46. Se tiene un octaedro regular E-ABCD-F, cuya arista mide 6. Calcular la mínima distancia entre las rectas BC y EM, siendo M punto medio de la arista AD.

A) $2\sqrt{6}$ B) 6 C) $3\sqrt{3}$
D) 3 E) $2\sqrt{3}$

47. Se da un cubo de arista a, tomando como referencia un vértice, construya un tetraedro regular de arista igual al cubo y construya un octaedro regular, uniendo los centros de cada cara del cubo. La razón entre los volúmenes del tetraedro y el octaedro es:

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

48. ¿En qué relación se encuentran los volúmenes de un octaedro regular y el de su poliedro conjugado?

A) $\frac{5}{3}$ B) $\frac{11}{5}$ C) 2
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ E) $\frac{9}{2}$

49. El área total de un tetraedro regular es igual a $8\sqrt{3}$ cm^2. Calcular la mínima distancia entre dos aristas opuestas de dicho tetraedro.

A) $\sqrt{3}$ B) $\sqrt{2}$ C) 3
D) 2 E) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

50. El volumen de un octaedro regular es igual a $\sqrt{6}$ cm^2. Calcular la distancia del centro del octaedro a una de sus caras.

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C) 1
D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

51. La distancia del centro de un tetraedro regular a una de sus caras es igual a 2 cm. Calcular el volumen del tetraedro.

A) $36\sqrt{6}$ cm^3 B) $48\sqrt{3}$ cm^3 C) $72\sqrt{2}$ cm^3
D) $64\sqrt{3}$ cm^3 E) $80\sqrt{2}$ cm^3

52. La distancia del centro de un icosaedro regular a una de sus caras es igual a $\sqrt{7+3\sqrt{5}}$. Calcular el volumen del icosaedro.

A) $40\sqrt{21+9\sqrt{5}}$ B) $36\sqrt{18+16\sqrt{5}}$
C) 96 D) $24\sqrt{35+21\sqrt{6}}$
E) $48\sqrt{42+18\sqrt{5}}$

53. Hallar en qué relación se encuentran las áreas de un hexaedro y un icosaedro regulares, sabiendo que la arista del primero es la triple de la del segundo.

A) 9 B) 18 C) $\sqrt{5}$
D) $9\sqrt{3}$ E) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$

54. Un tetraedro regular de 400 m^2 de superficie total, se secciona mediante un plano paralelo a una cara, de modo que se obtiene un tetraedro cuyas aristas son la mitad de los del tetraedro original y un tronco de pirámide de cuya superficie total será:

A) 200 B) 300 C) 350
D) 325 E) 250

55. Un poliedro convexo está limitado por 4 regiones triangulares, 2 regiones cuadrangulares y x regiones pentagonales. Calcular x, si la suma del número de aristas con el número de diagonales de dicho poliedro es igual a 44.

A) 8 B) 7 C) 6 D) 5 E) 4

56. El área, de la sección diagonal, de un cubo es igual a $16\sqrt{2}$. Calcular la diagonal del cubo.

A) 8 B) $4\sqrt{2}$ C) 6 D) $4\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{6}$

57. Hallar el área total de un tetraedro regular, siendo la suma de las longitudes de sus aristas 36 cm.

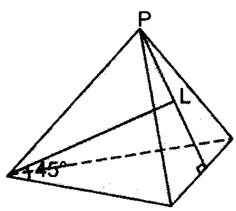
A) 36 cm^2 B) $6\sqrt{3}$ cm^2 C) 24 cm^2
D) $36\sqrt{3}$ cm^2 E) $24\sqrt{3}$ cm^2

58. En un tetraedro regular ABCD con diámetro en AC se traza un semicírculo tangente a $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$. Si el área del semicírculo es $3\pi/2$, calcular el área de la superficie del tetraedro.

A) $18\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) 36
D) $18\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{3}$

59. Se muestra un tetraedro regular. Si PL = $6\sqrt{3}$, calcule el área de la superficie de dicho sólido.

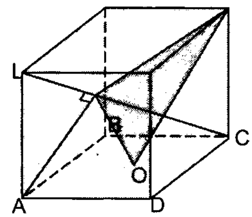
A) $725\sqrt{3}$
B) $900\sqrt{3}$
C) $225\sqrt{3}$
D) $426\sqrt{3}$
E) $672\sqrt{3}$



60. En un tetraedro regular de arista a, calcular el área de la región determinada por un punto plano que contiene al punto de intersección de las alturas del tetraedro y es paralelo a una de las caras.

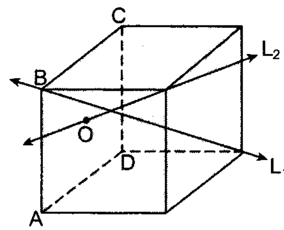
A) $5a^2\frac{\sqrt{3}}{16}$ B) $9a^2\frac{\sqrt{3}}{32}$
C) $\frac{4a^2\sqrt{3}}{25}$ D) $\frac{5a^2\sqrt{3}}{32}$
E) $\frac{9a^2\sqrt{3}}{64}$

61. En el hexaedro regular mostrada, O es centro de la región ABCD. Si el área de la región sombreada es $9\sqrt{2}$, calcular el volumen del hexaedro.



A) 145 B) 190 C) 216
D) 192 E) 220

62. Se muestra un hexaedro regular, en el cual O es centro de la cara ABCD. Calcular la medida del ángulo que determinan $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.



A) 45° B) 75° C) 60°
D) 90° E) 80°

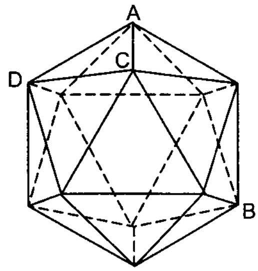
63. En un poliedro regular de 30 aristas, cuya longitud es L, calcular el área de la superficie poliédrica si tiene el menor número de vértices.

A) $4L^2\sqrt{3}$ B) $2L^2\sqrt{3}$ C) $6L^2\sqrt{5}$
D) $2L^2\sqrt{2}$ E) $5L^2\sqrt{3}$

64. Se tiene un octaedro regular P-ABCD-Q cuya arista mide $2\sqrt{3}$. Calcular la distancia entre $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta que contiene a los baricentros de las caras DPC y ABQ.

A) $\sqrt{3}$ B) 1 C) $\sqrt{2}$
D) 2 E) $2\sqrt{3}$

65. En el gráfico se muestra un icosaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre $\overrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.



A) 60° B) 54° C) 72°
D) 75° E) 90°

66. En un hexaedro regular ABCD-EFGH, se ubican los centros O y P de las caras EFGH y FGCB, luego se traza el cubo ORGL-ISMP. Si TO = 3(AT), calcular la razón de áreas de las regiones proyectadas por AOLB sobre las caras AFHG y HGCD.

A) 1/2 B) 1/4 C) 2/3
D) 1/3 E) 3/4

67. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

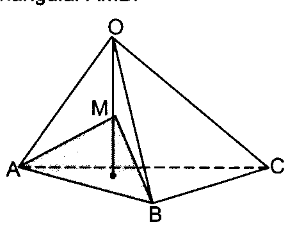
I. Si un poliedro regular tiene A aristas, su conjugado tendrá A vértices.
II. Un poliedro y su conjugado tienen igual número de vértices.
III. El área de la superficie de un poliedro puede ser menor que la de su conjugado.

A) FVF B) FFV C) FFF
D) VVF E) VFV

68. En un tetraedro regular ABCD, M es punto de medio de $\overline{AC}$, calcular la tangente del ángulo entre la altura $\overline{AP}$ y $\overline{MD}$.

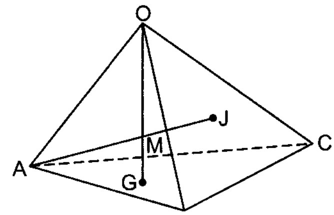
A) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ B) $\frac{\sqrt{14}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{15}}{2}$
D) $\frac{\sqrt{14}}{3}$ E) $\frac{\sqrt{7}}{3}$

69. En el gráfico O-ABC tetraedro regular de altura OH, si OM = MH y BC = a. Calcular el área de la región triangular AMB.



A) $\frac{a^2}{4}$ B) $\frac{a^2}{6}$ C) $\frac{a^2}{8}$
D) $a^2\sqrt{2}$ E) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

70. En el gráfico OABC es un tetraedro regular G y J son baricentros de las caras ABC y OBC respectivamente. Si GM = 5, calcular AG.



A) $8\sqrt{2}$ B) 10 C) $10\sqrt{2}$
D) 15 E) $9\sqrt{2}$

71. Calcular el número de caras de un poliedro sabiendo que la suma de los ángulos internos de todas sus caras es 10 800° y la suma entre el número de caras, de vértices y de aristas es 90.

A) 14 B) 16 C) 18
D) 20 E) 24

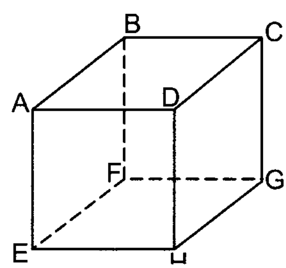
72. En un octaedro regular P-ABCD-Q calcular la distancia de P hacia el plano que contiene al triángulo ABQ si la distancia del punto P hacia la circunferencia inscrita en el triángulo AQC es $\sqrt{17}$.

A) $2\sqrt{3}$ B) $\sqrt{3}$ C) $2\sqrt{2}$
D) $\frac{\sqrt{17}}{2}$ E) $\sqrt{17}$

73. Se tiene un hexaedro regular ABCD-EFGH, de modo que P, Q, R y S son centros de las caras ABFE, ADFE, DCGF y DCGH respectivamente. Calcular la medida del ángulo diedro formado por los planos PQH y RSH.

A) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ B) $\arccos\left(\frac{1}{4}\right)$
C) $\arccos\left(\frac{1}{6}\right)$ D) $\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
E) $\arccos\left(\frac{1}{3}\right)$

74. En el cubo mostrado con una arista de longitud 6 m. Hallar la mínima distancia entre $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$.



A) $2\sqrt{2}$ m B) $2\sqrt{3}$ m C) $\sqrt{2}$ m
D) $3\sqrt{3}$ m E) $\sqrt{2}$ m

75. Analizar las siguientes proposiciones:
I. El tetraedro, hexaedro y dodecaedro poseen ángulos triedros.
II. Si en un poliedro todas las caras están limitadas por polígonos regulares congruentes, entonces dicho poliedro es regular.
III. El poliedro conjugado del dodecaedro es un icosaedro.
IV. El dodecaedro es el poliedro regular que tiene mayor cantidad de diagonales.

A) VFVF B) VFVV C) FVFV
D) VFFF E) FVVV

76. Determinar el valor del ángulo diedro de un tetraedro regular.

A) 60° B) 90° C) $\arccos\left(\frac{2}{3}\right)$
D) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$ E) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

77. El área de un tetraedro es $4\sqrt{3}\,m^2$. Calcular su altura.

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ m B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m C) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$ m
D) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m E) $2\sqrt{6}$ m

78. El volumen de un tetraedro es $\frac{2\sqrt{2}}{3}\ m^3$.
Calcular su arista.

A) 1 m B) 2 m C) 6 m D) 3 m E) 4 m

79. Calcular la arista de un tetraedro cuya altura mide 1 m.

A) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ m B) $\sqrt{6}$ m C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ m
D) $2\sqrt{6}$ m E) $\frac{2}{3}\sqrt{6}$ m

80. La suma de las medidas de las caras de un poliedro convexo, es 3600°. Si el número de aristas excede en 2 al doble del número de caras. Calcular el número de caras.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

81. Hallar en que relación se encuentran las áreas de un octaedro y un icosaedro regulares, sabiendo que la arista del primero es el triple del segundo.

A) 15/7 B) 20/3 C) 18/5
D) 10/7 E) 12/5

82. Hallar la relación de áreas entre el octaedro regular y el icoasedro regular donde el inradio de una de las caras del octaedro es el circunradio de una de las caras del icosaedro regular.

A) $\frac{8}{5}$ B) $\frac{8}{3}$ C) $\frac{4}{3}$
D) $\frac{9}{5}$ E) $\frac{12}{7}$

83. Calcular el área de la proyección de un tetraedro regular, de arista cuya longitud es 2 m, sobre un plano perpendicular a una arista.

A) $\sqrt{2}\,m^2$ B) $\sqrt{3}\,m^2$ C) $2\ m^2$
D) $4\ m^2$ E) $3\ m^2$

84. Dado un hexaedro regular ABCD-EFGH, en $\overline{BE}$ se ubica el punto Q, tal que 3(BQ) = 2(QE). Calcular la distancia entre $\overline{QD}$ y $\overline{HG}$, si la arista del cubo mide 10 cm.

A) $25\frac{\sqrt{29}}{29}$ B) $50\frac{\sqrt{29}}{29}$ C) $100\frac{\sqrt{29}}{29}$
D) $80\frac{\sqrt{20}}{29}$ E) $150\frac{\sqrt{20}}{29}$

85. En un octaedro regular, la distancia del centro a una casa es x. Entonces la longitud de la arista es:

A) $x\sqrt{2}$ B) $x\sqrt{3}$ C) $x\sqrt{5}$ D) $x\sqrt{6}$ E) 2x

86. Calcular la razón de áreas de un octaedro regular y del sólido que tiene por vértices los puntos medios de sus aristas.

A) $4(\sqrt{3}-1)$ B) $6(\sqrt{3}-1)$ C) $3(\sqrt{3}+1)$
D) $2(\sqrt{3}-1)$ E) $5(\sqrt{3}+1)$

87. La proyección de un tetraedro regular sobre un plano es una región cuadrangular. Calcular el área de su proyección (a: arista del tetraedro)

A) a^2 B) $2a^2$ C) $\frac{a^2}{2}$
D) $\frac{3a^2}{2}$ E) $\frac{2a^2}{3}$

88. V-ABC es un tetraedro, se dibuja otro poliedro uniendo los puntos medios de sus aristas. Si nuevamente se dibuja otro poliedro, uniendo los puntos medios del segundo poliedro entonces el número de las aristas para éste poliedro será:

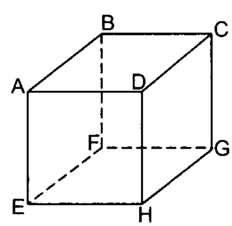
A) 22 B) 24 C) 26 D) 28 E) 30

89. En un tetraedro regular ABCD, la arista mide $\sqrt{35}$ cm. Si M y N son puntos medios de $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ respectivamente. Calcular la distancia entre las rectas. $\overline{CN}$ y $\overline{AM}$.

A) $\sqrt{2}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm C) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ cm
D) $\frac{\sqrt{11}}{3}$ cm E) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm

90. En el cubo mostrado, calcular el ángulo formado por el plano ACF y la recta BH.

A) 60°
B) 75°
C) 90°
D) 50°
E) 45°



91. La arista de un octaedro mide $\sqrt{2}$ m. Calcular el radio de la esfera circunscrita a dicho octaedro.

A) 2 m B) 1 m C) $\sqrt{2}$ m
D) 3 m E) 0,5 m

92. Hallar la medida del ángulo formado por dos aristas opuestas del tetraedro regular.

A) $\text{arcsen}\left(\frac{2\sqrt{3}}{2}\right)$ B) 90° C) 60°
D) 45° E) 75°

93. La diagonal de un octaedro mide $\sqrt{2}$ m. Calcular su volumen.

A) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ m³ B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m³ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m³
D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m³ E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ m³

94. En un octaedro regular de arista a. Calcular la distancia entre los centros de 2 caras opuestas.

A) $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ B) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ C) $\frac{a\sqrt{3}}{6}$
D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{12}$

95. En un poliedro convexo la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es 3240°. Si su número de caras es igual a su número de vértices, entonces su número de aristas es:

A) 15 B) 16 C) 20 D) 24 E) 30

96. Hallar el área total de un tetraedro regular. Si la menor distancia entre dos aristas opuestas es 2 m.

A) $3\sqrt{2}\,m^2$ B) $4\sqrt{3}\,m^2$ C) $6\sqrt{6}\,m^2$
D) $8\sqrt{3}\,m^2$ E) $5\sqrt{3}\,m^2$

97. En un tetraedro regular ABCD, M es punto medio de $\overline{CD}$, N es un punto de $\overline{BM}$ y 2(BN) = MN. Si la distancia entre $\overline{CD}$ y $\overline{AN}$ es $\frac{\sqrt{96}}{3}$, calcular el área de la superficie de dicho sólido.

A) $26\sqrt{3}$ B) $29\sqrt{3}$ C) $12\sqrt{10}$
D) $30\sqrt{3}$ E) $36\sqrt{3}$

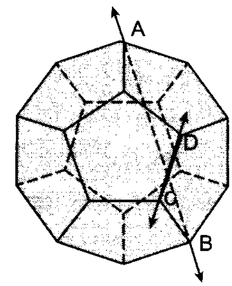
98. En un hexaedro regular ABCD-EFGH, O_1 y O_2 son centros de las caras AEHD y DCGH respectivamente. Si la distancia entre $\overleftrightarrow{BO_1}$ y $\overleftrightarrow{FO_2}$ es $\sqrt{3}$, calcular el volumen del sólido.

A) 21 B) 25 C) 27 D) 29 E) 33

99. En un octaedro regular P-ABCD-Q, se ubica el baricentro G de la cara PDC. Si la distancia de A hacia $\overline{QG}$ es $\sqrt{3}$, calcular el volumen del octaedro.

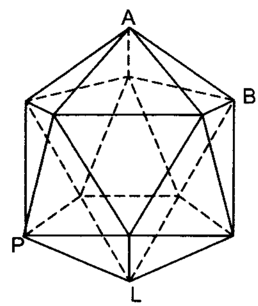
A) $9\sqrt{3}$ B) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$ C) $\frac{6\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ E) $10\sqrt{2}$

100. Se muestra un dodecaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$.



A) 45° B) 40° C) 75°
D) 60° E) 36°

101. En el gráfico, la proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{AL}$ mide a y PB = b. Si ab = 9, calcular el área de la superficie lateral del icosaedro regular mostrado.

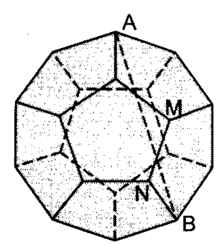


A) $23\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{6}$ C) $45\sqrt{3}$
D) $18\sqrt{6}$ E) $20\sqrt{3}$

102. En un icosaedro regular dos de sus caras son las regiones triangulares APQ y PBQ. Si $\overline{AB}$ y $\overline{PQ}$ distan 1, calcular BQ.

A) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ cm B) $\sqrt{\frac{3+\sqrt{7}}{3}}$ cm C) $\sqrt{\frac{4+\sqrt{7}}{3}}$ cm
D) $2\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ cm E) $\sqrt{\frac{7-\sqrt{5}}{2}}$ cm

103. En el gráfico se muestra un dodecaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre $\overleftrightarrow{MN}$ y $\overleftrightarrow{AB}$.



A) 45° B) 72° C) 54°
D) 50° E) 36°

104. En un octaedro regular M-ABCD-N, el baricentro de la cara MCD dista $\sqrt{33}$ cm de $\overline{AM}$. Calcular el área de la superficie total de dicho sólido.

A) $160\sqrt{3}\,cm^2$ B) $198\sqrt{3}\,cm^2$ C) $208\sqrt{3}\,cm^2$
D) $180\sqrt{3}\,cm^2$ E) $216\sqrt{3}\,cm^2$

105. En un tetraedro regular V-ABC se traza $\overline{BQ}$ y $\overline{AP}$ (P y Q incentro de las caras VAB y ABC respectivamente). Calcular la medida del ángulo entre $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$.

A) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ B) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{9}\right)$
C) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ D) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$
E) $\text{arcsen}\left(\frac{4\sqrt{3}}{9}\right)$

106. Se tienen los hexaedros regulares ABCD-EFGH y PQRS-LIJK, siendo P y J los centros de las caras ABCD y EFGH respectivamente, tal que el área de la sección determinada al proyectar el hexaedro PQRS-LIJK en el plano que contiene a la cara EFGH es $36\sqrt{3}$ cm^2, además la proyección de $\overline{IS}$ en dicha cara es $\overline{MN}$ ($\overline{MN} \subset \overline{FH}$). Calcular MC.

A) $\sqrt{185}$ B) $\sqrt{133}$ C) $\sqrt{186}$
D) $\sqrt{147}$ E) 10

107. Calcular $E = \frac{M}{N}$ donde M es la suma de las medidas de los ángulos internos de todas las caras del icosaedro regular y N es la suma de las medidas de los ángulos internos de todas las caras del dodecaedro regular.

A) $\frac{9}{5}$ B) $\frac{12}{5}$ C) $\frac{5}{7}$
D) $\frac{10}{6}$ E) $\frac{5}{9}$

108. Se tiene el tetraedro regular V-ABC, en la cara BVC se inscribe una semicircunferencia, cuyo diámetro está contenido en $\overline{BC}$. Si la distancia del punto de la semicircunferencia más alejado de $\overline{BC}$ al punto medio de $\overline{AV}$ es $2\sqrt{3}$. Calcular la distancia entre $\overline{VC}$ y $\overline{AB}$.

A) $4\sqrt{2}$ B) $2\sqrt{2}$ C) $7\sqrt{3}$
D) $2\sqrt{3}$ E) $4\sqrt{3}$

109. En un tetraedro regular, se traza su poliedro conjugado inscrito. Calcular la medida del diedro determinado por una cara del tetraedro y una cara del poliedro conjugado sabiendo que éstas no son paralelas.

A) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$ B) $\text{arcsec}\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ C) arctan(2)
D) $\text{arccos}\left(\frac{1}{3}\right)$ E) $\text{arctan}(2\sqrt{2})$

110. En un octaedro regular M-ABCD-N de arista $a(\sqrt{2}+1)$ se inscribe un hexaedro regular EFGH−IJKL ($\overline{EF} \,//\, \overline{AB}$; $\overline{KJ} \,//\, \overline{BC}$) tal que estos vértices pertenecen a las aristas del octaedro. Calcular el área de la sección determinada en el octaedro por un plano que pasa por EFKL.

A) $a^2(2\sqrt{2}+1)$ B) $a^2(2\sqrt{2}+2)$ C) $a^2(\sqrt{2}+2)$
D) $a^2(2-\sqrt{2})$ E) $a^2(2\sqrt{2}-1)$

111. En un hexaedro regular ABCD−EFGH, se ubica los puntos medios P y Q de $\overline{AE}$ y $\overline{HG}$ respectivamente. Si $AB = 2\sqrt{5}$, calcular la distancia entre $\overleftrightarrow{PD}$ y $\overleftrightarrow{CQ}$.

A) $\frac{10\sqrt{26}}{13}$ B) $\frac{5\sqrt{13}}{11}$ C) $\frac{3\sqrt{26}}{5}$
D) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ E) $\frac{8\sqrt{105}}{21}$

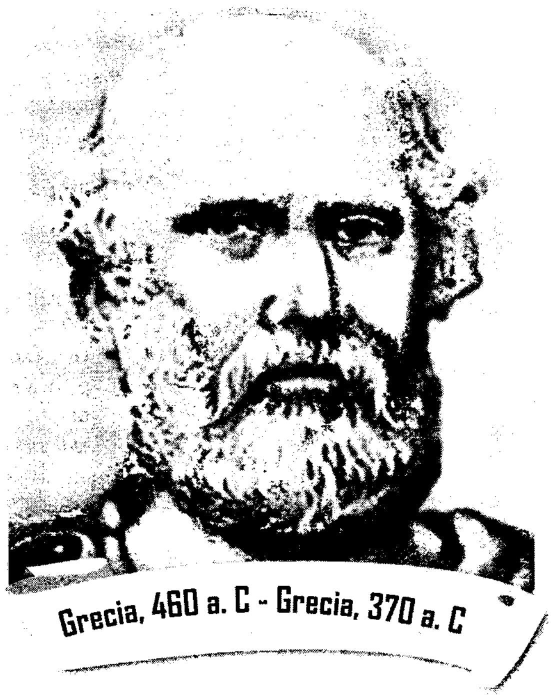
CLAVES

1. E	15. C	29. C	43. B	57. D	71. A	85. D	99. C
2. D	16. C	30. E	44. D	58. B	72. E	86. D	100. E
3. D	17. B	31. B	45. D	59. B	73. E	87. C	101. C
4. C	18. B	32. A	46. A	60. E	74. E	88. B	102. D
5. B	19. B	33. C	47. C	61. C	75. B	89. A	103. E
6. D	20. E	34. B	48. E	62. D	76. D	90. C	104. E
7. D	21. D	35. A	49. D	63. E	77. A	91. B	105. C
8. A	22. B	36. E	50. D	64. B	78. B	92. B	106. C
9. A	23. C	37. D	51. D	65. C	79. A	93. B	107. E
10. C	24. A	38. D	52. E	66. A	80. C	94. B	108. A
11. D	25. A	39. B	53. D	67. B	81. C	95. C	109. E
12. C	26. B	40. B	54. C	68. B	82. D	96. D	110. A
13. C	27. C	41. E	55. E	69. A	83. A	97. E	111. E
14. E	28. E	42. A	56. D	70. C	84. B	98. C	

Prisma y tronco de prisma

18 capítulo

Demócrito



Demócrito (Abdera, Tracia, 460 a. C.-370 a. C.) fue un filósofo griego presocrático y matemático que vivió entre los siglos V-IV a. C., discípulo de Leucipo. Demócrito fue conocido en su época por su carácter extravagante. Se le adjudican numerosas leyendas. Realizó muchos viajes por Egipto, Persia y Mesopotamia, donde habría aprendido de magos persas, sacerdotes egipcios y caldeos. Una leyenda dice que se arrancó los ojos en un jardín para que no estorbara en sus meditaciones la contemplación del mundo externo. Se dice que viajó por Egipto, donde vivió cinco años y adquirió especialmente conocimientos de geometría.

Demócrito fue un excelente geómetra, ciencia que enseñaba a sus discípulos. Escribió numerosas obras, pero solo perduran escasos fragmentos. Escribió varios tratados de Geometría y de Astronomía, que se han perdido. Se cree que escribió sobre Teoría de los números, y que encontró la fórmula que expresa el volumen de una pirámide. Asimismo, demostró que se puede aplicar esta fórmula para calcular el volumen de un cono. Se le atribuyen dos teoremas:

—«El volumen de un cono es igual a un tercio del volumen de un cilindro de igual base y altura».

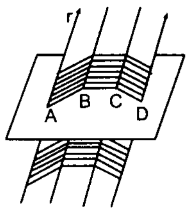
—«El volumen de una pirámide es un tercio del volumen del prisma de igual base y altura».

Fuente: Wikipedia

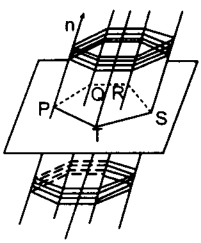
SUPERFICIE PRISMÁTICA

Se llama superficie prismática a aquella que genera una recta (generatriz) al deslizarse paralelamente a su posición inicial, a lo largo de una poligonal o polígono (directriz).

Si la directriz es una poligonal, la superficie prismática es abierta. Si es un polígono, la superficie es cerrada.

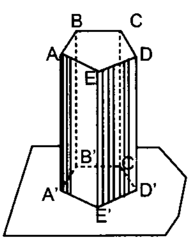


Superficie prismática abierta
$\overleftrightarrow{r}$: generatriz
ABCD: directriz



Superficie prismática cerrada
$\overleftrightarrow{n}$: generatriz
PQRST: directriz

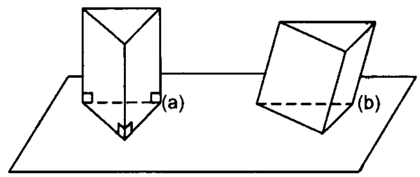
PRISMA



Un prisma es el poliedro determinado al intersecar una superficie prismática cerrada, mediante dos planos paralelos entre sí.

La figura adjunta muestra un prisma. Las regiones poligonales ABCDE y A'B'C'D'E' son paralelas y corresponden a polígonos congruentes. Estas dos caras son las bases del prisma y la distancia entre ellas es la altura del sólido. Las demás caras son regiones paralelográmicas, llamadas caras laterales; sus intersecciones se llaman aristas laterales. Todas las aristas laterales son paralelas y congruentes.

Clasificación de los prismas



Se clasifican en: recto, oblicuo y regular.

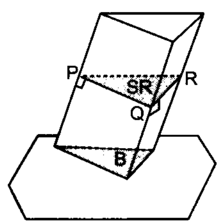
Prisma recto. Es aquel cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son regiones rectangulares y las aristas laterales son congruentes a la altura.

Prisma oblicuo. Tiene sus aristas laterales oblicuas a las bases.
Según sus bases sean regiones triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc., los prismas se llaman triangulares, cuadrangulares, pentagonales, etc. Por ejemplo, la figura (a) muestra un prisma recto triangular.

Prisma regular. Aquel prisma recto, cuyas bases corresponden a polígonos regulares. En cualquier otro caso, el prisma no es regular.

Secciones de un prisma

- Una sección de un prisma, es la región determinada por la intersección del prisma con un plano.
- Una sección transversal de un prisma, es la sección del prisma con un plano paralelo a la base.
- Una sección recta de un prisma, es la sección del prisma con un plano perpendicular a las aristas laterales. Por ejemplo, la sección PQR en la siguiente figura.



Nota:

Si B y SR, son las áreas de la base del prisma y de la sección recta, respectivamente, entonces: SR = B$\cos\beta$, donde β es la medida del ángulo diedro que forman los planos que contienen a la base del prisma y a la sección recta.

PARALELEPÍPEDO

Aquel prisma cuyas bases son regiones paralelográmicas.

Clasificación de paralelepípedos

Se clasifican en:

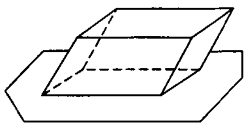
Paralelepípedo recto. Sus aristas laterales son perpendiculares a las bases. Las caras laterales son regiones rectangulares.

Paralelepípedo oblicuo. Tiene sus aristas laterales oblicuas a las bases. Las seis caras son regiones paralelográmicas.

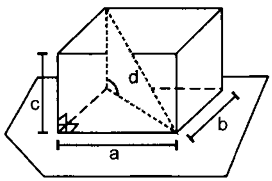
Paralelepípedo rectangular. Aquel paralelepípedo recto cuyas bases son regiones rectangulares. Llamado también rectoedro.

Cubo. Paralelepípedo rectangular que tiene todas sus aristas congruentes.

Romboedro. Paralelepípedo que tiene por bases regiones romboédricas.



Paralelepípedo oblicuo



Paralelepípedo rectangular (rectoedro)
d: longitud de la diagonal
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$

FÓRMULAS

Superficies lateral y total de un prisma

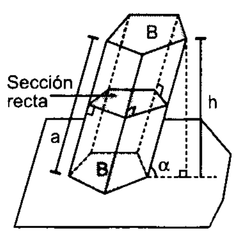
La superficie lateral de un prisma es la suma de las superficies de todas sus caras laterales. La superficie total del prisma es la suma de la superficie lateral y de las dos bases. A dichas superficies se refieren las áreas laterales y totales.

Área de un prisma

El área lateral de un prisma oblicuo es el producto del perímetro de una sección recta por la longitud de una arista lateral. Así, para el prisma de la figura:

a: longitud de la arista lateral.

P: perímetro de la sección recta.



El área lateral: $S_L = Pa$

Área total: Donde B es el área de cada base total será: $S_t = S_L + 2B$

Volumen de un prisma

El volumen de un prisma es el producto del área de una base por su altura. Si h es la longitud de la altura del prisma:

$$V = Bh$$

También, el volumen de un prisma es el producto del área de una sección recta por una arista lateral. Así, llamando SR al área de una sección recta:

$$V = (SR)a$$

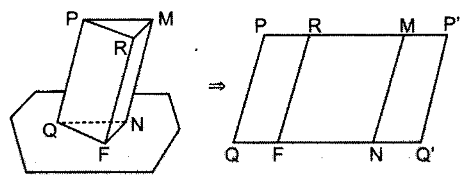
Observaciones:

En la figura anterior, α es la medida del ángulo que forman las aristas laterales con las bases.

- Es evidente que en un prisma oblicuo, $\alpha < 90°$; $h < a$ y $SR < B$.
- En un prisma recto: $\alpha = 90°$; $h = a$; $SR = B$
- De lo anterior, se deduce que el área lateral de un prisma recto, es el producto del perímetro de una base por una arista lateral. Asimismo, el volumen es igual al producto del área de una base por la arista lateral.
- Si a, b y c, son longitudes de tres aristas concurrentes de un paralelepípedo rectangular, entonces su volumen será:

$$V = abc$$

- Si se extiende (se desarrolla) la superficie lateral de un prisma, a partir de una arista lateral, (por ejemplo: $\overline{PQ}$), de modo que todas las caras laterales quedan coplanares, se dice que se ha desarrollado dicha superficie.



TRONCO DE PRISMA

Se obtiene al intersecar la superficie lateral de un prisma con un plano no paralelo a las bases.

Las caras laterales son trapecios.

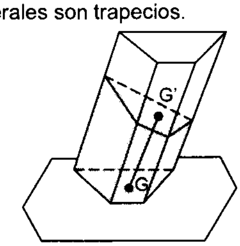


Fig. 1

- El volumen es igual al producto del área de una sección recta y la longitud del segmento que une los centros de gravedad de las bases del tronco. (CG'). (Las secciones rectas del tronco son las mismas que el prisma original).

- Existen fórmulas sencillas para evaluar el volumen de un tronco de prisma de base triangular. Así, para el tronco de la figura 2; el volumen V se evalúa:

$$V = (\text{área } \triangle AEC)\left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)$$

También, para la misma fig. 2:

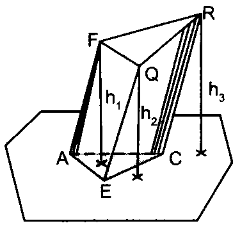


Fig. 2

$$V = (\text{área de una sección recta})\left(\frac{AF + EQ + CR}{3}\right)$$

- Si el tronco de prisma es recto (originado de un prisma recto) y de base triangular, las caras laterales resultan trapecios rectángulos (fig. 3).

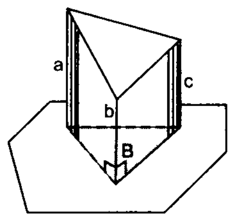


Fig. 3

En este caso: $V = B\left(\frac{a + b + c}{3}\right)$

a, b, c: longitudes de las aristas laterales.
B: área de la base del prisma recto original.

- También, se pueden presentar gráficos como en la figura 4 donde B es el área de la base del tronco de prisma recto.

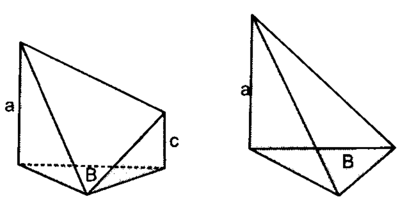


Fig. 4

$V = B\left(\frac{a + c}{3}\right)$ $\quad$ $V = B\frac{a}{3}$

$b = 0$ $\quad$ $b = 0;\ c = 0$

- A veces, es frecuente tener troncos originados al intersecar la superficie lateral de un prisma con dos planos, como en la figura 5; donde $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ y $\overline{EF}$ son aristas del tronco.

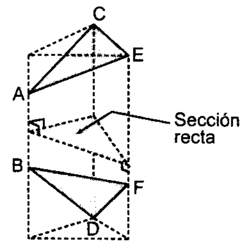


Fig. 5

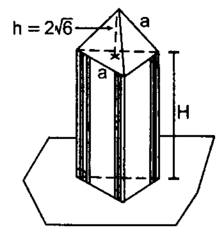
$$V = \left(\begin{matrix}\text{área de una}\\ \text{secci n recta}\end{matrix}\right)\left(\frac{AB + CD + EF}{3}\right)$$

Ejemplos:

1. La base de un prisma recto es base de un tetraedro regular de altura $2\sqrt{6}$ cm y el área lateral del prisma es igual al área total del tetraedro. Hallar el volumen del prisma.

Resolución:

Sea la figura:



Se sabe por fórmula: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Entonces: $2\sqrt{6} = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow a = 6$

De otro lado, según dato:
Área lateral del prisma = área total del tetraedro

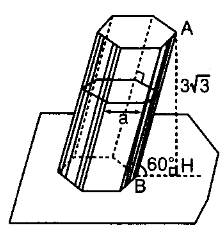
$\Rightarrow 3aH = 4a^2\frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow H = 2\sqrt{3}$

Por lo tanto, el volumen del prisma es:

$V = a^2\frac{\sqrt{3}}{4}(H) = 6^2\frac{\sqrt{3}}{4}(2\sqrt{3}) \quad \therefore\ V = 54\ \text{cm}^3$

2. Hallar el área lateral de un prisma oblicuo, cuya sección recta es un hexágono regular de área $24\sqrt{3}$ cm^2. La altura del prisma es $3\sqrt{3}$ cm y las aristas laterales forman ángulos de 60° con la base.

Resolución:



El triángulo rectángulo AHB es de 30° y 60°.
El cateto AH = $3\sqrt{3}$ por dato, luego la hipotenusa AB = 6

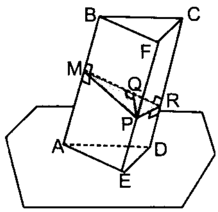
Para hallar a, longitud del lado de la sección recta: por dato: área = $24\sqrt{3}$

es decir: $\frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \Rightarrow a = 4$

El área lateral: $S_L = 6(AB)(a) = 6(6)(4) = 144\ cm^2$

3. Hallar el volumen de un prisma oblicuo triangular, sabiendo que el área de una cara lateral es 5 cm^2 y la distancia de la arista opuesta a esta es 10 cm.

Resolución:



Consideremos el prisma de la figura, donde la cara lateral ABCD tiene área 5 cm^2, según enunciado. PQ = 10 cm, es la distancia de la arista EF al plano ABCD. PQ se encuentra en una sección recta del prisma, tal como MPR.

Se tiene: $S_{ABCD} = 5 \wedge (AB)(MR) = 5$ ...(1)

El volumen del prisma:

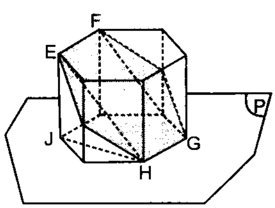
$$V = (S_{MPR})(AB) \Rightarrow V = \frac{(MR)(PQ)}{2}AB$$

$$V = \frac{1}{2}(AB)(MR)PQ \Rightarrow V = \frac{1}{2}(S_{ABCD})PQ \quad \text{(fórmula)}$$

Con los datos: $V = \frac{1}{2}(5)(10) \quad \therefore V = 25\ cm^3$

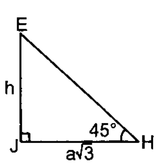
4. Hallar el volumen del prisma regular hexagonal de la figura. El plano que pasa por las aristas $\overline{EF}$ y $\overline{GH}$, forma diedros de 45° con las bases y la sección determinada tiene de área $6\sqrt{6}\ cm^2$.

Resolución:

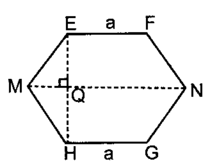


Como $\overline{EJ} \perp P$ y $\overline{JH} \perp \overline{HG}$; entonces, por el teorema de las tres perpendiculares:

$\overline{EH} \perp \overline{HG}$. Luego, EHJ es un ángulo plano del diedro que forman la base y el plano diagonal. Si h es longitud de la altura del prisma y a es longitud del lado de la base, se tendrán:



(Fig. 1)



(Fig. 2)

En el prisma, $\overline{MN}$ mide igual que la diagonal mayor de la base: MN = 2a.

De la figura 1: $EH = h\sqrt{2}$ y de la figura 2:

$EQ = \frac{EH}{2} \Rightarrow EQ = \frac{h\sqrt{2}}{2}$

El área de la sección EFNGHM es:

$2(S_{EFNM}) = 6\sqrt{6}$

Luego: $S_{EFNM} = 3\sqrt{6}$; es decir:

$$(EF + MN)\frac{EQ}{2} = 3\sqrt{6}$$

Esto es: $(a + 2a)\frac{h\sqrt{2}}{4} = 3\sqrt{6}$; $ah = 4\sqrt{3}$ ...(1)

Pero de la figura 1: $h = a\sqrt{3}$

Entonces sustituyendo en (1):

$a(a\sqrt{3}) = 4\sqrt{3} \Rightarrow a = 2 \Rightarrow h = 2\sqrt{3}$

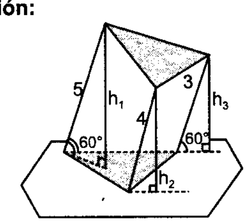
Finalmente, el volumen:

$$V = Bh = \left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right)h = \left(\frac{3}{2}(2^2)\sqrt{3}\right)2\sqrt{3}$$

De donde: $V = 36\ cm^3$

5. La base de un tronco de prisma oblicuo triangular tiene área 12 cm^2. Hallar el volumen del sólido, sabiendo que las aristas laterales están inclinadas 60° respecto a la base y tienen longitudes de 3 cm; 4 cm y 5 cm respectivamente.

Resolución:



Del gráfico, donde h_1, h_2 y h_3 son alturas del sólido:

$h_1 = \frac{5}{2}\sqrt{3}$; $h_2 = 2\sqrt{3}$ y $h_3 = \frac{3}{2}\sqrt{3}$

Cálculo del volumen:

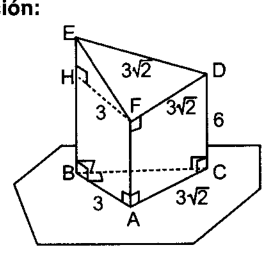
$$V = \left(\frac{h_1 + h_2 + h_3}{3}\right)B; \text{ (B es el área de la base)}$$

Pero B = 12; luego:

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{5}{2}\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)12 \quad \therefore V = 24\sqrt{3}\ cm^3$$

6. Hallar el volumen de un tronco de prisma recto, cuyas bases son un triángulo equilátero FED y un triángulo rectángulo isósceles ABC. Además una cara lateral es un rectángulo de lados $3\sqrt{2}$ cm y 6 cm; siendo los mayores lados las aristas laterales.

Resolución:



El sólido es como indica la figura: el $\triangle ABC$ es isósceles, recto en B. El triángulo EFD es equilátero.

Luego: $EF = FD = 3\sqrt{2}$ y $AB = BC = 3$

Para hallar $\overline{EB}$, se traza $\overline{FH} \perp \overline{BE}$.

Entonces: $\overline{BH} = AF = 6$; $\overline{FH} = \overline{AB} = 3$

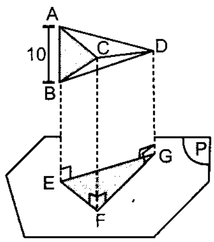
En el $\triangle EHF$: HE = 3. Por lo tanto: EB = 9

El volumen: $V = \left(\frac{EB + AF + CD}{3}\right) S_{ABC}$

$\Rightarrow V = \left(\frac{9+6+6}{3}\right)\frac{3(3)}{2}$ $\quad \therefore$ V = 31,5 cm3

7. En un tetraedro ABCD, AB = 10 cm. El área de la proyección de este sólido sobre un plano perpendicular a $\overline{AB}$, es 24 cm^2. Hallar el volumen del tetraedro.

Resolución:



Consideremos el gráfico que sigue, donde el triángulo EFG es la proyección del tetraedro sobre el plano P; el volumen V_x pedido, es:

$V_x = V_{AEFGDC} - V_{BEFGDC}$

$V_x = \left(\frac{AE + CF + DG}{3}\right) S_{EFG} - \left(\frac{BE + CF + DG}{3}\right) S_{EFG}$

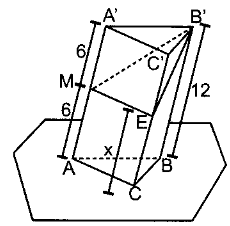
Factorizando S_{EFG} se tiene:

$V_x = \left(\frac{AE - BE}{3}\right) S_{EFG} \quad \Rightarrow V_x = \frac{(AB)(S_{EFG})}{3}$

Con los datos: $V_x = \frac{(10)(24)}{3}$ $\quad \therefore V_x = 80$ cm^3

8. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son aristas laterales de un prisma, M es punto medio de $\overline{AA'}$ y E es un punto de $\overline{CC'}$. Hallar CE para que los volúmenes AMB'BCE y EMA'C'B' sean entre sí como 5 a 3, si BB' = 12.

Resolución:



CE = x

Se tiene por dato: $\frac{V_{AMB'BCE}}{V_{EMA'C'B'}} = \frac{5}{3}$

Que es lo mismo que:

$$\frac{(\text{sección recta})\left(\frac{AM + CE + BB'}{3}\right)}{(\text{sección recta})\left(\frac{A'M + C'E + 0}{3}\right)} = \frac{5}{3}$$

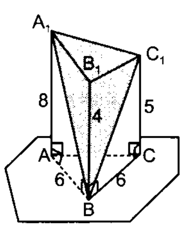
Luego: $\frac{6 + x + 12}{6 + 12 - x + 0} = \frac{5}{3}$

De donde: x = CE = 4,5

PROBLEMAS RESUELTOS

1. En un tronco de prisma triangular recto, la base ABC es un triángulo equilátero de lado 6 cm y las aristas laterales son: AA_1 = 8 cm; BB_1 = 5 cm y CC_1 = 4 cm. Hallar el volumen del tetraedro de base $A_1B_1C_1$ y el vértice B.

Resolución:



Se tiene en la figura: $V_{BA_1B_1C_1} = V_{total} - V_{ABC_1A_1}$

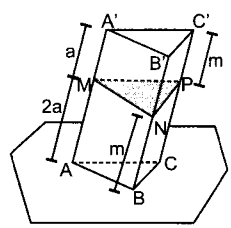
$V_{BA_1B_1C_1} = \left[\frac{8+4+5}{3}\right] S_{ABC} - \left[\frac{8+5+0}{3}\right] S_{ABC}$

Pero: $S_{ABC} = (6)^2\sqrt{3}/4$

Luego: $V_{BA_1B_1C_1} = \frac{4}{3}(6^2)\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ $\quad \therefore V_{BA_1B_1C_1} = 12\sqrt{3}$ cm^2

2. El prisma ABCA'B'C' se corta por un plano determinando los puntos M, N y P sobre las aristas laterales AA', BB' y CC', respectivamente, de modo que AM = 2MA' y BN = PC'. Si el volumen del prisma es V, hallar el volumen del tronco ABCMNP.

Resolución:



Si se llama S el área de la sección recta del prisma y también: $V_{total} = V$

$3(aS) = V \Rightarrow aS = \frac{V}{3}$ $\quad$ ...(1)

Por otro lado: $V_{ABCMNP} = \frac{1}{3}(AM + BN + CP)S$

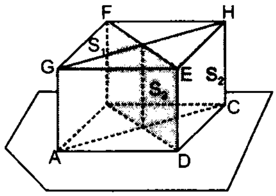
$V_{ABCMNP} = \frac{1}{3}(2a + m + 3a - m)S$

$\Rightarrow V_{ABCMNP} = \dfrac{5}{3}a(S)$; reemplazando en (1):

$\therefore V_{ABCMNP} = \dfrac{5}{9}V$

3. Las bases de un paralelepípedo recto son rombos cuyas regiones tienen áreas S_1. Las áreas de las secciones que determinan los planos diagonales, son S_2 y S_3. Hallar el volumen del romboedro.

Resolución:



Se diseña el gráfico:

El volumen, es: $V = S_1AG$ ...(1)

Los datos S_2 y S_3: $(AG)(GH) = S_2 \wedge (ED)(EF) = S_3$

Multiplicando:

$(AG)(ED)(GH)(EF) = (S_2)(S_3)$

Pero: $ED = AG$ y $\dfrac{(GH)(EF)}{2} = S_1$;

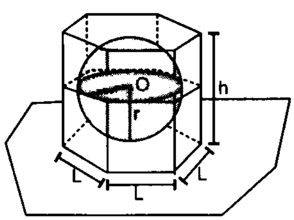
Luego: $(AG)^2 2S_1 = S_2S_3 \Rightarrow AG = \sqrt{\dfrac{S_2S_3}{2S_1}}$ ...(2)

Finalmente, reemplazando (2) en (1):

$\therefore V = \sqrt{\dfrac{S_1S_2S_3}{2}}$

4. Hallar el volumen de un prisma regular hexagonal, circunscrito a una esfera de radio r.

Resolución:



La superficie esférica es tangente a las caras del prisma en sus centros.

Volumen del prisma: $V = Bh$ ...(1)

Del gráfico: $h = 2r$ ...(2)

Cálculo de B: para la sección mostrada: $L = \dfrac{2r\sqrt{3}}{3}$

Área de la base: $B = \dfrac{3}{2}L^2\sqrt{3}$; (fórmula para un hexágono regular)

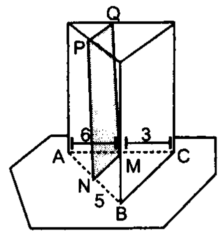
$\Rightarrow B = \dfrac{3}{2}\left(\dfrac{2r\sqrt{3}}{3}\right)^2\sqrt{3} \Rightarrow B = 2r^2\sqrt{3}$ ...(3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

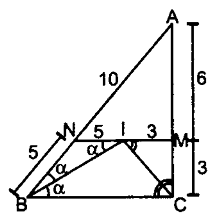
$V = (2r^2\sqrt{3})(2r) \quad \therefore V = 4r^3\sqrt{3}$

5. Se tiene un prisma triangular recto cuya base es el triángulo ABC. Se traza un plano paralelo a $\overline{BC}$, que pasa por el incentro de la base ABC y corta en M a $\overline{AC}$, en N a $\overline{AB}$ y en P y Q a las aristas opuestas a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$. Hallar el volumen del prisma, si $CM = 3$ cm; $BN = 5$ cm; $AM = 6$ cm y la arista lateral mide 10 cm.

Resolución:



Para hallar el volumen, falta calcular el área de la base: $V = (S_{ABC})h$ ...(1)



Como: $\overline{MN} \,//\, \overline{BC}$:

$\dfrac{AN}{NB} = \dfrac{AM}{MC} \Rightarrow \dfrac{AN}{5} = \dfrac{6}{3} \Rightarrow AN = 10$

Los triángulos BNI y CMI son isósceles.

Luego: $NI = BN$ y $CM = MI$

$NI = 5$ y $MI = 3$. Entonces:

$MN = 8$. Se concluye que el triángulo AMN es recto en M. También: $m\angle ACB = 90°$.

En el ⊿ACB:

$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = (15)^2 - (9)^2 \Rightarrow BC = 12$

Luego:

$S_{ABC} = \dfrac{(AC)(BC)}{2} = \dfrac{(9)(12)}{2} \Rightarrow S_{ABC} = 54$ ...(2)

Sustituyendo el dato h y (2) en (1):

$V = 10(54) \quad \therefore V = 540\ cm^2$

6. Hallar el número de caras C, número de vértices V y total de aristas A, de un prisma, en función del número de lados n en una base.

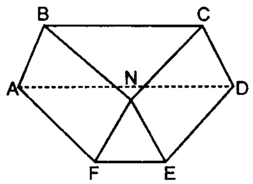
Resolución:

Para el número total de caras, se cuentan n caras laterales más las bases: $C = n + 2$

Hay n vértices en cada base, en total: $V = 2n$

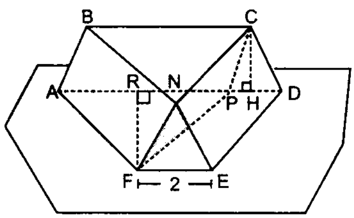
Se tienen n aristas laterales y n aristas en cada base, en total: $A = 3n$

7. Hallar el volumen del poliedro de la figura:



Triángulos: BNC y ENF equiláteros y contenidos en planos perpendiculares entre sí.
Cuadriláteros: ABNF y ENCD, paralelogramos; BC = 4 y EF = 2

Resolución:



De los datos: plano AFED // plano BNC
plano ABCD // plano ENF

Luego: plano ABCD perpendicular a los planos AFED y BNC.

Si por C se traza $\overline{CP} \,//\, \overline{NF}$, $\overline{CP}$ estará contenido en el plano ABCD. El volumen total es la suma de los volúmenes de los prismas ABCPFN y FNCPDE.

Como $\overline{CH}$ es la altura del prisma ABCPFN y del triángulo equilátero CPD.

Entonces: $CH = \frac{CD}{2}\sqrt{3} \Rightarrow CH = \sqrt{3}$

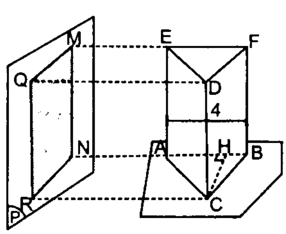
De igual manera como: $\overline{FR}$ es la altura del prisma FNCPDE y del triángulo equilátero AFP:

Entonces: $FR = \frac{AF}{2}\sqrt{3} \Rightarrow FR = 2\sqrt{3}$

Finalmente, como ya se dijo:
$V_T = V_{ABCPFN} + V_{FNCPDE}$
$V = (\text{área } \Delta AFP)(CH) + (\text{área } \Delta CPD)(FR)$
$V = \left(4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\sqrt{3} + \left(2^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)2\sqrt{3} \quad \therefore V = 18$

8. Hallar el volumen de un prisma recto de base triangular, sabiendo que una arista básica mide 4 y el área de la proyección del sólido sobre un plano perpendicular a dicha arista es 10.

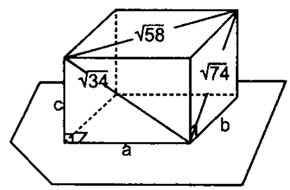
Resolución:



Considerando la figura, donde AB = 4 y P es un plano de proyección perpendicular a $\overline{AB}$; se tiene: QR = CD y RN = CH.
Donde CH = altura del triángulo ABC.
Cálculo del volumen: V = (área ΔABC)(CD)
$V = \frac{1}{2}(AB)(CH)(CD)$ o $V = \frac{1}{2}(AB)(RN)(QR)$
Es decir: $V = \frac{1}{2}(AB)(\text{área RQMN})$
Con los datos: $V = \frac{(4)(10)}{2} \quad \therefore V = 20$

9. Hallar el volumen de un rectoedro, sabiendo que las diagonales de las caras miden $\sqrt{34}$; $\sqrt{58}$ y $\sqrt{74}$, respectivamente.

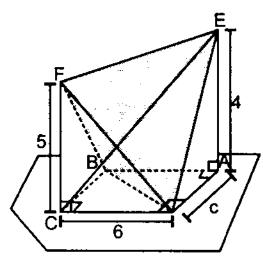
Resolución:



Se tienen:
$a^2 + c^2 = 34$ ...(1)
$a^2 + b^2 = 58$ ...(2)
$b^2 + c^2 = 74$ ...(3)
Sumando (1), (2) y (3):
$2(a^2 + b^2 + c^2) = 166$
$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 83$ ...(4)
Sustituyendo (1) en (4): b = 7
Luego: a = 3 y c = 5
El volumen: V = abc $\quad \therefore$ V = 105

10. Dado un cuadrado ABCD, de lado 6, se elevan $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$, perpendiculares al plano que los contiene. Si AE = 4 y CF = 5, hallar el volumen del tetraedro FEDB.

Resolución:



El volumen pedido:
$V = V_{FEDB}$
$V = V_{total} - V_{FCDB} - V_{EBDA}$ ...(1)
Además, si se traza $\overline{AC}$:
$V_{total} = V_{ACBFE} + V_{ACDFE}$
Sustituyendo en (1):
$V = V_{ACBFE} + V_{ACDFE} - V_{FCDB} - V_{EBDA}$ ...(2)

(Todos son troncos de prisma), donde:

$$V_{ACBFE} = \left(\frac{CF + AE + 0}{3}\right)S_{ABC} = \left(\frac{5+4}{3}\right)18 = 54$$

$$V_{ACDFE} = \left(\frac{CF + AE + 0}{3}\right)S_{ACD} = \left(\frac{5+4}{3}\right)18 = 54$$

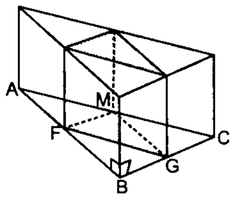
$$V_{EBDA} = \left(\frac{CF + 0 + 0}{3}\right)S_{BCD} = \left(\frac{5}{3}\right)18 = 30$$

$$V_{EBDA} = \left(\frac{AE + 0 + 0}{3}\right)S_{BDA} = \left(\frac{4}{3}\right)18 = 24$$

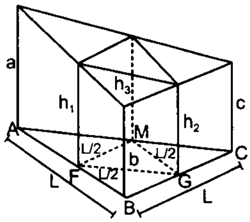
Reemplazando en (2):

$V = 54 + 54 - 30 - 24 \quad \therefore V = 54$

11. En la figura se tienen dos troncos de prisma triangulares regulares. Hallar la relación entre sus áreas laterales si F, M y G son los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$.



Resolución:



Analizando el mayor tronco de prisma. Área lateral: $A_{L_1} = \left(\frac{a+b}{2}\right)L + \left(\frac{b+c}{2}\right)L + \left(\frac{a+c}{2}\right)L$

$A_{L_1} = L(a + b + c) \qquad ...(1)$

En forma análoga, en el tronco de prisma menor:

$a_{L_2} = \frac{L}{2}(h_1 + h_2 + h_3) \qquad ...(2)$

Pero: $h_1 = \frac{a+b}{2}$; $h_2 = \frac{b+c}{2}$ y $h_3 = \frac{a+c}{2}$

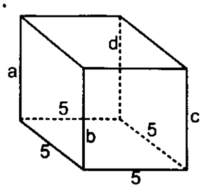
$\Rightarrow h_1 + h_2 + h_3 = a + b + c$

Entonces de (1) y (2):

$$\frac{A_{L1}}{A_{L2}} = \frac{L(a+b+c)}{\frac{L}{2}(a+b+c)} \quad \therefore \frac{A_1}{A_2} = \frac{2}{1}$$

12. Se tiene un tronco de prisma cuadrangular regular cuyo perímetro de la base es 20 m y cuya suma de aristas laterales es 16 m. Calcular su área lateral.

Resolución:



Dado: $a + b + c + d = 16$

El área lateral es:

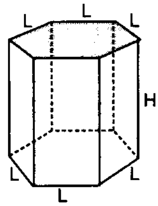
$$A = \frac{(a+b)5}{2} + \frac{(b+c)5}{2} + \frac{(c+d)5}{2} + \frac{(a+d)5}{2}$$

$$A = \frac{5}{2}(2a + 2b + 2c + 2d) = 5(a + b + c + d)$$

$\therefore A = 5(16) = 80\ m^2$

13. El área total de un prisma regular hexagonal es el triple de su área lateral. Hallar el volumen del prisma si el lado de la base es L.

Resolución:



Dato: $A_{total} = 3A_{lateral}$

$$A_{TOTAL} = 6L\left(\frac{L\sqrt{3}}{2} + H\right)$$

Entonces $= 3L^2\sqrt{3} + 6HL = 3(6HL)$

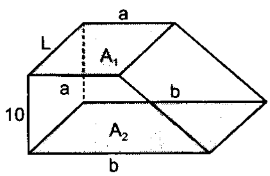
$$3L^2\sqrt{3} = 12\ HL \Rightarrow H = \frac{L\sqrt{3}}{4}$$

$$\text{Volumen} = V = (\text{área base})\ H = 6\left(\frac{L^2\sqrt{3}}{4}\right)\frac{L\sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore V = \frac{9L^3}{8}$$

14. Dos caras opuestas de un paralelepípedo truncado miden 30 cm^2 y 36 cm^2. Calcular el volumen del sólido sabiendo que la distancia entre dichas caras es 10 cm.

Resolución:



Dato: $A_1 = aL = 30 \wedge A_2 = bL = 36$

Sumando: $(a + b)L = 66$

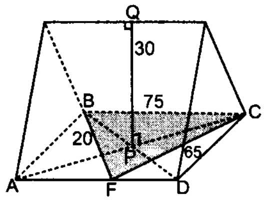
El volumen = V

$$V = (A_{base})\left(\frac{a+b}{2}\right) \Rightarrow V = 10L\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{10(66)}{2}$$

$\therefore V = 330\ cm^2$

15. La altura de un prisma triangular es 75 cm, las distancias de un punto de una arista lateral a los vértices opuestos a esta arista, y en la misma cara, miden 65 cm y 20 cm. Calcular el volumen del prisma sabiendo que la distancia de la cara considerada a su arista opuesta mide 30 cm.

Resolución:



Se observa que en el paralelogramo ABCD se encuentra el triángulo BFC, cuya área es:

$A_{\Delta BFC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$P = \dfrac{20+65+75}{2} = 80$

$A_{\Delta BFC} = \sqrt{80(60)(15)(5)} = 600$

Entonces: $A_{ABCD} = 2(600) = 1200$

Volumen del prisma:

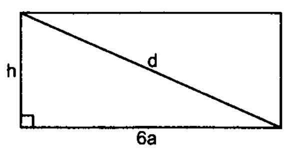
$V = (A_{ABCD})\left(\dfrac{PQ}{2}\right)$

$\therefore\ V = (1200)\left(\dfrac{30}{2}\right) = 18\,000\ cm^2$

16. La altura de un prisma regular es h y la diagonal del rectángulo que resulta al desarrollar su área lateral mide d, si la base del prisma es una región hexagonal. Calcular su volumen.

Resolución:

Desarrollo lateral del prisma hexagonal regular:



Perímetro de la base: 6a

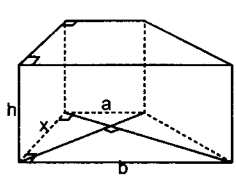
$\Rightarrow 36a^2 = d^2 - h^2 \Rightarrow a^2 = \dfrac{d^2-h^2}{36}$ ...(I)

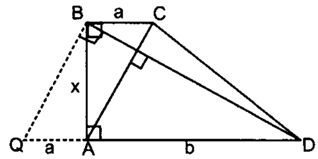
Volumen del prisma: $V = 6\left(\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)h$ ...(II)

(I) en (II): $\therefore\ V = \dfrac{\sqrt{3}}{24}(d^2-h^2)h$

17. Se tiene un prisma recto cuyas bases son trapecios rectangulares cuyas diagonales son perpendiculares, los lados paralelos miden a y b donde (a < b) además se cumple: $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. Si h es la altura del prisma. Hallar el volumen del prisma.

Resolución:





$\triangle$QBD: $x^2 = ab \Rightarrow x = \sqrt{ab}$

El volumen del prisma será:

$V = \left(\dfrac{a+b}{2}\right)\sqrt{ab}(h)$ ...(1)

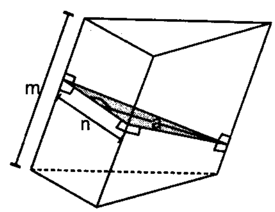
Por dato: $\dfrac{2}{h} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \Rightarrow \dfrac{a+b}{2} = \dfrac{ab}{h}$ ...(2)

(2) en (1): $V = \left(\dfrac{ab}{h}\right)\sqrt{ab}(h) \Rightarrow V = ab\sqrt{ab}$

$V^2 = (ab)^2(ab) = (ab)^3 \quad \therefore\ V = (ab)^{3/2}$

18. En un prisma triangular oblicuo, el área de una cara lateral es A, la distancia de la arista opuesta a dicha cara es a. Hallar el volumen.

Resolución:

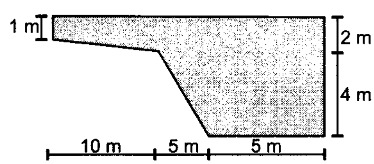


Por dato: $mn = A$ ...(1)

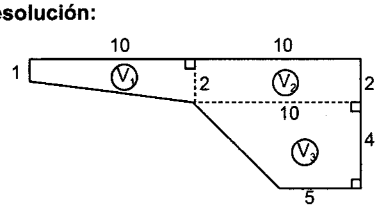
Por teoría: $V = \dfrac{na}{2}m$ ...(2)

(1) en (2): $\therefore\ V = \dfrac{Aa}{2}$

19. Una piscina de 10 m de ancho tiene una sección longitudinal que se muestra en la figura. Hallar la cantidad de agua que se necesita para llenarla en m^3.



Resolución:



El ancho de la piscina es 10; veamos:

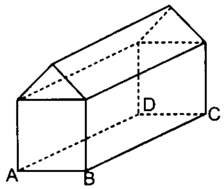
$V_1 = \left(\dfrac{1+2}{2}\right)10(10) \Rightarrow V_1 = 150$

$V_2 = (2)(10)(10) \Rightarrow V_2 = 200$

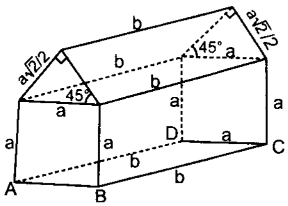
$V_3 = \left(\dfrac{10+5}{2}\right)4(10) \Rightarrow V_3 = 300$

El volumen total es:
$V = 150 + 200 + 300 \quad \therefore\ V = 650\ m^3$

20. En la figura el sólido está constituida por dos prismas rectos con bases cuadradas y triangulares, con la particularidad de que la base triangular es un triángulo rectángulo isósceles. Si el perímetro de la cara ABCD es 24. ¿Cuál debe ser el lado del cuadrado para que el volumen sea máximo?



Resolución:



Por dato: $2a + 2b = 24 \Rightarrow a + b = 12$
$\Rightarrow b = 12 - a$

El volumen del sólido es:

$V = a^2b + \dfrac{a^2}{4}b \Rightarrow V = \dfrac{5}{4}a^2b \Rightarrow V = \dfrac{5}{4}a^2(12 - a)$

$V = \dfrac{5}{4}(12\,a^2 - a^3) \Rightarrow V' = \dfrac{5}{4}\underbrace{(24a - 3a^2)}_{0}$

$\Rightarrow 3a^2 = 24a \Rightarrow 3a = 24 \quad \therefore\ a = 8$

21. En un prisma oblicuo cuyo número de aristas es A. Hallar la suma de las medidas de los ángulos diedros.

Resolución:

La sección recta del prisma oblicuo, está limitado por un polígono convexo de n lados.

Luego:
n.° aristas de la base inferior: n
n.° aristas de la base superior: n
n.° aristas laterales: n

Por dato: $3n = A \Rightarrow n = \dfrac{A}{3}$

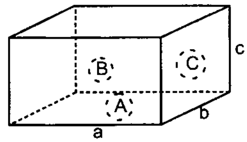
Por propiedad; la suma de las medidas de los ángulos diedros será:

$S = 360(n - 1) \Rightarrow S = 360\left(\dfrac{A}{3} - 1\right)$

$\therefore\ S = 120\,(A - 3)$

22. Las áreas de tres caras de un paralelepípedo rectángulo son: A, B, C. Demostrar que el volumen se expresa: $\sqrt{ABC}$

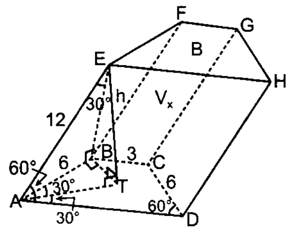
Resolución:



De la fig.: $A = ab$; $B = ac$; $C = bc$. Multiplicando:
$(abc)^2 = ABC \Rightarrow abc = \sqrt{ABC} \quad \therefore\ V = \sqrt{ABC}$

23. En un prisma oblicuo ABCDE-EFGH, la $m\angle ABE = 90°$, la $m\angle BAD = m\angle ADC = 60°$, $2BC = AB = 6$, $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$, $m\angle EAB = m\angle EAD = 60°$, calcular su volumen.

Resolución:



$V_x = Bh \Rightarrow$ ⊿ABE(30 y 60): $AE = 12$;
⊿ABT(30 y 60): $AT = 4\sqrt{3}$; ⊿ATE: $h = 4\sqrt{6}$

$B = \left(\dfrac{9 + 3}{2}\right)3\sqrt{3} \Rightarrow B = 18\sqrt{3}$

$V_x = 18\sqrt{3}(4\sqrt{6}) \quad \therefore\ V_x = 216\sqrt{2}$

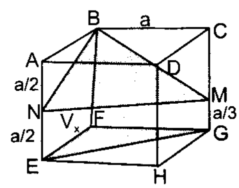
24. En un cubo ABCD-EFGH de arista a, si N es punto medio de $\overline{AE}$ y $M \in \overline{CG}$ tal que $GM = \dfrac{1}{3}BC$, entonces el volumen del tronco de prisma triangular: NBM-EFG es:

Resolución:

Piden: $V_{EFG\text{-}NBM} = V_x$

$V_x = \left(\dfrac{a^2}{2}\right)\left(\dfrac{a/2 + a + a/3}{3}\right)$

$\therefore\ V_x = \dfrac{11a^3}{36}$



25. En un prisma triangular recto ABC-A'B'C' se ubican los puntos M, N y P sobre $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ respectivamente de manera que $AM = 2MA'$ y $BN = PC'$. Si el volumen del prisma es 9 m^3, entonces el volumen del prisma ABCMNP (en m^3) es:

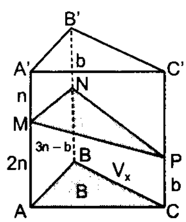
Resolución:

Dato: $V_{prisma} = 9 = B(3n)$
$\Rightarrow Bn = 3$

$V_x = B\left(\dfrac{2n + 3n - b + b}{3}\right)$

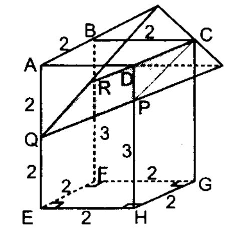
$\Rightarrow V_x = \dfrac{5}{3}Bn$

$\therefore\ V_x = 5\ m^3$



26. ABCD-EFGH es un prisma de base rectangular, se traza un plano secante que interseca a las aristas $\overline{DH}$, $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ en los puntos P, Q y R respectivamente. Si AQ = QE; $\frac{DP}{PH}=\frac{1}{3}=\frac{BR}{RF}$ y 2(EH) = EA = 4 m; entonces determinar el área lateral del menor tronco de prisma (en m^2).

Resolución:



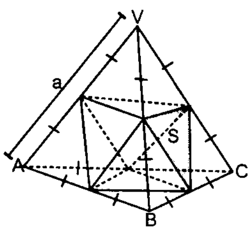
Piden: $A_{SLABCD\text{-}QRCP}$

$$S_x=\left(\frac{2+1}{2}\right)2+\frac{1(2)}{2}+\frac{(2+1)}{2}(2)+\frac{1(2)}{2}$$

$\therefore\ S_x = 8\ m^2$

27. Dado un tetraedro regular de arista a, determinar el área total del poliedro que se forma al unir los puntos medios de los lados de cada cara del poliedro dado. Área del tetraedro es S_t.

Resolución:



De la figura; el sólido interior es un octaedro regular de arista a/2.

$\Rightarrow S=(a/2)^2\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow S=\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$

El área total será: $8S=\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Pero: $S_t=4\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\Rightarrow a^2\sqrt{3}=S_t$

El área total del octaedro es: $8S=\frac{S_t}{2}$

28. En un cubo ABCD-EFGH, Q es punto medio de $\overline{HG}$; L, M y N son los centros de las caras BCGF, ADHE, EFGH respectivamente, calcular la medida del ángulo que forman $\overline{LQ}$ y $\overline{MN}$.

Resolución:

$\triangle$GOE equilátero:

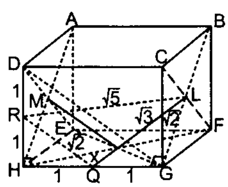
$\overline{MN}\,//\,\overline{DG}$

$\triangle$DHG: $\overline{RQ}\,//\,\overline{DG}$

$\Rightarrow \overline{RQ}\,//\,\overline{MN}$

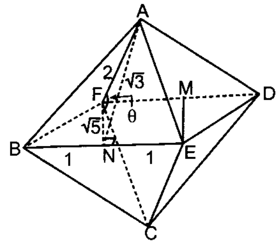
$\triangle$QRL: $(RL)^2=(RQ)^2+(QL)^2$

$\therefore\ x = 90°$



29. En un octaedro regular ABCDEF de diagonales $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ y $\overline{EF}$, M es punto medio de $\overline{DF}$, calcular la medida del ángulo formado por las rectas $\overline{EM}$ y $\overline{AF}$.

Resolución:



$\overline{FN}\,//\,\overline{ME}\Rightarrow\theta$ es la medida del ángulo, cuyo valor se quiere hallar.

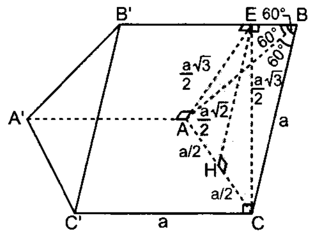
En el $\triangle$NFA, por ley de cosenos:

$3=4+5-2(2)(\sqrt{5})\cos\theta\Rightarrow 4\sqrt{5}\cos\theta=9-3=6$

$\cos\theta=\frac{3}{2\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{5}}{10}\qquad\therefore\ \theta=\arccos\left[\frac{3\sqrt{5}}{10}\right]$

30. En un prisma oblicuo la base es una región triangular equilátera, sus aristas miden a. Si uno de los ángulos poliedros tiene caras congruentes cuyas medidas son 60°, hallar el volumen del sólido limitado por el prisma.

Resolución:



Área de la sección recta (SR):

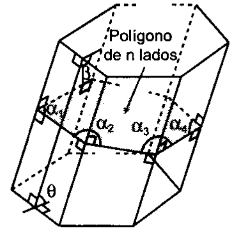
$A_{SR}=\frac{1}{2}(a)\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\Rightarrow A_{SR}=\frac{a^2}{4}\sqrt{2}$

Volumen del prisma es: $V=A_{SR}\cdot a$

$\Rightarrow V=\frac{a^2}{4}\sqrt{2}(a)\qquad\therefore\ V=\frac{a^3}{4}\sqrt{2}$

31. En un prisma cuyo número de aristas es A, hallar la suma de las medidas de todos sus ángulos diedros.

Resolución:



En la base superior: n aristas

En la base inferior: n aristas

El polígono de n lados cuya región poligonal es la sección recta y cuyos vértices están contenidos en n aristas laterales.

n.° total de aristas: 3n

Por dato: $3n = A \Rightarrow n = A/3$ ...(1)

La suma de las medidas de los ángulos diedros será:

$n(\beta + \theta) + \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \Sigma m\angle d$

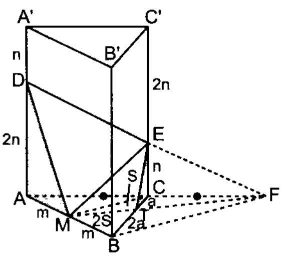
$\Sigma m\angle d = 180°n + 180°(n-2)$

$\Sigma m\angle d = 360°(n-1)$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2): $\Sigma m\angle d = 360°\left[\frac{A}{3} - 1\right]$

32. En las aristas laterales $\overline{AA'}$ y $\overline{CC'}$ de un prisma triangular recto ABC-A'B'C' se ubican los puntos D y E, respectivamente de modo que: $\frac{DA'}{DA} = \frac{EC}{EC'} = \frac{1}{2}$. Si M es el punto medio de $\overline{AB}$ y el volumen del prisma es V, hallar qué fracción del volumen del sólido limitado por el prisma está comprendido entre el plano ABC y el plano DEM.

Resolución:



Dato: $\frac{DA'}{DA} = \frac{EC}{EC'} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow DA' = EC = n$ y $DA = EC' = 2n$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{DE} = F$

⊾DAF: $\overline{EC}$ es base media $\Rightarrow AC = CF$

$\overline{MF} \cap \overline{BC} = T$

El plano buscado es MDET

En el $\triangle ABF$: T es su baricentro $\Rightarrow BT = 2TC = 2a$

Por dato, el volumen del prisma triangular recto ABC-A'B'C' es:

$V = 6S(3n) \Rightarrow V = 18Sn$ ...(1)

El volumen pedido será:

$V_x = V_{DME\text{-}AMC} + V_{E\text{-}MTC}$

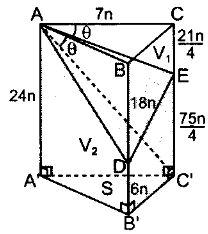
$V_x = 3S\left(\frac{2n+0+n}{3}\right) + S\left(\frac{0+0+n}{3}\right)$

$V_x = 10Sn/3$ ...(2)

De (1) y (2): $\therefore V_x = 5V/27$

33. En un prisma triangular recto ABC-A'B'C' donde $\frac{AC}{AA'} = \frac{7}{24}$. Hallar en qué razón divide el volumen de un prisma el plano trazado por el vértice A y que interseca a las aristas laterales $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ por los puntos D y E, respectivamente. Además BD = 3DB' y $\overline{AE}$ es la bisectriz del ángulo CAC'.

Resolución:



Volumen del tronco de prisma recto ADE-ABC: V_1:

$\Rightarrow V_1 = S\left[\frac{0 + 18n + 21n/4}{3}\right] \Rightarrow V_1 = S(93n)/12$

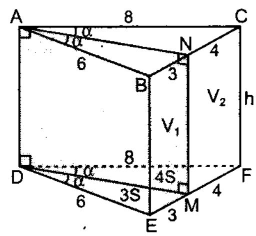
Volumen del tronco de prisma recto ADE-A'B'C': V_2

$\Rightarrow V_2 = S\left[\frac{24n + 6n + 75n/4}{3}\right] \Rightarrow V_2 = S(195n)/12$

Luego: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{93}{195}$ $\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{31}{65}$

34. Los lados de la base de un prisma recto ABC-DEF miden: AB = 6; BC = 7 y CA = 8. Se traza las bisectrices $\overline{AN}$ del $\angle BAC$ y $\overline{DM}$ del $\angle EDF$. ¿En qué relación de volúmenes divide el plano ANMD al sólido limitado por el prisma?

Resolución:



En la base (por teorema):

$\frac{6}{8} = \frac{EM}{MF} \Rightarrow EM = 3k \wedge MF = 4k$

Pero: $3k + 4k = 7$

$7k = 7 \Rightarrow k = 1$

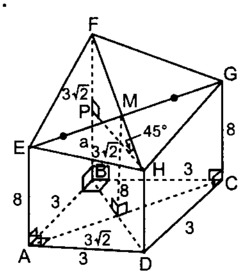
$\Rightarrow EM = 3$ y $MF = 4$

Luego: $A_{\triangle EDM} = 3S \wedge A_{\triangle MDF} = 4S$

Nos piden: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{3S(h)}{4S(h)}$ $\therefore \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4}$

35. La base de un tronco de prisma regular es un cuadrado de lado 3. Las bases forman 45° entre sí y 2 aristas laterales opuestas miden 8 cada una. Calcular el volumen del tronco de prisma.

Resolución:



El volumen del tronco de prisma será:

$V = V_{EFH\text{-}ABD} + V_{HFG\text{-}DBC}$

$V = \frac{9}{2}\left(\frac{8 + 2a + 3\sqrt{2}}{3}\right) + \frac{9}{2}\left(\frac{8 + 2a + 3\sqrt{2}}{3}\right)$

$V = 3(8 + 2a + 3\sqrt{2})$ ...(1)

En el trapecio rectángulo BFHD (por teorema):

$8 = \frac{a + a + 3\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow 2a + 3\sqrt{2} = 16$ ...(2)

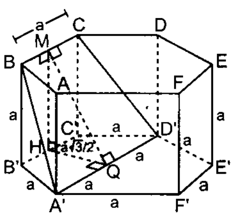
Reemplazando (2) en (1):

$V = 3(8 + 16)$

$V = 3(24) \quad \therefore V = 72$

36. En un prisma regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F' cuyas aristas tienen todas una longitud a, se traza por los puntos A', B' y D' un plano, calcular el volumen del mayor sólido que determina este plano en el prisma.

Resolución:



Área de la SR del tronco de prisma oblicuo CC'D'-BB'A':

$A_{SR} = \frac{1}{2}(a\sqrt{3}/2)(a) \Rightarrow A_{SR} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Volumen del tronco de prisma oblicuo CC'D'-BB'A':

$V = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\frac{a + 2a + a}{3}\right) \Rightarrow V = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

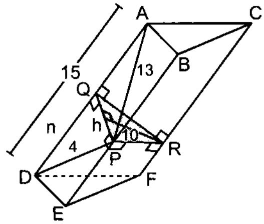
El volumen del mayor sólido determinado en el prisma por el plano A'BCD' será:

$V_x = 6(a^2)\frac{\sqrt{3}}{4}(a) - V \Rightarrow V_x = \frac{3}{2}\sqrt{3}a^3 - \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$

$\therefore V_x = \frac{7}{6}a^3\sqrt{3}$

37. Sea el prisma oblicuo ABC-DEF en cuya arista lateral $\overline{BE}$ se ubica el punto P, calcular el volumen del prisma si se sabe que: AD = 15; DP = 4, AP = 13 y la distancia de $\overline{CF}$ a la cara ABED es 10.

Resolución:



$\triangle$DAP (por el teorema de Euclides):

$13^2 = 4^2 + 15^2 - 2n(15)$

$30n = 72 \Rightarrow n = 12/5$

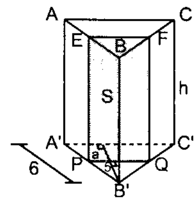
$\triangle$PQD: $h^2 = 4^2 - \left(\frac{12}{5}\right)^2 \Rightarrow h = 16/5$

El volumen del prisma oblicuo será: $V = A_{SR}a$

$V = \frac{1}{2}\left(\frac{16}{5}\right)(10)(15) \quad \therefore V = 240$

38. En un prisma regular triangular se determina una sección paralela a una cara lateral y que dista 5 de la arista opuesta. Calcular el área de la sección paralela sabiendo que: El volumen del prisma es 108 y el lado de la base mide 6.

Resolución:



$V_{prisma} = 6^2\frac{\sqrt{3}}{4}h = 108 \Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

$\triangle PB'Q$: $PQ = \frac{10}{3}\sqrt{3}$

Luego: $S = \frac{10}{3}\sqrt{3}(4\sqrt{3}) \quad \therefore S = 40$

39. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si en un prisma triangular se traza un plano paralelo a una de las caras laterales, las áreas de dicha cara y el plano sección son proporcionales a sus distancias respectivas a la arista opuesta.

II. La suma de los cuadrados de las proyecciones de una diagonal de un rectoedro sobre tres planos rectangulares dos a dos es igual al doble del cuadrado de esta diagonal.

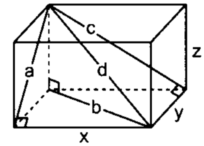
III. El cubo es un prisma cuyas caras son rectángulos.

Resolución:

I. **Verdadero**

II. **Verdadero**

De la figura:



$a^2 = y^2 + z^2$ ...(1)

$b^2 = x^2 + y^2$ ...(2)

$c^2 = x^2 + z^2$ ...(3)

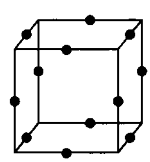
Sumando (1), (2) y (3):

$a^2 + b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2)$

$\therefore a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2$

III. **Falso**

El cubo es un prisma cuyas caras son regiones cuadradas.



$\therefore$ VVF

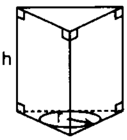
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

El volumen y el área lateral de un prisma recto de base triangular son 50 m^3 y 200 m^2 respectivamente. Calcule el radio (en m) de la circunferencia inscrita en la base del prisma.

A) 0,25 B) 0,5 C) 1 D) 2 E) 3

Resolución:



$V = 50$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow S_E h = 50 \Rightarrow (pr)h = 50 \\ S_L = 200 \Rightarrow 2ph = 200\end{array}\right\}\div$

$\frac{r}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore\ r = 0{,}5\ m$

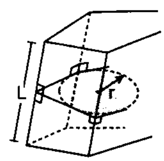
Clave: B

PROBLEMA 2 (UNI 2012 - I)

Un prisma oblicuo de volumen 150 m^3 tiene área de superficie lateral 50 m^2. Determine el área del círculo inscrito a la sección recta en m^2.

A) 9π B) 4π C) 25π D) 30π E) 36π

Resolución:



Datos:

$\left.\begin{array}{l}V = 150m^3 \Rightarrow A_{SR}L = 150 \\ A_L = 50\ m^2 \Rightarrow (2P_{SR})L = 50\end{array}\right\}\div$

$\frac{A_{SR}}{2P_{SR}} = 3$

Piden: $A_{\circ}$

Se sabe: $A_{SR} = P_{SR}r$

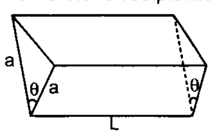
$6P_{SR} = P_{SR}r \Rightarrow r = 6$

$\therefore\ A_{\circ} = \pi(6)^2 = 36\pi\ m^2$

Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - II)

La figura representa un recipiente regular, en donde a y L son dados en cm y el ángulo θ es variable. Determine el volumen máximo de dicho recipiente en cm^3.



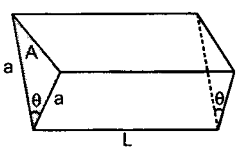
A) $\sqrt{2}a^2L$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2L$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2}aL^2$

D) $\frac{1}{2}a^2L$ E) $\frac{3\sqrt{2}}{2}a^2L$

Resolución:

Piden Vmax: $V = L\frac{a^2}{2}\text{sen}\theta$

Si senθ es máximo entonces el volumen es máximo.



$\theta = 90° \quad \therefore\ V = \frac{1}{2}a^2L$

Clave: D

PROBLEMAS 4 (UNI 2012 - II)

Se tiene un prisma hexagonal regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F' cuyos lados de la base y la altura miden 2a (a > 0). Sobre el plano de la base se construye exteriormente un cuadrado de lados E'D'D"E", luego por las aristas $\overline{AB}$ y $\overline{D"E"}$ pasa un plano formando un sólido ABD"E"A'B'. Calcule el volumen de la parte del sólido exterior al prisma hexagonal.

A) $3(\sqrt{3}+1)a^3$ B) $3(\sqrt{3}-1)a^3$ C) $2(\sqrt{3}+1)a^3$

D) $2(\sqrt{3}-1)a^3$ E) $\frac{4}{3}(\sqrt{3}-1)a^3$

Resolución:

Piden: $V_{NE'E"-MD'D"}$

$\triangle AA'E" \sim \triangle NE'EE"$

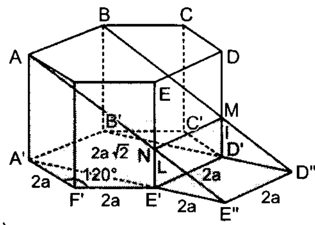
$\frac{L}{2a} = \frac{2a}{2a(\sqrt{3}+1)}$

$L = \frac{2a}{\sqrt{3}+1}$

$L = a(\sqrt{3}-1)$

$V = \frac{a(\sqrt{3}-1)(2a)}{2}(2a)$

$\therefore\ V = 2a^3(\sqrt{3}-1)$



Clave: D

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Se quiere formar la letra V con dos troncos iguales de prisma oblicuo de base triangular, con un ángulo de abertura de 60°, tal como se muestra en la gráfica. El área de la base común es de 30 m^2 y la suma de las aristas laterales de uno de los troncos es 36 m. Calcule el volumen (en m^3) del material necesario para su construcción.

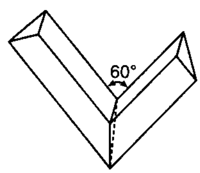
A) 60

B) 120

C) 360

D) $360\sqrt{3}$

E) 720



Resolución:

Piden: $V_{sólido}$

$V_{sólido} = 2V_{tronco}$

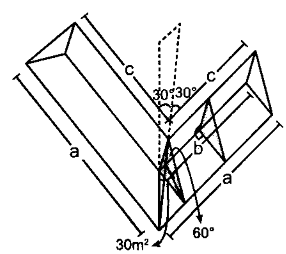
$V_{sólido} = 2A_{SR}\left(\frac{a+b+c}{3}\right)$

$A_{SR} = 30\cos60°$

Dato: $a + b + c = 36$

$V_{sólido} = 2(30)\cos60°\left(\frac{36}{3}\right)$

$\therefore\ V_{sólido} = 360\ m^3$



Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En un prisma regular ABCDEF - A'B'C'D'E'F' en las aristas $\overline{CD}$, $\overline{FF'}$ y $\overline{AA'}$ se ubican los puntos G, K y L respectivamente tal que CG = GD; FF' = KE; $\overline{LK}//\overline{AF}$; KF = 1 cm y el perímetro de una de las bases del prisma es 18 cm. Calcular el volumen del prisma ABCG-LMNP.

A) $111\sqrt{3}$ cm^2 B) $18\sqrt{3}$ cm^2 C) $17\sqrt{2}$ cm^2
D) $111\sqrt{2}$ cm^2 E) $113\sqrt{3}$ cm^3

2. Se tiene el prisma recto de base pentagonal ABCDE en el cual ABDE y BCD son trapecios isósceles y triángulo equilátero ($\overline{AE}//\overline{BD}$), AE= 2 y BD= 6 y siendo V_1,V_2 volúmenes de los cilindros que tienen como bases círculos inscritos en ABDE y BCD respectivamente y V_3 es el volumen del prisma. Calcular: $\dfrac{V_3}{V_1+V_2}$

A) $\dfrac{17\sqrt{3}}{6}$ B) $\dfrac{18\sqrt{3}}{25}$ C) $\dfrac{17\sqrt{3}}{3}$
D) $\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$ E) $\dfrac{14\sqrt{3}}{5}$

3. En un cubo ABCD-EFGH, de volumen 216, se ubican los puntos L; K y N en $\overline{CD}$, $\overline{CG}$ y $\overline{FH}$ respectivamente tal que CL = LD; FN = NH; $\overline{BL}\cap\overline{AC}$ = {M}. Si MK + NK es mínimo, calcular la longitud del menor recorrido para ir de K hacia A por la superficie del cubo.

A) $2\sqrt{10}$ B) $4\sqrt{10}$ C) $5\sqrt{5}$
D) $3\sqrt{10}$ E) $10\sqrt{5}$

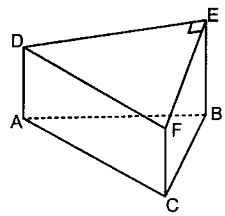
4. En un prisma recto ABCD-A'B'C'D', donde sus bases son regiones rectangulares, se ubica en la arista $\overline{DD'}$ el punto L, luego con centro en C' y radio LC' se traza un arco de circunferencia que interseca a $\overline{CC'}$ en K. Si $\dfrac{D'C'}{1}=\dfrac{LD'}{2}=\dfrac{DL}{3}=\dfrac{A'D'}{4}$ y CK = $(10-2\sqrt{5})$. Calcular el volumen del tronco de prisma ABCDLK.

A) 48 B) $8(8-\sqrt{5})$ C) 96
D) $8(4-\sqrt{5})$ E) $6(8-\sqrt{5})$

5. En un prisma regular ABC-DEF, se ubican los puntos medios N y L de $\overline{CB}$ y $\overline{FG}$ respectivamente, luego se ubica S de $\overline{ND}$, tal que DS = SL y la distancia de S a la arista DF es $\sqrt{19}$ cm. Calcular el área de la superficie lateral, si una cara lateral es una región cuadrada.

A) 182 cm^2 B) 192 cm^2 C) 210 cm^2
D) 200 cm^2 E) 220 cm^2

6. En la figura mostrada se tiene un tronco de prisma recto que tiene por base un triángulo isósceles, AB = BC = a y m∠ABC = 120°. Las aristas laterales miden AD = CF = $a\sqrt{2}$ y la tercera $\overline{BE}$ es mayor. Si m∠DEF = 90° y $\overline{DF}$ // $\overline{AC}$, hallar el volumen del tronco de prisma.



A) $\dfrac{5\sqrt{6}}{18}a^3$ B) $\dfrac{6\sqrt{6}}{18}a^3$ C) $\dfrac{7\sqrt{6}}{24}a^3$
D) $\dfrac{7\sqrt{6}}{18}a^3$ E) $\dfrac{3\sqrt{6}}{8}a^3$

7. En un prisma cuadrangular regular ABCD-EFGH se ubican los puntos medios M, N, P y Q de las aristas AB, BC AE y EH, respectivamente. Si la medida del ángulo entre $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ es 60° y el área de la superficie total es 216, calcular, el volumen del prisma.

A) 36 B) 72 C) 108
D) 144 E) 216

8. En un prisma triangular regular ABC - DEF, la medida del ángulo entre $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ es 60° y AB = 4. Calcular el volumen del prisma.

A) $16\sqrt{3}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{3}$
D) $8\sqrt{2}$ E) $32\sqrt{2}$

9. En un prisma oblicuo la altura es igual al doble del diámetro de la circunferencia inscrita en la base del prisma. Si la base es un polígono regular cuyo perímetro es 12 y la suma de las medidas de los ángulos diedros del prisma es 1800, calcular el volumen del prisma.

A) 18 B) $18\sqrt{3}$ C) 36
D) $36\sqrt{3}$ E) 72

10. Se tiene un cuadrado PQRS cuyo lado mide $\sqrt{6}$, $\overline{PA}$, $\overline{RB}$ son perpendiculares al plano del cuadrado ubicados en el mismo semiespacio. Si: PA = 9 y RB = 12, calcular el volumen del sólido AQSB.

A) 18 B) 21 C) 24 D) 32 E) 42

11. En un prisma hexagonal regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F ($\overline{AA'}$; $\overline{BB'}$; $\overline{CC'}$; ..., son aristas laterales), la diagonal mayor mide d y m∠A'DF' = θ. Hallar el volumen del prisma.

A) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^3\sqrt{1-4\text{sen}^2\theta}\,\text{sen}^2\theta$

B) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^3\sqrt{1-4\text{sen}^2\theta}\,\text{sen}\theta$

C) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}d^3\sqrt{1+4\text{sen}^2\theta}\,\text{sen}^2\theta$

D) $\frac{3\sqrt{3}}{2}d^3\sqrt{1+4\text{sen}^2\theta}\,\text{sen}\theta$

E) $\frac{3\sqrt{3}}{2}d^3\sqrt{1+4\text{sen}^2\theta}\,\text{sen}^2\theta$

12. En un prisma oblicuo ABC-DEF la proyección de A sobre DEF es su incentro. Calcular el volumen del prisma, si el área de la cara lateral ACFD es 40 y la medida del diedro que forma dicha cara con la base DEF es 60°. AC = 10 y m∠ABC = 90°.

A) $16\sqrt{3}$ B) $48\sqrt{3}$ C) $32\sqrt{3}$
D) $32\sqrt{6}$ E) $64\sqrt{3}$

13. En un hexágono regular ABCDEF cuyo perímetro es 12, se levanta $\overline{AO}$ perpendicular al plano del hexágono, tal que OE = $7\sqrt{3}$. Calcular el volumen del sólido O-ABCDEF.

A) 18 B) $18\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{3}$
D) $18\sqrt{5}$ E) $18\sqrt{7}$

14. En un tronco de prisma cuadrangular regular ABCD-EFGH: BF = 3 y AE = CG, la distancia entre $\overline{BF}$ y $\overline{DH}$ es 2. Si la base superior EFGH forma con la otra base un diedro que mide 45, calcular el volumen del tronco de prisma.

A) 4 B) 6 C) 9
D) 12 E) 16

15. Es un prisma regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F' de volumen V. Calcular el volumen del sólido BEF'D'.

A) $\frac{2}{9}$V B) $\frac{2}{3}$V C) $\frac{2}{5}$V
D) $\frac{2}{11}$V E) $\frac{2}{7}$V

16. En un prisma regular hexagonal se encuentra inscrito un cilindro de revolución; donde sus bases están inscritas en caras laterales del prisma. Calcular la razón de volúmenes de dichos sólidos.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) $\frac{\pi}{6}$ C) $\frac{\pi}{2}$
D) $\frac{\pi}{4}$ E) $\frac{\pi}{12}$

17. En un prisma triangular de base regular cuyo lado mide $a\sqrt{3}$, la arista lateral forma con la base un ángulo de medida α y la proyección de uno de los vértices coincide con el centro de la base. Calcular el volumen del prisma.

A) $\frac{2}{3}\sqrt{3}\,a^3\tan\alpha$ B) $\frac{4}{3}\sqrt{2}\,a^3\tan\alpha$
C) $\frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^3\tan2\alpha$ D) $\frac{3}{4}\sqrt{3}\,a^3\tan\alpha$
E) $\frac{3}{4}\sqrt{2}\,a^3\tan\alpha$

18. Se tiene un prisma ABCDEF-A'B'C'D'E'F' de bases regulares tal que la región rombal ADD'A' es perpendicular a las bases. Si m∠ADD' = 60° y AB = a, calcular el volumen del prisma.

A) $4{,}5a^3$ B) $1{,}5a^3$ C) $2a^3$
D) $2{,}5a^3$ E) $3a^3$

19. En un hexaedro regular ABCD-EFGH se ubica el punto M en $\overline{CG}$ y $\overline{DM}$ interseca a $\overline{CH}$ en L tai que HL = 3(LC). Calcular el volumen del prisma HLMG-EL'M'F', si el volumen del hexaedro es V.

A) 13V/24 B) 11V/26 C) 9V/20
D) 11V/24 E) 15V/28

20. Dado un prisma recto ABC-DEF de base triangular recto en B. Si AB = BC = BE = 4 y M es punto medio de $\overline{BA}$, calcular la distancia entre $\overline{CM}$ y $\overline{EA}$.

A) 4/5 B) 4/3 C) 5/3
D) 6/5 E) 7/3

21. En un prisma recto ABCD-EFGH ($\overline{BC}$// $\overline{EH}$) del punto medio de $\overline{AB}$ se traza un plano perpendicular a $\overline{CD}$ y se determina en el prisma una región cuadrada de área A que es equivalente a la cara CDHG. Calcular el volumen del prisma.

A) $\sqrt{\frac{A^3}{2}}$ B) $2\sqrt{A^3}$ C) $\frac{\sqrt{A^3}}{4}$
D) $\sqrt{A^3}$ E) $\frac{\sqrt{A^3}}{6}$

22. La diagonal de un paralelepípedo rectangular mide $\sqrt{70}$ y la suma de las longitudes de todas las aristas es 56, además el área de una cara es 30. Calcular el volumen del paralelepípedo.

A) 85 B) 87 C) 89
D) 86 E) 90

23. En un prisma rectò ABCD-EFGH, se ubica el punto P en la prolongación de $\overline{EG}$. Si AP = 10, calcular la distancia entre los puntos medios de $\overline{EG}$ y $\overline{CP}$.

A) 10 B) 8 C) 6
D) 5 E) 4

24. Se tiene un tronco de prisma triangular, si la sección recta tiene por área 40 cm^2 y la longitud del segmento que une los baricentros de las bases es de 9 cm. Calcular el volumen del tronco de prisma.

A) 360 cm^3 B) 180 cm^3 C) 120 cm^3
D) 270 cm^3 E) 720 cm^3

25. La diagonal del desarrollo de la superficie lateral de un prisma triangular regular y su altura tiene por longitudes 8 y $4\sqrt{3}$ respectivamente. Calcular el área de la superficie total del prisma.

A) $\frac{125\sqrt{3}}{9}$ B) $\frac{161\sqrt{3}}{9}$ C) $\frac{154\sqrt{3}}{9}$
D) $\frac{152\sqrt{3}}{9}$ E) $\frac{148\sqrt{3}}{9}$

26. En un prisma cuadrangular regular la región limitada por tres diagonales de sus caras tiene un área igual a 36 m^2. Determinar con la base del prisma un diedro que mide 60° y calcular el volumen de dicho prisma.

A) $108\sqrt{6}$ m^3 B) $106\sqrt{3}$ m^3 C) $108\sqrt{2}$ m^3
D) $112\sqrt{6}$ m^3 E) $114\sqrt{3}$ m^3

27. En un prisma recto ABCD-A'B'C'D', tal que m∠BAD = 90°; BC = CD; m∠BCD = 90° y el área de la región cuadrada ACC'A' es 32. Calcular el volumen del prisma.

A) $64\sqrt{3}$ B) $46\sqrt{2}$ C) $32\sqrt{2}$
D) $64\sqrt{2}$ E) $32\sqrt{3}$

28. Se tienen dos prismas rectos ABC-DEF y MNL-PQR, tal que AB = BC = 5 y AD = AC = MN = NL = ML = 6. Si el área de la superficie total del prisma MNL-PQR es mayor que la del prisma ABC-DEF, calcular el menor valor entero de MP.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

29. En un prisma cuadrangular regular se traza un plano que interseca a sus aristas laterales. Calcular la medida del ángulo diedro determinado por dicho plano y el plano de la base, si el plano determina en el prisma una sección rombal cuyo ángulo interior mide 60°.

A) $\arccos\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ B) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$
C) $\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ D) $\arctan(\sqrt{3})$
E) $\text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$

30. En un prisma ABC-A'B'C' se ubican los puntos M y N centros de las caras ACC'A' y A'B'C' tal que: MN = $2\sqrt{2}$ y la medida del ángulo entre $\overline{AL}$ y la base es 30°. Calcular el volumen de dicha prisma.

A) $3\sqrt{6}$ B) $9\sqrt{6}$ C) $18\sqrt{6}$
D) $82\sqrt{6}$ E) $27\sqrt{6}$

31. Dado un prisma regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F'. Si se ubica el punto medio K de $\overline{DE}$; AD ∩ BK = {L} y el volumen del prisma es 144 m^3, calcular el volumen del prisma ABL-A"B"L" (A" es punto medio de $\overline{AA'}$).

A) 14 m^3 B) 16 m^3 C) 18 m^3
D) 24 m^3 E) 36 m^3

32. Se tiene el prisma regular ABCD-PQRS. El mínimo recorrido para ir de A hacia P tocando a la región QSDB y el mínimo recorrido para ir de A hacia C tocando a la base PQRS se intersecan en T. Si TS = 4 y TR = 5, calcular TP.

A) $5\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{2}$ C) $6\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{5}$ E) $\sqrt{7}$

33. En un prisma regular ABCD-EFGH con centro en E y H se trazan los arcos de radios EB y HC que intersecan a $\overline{HC}$ y $\overline{EB}$ en Q y P respectivamente. Si QC = 2 y BC = 4, calcular el volumen del sólido EPF-HQG.

A) 12 B) 8,4 C) 14,4
D) 16 E) 16,4

34. Dado un prisma hexagonal regular ABCDEF-GHIJKL en $\overline{AG}$ se ubica el punto Q, tal que AQ = 2(QG) = $6\sqrt{3}$ y CF = $8\sqrt{3}$. Si el punto que contiene a D,E y Q interseca en P a $\overline{FL}$, calcular la medida del ángulo entre $\overline{EP}$ y $\overline{IH}$.

A) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{7}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{5}\right)$
C) $\arctan\left(\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$ D) $\arctan\left(\frac{3\sqrt{3}}{11}\right)$
E) $\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)$

35. En un prisma cuadrangular regular el ángulo entre la diagonal y una cara lateral mide 30° y el área de la base es 4 cm^2. Calcular la longitud del menor recorrido para ir de un extremo de dicha diagonal al otro sobre la superficie lateral del prisma.

A) $\sqrt{6}$ cm B) $\sqrt{3}$ cm C) $\sqrt{6}$ cm
D) $3\sqrt{6}$ cm E) $3\sqrt{2}$ cm

36. En la prisma regular ABCD-EFGH, MN = a, MQ = b, NP = c, la altura del prisma es numéricamente igual al coseno del ángulo entre $\overline{NP}$ y $\overline{MQ}$. Calcular el volumen del prisma es numéricamente igual al coseno del ángulo entre NP y MQ. Calcular el volumen del prisma.

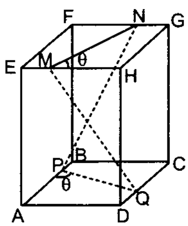
A) $a^2\frac{(b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\text{sen}^2\theta$

B) $a^2\frac{(b^2+2c^2-2a^2)}{2bc}\text{sen}^2\theta$

C) $a^2\frac{(b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\text{sen}^2\theta$

D) $a^2\frac{(2b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\text{sen}\theta$

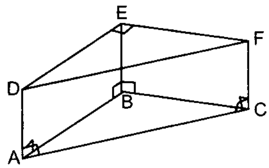
E) $a^2\frac{(2b^2+c^2-2a^2)}{2bc}\text{sen}^2\theta$



37. Se tiene el prisma triangular regular ABC-DEF, si $\sqrt{2}$(AB) = BE, calcular la medida del ángulo entre $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$.

A) 30° B) 80° C) 60°
D) 150° E) 100°

38. Del gráfico, AB = BC = a, m∠ABC = 120° y m∠ DEF = 90°, además AD = CF = $a\sqrt{2}$, BE > AD, calcular el volumen del sólido DEF-ABC.



A) $\frac{7}{24}\sqrt{6}\ a^3$ B) $\frac{5}{24}\sqrt{6}\ a^3$ C) $\frac{8}{19}\sqrt{6}\ a^3$
D) $\frac{7}{19}\sqrt{6}\ a^3$ E) $\frac{5}{19}\sqrt{6}\ a^3$

39. Se tiene un hexaedro regular ABCD-EFGH luego se ubican los puntos medios de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{DA}$ que son M, N, P y Q respectivamente si AB = 4, calcular el volumen del sólido EMQ-GNP.

A) 64/3 B) 32/3 C) 16/3
D) 8/3 E) 128/3

40. Se tiene paralelepípedo rectangular ABCD-EFGH, la sección plana determinada por $\overline{EH}$ y el centro de la cara BCGF tiene de área 40, si el diedro entre el plano secante y EFGH mide 37°, CG = 6 y GH = 4, calcular la razón de volúmenes de los sólidos determinados.

A) 1/3 B) 2/3 C) 2/5
D) 3/4 E) 1/6

41. Se tiene un prisma hexagonal regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F'. el ángulo entre $\overline{BE}$ y $\overline{A'B'}$ mide 127°/2 si, A'D= $2\sqrt{5}$, calcular el volumen del prisma.

A) $12\sqrt{3}$ B) $8\sqrt{3}$ C) $10\sqrt{3}$
D) $15\sqrt{3}$ E) $18\sqrt{3}$

42. Se tiene el cuadrado ABCD, cuyo lado es de longitud $\sqrt{2}$ cm. Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ son perpendiculares al plano del cuadrado y se ubican en un mismo semiespacio. Si AE = 6 cm y CF = 9 cm. Calcular el volumen del sólido EBDF.

A) 5 cm B) 10 cm C) 4 cm
D) 6 cm E) 8 cm

43. Un prisma recto tiene su base limitada por un trapecio isósceles cuyos laterales son de longitud 13 cm y las bases son de 10 cm y 20 cm de longitud. Por la base mayor del trapecio se traza un plano secante al prisma, que determina con la base de dicho prisma un ángulo diedro cuya medida es 53° y la altura del prisma mide 30 cm. Calcular la razón entre los volúmenes de los sólidos determinados.

A) $\frac{32}{103}$ B) $\frac{82}{105}$ C) $\frac{32}{111}$
D) $\frac{32}{115}$ E) $\frac{32}{135}$

44. Calcular el volumen de un prisma recto si el desarrollo de su superficie lateral es una región cuadrada de 64 m^2 de área y además en el polígono que limita a sus bases se puede inscribir una circunferencia de 1 m de radio.

A) 8 m^3 B) 16 m^3 C) 24 m^3
D) 36 m^3 E) 32 m^3

45. Se tiene un prisma triangular regular ABC-A'B'C', en la cual la medida del ángulo entre la recta que contiene al baricentro de una base y al centro de una cara lateral y dicha base es igual a 60°, tal que el área de la región triangular B'A'C es $12\sqrt{7}$. Calcular el volumen del cilindro.

A) 248 B) 240 C) 144
D) 140 E) 200

46. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Todo poliedro tiene diagonales.
II. Si un poliedro tiene sus caras regulares y congruentes entre sí, entonces es regular.
III. Si un poliedro tiene dos caras paralelas y congruentes y las demás caras regiones paralelográmicas, entonces es un prisma.
IV. El número de aristas de un prisma puede ser 21.

A) VVFF B) FFVF C) FFFV
D) VVVV E) FVFV

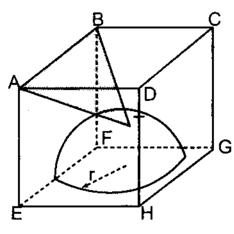
47. En un rectoedro ABCD-EFGH, los centros de sus bases ABCD y EFGH son los puntos O y Q, si el volumen del sólido ABO-EFQ cuyas caras son cuadradas, es $16\sqrt{3}$ cm^3; calcular el área de la superficie lateral de dicho paralelepípedo.

A) $32(\sqrt{3}-1)$ cm^3 B) $32(\sqrt{2}+1)$ cm^3
C) $32\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)$ cm^3 D) $32(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ cm^3
E) $32(\sqrt{3}+1)$ cm^3

48. Se tiene un paralelepípedo rectangular ABCD-EFGH. Calcular la suma de las medidas de las caras del triedro E-BDG.

A) 90° B) 120° C) 180°
D) 270° E) 135°

49. Según el gráfico, la región triangular ABT de área S es tangente a la superficie semiesférica en T. Calcular el volumen del prisma regular ABCD-EFGH en función de S y r.



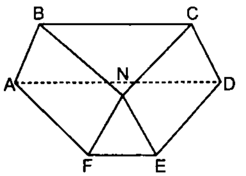
A) 8 Sr B) 4 Sr C) $\frac{2\sqrt{5}r}{S+r}$

D) $\frac{4Sr}{S+r}$ E) $\frac{8Sr^2}{S-r}$

50. Se tiene un prisma hexagonal regular ABCDEF-A'B'C'D'E'F' si AB = BB' = m, calcular el área de la sección plana determinada en el prisma por el plano que pasa por C, D y A'.

A) 6 m^2 B) 2 m^2 C) 3 m^2
D) 4 m^2 E) 5 m^2

51. En el gráfico, se tiene un prisma hexagonal y una pirámide. Si las bases de dichos sólidos son paralelas y la razón de volúmenes del prisma y pirámide es igual a K, calcular VP/VQ.



A) $\left(\frac{K}{3}\right)^{1/3}$ B) $\left(\frac{K}{2}\right)^{2/3}$ C) $K^{1/3}$

D) K^3 E) $K^{1/2}$

52. En un prisma regular ABCD-EFGH, M y N son puntos medios de $\overline{FB}$ y $\overline{DC}$ respectivamente; tal que NG = a y m∠AMN = m∠MNG. Calcular el volumen del prisma.

A) $\frac{8a^3\sqrt{5}}{5}$ B) $\frac{4a^3\sqrt{5}}{5}$ C) $\frac{3a^3\sqrt{5}}{5}$

D) $a^2\sqrt{5}$ E) $\frac{2a^2\sqrt{5}}{5}$

53. En un hexaedro regular ABD-EFGH, O es centro de la cara CDHG y M es un punto de $\overline{HD}$. Calcular la medida del ángulo entre $\overline{FM}$ y $\overline{AG}$.

A) 75° B) 45° C) 82°
D) 72° E) 90°

54. En un tetraedro regular ABCD, M y N son puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{DC}$ respectivamente, luego se traza la altura DH del tetraedro; en $\overline{AH}$ y $\overline{DB}$ se ubican los puntos de P y Q respectivamente, tal que AP = 3(PH) y BQ = 3(DQ). Calcular la medida del ángulo entre $\overline{MP}$ y $\overline{NQ}$.

A) 30° B) 37° C) 45°
D) 53° E) 60°

55. En un hexaedro regular ABCD-EFGH, en $\overline{EL}$ y $\overline{FB}$ se ubican los puntos M y L respectivamente, tal que FL = 3(BL) y $\overline{MC}$ es secante con $\overline{FH}$ en un punto T; AB = a. Calcular la razón entre los volúmenes del hexaedro.

A) 1 B) 2/3 C) 3/4
D) 5/8 E) $\sqrt{2}/\sqrt{3}$

56. En un tetraedro regular ABCD, cuya arista mide 6, la altura AM del tetraedro se ubica en el punto P, tal que AP = 3(PH) y G es baricentro de la cara ACD. Calcular la distancia entre $\overline{PG}$ y $\overline{CD}$.

A) $\sqrt{2}$ B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $2\sqrt{3}$
D) $\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{2}$

57. En un prisma cuadrangular regular, el segmento que une el centro de una base y el punto de intersección de las diagonales de una cara lateral mide 4 cm; además dicho segmento forma con la dicha base un ángulo que mide 60°. Calcular el volumen de dicho prisma.

A) $16\sqrt{3}$ cm^3 B) $8\sqrt{3}$ cm^3 C) $32\sqrt{3}$ cm^3
D) $24\sqrt{3}$ cm^3 E) $48\sqrt{3}$ cm^3

58. Se tiene un prisma triangular oblicuo ABC-A'B'C' siendo G y G' los baricentros de sus bases. La proyección de G sobre la base A'B'C' es el punto medio de $\overline{C'B'}$, calcular el volumen de dicho prisma si $\overline{GG'}$ = 5 cm; además el ángulo formado por GG' con el plano de su base mide 53° y dichas bases son regulares.

A) $100\sqrt{3}$ cm^3 B) $72\sqrt{3}$ cm^3 C) $108\sqrt{3}$ cm^3
D) $54\sqrt{3}$ cm^3 E) $106\sqrt{3}$ cm^3

59. En un octaedro regular M-ABCD-N sean G_1 y G_2 baricentros de las regiones triangulares MAD y MBC, calcular la razón entre los volúmenes del octaedro y del sólido AG_1D-GB_2C.

A) 9/2 B) 9/4 C) 9/8 D) 9/11 E) 9/10

60. En un prisma triangular regular ABC-A'B'C', el plano determinado por los puntos A, C y G determinan en el prisma una sección de área S (G es centro de la cara AA'BB'), calcular el volumen de dicho sólido si BB' = AB.

A) $\frac{2\sqrt{7}}{3}S^3$ B) $\frac{2^4\sqrt{63}}{7}S^2$ C) $8\sqrt{21}\,S^2$

D) $\frac{4\sqrt{S}}{3}S$ E) $\frac{\sqrt[4]{1008}}{7}S\sqrt{S}$

61. En un rectoedro ABCD-EFGH, los centros de sus bases ABCD y EFGH son los puntos O y Q. Si el volumen del sólido ABO-EFQ, cuyas caras son cuadrados, es $16\sqrt{3}$, calcula el área de la superficie lateral de dicho paralelepípedo.

A) $12(\sqrt{2}-1)$ B) $24(\sqrt{2}-1)$ C) $8(\sqrt{3}+1)$
D) $16(\sqrt{3}+1)$ E) $32(\sqrt{3}+1)$

62. En un tronco de prisma triangular recto, la base ABC es una región equilátera y las aristas laterales miden 8; 5 y 4. Si el volumen del tetraedro determinado por la base superior y el vértice B es de $12\sqrt{3}$, calcular el área de la base.

A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $7\sqrt{3}$ D) $8\sqrt{3}$ E) $9\sqrt{3}$

63. Un sólido está limitado por una región rectangular cuyas dimensiones miden 30 y 20 y por cuatro planos inclinados a 45° sobre el plano del rectángulo, calcular el volumen de dicho sólido.

A) 4000 B) 4000/3 C) 3000
D) 7000/3 E) 8000/3

64. En un prisma regular triangular ABC-A'B'C' se traza un plano secante que pasa por A; E y F. Si E y F pertenecen a las aristas $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$, tal que BE = EB' = 3 y CF = 2FC' = 4, las rectas AE y AF intersectan al plano A'B'C' en P y S, respectivamente, AB = 4, hallar el volumen del sólido EFC'B'-SP.

A) $28\sqrt{3}/3$ B) $27\sqrt{3}/4$ C) $29\sqrt{3}/3$
D) $31\sqrt{3}/3$ E) $32\sqrt{3}/3$

65. En un prisma oblicuo triangular el área de una cara lateral ABCD es 5, el área de la base es 12. Sabiendo que las aristas laterales están inclinados 60° respecto a la base y tienen longitud 4, calcular la distancia de la arista opuesta a la cara ABCD.

A) $40\sqrt{3}/5$ B) $41\sqrt{3}/5$ C) $43\sqrt{3}/5$
D) $44\sqrt{3}/5$ E) $48\sqrt{3}/5$

66. En un prisma oblicuo, el área lateral, el área de la sección recta y el perímetro de la sección recta miden S_1; S_2 y 2p, respectivamente. Calcular el volumen del prisma.

A) $S_1S_2/2p$ B) S_1S_2/p C) $S_1^3\,S_2^3/4p^2$
D) $(S_1 + S_2)p$ E) $\dfrac{(S_1+S_2)}{2}p$

67. Un tronco de prisma triangular recto tiene por aristas básicas segmentos cuyas longitudes son 8; 12 y 6. Las aristas laterales opuestas a estos lados miden 15; 5 y 10, respectivamente, calcular el área de la superficie lateral del tronco.

A) 220 B) 250 C) 270
D) 300 E) 320

68. En un prisma triangular regular cuya altura mide 8 y el desarrollo de su superficie lateral es una región rectangular cuya diagonal mide 16, hallar el volumen del sólido limitado por el prisma.

A) $24\sqrt{3}$ B) $25\sqrt{3}$ C) $125\sqrt{3}/3$
D) $128\sqrt{3}/3$ E) $130\sqrt{3}/3$

69. En un prisma triangular regular, los centros de sus caras laterales y el centro de una base son los vértices de un tetraedro regular cuya superficie total tiene por área $9\sqrt{3}$, hallar el volumen del prisma.

A) $50\sqrt{2}$ B) $52\sqrt{2}$ C) $54\sqrt{2}$
D) $56\sqrt{2}$ E) $58\sqrt{2}$

70. En un prisma oblicuo de bases regulares la proyección del vértice A sobre la base PQR coincide con el centro de dicha base. Si la arista básica mide L y las aristas laterales están inclinadas 30° respecto a la base hallar el volumen del prisma hexagonal de base regular inscrito en el prisma triangular.

A) $L^3\sqrt{3}/18$ B) $L^3\sqrt{3}/4$ C) $L^3\sqrt{2}/18$
D) $L^3\sqrt{2}/3$ E) $L^3/3$

71. Dos aristas laterales opuestas de un tronco de paralelepípedo recto miden a y la diferencia de las longitudes de las otras dos aristas opuestas es $5\sqrt{3}$, el plano que contiene a la base superior determina con el plano de la base un ángulo que mide 30°. Si la base es una región cuadrada, calcular el volumen del sólido limitado por el tronco de paralelepípedo.

A) $2a^2$ B) $a^2/2$ C) 225a/2
D) 225a E) 225a/3

72. En un prisma cuadrangular regular el ángulo entre la diagonal y una cara lateral mide 30° y el área de la base es 4. Calcular la longitud del menor recorrido para ir de un extremo de dicha diagonal al otro sobre la superficie lateral del prisma.

A) $\sqrt{6}$ B) $\sqrt{7}$ C) $2\sqrt{6}$
D) $2\sqrt{7}$ E) $\sqrt{11}$

73. Calcular el volumen de un prisma recto si el desarrollo de su superficie lateral es una región cuadrada de área 64 y además en el polígono que limita a su base se puede inscribir una circunferencia de radio 1.

A) 6 B) 8 C) 16
D) 24 E) 32

74. Se tiene el cuadrado ABCD, cuyo lado mide $\sqrt{2}$. Los segmentos AE y CF son perpendiculares al plano del cuadrado y se ubican en un mismo semiespacio. Si AE = 6 y CF = 9, calcular el volumen del sólido EBDF.

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

75. Calcular el área lateral de un prisma oblicuo, cuya sección recta es un hexágono regular de superficie $30\sqrt{3}$, la altura del prisma es $10\sqrt{3}$ y las aristas están inclinadas 60° con respecto a la base.

A) $120\sqrt{5}$ B) 360 C) 240
D) 180 E) $240\sqrt{5}$

76. Calcular el volumen de un prisma oblicuo cuya altura es igual al diámetro de la circunferencia inscrita a la base, si la base es un polígono regular de lado 2 y la suma de las medidas de los diedros básicos es 1080°.

A) $24\sqrt{3}$ B) 36 C) 48
D) 32 E) $30\sqrt{3}$

77. El área de la superficie total de un paralelepípedo rectangular cuya altura es 4, es 4 veces el área de una de las superficies diagonales (plano diagonal) correspondiente a una de las aristas laterales y el área de esta superficie diagonal es los 5/6 de la suma de las áreas de las bases. Calcular el área de la superficie del paralelepípedo, si el perímetro de su base es 28.

A) 160 B) 180 C) 200
D) 220 E) 240

78. En un prisma regular ABCDEF-GHIJKL, se ubica el punto medio M de $\overline{JD}$; $\overline{DL} \cap \overline{FM} = T$ y el volumen del prisma es V. Calcular el volumen del prisma LJMT-GLSN.

A) 5V/9 B) 7V/9 C) 5V/18
D) 7V/18 E) 11V/15

79. Calcular el volumen del prisma oblicuo ABCD-EFGH, sabiendo que sus bases son regiones cuadradas. La proyección del punto A es el centro de la base EFGH y AE = AB = 4.

A) $16\sqrt{5}$ B) $32\sqrt{2}$ C) $16\sqrt{3}$
D) $32\sqrt{3}$ E) $16\sqrt{2}$

80. Las bases de un prisma recto son los romboides ABCD y EFGH, en la arista $\overline{DH}$ se ubica el punto medio M; en la arista $\overline{AE}$ se ubica el punto P. Si el volumen del tronco de prisma PBM-EFH es los 2/5 del prisma dado y AP = 2, calcular PE.

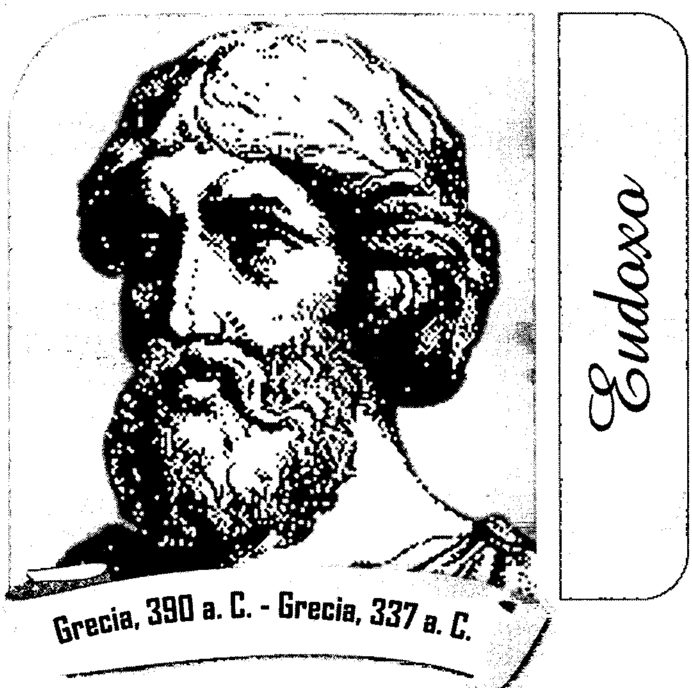
A) 12 B) 9 C) 18
D) 6 E) 15

CLAVES

1. A	11. A	21. D	31. B	41. A	51. A	61. C	71. B
2. A	12. B	22. E	32. E	42. A	52. A	62. B	72. B
3. B	13. D	23. D	33. C	43. A	53. E	63. C	73. B
4. A	14. A	24. A	34. B	44. E	54. A	64. D	74. D
5. B	15. A	25. D	35. C	45. C	55. A	65. D	75. D
6. C	16. B	26. A	36. A	46. C	56. D	66. D	76. B
7. E	17. D	27. D	37. C	47. E	57. D	67. C	77. C
8. C	18. A	28. B	38. A	48. C	58. C	68. A	78. B
9. E	19. D	29. E	39. A	49. B	59. A	69. C	79. A
10. B	20. B	30. E	40. A	50. C	60. E	70. E	80. A

Pirámide y tronco de pirámide

19 capítulo



Eudoxo de Cnido (Cnido, actual Turquía, 390 a. C.-337 a. C.) fue un filósofo, astrónomo, matemático y médico griego, pupilo de Platón. Nada de su obra ha llegado a nuestros días; todas las referencias con las que contamos provienen de fuentes secundarias, como el poema de Arato sobre astronomía. Eudoxo fue el primero en plantear un modelo planetario basado en un modelo matemático, por lo que se le considera el padre de la astronomía matemática. Su fama en astronomía matemática se debe a la invención de la esfera celeste y a sus precoces aportaciones para comprender el movimiento de los planetas, que recreó construyendo un modelo de esferas homocéntricas que representaban las estrellas fijas, la Tierra, los planetas conocidos, el Sol y la Luna, y dividió la esfera celeste en grados de latitud y longitud.

Eudoxo demostró que el volumen de una pirámide es la tercera parte del de un prisma de su misma base y altura; y que el volumen de un cono es la tercera parte del de un cilindro de su misma base y altura, teoremas ya intuidos por Demócrito. Para demostrarlo elaboró el llamado método de exhausción, antecedente del cálculo integral, para calcular áreas y volúmenes. El método fue utilizado magistralmente por Arquímedes. El trabajo de ambos como precursores del cálculo fue únicamente superado en sofisticación y rigor matemático por Newton y Leibniz.

Fuente: Wikipedia

PIRÁMIDE

Es el poliedro obtenido al intersecar una superficie piramidal cerrada, mediante un plano.

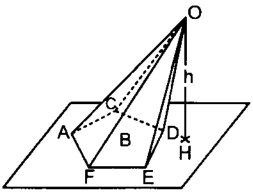


Fig. 1

- La figura 1 muestra una pirámide de vértice O; base ACDEF y caras laterales AOF, OFE, etc.
- h es la longitud de la altura del sólido (distancia del vértice al plano de la base).
- Si V es el volumen de la pirámide, cuya base tiene área B, se cumple:

$$\boxed{V = \frac{Bh}{3}}$$

- La suma de las áreas de las caras laterales (todas, regiones triangulares) es el área lateral de la pirámide. El área total del sólido es igual al área lateral más el área de su base.
- La pirámide se llama regular, si la base es un polígono regular y la altura cae en el centro de la base. En cualquier otro caso, la pirámide es irregular.

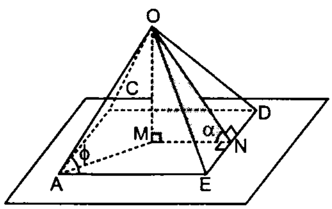


Fig. 2

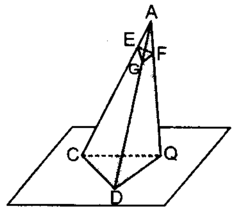
- Una pirámide se menciona según el número de lados de la base, indicando primero el vértice. La figura 1 muestra una pirámide irregular pentagonal O-ACDEF y la figura 2, una pirámide regular cuadrangular O-ACDE.
- En la figura 2: $\overline{ON}$ es la apotema de la pirámide; α es la medida del diedro que forma la cara lateral con la base; ϕ es la medida del ángulo que forman las aristas laterales con la base. (Se cumple: $\alpha > \phi$).

PROPIEDADES

1. Si dos pirámides triangulares tienen un mismo triedro o dos triedros congruentes, uno en cada sólido, entonces los volúmenes son entre sí como los productos de las longitudes de las aristas que determinan dicho triedro.

   Para el gráfico: $\dfrac{V_{A\text{-}EFG}}{V_{A\text{-}CDQ}} = \dfrac{(AE)(AF)(AG)}{(AC)(AQ)(AD)}$

   ($V_{A\text{-}EFG}$: volumen del sólido A-EFG)



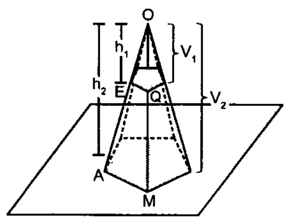
2. Si se interseca la superficie lateral de cualquier pirámide con un plano paralelo a la base, se obtiene una pirámide parcial semejante a la original.

   Se cumple:

   a. Las áreas son entre sí, como los cuadrados de las longitudes de las alturas o de cualquier par de líneas homólogas.

      Así, llamando S_1 y S_2 las áreas de las superficies referidas a la pirámide parcial y total, respectivamente.

      (S_1 y S_2, pueden representar áreas totales, áreas laterales, áreas de las bases o áreas de caras homólogas).



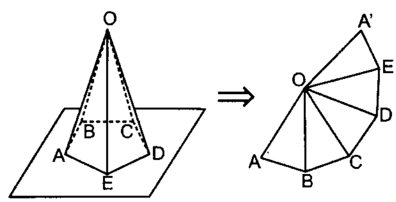
$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} = \frac{(OE)^2}{(OA)^2} = \frac{(EQ)^2}{(AM)^2} = \ldots}$$

   b. Los volúmenes son entre sí como los cubos de cualquier par de líneas homólogas:

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{(h_1)^3}{(h_2)^3} = \frac{(OE)^3}{(OA)^3} = \frac{(EQ)^3}{(AM)^3} = \ldots}$$

DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

Resulta una región poligonal.

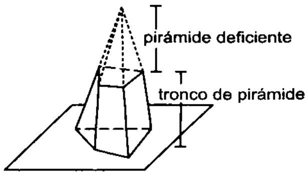


TRONCO DE PIRÁMIDE

Un tronco de pirámide es el sólido que se determina al cortar la superficie lateral de una pirámide con un plano, sea o no paralelo a la base.

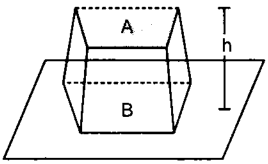
Se llaman bases del tronco, a la base de la pirámide original y a la región que genera el plano secante.

El volumen se calcula restando al volumen de la pirámide original con el de la pirámide deficiente.



Tronco de pirámide de bases paralelas

En este caso, las regiones poligonales que representan las bases del tronco, están contenidas en planos paralelos. Estos polígonos son semejantes.
La distancia entre dichos planos es la altura del sólido. En este caso, el volumen se calcula así:

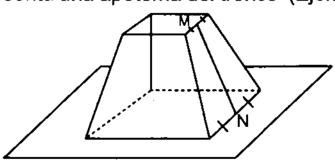


$$\boxed{V = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB})}$$

Donde:
A y B son áreas de las bases.
h es la longitud de la altura.

Tronco de pirámide regular

Es el tronco de pirámide regular de bases paralelas. Las caras laterales son trapecios isósceles. El segmento que une los puntos medios de las bases de cada cara lateral representa una apotema del tronco (Ejemplo: $\overline{MN}$).



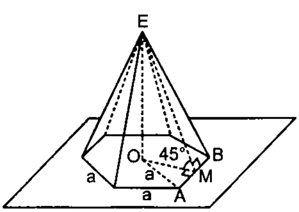
El volumen se calcula con la fórmula anterior.
Si P_A y $P_{B'}$ son los perímetros de las bases, entonces el área lateral (S_L) es:

$$\boxed{S_L = \left(\frac{P_A + P_B}{2}\right)MN}$$

Ejemplos:

1. Hallar el área lateral y el volumen de una pirámide regular hexagonal, sabiendo que las caras laterales forman diedros de 45° con la base y las aristas básica tienen longitudes "a".

   Resolución:



$\overline{OM}$ es la apotema de la base $\Rightarrow$ $OM = \frac{a}{2}\sqrt{3}$
En el ⊾EOM (isósceles):

$EM = (OM)\sqrt{2} \Rightarrow EM = \frac{a}{2}\sqrt{6}$ ...(1)

$OM = EO = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ ...(2)

Cálculo del área lateral:

$$S_L = 6(S_{AEB}) = 6\left[\frac{(AB)(EM)}{2}\right]$$

$$\Rightarrow S_L = 3(AB)(EM) = 3(a)\left(\frac{a}{2}\sqrt{6}\right) \Rightarrow S_L = \frac{3}{2}a^2\sqrt{6}$$

Cálculo del volumen:

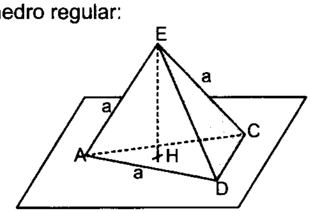
$$V = \frac{1}{3}A_{base}(EO) \Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\right)(a^2\sqrt{3})\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore\ V = \frac{3}{4}a^3$$

2. Hallar la fórmula para calcular los volúmenes del tetraedro y octaedro regulares, en función de la longitud a de la arista.

   Resolución:

   - Tetraedro regular:

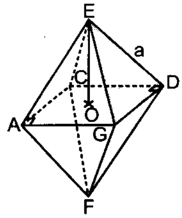


Se sabe que la longitud de la altura del tetraedro regular es: $EH = \frac{a}{3}\sqrt{6}$
Luego, el volumen será:

$$V = \frac{1}{3}(A_{\triangle ACD})(EH) \Rightarrow V = \frac{1}{3}\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{a}{3}\sqrt{3}\right)$$

$$\therefore\ \boxed{V = \frac{a^2}{12}\sqrt{2}}$$

   - Octaedro regular:



Del gráfico: $V_{octaedro} = 2(V_{E\text{-}ACD})$

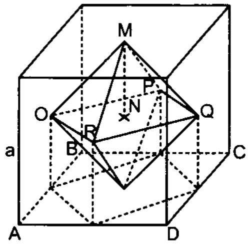
$$V_{octaedro} = 2\left[\frac{1}{3}(A_{ACDG})(EO)\right] = 2\left[\frac{1}{3}(a^2)\frac{a\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\therefore\ \boxed{V_{octaedro} = \frac{a^3}{3}\sqrt{2}}$$

3. Hallar el volumen del sólido que se obtiene al unir los centros de las caras de un cubo de volumen V.

   Resolución:

   Sea el gráfico del problema: al unir los centros de las caras del cubo se forma una doble pirámide.



Se observa del gráfico: $S_{OPQR} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$

$MN = \frac{a}{2}$, altura de la pirámide M-OPQR

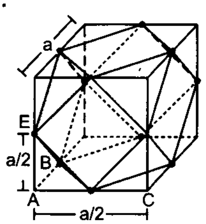
Volumen pedido: $V_x = 2(V_{M\text{-}OPQR})$

$$V_x = 2\left[\frac{1}{3}(S_{OPQR})MN\right] = 2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{a^2}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)$$

$$\therefore\ V_x = \frac{a^3}{6} = \frac{V}{6}$$

4. Hallar el volumen del sólido que se forma al unir los puntos medios de las aristas de un cubo de volumen V.

Resolución:



En el gráfico, el volumen V_x pedido equivale al del cubo menos el de las ocho pirámides:

$$V_x = V_{cubo} - 8(V_{pirámide}) = V - 8\left[\frac{1}{3}(S_{BAC})(EA)\right]$$

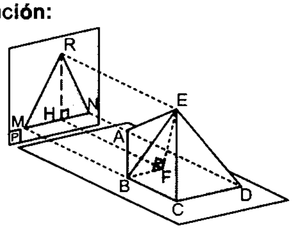
$$V_x = V - 8\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\left(\frac{a}{2}\right)\right]\left(\frac{a}{2}\right) = V - \frac{a^3}{6}$$

Pero: $a^3 = V$, luego:

$$V_x = V - \frac{V}{6} \qquad \therefore\ V_x = \frac{5}{6}V$$

5. Se tiene una pirámide E-ABCD, cuya base es un trapecio, siendo $\overline{BC}\ //\ \overline{AD}$; BC = 6 y AD = 10. Hallar el volumen, sabiendo que el área de la proyección de la pirámide, sobre un plano perpendicular a $\overline{BC}$ es 18.

Resolución:



En el gráfico, P es un plano de proyección perpendicular a $\overline{BC}$. $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ se proyectan como puntos. La altura de la pirámide se proyecta en su verdadera magnitud (RH = EC). $\overline{MN}$ tiene igual longitud que la altura del trapecio ABCD.

Para el volumen: $V = \frac{1}{3}(S_{ABCD})(EF)$

$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{BC + AD}{2}\right)(MN)(EF)$$

Como: EF = RH:

$$V = \frac{1}{3}(BC + AD)\left[\frac{(MN)(RH)}{2}\right]$$

Pero: $\frac{(MN)(RH)}{2} = S_{MRN}$

$$\therefore\ V = \frac{1}{3}(BC + AD)(S_{MRN})$$

Con los datos: $V = \frac{1}{3}(6 + 10)(18) \qquad \therefore\ V = 96$

6. Hallar el volumen de una pirámide regular cuadrangular, sabiendo que el lado de la base tiene longitud "a", y el plano que pasa por una arista básica y la base media de la cara opuesta, forma un diedro de 45°con la base.

Resolución:

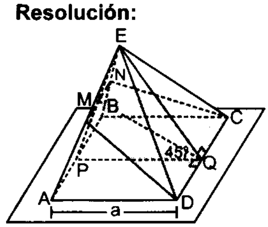


Fig. 1

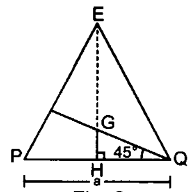


Fig. 2

Sea E-ABCD la pirámide y MNCD el plano que forma un diedro de 45°, con la base ABCD (figura 1). Si trazamos $\overline{EP} \perp \overline{AB}$ y $\overline{EQ} \perp \overline{CD}$, en el triángulo PEQ se puede hallar la longitud de la altura $\overline{EH}$ de la pirámide (figura 2).

En el triángulo PEQ: G es el baricentro

$\Rightarrow$ EH = 3(GH)

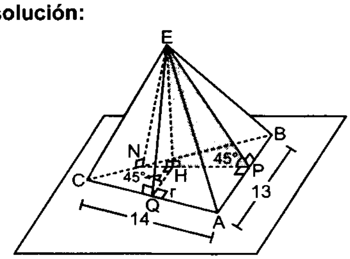
Siendo: $GH = HQ = \frac{a}{2} \Rightarrow EH = \frac{3a}{2}$

Luego, el volumen de la pirámide será:

$$V = \frac{1}{3}(S_{ABCD})(EH) \qquad V = \frac{1}{3}(a^2)\left(\frac{3a}{2}\right) \qquad \therefore\ V = \frac{a^3}{2}$$

7. Hallar el volumen de una pirámide E-ABC, cuyas caras laterales forman diedros de 45° con la base ABC. Si: AB = 13; BC = 15 y AC = 14.

Resolución:



AB = 13, BC = 15; AC = 14

Cálculo de la altura EH.

En el gráfico: $m\angle EQH = m\angle EPH = m\angle ENH = 45°$

Luego: $\triangle EHQ \cong \triangle EHP \cong \triangle EHN \Rightarrow HQ = HN = HP$

Es decir, H equidista de los lados del triángulo ABC, H es el incentro del triángulo y r es el inradio.

Luego: EH = r

Para hallar S_{ABC} por la fórmula de Herón:

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21 \Rightarrow p = 21$$

$$S_{ABC} = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$$

También: $S_{ABC} = pr$: sustituyendo valores resulta:

$r = 4 \Rightarrow EH = 4$

El volumen de la pirámide será:

$$\therefore\ V = \frac{1}{3}(S_{ABC})(EH) = \frac{1}{3}(84)(4) = 112$$

8. Las áreas de las bases de dos pirámides semejantes son entre sí como 4 es a 9. Hallar la relación de sus volúmenes.

Resolución:

Siendo las áreas S_1 y S_2; las alturas h_1 y h_2; se sabe que se debe cumplir: $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2$

Luego: $\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{h_1}{h_2} = \frac{2}{3}$

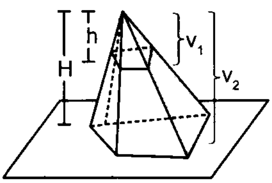
Luego, para los volúmenes:

$$\frac{V_1}{V_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^3 \quad \therefore\ \frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27}$$

9. ¿En qué relación se encuentran los volúmenes de los sólidos parciales que determina el plano mediatriz de la altura de una pirámide?

Resolución:

Sea la figura:



Del gráfico, se pide $\frac{V_1}{V_2}$, para $h = \frac{H}{2}$

Se sabe que: $\frac{V_1}{V_{total}} = \frac{h^3}{H^3}$

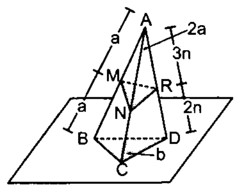
$$\Rightarrow \frac{V_1}{V_{total}} = \frac{\left(\frac{H}{2}\right)^3}{H^3} \Rightarrow \frac{V_1}{V_{total}} = \frac{1}{8}$$

Es decir: $V_1 = \frac{1}{8}V_{total} \Rightarrow V_2 = \frac{7}{8}V_{total}$

Luego: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{7}$

10. El volumen de un tetraedro A-BCD es 30. Sobre $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{AD}$ se toman los puntos M, N y R, respectivamente. Si: AM = MB; AN = 2(NC) y 2(AR) = 3(RD), hallar el volumen del sólido BCD-RMN.

Resolución:



Incógnita: $V_{BCD\text{-}RNM}$

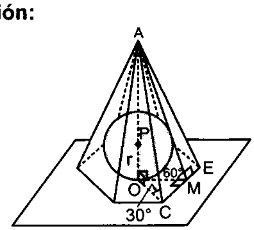
Las pirámides A-MNR y A-BCD tienen en común el triedro A. Luego, sustituyendo datos y valores asignados por el enunciado:

$$\frac{V_{A\text{-}MNR}}{V_{A\text{-}BCD}} = \frac{(AM)(AN)(AR)}{(AB)(AC)(AD)} \Rightarrow V_{A\text{-}MNR} = 6$$

Pero: $V_{BCD\text{-}RNM} = V_{ABCD} - V_{A\text{-}MNR} \quad \therefore\ V_{BCD\text{-}RNM} = 24$

11. Hallar el volumen de una pirámide regular hexagonal circunscrita a una esfera de radio r, sabiendo que las caras laterales forman diedros de 60° con la base.

Resolución:



La superficie esférica es tangente a las caras del poliedro.

El punto de tangencia con la cara EAC se ubica sobre la apotema $\overline{AM}$ y con la base en el centro O.

Por dato: $m\angle AMO = 60°$

Si se traza $\overline{MP}$, en el $\triangle MOP$ puede hallarse: $OM = r\sqrt{3}$

Luego, con este valor, en la base:

$$CM = \frac{OM}{\sqrt{3}} \Rightarrow CM = r \Rightarrow CE = 2r$$

En el $\triangle$AOM: $AO = (OM)(\sqrt{3}) \Rightarrow AO = 3r$

Por otro lado, el área de la base es:

$$B = \frac{3}{2}(CE)^2(\sqrt{3}) \Rightarrow B = \frac{3}{2}(2r)^2(\sqrt{3}) \Rightarrow B = 6r^2\sqrt{3}$$

Finalmente, el volumen será:

$$V = \frac{1}{3}(B)(AQ) = \frac{1}{3}(6r^2)(\sqrt{3})(3r) \quad \therefore\ V = 6r^3(\sqrt{3})$$

12. Hallar el volumen de un tetraedro B-ACD, en el cual AB = 4; CD = 6. La mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es 5 y además estas rectas se cruzan con un ángulo de medida 30°.

Resolución:

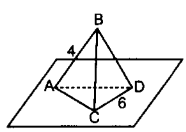


Fig. 1

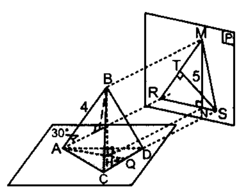


Fig. 2

La figura 1, muestra el tetraedro y la figura 2, el procedimiento de solución.

Para graficar la mínima distancia entre $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, se proyecta el conjunto sobre el plano P, perpendicular a $\overline{CD}$:

$\overline{ST}$, es la mínima distancia entre dichas rectas.

Por dato: ST = 5.

Como $\overline{AR}$ // $\overline{CD}$, entonces el ángulo de cruce entre. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ es el mismo que forma $\overline{AB}$ y $\overline{AR}$: $m\angle RAB = 30°$

Además: $\overline{RM} \cong \overline{BE}$, donde $\overline{BE} \perp \overline{AR}$.

En el ⊾AEB: $BE = \frac{AB}{2} \Rightarrow BE = 2 \Rightarrow RM = 2$

Para el volumen:

$V = \frac{1}{3}A_{\triangle ACD}(BH) \Rightarrow V = \frac{1}{3}\left[\frac{(CD)(AQ)}{2}\right](BH)$

Pero: AQ = RS y BH = MN; luego:

$V = \frac{1}{3}\left[\frac{(CD)(RS)}{2}\right](MN)$

Es decir: $V = \frac{1}{3}(CD)\left[\frac{(RS)(MN)}{2}\right] = \frac{1}{3}(CD)(A_{\triangle RMS})$

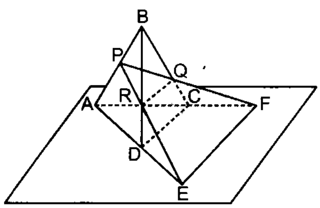
Mejor: $V = \frac{1}{3}(CD)\left[\frac{(RM)(ST)}{2}\right]$

Sustituyendo datos: $V = \frac{1}{3}(6)\left(\frac{2\times 5}{2}\right) \quad \therefore V = 10$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El volumen del tetraedro A-BCD es V; AP = 2(PB); BR = RD y BQ = QC. Hallar el volumen del poliedro EF-CQRD.

Resolución:



El volumen pedido es:

$V_x = V_{A\text{-}PEF} - V_{AP\text{-}QRDC} \quad ...(1)$

Llamando h la altura de la pirámide A-BCD, trazada desde B; como por dato: AP = 2(AB)/3, entonces la altura de la pirámide A-PEF, trazada desde P, será 2h/3.

Para hallar el $V_{A\text{-}PEF}$, falta relacionar las áreas AEF y ACD. Para ello, se recurre al teorema de Menelao en el triángulo ABC:

$\left(\frac{AP}{PB}\right)\left(\frac{BQ}{QC}\right)\left(\frac{CF}{FA}\right) = 1 \Rightarrow (2)(1)\left(\frac{CF}{FA}\right) = 1$

$\Rightarrow FA = 2(CF)$

Análogamente: EA = 2(AD)

Luego, $\overline{CD}$ es base media del triángulo EAF.

$\therefore S_{AEF} = 4(S_{ACD})$

Entonces: $\frac{V_{A\text{-}PEF}}{V_{A\text{-}BCD}} = \frac{(S_{AEF})\left(\frac{2h}{3}\right)}{(S_{ACD})(h)}$

$\frac{V_{A\text{-}PEF}}{V} = 8 \Rightarrow V_{A\text{-}PEF} = \frac{8}{3}V \quad ...(2)$

Ahora, se calcula $V_{AP\text{-}QRDC}$:

$V_{AP\text{-}QRDC} = V_{A\text{-}BCD} - V_{P\text{-}BQR} \quad ...(\alpha)$

Como las pirámides P-BQR y A-BCD tienen en común el triedro B:

$\frac{V_{P\text{-}BQR}}{V_{A\text{-}BCD}} = \frac{(BP)(BR)(BQ)}{(BA)(BC)(BD)}$; de donde

$V_{P\text{-}BQR} = \frac{(BP)(BR)(BQ)}{(BA)(BC)(BD)}(V)$; sustituyendo en (α)

Sustituyendo equivalentes:

$V_{AP\text{-}QRDC} = V - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)(V)$

$\Rightarrow V_{AP\text{-}QRDC} = \frac{11}{2}V \quad ...(3)$

Finalmente, (2) y (3) en (1):

$V_x = \frac{8}{3}V - \frac{11}{2}V \quad \therefore V_x = \frac{7}{4}V$

2. El volumen de un tronco de pirámide cuadrangular regular es 74 cm^3. Si su altura mide 6 cm y el área de una de las bases es 16 cm^2, hallar el área de la otra base.

Resolución:

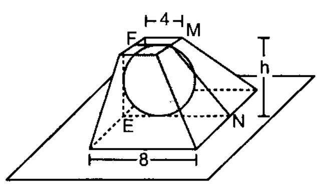
Se tiene por fórmula: $V = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB})$

Donde: V = 74; A = 16; h = 6

Luego: $74 = \frac{6}{3}(16 + B + \sqrt{16B}) \quad \therefore B = 9\ cm^2$

3. Hallar el volumen de un tronco de pirámide regular cuadrangular, de áreas básicas 16 m^2 y 64 m^2 circunscrita a una esfera.

Resolución:



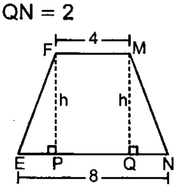
Áreas básicas: A = 16 m^2; B = 64 m^2

⇒ lados de las bases: 4 y 8

Para hallar h, se usa la sección EFMN, donde EF = MN y con el teorema de Pitot:

EF + MN = 4 + 8 ⇒ EF = MN = 6

Además: EP = QN = 2



En el ⊾EPF: $h^2 = (EF)^2 - (EP)^2 = 6^2 - 2^2 \Rightarrow h = 4\sqrt{2}$

Ahora, recordando la fórmula del volumen:

$$V = \frac{h}{3}(A + B + \sqrt{AB}) \Rightarrow \frac{4\sqrt{2}}{3}(16 + 64 + \sqrt{16\times 24})$$

$$\therefore\ V = 448\frac{\sqrt{2}}{3}\ m^3$$

4. Se tiene una pirámide regular O-ABCD de volumen V, un plano que contiene a $\overline{CD}$, interseca a la cara opuesta en su línea media $\overline{MN}$. Hallar el volumen del sólido AMNB-CD.

Resolución:

$V_{AMNB\text{-}CD}$

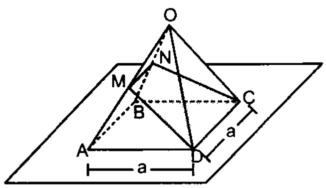


Fig. 1

El sólido AMNB-CD es un tronco de prisma triangular, de aristas laterales $\overline{AB}$, $\overline{MN}$ y $\overline{CD}$ y bases AMD y BNC. El triángulo PQE, de la figura 2, es una sección recta del tronco.
El volumen pedido será:

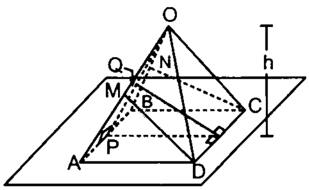


Fig. 2

$$V_x = (A_{\Delta PQE})\left(\frac{AB + MN + CD}{3}\right),\ \text{es decir:}$$

$$V_x = \left(\frac{A_{\Delta PQE}}{2}\right)\left(\frac{a + \frac{a}{2} + a}{3}\right)$$

Donde: $A_{\Delta PQE} = (PE)\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{ah}{2}$

$$V_x = \frac{5a^2h}{24} \qquad ...(1)$$

De otro lado, se tiene por dato que:

$V_{O\text{-}ABCD} = V$, es decir: $\frac{1}{3}(a^2)h = V$; $a^2h = 3V$

Reemplazando en (1): $V_x = \frac{5}{8}V$

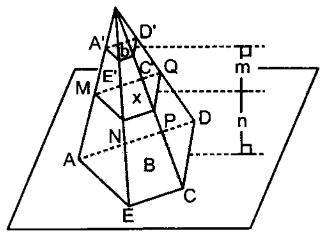
5. Demostrar que si a un tronco de pirámide de bases paralelas y con áreas en las bases B y b, se le corta por un plano paralelo a las bases, determinando sobre la altura del tronco segmentos de longitudes m y n, respectivamente, el área de la sección x obtenida, es:

$$x = \left(\frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m + n}\right)^2$$

Donde "m" es la distancia entre las regiones de áreas b y x.

Resolución:

Sea el gráfico de acuerdo al enunciado:



Con el gráfico, donde:

▱MNPQ// ▱AECD// ▱A'E'C'D'; por propiedad:

$$\frac{B}{(OA)^2} = \frac{b}{(OA')^2} = \frac{X}{(OM)^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada a todo:

$$\frac{\sqrt{B}}{OA} = \frac{\sqrt{b}}{OA'} = \frac{\sqrt{x}}{OM} \qquad ...(1)$$

De (1): $\frac{\sqrt{B}}{\sqrt{x}} = \frac{OA}{OM}$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{\sqrt{B} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{OA - OM}{OM} \Rightarrow \frac{\sqrt{B} - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{AM}{OM}$$

De donde: $\frac{\sqrt{B} - \sqrt{x}}{AM} = \frac{\sqrt{x}}{OM}$ ...(2)

Otra vez de (1): $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{b}} = \frac{OM}{OA'}$

Por propiedad de proporciones:

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{OM - OA'}{OA'} \Rightarrow \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{A'M}{OA'}$$

Luego: $\frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{A'M} = \frac{\sqrt{b}}{OA'}$ ...(3)

De (1), (2) y (3) tenemos: $\frac{\sqrt{B} - \sqrt{x}}{AM} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{b}}{A'M}$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{B} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{b}} = \frac{AM}{A'M}$$

Pero, en la figura, por Tales: $\frac{AM}{A'M} = \frac{n}{m}$

Entonces: $\frac{\sqrt{B} - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt{b}} = \frac{n}{m}$

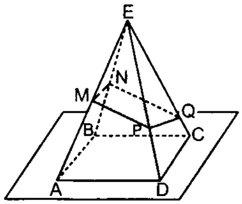
Efectuando y despejando: $x = \left(\frac{m\sqrt{B} + n\sqrt{b}}{m + n}\right)^2$

Nota

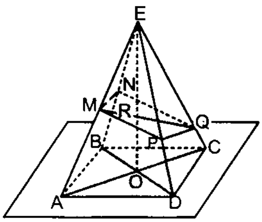
Si el plano pasa por el punto medio de las aristas laterales del tronco, a la sección determinada se llama base media del tronco y su área, por ser m = n, queda: $x = \left(\frac{\sqrt{B} + \sqrt{b}}{2}\right)^2$

6. E-ABCD es una pirámide regular de base cuadrangular. MNQP es un plano secante a la superficie lateral.

Demostrar, que: $\frac{1}{EM} + \frac{1}{EQ} = \frac{1}{EN} + \frac{1}{EP}$



Resolución:



Una forma de solucionar este problema es relacionando volúmenes de pirámides triangulares que tienen un mismo triedro:

$$\frac{V_{E\text{-}MNQ}}{V_{E\text{-}ABC}}=\frac{(EM)(EN)(EQ)}{(EA)(EB)(EC)} \qquad ...(a)$$

$$\frac{V_{E\text{-}MPQ}}{V_{E\text{-}ACD}}=\frac{(EM)(EP)(EQ)}{(EA)(ED)(EC)} \qquad ...(b)$$

Como la pirámide E-ABCD es regular:

EA = EB = EC = ED = a

y: $V_{E\text{-}ABC}=V_{E\text{-}ACD}=V$

De modo que al sumar miembro a miembro (a) con (b) se pueden escribir así:

$$\frac{V_{E\text{-}MNQ}+V_{E\text{-}MPQ}}{V}=\frac{(EM)(EQ)(EN+EP)}{a^3}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{E\text{-}MNQP}}{V}=\frac{(EM)(EQ)(EN+EP)}{a^3}$$

De donde:

$$V_{EMNQP}=\frac{V}{a^3}(EM)(EQ)(EN+EP) \qquad ...(1)$$

Análogamente:

$$\frac{V_{E\text{-}NQP}}{V_{E\text{-}BCD}}=\frac{(EN)(EP)(EQ)}{(EB)(ED)(EC)} \qquad ...(c)$$

$$\text{y: } \frac{V_{E\text{-}MNP}}{V_{E\text{-}ABD}}=\frac{(EM)(EN)(EP)}{(EA)(EB)(ED)} \qquad ...(d)$$

Siendo: $V_{E\text{-}BCD}=V_{E\text{-}ABD}=V$; al sumar las expresiones (c) y (d), se puede escribir así:

$$\frac{V_{E\text{-}NQP}-V_{E\text{-}MNP}}{V}=\frac{(EN)(EP)(EQ+EM)}{a^3}$$

Pero: $V_{E\text{-}NQP}+V_{E\text{-}MNP}=V_{E\text{-}MNQP}$

Luego: $V_{E\text{-}MNQP}=\dfrac{V}{a^3}(EN)(EP)(EQ+EM) \qquad ...(2)$

Así, igualando (1) y (2):

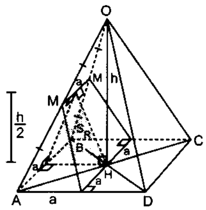
(EM)(EQ)(EN + EP) = (EN)(EP)(EQ + EM)

De donde: fácilmente se llega:

$$\frac{1}{EP}+\frac{1}{EN}=\frac{1}{EM}+\frac{1}{EQ}$$

7. Sea O-ABCD una pirámide regular de base cuadrada, M y N son puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$; el volumen de O-ABCD es V. Hallar el volumen del sólido comprendido entre el plano de la base y el plano que contiene a M, N y el centro de la base.

Resolución:



El volumen del sólido es el volumen del tronco de prisma oblicuo, cuyo $S_R=\frac{a}{2}\left(\frac{h}{2}\right)$

$$V_X=\frac{ah}{4}\left(\frac{a+2a+2a}{3}\right)\Rightarrow V_X=\frac{5}{12}(a^2)(h) \qquad ...(1)$$

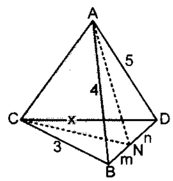
Por dato; el volumen de la pirámide es:

$$V=\frac{1}{3}(2a)^2h\Rightarrow a^2h=\frac{3V}{4} \qquad ...(2)$$

$$\text{(2) en (1): } V_X=\frac{5}{12}\left(\frac{3V}{4}\right) \quad \therefore\ V_X=\frac{5}{16}V$$

8. En una pirámide de base triangular A-BCD las aristas opuestas BD y AC son perpendiculares entre sí, AB = 4, BC = 3 y AD = 5. Hallar $\overline{CD}$.

Resolución:



Se traza el ⏥CAN ⊥ ⏥BCD

Pero como $\overline{BD}$ y $\overline{AC}$ son perpendiculares

$\Rightarrow \overline{BD}\perp$ ⏥CAN

De la figura:

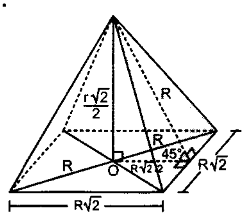
$x^2-n^2=9-m^2 \qquad ...(1)$

$16-m^2=25-n^2 \qquad ...(2)$

Sumando (1) y (2): $x^2+16=25+9 \quad \therefore\ x=3\sqrt{2}$

9. La base de una pirámide regular es una región cuadrada inscrita en una circunferencia de radio R y la medida de los diedros determinados por las caras laterales y la base es 45°; hallar el área lateral.

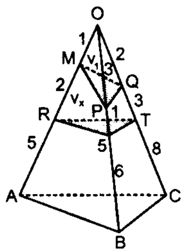
Resolución:



$$S_L=4\left(\frac{1}{2}\right)(R\sqrt{2})(R) \quad \therefore\ S_L=2\sqrt{2}R^2$$

10. En una pirámide O-ABC de volumen V sus aristas $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ miden 8, 10 y 13 respectivamente. En la arista OA se ubican M y R, tal que OM = 1 y OR = 3. En $\overline{OB}$ se ubican P y S, tal que OP = 3 y OS = 4. En $\overline{OC}$ se ubican Q y T, tal que OQ = 2 y OT = 5. Hallar el volumen de MPQ-RST.

Resolución:



Dato: $V_{O-ABC} = V$

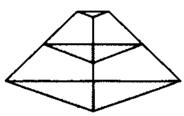
Por relación de volúmenes:

$$\frac{V_1}{V_1 + V_x} = \frac{1(2)(3)}{3(4)(5)} \Rightarrow V_1 = \frac{V_x}{9} \quad ...(1)$$

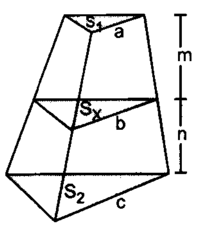
$$\text{También: } \frac{V_1}{V} = \frac{1(2)(3)}{8(10)(13)} \Rightarrow V_1 = \frac{3}{40(13)}V \quad ...(2)$$

$$(1) = (2): \frac{V_x}{9} = \frac{3}{40 \times 13}V \quad \therefore V_x = \frac{27}{520}V$$

11. En la figura mostrada, las áreas de las bases de un tronco de pirámide son S_1 y S_2 ($S_1 < S_2$). Entonces, el área de la sección transversal que dista "m" de la base menor y las "n" de la base mayor es:



Resolución:



$$b = \frac{an + cm}{m + n} \quad ...(1)$$

$$\frac{S_1}{S_x} = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_x}} = \frac{a}{b} \quad ...(2)$$

$$\frac{S_R}{S_x} = \frac{c^2}{b^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_x}} = \frac{c}{b} \quad ...(3)$$

De (2) y (3):

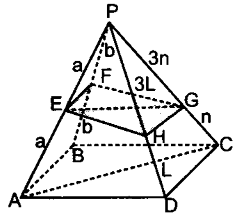
$a = \sqrt{S_1}K$; $b = \sqrt{S_x}K$; $c = \sqrt{S_2}K$

En (1):

$$\sqrt{S_x}K = \frac{\sqrt{S_1}Kn + \sqrt{S_2}Km}{m + n} \quad \therefore S_x = \left(\frac{n\sqrt{S_1} + m\sqrt{S_2}}{m + n}\right)^2$$

12. Se tiene una pirámide P-ABCD de base paralelográmica de modo que $\overline{PD}$ es perpendicular al plano (ABC). Se ubican los puntos E, F y G en las aristas $\overline{PA}$; $\overline{BP}$ y $\overline{PC}$ de modo que PE = EA, PF = FB y PG = 3(GC). Si el volumen de la pirámide P-ABCD es V, hallar el volumen de la pirámide de vértice P y limitada por la pirámide original y el plano EFG .

Resolución:



Piden: $V_{P\text{-}EFGH} = V_{P\text{-}EFG} + V_{P\text{-}EHG}$

Dato: $V_{P\text{-}ABCD} = V$

Como: $\overline{EF} \,//\, \square DPC \Rightarrow \overline{EF} \,//\, \overline{HG}$ y $\frac{PH}{HD} = \frac{3n}{n}$

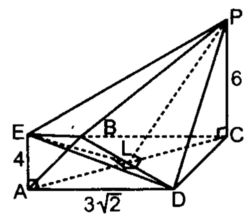
$$\text{Por Prop.: } \frac{V_{P\text{-}EFG}}{\frac{V}{2}} = \frac{a(b)(3n)}{2(a)(24n)} \Rightarrow V_{P\text{-}EFG} = \frac{3}{32}V$$

$$\frac{V_{P\text{-}EMG}}{\frac{V}{2}} = \frac{a(3L)(3n)}{2a(4L)(4n)} \Rightarrow V_{P\text{-}EHG} = \frac{9V}{64}$$

$$\therefore V_{P-EFGH} = \frac{15V}{64}$$

13. En un cuadrado ABD, por A y C se trazan perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ al plano del cuadrado tal que: AE = 4, CF = 6 y AD = $3\sqrt{2}$. Calcular el volumen del sólido F-BED.

Resolución:



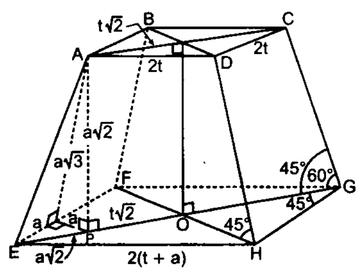
Piden: $V_{F\text{-}BED} = V_x(V_{\text{tronco de prisma}})$

$$V_x = A_{SR}\left(\frac{a + b + c}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{4 + 6}{2}\right)6\left(\frac{6 + 0 + 0}{3}\right)$$

$\therefore V_x = 30$

14. En un tronco de pirámide regular de base cuadrangular ABCD-EFGH, la m∠FHD = 45°. Hallar la razón entre el área de la región trapecial BDHF y el área lateral de dicho tronco.

Resolución:

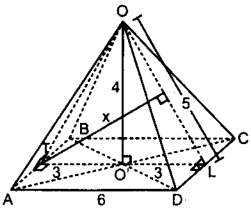


Piden: $R = \dfrac{A_{ABDHF}}{A_{SL\ tronco}}$

$$R = \frac{\dfrac{[2(a\sqrt{2} + t\sqrt{2}) + 2t\sqrt{2}]}{2}(a\sqrt{2})}{[4(t+a) + 4t](a\sqrt{3})} \qquad \therefore\ R = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

15. En una pirámide cuadrangular regular O-ABCD, si el lado de la base y la altura miden 6 m y 4 m respectivamente. Hallar la distancia de vértice A al plano OCD.

Resolución:



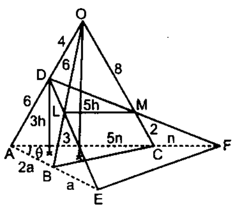
Piden: d(A; ▱OCD) = x

Como: $\overline{AB}$ // ▱OCD ⇒ d(A; OCD) = d(T; ▱OCD) = x

$A_{\triangle TOL} = \dfrac{5x}{2} = \dfrac{6 \times 4}{2} \qquad \therefore\ x = 4{,}8$

16. En una pirámide O-ABC, en sus aristas laterales $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OC}$ se ubican los puntos D, L y M, tal que, OD = 4, DA = 6, OM = 8, MC = 2, OL = 6 y LB= 3. El plano DLM interseca a las recta $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{AC}$ en E y F. Hallar la relación entre los volúmenes de las pirámides O-ABC y D-AEF.

Resolución:



Piden: $R = \dfrac{V_{O-ABC}}{V_{D-AEF}}$

△AOC (teorema de Menelao):

6(8)(CF) = 4(2)(AF) ⇒ AF = 6(CF)

△AOB (teorema de Menelao):

6(6)(BE) = 4(3)(AE) ⇒ AE = 3(BE)

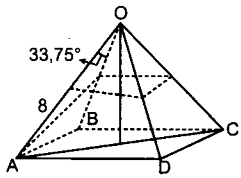
$$V_{O\text{-}ABC} = \frac{1}{3}\left[\frac{(2a)(5n)}{2}\right](\operatorname{sen}\theta)(5h) = \frac{25}{3}(anh)(\operatorname{sen}\theta)$$

$$V_{D\text{-}AEF} = \frac{1}{3}\left[\frac{(3a)(6n)}{2}\right](\operatorname{sen}\theta)(3h) = 9(anh)(\operatorname{sen}\theta)$$

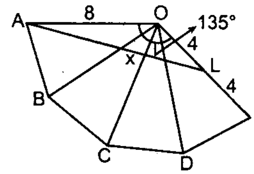
$$\therefore\ R = \frac{25}{2n}$$

17. En la pirámide O-ABCD regular, la m∠AOB = 33,75° y la arista $\overline{OA}$ mide 8. Calcular el mínimo recorrido que debe ejecutar una hormiga que partiendo de A se desplaza sobre la superficie lateral hasta llegar al punto medio de OA.

Resolución:



Realizamos el desarrollo de la superficie lateral.

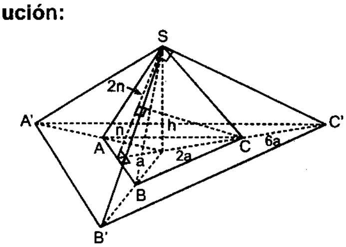


$x^2 = 8^2 + 4^2 - 2(8)(4)(\cos 135°)$

$\therefore\ x = 4\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$

18. Dado un tetraedro regular S-ABC de volumen V, por S se trazan rectas perpendiculares a las caras del tetraedro que tienen a S como vértice común, estas rectas intersectan al plano ABC en A', B' y C'. Hallar el volumen del S-A'B'C'.

Resolución:



Dato: $V_{S\text{-}ABC} = V \Rightarrow V = \dfrac{1}{3}(A_{\triangle ABC})(h)$

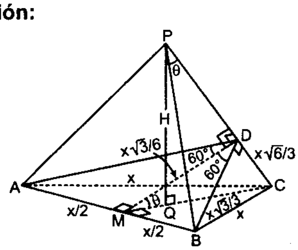
Piden: $V_{S\text{-}A'B'C'} = \dfrac{1}{3}(A_{\triangle A'B'C'})(h)$

$\dfrac{A_{\triangle A'B'C'}}{A_{\triangle ABC}} = \left(\dfrac{8a}{2a}\right)^2 \Rightarrow A_{\triangle A'B'C'} = 16(A_{\triangle ABC})$

$V_{S\text{-}A'B'C'} = \dfrac{1}{3}(16)(A_{\triangle A'B'C'})(h) \qquad \therefore\ V_{S\text{-}A'B'C'} = 16V$

19. La altura de una pirámide triangular regular mide H. El ángulo diedro entre dos caras laterales mide 120°. Hallar su volumen.

Resolución:



⊾PQC ~ ⊾MDC

$$\Rightarrow\ \frac{H}{x\sqrt{3}/6} = \frac{x\sqrt{3}/3}{x\sqrt{6}/3} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}(H)$$

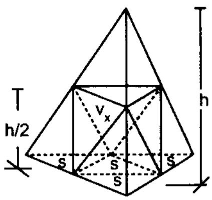
Luego el volumen de la pirámide será:

$V = \frac{H}{3}\left(\frac{x^2\sqrt{3}}{4}\right) \Rightarrow V = \frac{H\sqrt{3}}{12}(2\sqrt{6}H)^2$

$\therefore\ V = 2(H)(\sqrt[3]{3})$

20. Dado una pirámide triangular de volumen V, hallar el volumen del sólido poliédrico que se forma al unir los puntos medios de los lados de cada cara.

Resolución:



Volumen de la pirámide:

$V = \frac{1}{3}(4S)(h) \Rightarrow Sh = \frac{3}{4}V \qquad ...(\alpha)$

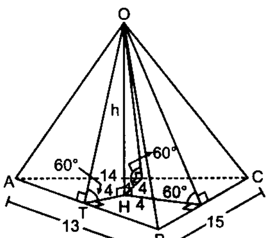
$V_x = \frac{4}{3}(S)(h) - 4\left(\frac{1}{3}\right)(S)\left(\frac{h}{2}\right)$

$V_x = \frac{2}{3}(S)(h) \qquad ...(\beta)$

(α) en (β): $V_x = \frac{2}{3}\left(\frac{3V}{4}\right) \quad \therefore\ V_x = \frac{V}{2}$

21. En una pirámide O-ABC, las caras laterales forman un ángulo diedro de 60° con la base triangular ABC. Si AB = 13, BC = 15 y AC = 14. Hallar el volumen de la pirámide.

Resolución:



$S_{ABC} = 84$

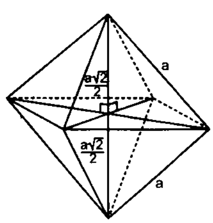
H: incentro del $\triangle ABC$; Inradio: r = 4.

$\triangle$OHT: $h = 4\sqrt{3}$

Volumen: $V = \frac{1}{3}(84)(4\sqrt{3}) \quad \therefore\ V = 112\sqrt{3}$

22. El producto de las diagonales de un octaedro regular es K, hallar el volumen del sólido limitado por el octoedro regular.

Resolución:



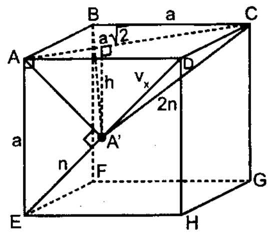
Por dato: $(a\sqrt{2})^3 = K \Rightarrow a = \frac{\sqrt[3]{K}}{\sqrt{2}}$

Luego el volumen de la pirámide será:

$V = \frac{2}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{K}}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\frac{\sqrt[3]{K}}{2}\right) \quad \therefore\ V = \frac{K}{6}$

23. En un cubo ABCD-EFGH de arista "a", se traza $\overline{AA'} \perp \overline{EC}$. Hallar el volumen de la pirámide A'-ABCD.

Resolución:



Piden: $V_{A'-ABCD} = V_x$

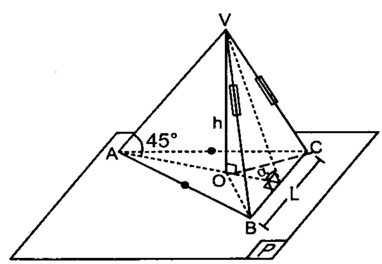
RM $\triangle$: $\frac{EA'}{A'C} = \frac{(AE)^2}{(AC)^2} = \frac{a^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}$

Por $\triangle\sim$: $\frac{h}{a} = \frac{2n}{3n} \Rightarrow h = \frac{2}{3}a \Rightarrow V_x = \frac{1}{3}(A_{\square ABCD})(h)$

$V_x = \frac{1}{3}(a^2)\left(\frac{2}{3}a\right) \quad \therefore\ V_x = \frac{2}{3}(a^3)$

24. En una pirámide V-ABC, $\overline{VA}$ determina con el plano P que contiene a ABC un ángulo de 45° y AB = AC, VB = VC, el ángulo diedro $\overline{BC}$ mide α, si el cuadrado de la distancia de V a P multiplicado por la longitud de $\overline{BC}$ es 60, calcular el volumen del sólido piramidal cuyo vértice es V y cuya base es la proyección de la cara VBC sobre P.

Resolución:



Piden: $V_{V\text{-}OBC} = V_x$

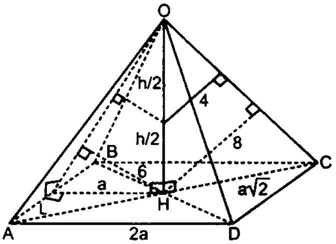
Dato: $h^2L = 60$

$\frac{1}{3}(A_{\triangle OBC})(h) = \frac{1}{3}L\left(\frac{h\cot\alpha}{2}\right)(h) = \frac{1}{6}h^2L\cot\alpha$

$\therefore\ V_x = \frac{10}{\tan\alpha}$

25. Calcular la altura de una pirámide regular cuadrangular, si el punto medio de la altura dista de una cara lateral y de una arista lateral 3 y 4 respectivamente.

Resolución:



Piden: OH = h

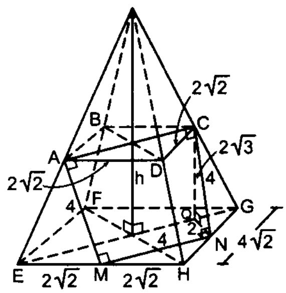
RM ⊾OMC: $\frac{1}{8^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{(a\sqrt{2})^2}$ ...(1)

RM ⊾OHL: $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{h^2}$ ...(2)

DE (1) y (2): $h = 12\sqrt{2}$

26. En un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH se traza un plano secante que contiene los punto miden M y N de $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$ respectivamente, y al vértice A; determinando una sección cuadrangular regular de lado igual a 4. Hallar el volumen del tronco de pirámide.

Resolución:



⊾CQN: $CQ = h = 2\sqrt{3}$

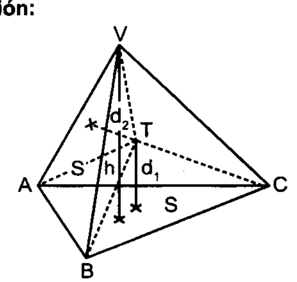
El volumen del tronco de pirámide será:

$$V = \frac{2\sqrt{3}}{3}[(2\sqrt{2})^2 + (4\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})(4\sqrt{2})]$$

Simplificando: $V = \frac{112\sqrt{3}}{3}$

27. Dado un tetraedro regular y un punto interior O, demostrar que la suma de las distancias de O a las caras, es igual a la altura del tetraedro.

Resolución:



$$V_{V-ABC} = V_{T-ABC} + V_{T-VAB} + V_{T-VAB} + V_{T-VBC}$$

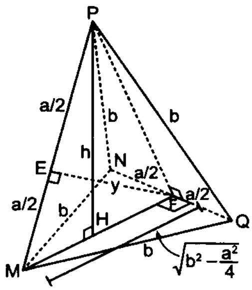
$$\frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3}Sd_1 + \frac{1}{3}Sd_2 + \frac{1}{3}Sd_3 + \frac{1}{3}Sd_4$$

$\therefore h = d_1 + d_2 + d_3 + d_4$

28. Un cartón tiene la forma de un triángulo isósceles acutángulo cuya base mide 2a y los lados congruentes miden 2b (2a < 2b). En el desarrollo de una pirámide cuya base tiene como vértices los puntos medios de los lados del triángulo. Demostrar que su volumen es igual a:

$$V = \frac{a}{24}\sqrt{(4b^2 - a^2)(4b^2 - 2a^2)}$$

Resolución:



⊾MEF ~ ⊾MHP

$$\Rightarrow \frac{h}{y} = \frac{a}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}} \quad ...(1)$$

$$⊾MEF: y^2 = b^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$y = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} \quad ...(2)$$

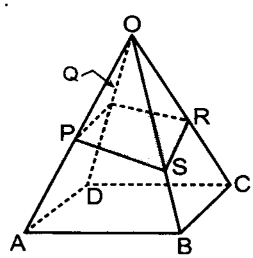
$$(2)\text{en}(1): h = \frac{a}{\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{2}} \Rightarrow h = a\sqrt{\frac{4b^2 - 2a^2}{4b^2 - a^2}}$$

El volumen de la pirámide es:

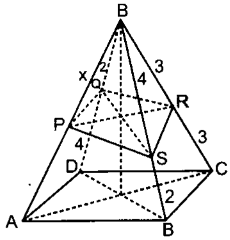
$$V = \frac{1}{3}\left(\frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}\right)\left(a\sqrt{\frac{4b^2 - 2a^2}{4b^2 - a^2}}\right)$$

$$\therefore V = \frac{a^2\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{12}$$

29. En la figura O-ABCD es una pirámide regular cuya arista lateral mide 6. OR = RC, SB = OQ = 2. Calcular $\overline{OP}$.



Resolución:



Por propiedad:

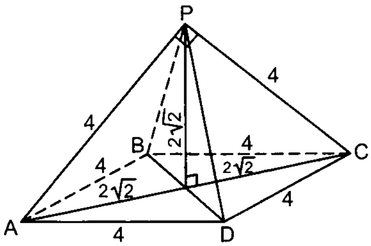
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

Simplificando:

$\therefore\ x = 2{,}4$

30. En una pirámide regular P-ABCD, m$\angle$APC = 90° y AD = 4. Hallar el volumen de la pirámide.

Resolución:

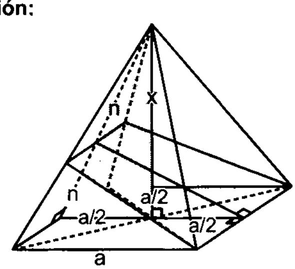


El volumen de la pirámide será:

$$V=\frac{1}{3}(16)(2\sqrt{2})\ \Rightarrow\ V=\frac{32}{3}\sqrt{2}$$

31. En una pirámide de base cuadrangular regular el lado de la base tiene longitud "a" y el plano que pasa por una arista básica y la base media de la cara opuesta forman un diedro de 45° con la base, entonces su volumen es:

Resolución:



En el triángulo sombreado, por el teorema de Menelao:

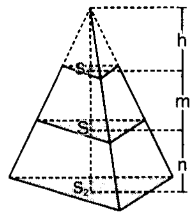
$$(n)(x)\left(\frac{a}{2}\right)=(n)\left(\frac{a}{2}\right)(a)\ \Rightarrow\ x=a$$

Luego: $V=\frac{1}{3}(a)^2\left(a+\frac{a}{2}\right)\qquad \therefore\ V=\frac{a^3}{2}$

32. Se tiene un tronco de pirámide de bases paralelas y con áreas de las bases S_1 y S_2, se le interseca las aristas laterales por un plano paralelo a las bases, determinando sobre la altura del tronco segmentos de longitudes m y n. Demostrar que el área de la sección S, obtenida es:

$$S=\left(\frac{m\sqrt{S_1}+n\sqrt{S_2}}{m+n}\right)^2$$

Resolución:



Por semejanza de pirámides:

$$\frac{S_1}{S}=\frac{h^2}{(h+m)^2}\ \Rightarrow\ \frac{h}{h+m}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}$$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{m}{m+h}\quad ...(1)$$

También: $\dfrac{S}{S_2}=\dfrac{(h+m)^2}{(h+m+n)^2}$

$$\Rightarrow\ \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_2}}=\frac{h+m}{h+m+n}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S}}{\sqrt{S}}=\frac{n}{m+h}\quad ...(2)$$

$$(1)\div(2):\ \frac{\dfrac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}}{\dfrac{\sqrt{S_2}-\sqrt{S}}{\sqrt{S}}}=\frac{\dfrac{m}{m+h}}{\dfrac{n}{m+h}}\ \Rightarrow\ \frac{\sqrt{S}-\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_2}-\sqrt{S}}=\frac{m}{n}$$

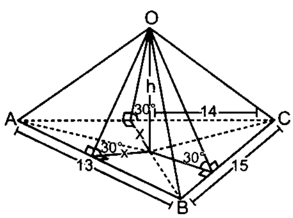
$$\Rightarrow\ n\sqrt{S}-n\sqrt{S_1}=m\sqrt{S_2}-m\sqrt{S}$$

$$\sqrt{S}(m+n)=m\sqrt{S_2}+n\sqrt{S_1}\ \Rightarrow\ \sqrt{S}=\frac{m\sqrt{S_2}+n\sqrt{S_1}}{m+n}$$

$$\therefore\ S=\left[\frac{m\sqrt{S_2}+n\sqrt{S_1}}{m+n}\right]^2$$

33. En una pirámide O-ABC, las caras laterales forman un ángulo diedro cuya medida es 30° con la base ABC. Si AB = 13; BC = 15 y AC = 14, entonces el volumen de dicha pirámide es:

Resolución:



Por el teorema de Herón:

$$S_{ABC}=84\ \Rightarrow\ \frac{13x}{2}+\frac{14x}{2}+\frac{15x}{2}=84$$

$$\Rightarrow\ \frac{x}{2}(13+14+15)=84\ \Rightarrow\ \frac{x}{2}(42)=(42)(2)$$

$$\Rightarrow\ x=4\ \Rightarrow\ h\sqrt{3}=x=4\ \Rightarrow h=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

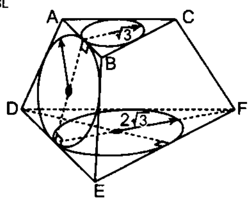
Luego:

$$V_{O\text{-}ABC}=\frac{1}{3}(84)\left(\frac{4\sqrt{3}}{3}\right)\ \Rightarrow\ V_{O\text{-}ABC}=\frac{112\sqrt{3}}{3}$$

34. Las bases de un tronco de pirámide regular triangular están circunscritas a circunferencias cuyos radios miden $\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$. Si las caras laterales son circunscriptibles, calcule el área lateral de este sólido.

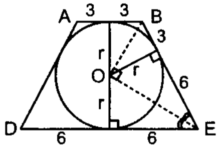
Resolución:

Piden: A_{SL}



$\triangle ABC$: equilátero $\Rightarrow$ AB = BC = AC = 6

$\triangle DEF$: equilátero $\Rightarrow$ DE = EF = DF = 12

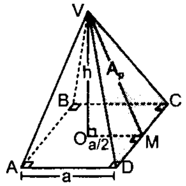


$\triangle BOE$: $r^2 = 3 \times 6 \Rightarrow r = 3\sqrt{2}$

$A_{\triangle ABED} = \left(\dfrac{12+6}{2}\right)6\sqrt{2} = 54\sqrt{2} \qquad \therefore A_{SL} = 162\sqrt{2}$

35. Calcule la longitud de la altura de una pirámide cuadrangular regular, si el lado de la base mide "a" y el área de dicha base es los $\frac{4}{9}$ del área total.

Resolución:



Dato: $B = \frac{4}{9}S_T$

Se pide h

Reemplazando en el dato:

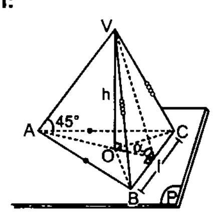
$a^2 = \frac{4}{9}[(2a)(A_P) + a^2] \Rightarrow A_P = \frac{5a}{8}$

$\triangle VOM$ (Pitágoras):

$\left(\frac{5a}{8}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 \quad \therefore h = \frac{3}{8}a$

36. En una pirámide V-ABC, $\overline{VA}$ determina con el plano P que contiene a ABC un ángulo de 45° y AB = AC, VB = VC, el ángulo diedro $\overline{BC}$ mide a, si el cuadrado de la distancia de V a P multiplicado por la longitud de BC es 60, calcule el volumen del sólido piramidal cuyo vértice es V y cuya base es la proyección de la cara VBC sobre P.

Resolución:



Piden: $V_{V\text{-}OBC} = V_x$

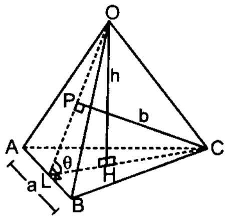
Dato: $(h^2)(l) = 60$

$V_x = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}(hl)\left(\frac{\cot\alpha}{2}\right)(h) \Rightarrow \frac{1}{6}(h^2l)\cot\alpha$

$\therefore V_x = \dfrac{10}{\tan\alpha}$

37. El lado de la base de una pirámide triangular regular mide "a". La longitud de la altura trazada desde el vértice de la base hasta la cara lateral opuesta es "b" unidades. Entonces, el volumen del sólido limitado por la pirámide triangular regular es:

Resolución:



Piden: $V_{O\text{-}ABC} = V_x$

$\triangle ABC$: equilátero: $LH = \frac{a}{6}\sqrt{3}$ y $HC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\tan\theta = \dfrac{h}{LH} = \dfrac{b}{LP}$

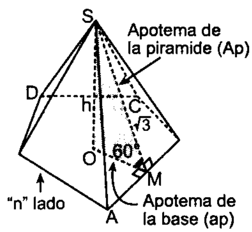
$\Rightarrow \dfrac{h}{\frac{a}{6}\sqrt{3}} = \dfrac{b}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} - b^2}} \Rightarrow h = \dfrac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4b^2}}$

$V_x = \frac{1}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)\left(\dfrac{ab\sqrt{3}}{3\sqrt{3a^2 - 4b^2}}\right) \quad \therefore V_x = \dfrac{a^3b}{12\sqrt{3a^2 - 4b^2}}$

38. El área lateral de una pirámide regular de apotema $\sqrt{3}$ es 40. Si el ángulo formado entre la base y la cara lateral es 60°, calcular el volumen de la pirámide.

Resolución:

Construyamos una pirámide cuya base sea un polígono regular de n lados, veamos.



El volumen de la pirámide es

$$V = \frac{1}{3}(A_b)\,h = \frac{1}{3}(p_b)(ap_b)(h) \qquad ...(a)$$

Área de la base — Semip. de la base — Apotema de la base

Cálculo del semiperímetro de la base (p_b)

Como: $A_L = (p_b)(ap)$ entonces: $p_b = \dfrac{40}{\sqrt{3}}$

Cálculo de la apotema de la base (ap)

En el triángulo rectángulo SOM: $\overline{OM} = ap = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Además: $h = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{2}$

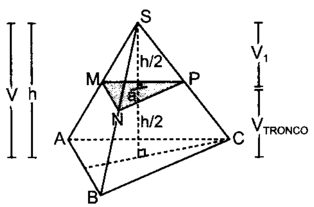
Sustituyendo en el paso (a):

$V = \frac{1}{3} \times \frac{40}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = 10$

39. Si el volumen de una pirámide es "V", calcular el volumen del tronco originado al trazar un plano paralelo a la base, por el punto medio de la altura.

Resolución:

Graficando de acuerdo a los datos, tendremos que:



$V_{TRONCO} = V - V_1$

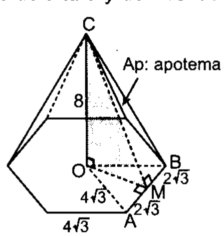
Como los volúmenes de las 2 pirámides son proporcionales, tendremos que:

$\frac{V}{V_1} = \frac{h^3}{\left(\frac{h}{2}\right)^3}$; De donde: $V_1 = \frac{V}{8}$

Sustituyendo en el paso (1):

$V_{TRONCO} = V - \frac{V}{8} = \frac{7}{8}V$

40. Calcular el área lateral de la pirámide hexagonal regular de 8 de altura y de $4\sqrt{3}$ de arista básica.



Resolución:

El área lateral es:

$A_L = (p_B)(ap) = (3 \times 4\sqrt{3})(ap) \Rightarrow 12\sqrt{3}\,ap$

Calculamos la apotema en el triángulo equilátero AOB:

$OM = (4\sqrt{3})\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow \overline{OM} = 6$

En el triángulo equilátero COM:

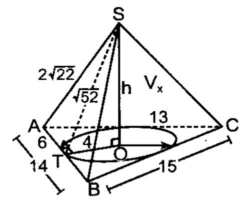
$ap = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

Sustituyendo en el paso (1):

$A_L = 12\sqrt{3}(10) = 120\sqrt{3}$

41. En una pirámide S-ABC, el pie de la altura coincide con el centro de la circunferencia inscrita en la base si AB = 14 cm, AC = 13 cm y BC = 15 cm y SA = $2\sqrt{22}$ cm. Halle el volumen limitado por la pirámide (en cm^3).

Resolución:



Piden: $V_{pirámide} = V_x$

$B = \sqrt{21(21-15)(21-14)(21-13)} = 84$

$B = 84 = (p)(r) = 21r \Rightarrow r = 4$

Propiedad: $AT = p_{\Delta ABC} - 15 = 21 - 15 = 6$

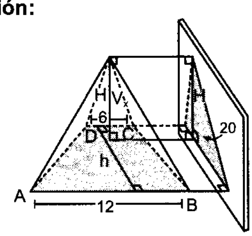
$(ST)^2 = (2\sqrt{22})^2 - 6^2 \Rightarrow ST = \sqrt{52}$

$h^2 = \sqrt{52}^2 - 4^2 \Rightarrow h = 6$

$V_x = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3}(84 \times 6) \quad \therefore V_x = 168$

42. En una pirámide V-ABCD la base ABCD es un trapecio ($\overline{AB} // \overline{CD}$). Si éste poliedro se proyecta sobre el plano perpendicular a $\overline{AB}$, el área proyectada es 20, si AB = 12, CD = 6, hallar el volumen de la pirámide.

Resolución:



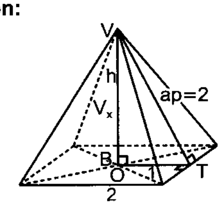
Piden: $V_{V\text{-}ABCD} = V_x$.

$V_x = \frac{1}{3}(B_{ABCD})(H) = \frac{1}{3}\left(\frac{12+6}{2}\right)hH \Rightarrow V_x = 3(hH)$

$20 = \frac{hH}{2} \Rightarrow hH = 40 \quad \therefore V_x = 120$

43. El área total de una pirámide cuadrangular es los 3/2 de su área lateral si su arista básica mide 2. Calcule el volumen de la pirámide.

Resolución:



Piden V_x

Dato $A_{Total} = \frac{3}{2}A_{lateral}$

Entonces: $A_{lateral} + A_{base} = \frac{3}{2}A_{lateral} \Rightarrow A_{base} = \frac{1}{2}A_{lateral}$

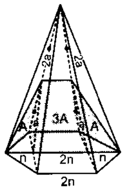
$2^2 = \frac{1}{2}(p_{base})(ap) \Rightarrow 8 = 4(ap) \Rightarrow ap = 2$

$\triangle VOT$: $h = \sqrt{3} \Rightarrow V_x = \frac{1}{3}Bh = \frac{1}{3} \times 2^2 \times \sqrt{3}$

$\therefore V_x = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

44. En una pirámide hexagonal regular el área de una carta lateral es S. Halle el área de la sección paralela a esta cara que pasa por el centro de la base de la pirámide.

Resolución:



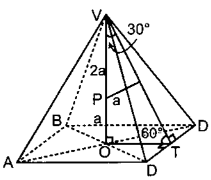
$S_x = 5A$

Pero: $S = 4A \Rightarrow A = \dfrac{S}{4}$

Luego: $S_x = 5\left(\dfrac{S}{4}\right) \quad \therefore\ S_x = 5S/4$

45. Las caras laterales de una pirámide regular forman con la base cuadrangular ángulos diedros de 60°. Se ubica un punto interior a la pirámide que equidista de las caras de la pirámide. En que relación divide dicho punto a la altura de la pirámide.

Resolución:



Piden: $\dfrac{VP}{PO}$

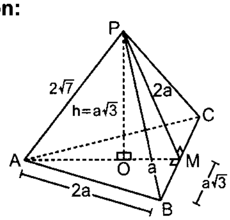
Dato: $PO = PH = a$

$\triangle$PHV (30° y 60°): $VP = 2a$

$\therefore\ \dfrac{VP}{PO} = \dfrac{2a}{a} = 2$

46. Hallar el volumen de una pirámide triangular regular si el apotema de la pirámide es el doble del apotema de la base y la arista lateral mide $2\sqrt{7}$ m

Resolución:



$\triangle$ABC equilátero

apotema de la base = a = OM

$\Rightarrow OA = 2a = PM$

$AM = 3a;\ MB = a\sqrt{3};\ AB = 2a\sqrt{3}$

$\triangle$POM: $(PO)^2 = (PM)^2 - (OM)^2$

$(PO)^2 = (2a)^2 - (a^2) \Rightarrow PO = a\sqrt{3} = h$

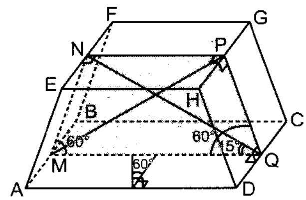
$\triangle$POA: $(AP)^2 = (PO)^2 + (OA)^2$

$(2\sqrt{7})^2 = (a\sqrt{3})^2 + (2a)^2 \Rightarrow a = 2$

$V = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(2a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right](a\sqrt{3}) = 3a^2 \quad \therefore\ V = 3(2)^3 = 24\ m^3$

47. Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular ABCD-EFGH, donde las caras laterales están inclinados 60° con respecto a la base y el diedro formado por las regiones ABCD y EFCD mide 15°. Calcular el área de la superficie lateral del tronco, si $\overline{AB}$ y $\overline{GH}$ distan 6 m.

Resolución:



Nos piden área de la superficie lateral: S_L

Sea: $S_{\triangle AEHD} = S$

Entonces: $S_L = 4S$ ...(1)

Por área proyección se nota que:

$S_{MNPQ} = S\cos 30°$ ...(2)

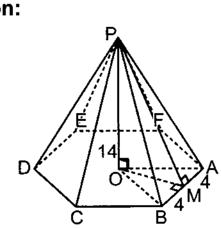
Pero: $S_{MNPQ} = \left[\dfrac{(MP)(NQ)}{2}\right]\text{sen}30° \Rightarrow S_{MNPQ} = 9\ m^2$

En (2): $S = 6\sqrt{3}\ m^2$

En (1): $S_L = 24\sqrt{3}\ m^2$

48. Si una pirámide hexagonal regular tiene 8 cm de arista básica y 14 cm de altura, hallar: apotema de la base, arista lateral, apotema de la pirámide.

Resolución:



$\triangle$AMO: $AM = MB = 4$

$\Rightarrow OM = 4\sqrt{3}$ cm (apotema de la base)

$\triangle$AOB (equilátero):

$OB = AO = AB = 8$

$\triangle$POA: $(PA)^2 = (PO)^2 + (OA)^2$

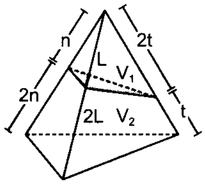
$PA^2 = 14^2 + 8^2 \Rightarrow PA = 2\sqrt{65}$ cm (arista lateral)

$\triangle$POM: $(PM)^2 = (OM)^2 + (PO)^2$

$(PM)^2 = (4\sqrt{3})^2 + 14^2 \Rightarrow PM = 2\sqrt{61}$ cm (apotema de la pirámide)

49. Una pirámide triangular se interseca con un plano en dos poliedros. Si el plano secante divide a las aristas que convergen en un vértice de la pirámide en dos segmentos cuyas longitudes están en la relación 1/2; 1/2 y 2/1, hallar la razón entre los volúmenes de los sólidos que limitan los poliedros.

Resolución:



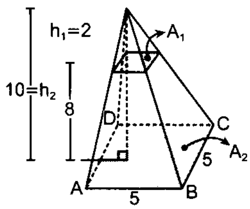
Piden: $\dfrac{V_1}{V_2}$

Propiedad:

$$\frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{(n)(L)(2t)}{(3n)(3L)(3t)} \Rightarrow \frac{V_1}{V_1+V_2}=\frac{2}{27} \therefore \frac{V_1}{V_2}=\frac{2}{25}$$

50. En una pirámide de base cuadrada, el lado de la base y la altura miden 5 cm y 10 cm, respectivamente. Hallar el área de la sección paralela a la base que dista 8 cm de esta.

Resolución:

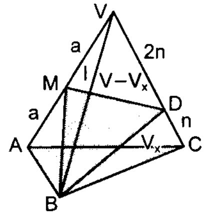


$A_2 = 5^2 = 25\ cm^2$

$$\frac{A_1}{A_2}=\left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_1}{25}=\left(\frac{2}{10}\right)^2 \quad \therefore A_1=25\left(\frac{4}{100}\right)=1\ cm^2$$

51. En una pirámide V-ABC de volumen V, se ubican los puntos M y D en $\overline{AV}$ y $\overline{VC}$ de manera que AM = MV, VD = 2(DC), calcule el volumen del tronco de pirámide MDBAC.

Resolución:



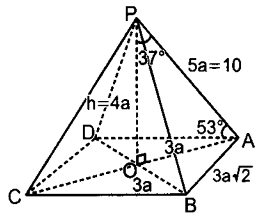
Piden: V_x

Propiedad:

$$\frac{V-V_x}{V}=\frac{(aL)(2n)}{(2a)(L)(3n)} \quad \therefore V_x=\frac{2}{3}V$$

52. Hallar el volumen de una pirámide cuadrangular regular, si la arista lateral mide 10 m y forma con la base un ángulo de 53°.

Resolución:



⊾POA (37°; 53°; 90°)

PA = 5a = 10 ⇒ a = 2

h = 4a

⊾AOB: OA = OB = 3a ⇒ AB = $3a\sqrt{2}$

$$V=\frac{1}{3}A_Bh \Rightarrow \frac{1}{3}(3a\sqrt{2})^2 4a = 24a^3$$

$V = 24(2)^3 \Rightarrow V = 192\ m^3$

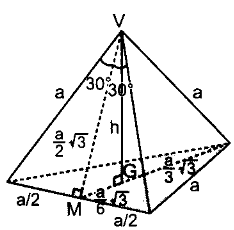
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2009 - II)

Una pirámide regular triangular forma en su vértice un triedro cuyas caras miden 60°. La suma de las áreas de las caras es $81\sqrt{3}\,m^2$. Determine la altura de la pirámide.

A) $3\sqrt{2}$ B) $3\sqrt{3}$ C) $4\sqrt{2}$
D) $5\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{2}$

Resolución:



Nos piden: h

Suma de las áreas de las caras = $81\sqrt{3}\ m^2$

$$\Rightarrow 3\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)=81\sqrt{3} \Rightarrow a=6\sqrt{3}$$

En ⊾VGM por T. de Pitágoras:

$$\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)^2=h^2+\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \quad \therefore h=6\sqrt{2}$$

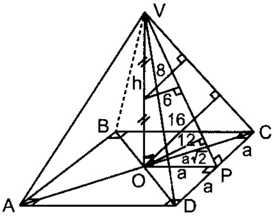
Clave: E

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

En una pirámide regular de base cuadrangular, el punto medio de la altura dista de una cara lateral y de una arista lateral 6 y 8 respectivamente. Calcule la altura de la pirámide.

A) $6\sqrt{2}$ B) $12\sqrt{2}$ C) $18\sqrt{2}$
D) $24\sqrt{2}$ E) $34\sqrt{2}$

Resolución:



$\triangle$VOP: $\dfrac{1}{(2h)^2}+\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{1}{12^2}$ ...(1)

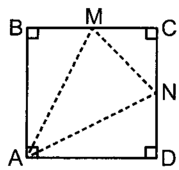
$\triangle$VOC: $\dfrac{1}{(2h)^2}+\dfrac{1}{(a\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{16^2}$ ...(2)

Resolviendo: $h = 24\sqrt{2}$

Clave: D

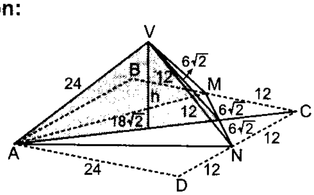
PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

Una servilleta de papel cuadrada ABCD, cuyo lado tiene 24 cm de longitud, se dobla por las líneas punteadas tal como se muestra en la figura, donde M y N son puntos medios de $\overline{BC}$ y $\overline{CD}$, respectivamente; luego se juntan los bordes $\overline{MB}$ con $\overline{MC}$, $\overline{NC}$ con $\overline{ND}$ y $\overline{AB}$ con $\overline{AD}$ formándose una pirámide. Calcule la altura de esta pirámide (en cm).



A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

Resolución:



Piden: h ($\triangle$AVT: Triángulo rectángulo)

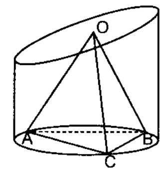
Por relaciones métricas: $24\times 6\sqrt{2} = h\times 18\sqrt{2}$

$\therefore\ h = 8$

Clave: C

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

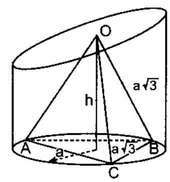
En la figura, O-ABC es una pirámide regular. Calcule la relación que existe entre el volumen de la pirámide regular y el volumen del tronco de cilindro (O es centro).



A) $\dfrac{\sqrt{3}}{3\pi}$ B) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3\pi}$ C) $\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$

D) $\dfrac{3\sqrt{3}}{4\pi}$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$

Resolución:



Piden: $\dfrac{V_{O-ABC}}{V_{T.Cilindro}} \Rightarrow \dfrac{V_{O-ABC}}{V_{T.Cilindro}}=\dfrac{\left[\dfrac{(a\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4}\right]\left(\dfrac{h}{3}\right)}{\pi a^2 h}=\dfrac{\sqrt{3}}{4\pi}$

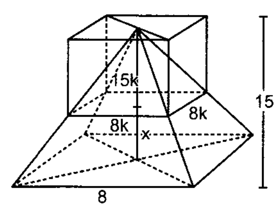
Clave: C

PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

En una pirámide cuadrangular regular, la arista básica mide 8 u y su altura mide 15 u. ¿A qué distancia (en u) de la ase de la pirámide se debe trazar un plano paralelo a dicha base, para que el volumen del prisma recto, que tiene por base a dicha sección y por altura la distancia de la sección al vértice de la pirámide, sea los $\dfrac{3}{8}$ del volumen de la pirámide?

A) 9,5 B) 8,5 C) 7,5
D) 6,5 E) 5,5

Resolución:



Piden: x

Condición: $V_{prisma}=\dfrac{3}{8}V_{pirámide}$

$(8k)(8k)(15k)=\left(\dfrac{3}{8}\right)\left(\dfrac{8\times 8\times 15}{3}\right)$

$k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow 15k=\dfrac{15}{2}\qquad \therefore\ x=\dfrac{15}{2}=7,5$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

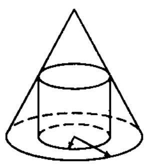
1. Sean las bases las caras de un cubo y cúspide los vértices de dicho cubo. ¿Cuántas pirámides se pueden formar?

A) 36 B) 24 C) 30 D) 28 E) 26

2. ¿Cuál es el ángulo central del desarrollo del área lateral de un cono circular recto de 8 de altura y 6 de radio de la base?

A) 216° B) 150° C) 180° D) 200° E) 210°

3. El volumen del cilindro es 2V, el área de la base del cono es 9 veces el área de la base del cilindro. Calcular el volumen del cono.



A) 8V B) 4V C) 5V D) 6V E) 9V

4. Sobre dos generatrices diametralmente opuestas de un cono equilátero con vértice V se toman los puntos M y N, tal que VM = 8 m y VN = 6 m. Calcular la menor trayectoria para ir de M hacia N sobre la superficie lateral del cono.

A) 14 m B) 10 m C) 7 m
D) 9,5 m E) 11,5 m

5. En una pirámide cuadrangular regular se encuentra en el interior un cono y un tetraedro regular, teniendo los tres el mismo vértice superior y las bases del cono y tetraedro están inscritos en el cuadrado y en el círculo respectivamente, si el volumen del tetraedro es 9 m^3. Hallar el área lateral del cono.

A) $4\pi\sqrt{2}$ m^3 B) $6\pi\sqrt{2}$ m^3 C) $4\pi\sqrt{3}$ m^3
D) $6\pi\sqrt{3}$ m^3 E) $9\pi\sqrt{3}$ m^3

6. En una pirámide triangular los lados de las bases miden 5 m, 6 m y 7 m. Calcular su volumen si las caras laterales forman con la base ángulos iguales a 60°.

A) 16 m^3 B) $16\sqrt{3}$ m^3 C) $8\sqrt{3}$ m^3
D) 8 m^3 E) $8\sqrt{2}$ m^3

7. Por el vértice D de un hexágono regular ABCDEF se levanta $\overline{DO}$ perpendicular al plano del hexágono de manera que DO = 3(DE) = 6 m. Hallar el volumen de la pirámide O-ACF.

A) $\sqrt{3}\,m^3$ B) $2\sqrt{3}\,m^3$ C) $4\sqrt{2}\,m^3$
D) $9\sqrt{3}\,m^3$ E) $10\sqrt{3}\,m^3$

8. En una pirámide regular cuadrangular sus apotemas miden 5 y 13. Calcular el volumen de la pirámide.

A) 200 B) 300 C) 100 D) 400 E) 50

9. Se tiene un cono recto de revolución que es cortado por un plano paralelo a la base de modo que los radios del cono resultante y el cono original se encuentran en relación de 2:3. Hallar la relación de volúmenes del menor cono y el tronco de cono.

A) 7/19 B) 3/16 C) 5/13 D) 6/17 E) 8/19

10. Se tiene una pirámide de base rectangular de lados 24 m y 18 m cuyas aristas laterales miden 25 m. Hallar el área de la sección formada por un plano que contiene el vértice de la pirámide y a la diagonal de la base.

A) 330 m^2 B) 300 m^2 C) 325 m^2
D) 320 m^2 E) 280 m^2

11. Si construimos un cono de revolución con una cartulina, dándole por áreas lateral la de un sector circular de 120° y radio R, hallar el área total del cono.

A) $4\pi R^2/9$ B) $5\pi R^2/9$ C) $2\pi R^2$
D) $2\pi R^2/9$ E) $8\pi R^2/3$

12. En un tronco de pirámide cuadrangular regulares de las diagonales de las bases miden $\sqrt{30}$ y $\sqrt{10}$. Si el cuadrado de la medida de la altura es $5\sqrt{3}/2$. Calcular el área lateral.

A) $8(\sqrt{3}+1)$ B) $9(\sqrt{3}+1)$
C) $10(\sqrt{3}+1)$ D) $12(\sqrt{31})$
E) $16(\sqrt{3}+1)$

13. Calcular el volumen de un trono de prisma triangular, si el área de sección recta es 40 m^2 y la longitud de del segmento que une los baricentro de las bases.

A) 603 m^3 B) 180 m^3 C) 306 m^3
D) 360 m^3 E) 630 m^3

14. En una pirámide regular P-ABC se traza un plano paralelo a la base determinada la sección plana MRN. Luego se inscribe hexágonos regulares en los triángulos ABC y MRN. Si el plano MRN es equidistante del vértice P y del plano ABC, entonces la razón del volumen de la pirámide P-ABC al volumen del tronco de pirámide hexagonal es:

A) 9/5 B) 7/5 C) 11/5 D) 11/7 E) 12/7

15. En la pirámide O-ABC, las caras laterales forman diedros de 45° con la base. Si AB = 13, BC = 15 y AC = 24, calcular el volumen del sólido limitado por la pirámide.

A) $\frac{286}{3}$ B) $\frac{275}{3}$ C) $\frac{292}{3}$ D) $\frac{284}{3}$ E) $\frac{290}{3}$

16. Dado una pirámide cuadrangular regular de volumen igual a $36\sqrt{3}$. Calcular la altura de dicha pirámide, si se sabe además que el área de la superficie lateral es los dos tercios del área total.

A) 3 B) 6 C) 4 D) 2 E) $3\sqrt{3}$

17. En una pirámide cuadrangular regular el área de la superficie lateral es $\sqrt{7}$ veces el área de la base. Calcular la medida del ángulo entre una arista lateral y el plano de la base.

A) 45 B) 53 C) 75 D) 60 E) 74

18. Si una pirámide posee 242 aristas; calcular su cantidad de vértices y su cantidad de caras.

A) 120; 120 B) 122; 122 C) 124; 1
D) 118; 126 E) 126; 118

19. Calcular a qué distancia del vértice de una pirámide triangular, cuya altura es 5, se debe cortar por un plano paralelo a la base para que las dos partes resultantes estén en la relación de 8 a 17.

A) $4\sqrt[3]{18}$ B) $5\sqrt[3]{4}$ C) $5\sqrt[3]{12}$ D) $2\sqrt[3]{10}$ E) $4\sqrt[3]{5}$

20. Hallar el área total de una pirámide cuadrangular regular si su altura es igual a 3 y el área de la cara lateral es igual a la de la base.

A) 12 B) 7,5 C) 6 D) 7,2 E) 7

21. Se tiene una pirámide cuadrangular regular cuyo volumen es $36\sqrt{3}$, calcular el área de la superficie lateral de dicha pirámide, si ella es los dos tercios del área de su superficie.

A) 64 B) 72 C) 96 D) 48 E) 54

22. Una pirámide regular cuya altura es 10 m, tiene por base un cuadrado cuyo lado mide 6 m. Se le corta por un plano paralelo a la base y sobre la sección se construye un prisma recto cuya base superior pasa por el vértice de la pirámide. Calcular la distancia de la sección al vértice para que el volumen del prisma sea igual a la tercera parte del volumen del tronco de pirámide que queda.

A) 4,64 m B) 4,50 m C) 5 m
D) 5,50 m E) 6 m

23. En una pirámide regular la medida del ángulo diedro determinado por una cara lateral y el plano de la base es α. Calcular la razón de área de la superficie lateral y de la base de dicha pirámide.

A) $\sec\alpha$ B) $\csc\alpha$ C) $\cos\alpha$ D) $\operatorname{sen}\alpha$ E) $\tan\alpha$

24. Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular cuyas aristas básicas miden 6 y 8 m y la longitud de la diagonal de una cara lateral es igual a la longitud de una arista de la base mayor básica. Calcular el volumen de dicho sólido.

A) $\frac{181}{5}\sqrt{14}\,m^3$ B) $\frac{184}{7}\sqrt{14}\,m^3$ C) $\frac{148}{3}\sqrt{14}\,m^3$
D) $\frac{148}{5}\sqrt{14}\,m^3$ E) $\frac{148}{9}\sqrt{14}\,m^3$

25. En un tronco de pirámide cuadrangular regular, la medida del diedro formado por la cara lateral con la base es 60°. Calcular la razón de áreas de la superficie lateral y de la proyección de dicho sólido sobre un plano perpendicular a una cara lateral y que contiene a los centros de las bases del tronco.

A) $\frac{8}{3}\sqrt{3}$ B) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{16}{3}\sqrt{3}$
D) $\frac{19}{3}\sqrt{3}$ E) $\frac{32}{3}\sqrt{3}$

26. En una pirámide cuadrangular regular, la medida del diedro determinado por una cara lateral y la base es 60°. Calcular la longitud de la arista lateral en función del radio r de la esfera inscrita en dicho sólido.

A) $r\sqrt{5}$ B) $r\sqrt{3}$ C) $r\sqrt{12}$ D) $r\sqrt{15}$ E) $r\sqrt{19}$

27. Se tiene un hexaedro regular ABCD-EFGH. Se traza $\overline{DS}\perp\overline{AG}$ ($S\in\overline{AG}$). Calcular el volumen de la pirámide S-ABCD, si DS = 2.

A) $\frac{2\sqrt{6}}{3}$ B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $\sqrt{3}$ E) $2\sqrt{6}$

28. En una pirámide pentagonal regular, el área de la superficie total es 3S y el área de la superficie lateral es 2S. Calcular la medida del ángulo diedro que forma una cara lateral con la base.

A) 30° B) 37° C) 45° D) 60° E) 53°

29. En un prisma recto ABC-A'B'C' de volumen V; sea O punto medio del segmento cuyos extremos son baricentros en las bases; la recta $\overleftrightarrow{BO}$ interseca a la cara ACC'A' en P. Calcular el volumen de la pirámide P-CC'B'B.

A) $\frac{V}{2}$ B) $\frac{V}{4}$ C) $\frac{V}{5}$ D) $\frac{V}{8}$ E) $\frac{V}{3}$

30. En un tronco de pirámides regular de base cuadrangular, el plano que contiene a un lado de la base mayor y al lado opuesto de la base menor, forma con la base mayor un ángulo que mide 60°. Calcular el volumen de dicho sólido, si los lados de las bases miden $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$.

A) 66 B) 65 C) 60 D) 58 E) 69

31. El lado de la base mayor de un tronco de pirámide regular cuadrangular mide $6\sqrt{2}$ y su altura 3, las aristas laterales forman ángulos de medida 45° con el plano de la base, calcular el volumen del tronco.

A) 124 B) 125 C) 126 D) 130 E) 136

32. En una pirámide regular, el área de la base es igual a S y el ángulo entre la altura de dicho cono y una de sus caras laterales mide α. Calcular el área de la superficie lateral de la pirámide.

A) $5\text{sen}\alpha$ B) $5\cos\alpha$ C) $5\csc\alpha$
D) $5\tan\alpha$ E) $5\cot\alpha$

33. La base de una pirámide está limitada por un polígono circunscrito a una circunferencia de radio r. Si el perímetro de la base es 2p y las caras laterales de la pirámide forman un ángulo diedro que mide θ con la base. Calcular el volumen de la pirámide.

A) $pr^2\text{sen}\theta$ B) $pr^2\cot\theta$ C) $pr^2\tan\theta$
D) $p\frac{r}{3}\tan\theta$ E) $p\frac{r}{2}\tan^2\theta$

34. En una pirámide hexagonal regular, su altura mide 18 y la arista de la base mide 12. Calcular a qué distancia del vértice se debe trazar un plano paralelo a la base para que la sección resultante tenga un área de $72\sqrt{3}$.

A) $3\sqrt{3}$ B) $4\sqrt{3}$ C) $5\sqrt{3}$ D) $6\sqrt{3}$ E) $7\sqrt{3}$

35. Una pirámide cuadrangular regular tiene como arista básica 5 dm y es cortado mediante un plano paralelo a la base a 6 dm de su vértice. Si la sección que se determina es de 4 dm^2 de área, hallar el volumen del tronco de pirámide que se determina.

A) 117 dm^3 B) 107 dm^3 C) 137 dm^3
D) 127 dm^3 E) 147 dm^3

36. En una pirámide de base triangular regular, la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo de la base es 2 y la longitud del radio de la circunferencia inscrita a una cara lateral es 3, hallar el área de la superficie lateral de la pirámide.

A) $\frac{75}{2}\sqrt{3}$ B) $144\sqrt{3}$ C) $\frac{45}{2}\sqrt{3}$
D) $96\sqrt{3}$ E) $36\sqrt{3}$

37. En la cara BFGC de un hexaedro regular ABCD-EFGH, se ubica un punto P, tal que $m\angle APC = 90°$, PF = AD = 8. Calcular el volumen de la pirámide P-ABCD.

A) $\frac{1024}{15}$ B) $\frac{1001}{15}$ C) $\frac{1026}{5}$
D) $\frac{2001}{16}$ E) $\frac{2003}{15}$

38. En un tronco de pirámide cuadrangular las bases distan $2\sqrt{3}$, la arista básica menor mide 2 y las caras laterales están inclinadas con respecto a la base un ángulo diedro cuya medida es 60°. Calcular el área de la superficie total.

A) 116 B) 96 C) 104 D) 102 E) 100

39. Se tiene una pirámide V-ABCD, tal que ABCD es un paralelogramo cuyas diagonales miden AC = 10 y BD = 8. Hallar el valor de:
$E = (VA)^2 + (VC)^2 - (VB)^2 - (VD)^2$

A) 24 B) 20 C) 28 D) 16 E) 48

40. La base de una pirámide es un triángulo equilátero y las caras laterales son triángulos isósceles rectángulos. Si las aristas laterales miden 4 m, calcular el área total de la pirámide.

A) $4(6 + 2\sqrt{3})\ m^2$ B) $2(2 + 3\sqrt{3})\ m^2$
C) $4(3 + 3\sqrt{3})\ m^2$ D) $3(4 + 2\sqrt{3})\ m^2$
E) $5(6 + 2\sqrt{3})\ m^2$

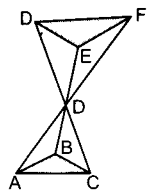
41. Un tronco de pirámide equivalente a un hexaedro regular tiene como altura a la arista del hexaedro regular. Hallar el área total del hexaedro conociendo que el tronco de pirámide tiene por bases 1 m^2 y 4 m^2.

A) 13 m^2 B) 9 m^2 C) 14 m^2
D) 15 m^2 E) 16 m^2

42. Calcular la altura de un tronco de pirámide regular cuadrangular ABCD-EFGH, si el área de la sección plana BFHD es B_1 y el área de la sección determinada en el sólido por un plano equidistante a sus bases es B_2.

A) $\sqrt{\frac{B_1^2}{2B_2}}$ B) $\frac{B_1^2}{B_2}$ C) $\frac{B_2^2}{B_1}$
D) $\frac{B_1B_2}{B_1 + B_2}$ E) $\sqrt{B_1 + B_2}$

43. La figura es un tronco de pirámide de segunda especie (bases paralelas).
Si: $A_{\triangle ABC} = 16\ m^2$; $A_{\triangle DEF} = 9\ m^2$; y la distancia entre las bases es 9 m, calcular su volumen.



A) 39 m^3 B) 38 m^3 C) 37 m^3
D) 36 m^3 E) 35 m^3

44. Se tiene una pirámide cuadrangular regular en la cual una arista lateral y la altura forman un ángulo cuya medida es 30°. Calcular la medida del ángulo diedro que forma el plano de la base y un plano perpendicular a una arista lateral.

A) 45° B) 53° C) $\text{arccot}\sqrt{2}$
D) $\arctan\sqrt{5}$ E) 30°

45. ¿A qué distancia del vértice de una pirámide cuya altura mide 8 cm, se debe trazar un plano paralelo a la base para que se determine dos sólidos equivalentes?

A) $2\sqrt{2}$ cm B) $3\sqrt[3]{3}$ cm C) $4\sqrt[3]{4}$ cm
D) 5 cm E) 6,5 cm

46. En una pirámide cuya base es un triángulo equilátero, su altura es igual al radio del círculo circunscrito a la base. A una distancia igual a la medida del inradio de la base, se traza un plano paralelo a ésta que determina un tronco de pirámide cuyo volumen se pide calcular en función del circunradio R de la base.

A) $\frac{7R^3\sqrt{3}}{32}$ B) $\frac{6R^3\sqrt{3}}{25}$ C) $\frac{5R^3\sqrt{3}}{21}$

D) $\frac{4R^3\sqrt{3}}{17}$ E) $\frac{7R^3\sqrt{3}}{30}$

47. Dado una pirámide regular hexagonal, la arista de la base es "b". Si la arista lateral mide 3b, hallar la distancia del pie de la altura una arista lateral.

A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}b$ B) $\frac{4\sqrt{2}}{3}b$ C) $\frac{5R^3\sqrt{3}}{21}b$

D) $\frac{4R^3\sqrt{3}}{17}b$ E) $\frac{7R^3\sqrt{3}}{30}b$

48. En una pirámide cuadrangular regular, la arista lateral forma 37° con el plano base. Calcular el valor del ángulo diedro que forma la cara lateral con la base.

A) $\arctan\frac{4}{3}$ B) $\arctan\frac{3\sqrt{2}}{2}$ C) $\arctan\frac{3\sqrt{2}}{4}$

D) $\arctan\frac{2\sqrt{2}}{3}$ E) $\arctan\frac{3}{4}$

49. En una pirámide triangular A-BCD los puntos M y N son los baricentros de las caras BCD y ABC respectivamente. Si $\overline{AM} \cap \overline{ND} = \{F\}$ y FM = 7, calcular $\overline{AF}$.

A) 20 B) 21 C) 22 D) 23 E) 24

50. En un tronco de pirámide cuadrangular regular, las aristas básicas miden a y b (a > b). Un plano secante paralelo a las bases determina dos troncos de pirámides de áreas laterales iguales. Calcular el lado de la sección que determina dicho plano.

A) $\sqrt{\frac{a^2+2b^2}{2}}$ B) $\sqrt{\frac{2a^2+b^2}{2}}$ C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

D) $\sqrt{2(b^2-a^2)}$ E) $\sqrt{3(b^2-a^2)}$

51. Se tiene un tetraedro regular ABCD, cuya arista mide a, en la arista $\overline{AD}$ se ubica el punto O, si la altura de la pirámide ABCO es congruente con $\overline{OD}$. Calcular $\overline{OD}$.

A) $(\sqrt{6}-2)a$ B) $\frac{2a}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{a}{2}$

D) $a\sqrt{3}$ E) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$

52. En una pirámide triangular V-ABC se traza un plano secante que biseca a uno de los ángulos internos de la base y que contiene al vértice V determinando una sección limitada por un triángulo rectángulo. Si la arista básica mide "b", entonces el volumen de la pirámide es:

A) $\frac{b^3\sqrt{2}}{36}$ B) $\frac{b^3\sqrt{2}}{8}$ C) $\frac{b^3\sqrt{2}}{12}$

D) $\frac{b^3\sqrt{2}}{24}$ E) $\frac{b^3\sqrt{2}}{9}$

53. Las aristas laterales de un tronco de pirámide regular triangular forman con la base mayor ángulos de medida θ. Si las aristas básicas mayor y menor miden a y b, calcular el volumen del tronco.

A) $\frac{(a^3-b^3)}{12}\tan\theta$ B) $\frac{(a^3-b^3)}{12}\cos\theta$

C) $\frac{(a^3-b^3)}{12}\operatorname{sen}\theta$ D) $\frac{(a^3-b^3)}{6}\tan\theta$

E) $\frac{(a^3-b^3)}{15}\cos\theta$

54. En una pirámide pentagonal regular, el área total es 30 cm^2 y el área lateral 20 cm^2. Calcular la medida del diedro determinado en una arista de la base.

A) 30 B) 60 C) 45

D) 75 E) arccos(1/3)

55. En un tronco de pirámide regular de bases cuadrangulares en todas sus caras se pueden inscribir circunferencias, en las bases los radios de las circunferencias miden 4 cm y 9 cm. Entonces el área lateral del tronco de pirámide es: (en cm^2)

A) 598 B) 612 C) 624 D) 648 E) 700

56. En un tronco de pirámide cuadrangular regular, las diagonales de las bases miden $\sqrt{30}$ y $\sqrt{10}$. Si el cuadrado de la medida de la altura es $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ calcular el área lateral.

A) $8(\sqrt{3}+1)$ B) $9(\sqrt{3}+1)$ C) $10(\sqrt{3}+1)$

D) $12(\sqrt{31})$ E) $15(\sqrt{3}+1)$

57. Se tiene el tetraedro ABCD, se ubican G_1 y G_2 los baricentros de las caras ACD y DBC de tetraedro. Calcular la razón de volúmenes de tetraedro ABCD y el sólido G_1G_2CD

A) 2 B) 9 C) 18 D) 6 E) 27

58. En la pirámide O-ABC, las caras laterales forman diedros de 45° con la base. Si AB = 13, BC = 15 y AC = 24. Calcular el volumen del sólido limitado por la pirámide.

A) $\frac{286}{3}$ B) $\frac{275}{3}$ C) $\frac{292}{3}$ D) $\frac{284}{3}$ E) $\frac{290}{3}$

59. En un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH se traza un plano secante que contiene a los puntos medios M y N de $\overline{EH}$ y $\overline{HG}$ respectivamente y el vértice A, determinando así una sección cuadrangular regular cuyo lado mide 4. Calcular el volumen del sólido limitado por el tronco de pirámide.

A) $37\sqrt{3}$ B) $\frac{112}{3}\sqrt{3}$ C) $\frac{112}{3}$

D) $\frac{112\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{112}{3}\sqrt{5}$

60. Se tiene un tetraedro regular de arista igual a L. Calcular el volumen del sólido determinado al unir en forma consecutiva un vértice del tetraedro, con los puntos medios de las aristas que concurren en dicho vértice y el centro de una de las caras que concurren en dicho vértice.

A) $\frac{\sqrt{2}L^3}{72}$ B) $\frac{\sqrt{2}L^3}{36}$ C) $\frac{\sqrt{2}L^3}{9}$

D) $\frac{\sqrt{3}L^3}{72}$ E) $\frac{\sqrt{3}L^3}{36}$

61. En una pirámide regular cuadrangular, el lado de la base tiene una longitud "a" y el plano que pasa por una arista básica la base media de la cara opuesta forman un diedro de 45° con la base, entonces su volumen es:

A) $\frac{a^3}{2}$ B) $\frac{a^3}{4}$ C) $\frac{a^3+1}{2}$

D) $\frac{6a^3}{5}$ E) $\frac{a^3}{8}$

62. En una pirámide triangular las áreas de dos caras perpendiculares entre si son iguales a S_1 y S_2. Si la longitud de la arista común entre ellas es "a", calcular el volumen de la pirámide.

A) $\frac{2S_1S_2}{3a}$ B) $\frac{S_1S_2}{2a}$ C) $\frac{S_1S_2a}{S_1+S_2}$

D) $\frac{S_1S_2}{a}$ E) $(2S_1 + 3S_2)a$

63. La altura de una pirámide octogonal regular mide "h". Si la medida del diedro determinado en una arista básica es 45, calcular el volumen de la pirámide.

A) $\frac{8h^3}{3}(\sqrt{2}-1)$ B) $\frac{8h^3}{3}(\sqrt{2}+1)$

C) $\frac{4h^3}{3}(\sqrt{2}-1)$ D) $\frac{4h^3}{3}(\sqrt{2}+1)$

E) $2h^2(\sqrt{2}-1)$

64. V-ABCD es una pirámide cuadrangular regular cuya cara lateral está limitada por un triángulo equilátero cuyo lado mide "a". Calcular la distancia del centro de la base a una de las caras laterales.

A) $a\frac{\sqrt{6}}{2}$ B) $a\frac{\sqrt{6}}{6}$ C) $a\frac{\sqrt{3}}{3}$ D) $a\frac{\sqrt{2}}{2}$ E) $a\frac{\sqrt{6}}{3}$

65. En una pirámide V-ABC, $VA = \sqrt{17}$; $VB = VC = 6$; $AB = AC = 5$ y $BC = 8$. Calcular el volumen de la pirámide.

A) 9 B) 16 C) 25 D) 36 E) 64

66. En una pirámide V-ABCD, $\overline{VA}$ es perpendicular a la base que es un trapecio rectángulo, (recto en B y C), si: $BC = 5$; $CD = 4$; $VA = 12$ y $S_{ABCD} = S_{VBC}$. Calcular S_{VCD}.

A) 24 B) 26 C) 28

D) 36 E) 32

67. V-ABC es una pirámide de volumen V, se traza un plano secante que interseca a $\overline{VA}$ en E, $\overline{VB}$ en D y $\overline{VC}$ en F, tal que $\frac{VD}{DB} = \frac{1}{4}$; $\frac{VE}{EA} = \frac{2}{3}$ y $\frac{VF}{VC} = \frac{1}{3}$ Entonces, el volumen del sólido ABC-EDF es:

A) $\frac{49V}{50}$ B) $\frac{48V}{50}$ C) $\frac{47V}{50}$

D) $\frac{46V}{50}$ E) $\frac{44V}{50}$

68. En una pirámide cuadrangular regular, la medida del diedro determinado por una cara lateral y la base es 60. Calcular la longitud de la arista lateral en función del radio "r" de la esfera inscrita en dicho sólido.

A) 2r B) $2r\sqrt{15}$ C) $r\sqrt{15}$

D) $r\sqrt{15}$ E) $r\frac{\sqrt{15}}{2}$

69. Calcular la altura de un tronco de pirámide regular ABCD-EFGH, si el área de la sección plana AEGC es S_1 y el área de la sección determinada en el sólido por un plano que equidista de sus bases es S_2.

A) $\sqrt{S_1+S_2}$ B) $\frac{1}{2}\sqrt{S_1+S_2}$

C) $\frac{S_1}{S_1+S_2}\sqrt{2S_1}$ D) $\frac{S_1}{2S_2}\sqrt{2S_2}$

E) $\frac{S_1}{S_2}\sqrt{2S_2}$

70. La superficie limitante correspondiente a un tronco de pirámide, cuyas bases son regiones cuadradas y una cara lateral es perpendicular a las bases, está circunscrita a una esfera. Calcular el volumen del tronco de pirámide si los perímetros de las bases suman S y el producto de las medidas de dos aristas básicas diferentes es P.

A) $\frac{P(S^2+4P)}{3S}$ B) $\frac{P(S^2-16P)}{6S}$

C) $\frac{2S^3(S^2-4P)}{6P}$ D) $S(S^2-9P)$

E) $\frac{2P(S^2-P)}{3S}$

71. La arista lateral de una pirámide regular mide 2; si su base es un dodecágono inscrito en una circunferencia de radio 1. Calcular el volumen de la pirámide.

A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) $\sqrt{5}$ D) $\sqrt{6}$ E) $\sqrt{10}$

72. Una pirámide regular cuya altura es 24 dm tiene por base un cuadrado cuyo lado es 12 dm, se la interseca por un plano paralelo a la base y sobre la sección se construye un prisma recto cuya base superior pasa por el vértice de la pirámide. Determine la distancia de la sección al vértice para que el volumen del prisma sea los 3/7 del volumen del tronco de pirámide que queda.

A) 9 dm B) 10 dm C) 12 dm

D) 15 dm E) 16 dm

73. Se tiene un tetraedro regular Q-PFE, se ubican A, B, C y D puntos medios de $\overline{QF}$, $\overline{PF}$, $\overline{PE}$ y $\overline{QE}$. Si la arista del tetraedro Q-PFE es de longitud 2 m. Calcule el volumen del sólido ABCDEF

A) $\sqrt{2}$ m^3 B) 3 m^3 C) $3\sqrt{2}$ m^2

D) $\frac{\sqrt{2}}{4}$ m^3 E) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ m^3

74. La base de un pirámide triangular regular de 24 unidades cúbicas de volumen, descansa sobre una mesa, frente a la cual está un espejo en posición vertical. Si las imagenes de los vértices de dicha base distan 7,7 y 13 unidades de la superficie del espejo, ¿cuál es la altura de la pirámide?

A) $5\sqrt{3}$ B) 6 C) $4\sqrt{3}$

D) $2\sqrt{3}$ E) $3\sqrt{3}$

CLAVES

1. B	11. A	21. B	31. C	41. C	51. A	61. A	71. B
2. A	12. C	22. A	32. C	42. A	52. D	62. A	72. C
3. E	13. D	23. A	33. D	43. A	53. A	63. A	73. E
4. D	14. E	24. C	34. D	44. E	54. B	64. C	74. D
5. D	15. A	25. A	35. A	45. C	55. C	65. B	
6. C	16. E	26. D	36. A	46. A	56. C	66. C	
7. D	17. D	27. A	37. A	47. A	57. B	67. A	
8. D	18. B	28. D	38. C	48. C	58. A	68. C	
9. E	19. E	29. E	39. E	49. B	59. B	69. D	
10. B	20. A	30. A	40. A	50. C	60. A	70. B	

Cilindro y tronco de cilindro

capítulo 20

Arquímedes de Siracusa (Siracusa, Sicilia, 287 a. C.-212 a. C.) fue un físico, ingeniero, inventor, astrónomo y matemático griego. Aunque se conocen pocos detalles de su vida, es considerado uno de los científicos más importantes de la Antigüedad clásica. Se considera que Arquímedes fue uno de los matemáticos más grandes de la antigüedad y, en general, de toda la historia. Usó el método exhaustivo para calcular el área bajo el arco de una parábola con la sumatoria de una serie infinita, y dio una aproximación extremadamente precisa del número Pi. También definió la espiral que lleva su nombre y fórmulas para los volúmenes de las superficies de revolución.

En su obra Sobre la esfera y el cilindro (dos volúmenes), Arquímedes llega a la conclusión matemática de la que estaría más orgulloso, esto es, la relación entre una esfera y un cilindro circunscrito con la misma altura y diámetro. El volumen es $4/3\ \pi r^3$ para la esfera, y $2\pi r^3$ para el cilindro. El área de la superficie es $4\pi r^2$ para la esfera, y $6\pi r^2$ para el cilindro (incluyendo sus dos bases), donde r es el radio de la esfera y del cilindro. La esfera tiene un área y un volumen equivalentes a dos tercios de los del cilindro. A pedido del propio Arquímedes, se colocaron sobre su tumba las esculturas de estos dos cuerpos geométricos.

Fuente: Wikipedia

SUPERFICIE CILÍNDRICA

Es la superficie generada al deslizarse una recta (generatriz) a lo largo de una curva, (directriz), manteniéndose paralela a su posición inicial.

En la figura 1: $\overleftrightarrow{r}$ es la generatriz de la superficie cilíndrica y C_1, la directriz. Como C_1 no es cerrada la superficie obtenida es abierta.

En la figura 2: C_2 es una curva cerrada; luego, la superficie generada es cerrada.

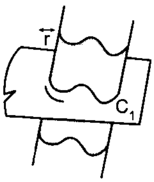


Fig. 1

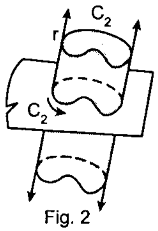


Fig. 2

CILINDRO

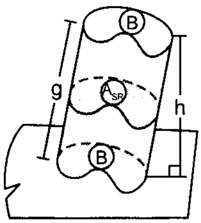
Es el sólido obtenido al intersecar una superficie cilíndrica cerrada, por medio de dos planos paralelos.

Las regiones que determinan dichos planos son las bases del cilindro y la distancia entre ellos es la altura. Las bases son congruentes.

Si B es el área de una base y "h" la longitud de la altura; el volumen del sólido se evalúa así:

$$\boxed{V = Bh}$$

En la figura, el segmento de longitud g, es la generatriz del cilindro.



La sección recta del cilindro, es la intersección del sólido con un plano perpendicular a las generatrices (todas las generatrices del cilindro son congruentes).

El cilindro es oblicuo si las generatrices son oblicuas a las bases.

El cilindro es recto si las generatrices son perpendiculares a las bases. En este caso: g = h y además, las secciones rectas son congruentes a las bases.

Si C, es el perímetro de una sección recta, entonces el área de la superficie lateral, se expresa así:

$$\boxed{S_L = Cg}$$

y, el área total será $\boxed{S_T = S_L = 2B}$

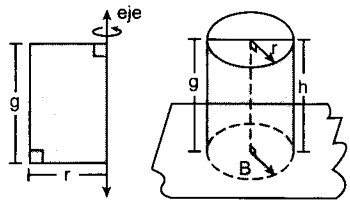
Si A_{SR} es el área de una sección recta, el volumen será:

$\boxed{V = (A_{SR})g}$

CILINDRO DE REVOLUCIÓN

Se genera al girar una región rectangular, una vuelta alrededor de un eje que contiene a un lado.

Las bases son círculos y la altura mide igual que la generatriz. Es también llamado cilindro circular recto.



Área lateral: $\boxed{S_L = 2\pi rg}$

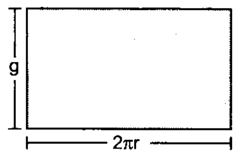
Área total: $\boxed{S_T = S_L + 2B}$

Volumen: $\boxed{V = \pi r^2}$

En este caso: $\boxed{B = \pi r^2}$

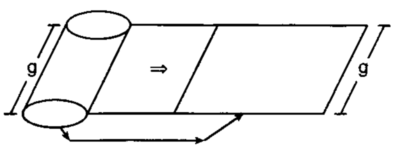
DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

Es la región rectangular obtenida al extender (desarrollar) la superficie lateral, de modo que los lados del rectángulo sean la generatriz y las circunferencias de las bases del cilindro de revolución original.



Nota

En el caso de un cilindro oblicuo, el desarrollo puede resultar romboide o rombo.



TRONCO DE CILINDRO

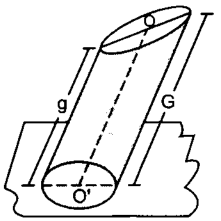
Se obtiene al intersecar la superficie lateral de un cilindro con un plano no paralelo a las bases.

En la figura 1: $\overline{OO'}$ es el eje del tronco, g y G son longitudes de dos generatrices opuestas, (g < G).

Las secciones rectas del tronco son las mismas que las del cilindro original.

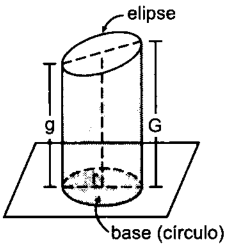
El volumen se puede evaluar así:

$$\boxed{V = A_{SR}(OQ')}$$



Donde: $\boxed{OO' = \dfrac{g+G}{2}}$

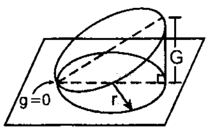
Si el tronco se deriva de un cilindro de revolución, su volumen es:



$$\boxed{V = \pi r^2\left(\frac{g+G}{2}\right)}$$

Si una generatriz es nula, el sólido se llama cuña cilíndrica. Por ejemplo, en la figura 3:

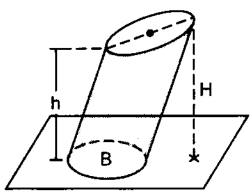
$$V = \pi r^2\left(\frac{0+G}{2}\right)$$



$\Rightarrow$ $\boxed{V = \pi r^2 \dfrac{G}{2}}$

Fig. 2 Fig. 3

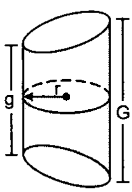
Otras posibilidades



$$\boxed{V = B\left(\frac{h+H}{2}\right)}$$

h y H: alturas (h < H)
B: área de la base.

$$\boxed{A_{SR} = \pi r^2}$$

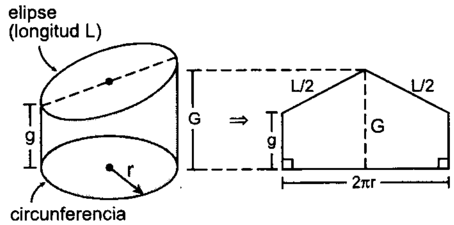


$$\boxed{V = \pi r^2\left(\frac{g+G}{2}\right)}$$

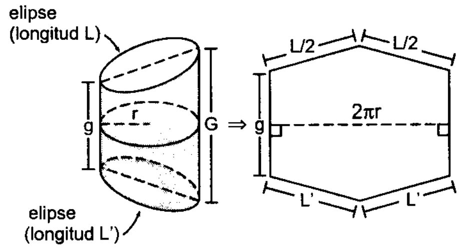
(Si g = 0, se trata de una cuña cilíndrica).

Algunos desarrollos de las superficies laterales de troncos de cilindro son:

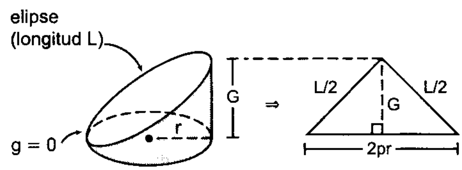
a.



b.



c.

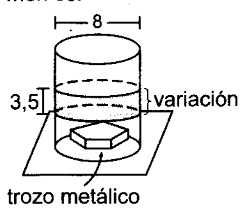


Ejemplos:

1. Un cilindro está lleno de agua hasta la mitad. Se suelta un pedazo metálico y el nivel del agua sube en 3,5 cm. Si el diámetro del cilindro es 8 cm, Hallar el volumen del pedazo metálico.

   Resolución:

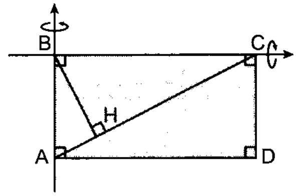
   La variación es debida al trozo metálico, y su volumen es:

   $$\left(\pi\frac{8^2}{4}\right)(3,5) = 176\ cm^3$$

2. ABCD es un rectángulo. Se traza $\overline{BH} \perp \overline{AC}$. Si V_1 y V_2 son los volúmenes de los sólidos obtenidos al girar la región triangular ABCD alrededor de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente. Hallar: $\dfrac{V_1}{V_2}$, si: $\dfrac{AH}{HC} = \dfrac{4}{25}$

   Resolución:

Con el gráfico:

Alrededor de $\overline{AB}$: $V_1 = \pi(BC)^2(AB)$

Alrededor de $\overline{BC}$: $V_2 = \pi(AB)^2(BC)$

Luego: $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\pi(BC)^2(AB)}{\pi(AB)^2(BC)} \Rightarrow \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{BC}{AB}$ ... (1)

Por otro lado, en el $\triangle ABC$, según relación métrica:

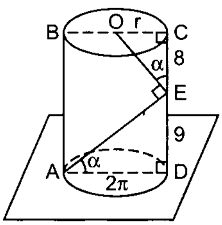
$\dfrac{(BC)^2}{(AB)^2} = \dfrac{HC}{AH}$

Con el dato: $\dfrac{(BC)^2}{(AB)^2} = \dfrac{25}{4} \Rightarrow \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{5}{2}$

Reemplazando esto último en (1): $\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{5}{2}$

3. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, son generatrices opuestas de un cilindro circular recto y O punto medio de $\overline{BC}$. Siendo E un punto de $\overline{CD}$, tal que $\overline{OE} \perp \overline{AE}$; CE = 8 y ED = 9; hallar el área total del sólido.

Resolución:



Sea "r" el radio de la base:

$\triangle OCE \sim \triangle EDA \Rightarrow \dfrac{r}{9} = \dfrac{8}{2r} \Rightarrow r = 6$

El área total: $S_T = S_L + 2\pi r^2$

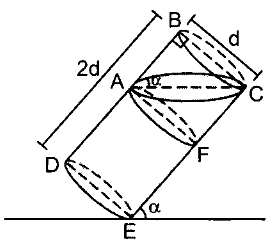
$S_T = 2\pi r(CD) + 2\pi r^2$

$S_T = 2\pi(6)(17) + 2\pi(6)^2 \quad \therefore\ S_T = 276\pi$

4. En un vaso que tiene la forma de un cilindro recto de revolución, la altura es el doble del diámetro de la base. Si el vaso contiene un líquido que ocupa las 3/4 partes de su capacidad, determinar el ángulo que debe inclinarse desde su posición normal hasta el instante en que el líquido esté por derramarse.

Resolución:

Llamando V al volumen del vaso, el líquido ocupa los $\dfrac{3}{4}$V.



Luego, el volumen será $\dfrac{V}{4}$ y corresponde a la cuña ABC.

Al trazar $\overline{AF}$ // $\overline{DE}$, formando el cilindro ABCF, su volumen será el doble de ABC, es decir: $2\left(\dfrac{V}{4}\right) = \dfrac{V}{2}$

Como el volumen de ABCF es la mitad del total:

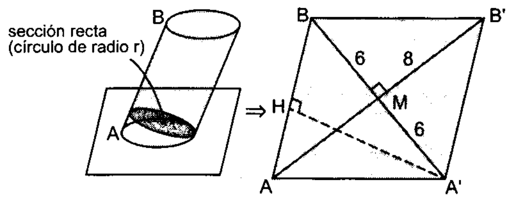
$AB = \dfrac{BD}{2} \Rightarrow AB = d$

Luego, en el $\triangle ABC$: AB = BC $\quad \therefore\ \alpha = 45°$

5. El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro oblicuo, de base elíptica, es un rombo de diagonales 12 cm y 16 cm, respectivamente. Hallar el volumen del sólido.

Resolución:

Volumen: $V = \pi r^2 AB$



$A'B = 12 \wedge AB' = 16$

(desarrollo de la superficie lateral)

En el $\triangle BMB'$ del desarrollo: BB' = 10

Luego, por ser rombo: $AB = BB' \Rightarrow AB = 10$ (longitud de la generatriz).

A'H es igual a la longitud de la circunferencia de una sección recta. En el $\triangle ABA'$: (AB)(A'H) = (A'B)(AM)

$\Rightarrow 10(A'H) = 12(8) \Rightarrow A'H' = \dfrac{48}{5}$

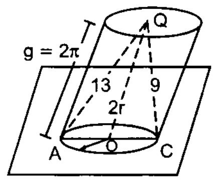
Pero: $A'H = 2\pi r \Rightarrow 2\pi r = \dfrac{48}{5} \Rightarrow r = \dfrac{24}{5\pi}$

Finalmente, el volumen: $V = \pi r^2 AB$

$V = \pi\left(\dfrac{24}{5\pi}\right)^2(10) \quad \therefore\ V = \dfrac{1152}{5\pi}\ cm^3$

6. Hallar el volumen de un cilindro oblicuo, de base circular, sabiendo que la generatriz mide igual que el diámetro de la base y la distancia del centro Q, de una de dichas bases, a los extremos de un diámetro $\overline{AC}$ de la otra, son 9 y 13 cm, respectivamente.

Resolución:



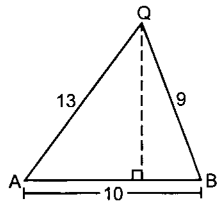
Si "r" es radio de la base: g = 2r

$\Rightarrow QO = g = 2r$ (Q y O: centros).

En el $\triangle AQC$, por el teorema de la mediana:

$(AQ)^2 + (QC)^2 = 2(QO)^2 + \dfrac{(AC)^2}{2}$

$13^2 + 9^2 = 2(2r)^2 + \frac{(2r)^2}{2} \Rightarrow r = 5 \wedge AC = 10$



Luego, para hallar la longitud de la altura h, usamos el teorema de Herón en el $\triangle AQC$:

$p = \frac{13+9+10}{2} = 16$ (semiperímetro)

$h = \frac{2}{10}\sqrt{16(16-13)(16-9)(16-10)}$

$h = \frac{12}{5}\sqrt{14}$

Entonces, el volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h$

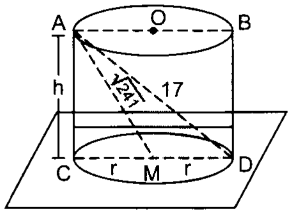
$V = \pi(5^2)\left(\frac{12}{5}\sqrt{14}\right)cm^3 \Rightarrow V = 60\pi(\sqrt{14})\ cm^3$

7. Hallar el área total de un cilindro de revolución, en el cual la diagonal axial mide 17 cm y la distancia de un punto de la circunferencia de una base, al centro de la otra, es $\sqrt{241}$ cm.

Resolución:

$S_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$ ... (1)

Consideremos el gráfico



Si $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros opuestos, se llama diagonal axial del cilindro, a la diagonal del rectángulo ABCD $\Rightarrow$ AD = 17

También, por dato: $AM = \sqrt{241}$

Por el teorema de Pitágoras:

$⊿ACM = h^2 + r^2 = 241$ ... (2)

$⊿ACD = h^2 + 4r^2 = 289$ ... (3)

Restando (3) – (2): $3r^2 = 48 \Rightarrow r = 4$

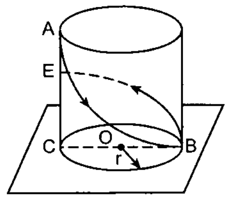
$\Rightarrow h = 15$

Reemplazando en (1): $S_T = 2\pi(4)(15) + 2\pi(4^2)$

$\therefore\ S_T = 152\pi\ cm^2$

8. $\overline{AC}$, es una generatriz del cilindro circular recto de radio "r", en la figura adjunta, $\overline{CB}$, es diámetro. E es un punto de $\overline{AC}$. Hallar la longitud mínima de la trayectoria ABE sobre la superficie lateral del cilindro, sabiendo que $r = \frac{15}{\pi}$; AE = 12 y EC = 8.

Resolución:



Se pide el valor mínimo de la curva ABE.

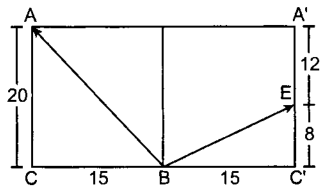
En la figura adjunta, la región rectangular ACC'A', es desarrollo de la superficie lateral del cilindro.

Se tiene: CC' = longitud de la circunferencia de la base.

$CC' = 2\pi r = 2\pi\left(\frac{15}{\pi}\right) = 30$

$\therefore\ CB = BC = 15$

La trayectoria curva $\overset{\frown}{AB}$, sobre la superficie del cilindro, equivale a la longitud del segmento $\overline{AB}$, en el desarrollo.



La trayectoria curva $\overset{\frown}{BE}$, equivale a la longitud del segmento $\overline{BE}$.

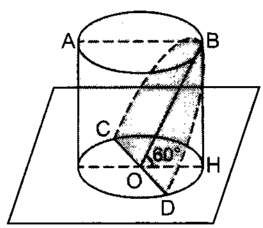
$⊿ACB \Rightarrow (AB)^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow AB = 25$

$⊿BC'E \Rightarrow (BE)^2 = 15^2 + 8^2 \Rightarrow BE = 17$

$\therefore$ AB + BE = 42, es la longitud de la mínima trayectoria de la curva ABE.

9. Hallar el volumen del cilindro circular recto de la figura, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diámetros y $\overline{AB} \perp \overline{CD}$. La sección DBC tiene área $32\pi\ cm^2$ y forma un diedro de 60° con la base.

Resolución:



Se tiene:

$A_{\text{semicírculo CDH}} = (A_{\text{sección DBC}})\cos 60°$

$\boxed{A_{\text{semicírculo CDH}}} = 32\pi \times \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \frac{\pi(OH)^2}{2} = 16\pi \Rightarrow OH = 4\sqrt{2}$

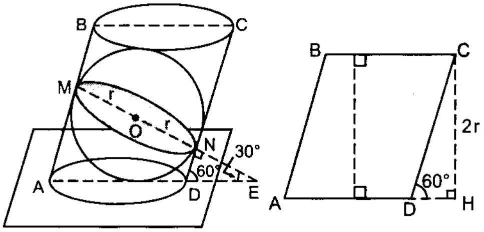
En el $⊿BHO$: $BH = (OH)\sqrt{3} \Rightarrow BH = 4\sqrt{6}$

Entonces, el volumen del cilindro: $V = \pi(OH)^2(BH)$

$V = \pi(4\sqrt{2})^2(4\sqrt{6}) \quad \therefore\ V = 128\pi\sqrt{6}\ cm^3$

10. Un cilindro oblicuo está circunscrito a una esfera de radio "r" y las generatrices están inclinadas 60°, respecto al plano de la base. Hallar:
   - El área lateral del cilindro.
   - El área de cada base.
   - El volumen.

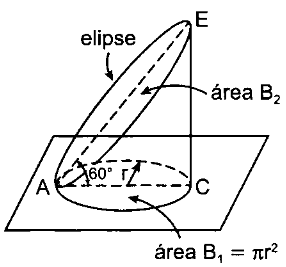
Resolución:



La sección recta es un círculo de radio "r", igual al de la esfera (un círculo máximo de la esfera).
La longitud de la altura del cilindro: CH = 2r
En la sección ABCD:
$\triangle$CHD $\Rightarrow$ $CD = \frac{2}{\sqrt{3}}(CH) \Rightarrow CD = \frac{2}{\sqrt{3}}(2r)$
$\Rightarrow CD = \frac{4}{3}r\sqrt{3}$ (longitud de la generatriz)
Área lateral: $S_L = 2\pi r(CD) = 2\pi r\left(\frac{4}{3}r\sqrt{3}\right) = \frac{8\pi}{3}r^2\sqrt{3}$
Volumen: $V = \pi r^2(CH) = \pi r^2(2r) \Rightarrow V = 2\pi r^3$
Área en bases: El área de una base se encuentra así:
$A_{\text{sección recta}} = (A_{\text{base}})\cos 30°$
$\Rightarrow \pi r^2 = (A_{\text{base}})\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\Rightarrow A_{\text{base}} = \frac{2}{3}\pi r^2\sqrt{3}$

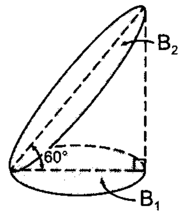
11. En un tronco de cilindro circular recto, la generatriz mínima es nula y los planos de las bases forman un diedro de 60°. Hallar el volumen del sólido, sabiendo que la suma de las áreas de las bases es 48π cm^2.

Resolución:



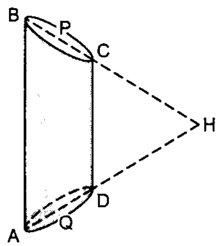
Consideramos el gráfico adjunto:
Generatriz máxima: $\overline{EC}$
m∠EAC = 60°
El volumen pedido: $V = \pi r^2(EC)$ ...(1)

Si r es el radio de la base; en el △ACE, se tiene:
$EC = (AC)\sqrt{3} \Rightarrow EC = 2r\sqrt{3}$ ...(2)

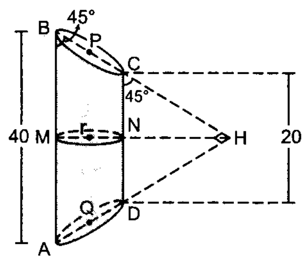


Área de la base circular: $B_1 = \pi r^2$
Para hallar el área de la región elíptica:
$B_1 = B_2\cos 60° \Rightarrow \pi r^2 = B_2\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow B_2 = 2\pi r^2$
Por dato: $B_1 + B_2 = 48\pi$
$\Rightarrow \pi r^2 + 2\pi r^2 = 48\pi \Rightarrow r = 4$ cm
En (2): $EC = 8\sqrt{3}$ cm
En (1): $V = \pi(4)^2 8\sqrt{3} \Rightarrow V = 128\pi\sqrt{3}$ cm^3

12. Hallar el volumen del tronco de cilindro circular recto; si AB = 40; CD = 20; m∠ABC = 45° y m∠BHA = 90° (P y Q: centros).



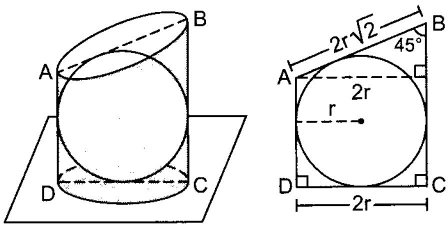
Resolución:



Del gráfico: $\triangle$AHB $\Rightarrow HM = \frac{AB}{2} = \frac{40}{2} = 20$
$\triangle$CHD $\Rightarrow HN = \frac{CD}{2} = \frac{20}{2} = 10$
$\Rightarrow MN = HM - HN \Rightarrow MN = 20 - 10$
$MN = 10 \Rightarrow r = 5$
El volumen del tronco de cilindro será:
$V = (\text{área de la sección recta})\left(\frac{AB + CD}{2}\right)$
$V = \pi r^2\left(\frac{AB + CD}{2}\right) = \pi(5)^2\left(\frac{40 + 20}{2}\right) \quad \therefore V = 750\pi$

13. Hallar el volumen del tronco de cilindro circular recto circunscrito a la esfera de radio "r", sabiendo que el eje $\overline{AB}$ de la elipse, forma un ángulo de 45° con la generatriz máxima $\overline{BC}$.

Resolución:



El radio de la base, es igual al de la esfera: r
El volumen del tronco se evalúa:

$V = (A_{base})\left(\dfrac{AD + BC}{2}\right)$

$\Rightarrow V = (\pi r^2)\left(\dfrac{AD + BC}{2}\right)$ ...(1)

En la sección ABCD, por el teorema de Pitot:

$AD + BC = AB + CD$

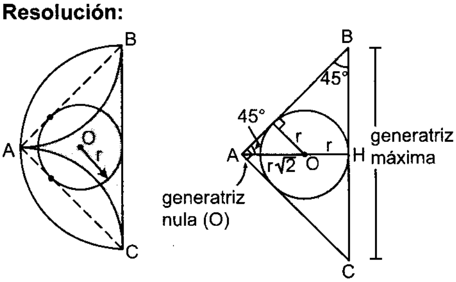
$AD + BC = 2r\sqrt{2} + 2r$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$V = (\pi r^2)\left(\dfrac{2r\sqrt{2} + 2r}{2}\right) \Rightarrow V = \pi r^3(\sqrt{2} + 1)$

14. Hallar el volumen de la cuña cilíndrica circunscrita a la esfera de radio r, siendo $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ ejes de las elipses, AB = AC y $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

Resolución:



En la sección BAC:

$AH = r(\sqrt{2} + 1)$

$BC = 2r(\sqrt{2} + 1) \wedge AH = \dfrac{BC}{2}$

El radio de la sección recta es: $\dfrac{AH}{2}$

Luego, el volumen:

$V = (A_{\text{sección recta}})\left(\dfrac{0 + CB}{2}\right)$

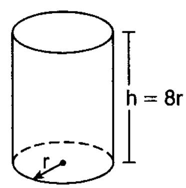
$V = \left[\pi\left(\dfrac{AH}{2}\right)^2\right]\left(\dfrac{BC}{2}\right)$

$V = \pi r^2\left(\dfrac{\sqrt{2} + 1}{2}\right)^2 \dfrac{2r(\sqrt{2} + 1)}{2}$

Efectuando: $V = \dfrac{\pi r^3}{4}(5\sqrt{2} + 7)$

15. Una población con 5000 habitantes consume en promedio por persona 20 litros de agua diariamente. Determinar el radio de un pozo cilíndrico que abastezca a la población y que tenga además capacidad para una reserva del 25% del consumo diario, tal que la altura sea 4 veces el diámetro.

Resolución:



Consumo diario: $5000 \times 20 = 100\,000$ L $= 100$ m^3

Como el pozo debe tener una reserva del 25%,

$\Rightarrow \dfrac{25}{100}(100) = 25$ m^3

El volumen total será:

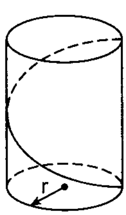
$V = (100 + 25) = 125$ m^3

Luego: $(\pi r^2)8r = 125 \Rightarrow r^3 = \dfrac{125}{8\pi}$

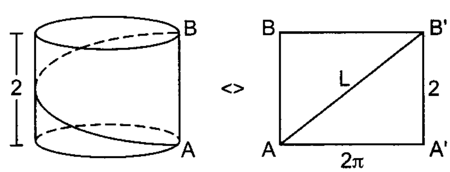
$\therefore r = \dfrac{5}{2\sqrt[3]{\pi}}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. La curva de longitud mínima, trazada de A a B (sobre una misma generatriz) que da una vuelta completa en torno al cilindro recto de radio 1 y altura 2, tiene por medida L. Hallar el valor de L.



Resolución:



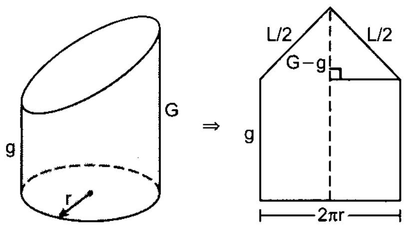
Del gráfico desarrollamos la superficie lateral, a través de la generatriz $\overline{AB}$.

$AA' = 2\pi$

$L^2 = 2^2 + (2\pi)^2 \Rightarrow L^2 = 4 + 4\pi^2 \quad \therefore L = 2\sqrt{1 + \pi^2}$

2. Se tiene un tronco de cilindro circular recto, en el que su volumen es numéricamente igual al valor de su área lateral. Si la diferencia entre las generatrices máxima y mínima del tronco de cilindro es π, hallar la longitud de la elipse que constituye su base superior.

Resolución:



Desarrollamos el tronco de cilindro:

Volumen = $A_{\text{lateral}} \Rightarrow \pi r^2\left(\frac{g+G}{2}\right) = 2\pi r\left(\frac{g+G}{2}\right)$

Se deduce: $r = 2$

Longitud de la circunferencia de la base:

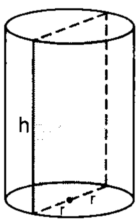
$2\pi r = 2\pi(2) = 4\pi$

$G - g = \pi \Rightarrow$ teorema de Pitágoras:

$\left(\frac{L}{2}\right)^2 = (\pi)^2 + (2\pi)^2 \quad \therefore\ L = 2\pi\sqrt{5}$

3. Hallar el área lateral de un cilindro circular recto, sabiendo que el área de la sección determinada por un plano que contiene al eje, es S.

Resolución:



Observa en la figura que la sección es un rectángulo cuya área es:

$A = (2r)h = 2rh$

Por dato: $2rh = S$

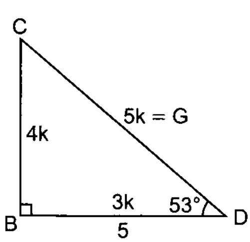
Sabemos que el área lateral del cilindro es:

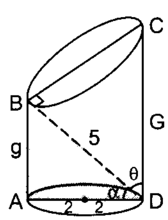
$A_L = (2\pi r)h = \pi(2rh)$

$\therefore\ A_L = \pi S$

4. En un tronco de cilindro recto se tienen las generatrices $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, menor y mayor, respectivamente, siendo $\overline{AD}$ diámetro de la base. Si $\overline{DB} \perp \overline{BC}$, BD = 5 cm y el diámetro de la base es AD = 4 cm. Hallar el área lateral del tronco.

Resolución:





Observa que: $AB = g = 3$

Además: $\alpha = 37° \wedge \theta = 53°$

$3k = 5 \Rightarrow k = 5/3$

Luego: $G = 5\left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow G = \frac{25}{3}$

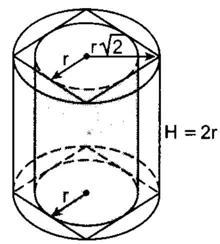
Área lateral:

$A_L = 2\pi r\left(\frac{g+G}{2}\right) = 2\pi(2)\left(\frac{3+\frac{25}{3}}{2}\right)$

$\therefore\ A_L = \frac{68\pi}{3}$

5. En un cubo de volumen V se inscribe y circunscribe dos cilindros de revolución. Calcular el volumen del sólido comprendido entre los cilindros.

Resolución:



Se observa que el radio de la base del cilindro inscrito es "r", entonces el radio de la base del cilindro circunscrito es $r\sqrt{2}$

Volúmenes:

Del cilindro mayor $= \pi(r\sqrt{2})^2(2\rho)$

Del cilindro menor $= \pi(r)^2(2r)$

Diferencia de volúmenes:

$\Delta V = \pi(2r^2)(2r) - \pi(r)^2(2r) \Rightarrow \Delta V = 2\pi r^3$ ...(1)

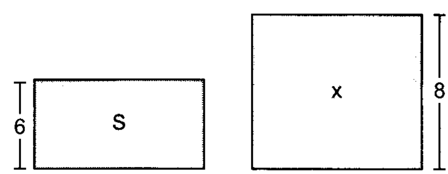
Dato: $V_{\text{cubo}} = V \Rightarrow 8r^3 = V \Rightarrow r^3 = \frac{V}{8}$

Reemplazando en (1):

$\Delta V = 2\pi\left(\frac{V}{8}\right) \quad \therefore\ \Delta V = \frac{\pi V}{4}$

6. Se tiene dos cilindros de revolución semejantes, cuyas alturas miden 6 y 8 respectivamente. Si el área lateral del primer cilindro es 5. Hallar el área lateral del segundo cilindro.

Resolución:

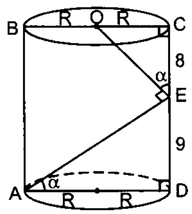


Si los 2 cilindros de revolución son semejantes, se cumple:

$\frac{x}{S} = \left(\frac{8}{6}\right)^2 \quad \therefore\ x = \frac{16}{9}S$

7. $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son las generatrices diametralmente opuestas de un cilindro circular recto, O es punto medio de $\overline{BC}$, E es un punto de $\overline{CD}$, tal que $\overline{OE} \perp \overline{AE}$. Si CE = 8, ED = 9, hallar el área total de la superficie del cilindro.

Resolución:



⊾OCE ~ EDA

$\Rightarrow \dfrac{R}{9} = \dfrac{8}{2R} \Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$

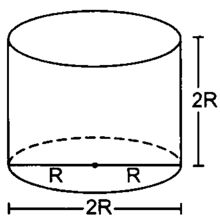
El área total de la superficie del cilindro es:

$S = 2\pi R^2 + (2\pi R)(17)$

$S = 72\pi + 204\pi = 276\pi$

8. Un cilindro de revolución de área total A y radio de la base R es tal que su altura es congruente al diámetro de la base. Hallar el volumen del cilindro.

Revolución:



Por condición del problema:

$A = 2\pi R^2 + (2\pi \mathbf{R})(2R) = 6\pi R^2$ ...(1)

Volumen del cilindro:

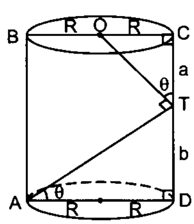
$V = (\pi R^2)(2R) = 2\pi R^3$

$\dfrac{3V}{R} = 6\pi R^2$ ... (2)

De (1) y (2): $\dfrac{3V}{R} = A \quad \therefore V = \dfrac{AR}{3}$

9. En un cilindro de revolución, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos generatrices diametralmente opuestas. Se ubican los puntos O ∈ $\overline{BC}$, T ∈ $\overline{CD}$, tales que $\overline{OB} \cong \overline{OC}$; $\overline{OT} \perp \overline{AT}$; CT = a, TD = b. Hallar el volumen del cilindro.

Resolución:



⊾OCT ~ ⊾TDA

$\Rightarrow \dfrac{R}{b} = \dfrac{a}{2R} \Rightarrow R^2 = \dfrac{ab}{2}$ ...(1)

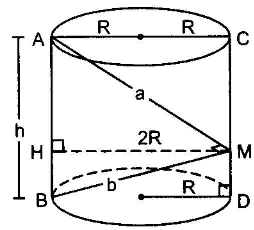
Volumen del cilindro:

$V = \pi R^2(a + b)$ ...(2)

(1) en (2): $\therefore V = \dfrac{\pi ab(a+b)}{2}$

10. En un cilindro de revolución, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son dos generatrices opuestas de modo que $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ son diámetros de las bases, sea M un punto de $\overline{CD}$, tal que; m∠AMB = 90°, AM = a, BM =b, hallar el área lateral del cilindro.

Resolución:



⊾AMB; por relaciones métricas:

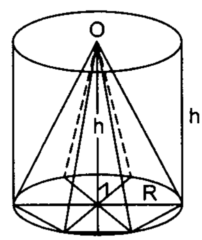
$ab = 2Rh$ ...(1)

$S_L = (2\pi R)h = \pi(2Rh)$ ...(2)

De (1) y (2): $S_L = \pi ab$

11. Una pirámide hexagonal regular está inscrito en un cilindro de revolución, siendo el vértice de la pirámide el centro de una de las bases del cilindro. Calcular la relación de volúmenes.

Resolución:



Volumen de la pirámide:

$V_P = \dfrac{1}{3}(6)\left(\dfrac{R^2\sqrt{3}}{4}\right)h$ ...(1)

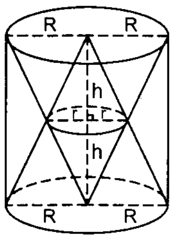
Volumen del cilindro:

$V_C = \pi R^2 h$ ...(2)

(1) ÷ (2): $\dfrac{V_P}{V_C} = \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}$

12. El volumen de un cilindro de revolución es 60. Hallar el volumen de la intersección de dos conos de revolución cuyas bases son las bases del cilindro y los vértices son los centros de las bases opuestas.

Resolución:



Por dato: $\pi R^2(2h) = 60$

$\pi R^2 h = 30$ ...(1)

El volumen de la intersección de dos conos será:

$V = \frac{2}{3}\pi r^2 h$ ...(2)

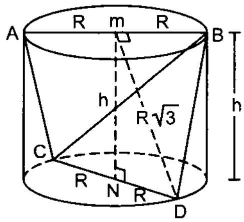
pero: $r = \frac{R}{2}$

En (2): $V = \frac{\pi R^2 h}{6}$ ...(3)

(1) en (3): $V = \frac{30}{6} = 5 \quad \therefore\ V = 5$

13. En un cilindro de revolución se inscribe un tetraedro regular de modo que una de sus aristas es diámetro de una base del cilindro. Hallar la relación de los volúmenes.

Resolución:



⊾DMB:

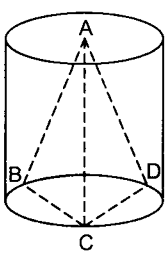
$3R^2 = h^2 + R^2 \Rightarrow h = R\sqrt{2}$

Volumen del tetraedro regular: $V_T = \frac{2}{3}R^3\sqrt{2}$

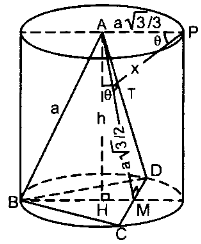
Volumen del cilindro: $V_C = \pi R^3\sqrt{2}$

$\therefore\ \frac{V_T}{V_C} = \frac{2}{3\pi}$

14. A–BCD es un tetraedro regular de arista a, inscrita al cilindro de revolución. Hallar la distancia entre los puntos de la circunferencia de la base superior y una cara lateral del tetraedro.



Resolución:



⊾PTA ~ ⊾AHM

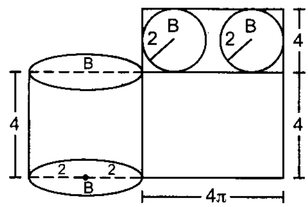
$\Rightarrow \frac{x}{h} = \frac{a\sqrt{3}/3}{a\sqrt{3}/2} \Rightarrow x = \frac{2}{3}h$

Pero: $h = \frac{a\sqrt{6}}{3} \quad \Rightarrow x = \frac{2}{3}\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)$

$\therefore\ x = \frac{a\sqrt{24}}{9}$

15. Se desea elaborar un cilindro de revolución cuya base tenga área 4π y la longitud de la generatriz igual al diámetro de la base, calcular el área mínima de una superficie rectangular de una cartulina que servirá para el desarrollo del cilindro (considerar el mínimo desperdicio).

Resolución:

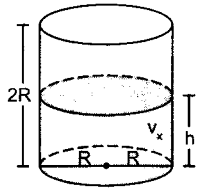


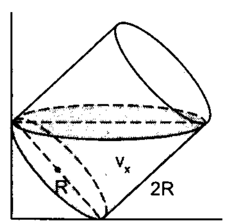
La figura muestra la región rectangular mínima que se debe tener para obtener el cilindro respectivo con un desperdicio mínimo.

$A_{\square} = 4\pi(4 + 4) \quad \therefore\ A_{\square} = 32\pi$

16. Un vaso de forma cilíndrica en el cual la altura es igual al diámetro de la base, contiene un líquido de volumen V. Si al inclinar el vaso un ángulo que vale 45° el líquido está por derramarse, cuál es el máximo volumen de líquido que puede contener.

Resolución:





$V_x = \pi R^2 h \qquad V_x = \pi R^2(\text{Eje})$

$V_x = \pi R^2(R)$

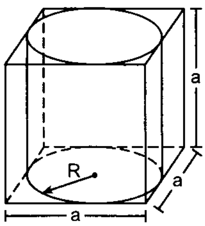
$\Rightarrow \pi R^2 h = \pi R^2 R \Rightarrow h = R$

$\therefore$ El recipiente puede contener el doble de la cantidad de líquido que había inicialmente.

17. Si un cilindro está inscrito en un cubo, hallar:

$$\frac{\text{Volumen del cilindro}}{\text{Volumen del cubo}}$$

Resolución:



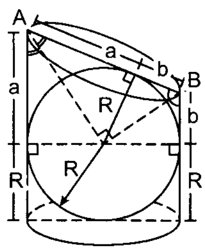
$$E = \frac{V_{cilindro}}{V_{cubo}}$$

Notamos que: $R = \frac{a}{2}$

$$E = \frac{\pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 a}{a^3} \quad \therefore\ E = \frac{\pi}{4}$$

18. La esfera inscrita en un tronco de cilindro circular recto, determina un punto de tangencia en el eje mayor de la elipse de una base y dos segmentos de longitudes a y b. Determinar el eje del tronco.

Resolución:



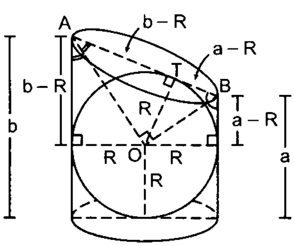
$$\text{Eje} = \frac{a + R + b + \mathbf{R}}{2} = \frac{a+b}{2} + R$$

⊾OAB: $R^2 = ab \Rightarrow R = \sqrt{ab}$

$$\therefore\ \text{Eje} = \frac{a+b}{2} + \sqrt{ab}$$

19. En un tronco de cilindro recto se inscribe una esfera. Si las longitudes de las generatrices menor y mayor del tronco son a y b, hallar el volumen del sólido limitado por el tronco de cilindro recto.

Resolución:



$$V_{\text{tronco cilindro}} = V_x = (\text{Base})(\text{Eje})$$

$$\text{Eje} = \frac{a+b}{2}$$

⊾OAB: $R^2 = (a - R)(b - r) \Rightarrow R = \frac{ab}{a+b}$

$$V_x = \pi R^2(\text{Eje}) = \pi\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

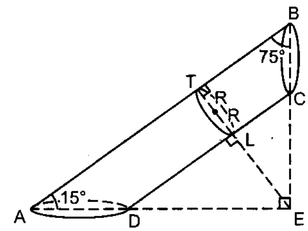
$$\therefore\ V_x = \frac{\pi a^2 b^2}{2(a+b)}$$

20. Sea un tronco de cilindro oblicuo cuyas generatrices son $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, tal que $(AB)^2 - (CD)^2 = 32$ cm^2. La generatriz AB hace con las bases inferior y superior ángulos cuyas medidas son 15° y 75° respectivamente. Hallar el área lateral (en cm^2).

Resolución:

Dato: $(AB)^2 - (CD)^2 = 32$

⊾BEA: $ET = \frac{AB}{4}$



⊾DEC: $LE = \frac{CD}{4}$; $2R = ET - LE$

$$\Rightarrow R = \frac{AB - CD}{8}$$

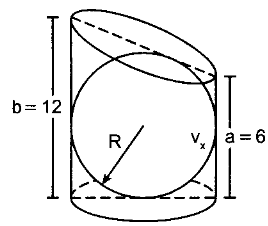
$$A_{SL} = 2\pi R(\text{Eje}) = 2\pi\left(\frac{AB - CD}{8}\right)\left(\frac{AB + CD}{2}\right)$$

$$A_{SL} = \frac{\pi}{8}[(AB)^2 - (CD)^2] = \frac{\pi}{8}(32)$$

$$\therefore\ A_{SL} = 4\pi$$

21. Se tiene un tronco de cilindro de revolución circunscrito a una esfera, la generatriz mayor mide 12 m y la generatriz menor mide 6 m. Hallar el volumen del tronco de cilindro (en m^3).

Resolución:



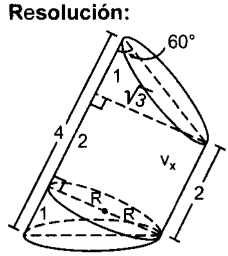
Sea: $V_x = \frac{\pi a^2 b^2}{2(a+b)}$

$$V_x = \frac{\pi(6^2)(12^2)}{2(6+12)}$$

$$\therefore\ V_x = 144\pi$$

22. Los ejes mayores de las regiones elípticas que son las bases de un tronco de cilindro oblicuo de sección recta circular, determinan con la generatriz máxima un triángulo equilátero. Si las dos generatrices extremas miden 4 y 2, calcular el volumen del tronco de cilindro.

Resolución:



$$V_x = A_{SR}(\text{Eje})$$

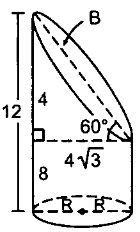
$$2R = \sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$V_x = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2(3)$$

$$\therefore\ V_x = \frac{9\pi}{4}$$

23. La cara superior de un tronco de cilindro recto determina con la base un ángulo diedro que vale 60°. Si las generatrices máxima y mínima miden 12 y 8. Calcular la relación entre el área lateral y el área de la cara superior.

Resolución:



$E = \dfrac{A_{SL}}{B}$

$2R = \dfrac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{Eje} = \dfrac{12+8}{2} = 10$

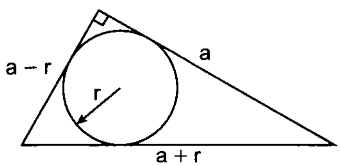
$B\cos 60° = \pi R^2 \Rightarrow B = 2\pi R^2$

$E = \dfrac{2\pi R\,(\text{Eje})}{2\pi R^2} = \dfrac{(\text{Eje})}{R} = \dfrac{10}{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$

$\therefore\ E = 5\sqrt{3}$

24. Los tres lados de un triángulo rectángulo están en progresión aritmética, siendo el perímetro del triángulo 90 m. Calcular el volumen del cilindro de revolución de 10 m de altura, cuya base es el círculo inscrito en el triángulo rectángulo.

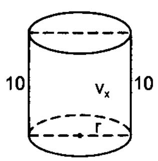
Resolución:



$a - r + a + a + r = 90 \Rightarrow a = 30$

$(a + r)^2 = a^2 + (a - r)^2 \Rightarrow r = \dfrac{15}{2}$

Por Poncelet: $a + a - r = a + r + 2R \Rightarrow R = \dfrac{15}{2}$



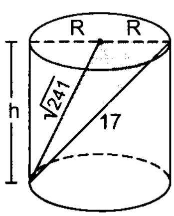
$\Rightarrow V_x = \pi R^2(10)$

$V_x = \pi\left(\dfrac{15}{2}\right)^2(10)$

$\therefore\ V_x = \dfrac{1125\pi}{2}$

25. En un cilindro recto de revolución, la diagonal de su sección axial mide 17 y la distancia de un punto de la circunferencia de la base al centro de la base opuesta es $\sqrt{241}$. Calcular el área total del cilindro.

Resolución:



Por Euclides:

$17^2 = 241 + 4R^2 - R^2 \Rightarrow R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$

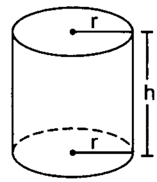
El área total del cilindro será:

$S = 2\pi R^2 + (2\pi R)h$

$S = 32\pi + 120\pi \Rightarrow S = 152\pi$

26. De todos los cilindros de revolución de área total igual a $2\pi a^2$. Hallar el volumen máximo del cilindro.

Resolución:



Por condición del problema:

$2\pi r^2 + (2\pi r)h = 2\pi a^2$

$h = \dfrac{a^2 - r^2}{r}$ ...(1)

Volumen del cilindro:

$V = \pi r^2 h$ ...(2)

(1) en (2): $V = \pi r^2\left(\dfrac{a^2 - r^2}{r}\right) \Rightarrow V = \pi a^2 r - \pi r^3$

El volumen del cilindro será máximo, cuando la derivada de V sea igual a cero:

$V' = \pi a^2 - 3\pi r^2 = 0$

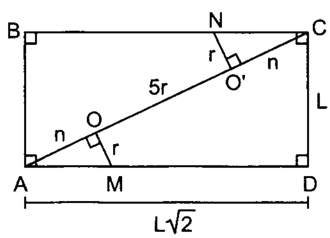
$r = \dfrac{a}{\sqrt{3}} \Rightarrow h = \dfrac{2}{3}a\sqrt{3}$

Luego: $V = \pi\left(\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}a\sqrt{3}\right) \quad \therefore\ V = \dfrac{2}{9}\sqrt{3}\,\pi a^3$

27. Se inscribe un cilindro de revolución en un hexaedro regular de arista L de modo que el eje del cilindro este contenido en una diagonal del hexaedro. Hallar el volumen del cilindro si su altura y su radio están en la relación de 5 a 1.

Resolución:

En su plano diagonal:



$⊿AOM \sim ⊿CO'N$

$\Rightarrow \dfrac{r}{L} = \dfrac{n}{L\sqrt{2}} \Rightarrow n = r\sqrt{2}$

$⊿CDA$; por Pitágoras

$(2r\sqrt{2} + 5r)^2 = L^2 + (L\sqrt{2})^2$

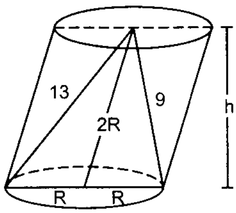
De donde: $r = \dfrac{L\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{2}}$

El volumen del cilindro será: $V = \pi r^2(5r) = 5\pi r^3$

$V = 5\pi\left(\dfrac{L\sqrt{3}}{5 + 2\sqrt{2}}\right)^3 \quad \therefore\ V = \dfrac{15\pi L^3\sqrt{3}}{(5 + 2\sqrt{2})^3}$

28. Se tiene un cilindro oblicuo de base circular en el cual la generatriz mide igual al diámetro de la base y la distancia del centro de una de las bases a los extremos del diámetro contenido en la otra base miden 9 y 13. Calcular el volumen del cilindro.

Resolución:



Por teorema de la mediana:

$$13^2 + 9^2 = 2(2R)^2 + \frac{(2R)^2}{2} \Rightarrow R = 5$$

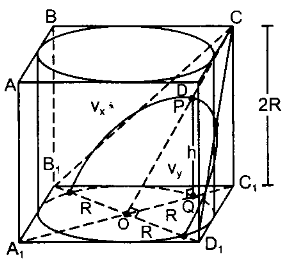
Por Herón: $h = \frac{12}{5}\sqrt{14}$

Volumen del cilindro oblicuo: $V = \pi R^2 H$

$$V = \pi(5)^2\left(\frac{12}{5}\sqrt{14}\right) \quad \therefore\ V = 60\pi\sqrt{14}$$

29. En un hexaedro regular $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ se inscribe un cilindro recto de tal manera que sus bases están inscritas en las caras ABCD y $A_1B_1C_1D_1$. Determinar en que razón queda dividido el volumen del sólido limitado por el cilindro al trazar el plano CB_1D_1.

Resolución:



V_y = volumen de la uña $= \frac{2}{3}R^2h$

$$V_x = \pi R^2(2R) = \frac{2}{3}R^2h \qquad \ldots(1)$$

$\triangle OCC' \sim \triangle OPQ$

$$\Rightarrow \frac{h}{2R} = \frac{R}{R\sqrt{2}} \Rightarrow h = R\sqrt{2} \qquad \ldots(2)$$

(2) en (1):

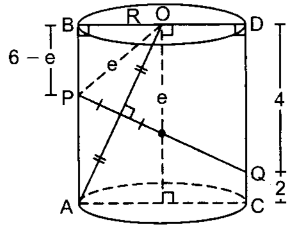
$$V_x = 2R^3\left(\pi - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\text{Luego: } \frac{V_x}{V_y} = \frac{2R^3\,\frac{(3\pi - \sqrt{2})}{3}}{\frac{2}{3}R^2(R\sqrt{2})}$$

$$\therefore\ \frac{V_x}{V_y} = \frac{3\pi - \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

30. En un cilindro de revolución, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son generatrices, O es el centro de la base de diámetro $\overline{BD}$, el plano mediatriz de $\overline{AO}$, determinar en $\overline{CD}$ segmentos que miden 2 y 4 respectivamente. Hallar el volumen del tronco de cilindro recto formado por el eje mayor.

Resolución:



$$e = \frac{6 - e + 4}{2} \Rightarrow e = \frac{10}{3}$$

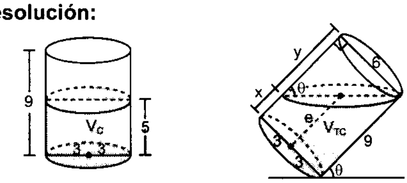
$$\triangle PBO: \left(\frac{10}{3}\right)^2 = R^2 + \left(6 - \frac{10}{3}\right)^2 \Rightarrow R = 2$$

El volumen del tronco de cilindro es: $V = \pi R^2 e$

$$V = \pi(2)^2\left(\frac{10}{3}\right) \quad \therefore\ V = \frac{40\pi}{3}$$

31. Un recipiente cilíndrico de 9 de altura y 3 de radio se llena de agua hasta una altura de 5. ¿Qué ángulo se debe inclinar el cilindro para que el agua llegue al borde del cilindro?

Resolución:



$$V_C = \pi(3)^2(5) \Rightarrow V = 45\pi \ \ldots(1)$$

$$V_{TC} = \pi(3)^2(e) = 9\pi\left(\frac{x+9}{2}\right) \qquad \ldots(2)$$

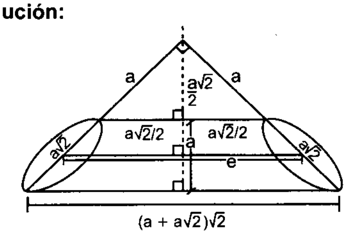
$$(1) = (2):\ 45\pi = 9\pi\left(\frac{x+9}{2}\right)$$

$10 = x + 9 \Rightarrow x = 1 \wedge y = 8$

Luego: $\tan\theta = 6/8 \Rightarrow \tan\theta = 3/4 \quad \therefore\ \theta = 37°$

32. Las bases de un tronco de cilindro oblicuo son regiones elípticas congruentes cuyos ejes mayores miden $a\sqrt{2}$. Si estas bases están contenidas en planos perpendiculares y la generatriz menor del tronco mide también $a\sqrt{2}$ calcular el volumen de este sólido.

Resolución:



De la figura: $V = \pi\left(\frac{a}{2}\right)^2 e$ ...(1)

Pero: $e = \dfrac{a\sqrt{2} + (a + a\sqrt{2})\sqrt{2}}{2}$

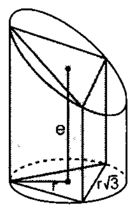
$e = a(\sqrt{2} + 1)$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1): $V = \pi\left(\frac{a^2}{4}\right)(a)(\sqrt{2} + 1)$

$\therefore\ V = \frac{\pi a^3}{4}(1 + \sqrt{2})$

33. Se tiene un tronco de cilindro recto circunscrito a un tronco de prisma recto triangular regular, si las bases de los sólidos están contenidos en los mismos planos, hallar la relación entre sus volúmenes.

Resolución:



Sea:

V_{TP}: volumen del tronco de prisma

V_{TC}: volumen del tronco de cilindro

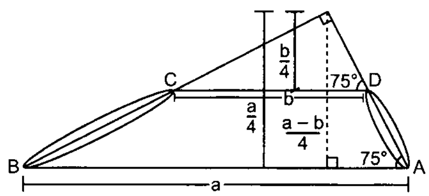
A_B: área de la base del prisma

Sabemos que: $V_{TP} = A_B e$; $V_{TC} = \pi r^2 e$

Luego: $\dfrac{V_{TC}}{V_{TP}} = \dfrac{\pi r^2 e}{(r\sqrt{3})^2 \frac{\sqrt{3}}{4} e} = \dfrac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

34. Se tiene un tronco de cilindro de bases elípticas, la generatriz máxima $\overline{AB}$ hace con sus bases ángulos cuyas medidas son 15° y 75°, si la generatriz mínima es $\overline{CD}$ y $(AB)^2 - (CD)^2 = 64$, hallar el área lateral.

Resolución:



$A_L = 2\pi R\left(\frac{a + b}{2}\right)$

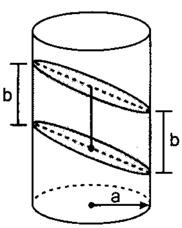
$\Rightarrow A_L = 2\pi\left(\frac{a - b}{8}\right)\left(\frac{a + b}{2}\right) \Rightarrow A_L = \pi\left(\frac{a^2 - b^2}{8}\right)$

Por dato: $a^2 - b^2 = 64$

Reemplazando: $A_L = \pi\left(\frac{64}{8}\right)$ $\quad\therefore\ A_L = 8\pi$

35. Hallar el volumen del cilindro oblicuo que se obtiene al trazar dos planos paralelos oblicuos a las generatrices de un cilindro recto, el radio de la base del cilindro recto mide "a" y la generatriz del cilindro oblicuo obtenido mide "b".

Resolución:



Volumen del cilindro oblicuo:

$V = \pi R^2 b$

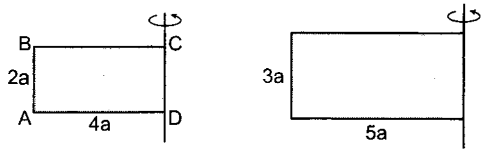
Pero: $R = a$

Reemplazando: $V = \pi(a)^2(b)$

$\therefore\ V = \pi a^2 b$

36. La región rectangular ABCD gira alrededor de la recta CD, una vuelta completa generando un sólido de revolución, cuyo volumen es V. Si $\overline{AB}$ se incrementa en 50% y $\overline{BC}$ en un 25%, ¿en qué porcentaje se incrementa este volumen?

Resolución:



$V_1 = 32\pi a^3$ $\qquad$ $V_2 = 75\pi a^3$

Luego: $V_2 = 32\pi a^3 + 43\pi a^3$

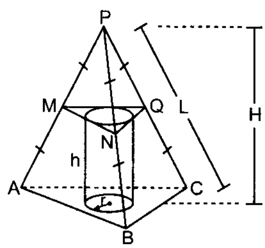
Ahora: $32\pi a^3 \to 100\%$

$43\pi a^3 \to x$

$\therefore$ Incremento: $x = 134\%$

37. En un tetraedro regular P-ABC, la arista mide L, se ubican los puntos medios M; N y Q de las aristas $\overline{PA}$; $\overline{PB}$ y $\overline{PC}$, respectivamente. Se dibuja un cilindro de revolución en el interior del tetraedro de modo que una base este inscrita en el triángulo MNQ y la otra base contenida en la cara ABC, hallar el volumen del cilindro.

Resolución:



Como P−ABC es tetraedro regular se obtiene que:

$H = \frac{1}{3}\sqrt{6}$ $\qquad$ ...(1)

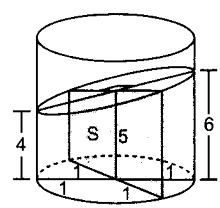
$\Rightarrow h = \frac{1}{6}\sqrt{6}$ $\qquad$ ...(2)

$A_{\triangle MNQ} = \left(\frac{L}{2}\right)^2\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = 3\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right) \Rightarrow r = \frac{L}{12}\sqrt{3}$

Luego: $V = \pi\left(\frac{L\sqrt{3}}{12}\right)^2\left(\frac{L\sqrt{6}}{6}\right)$ $\quad\therefore\ V = \dfrac{\pi L^3(\sqrt{6})}{288}$

38. Al trazar un plano secante a un cilindro recto de revolución cuya base es un círculo cuyo radio mide 1, se obtiene un tronco de cilindro cuyas generatrices menor y mayor miden 4 y 6, respectivamente. Hallar, el área mínima de la sección axial.

Resolución:



Sea S el área mínima de la sección axial

Mediana del trapecio:

$\dfrac{4 + 6}{2} = 5$

$\Rightarrow S = (2)(5) = 10$

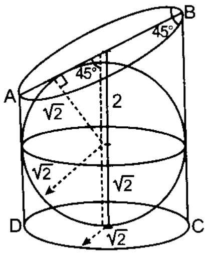
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - I)

Un tronco de cilindro circular recto se encuentra circunscrito a una esfera de radio $r = \sqrt{2}$ cm, el eje $\overline{AB}$ de la elipse forma un ángulo de 45° con la generatriz máxima $\overline{BC}$. Calcule el volumen (en cm^3) del tronco de cilindro.

A) $2\pi(2+\sqrt{2})$ B) $2\pi(1+\sqrt{2})$ C) $\pi(2+\sqrt{2})$
D) $2\pi(2-\sqrt{2})$ E) $2\pi(\sqrt{2}-1)$

Resolución:



$V_{\text{tronco cilindro}} = \pi(\sqrt{2})^2(\text{eje}) = \pi(2)(2+\sqrt{2})$

$\therefore\ V_{\text{tronco cilindro}} = 2\pi(2+\sqrt{2})$

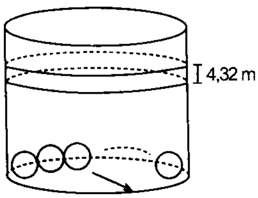
Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

En un depósito cilíndrico de radio 5 m que contiene cierta cantidad de agua; se introducen 24 bolas esféricas de igual radio. Si el nivel del agua se incrementa en 4,32 m entonces el diámetro (en m) de las bolas es:

A) 3,0 B) 3,2 C) 3,4
D) 3,6 E) 3,8

Resolución:



Volumen del cuerpo sumergido = Volumen del líquido desplazado

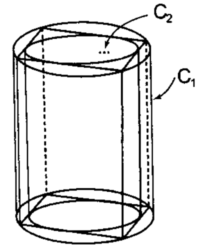
$24\left(\frac{4}{3}\right)\pi r^3 = \pi(5^2)(4{,}32) \Rightarrow r = \frac{3}{2}$

Nos piden: diámetro = 3,0

Clave: A

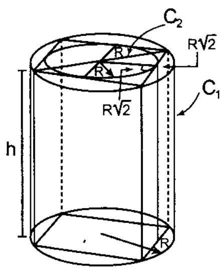
PROBLEMA 3 (UNI 2011 - II)

En la figura, C_1 es un cilindro circular recto de radio R y altura h. Si en C_1 se inscribe un prisma regular cuadrangular y luego en este prisma se inscribe un cilindro circular recto C_2 y así se repite el proceso obteniendo los cilindros C_3, C_4, C_5,... Si el cilindro C_{21} es tal que su área total es 3 veces su área lateral, entonces el área lateral de C_1 es:



A) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{40}}$ B) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{30}}$ C) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{20}}$
D) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{15}}$ E) $\frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{10}}$

Resolución:



Por inducción: $R_1 = R$

$R_2 = \frac{R}{\sqrt{2}}$; $R_3 = \frac{R}{(\sqrt{2})^2} \Rightarrow R_n = \frac{R}{(\sqrt{2})^{n-1}}$

$\Rightarrow R_{21} = \frac{R}{(\sqrt{2})^{20}}$ ...(1)

Por condición y ser semejantes: $S_T = 3S_L$

$2\pi(R_{21})(h+R) = 3(2\pi R_{21}h) \Rightarrow R_{21} = 2h$

$h = \frac{R_{21}}{2}$ ...(2)

Piden: $S_L = 2\pi Rh$ ...(3)

(1), (2) en (3): $S_L = 2\pi R\frac{R_{21}}{2} = \pi R\frac{R}{(\sqrt{2})^{20}}$

$S_L = \frac{\pi R^2}{(\sqrt{2})^{20}}$

Clave: C

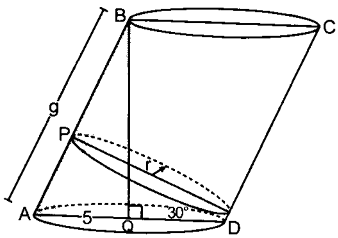
PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

El volumen de un cilindro oblicuo es 40π cm^3 y la proyección de su generatriz sobre el plano de la base mide 5 cm. Si el radio de su sección recta mide 2 cm, calcule el área de la base en cm^2.

A) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ B) $\frac{4\pi}{\sqrt{3}}$ C) $\frac{6\pi}{\sqrt{3}}$

D) $\frac{8\pi}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{10\pi}{\sqrt{3}}$

Resolución:



Piden: A_{base}

$V = \pi r^2 g \Rightarrow 40\pi = \pi 2^2 g \Rightarrow g = 10$

$\triangle ABQ$: notable (30° y 60°) $\Rightarrow A_{SR} = A_{base}(\cos 30°)$

$\Rightarrow \pi 2^2 = A_{base}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore A_{base} = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}$

Clave: D

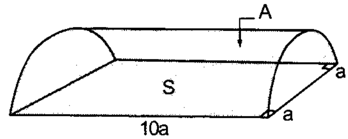
PROBLEMA 5 (UNI 2013 - I)

Un stand de una feria de libros tiene un piso rectangular de 2880 m^2 y el techo tiene una forma semicilíndrica. ¿Cuántos m^2 de lona se necesitarían para el techo, si el largo del stand es el quíntuple del ancho?

A) 1240π B) 1340π C) 1440π

D) 1540π E) 1640π

Resolución:



Piden: $A_{semicilíndrica}$

$S = 10a(2a) = 20a^2 = 2880 \Rightarrow a = 12$

$A_{semicilíndrica} = \pi Rg = \pi(a)(10a)$

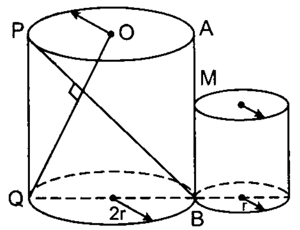
$A_{semicilíndrica} = 10\pi a^2 = 10\pi(12)^2$

$A_{semicilíndrica} = 1440\pi$

Clave: C

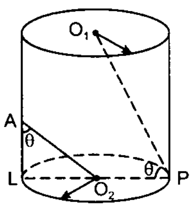
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En el gráfico se muestra dos cilindros de revolución. Si AM = MB y (PB)(OQ) = 12, calcular la diferencia de áreas de las superficies laterales.



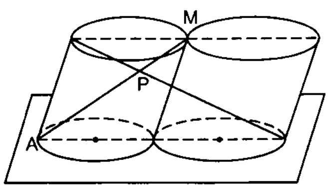
A) 6π B) 2π C) 3π D) 4π E) 5π

2. Del gráfico mostrado se sabe que $(O_1A)^2 - (AL)^2 = 18$. Si $O_1P = 4\sqrt{2}$, calcular el área de la superficie lateral del cono de revolución mostrado.



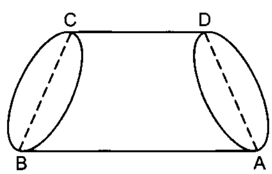
A) 24π B) 12π C) $10\sqrt{7}\pi$ D) 15π E) $12\sqrt{7}\pi$

3. En el gráfico se muestra dos cilindros oblicuos. Si AP = 3(PM), calcular la razón de volúmenes de los cilindros.



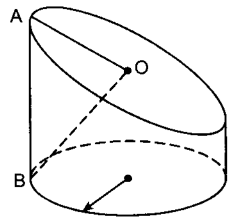
A) 1 B) 1/4 C) 1/3 D) 2/3 E) 2/5

4. Según el gráfico, AB = 16, BC = AD, CD = 8 y m∠BAD = 45°. Calcular el volumen del tronco de cilindro oblicuo de bases perpendiculares y sección recta circular.



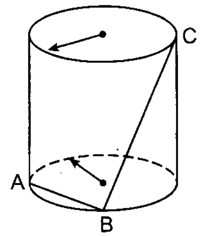
A) 40π B) 42π C) 45π
D) 48π E) 49π

5. En el tronco de cilindro recto mostrado, O es centro de la base superior, AB = 14, BO = 15 y AO = 13. Calcular el área de la superficie lateral del tronco de cilindro.



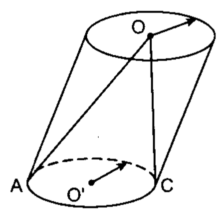
A) 256π B) 228π C) 216π
D) 253π E) 226π

6. En el gráfico se muestra un cilindro equilátero. Si $(AB)^2 + (BC)^2 = 2$, calcular el volumen del cilindro.



A) $\frac{\pi}{4}$ B) $\frac{2\pi}{3}$ C) $\frac{3\pi}{4}$
D) $\frac{4\pi}{3}$ E) $\frac{5\pi}{4}$

7. Del gráfico, $OO' = 2\sqrt{37}$, AO = 15, se sabe que OC = 13. Calcular el volumen del cilindro.

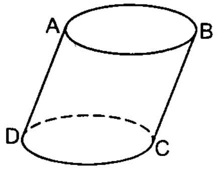


A) 568π B) 858π C) 548π
D) 588π E) 578π

8. En un cilindro de revolución se inscribe un tetraedro regular, donde una arista es generatriz. Calcular la razón entre sus volúmenes.

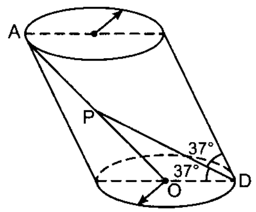
A) $\frac{27}{4}\sqrt{2}\pi$ B) $\frac{27}{19}\sqrt{2}\pi$ C) $\frac{27}{32}\sqrt{2}\pi$
D) $\frac{16}{9}\sqrt{2}\pi$ E) $\frac{27}{16}\sqrt{2}\pi$

9. En el gráfico se muestra un cilindro oblicuo de sección recta circular. Si DC = 13, BC = 14 y AC = 15, calcular el volumen del cilindro.



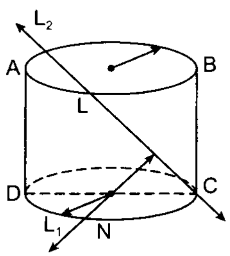
A) 504π B) 508π C) 680π
D) 684π E) 700π

10. Se muestra en el gráfico un cilindro oblicuo. Si AP = PO y PD = 24, calcular el volumen del cilindro.



A) 2880π B) 1500π C) 3000π
D) 3240π E) 3500π

11. En el gráfico se muestra un cilindro equilátero, además, $m\widehat{LB} = 2(m\widehat{AL})$ y $m\widehat{ND} = m\widehat{NC}$. Si la distancia entre L_1 y L_2 es 8, calcular el volumen del cilindro.

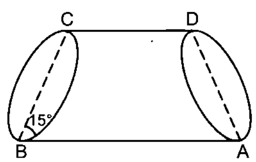


A) 3800π B) 4000π C) 2000π
D) 5000π E) 2200π

12. En un tronco de cilindro oblicuo, los ejes mayores de las bases miden 13 y 15, respectivamente. Si las generatrices miden 18 y 4, calcular el volumen del tronco de sección recta circular.

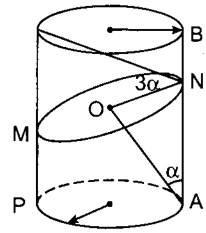
A) 376π B) 396π C) 426π
D) 384π E) 418π

13. En el gráfico, $(AB)^2 - (CD)^2 = 64$. Calcule el área de la superficie lateral del tronco de cilindro oblicuo de bases perpendiculares y sección recta circular.



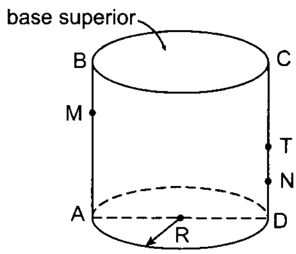
A) 64π B) 12π C) 32π
D) 16π E) 8π

14. En la figura se muestra un cilindro de revolución en el cual se ha trazado un plano secante, O es punto medio de $\overline{MN}$. Si $\overline{AO}$ es perpendicular a dicho plano y (PM)(BN) = 36, calcular la razón entre el volumen y el área de la superficie lateral del tronco de cilindro inferior.



A) 1,5 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

15. En la figura se muestra un cilindro de revolución, una araña se encuentra en T y dos insectos en M y N, dicha araña se dirige desde T hacia A utilizando el menor recorrido posible deteniéndose en un punto de ese recorrido, tal que, la distancia hacia S, M y N son iguales. Si BM = ND = IN = 1, CT = TD y R = $2/\pi$ Determinar a qué distancia de la base superior se encuentra en ese instante.



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{7}$ C) $\frac{4}{5}$

D) $\frac{5}{6}$ E) $\frac{10}{11}$

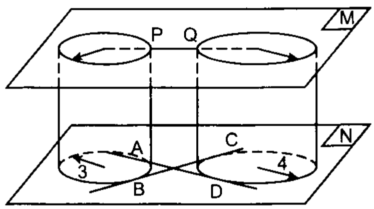
16. En un cilindro circular recto se traza un plano secante perpendicular a su base, dicho plano determina en el cilindro una región cuadrada de 36 m^2 de área y divide a su superficie lateral en dos partes cuyas áreas están en la razón de uno a cinco. Calcular el volumen el cilindro.

A) 616π m^3 B) 214π m^3 C) 230π m^3
D) 216π m^3 E) 108π cm^3

17. En un cilindro circular recto se ubican los puntos P y Q en 2 generatrices diametralmente opuestas y los puntos A, B, C y D. En circunferencias que limitan las bases tal que, PAB y QCD sean reglones triangulares equiláteras contenidas ambas en planos paralelos. Si P divide a la generatriz en dos segmentos cuya razón es 3, calcular la razón de volúmenes del cilindro circular recto y el cilindro que tiene como bases los círculos inscritos en dichas regiones triangulares equiláteras (ambas bases determinan un diedro de 45° de medida)

A) $\frac{18}{13}$ B) $\frac{15}{13}$ C) $\frac{7}{2}$
D) $\frac{25}{12}$ E) $\frac{28}{15}$

18. En el gráfico, se muestran ios cilindros de revolución, si A, B, C y D son puntos de tangencia y PQ = 7; calcular $\overline{BD}$.



A) $\sqrt{39}$ B) $\sqrt{59}$ C) $\sqrt{37}$
D) $\sqrt{111}$ E) 17

19. En la base de cilindro de revolución se inscribe un cuadrado ABCD; luego se trazan las generatrices $\overline{AM}$ y $\overline{BN}$. Calcular la razón de volúmenes del cilindro y del sólido MADNBC.

A) $\frac{\pi}{3}$ B) 2π C) π D) 4π E) 3π

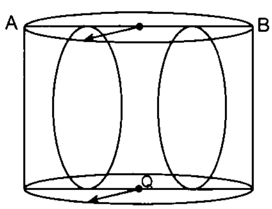
20. Las bases de un cilindro de revolución están inscritas en las bases de un prisma cuadrangular regular, donde la longitud de la arista lateral es cuatro veces la longitud de su arista básica. Si la diagonal del prisma determina los puntos M y N en la superficie cilíndrica, MN = 3. Calcular el volumen del cilindro.

A) π B) 2π C) $\frac{\pi}{2}$ D) $\pi\sqrt{10}$ E) 3π

21. En un cilindro de revolución se ubica el punto medio M de una generatriz $\overline{AB}$, si $\overline{BC}$ es el diámetro de una base y O es el centro de la otra base. Calcular el volumen de dicho cilindro, si la m∠OMC = 90° y OM = $2\sqrt{3}$

A) $16\pi\sqrt{2}$ B) $8\pi\sqrt{2}$ C) $12\pi\sqrt{2}$
D) $24\pi\sqrt{2}$ E) $18\pi\sqrt{2}$

22. Del gráfico, los cilindros son de revolución y el pequeño es un cilindro equilátero, sus bases se encuentran fijas a la superficie lateral. Si la razón de sus volúmenes es de 1 a $\sqrt{2}$, calcular m∠AOB.

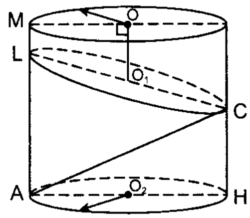


A) 60° B) 53° C) 127°
D) 90° E) 120°

23. Se tiene un cilindro de revolución y en el se inscribe un hexaedro de menor volumen en el cual dos de sus vértices son los centros de las bases del cilindro y todas sus aristas son de longitud "a", calcular el volumen del cilindro.

A) $\frac{2}{3}\sqrt{6}\,a^3\pi$ B) $\frac{2}{9}\sqrt{3}\,a^3\pi$ C) $\frac{4}{3}a^3\pi$
D) $\frac{2}{9}\sqrt{6}\,a^3\pi$ E) $\frac{2}{3}a^3\pi$

24. Según el gráfico, OO_1 = 8, AH = 6 y la medida del diedro determinado por la base del cono y la base del cilindro de revolución es 53°. Si AL = 4(ML), calcular el volumen del cono mostrado.



A) 12π B) 24π C) 36π
D) 48π E) 56π

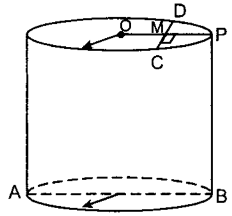
25. Los centros de las bases de un cilindro de revolución son vértices de un tetraedro regular y los otros dos vértices se encuentran sobre la superficie lateral del cilindro. Calcular la razón entre las áreas de las superficies de dichos sólidos.

A) $\frac{\pi}{2}(2+\sqrt{3})$ B) $\frac{2\pi}{3}(\sqrt{3}+1)$ C) $3\pi(\sqrt{3}+2)$
D) $2\pi/3$ E) $3\pi/2$

26. Las áreas de las superficies laterales de dos cilindros semejantes son 24 y 18. Si el volumen del cilindro mayor es 18, calcular el volumen del otro cilindro.

A) $5\sqrt{3}$ B) $6\sqrt{3}$ C) $7\sqrt{3}$
D) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$ E) $\frac{25\sqrt{3}}{3}$

27. Según el gráfico; OM = MP. Calcular la razón entre los volúmenes del sólido ABCD y el cilindro de revolución. ($\overline{PB}$: Generatriz)

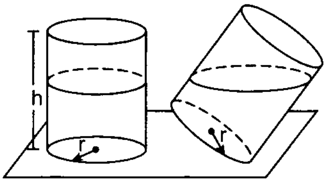


A) $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ B) $\frac{\sqrt{3}}{2\pi}$ C) $\frac{\sqrt{3}}{3\pi}$ D) $\frac{\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{\sqrt{3}}{5\pi}$

28. En un hexaedro regular ABCD–EFGH se inscribe un cilindro de revolución cuyas bases se encuentran en los triángulos AFH y BDG. Si AB = $3\sqrt{2}$, calcular el volumen de dicho cilindro.

A) $2\pi\sqrt{3}$ B) $\pi\sqrt{3}$ C) $3\pi\sqrt{6}$
D) $2\pi\sqrt{2}$ E) $\pi\frac{\sqrt{6}}{3}$

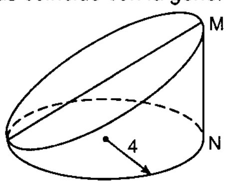
29. Según el gráfico, se tiene un vaso en forma de cilindro circular recto y su posición cuando se inclina un ángulo de medida α. Si el vaso contiene agua una altura h, calcular α cuando la superficie del agua en ambos casos tenga el mismo nivel.



A) $\arctan\left(\frac{2rh}{h^2+r^2}\right)$ B) $\arctan\left(\frac{rh}{h^2+2r^2}\right)$
C) $\arctan\left(\frac{h^2-r^2}{2rh}\right)$ D) 45°
E) 75°

30. En el gráfico la medida del ángulo diedro entre las bases del tronco de cilindro de revolución es 37°. Calcular el volumen del tronco de prisma triangular rectangular isósceles de aristas no nulas inscrito, si una de sus aristas coincide con la generatriz $\overline{MN}$.

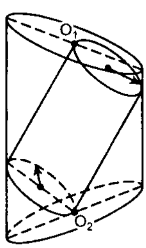
A) 63
B) 64
C) 69
D) 66
E) 65



31. Se tiene un tronco de cilindro de revolución donde los planos, que contienen a sus bases forman un diedro que mide 37°. Calcular el área de la base superior sabiendo que las longitudes de las generatrices máximas y mínima se diferencian en 3.

A) 5π B) 4π C) 6π D) 8π E) 10π

32. En el gráfico, $\overline{O_1O_2}$ es el eje del tronco de cilindro. Si el área de la superficie lateral del cilindro de revolución mostrado es igual a 2, calcular el área de la superficie lateral del tronco de cilindro.



A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 4

33. Por el centro de la base, de radio 3, de un cilindro circular recto se traza un plano secante, la distancia del punto más alejado de la intersección del plano con la superficie lateral del cilindro hacia dicha base es 3. Calcular el volumen del sólido limitado por el plano, la superficie lateral y dicha base.

A) 18π B) 16π C) 14π
D) 12π E) 10π

34. En un cilindro de revolución se inscribe otro cilindro de revolución de modo que los extremos de dos generatrices diametralmente opuestas son centros de las bases del cilindro inicial, calcular la razón entre las áreas de las superficies laterales de dichos cilindros.

A) 3/2 B) 2 C) 4
D) 3 E) 4/3

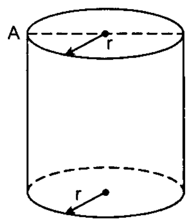
35. En un tetraedro regular se inscribe un cilindro de revolución cuya generatriz es la mitad de la altura del tetraedro. Calcular la razón de volúmenes de dichos sólidos.

A) $\frac{\pi}{24}\sqrt{3}$ B) $\frac{\pi}{12}\sqrt{3}$ C) $\frac{\pi}{6}\sqrt{6}$
D) $\frac{\pi}{18}\sqrt{3}$ E) $\frac{\pi}{24}\sqrt{2}$

36. Un cilindro circular recto cuya altura es 4 m y el radio de su base mide R, al aumentar la altura en 12 m, el volumen aumenta en x m^3. Si el radio de la base aumenta en 12 m, el volumen aumenta en x m^3. Calcular el valor de R.

A) 6 m B) 8 m C) 10 m
D) 12 m E) 16 m

37. De la figura el cilindro es equilátero, calcular la longitud del menor recorrido para ir del punto A, recorrer la superficie lateral y pasar por un punto de la circunferencia de la base inferior y volver al punto A.



A) $2r\sqrt{\pi}$ B) $2r\sqrt{\pi^2+1}$ C) $2r\sqrt{\pi^2+2}$
D) $2r\sqrt{\pi^2+3}$ E) $2r\sqrt{\pi^2+4}$

38. En un hexaedro regular ABCD–EFGH, se ubica en el interior un cilindro circular de modo que sus bases están inscritas en los triángulos BDE y CHF, calcular la razón de volúmenes del cilindro y el exaedro.

A) $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}$ B) $\frac{\pi\sqrt{3}}{15}$ C) $\frac{\pi\sqrt{3}}{12}$
D) $\frac{\pi\sqrt{3}}{9}$ E) $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

39. En un cubo ABCD−EFGH, se trazan las perpendiculares $\overline{AM}$, $\overline{BN}$, $\overline{CP}$ y $\overline{DQ}$ a $\overline{EC}$, $\overline{FD}$, $\overline{GA}$ y $\overline{HB}$ respectivamente M, N, P y Q pertenecen a $\overline{EC}$, $\overline{FD}$, $\overline{GA}$ y $\overline{HB}$ respectivamente, calcular la razón de volúmenes entre el cubo y el sólido MNPQ−ABCD.

A) $\frac{26}{81}$ B) $\frac{35}{81}$ C) $\frac{16}{81}$
D) $\frac{36}{64}$ E) $\frac{17}{81}$

40. En un tetraedro regular ABCD, se inscribe un cilindro equilátero con una de sus bases en una cara y la otra tangente a las demás caras. Si $AB = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$. Calcular el área de la superficie lateral del cilindro.

A) $\frac{2}{3}\pi$ B) $\frac{4}{3}\pi$ C) $\frac{5}{3}\pi$
D) $\frac{7}{3}\pi$ E) $\frac{8}{3}\pi$

41. El radio de la base de un cilindro circular recto mide $2\sqrt{3}$; se traza un plano perpendicular a su base el cual dista del centro de ella 3. Si la altura del cilindro mide 1, calcular el volumen de la menor parte en que queda dividido el cilindro.

A) $\pi - \sqrt{3}$ B) $4\pi - 5\sqrt{3}$ C) $2\pi - 3\sqrt{3}$
D) $3\pi - 4\sqrt{3}$ E) $6\sqrt{3} - \pi$

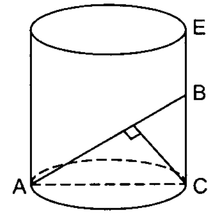
42. Calcular el volumen del tronco de cilindro oblicuo cuya generatriz máxima mide $2\sqrt[3]{4}$, la generatriz menor es nula y las bases del tronco son congruentes y perpendiculares.

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{\pi}{3}$
D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{\pi}{4}$

43. Se trazan dos planos por el vértice de un cono de revolución. Uno de ellos está inclinado con un ángulo de 30° respecto a su base y lo corta a lo largo de una cuerda de longitud 1 m, el otro está inclinado **45°** respecto a la base y lo corta a lo largo de una cuerda de 3 m de longitud. Calcular el volumen del cono.

A) π B) $\frac{\pi}{2}$ C) $\frac{13\pi}{12}$
D) $\frac{2\pi}{3}$ E) $\frac{7\pi}{6}$

44. En la gráfica se muestra un cilindro circular recto, donde AH = 2(HB) = 6, B es punto medio de $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ es diámetro de la base. Calcular el volumen del cilindro.



A) $64\sqrt{3}\pi$ B) $69\sqrt{3}\pi$ C) $72\sqrt{3}\pi$
D) $78\sqrt{3}\pi$ E) $81\sqrt{3}\pi$

45. Un recipiente cilíndrico de 30 cm de radio y 50 cm de altura está lleno de agua. Si dentro de él se introduce un trozo de madera labrado en forma de un prisma de base cuadrada de 10 cm de lado básico y cuya altura mide 20 cm, calcular el volumen de agua no derramada (en litros).

A) 120,6 B) 124,5 C) 139,3
D) 140,8 E) 150,2

46. Hallar el volumen de un cilindro circular recto de área total S, si la media armónica de las medidas del radio básico y de su altura es M.

A) SM B) $\frac{SM}{2}$ C) $\frac{SM}{3}$
D) $\frac{SM}{4}$ E) $\frac{2}{3}SM$

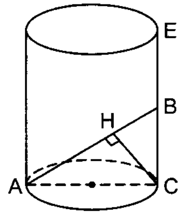
47. Calcular el volumen de un cilindro circular recto de 24 m de radio básico, si éste se halla inscrito en una esfera de 25 m de radio.

A) 8060π B) 8061π C) 8062π
D) 8063π E) 8064π

48. Un rollo de papel, cuyo diámetro exterior 30 cm tiene 500 vueltas fuertemente enrolladas en un cilindro de 10 cm de diámetro. Calcular la longitud en metros que tiene el papel.

A) 100π B) 300π C) 250π
D) 20π E) 80π

49. En la gráfica se muestra un cilindro circular recto, donde AH = 2(HB) = 6 cm, B punto medio de la generatriz $\overline{EC}$ y $\overline{AC}$ diámetro de la base. Calcular el volumen del cilindro en cm^3. (Examen de admisión UNI)



A) $64\sqrt{3}\pi$ B) $69\sqrt{3}\pi$ C) $72\sqrt{3}\pi$
D) $78\sqrt{3}\pi$ E) $81\sqrt{3}\pi$

50. Un tanque cilíndrico cuyo diámetro mide $4\sqrt{3}$ y su altura 12, tiene sus cinco sextas partes con vino. Desde su posición normal se inclina el tanque hasta que el vino esté a punto de caer por el borde. Calcular la medida del ángulo de inclinación.

A) 30° B) 45° C) 60°
D) 53° E) 75°

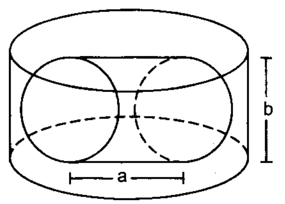
51. Se tiene un cilindro de revolución inscrito en un tetraedro regular cuya arista mide "a", si una base del cilindro está inscrita en una sección que pasa por los puntos medios de tres aristas congruentes. Calcular el volumen del cilindro.

A) $\frac{\pi a^3}{144}\sqrt{6}$ B) $\frac{\pi a^3}{288}\sqrt{6}$ C) $\frac{\pi a^3}{48}\sqrt{2}$
D) $\frac{\pi a^3}{72}\sqrt{6}$ E) $\frac{\pi a^3}{84}\sqrt{6}$

52. En un cilindro oblicuo cuyo volumen es 45 y cuyo valor del producto del radio de la sección recta con su altura es 15, se ha trazado por el eje un plano. Hallar la longitud del segmento que determina dicho plano en una base del cilindro.

A) $\frac{4}{\pi}$ B) $\frac{5}{\pi}$ C) $\frac{6}{\pi}$
D) $\frac{7}{\pi}$ E) $\frac{8}{\pi}$

53. Calcular la razón de volúmenes de los cilindros circulares, en el cual uno está inscrito en el otro $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1$



A) 1,0 B) 2,0 C) 0,5
D) 2,5 E) 1,5

54. Hallar el volumen de un cilindro de revolución, si el área total es 100π. Y la suma del radio de la base y la generatriz es 25.

A) 92π B) 125π C) 46π
D) 50π E) 23π

55. ¿Qué porcentaje del volumen de un cilindro recto está lleno con líquido, si la longitud de la altura es 8 veces del radio de la base y el cilindro se encuentra inclinado un ángulo cuya medida es 53° con respecto a la longitud?

A) 70% B) 75% C) 80%
D) $\frac{725}{8}$% E) $\frac{737}{7}$%

56. Calcular el volumen de un cilindro recto circunscrito a un prisma triangular regular, cuyas caras laterales son cuadradas y el área de la base de dicho prisma es de $3\sqrt{3}$.

A) $12\sqrt{2}\pi$ B) 36π
C) $8\sqrt{3}\pi$ D) 24π
E) $18\sqrt{2}\pi$

57. En la base de un cilindro de revolución se inscribe un hexágono regular ABCDEF, luego se trazan las generatrices $\overline{AI}$, $\overline{BM}$, $\overline{DN}$ y $\overline{EO}$. Calcular la razón de los volúmenes del cilindro y del sólido ABDE-LMNO.

A) π B) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ C) $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$
D) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ E) $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$

58. Se tiene un tronco de cilindro recto en el que su área lateral es numéricamente igual al duplo de su volumen. Si la diferencia entre sus generatrices mayor y menor es 2π, calcular el área de la base elíptica.

A) $\pi\sqrt{1+\pi^2}$ B) $\pi\sqrt{2\pi}$ C) $\frac{\sqrt{4+\pi^2}}{2}$
D) $2\pi\sqrt{\pi^2-1}$ E) $\pi\sqrt{5\pi}$

59. Si la relación entre el volumen y el área lateral de un cilindro de revolución es 1/4, calcular la medida de su altura, si el área de la base es 3/2 del área lateral.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 1/6 E) 1/4

60. Calcular el volumen de un cilindro recto si al aumentar la medida del radio en $(2-\sqrt{2})$, su volumen se duplica, y al aumentar la medida de su altura en 16 su área lateral se quintuplica.

A) $3\sqrt{2}\pi$ B) 9π C) $5\sqrt{2}\pi$
D) 8π E) 7π

61. Calcular la razón de volúmenes de un cilindro de revolución y de un cubo que tiene dos vértices opuestos en los centros de las bases del cilindro y los demás están en la superficie lateral del mismo.

A) $2\pi\sqrt{3}/3$ B) $\pi\sqrt{3}/3$ C) $\pi\sqrt{2}/2$
D) $2\pi\sqrt{2}$ E) $\sqrt{5}\pi$

62. En un cilindro de revolución se traza un plano secante que contiene a un solo punto de la circunferencia que limita a su base y forma con dicha base un diedro de 37°. Calcular el volumen del tronco de prisma triangular regular inscrito en el tronco de cilindro si sus generatrices mayor y menor miden 12 y 6, respectivamente, y si la arista lateral menor del tronco de prisma es la generatriz menor del tronco de cilindro.

A) $99\sqrt{3}$ B) $108\sqrt{2}$ C) $108\sqrt{3}$
D) $120\sqrt{3}$ E) $90\sqrt{2}$

63. Un cilindro circular recto cuya altura es 4 y el radio de su base mide R, al aumentar la altura en 12, el volumen aumenta en x. Si el radio de la base aumenta en 12, el volumen aumenta en x, calcular el valor de R.

A) 4 B) 6 C) 9
D) 12 E) 15

64. En un tetraedro regular se inscribe un cilindro recto cuya generatriz es la mitad de la altura del tetraedro. Calcular la razón de los volúmenes de dichos sólidos.

A) $\pi\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{6}/\pi$ C) $4\pi\sqrt{2}$
D) $\sqrt{3}\pi/24$ E) $18\sqrt{2}\pi$

65. Calcular la altura de un cilindro recto de radio $\sqrt{2}$ inscrito en un tetraedro regular de arista $3\sqrt{6}$ tal que la base interior está en una de las caras del tetraedro y la otra base es tangente a las otras caras.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

66. Las bases de un cilindro oblicuo son círculos de área 36, cada una; luego se traza la sección del cilindro que pasa por el extremo de la base inferior formando un ángulo de 30° con dicha base e interseca a la generatriz opuesta en el punto C que dista de la base superior $7\sqrt{3}$. Calcular la generatriz de dicho cilindro.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 25 E) 30

67. Calcular el volumen de un cilindro oblicuo, cuyas bases son circulares, además la generatriz y el diámetro de la base son congruentes y la distancia del centro de una base a los extremos del diámetro de la otra base son 13 y 9 respectivamente.

A) $60\pi\sqrt{7}$ B) $50\pi\sqrt{7}$ C) $70\pi\sqrt{14}$
D) $60\pi\sqrt{14}$ E) $40\pi\sqrt{14}$

68. Se tiene un vaso cilíndrico circular recto de radio 3 lleno de agua. Si se trazan 2 planos paralelos que distan 8 y que intersecan a las generatrices del cilindro formando con este un ángulo cuya medida es 53°, calcular el volumen del líquido que se encuentra entre los planos paralelos.

A) 45π B) 90π C) 135π
D) 80π E) 120π

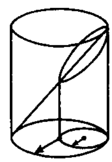
69. La diferencia entre la generatriz máxima y mínima de un tronco de cilindro circular recto es 3, además el radio de la base circular mide 2. Calcular el perímetro de la región elíptica de la otra base.

A) 9π B) $9\pi/2$ C) 6π
D) 3π E) $3\pi/2$

70. En un cubo ABCD-EFGH de arista a se encuentra inscrito un cilindro de revolución cuyas generatrices son paralelas a $\overline{CG}$. Calcular el área de la sección determinada en el cilindro por un plano que contiene a $\overline{AG}$ y es paralela a $\overline{BD}$.

A) $\frac{a^2\pi\sqrt{6}}{5}$ B) $\frac{a^2\pi\sqrt{7}}{7}$ C) $\frac{a^2\pi\sqrt{6}}{8}$
D) $\frac{a^2\pi\sqrt{5}}{7}$ E) $\frac{a^2\pi\sqrt{10}}{6}$

71. La figura muestra un cilindro de revolución de volumen 80. Calcular el volumen del tronco del cilindro oblicuo.



A) 45
B) 15
C) 60
D) 50
E) 30

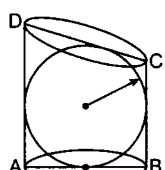
72. En un prisma recto ABC-A'B'C' se inscribe un cilindro circunscrito a una esfera, si AB = 13; BC = 15 y AC = 14; calcular el volumen del prisma.

A) 438 B) 546 C) 672
D) 736 E) 824

73. En un prisma regular se encuentra inscrito un cilindro de revolución. Calcular la razón de áreas de las superficies laterales de dichos sólidos, si la suma de las medidas de todos los diedros del prisma es 1800°.

A) $\pi\sqrt{3}/6$ B) $1/2\pi$
C) $3/\pi$ D) $1/4\pi$
E) $2\pi\sqrt{3}/3$

74. En la figura mostrada se tiene un tronco de cilindro circular recto, DC = 5, y el área de la superficie esférica inscrita en dicho tronco es de 9π. Calcular el volumen del tronco del cilindro.



A) 10π
B) 9π
C) 8π
D) 7π
E) 6π

75. Calcular el radio de la base de un tronco de cilindro circular recto cuyas bases forman un ángulo diedro cuya medida es 60°; además la suma de las áreas de las bases es S y la generatriz mínima mide 0.

A) S/π B) $\sqrt{S}/\sqrt{\pi}$ C) $\sqrt{S}/\sqrt{3\pi}$
D) $\sqrt{S}/\sqrt{5}$ E) $\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$

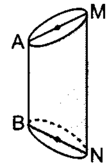
76. Si las áreas de las superficies laterales de dos cilindros de revolución semejantes son entre sí como 4 a 9, siendo el volumen del menor 16. Calcular el volumen del mayor.

A) 24π B) 36π C) 81π
D) 45π E) 54π

77. Calcular en qué razón están las áreas de las superficies totales de un cubo y de un cilindro de revolución, si el cubo está inscrito en el cilindro.

A) $6/(\sqrt{2}+1)\pi$ B) $3/(\sqrt{2}+1)\pi$
C) $9/(\sqrt{2}+1)\pi$ D) $2(\sqrt{2}-1)\pi$
E) $2(\sqrt{2}+1)\pi$

78. Según la figura se tiene un tronco de cilindro de sección recta circular, MN = 2(AB); AM = BN; m∠MAB = 135° y el área de la superficie lateral es numéricamente igual al de dicho sólido. Calcular el área de la superficie lateral del sólido.



A) 96π B) 60π C) 48π
D) 50π E) 58π

CLAVES

1. A	11. C	21. A	31. A	41. C	51. B	61. E	71. B
2. C	12. B	22. D	32. E	42. A	52. C	62. E	72. C
3. B	13. E	23. D	33. A	43. C	53. A	63. E	73. C
4. D	14. A	24. D	34. B	44. E	54. A	64. D	74. C
5. C	15. E	25. A	35. A	45. C	55. D	65. C	75. D
6. A	16. A	26. D	36. D	46. D	56. C	66. E	76. E
7. D	17. D	27. C	37. E	47. E	57. D	67. B	77. A
8. C	18. D	28. C	38. A	48. A	58. A	68. E	78. A
9. A	19. C	29. C	39. A	49. E	59. D	69. C	
10. A	20. A	30. B	40. A	50. C	60. C	70. B	

Cono y tronco de cono

21 capítulo

Apolonio de Perge, Apolonio de Perga o Apolonio de Pérgamo (Perge, 262 a. C.-Alejandría, 190 a. C.) fue un geómetra griego famoso por su obra *Sobre las secciones cónicas*. Fue Apolonio quien dio el nombre de elipse, parábola e hipérbola, a las figuras que conocemos. Logró solucionar la ecuación general de segundo grado por medio de la geometría cónica. También se le atribuye la hipótesis de las órbitas excéntricas o teoría de los epiciclos para intentar explicar el movimiento aparente de los planetas y de la velocidad variable de la Luna.

Sus extensos trabajos sobre geometría tratan de las secciones cónicas y de las curvas planas y la cuadratura de sus áreas. Recopiló su obra en ocho libros y fue conocido con el sobrenombre del «gran geómetra». Estudió las secciones cónicas utilizando como herramienta las proporciones, relacionando las magnitudes de cada elemento que conforman cada sección cónica en el caso de la parábola, elipse e hipérbola donde utilizó este método para definir las propiedades de cada corte con el cono; además, propuso y resolvió el problema de hallar las circunferencias tangentes a tres círculos dados, conocido como problema de Apolonio. Su obra *Las cónicas* está formada por 8 libros y en el libro III habla sobre los tipos de conos.

Fuente: Wikipedia

SUPERFICIE CÓNICA

Es la superficie que se genera al deslizarse una recta (generatriz) a lo largo de una curva (directriz), pasando siempre por un punto fijo del espacio.

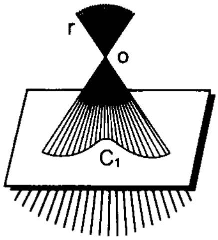


Fig. 1

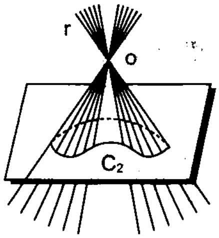


Fig. 2

La figura 1, muestra una superficie cónica abierta. La directriz C_1 es una línea y "r" es la generatriz.

La figura 2, muestra una superficie cónica cerrada, debido a que la directriz C_2 es una curva cerrada.

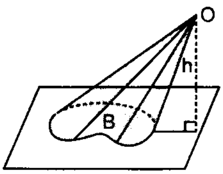
CONO

Es el sólido obtenido al interceptar una superficie cónica cerrada, mediante un plano.

La figura muestra un cono. El punto O es vértice, B es el área de la base y "h" es longitud de la altura.

La base puede ser cualquier curva cerrada.

El volumen V se expresa así:



$$\boxed{V = \frac{Bh}{3}}$$

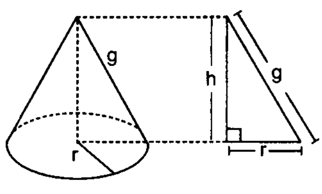
CONO DE REVOLUCIÓN

Se genera al girar la región correspondiente a un triángulo rectángulo, una vuelta alrededor de un eje que contiene a un cateto.

El otro cateto genera la base (círculo) y la hipotenusa (generatriz) genera la superficie lateral.

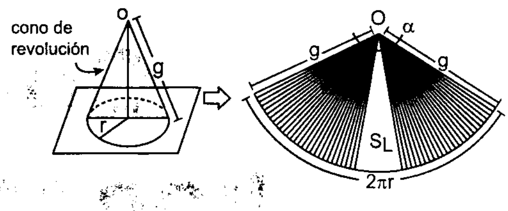
Área lateral: $\boxed{S_L = \pi rg}$ Área total: $\boxed{S_T = S_L + B}$

En este caso: $\boxed{B = \pi r^2}$



DESARROLLO DE LA SUPERFICIE LATERAL

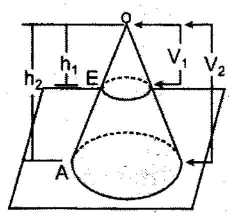
Es un sector circular que tiene por radio a la generatriz del cono y por arco a la longitud de la circunferencia de la base del cono.



Se verifica que: $2\pi r = 2\pi g\left(\frac{\alpha}{360°}\right)$

Propiedades

Si se interseca la superficie lateral de un cono mediante un plano paralelo a la base, se obtiene otro cono parcial, semejante al original. En este caso, se cumple que:



a. Las áreas son entre sí como los cuadrados de las alturas o como el cuadrado de las generatrices. Así:

$$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{(h_1)^2}{(h_2)^2} = \frac{(OE)^2}{(OA)^2}}$$

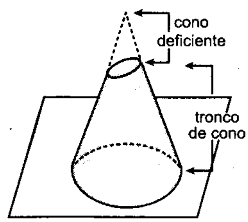
S_1 y S_2 pueden ser áreas laterales, totales o áreas de las bases de los conos.

b. Los volúmenes son entre sí como los cubos de las alturas o como el cubo de las generatrices:

$$\boxed{\frac{V_1}{V_2} = \frac{(h_1)^3}{(h_2)^3} = \frac{(OE)^3}{(OA)^3}}$$

TRONCO DE CONO

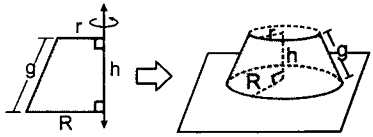
Se obtiene al intersecar la superficie lateral de un cono con un plano cualquiera, paralelo o no a la base 1.



TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

Se genera al girar una vuelta la región correspondiente a un trapecio rectángulo, alrededor del eje que contiene al lado perpendicular a las bases.

Las bases son círculos y la altura del trapecio es altura del tronco.



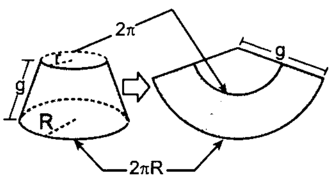
Para la figura:
g: longitud de la generatriz.
h: longitud de la altura.
R y r: radios de las bases (círculos).

I. Volumen: $\boxed{V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + R^2 + Rr)}$

II. Área lateral: $\boxed{S_L = \pi(R + r)g}$

II. Área total: $\boxed{S_T = S_L + \pi r^2 + \pi R^2}$

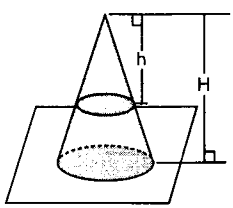
El desarrollo de la superficie de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular.



Ejemplos:

1. La superficie lateral de un cono de revolución se intersecta por un plano paralelo a la base, determinando un cono parcial. Si las áreas laterales del cono parcial y tronco de cono, son entre sí como 4 es a 5; hallar la relación de volúmenes del cono parcial al cono total.

Resolución:



Por dato: $\frac{S_{\text{cono parcial}}}{S_{\text{tronco de cono}}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{S_{\text{cono parcial}}}{S_{\text{cono total}}} = \frac{4}{9}$

Por propiedad: $\frac{S_{\text{cono parcial}}}{S_{\text{cono total}}} = \frac{h^2}{H^2}$

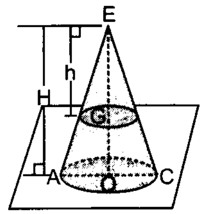
$$\Rightarrow \frac{h^2}{H^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{2}{3}$$

Entonces, la relación de volúmenes:

$$\frac{V_{\text{cono parcial}}}{V_{\text{cono total}}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

2. Dado un cono de revolución de vértice E y volumen 54 cm^3, se traza un diámetro $\overline{AC}$ en el círculo de la base. Hallar el volumen del tronco de cono que se determina al trazar un plano paralelo a la base por el baricentro de la región triangular AEC.

Resolución:



Como G es baricentro del $\triangle$AEC: $\frac{h}{H} = \frac{2}{3}$

Se tendrá:

$V_{\text{tronco}} = V_{\text{cono total}} - V_{\text{cono parcial}}$

$V_{\text{tronco}} = 54 - V_{\text{cono parcial}}$ ...(1)

Por otro lado, de la semejanza entre los conos:

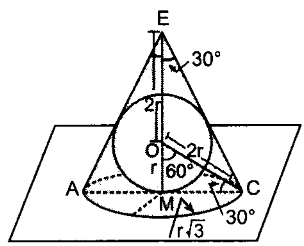
$$\frac{V_{\text{cono parcial}}}{V_{\text{cono total}}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{\text{cono parcial}}}{54} = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$V_{\text{cono parcial}} = 16\ \text{cm}^3$

Reemplazando en (1): $V_{\text{tronco}} = 38\ \text{cm}^3$

3. Un cono de revolución, se llama equilátero, si la generatriz mide igual que el diámetro de la base. Hallar el volumen de un cono equilátero, conociendo el radio "r" de la esfera inscrita en él.

Resolución:



Sea el gráfico el cono de la figura AE = EC = AC
$\triangle$AEC, equilátero:

$\Rightarrow m\angle ACE = 60° \wedge m\angle MCO = m\angle OCE = 30°$

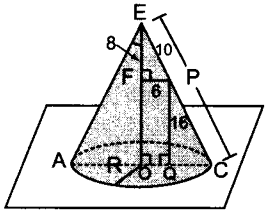
El volumen: $V = \frac{1}{3}\pi(MC)^2(EM)$

$V = \frac{1}{3}\pi(r\sqrt{3})^2(3r)$

$\therefore V = 3\pi r^3$

4. Sobre la superficie lateral de un cono de revolución se toma un punto, distante 6; 16 y 10 cm de la altura, la base y el vértice, respectivamente. Hallar el área total del cono.

Resolución:



Sea P el punto en mención.

Dato: PF = 6, PQ = 16 y PE = 10

En el ⊾EFP: $(EF)^2 = (PE)^2 - (PF)^2 \Rightarrow EF = 8$

⊾EOC ~ ⊾EFP:

$\frac{OC}{FP} = \frac{EO}{EF} \Rightarrow \frac{R}{6} = \frac{24}{8} \Rightarrow R = 18$

También: $\frac{EC}{EP} = \frac{EO}{EF} \Rightarrow \frac{g}{10} = \frac{24}{8}$

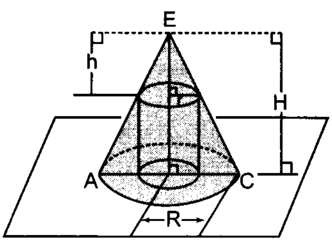
$\Rightarrow g = 30$

Luego, el área total: $S_T = \pi R^2 + \pi Rg$

$S_T = \pi(18^2) + \pi(18)(30)$

$\therefore\ S_T = 864\pi\ cm^2$

5. La figura muestra un cilindro circular recto inscrito en un cono de revolución. El cono parcial, de vértice E, y el cilindro, son equivalentes. ¿Qué fracción del volumen del cono total es el volumen del cono parcial?



Resolución:

Sean: V_{CT}: volumen del cono total.

V_{CP}: volumen del cono parcial.

Se pide: $\frac{V_{CP}}{V_{CT}}$

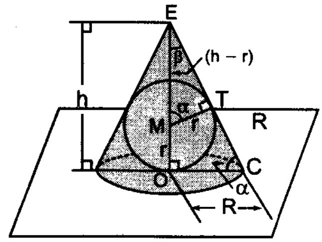
Por dato: $V_{CT} = V_{cilindro} \Rightarrow \frac{\pi}{3}r^2h = \pi r^2(H - h)$

$\Rightarrow \frac{h}{H} = \frac{3}{4}$

Luego: $\frac{V_{CP}}{V_{CT}} = \left(\frac{h}{H}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \qquad \therefore\ \frac{V_{CP}}{V_{CT}} = \frac{27}{64}$

6. Hallar el volumen de un cono de revolución conociendo los radios R y r, de la base y de la esfera inscrita, respectivamente.

Resolución:



$V = \frac{1}{3}\pi R^2h$

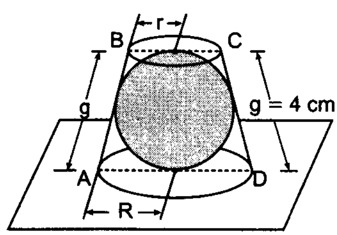
Para hallar h: ⊾MTE ~ ⊾COE

$\Rightarrow \frac{EM}{EC} = \frac{TM}{OC} \Rightarrow \frac{h-r}{\sqrt{R^2+h^2}} = \frac{r}{R} \Rightarrow h = \frac{2rR^2}{(R^2 - r^2)}$

Entonces: $V = \frac{1}{3}\pi R^2h$

$\therefore\ V = \frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{2rR^2}{R^2 - r^2}\right)$

7. Hallar el área lateral de un tronco de cono de revolución, circunscrito a una esfera. La generatriz del tronco mide 4 cm.



Resolución:

El área lateral del tronco de cono tiene fórmula:

$S_L = \pi(r + R)g$ ...(1)

En la sección ABCD, por el teorema de Pitot:

$BC + AD = AB + CD \Rightarrow 2r + 2R = 4 + 4$

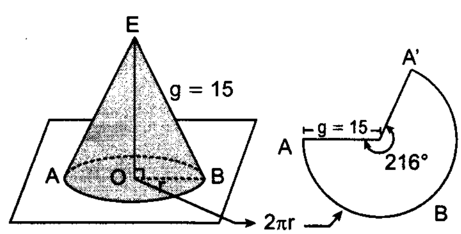
Luego: $r + R = 4$

Reemplazando en (1): $S_L = \pi(4)(4)$

$\therefore\ S_L = 16\pi\ cm^2$

8. El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular de radio 15 cm y arco de medida 216°. Hallar el volumen del cono original.

Resolución:



La generatriz del cono mide igual que el radio del sector en el desarrollo de la superficie lateral:

$\Rightarrow g = 15$

$L_{\widehat{ABA'}} = 2\pi g\left(\frac{216°}{360°}\right)$

$\Rightarrow 2\pi r = 2\pi(15)\left(\frac{216}{360}\right) \quad \therefore r = 9$

En el cono: $h^2 = g^2 - r^2 = 15^2 - 9^2 \Rightarrow h = 12$

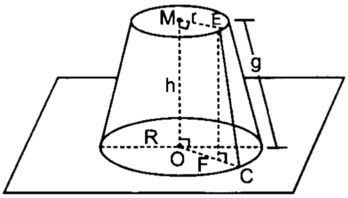
Finalmente, el volumen V del cono:

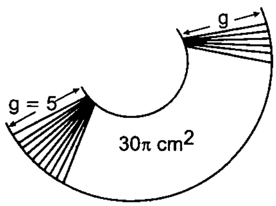
$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(9^2)(12)$

$\therefore V = 324\pi \text{ cm}^2$

9. El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular de área 30π cm^2. Hallar el volumen del tronco de cono, si la altura y la generatriz miden 3 y 5 cm, respectivamente.

Resolución:





Área lateral: $\pi(R + r)g = 30\pi$

$\Rightarrow \pi(R + r)5 = 30\pi$

$\Rightarrow R + r = 6 \quad \text{...(I)}$

En el $\triangle EFC$: $EC = 5$ y $EF = 3 \Rightarrow FC = 4$

$\Rightarrow R - r = 4 \quad \text{...(II)}$

$\Rightarrow R = 5$ y $r = 1$, de (I) y (II)

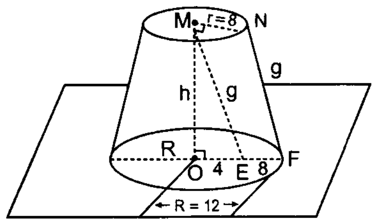
El volumen será: $V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$

$V = \frac{\pi}{3}(3)(5^2 + 1^2 + 5 \times 1)$

$\therefore V = 31\pi \text{ cm}^3$

10. Hallar el volumen de un tronco de cono de revolución, sabiendo que los radios de las bases, miden 8 y 12 cm, respectivamente, y que el área de la superficie lateral es igual a la suma de áreas de las bases.

Resolución:



Dato: $\pi(8 + 12)g = \pi(8^2 + 12^2) \Rightarrow g = \frac{52}{5}$

Sean O y M centros de las bases.

Se traza $\overline{ME}$, paralelo a la generatriz $\overline{NF}$.

$\triangle EOM$: $h^2 = g^2 - (OE)^2$

$\Rightarrow h^2 = \left(\frac{52}{5}\right)^2 - 4^2 \Rightarrow h = \frac{48}{5}$

Luego, el volumen del tronco será:

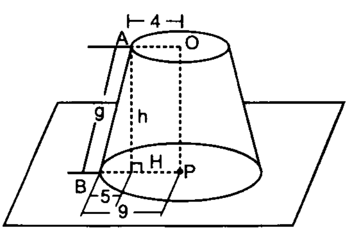
$V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi}{3}\left(\frac{48}{5}\right)(8^2 + 12^2 + 8 \times 12)$

$\therefore V = \frac{3264\pi}{5} \text{ cm}^3$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el volumen de un tronco de cono de revolución, cuyas bases tienen radios 4 y 9 cm, respectivamente. El área total del cono es 266π cm^2.

Resolución:



$r = 4 \wedge R = 9$

Área lateral: $S_L = \pi(R + r)g$

Área total: $S_T = S_L + \pi r^2 + \pi R^2$

Por dato: $S_T = 266\pi \text{ cm}^2$

$\Rightarrow \pi(R + r)g + \pi r^2 + \pi R^2 = 266\pi$

$\pi(9 + 4)g + \pi(4^2) + \pi(9^2) = 266\pi \Rightarrow g = 13$

Luego, en el $\triangle ABH$: $h^2 = g^2 - 5^2 = 13^2 - 5^2 \Rightarrow h = 12$

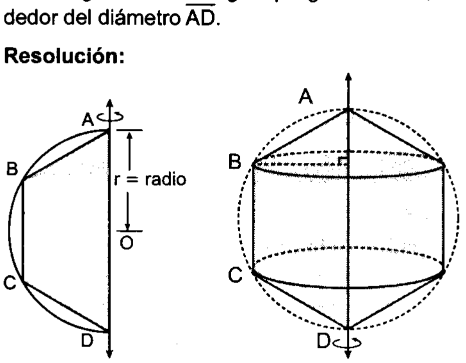
Finalmente, el volumen será:

$V = \frac{\pi}{3}h(R^2 + r^2 + Rr)$

$V = \frac{\pi}{3}(12)(9^2 + 4^2 + 9 \times 4) \quad \therefore V = 532\pi \text{ cm}^3$

2. Hallar el área de la superficie del sólido que se obtiene al girar 360° la región poligonal ABCD, alrededor del diámetro $\overline{AD}$.

Resolución:



Como ABCD es un semihexágono regular:

$AB = r = BC = CD$

Se obtienen dos conos congruentes entre sí y un cilindro de revolución.

Para cada cono: $S_{\text{lateral cono}} = \pi BH(AB)$

$S_{\text{lateral cono}} = \pi\left(\frac{r}{2}\right)(\sqrt{3})(r) = (\sqrt{3})\left(\frac{\pi}{2}\right)r^2$

Para el cilindro:

$S_{\text{lateral cilindro}} = 2\pi(BH)(BC) = 2\pi\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)r = \pi r^2\sqrt{3}$

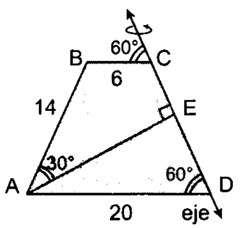
Luego:

$S = 2(S_{\text{lateral cono}}) + S_{\text{lateral cilindro}} = 2\left(\frac{\pi}{2}r^2\sqrt{3}\right) + \pi r^2\sqrt{3}$

$\therefore\ S = 2\pi r^2\sqrt{3}$

3. Un trapecio isósceles, con su ángulo agudo de 60°, gira alrededor del eje que pasa por uno de sus lados no paralelos. Hallar el volumen del cuerpo de revolución, si las bases del trapecio miden 6 y 20, además los lados no paralelos miden 14.

Resolución:



Sea ABCD el trapecio:

$BC = 6;\ AD = 20 \wedge AB = CD = 14$

V_{ABCD} es el volumen del sólido que genera el trapecio. Su valor se calculará así:

$V_{ABCD} = V_{ABHD} - V_{BHC}$; o también:

$V_{ABCD} = V_{ABHE} + V_{AED} - V_{BHC}$

ABHE genera un tronco de cono de radios en las bases $\overline{AE}$ y $\overline{BH}$; altura $\overline{HE}$.

AED y BHC generan conos de radios en las bases, $\overline{AE}$ y $\overline{BH}$, respectivamente.

Luego:

$$V_{ABCD} = \pi\left(\frac{HE}{3}\right)[(BH)^2 + (AE)^2 + (BH)(AE)] + \frac{\pi}{3}(AE^2)(ED) - \frac{\pi}{3}(BH^2)(CH)$$

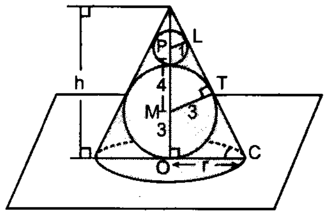
Reemplazando valores:

$$V_{ABCD} = \pi\left(\frac{7}{3}\right)[(3\sqrt{3})^2 + (10\sqrt{3})^2 + (3\sqrt{3})(10\sqrt{3})] + \frac{\pi}{3}(10\sqrt{3})^2(10) - \frac{\pi}{3}(3\sqrt{3})^2(3)$$

$\therefore\ V_{ABCD} = 1946\pi$

4. Se tienen dos esferas tangentes exteriormente y cuyos radios miden 1 y 3. Calcular el volumen del cono recto circunscrito a ambas esferas.

Resolución:



Volumen: V

Cálculo de la altura h: $\triangle BLP \sim \triangle BTM$

$\frac{BP}{BM} = \frac{PL}{MT}$

$\frac{h-7}{h-3} = \frac{1}{3} \Rightarrow h = 9$ y $\begin{cases} BP = 2 \\ BL = \sqrt{3} \end{cases}$

Cálculo del radio r: (de la base)

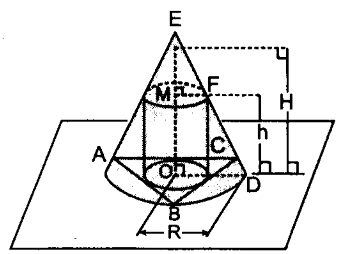
$\triangle BOC \sim \triangle BLP \Rightarrow \frac{OP}{PL} = \frac{BO}{BL} \Rightarrow \frac{r}{1} = \frac{9}{\sqrt{3}} \Rightarrow r = 3\sqrt{3}$

El volumen: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2(9)$

$\therefore\ V = 81\pi$

5. El volumen de un cono de revolución es $36\pi\ cm^3$. ABC es un triángulo equilátero inscrito en la circunferencia de la base del cono. El $\triangle ABC$ está circunscrito a la vez a una circunferencia cuyo círculo es base de un cilindro recto inscrito en el cono. Hallar el volumen del cilindro.

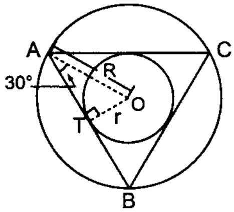
Resolución:



Considerando el gráfico: $V_{\text{cono}} = 36\pi\ cm^3$

$\Rightarrow\ \frac{1}{3}\pi R^2 H = 36\pi$

$(R^2)(H) = 108$ ...(1)



$r = \frac{R}{2}$

Volumen del cilindro:

$V_{cilindro} = \pi r^2 h \qquad ...(2)$

Como: $r = \frac{R}{2}$

$\Rightarrow \overline{MF}$ es base media de $\overline{OD}$: $MF = \frac{OD}{2}$

Entonces: $OM = \frac{EO}{2} \Rightarrow h = \frac{H}{2}$

En (2): $V_{cilindro} = \pi\left(\frac{R}{2}\right)^2\left(\frac{H}{2}\right) \Rightarrow V_{cilindro} = \frac{1}{8}\pi(R^2H)$

Con lo de (1): $V_{cilindro} = \frac{\pi}{8}(108)\ cm^3$

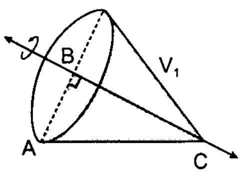
$\therefore\ V_{cilindro} = \frac{27}{2}\pi\ cm^3$

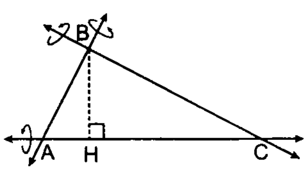
6. Los volúmenes de los sólidos generados por la rotación de un triángulo rectángulo, alrededor de los catetos e hipotenusa, son V_1, V_2 y V_3, respectivamente. Demostrar que:

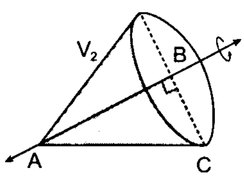
$$\boxed{\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_3}\right)^2}$$

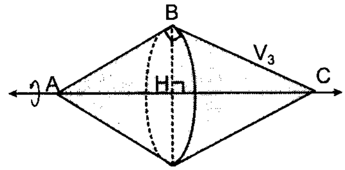
Demostración:

Consideremos el $\triangle ABC$, recto en B:









Se tienen:

Alrededor de $\overline{BC}$: $V_1 = \frac{\pi}{3}(AB)^2(BC) \qquad ...(1)$

Alrededor de $\overline{AB}$: $V_2 = \frac{\pi}{3}(BC)^2(AB) \qquad ...(2)$

Alrededor de $\overline{AC}$ (dos conos de radio común $\overline{BH}$):

$V_3 = \frac{\pi}{3}(BH)^2(AH) + \frac{\pi}{3}(BH)^2(HC)$

$V_3 = \frac{\pi}{3}(BH)^2(AH + HC) \Rightarrow V_3 = \frac{\pi}{3}(BH)^2(AC) \quad ...(3)$

De (1) y (2):

$\frac{1}{V_1} = \frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{(AB)^2(BC)}\right] \qquad \frac{1}{V_2} = \frac{3}{\pi}\left[\frac{1}{(BC)^2(AB)}\right]$

Luego:

$\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2}\left[\frac{1}{(AB)^2(BC)}\right]^2 + \frac{9}{\pi^2}\left[\frac{1}{(BC)^2(AB)}\right]^2$

Factorizando:

$\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2}\left[\frac{1}{(AB)(BC)^2}\right]\left[\frac{1}{(AB)^2} + \frac{1}{(BC)^2}\right]$

Pero, por relaciones métricas en el triángulo rectángulo ABC:

$(AB)(BC) = (AC)(BH) \ \wedge\ \frac{1}{(AB)^2} + \frac{1}{(BC)^2} = \frac{1}{(BH)^2}$

Reemplazando en la anterior expresión:

$\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2}\left[\frac{1}{(AC)(BH)^2}\right]\left[\frac{1}{(BH)^2}\right]$

Es decir:

$\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2}\left[\frac{1}{(BH)^2(AC)}\right]^2$

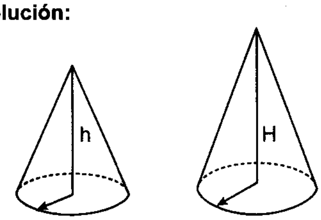
$\Rightarrow \left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \left[\left(\frac{3}{\pi}\right)\frac{1}{(BH)^2(AC)}\right]^2$

Finalmente, con lo de (3):

$\left(\frac{1}{V_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_3}\right)^2$

7. La suma de las áreas totales de dos conos circulares rectos, semejantes, es de $25\pi(1 + \sqrt{5})\ cm^2$. Hallar la raíz cuadrada del producto de las áreas, si las alturas están en razón de 3 a 4.

Resolución:



Área total = B Área total = A

Dato: $\frac{h}{H} = \frac{3}{4}$; entonces $\frac{B}{A} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \Rightarrow \frac{B}{A} = \frac{9}{16}$

$B + A = 25\pi(1 + \sqrt{5}) \Rightarrow \frac{9A}{16} + A = 25\pi(1 + \sqrt{5})$

$\frac{25}{16}A = 25\pi(1 + \sqrt{5}) \Rightarrow A = 16\pi(1 + \sqrt{5})$

Luego: $\sqrt{AB} = \sqrt{A\left(\frac{9A}{16}\right)} = \frac{3A}{4}$

$\sqrt{AB} = \frac{3}{4}(16\pi)(1 + \sqrt{5}) = 12\pi(1 + \sqrt{5})$

8. Una cuerda trazada en la base de un cono circular recto de 4 m de altura mide 8 m. Si la distancia de la cuerda al centro del círculo base es de 2 m. ¿cuánto mide la generatriz?

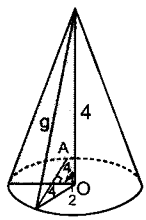
Resolución:

Observa que: $(BO)^2 = 4^2 + 2^2$

$\therefore\ BO = \sqrt{20}$

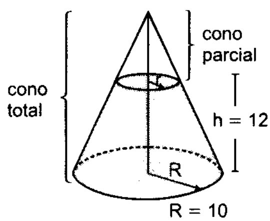
Además: $g^2 = (\sqrt{20})^2 = (4)^2$

$\therefore\ g = 6$ m



9. Un tronco de cono de altura 12 m tiene por base mayor un círculo de radio igual a 10 m. Si el volumen del tronco de cono es 700π m^3, ¿cuál es el volumen del cono?

Resolución:



Para el tronco de cono:

$V_{tronco} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

$700\pi = \frac{\pi}{3}(12)(10^2 + r^2 + 10r)$

Se deduce que $r = 5$

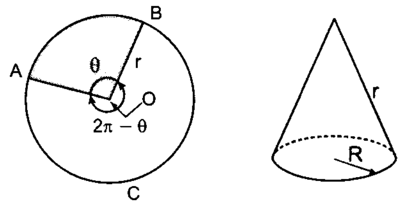
Comparando el cono parcial y el cono total:

$\frac{V_{total}}{V_{parcial}} = \left(\frac{R}{r}\right)^3 \Rightarrow \frac{V_{total}}{V_{total} - 700\pi} = \left(\frac{10}{5}\right)^3$

$\therefore\ V_{total} = 800\pi$

10. De un disco de aluminio de radio "r" se va a cortar un sector circular de ángulo θ. Si con el resto del disco se forma un cono circular recto, hallar el valor de θ (en radianes) para que el área de la base del cono sea un tercio del área de la superficie lateral del mismo cono.

Resolución:



Del disco se corta el sector AOB y queda el sector ACB, con este último se forma un cono circular recto.

Longitud del arco ACB: $L_{\widehat{ACB}} = r(2\pi - \theta)$

EL área de la superficie lateral del cono es igual al área del sector circular ACB

$S_{ACB} = \frac{(2\pi - \pi)r^2}{2}$

Área de la base del cono: $S_{base} = \pi R^2$

Observa que la longitud del arco ACB es igual a la longitud de la circunferencia de la base del cono.

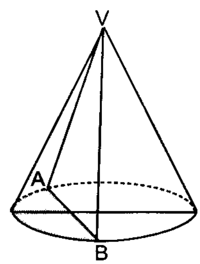
Luego: $r(2\pi - \theta) = 2\pi R \Rightarrow R = \frac{r(2\pi - \theta)}{2\pi}$

Dato: $S_{base} = \frac{1}{3}S_{ACB} \Rightarrow \pi R^2 = \frac{1}{3}\frac{(2\pi - \theta)r^2}{2}$

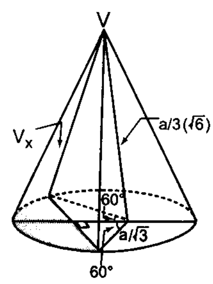
$\frac{(\pi r^2)(2\pi - \theta)^2}{4\pi^2} = \frac{1}{3}\frac{(2\pi - \theta)r^2}{2} \Rightarrow \frac{2\pi - \theta}{2\pi} = \frac{1}{3}$

$\therefore\ \theta = \frac{4\pi}{3}$ rad

11. Se tiene un cono de revolución de vértice V, se traza un plano secante que intersecta a la circunferencia de la base en A y B. $m\widehat{AB} = 120°$, AB = a y la altura del cono mide $\frac{a}{3}\sqrt{6}$. Hallar el volumen del sólido menor que determina el plano secante.



Resolución:

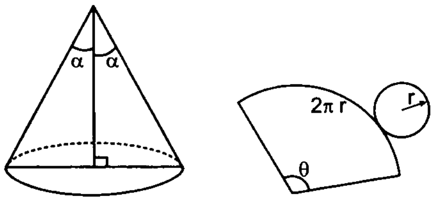


$$V_x = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{a}{\sqrt3}\right)^2\left(\frac{a\sqrt6}{3}\right)\left(\frac13\right) - \frac13\left(\frac{a}{\sqrt3}\right)^2\left(\frac{\sqrt3}{4}\right)\left(\frac{a}{3}\sqrt6\right)$$

$$V_x = \frac{\pi a^3\sqrt6}{81} - \frac{a^3\sqrt2}{36} \quad \therefore\ V_x = \frac{a^3\sqrt2}{9}\left(\frac{\pi\sqrt3}{9}-\frac14\right)$$

12. Al desarrollarse la superficie lateral de un cono de revolución se obtiene un semicírculo. Hallar la medida del ángulo que forman dos generatrices opuestas del cono.

Resolución:



$$\theta = \text{sen}\alpha(360°)$$

Por dato: $\theta = 180° \Rightarrow 180° = \text{sen}\alpha(360°)$

$\Rightarrow \text{sen}\alpha = \frac12 \Rightarrow \alpha = 30°$

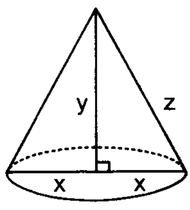
$\therefore\ 2\alpha = 60°$

13. Se tiene un cono de mayor volumen. Hallar la relación entre el radio y la generatriz del cono de revolución dado, para que se cumpla dicha condición.

Resolución:

Cono de volumen máximo.

Se pide hallar:



$V = \pi x^2 y;\ x^2 = z^2 - y^2$

$V = \pi y(z^2 - y^2)$

$V = \pi z^2 y - \pi y^3$

$\Rightarrow V' = \pi z^2 - 3\pi y^2 = 0$

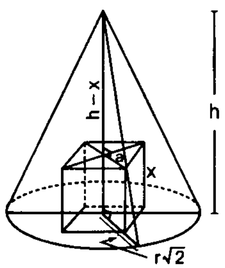
$z^2 = 3y^2 \Rightarrow y^2 = \frac{z^2}{3}$

$\Rightarrow x^2 = 3y^2 - y^2 = 2y^2 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{\sqrt2}{1}$

$x^2 = z^2 - \frac{z^2}{3} = \frac{2z^2}{3} \Rightarrow \frac{x^2}{z^2} = \frac23 \quad \therefore\ \frac{x}{z} = \frac{\sqrt2}{\sqrt3}$

14. En un cubo de revolución de altura "h" y radio de la base $r\sqrt2$. Hallar la longitud de la arista del cubo inscrito.

Resolución:



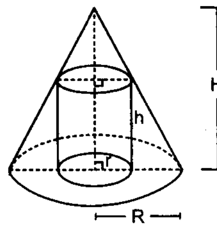
En la base superior del cubo: $a = \frac{x}{\sqrt2}$

Por semejanza: $\frac{x/\sqrt2}{r\sqrt2} = \frac{h-x}{h}$

Efectuando: $x = \frac{2rh}{h+2r}$

15. En qué relación se encuentran los volúmenes de un cono de revolución y el cilindro circular recto de mayor volumen inscrito en el cono.

Resolución:



Cono de volumen máximo: $V_{cil} = \pi r^2 h$

$\Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{H-h}{H} \Rightarrow r = \frac{R}{H}(H-h)$

$V_{cil} = \pi h\frac{R^2}{H^2}(H-h)^2 = \pi\frac{R^2}{H^2}\underbrace{h(H-h)^2}_{f(h)}$

$f(h) = h(H^2 - 2Hh + h^2) = H^2h - 2Hh^2 + h^3$

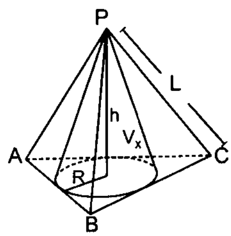
$f'(h) = 0 = H^2 - 4Hh + 3h^2$

$\left.\begin{matrix} H & -3h \\ H & -h \end{matrix}\right\}\ h = \frac{H}{3} \Rightarrow r = \frac23 R$

$E = \frac{V_{cono}}{V_{cilindro}} = \frac{\frac13\pi R^2 H}{\pi\left(\frac23 R\right)^2\frac{H}{3}} \quad \therefore\ E = \frac94$

16. Se tiene un tetraedro regular P-ABC de arista L, calcular el volumen del cono de revolución inscrito en el tetraedro cuyo vértice es P y su base está inscrita en el triángulo ABC.

Resolución:



$V_x = \frac13\pi R^2 h$

$\triangle ABC$: Equilátero

$R = \frac{L\sqrt3}{6}$

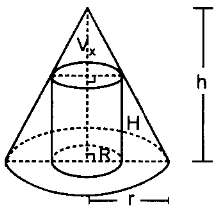
$h = h_{TR} = \frac{L\sqrt6}{3}$

$V_x = \frac13\pi\left(\frac{L\sqrt3}{6}\right)^2\frac{L\sqrt6}{3}$

$\therefore\ V_x = \frac{\pi L^3\sqrt6}{108}$

17. Hallar las dimensiones del cono de revolución de menor volumen circunscrito a un cilindro circular recto de radio de la base R y altura H.

Resolución:



Piden: r y h, cuando V_{cono} es mínimo.

$V_x = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Por triángulos semejantes: $\frac{R}{r} = \frac{h-H}{h}$

$\Rightarrow r = \frac{Rh}{h-H}$

$V_x = \frac{1}{3}\pi h\left(\frac{Rh}{h-H}\right)^2 \Rightarrow V_x = \frac{\pi R^2}{3}\left[\frac{h^3}{(h-H)^2}\right]$

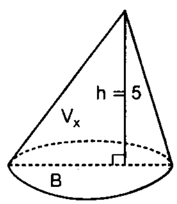
Sea: $f(h) = \frac{h^3}{(h-H)^2}$

$\Rightarrow f'(h) = \frac{3h^2(h-H)^2 - h^3(2)(h+1)}{(h-H)^4}$

$\Rightarrow h = 3H \wedge r = \frac{3}{2}R$

18. La proyección de la superficie cónica sobre un plano es un círculo de área 9π, si la altura del cono es 5, y el contorno es una circunferencia de longitud 8π, hallar el volumen.

Resolución:



Volumen del cono:

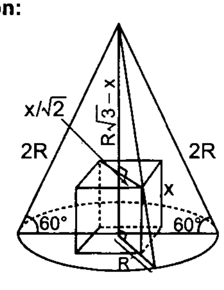
Dato: $B = 9\pi \wedge h = 5$

$\Rightarrow V_x = \frac{1}{3}(Bh)$

$V_x = \frac{1}{3}(9\pi)(5) \quad \therefore V_x = 15\pi$

19. Un cubo se encuentra inscrito en un cono equilátero si la generatriz del cono mide $(\sqrt{6} + 2)$. Calcular el volumen del cubo.

Resolución:



Por semejanza: $\frac{x/\sqrt{2}}{R} = \frac{R\sqrt{3}-x}{R\sqrt{3}}$

$x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = R\sqrt{6}$ ...(1)

Por dato: $R = \frac{\sqrt{6}+2}{2}$ ...(2)

(2) en (1): $x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{6}\left(\frac{\sqrt{6}+2}{2}\right)$

$x(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = \sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) \Rightarrow x = \sqrt{3}$

$\therefore x^3 = 3\sqrt{3}$

20. Hallar las dimensiones del cilindro recto de mayor volumen inscrito en un cono circular recto de radio de la base igual a R y altura H.

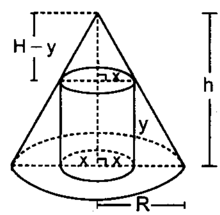
Resolución:

Volumen del cilindro:

$V = \pi x^2 y$ ...(1)

Por semejanza:

$\frac{x}{R} = \frac{H-y}{H} \Rightarrow y = H - \frac{Hx}{R}$ ...(2)



(2) en (1):

$V = \pi x^2\left(H - \frac{Hx}{R}\right)$

$V = \pi H x^2 - \frac{\pi H x^3}{R}$

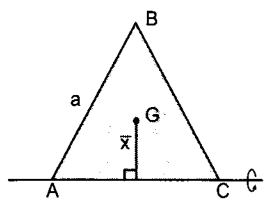
$V' = 2\pi Hx - \frac{3\pi Hx^2}{R} = 0$

Efectuando: $x = \frac{2R}{3}$

Luego: $y = \frac{H}{3}$

21. Una región triangular equilátera de lado "a" gira alrededor de un lado, hallar el volumen del sólido generado.

Resolución:



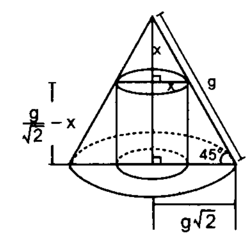
$\triangle ABC$ es equilátero $\Rightarrow x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

El volumen del sólido generado será:

$V = 2\pi\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{\pi a^3}{4}$

22. En un cono de revolución está inscrito un cilindro cuya área total es igual al área lateral del cono, el ángulo entre las generatrices del cono en su sección axial es 90°, si la generatriz del cono es "g", calcular la distancia del vértice del cono a la base superior.

Resolución:



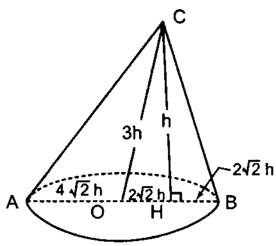
Por condición del problema:

$$2\pi x^2 + 2\pi x\left(\frac{g}{\sqrt{2}} - x\right) = \pi\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)g$$

Efectuando: $x = \frac{g}{2}$

23. Se tiene un cono circular oblicuo de altura h y eje de longitud 3h. Si el pie de la altura es el punto H que se encuentra en el diámetro $\overline{AB}$ de la base y AH = 3(HB) entonces el volumen del cono es:

Resolución:

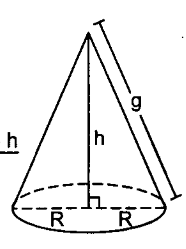


Volumen del cono será:

$V = \frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2}\,h)^2 h \qquad \therefore\ V = \frac{32}{3}\pi h^3$

24. El área lateral de un cono circular recto cuyo radio de la base es R unidades cuadradas, es igual a la suma de las área de la base y de la sección axial. Entonces, hallar el volumen del sólido limitado por el cono.

Resolución:



Piden: $V_{cono} = V_x = \frac{1}{3}\pi R^2 h$

Dato: $A_{SL} = A_{base} + A_{sec.\ axial}$

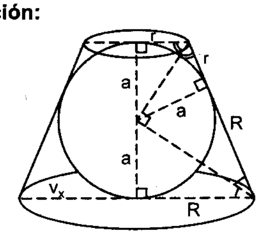
$\pi Rg = \pi R^2 + \frac{2Rh}{2} \Rightarrow g = \frac{\pi R + h}{\pi}$

$h^2 = g^2 - R^2 \Rightarrow h = \frac{2R\pi}{(\pi^2 - 1)}$

$V_x = \frac{1}{3}\pi R^2\left(\frac{2R\pi}{\pi^2 - 1}\right) \qquad \therefore\ V_x = \frac{2\pi^2 R^3}{3(\pi^2 - 1)}$

25. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, sabiendo que los radios de sus bases son "r" y R (r < R) respectivamente, y que en el sólido se puede inscribir una esfera.

Revolución:



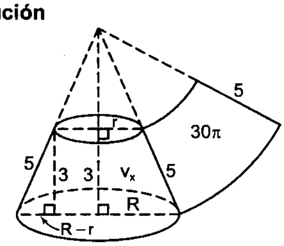
$V_x = \pi\frac{(2a)}{3}(R^2 + r^2 + Rr)$

⊾RM: $a^2 = Rr \Rightarrow a = \sqrt{Rr}$

$V_x = \frac{2\pi}{3}\sqrt{Rr}\,(R^2 + r^2 + Rr)$

26. El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular cuya área es de 30π. Calcular el volumen del tronco de cono, si la altura y la generatriz miden 3 y 5 respectivamente.

Resolución



$30\pi = \pi(R+r)5 \Rightarrow R + r = 6 \wedge R - r = 4$

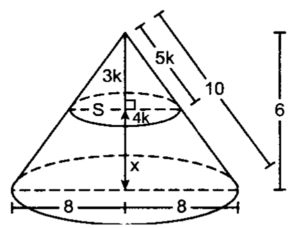
$\Rightarrow R = 5 \wedge r = 1$

$V_x = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr) = \frac{\pi 3}{3}[5^2 + 1^2 + 5(1)]$

$\therefore\ V_x = 31\pi$

27. En un cono de revolución la medida del radio de la base y su altura es 8 m y 6 m respectivamente. Se traza un plano paralelo a la base de modo que el área del círculo que se determina en el plano sea igual al área lateral del tronco de cono recto. Calcular la distancia de la base al plano (en m).

Resolución:



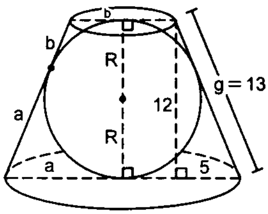
Dato: S = Área de la superficie lateral del tronco de cono

$\Rightarrow \pi(4k)^2 = \pi(4k + 8)(10 - 5k) \Rightarrow k = \frac{2}{3}\sqrt{5}$

$x = 6 - 3k = 6 - 3\left(\frac{2}{3}\sqrt{5}\right) \qquad \therefore\ x = 2(3 - \sqrt{5})$

28. En un tronco de cono de revolución se encuentra inscrita una esfera, si la suma de su diámetro con una de las generatrices del tronco cono es 25 y la suma de los radios de las bases del tronco es 13. Calcular el volumen del tronco de cono.

Resolución:



Dato: $2R + g = 25$ ...(1)

$a + b = 13$ ...(2)

$g = a + b = 13 \Rightarrow R = 6$

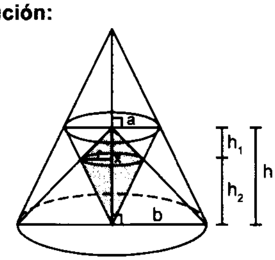
$\Rightarrow a - b = 5$ ...(3)

De (2) y (3): $a = 9 \wedge b = 4$

$V_{TC} = \pi\left(\frac{2R}{3}\right)(a^2 + b^2 + ab) \quad \therefore V_{TC} = 532\pi$

29. En un tronco de cono de revolución de radios de bases "a" y "b" y de altura "h", se construyen dos conos de revolución que tienen por bases, las bases del tronco y sus vértices son los centros de las bases opuestas. Hallar el volumen del sólido común a los conos.

Resolución:



Por semejanza:

$\frac{x}{b} = \frac{h_1}{h} \Rightarrow h_1 = \frac{xh}{b}$

$\frac{x}{a} = \frac{h_2}{h} \Rightarrow h_2 = \frac{xh}{a}$

Sumando:

$\underbrace{h_1 + h_2}_{h} = \frac{\alpha h}{a} + \frac{\alpha h}{b}$

$h = xh\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$

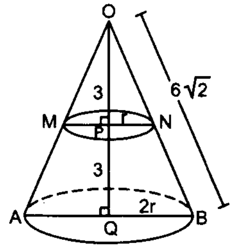
El volumen pedido será:

$V = \frac{\pi}{3}x^2h_1 + \frac{\pi}{3}x^2h^2 \Rightarrow V = \frac{\pi}{3}x^2\underbrace{(h_1 + h_2)}_{h}$

$V = \frac{\pi}{3}\left(\frac{ab}{a+b}\right)^2 h \quad \therefore V = \frac{\pi h a^2 b^2}{3(a+b)^2}$

30. Un cono recto cuya generatriz mide $6\sqrt{2}$ es seccionado por un plano paralelo a la base obteniéndose un tronco cuya altura 3 y cuyas áreas de las bases están en la relación como 1 es a 4. Hallar el volumen del cono.

Resolución:



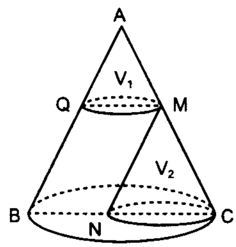
$\overline{MN}$ es base media $\Rightarrow OP = PQ = 3$

$\triangle OQB$: $(6\sqrt{2})^2 = 36 + 4r^2 \Rightarrow r = 3$

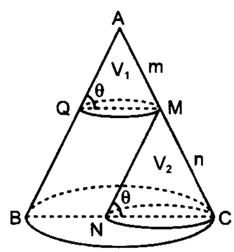
Volumen del cono:

$V = \frac{1}{3}\pi(6)^2(6) \quad \therefore V = 72\pi$

31. En la figura se tiene dos conos cuyos volúmenes son V_1 y V_2; $\overline{MN} \parallel \overline{AB}$; $\overline{QM} \parallel \overline{BC}$. Hallar el volumen del cono total.



Resolución:



$\frac{V_1}{V_T} = \left(\frac{m}{m+n}\right)^3 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{V_1}}{\sqrt[3]{V_T}} = \frac{m}{m+n}$ ...(1)

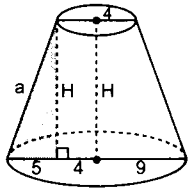
$\frac{V_2}{V_T} = \left(\frac{n}{m+n}\right)^3 \Rightarrow \frac{\sqrt[3]{V_2}}{\sqrt[3]{V_T}} = \frac{n}{m+n}$ ...(2)

Sumando (1) y (2): $\frac{\sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2}}{\sqrt[3]{V_T}} = \frac{m+n}{m+n}$

$\sqrt[3]{V_T} = \sqrt[3]{V_1} + \sqrt[3]{V_2}$

32. En un tronco de cono de revolución, las bases de los radios miden 4 y 9 respectivamente. Si el área total del cono es 266π, hallar su volumen.

Resolución:



Dato: $A_T = 266\pi$

$266\pi = \pi[4^2 + 9^2 + (4 + 9)a]$

$\Rightarrow 13a = 169 \Rightarrow a = 13$

Luego: $a^2 = 13^2 = H^2 + 5^2 \Rightarrow H = 12$

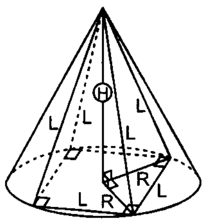
El volumen del tronco de cono será:

$V = 12[\pi(4^2) + \pi(9^2) + \pi(4)9]/3$

$\therefore V = 532\pi$

33. Hallar el volumen de un cono de revolución si en él se puede inscribir una pirámide cuadrangular regular con todas sus aristas de longitud L y tal que la base de la pirámide se encuentre contenida en la base del cono.

Resolución:



$V_C = \dfrac{1}{3}\pi R^2 H$ ...(1)

Del gráfico: $L = R\sqrt{2}$

$\Rightarrow R = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ...(2)

Luego $H^2 = L^2 - R^2$

$\Rightarrow H^2 = L^2 - \dfrac{L^2}{2}$

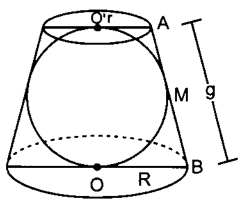
$\Rightarrow H = \dfrac{L}{\sqrt{2}}$ ...(3)

Reemplazando (3) y (2) en (1)

$V_C = \dfrac{1}{3}\pi\left(\dfrac{L}{\sqrt{2}}\right)^2\left(\dfrac{L}{\sqrt{2}}\right) \quad \therefore V_C = \dfrac{\pi L^3\sqrt{2}}{12}$

34. Calcular el área lateral del tronco de cono de revolución de generatriz 1 circunscrito a una esfera.

Resolución:



$A_L = \pi g(R + r)$ ...(1)

Por propiedad: $OB = BM = R \wedge O'A = AM = r$

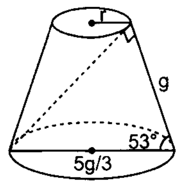
$\Rightarrow R + r = g$ ...(2)

(2) en (1): $A_L = \pi(g)(g) \Rightarrow A_L = \pi g^2$

Pero por dato: $g = 1 \quad \therefore A_L = \pi$

35. La generatriz de un tronco de cono recto forma u ángulo agudo con la base inferior de medida 53°. La generatriz es perpendicular al segmento que une su extremo superior con el extremo inferior de la generatriz diametralmente opuesta. Si la generatriz mide "g", hallar el área lateral del tronco de cono recto.

Resolución:



De la figura: $r = 7g/30 \wedge R = 5g/6$

Superficie lateral: $A_L = \pi g(R + r)$

Reemplazando: $A_L = \pi g\left(\dfrac{5}{6}g + \dfrac{7}{30}g\right)$

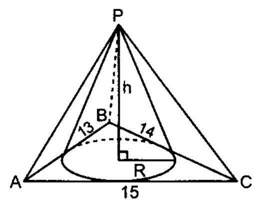
$\therefore A_L = \dfrac{16}{15}\pi g^2$

36. Por el vértice de un cono recto cuyo volumen es $64\pi\sqrt{3}/3$, se trazan tres planos tangentes a la circunferencia de la base, determinándose en dicha base una región triangular de lados 13; 14 y 15. Hallar el volumen del sólido determinado por los planos y el plano de la base del cono.

Resolución:

$A_{\Delta ABC} = \sqrt{21(21 - 14)(21 - 15)(21 - 13)}$

$\Rightarrow A_{\Delta ABC} = 84$



También:

$A_{\Delta ABC} = 21R = 84$

$\Rightarrow R = 4$

Por dato:

$V_C = 64\pi\sqrt{3}/3 = \pi R^2 h/3$

$64\sqrt{3} = (4)^2 h$

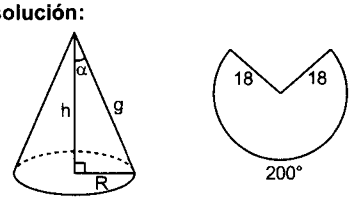
$\Rightarrow h = 4\sqrt{3}$

Luego: $V_{P\text{-}ABC} = 1(84)(4\sqrt{3})/3$

$\therefore V_{P\text{-}ABC} = 112\sqrt{3}$

37. El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular de radio 18 y arco de medida 200°. Hallar el volumen del sólido limitado por el cono.

Resolución:



Por teoría: $200° = R(360°)/g$

$\Rightarrow R/g = 5/9 \Rightarrow R = 5(18)/9 \Rightarrow R = 10$

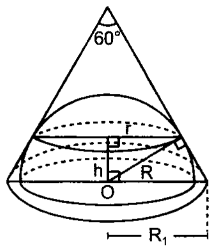
Luego: $h^2 = 18^2 - 10^2 \Rightarrow h^2 = (8)(28)$

$\Rightarrow h^2 = 16 \times 14 \Rightarrow h = 4\sqrt{14}$

El volumen del cono será:
$\pi(10)^2(4\sqrt{14})/3 \quad \therefore\ 400\pi\sqrt{14}/3$

38. En un cono cuya generatriz es igual al diámetro de la base, está inscrita una semiesfera de radio R de modo que su círculo mayor se encuentra en el plano de la base del cono. Calcular el volumen del tronco de cono que tiene como bases la base del cono y el círculo limitado por la circunferencia de tangencia entre la semiesfera y el cono.

Resolución:



De la figura: $h = \frac{R}{2};\ r = \frac{R}{2}\sqrt{3};\ R_1 = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$

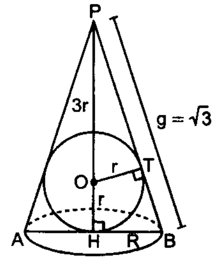
Volumen del tronco de cono:

$$V = \frac{\pi R}{6}\left[\frac{3R^2}{4} + \frac{4R^2}{3} + \frac{R}{2}\sqrt{3}\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)\right]$$

$$\therefore\ V = \frac{37}{72}\pi R^3$$

39. La longitud de la altura de un cono recto es cuatro veces la longitud del radio de la esfera inscrita en un cono de revolución. Si la generatriz mide hallar el área de la superficie lateral del cono.

Resolución:



$⊾PHB \sim ⊾PTO$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3}}{3r} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Superficie lateral del cono:

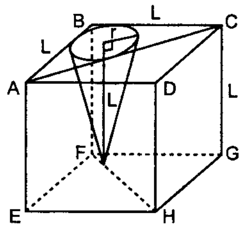
$A_L = \pi R g$

$A_L = \pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sqrt{3}$

$\therefore\ A_L = \pi$

40. ABCD-EFGH es un hexaedro regular cuya arista mide L. Si la altura de un cono recto es igual a la arista del hexaedro y el radio de la base del cono es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC, hallar el volumen del sólido limitado por el cono.

Resolución:



$⊾ABC$ (por el teorema de Poncelet):

$$2L = L\sqrt{2} + 2r \Rightarrow r = \frac{L}{2}(2-\sqrt{2})$$

$$\Rightarrow V_C = \frac{1}{3}\pi\frac{L^2}{4}(2-\sqrt{2})^2L \quad \therefore\ V_C = \frac{\pi}{6}L^3(3-2\sqrt{2})$$

PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2011 - II)

En un cono circular recto la generatriz mide 12 cm y una cuerda de la circunferencia de la base mide 16 cm. Si la distancia de la base mide 16 cm y la distancia del centro de dicha circunferencia a la cuerda es 4 cm, entonces el volumen del cono (en cm^3) es:

A) $\frac{640\pi}{3}$ B) $\frac{641\pi}{3}$ C) $\frac{642\pi}{3}$

D) $\frac{643\pi}{3}$ E) $\frac{644\pi}{3}$

Resolución:

$⊾OHA$: $R^2 = 4^2 + 8^2$

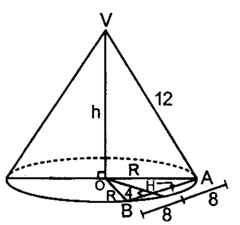
$\Rightarrow R = 4\sqrt{5}$

$⊾VOA$: $h^2 = 12^2 - (4\sqrt{5})^2$

$\Rightarrow h = 8$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi(4\sqrt{5})^2(8)$

$\Rightarrow V = \frac{640\pi}{3}$



Clave: A

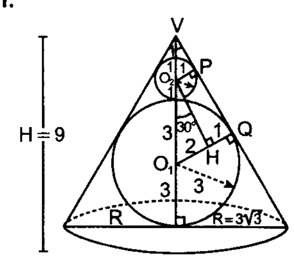
PROBLEMA 2 (UNI 2011 - II)

Considere dos esferas tangentes exteriormente, cuyos radios miden 1 cm y 3 cm respectivamente. Calcule el volumen (en cm^3) del cono circular recto circunscrito a las dos esferas.

A) 80π B) 81π C) 82π

D) 83π E) 84π

Resolución:



$⊾O_1HO_2$ Notable (30°; 60°)

$VO_2 = 2; \quad R = 3\sqrt{3}; \quad h = 9$

$V = \frac{1}{3}\pi(3\sqrt{3})^2(9) \quad \Rightarrow V = 81\pi$

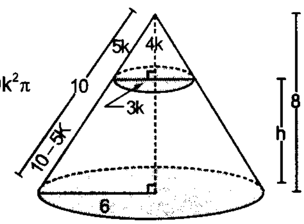
Clave: B

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

En un cono recto de 6 cm de radio y 8 cm de altura, se traza un plano paralelo a su base de modo que el área del círculo que se determina en el plano sea igual al área lateral del tronco de cono determinado. Calcule la altura del tronco de cono (en cm).

A) $8 - 2\sqrt{11}$ B) $8 - 2\sqrt{10}$ C) $8 - 2\sqrt{9}$
D) $8 - 2\sqrt{8}$ E) $8 - 2\sqrt{7}$

Resolución:



Piden: h

Del dato: $A_{lat(tronco)} = A$

$\pi(3K + 6)(10 - 5k) = 9k^2\pi$

$K = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow h = 8 - 4K$

$\therefore h = 8 - 2\sqrt{10}$

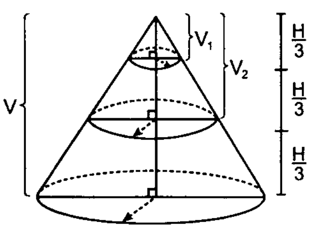
Clave: B

PROBLEMA 4 (UNI 2013 - I)

Se tiene un cono circular recto de volumen V y longitud de la altura H. La superficie lateral de este cono se interseca por dos planos paralelos a la base que trisecan a la altura H, obteniéndose conos parciales de volumen V_1 y V_2 respectivamente ($V_2 > V_1$).
Si $V = aV_1 + bV_2$, calcule el cociente a/b, sabiendo que $a - 2b = 12$

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

Resolución:



Piden: a/b

Datos: $V = aV_1 + bV_2 \quad \wedge \quad a - 2b = 12$

Por propiedad: $V_2 = 8V_1 \quad \wedge \quad V = 27V_1$

$\Rightarrow 27V_1 = aV_1 + b(8)V_1$

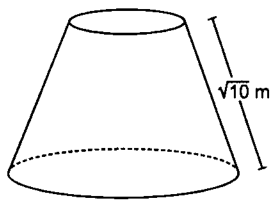
$27 = a + 8b; \quad 12 = a - 2b$

$\Rightarrow a = 15; \; b = \frac{3}{2} \qquad \therefore \frac{a}{b} = 10$

Clave: C

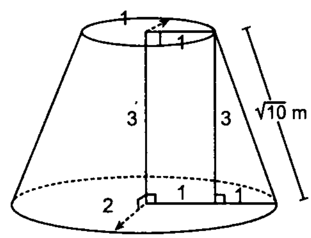
PROBLEMA 5 (UNI 2015 - I)

En la panamericana cerca de Casma se ha formado una duna en forma de tronco de cono de revolución. Las longitudes de las circunferencias son 4π m y 2π m. Ver figura. Halle el volumen de la duna en metros cúbicos.



A) 3π B) 5π C) 7π
D) 10π E) 11π

Resolución:



Piden: V_{tronco}

$V_{tronco} = \frac{\pi 3}{3}(1^2 + 2^2 + 2 \times 1)$

$\therefore V_{tronco} = 7\pi$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se tiene un cono de revolución de 3 m de radio de la base y 4 m de altura. Calcular a que distancia del vértice se debe de trazar un plano paralelo a la base, para que el área de la sección determinada por dicho plano sea igual al área de la superficie lateral del tronco de cono determinado.

A) $3\sqrt{7}$ B) $2\sqrt{10}$ C) $3\sqrt{10}$
D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{7}$

2. Se tienen dos conos equiláteros que tienen el mismo vértice y que son tangentes exteriormente, tal que la razón de sus áreas totales es "k" y la altura del cono mayor mide H (k > 1). Calcular la longitud de su distancia entre los centros de sus bases.

A) $H\sqrt{\frac{k+\sqrt{k}+1}{k}}$ B) $H\sqrt{\frac{k-\sqrt{k}+1}{k}}$
C) $H\sqrt{\frac{k-\sqrt{k}-1}{2}}$ D) $H\sqrt{\frac{k-\sqrt{k}+1}{2}}$
E) $H\sqrt{\frac{k-2\sqrt{k}-1}{2}}$

3. En un cono recto la longitud de la generatriz es igual al diámetro de la base, se inscribe una esfera cuyo radio mide R. Calcular el volumen del tronco de cono determinado por la circunferencia tangencial y la base del cono.

A) $\frac{13}{8}\pi R^3$ B) $\frac{21}{8}\pi R^3$ C) $\frac{15}{8}\pi R^3$
D) $\frac{13}{9}\pi R^3$ E) $\frac{4}{9}\pi R^3$

4. Se tienen dos conos rectos congruentes tangentes por su generatriz y cuyos vértices coinciden. Si sus alturas son H y el radio de la base es "r", hallar el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de las bases y el vértice común de los conos.

A) $\frac{H^2r^2}{H^2-r^2}$ B) $\frac{H^3r}{H^2-r^2}$ C) $\frac{H^3r}{H^2-r^2}$
D) $\frac{Hr^3}{H^2+r^2}$ E) $\frac{H^3r}{2H^2+r^2}$

5. Una esfera está inscrita en un cono equilátero de 108 de área total. Calcular el área de la superficie esférica.

A) 36 B) 42 C) 48
D) 54 E) 60

6. Si los radios de la base de un tronco de cono circular recto son R y r. Calcular el área de su sección axial para que el área de la superficie lateral sea igual a la suma de las áreas de las bases de dicho tronco.

A) 4Rr B) 2Rr C) 6Rr
D) 3Rr E) 7Rr

7. En un tronco de cono está inscrito una esfera, cuyo volumen es 6/13 del volumen del tronco de cono. Calcular la medida del ángulo entre la generatriz del tronco de cono y el plano de su base inferior.

A) 60° B) 45° C) 30° D) 37° E) 53°

8. El desarrollo de la superficie lateral de un tronco de cono de revolución es un trapecio circular cuyo ángulo central correspondiente mide 60° y además los radios del mayor y menor sector circular son respectivamente R y r. Calcular el volumen de dicho sólido.

A) $\frac{\pi\sqrt{35}}{324}(R^3-r^3)$ B) $\frac{\pi\sqrt{35}}{648}(R^3-r^3)$
C) $\frac{\pi\sqrt{55}}{648}(R^3-r^3)$ D) $\frac{\pi\sqrt{35}}{648}(R^3+r^3)$
E) $\frac{\pi\sqrt{35}}{324}(R^3+r^3)$

9. En un cono de revolución la medida del ángulo entre dos generatrices diametralmente opuestas es 90°, se inscribe un cilindro cuya área de su superficie total es igual al área de la superficie lateral del cono. Calcular la razón de alturas de ambos sólidos.

A) $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$ B) $2-\sqrt{2}$ C) $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$
D) $\frac{3-\sqrt{2}}{2}$ E) $\frac{2-\sqrt{3}}{4}$

10. En un cono circular la altura mide H, se traza un plano secante determinando una sección transversal. ¿A qué distancia del vértice del cono debe trazarse el plano para que determine dos sólidos equivalentes?

A) $\frac{\sqrt{4}}{2}H$ B) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}H$ C) $\frac{\sqrt[3]{3}}{3}H$
D) $\frac{\sqrt[3]{4}}{4}H$ E) $\frac{\sqrt[3]{2}}{4}H$

11. En la base de un cono circular recto cuya altura mide "h" está inscrito un triángulo rectángulo, los planes que contienen al vértice del cono y los catetos de dicho triángulo forman con el plano de la base del cono un ángulo diedro de 30° y 60°. Calcular el volumen de dicho cono.

A) $\frac{12}{13}\pi h^3$ B) $\frac{11}{12}\pi h^3$ C) $\frac{13}{12}\pi h^3$
D) $\frac{12}{11}\pi h^3$ E) $\frac{13}{15}\pi h^3$

12. En una semiesfera está inscrito un cono circular, el vértice coincide con el centro de la circunferencia que sirve de base a la semiesfera; la recta que une el centro de la base del cono con un punto de la circunferencia mayor de la semiesfera determina con el plano de la base del cono un ángulo de 30°. Calcular la razón entre los volúmenes del cono y la semiesfera.

A) $\sqrt{3}/2$ B) $3\sqrt{3}/3$ C) $3\sqrt{2}/2$
D) $\sqrt{2}/3$ E) $\sqrt{3}/9$

13. ABCD-EFGH es un hexaedro regular cuya arista mide L. Si la altura de un cono recto es congruente a la arista del hexaedro y el radio de la base del cono es el radio de la circunferencia inscrita al triángulo ABC, hallar el volumen del sólido limitado por el cono.

A) $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)\pi L^3$ B) $\left(\frac{3-\sqrt{2}}{2}\right)\pi L^3$
C) $\left(\frac{3-\sqrt{2}}{4}\right)\pi L^3$ D) $\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{6}\right)\pi L^3$
E) $\left(\frac{4-2\sqrt{2}}{3}\right)\pi L^3$

14. La generatriz de un tronco de cono forma un ángulo cuya medida es 53° con la base inferior y es perpendicular a la recta que une su extremo superior con el extremo inferior de la generatriz opuesta. Si la generatriz mide "g", calcular el área lateral del tronco de cono.

A) $\frac{7\pi g^2}{6}$ B) $\frac{8\pi g^2}{6}$ C) $\frac{10\pi g^2}{9}$
D) $\frac{16\pi g^2}{15}$ E) $\frac{17\pi g^2}{15}$

15. Un tronco de cilindro de revolución está inscrito en un cono de revolución donde sus generatrices están inclinadas formando un ángulo cuya medida es 30 con respecto a la base. Además, el diámetro $\overline{AB}$ de la base del cilindro, está contenido en el diámetro $\overline{MN}$ de la base del cono, tal que MA = AB = 2(BN). Determinar la relación de los volúmenes de los sólidos limitados por el tronco de cilindro y el cono recto.

A) 9/64 B) 15/64 C) 36/125
D) 27/125 E) 18/125

16. En un tronco de cono de revolución cuyo volumen es 63, las longitudes de los diámetros de sus bases están en la relación de 1 a 2, calcular el volumen del sólido que se obtiene intersectando los conos que tienen por bases, las bases del tronco y por vértices los centros de las bases respectivamente opuestos.

A) 3,6 B) 3,8 C) 4,0
D) 4,2 E) 4,4

17. Al desarrollar dos conos rectos se obtienen 2 sectores circulares que tienen perímetros $\left(\frac{6+\pi}{3}\right)R$ y $\frac{2(3+\pi)}{3}R$. Si la longitud de la generatriz de los conos es R, calcular la razón de los volúmenes de los conos.

A) $\frac{\sqrt{50}}{32}$ B) $\frac{\sqrt{60}}{32}$ C) $\frac{\sqrt{70}}{32}$
D) $\frac{\sqrt{80}}{32}$ E) $\frac{\sqrt{90}}{32}$

18. Calcular el volumen de la intersección de los conos que se encuentran inscritos en un cubo de lado "k" tal que el vértice de un cono se encuentra en el centro de la base del otro y las bases de los conos son círculos inscritos en caras opuestos del cubo.

A) $\frac{\pi k^3}{24}$ B) $\frac{\pi k^3}{48}$ C) $\frac{\pi k^3}{12}$
D) $\frac{\pi k^3}{32}$ E) $\frac{\pi k^3}{42}$

19. Un cono de revolución está inscrito en un prisma recto. Calcular el volumen del prisma si el volumen de la esfera inscrita en el cono es 36π y el perímetro de la base del prisma es cinco veces la longitud de la generatriz del cono. (la superficie esférica y la base del cono son equivalentes, la base del cono está inscrita en una base del prisma).

A) 1240 B) 1200 C) 2400
D) $1200\sqrt{2}$ E) $1200\sqrt{3}$

20. En un octaedro regular P-ABCD-Q la arista mide L unidades, calcular el volumen del cono circular cuya base se encuentra inscrita en la cara BCQ y su vértice coincide con el punto P.

A) $\frac{\sqrt{6}\pi L^3}{208}$ B) $\frac{\sqrt{6}\pi L^3}{100}$ C) $\frac{\sqrt{6}\pi L^3}{108}$
D) $\frac{\sqrt{3}\pi L^3}{10}$ E) $\frac{\sqrt{2}\pi L^3}{108}$

21. Se tiene un cono y un embudo congruente, cuyas alturas miden H, se traza un plano paralelo a las bases de manera que el área de la sección del cono sea al doble del área de la sección del embudo. Calcular la distancia del vértice del cono al plano.

A) $\frac{\sqrt{3}}{2}H$ B) $\frac{H}{2}$ C) $\frac{H}{2}\sqrt{2}$
D) $H(\sqrt{2}-1)$ E) $H(2-\sqrt{2})$

22. Siendo el área de la base de un cono recto, la mitad de su área lateral. Hallar la medida del ángulo que determina la altura y la generatriz.

A) 20° B) 25° C) 30°
D) 36° E) 45°

23. En un tronco de cono recto la altura mide 8 m y el segmento de mediatriz de una de sus generatrices limitada por la altura mide 3 m. Calcular el área de la superficie lateral.

A) 10π B) 18π C) 28π
D) 38π E) 48π

24. Calcular el volumen de un cono de revolución, si en él se puede inscribir una pirámide cuadrangular regular con todas sus aristas de longitud L y tal que la base de la pirámide se encuentre contenida en la base del cono.

A) $\frac{\pi L^3\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{\pi L^3\sqrt{2}}{6}$ C) $\frac{\pi L^3\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\pi L^3\sqrt{2}}{4}$ E) $\frac{\pi L^3\sqrt{2}}{12}$

25. Un cono de revolución y un cilindro circular recto son secantes equivalentes y tienen la misma base. ¿Qué fracción de volumen del cono no es común a la del cilindro?

A) 8/27 B) 8/29 C) 6/25
D) 9/25 E) 11/30

26. En un tronco de cono de revolución cuya longitud de su altura es H y los radios de su base R y r, calcular el volumen del sólido que es la intersección de los conos cuyos vértices son los centros de las bases.

A) $\frac{\pi H}{3}\left(\frac{Rr}{R+r}\right)^2$ B) $\frac{\pi H}{4}\left(\frac{Rr}{R+r}\right)^2$
C) $\frac{\pi H}{5}\left(\frac{Rr}{R+r}\right)^2$ D) $\frac{\pi H}{6}\left(\frac{Rr}{R+r}\right)^2$
E) $\frac{\pi H}{7}\left(\frac{Rr}{R+r}\right)^2$

27. Un plano secante a un cono recto de revolución de base circular cuyo radio mide 2 pasa por el vértice e interseca a la base determinando en su intersección con el cono un triángulo equilátero cuyo lado mide $2\sqrt{3}$. Entonces, el volumen del sólido limitado por el cono es:

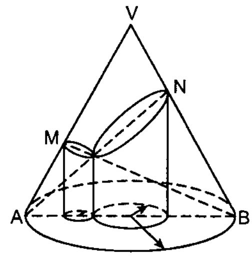
A) $8\sqrt{2}\frac{\pi}{3}$ B) $4\sqrt{2}\frac{\pi}{3}$ C) $3\sqrt{2}\pi$
D) $4\sqrt{2}\pi$ E) $2\sqrt{2}\pi$

28. En un tronco de cono de revolución los radios de las bases y la generatriz miden 1; 2 y 6 cm respectivamente. Calcular la longitud del menor recorrido, para ir de un punto de la base inferior a otro de la base superior recorriendo la superficie lateral y tal que dichos puntos sean los extremos de una generatriz.

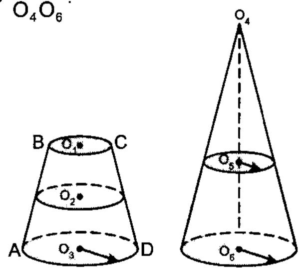
A) $6\sqrt{2}$ cm B) $3\sqrt{3}$ cm C) $6\sqrt{3}$ cm
D) $9\sqrt{3}$ cm E) $9\sqrt{2}$ cm

29. En la figura mostrada, AM = MV y NB = 3(VN). Calcular la razón entre los volúmenes de los troncos de cilindro de revolución.

A) $\frac{104}{825}$
B) $\frac{72}{825}$
C) $\frac{33}{80}$
D) $\frac{87}{75}$
E) $\frac{33}{75}$

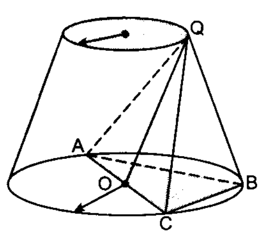


30. En el gráfico se muestra un tronco de cono de revolución y un cono de revolución. En el tronco de cono se traza un plano paralelo a las bases por O_2 tal que $O_1O_2 = O_2O_3 = AO_3$, $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ determinan un ángulo de medida 37°. En el cono también se traza un plano paralelo a la base por O_5. Si la razón de volúmenes de sólidos determinados tanto en el tronco de cono como en el cono son iguales calcule $\frac{O_4O_5}{O_4O_6}$.



A) $\sqrt[3]{\frac{7}{26}}$ B) $\sqrt[3]{\frac{9}{17}}$ C) $\sqrt[3]{\frac{5}{26}}$
D) $\sqrt[3]{\frac{13}{27}}$ E) $\sqrt[3]{\frac{8}{17}}$

31. En la figura mostrada se tiene un tronco de cono de revolución. Si AB = BC, OQ = QB y el volumen del sólido Q-ABC es 100, calcular el volumen del tronco.



A) 140π B) 120π C) 175π
D) 150π E) 160π

32. Según el gráfico mostrado, calcular la razón de volúmenes del tronco de cono circular recto y del cilindro circular recto mostrados, si AB = BC.

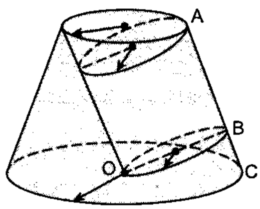
A) $28\sqrt{3}$

B) $\frac{28\sqrt{3}}{9}$

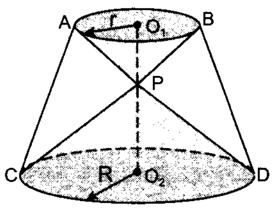
C) 28

D) $\frac{26}{9}$

E) $\frac{26\sqrt{3}}{9}$



33. En el gráfico se muestra al tronco de cono circular recto. Los conos interiores a dicho tronco son equivalentes. PA = PC, R = 8, r = 3, calcular el volumen de dicho tronco.



A) $\frac{\pi\sqrt{73}}{3}(73 + 2\sqrt{6})$ B) $\frac{\pi\sqrt{73}}{3}(73 - 2\sqrt{6})$

C) $\frac{\pi\sqrt{82}}{3}(82 - 3\sqrt{82})$ D) $\frac{\pi\sqrt{82}}{3}(82 + 3\sqrt{82})$

E) $\frac{97}{3}\pi\sqrt{73}$

34. Se tiene un tronco de cono cuyas bases son círculos de radios 2 y 4. Calcular el radio del círculo paralelo a las bases que determinan troncos parciales equivalentes.

A) 36 B) $\sqrt[3]{36}$ C) 3,5
D) 3,6 E) $\sqrt{8}$

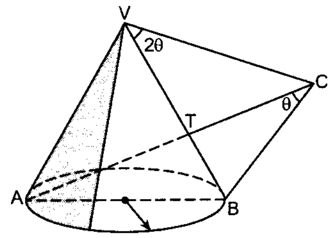
35. Se tiene un tronco de cono cuyas bases tienen área S_1 y S_2 ($S_2 > S_1$), se traza un plano paralelo a las bases. Dicho plano dista de la base menor y mayor "m" y "n" respectivamente. Hallar el área de la sección determinada en el tronco por el plano paralelo a las bases.

A) $\frac{m\sqrt{S_2} - n\sqrt{S_1}}{m+n}$ B) $\frac{m^2\sqrt{S_2} + n^2\sqrt{S_1}}{m+n}$

C) $\left(\frac{m\sqrt{S_2} + n\sqrt{S_1}}{m+n}\right)^2$ D) $\left(\frac{n\sqrt{S_2} + m\sqrt{S_1}}{m+n}\right)^2$

E) $\left(\frac{m^2\sqrt{S_2} + n^2\sqrt{S_1}}{m+n}\right)^2$

36. En el gráfico se tiene un cono de revolución cuya generatriz mide 3 m y BC = 2 m. Calcular el área de la superficie lateral del cono, si $\overline{VC}$ toma un valor entero impar. $\overline{VB} \cap \overline{AC} = \{T\}$

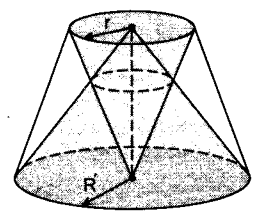


A) 2π m^2 B) 4π m^2 C) 5π m^2
D) 3π m^2 E) $3,2\pi$ m^2

37. En un hexaedro ABCD-EFGH cuya arista mide 12, en $\overline{BF}$ y $\overline{CG}$ se ubican los puntos M y N respectivamente. Si $\overline{MN}$ // $\overline{FG}$ y EM = 3 calcular el volumen del cono cuya base está limitada por la circunferencia inscrita en el triángulo GMN y de vértice A.

A) 12π B) 16π C) 8π
D) 10π E) 7π

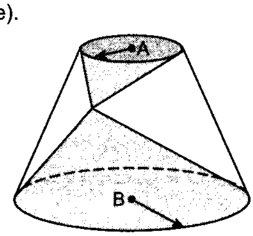
38. Se tiene un tronco de cono de revolución de volumen igual a 63 m^3. Calcular el volumen del sólido que resulta de intersecar los conos que tienen por bases las bases del tronco y por vértices los centros de dichas bases. (R = 2r)



A) $\frac{123}{27}$ B) 4 C) $\frac{154}{27}$

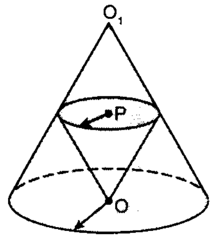
D) $\frac{123}{54}$ E) 16

39. Según el gráfico se tiene un tronco de cono cuyas bases tienen áreas A y B, interiormente se ubica un punto O. Si el volumen del tronco es: calcular $\frac{V_A}{A} + \frac{V_B}{B}$ (V_A y V_B son los volúmenes de los conos de vértice O y las áreas de las bases A y B respectivamente).



A) $(A + B)^{-1}$ B) $(A + 2\sqrt{AB} + B)^{-1}$
C) $(A + 2\sqrt{AB})^{-1}$ D) $(A + \sqrt{AB} + B)^{-1}$
E) $A + \sqrt{AB} + B$

40. En el gráfico los conos de vértices O_1, O y centros de sus bases O y P respectivamente son semejantes. Calcular la razón de los volúmenes de dichos sólidos.



A) 1 B) 4 C) 7 D) 8 E) 9

41. En un tronco de cono de revolución, el área de la superficie lateral es 4π veces multiplicado por la generatriz y el radio de la base menor, la medida del ángulo determinado por dos generatrices diametralmente opuestos es 53° y el radio de la base mayor es 9. Calcular el volumen del cono deficiente.

A) 18π B) 36π C) 27π
D) 54π E) 45π

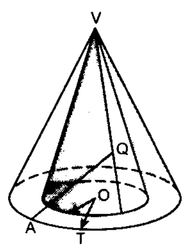
42. Calcular la altura de un cilindro recto circular de volumen máximo, inscrito en un cono circular recto de radio 5 y altura 12.

A) 3 B) 6 C) 4 D) 5 E) 10

43. Se tiene el prisma regular ABC-DEF en el cual se inscribe el cono cuyo vértice es el baricentro de la región triangular DCB y cuya base circular está inscrita en la base DEF. Calcular la razón de volúmenes de los sólidos.

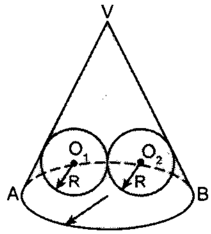
A) $\frac{27\sqrt{3}}{2\pi}$ B) $\frac{6\sqrt{3}}{\pi}$ C) $\frac{8\sqrt{3}}{\pi}$
D) $\frac{12\sqrt{3}}{\pi}$ E) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}$

44. En el gráfico se muestra dos conos de revolución, en el cual $\overline{AQ}$ es tangente a la superficie del cono menor en Q. Si AQ = 13 y VO = 3(QT) = 15, calcular el volumen del sólido limitado por ambos conos.



A) 700π B) 800π C) 720π
D) 820π E) 900π

45. En un cono de revolución se inscribe dos esferas como se muestra en la gráfica. Si AB = 30 y O_1O_2 = 12, calcular el volumen del cono determinado por un plano tangente a las esferas y paralelo a la base del cono de revolución.



A) 4000π B) 3000π C) 7000π
D) 800π E) 8000π

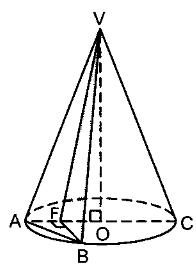
46. En un cono de revolución por un punto P de la generatriz que lo divide en una relación de 1 a 3, se traza una recta perpendicular que intersecta a la prolongación del diámetro en Q. Si PQ = 12 y el radio de la base es 3, calcular el producto del área de la sección axial y el área de la superficie lateral del cono.

A) 422π B) 421π C) 312π
D) 432π E) 415π

47. Calcular el volumen de un cono de base circular cuya altura mide 7 y además la proyección del vértice del cono es un vértice del hexágono regular circunscrito a la base cuya área de su región es $60\sqrt{3}$.

A) 30π B) 32π C) 70π
D) 37π E) 40π

48. En la figura el diedro que forman el triángulo VFB y la base del cono mide 2α, AB = a y AF = b. Calcular el área de la superficie lateral de cono. ($m\angle AVO = 90° - \alpha$)



A) $\frac{\pi a^3}{2b}$ B) $\frac{\pi a^3}{b}$ C) $\frac{\pi b^3}{a}$
D) $\frac{2\pi b^3}{a}$ E) $\frac{\pi b^3}{2a}$

49. Determinar el ángulo en el vértice de la sección axial de un cono de revolución circunscrito a cuatro esferas congruentes dispuestas de manera que cada una de ellas esté en contacto con las otras tres.

A) arccos(1/3) B) arccos(1/4)
C) arccos(1/5) D) arccos(1/6)
E) arccos(1/7)

50. La altura de un cono de revolución es de 4 m y el radio de su base mide 3 m, dicho cono es intersectado por un plano paralelo a su base de tal manera que la superficie total del cono resultante sea igual a la superficie lateral del cono primitivo. Calcular la distancia del vértice del cono al plano.

A) $\sqrt{5}$ B) $\sqrt{7}$ C) 3
D) $\sqrt{10}$ E) $\sqrt{13}$

51. El volumen de un tronco de cono de revolución es 336π cm^3 la altura mide 4 cm y el radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor. Hallar el radio de la base mayor.

A) 12 cm B) 6 cm C) 8 cm
D) 5 cm E) $4\sqrt{2}$ cm

52. Calcular el radio de la esfera circunscrita a un cono circular recto de 12 m de radio básico y 18 m de altura, si el centro de la esfera es interior al cono.

A) 10 B) 8 C) 12
D) 13 E) 15

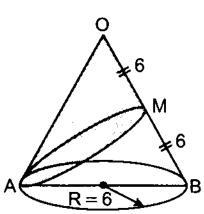
53. Una cuerda del círculo base de un cono circular recto de 8 m de altura, mide 16 m. La distancia de la cuerda al centro del círculo de la base es de 4 m. Calcular el área lateral del cono.

A) 12π m^2 B) $48\sqrt{5}\pi$ m^2 C) 96π m^2
D) 96π m^2 E) 48π m^2

54. Calcular el volumen de un tronco de cono cuyas bases son círculos de 2 y 6 m de radio y sabiendo que el área del tronco de conos es igual a la suma de las áreas de las bases.

A) 52π m^3 B) 53π m^3 C) 54π m^3
D) 55π m^3 E) 56π m^3

55. Dado un cono de revolución, calcular el volumen del cono cuya base es una sección perpendicular a $\overline{OB}$ y OM = MB.

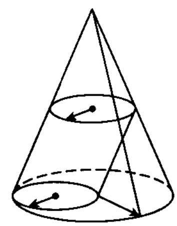


A) $12\sqrt{2}\pi$ B) $16\sqrt{6}\pi$ C) $\frac{36}{5}\sqrt{3}\pi$
D) $18\sqrt{6}\pi$ E) $24\sqrt{3}\pi$

56. Calcular el volumen de un cono recto de revolución sabiendo que un punto cualquiera de una de sus generatrices dista de la base 6 m, del vértice del cono 5 m y de la altura 3 m.

A) $187{,}5\pi$ m^3 B) 1875π m^3 C) $18{,}75\pi$ m^3
D) $187{,}5\pi$ m^3 E) 20π m^3

57. La figura muestra a un cilindro oblicuo de 60 cm^3 de capacidad, inscrito en el cono recto de revolución. Calcular el volumen de dicho cono.



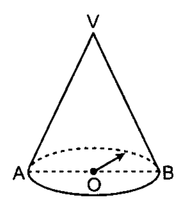
A) 120 cm^3 B) 80 cm^3 C) 160 cm^3
D) 150 cm^3 E) 140 cm^3

58. La altura de un cono recto se divide en tres segmentos congruentes por dos puntos, por dichos puntos se trazan planos paralelos a las bases. Calcular el volumen de la parte mayor, si el volumen del cono es de 27 m^3.

A) 5 m^3 B) 9 m^3 C) 19 m^3
D) 21 m^3 E) 24 m^3

59. De la figura, calcular el área de la base del cono circular recto, si $\overline{AB}$ es diámetro de la base, VA = 17 y VO = 15

A) 64π
B) 72π
C) 56π
D) 96π
E) 120π



60. Si el volumen de un cono es el doble del área de su base, calcular su altura.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

61. Calcular el volumen de un cono recto, si su área lateral es igual al doble del área de la base y el radio de la base mide 2.

A) $\pi\sqrt{3}$ B) $(8\pi\sqrt{3})/3$ C) $16\pi/3$
D) $(4\pi\sqrt{6})/3$ E) $(3\pi\sqrt{3})/2$

62. Calcular el radio de la esfera inscrita en un cono equilátero de generatriz igual a $6\sqrt{3}$

A) 3 B) 2 C) 2,5
D) 3,5 E) 1

63. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, sabiendo que la diferencia de los cubos de sus radios es 81 y que la generatriz es $\sqrt{10}$ veces la altura.

A) 6π B) 9π C) 12π
D) 15π E) 18π

64. La superficie total de un cono es 200π, el producto de la generatriz y el radio es 136. Calcular su volumen.

A) 320π B) 325π C) 350π
D) 370π E) 375π

65. Calcular el volumen de un cono recto, si el ángulo del sector circular que se obtiene al desarrollar el área lateral del cono es 288° y la generatriz es 10.

A) 125π B) 89π C) 82π
D) 110π E) 128π

66. Una cuerda trazada en la base de un cono circular recto mide 8. Si la distancia de la cuerda al centro del círculo base es 2 y la altura del cono mide 4, calcular la medida de la generatriz.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

67. El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un semicírculo de radio R = 2. Calcular el volumen del sólido.

A) $\frac{\pi}{3}\sqrt{3}$ B) $\frac{\pi}{4}\sqrt{4}$ C) $\frac{\pi}{3}\sqrt{2}$
D) $\frac{\pi}{2}\sqrt{6}$ E) $\frac{\pi}{2}\sqrt{5}$

68. Calcular el volumen de un cono de revolución, si se sabe que el desarrollo de la superficie lateral es un semicírculo de área igual a 18π.

A) $15\pi\sqrt{3}$ B) $12\pi\sqrt{3}$ C) $9\pi\sqrt{3}$
D) $12\pi\sqrt{3}$ E) $3\pi\sqrt{3}$

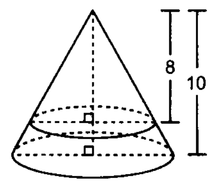
69. Calcular el radio básico de un cono recto, si se sabe que el perímetro de su triángulo generador es 40 y su altura es 2 menos que su generatriz.

A) 8 B) 6 C) 7
D) $4\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{2}$

70. Hallar el volumen de un cono equilátero en función del radio "r" de la esfera inscrita.

A) πr^3 B) $2\pi r^3$ C) $3\pi r^3$
D) $4\pi r^3$ E) $5\pi r^3$

71. Si se sabe que el volumen del cono menor es 48, calcular el volumen del cono mayor.



A) 375/8 B) 375/4 C) 375/2
D) 375/7 E) 375

72. Calcular la altura de un cono circular recto, si se sabe que el perímetro del triángulo generador es 30 y este volumen es igual a los 2/9 del producto entre las medidas del radio de la base y el área total.

A) 8 B) 9 C) 10 D) 11 E) 12

73. La altura de un cono recto es trisecada por dos planos paralelos a la base. Calcular el volumen de la parte intermedia, si el volumen del cono es 27.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

74. Calcular el área total de un cono de revolución, si la generatriz y la altura se diferencian en 1, además el radio de la base mide 5.

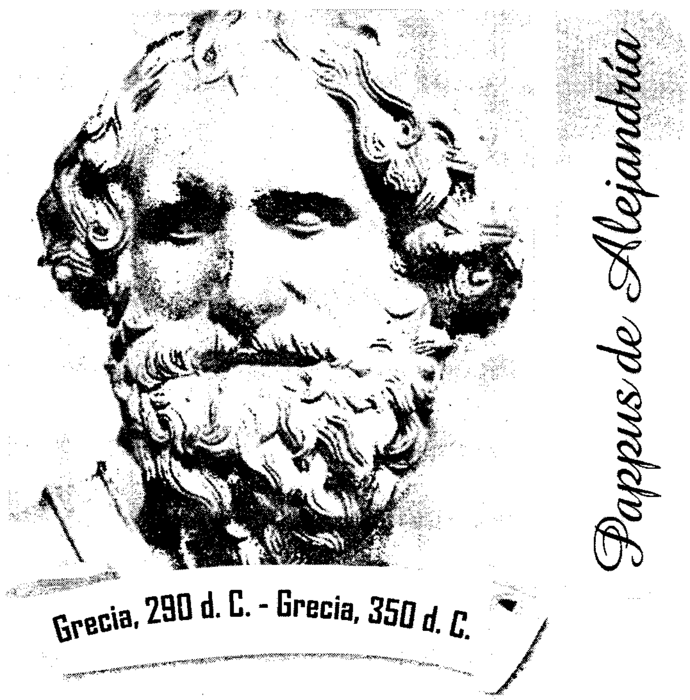
A) 30π B) 45π C) 60π
D) 90π E) 120π

CLAVES

1. D	11. C	21. E	31. C	41. A	51. B	61. B	71. B
2. B	12. E	22. C	32. B	42. C	52. D	62. A	72. E
3. B	13. D	23. E	33. E	43. A	53. B	63. B	73. B
4. B	14. D	24. E	34. B	44. C	54. A	64. A	74. D
5. C	15. C	25. A	35. C	45. D	55. D	65. E	
6. B	16. C	26. A	36. D	46. D	56. D	66. C	
7. A	17. C	27. A	37. B	47. C	57. C	67. A	
8. B	18. B	28. C	38. B	48. A	58. C	68. C	
9. A	19. B	29. A	39. E	49. A	59. A	69. A	
10. A	20. C	30. A	40. D	50. D	60. D	70. C	

Esfera y teoremas de Pappus-Guldin

22 capítulo



Pappus de Alejandría nace en el año 290 en Alejandría y muere en el año 350. Es considerado uno de los más grandes geómetras griegos, siendo uno de sus teoremas un elemento fundamental en el proyecto de la geometría moderna. No hay gran conocimiento sobre su vida, solo se sabe que vivió en el tiempo del emperador Theodosio el Mayor y que vivió toda su vida en Alejandría. Sus trabajos los dedicó a Hermodorus (su hijo), Pandrosion y Megathion. Pappus menciona a un amigo llamado Hierius, también filósofo y quien lo animó a estudiar ciertos problemas matemáticos.

Pappus es autor de la *Colección Matemática*, en la que se presenta un panorama histórico de la matemática clásica y se comentan los trabajos de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y otros; también se incluyen algunas demostraciones alternativas y nuevas proposiciones geométricas a esta obra que consta de ocho libros, de los cuales casi todos se conservan excepto el primero y parte del segundo. Estos libros contienen una serie de problemas que introducen nociones geométricas importantes, como el foco de una parábola o la directriz de una cónica, y los enunciados de muchos teoremas, entre ellos el que expresa la superficie y el volumen de las figuras de revolución. En geometría, se le atribuyen varios teoremas, conocidos todos con el nombre genérico de «teorema de Pappus».

Fuente: Wikipedia

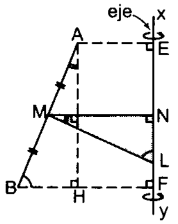
ÁREA DE LA ESFERA

La superficie de la esfera es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de otro punto llamado centro.

Teoremas:

1. El área engendrada por un segmento de recta AB que gira alrededor de un eje, situado en el mismo plano, sin cortarse, es igual al producto de la proyección $\overline{EF}$ del segmento sobre el eje, por la longitud de circunferencia que tiene por radio la porción de mediatriz del segmento, intersecada por el eje.

   $\overline{AB}$ y $\overline{xy}$ están situados en un mismo plano.



Sea:

$S_{\overline{AB}}$: área generada por la rotación de $\overline{AB}$

$\overline{EF}$: proyección de $\overline{AB}$ sobre $\overline{xy}$.

$\overline{ML}$: mediatriz de $\overline{AB}$.

Luego:

$S_{\overline{AB}} = S_L$ (tronco de cono)

$S_{\overline{AB}} = \pi(AE+BF)AB = 2\pi(MN)(AB)$

Como: $\triangle MNL \sim \triangle AHB$ (AH = EF)

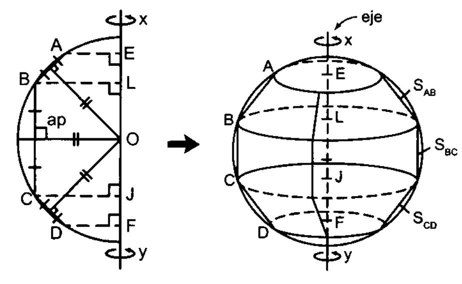
$$\frac{MN}{AH} = \frac{ML}{AB} \Rightarrow (MN)(AB) = (ML)(EF)$$

$$\therefore \boxed{S_{\overline{AB}} = 2\pi(ML)(EF)}$$

2. El área engendrada por una poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en el mismo plano, que pasa por el centro sin cortarla, es igual al producto de la longitud de la circunferencia que tiene por radio la apotema de la poligonal, por la proyección de la poligonal sobre el eje. (Teorema de Arquímedes)

   S_{ABCD}: área generada por la rotación de la poligonal ABCD

$$S_{ABCD} = S_{AB} + S_{BC} + S_{CD}$$
$$S_{ABCD} = 2\pi(ap)(EL) + 2\pi(ap)(LJ) + 2\pi(ap)(JF)$$
$$S_{ABCD} = 2\pi(ap)(EL + LJ + JF)$$
$$S_{ABCD} = 2\pi(ap)(EF)$$

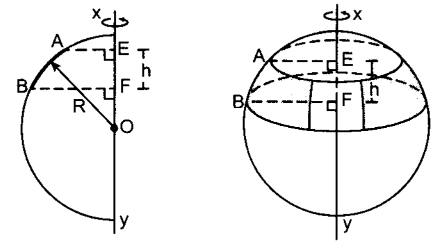


ZONA ESFÉRICA

Es la porción de superficie esférica limitada por dos planos paralelos. Los planos determinan dos circunferencias que son las bases de la zona, la distancia entre los planos es la altura de la zona.

Teoremas:

1. El área de una zona es igual al producto de la circunferencia máxima, por la altura de la zona.

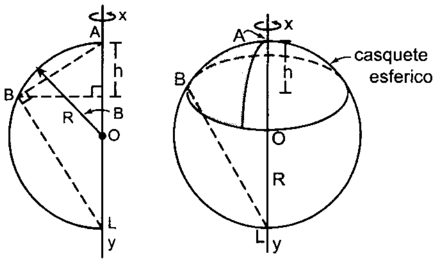


La zona se puede considerar generada por la rotación del arco AB alrededor del diámetro.

Si en el arco AB se inscribe una poligonal regular cuyo número de lados aumenta indefinidamente, entonces: ap → R

De acuerdo al teorema anterior:

$$\boxed{S_{\widehat{AB}} = S_{zona} = 2\pi Rh}$$



Si la zona tiene una base, se llama **casquete esférico.**

$S_{casq} = 2\pi Rh$

En el $\triangle ABL$: $(AB)^2 = 2Rh \Rightarrow \boxed{S_{casq.} = \pi(AB)^2}$

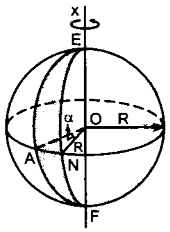
2. El área de una esfera es igual al producto de la circunferencia máxima por el diámetro.

   En efecto, la superficie de la esfera se puede considerar generada por la rotación de una semicircunferencia que gira alrededor de su diámetro.

   Como: $h = 2R \Rightarrow S_{esf.} = 2\pi R(2R) \Rightarrow \boxed{S_{esf.} = 4\pi R^2}$

HUSO ESFÉRICO

Es la porción de superficie de la esfera, comprendida entre dos semicircunferencias máximas que tienen un diámetro común. Si la semicircunferencia EAF gira 360° alrededor de $\overline{EF}$, se genera la superficie de la esfera.



Luego:

$360° \text{ ———— } 4\pi R^2$

$\alpha \text{ ———— } S_{huso}$

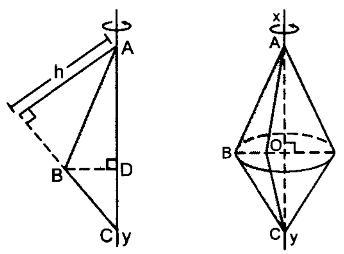
$$\Rightarrow \boxed{S_{huso} = \frac{\pi R^2}{90°}\alpha}$$

VOLUMEN DE LA ESFERA

Teoremas:

1. El volumen del sólido engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje que pasa por un vértice, sin cortar el triángulo y situado en el mismo plano, es igual a la tercera parte del producto del área generada por el lado opuesto al vértice situado sobre el eje, por la altura relativa a este lado.

1.er caso: el eje xy se confunde con uno de los lados. El volumen generado por el triángulo ABC, es la suma de los volúmenes de los conos de revolución generados por los triángulos rectángulos ADB y BDC.



Sea $V_{\Delta ABC}$: volumen generado por el ΔABC

$$V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\pi(BD)^2(AD) + \frac{1}{3}\pi(BD)(DC)$$

$$V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\pi(BD)^2(AD + DC) = \frac{1}{3}\pi(BD)^2(AC)$$

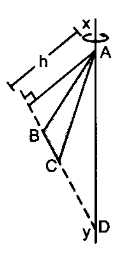
Pero: $2S_{ABC} = (AC)(BD) = (BC)h$

$$V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}\pi(BD)(BC)(h)$$

Como: $\pi\,(BD)(BC) = S_{L(cono)} = S_{\overline{BC}}$

Luego: $\boxed{V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}(S_{\overline{BC}})(h)}$

2.° caso: el triángulo solo tiene un vértice común con el eje.



Prolongado $\overline{BC}$ hasta D sobre $\overline{xy}$.

$$V_{\Delta ABC} = V_{\Delta ABC} - V_{\Delta ACD}$$

$$V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}(S_{\overline{BC}})(h) - \frac{1}{3}(S_{\overline{CD}})(h)$$

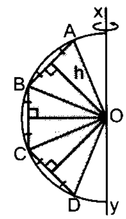
$$V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}(S_{\overline{BC}} - S_{\overline{CD}})h$$

$$\boxed{V_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}(S_{\overline{BC}})(h)}$$

2. El volumen engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un eje que pasa por el centro, sin cortarlo, es igual a la tercera parte del producto del área generada por la poligonal regular, por la apotema (h).

Sea:

V_{ABCDO}: volumen generado por el sector poligonal regular ABCDO.



$$V_{ABCDO} = V_{\Delta AOB} + V_{\Delta BOC} + V_{\Delta COD}$$

$$V_{ABCDO} = \frac{1}{3}(S_{\overline{AB}})(h) + \frac{1}{3}(S_{\overline{BC}})(h) + \frac{1}{3}(S_{\overline{CD}})(h)$$

$$V_{ABCDO} = \frac{1}{3}(S_{\overline{AB}} + S_{\overline{BC}} + S_{\overline{CD}})h$$

$$\boxed{V_{ABCDO} = \frac{1}{3}(S_{ABCD})(h)}$$

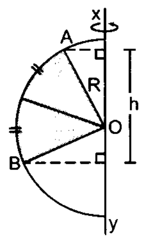
SECTOR ESFÉRICO

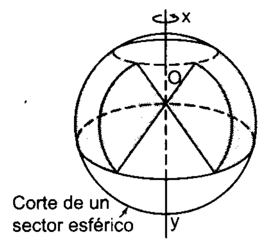
Es el volumen engendrado por un sector circular que gira alrededor de un diámetro situado en el mismo plano y que no lo corta.

Teoremas:

1. El volumen de un sector esférico es igual a la tercera parte del producto del área de la zona correspondiente, por el radio de la esfera.

Si a la poligonal inscrita en el arco AB se aumenta indefinidamente su número de lados: ap → R





Y: $V_{\substack{sect\\esf.}} = \frac{1}{3}S_{\widehat{AB}}R = \frac{1}{3}(2\pi Rh)R$

$$\boxed{V_{\substack{sect\\esf.}} = \frac{2}{3}\pi R^2 h}$$

2. El volumen de la esfera es igual a la tercera parte de su área por el radio.

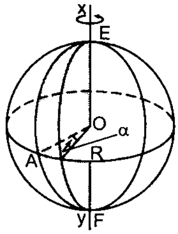
El volumen de la esfera es igual al volumen de un sector esférico engendrado por la rotación de un semicírculo que gira alrededor del diámetro: h = 2R.

$$V_{esf.} = \frac{2}{3}\pi R^2(2R) \Rightarrow \boxed{V_{esf.} = \frac{4}{3}\pi R^3}$$

CUÑA ESFÉRICA

Es la porción de volumen de la esfera limitada por dos semicírculos máximos que tienen el mismo diámetro.

Si el semicírculo EAF gira 360° alrededor de $\overline{EF}$, se engendra el volumen de la esfera.



Luego:

$360° \text{ ———— } \frac{4}{3}\pi R^3$

$\alpha \text{ ———— } V_{cuña}$

$\therefore \boxed{V_{cuña} = \frac{\pi R^3}{270°}(\alpha)}$

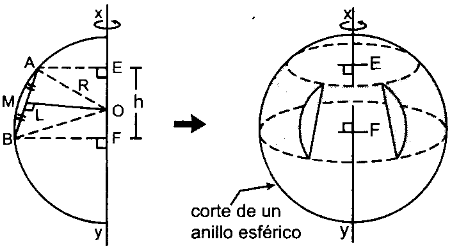
ANILLO ESFÉRICO

Es el sólido generado por la rotación de un segmento circular que gira alrededor de un diámetro exterior.

Teorema

El volumen de un anillo esférico es igual a la sexta parte del volumen de un cilindro que tiene por radio la cuerda del segmento y por altura la proyección de esta cuerda sobre el diámetro.

El volumen del anillo es igual a la diferencia del volumen del sector esférico OBMA menos el volumen generado por el triángulo AOB.



$$V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}S_{\overline{AB}}(OL)$$

$$V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi R^2 h - \frac{1}{3}(2\pi)(OL)(h)(OL)$$

$$V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi h[R^2 - (OL)^2] = \frac{2}{3}\pi h(AL)^2$$

$$V_{anillo} = \frac{2}{3}\pi h\left[\frac{(AB)^2}{4}\right] \Rightarrow \boxed{V_{anillo} = \frac{1}{6}\pi(AB)^2(h)}$$

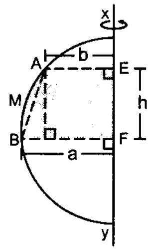
SEGMENTO ESFÉRICO

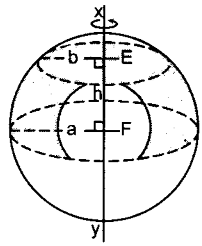
Es la porción de volumen de la esfera comprendida entre dos planos paralelos.

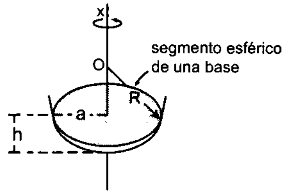
Teorema

El volumen de un segmento esférico es igual al volumen de una esfera que tiene por diámetro la altura del segmento, más el volumen de un cilindro de igual altura y que tiene por base la semisuma de las bases del segmento.

El volumen del segmento esférico, es igual al volumen del anillo AMB, más el volumen del tronco de cono generado por el trapecio AEFB.







$$V_{seg\ esf.} = \frac{1}{6}\pi\,(AB)^2 h + \frac{\pi h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

$$V_{seg\ esf.} = \frac{\pi}{6}[h^2 + (a-b)^2]h + \frac{\pi h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

$$V_{seg\ esf.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi h}{6}(3a^2 + 3b^2)$$

$$\boxed{V_{seg\ esf.} = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi(a^2+b^2)(h)}{2}}$$

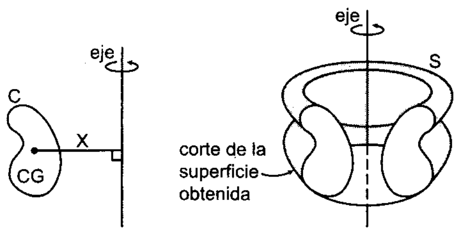
Fórmula del seg. esférico de 2 bases

Si el segmento esférico tiene una base:

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{\pi a^2}{2}h \quad \vee \quad V = \frac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$$

TEOREMAS DE PAPPUS-GULDIN

1. El área generada por una figura que gira alrededor de un eje coplanario y exterior, es igual al producto de la longitud o perímetro de la figura, por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad.



Sea:

C: perímetro de la figura que va a girar.

S: área generada por la rotación de la figura C.

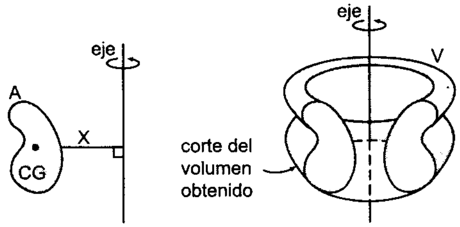
X: distancia del centro de gravedad de C, al eje.

$$\boxed{S = 2\pi CX}$$

2. El volumen engendrado por la rotación de una figura que gira alrededor de un eje coplanar y exterior, es igual al producto del área de la figura, por la longitud de la circunferencia que describe su centro de gravedad.

Sea: A: área de la figura que va a girar.
V: volumen obtenido por la rotación de A.
X: distancia del centro de gravedad de A, al eje.

$$\boxed{V = 2\pi AX}$$

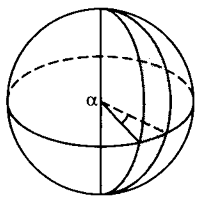


Ejemplos:

1. En una esfera de radio R, una zona esférica de altura R/4, es equivalente a un huso. Hallar el ángulo correspondiente al huso.

Resolución:

Se tiene:



$$S_{zona} = 2\pi R\left(\frac{R}{4}\right)$$

$$S_{zona} = \frac{\pi R^2}{2}$$

$$S_{huso} = \left(\frac{\pi R^2}{90°}\right)(\alpha)$$

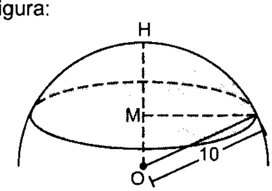
Áreas equivalentes, quiere decir que son iguales:
Por enunciado: $S_{huso} = S_{zona}$

Luego: $\left(\frac{\pi R^2}{90°}\right)(\alpha) = \frac{\pi R^2}{2} \quad \therefore\ \alpha = 45°$

2. Hallar el volumen, en m^3, de un segmento esférico de una base, cuyo casquete tiene área $40\pi\ m^2$ y el radio de la esfera mide 10 m.

Resolución:

Sea la figura:



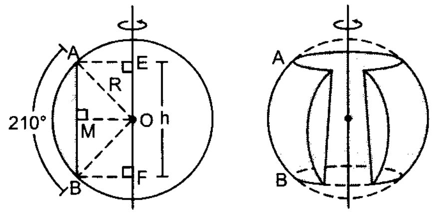
Por dato: $S_{casq} = 40\pi$
Es decir: $2\pi R(HM) = 40\pi$
Sustituyendo el valor de R y despejando HM:
HM = 2; entonces:

$$V_{seg.\ esf.} = \frac{2}{3}\pi R^2(HM) = \frac{2}{3}\pi(10^2)(2)$$

$$\therefore\ V_{seg.\ esf.} = 400\left(\frac{\pi}{3}\right)\ m^3$$

3. En una circunferencia de radio $R = 2\sqrt{3}$ cm, se tiene una cuerda $\overline{AB}$, siendo $m\widehat{AB} = 120°$. Hallar el volumen del anillo esférico que se obtiene al girar 360°, el segmento circular $\widehat{AB}$, alrededor de un eje diametral paralelo a $\overline{AB}$.

Resolución:



$R = 2\sqrt{3}$
$\triangle AMO$: $m\angle AOM = 60°$

$\Rightarrow AM = \frac{R}{2}\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3} = 3$

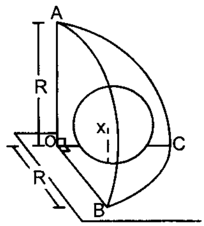
Luego: h = 6, ya que $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

El volumen:

$$V_{anillo} = \frac{1}{6}(\pi)(AB)^2(h) \Rightarrow V_{anillo} = \frac{1}{6}\pi(6^2)(6)$$

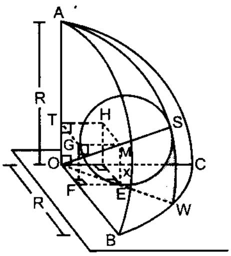
$$\therefore\ V_{anillo} = 36\pi\ cm^3$$

4. La figura muestra una esfera inscrita en un octavo de esfera de radio R. Hallar el radio de la esfera.



Resolución:

Sea M, el centro de la esfera.



S, es el punto de tangencia de ambas superficies esféricas.

E, G y H, son puntos de tangencia, de la superficie esférica, con los planos BOC, AOB y AOC, respectivamente.

$\overline{OM}$ es diagonal del cubo formado, cuya arista tiene longitud igual al radio x de la esfera.

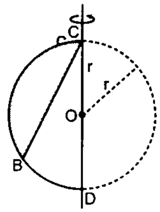
En el plano AOW; OS = R y MS = x

Pero, para el cubo: $OM = x\sqrt{3}$

Entonces: OM + MS = OS

$\therefore\ x\sqrt{3} + x = R \Rightarrow x = \frac{R}{2}(\sqrt{3} - 1)$

5. Hallar el área de la superficie del sólido que se genera al girar la figura sombreada alrededor del eje diametral $\overline{CD}$, si $m\widehat{BC} = 120°$ y r = dato.

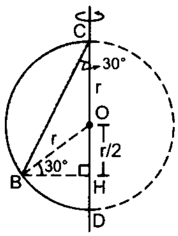


Resolución:

Se hacen los trazos que a continuación se indican:

$S_{\widehat{BC}}$: área del casquete que genera $\overline{BC}$.

$S_{\overline{BC}}$: área de ia superficie lateral cónica que genera $\overline{BC}$.



La superficie pedida será:

$S_{total} = S_{\widehat{BC}} + S_{\overline{BC}}$

Es decir:

$S_{total} = 2\pi(CH) + \pi(BH)(BC)$

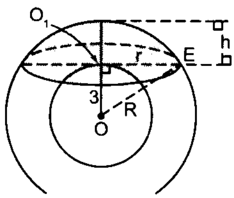
$S_{total} = 2\pi r\left(\frac{3r}{2}\right) + \pi\left(\frac{r}{2}\sqrt{3}\right)(r\sqrt{3})$

$S_{total} = \frac{9}{2}\pi r^2$

6. Se tienen dos esferas concéntricas; se traza un plano secante a la esfera mayor y tangente a la esfera menor, determinando un círculo de 16π m^2. Calcular el área del casquete menor formado en la esfera mayor, sabiendo que el radio de la esfera menor es 3 m.

Resolución:

Por dato, se conoce el área del círculo en el plano secante:



$A = \pi r^2 = 16\pi$; de donde: $r = 4$

En el $\triangle OO_1E$: $R = 5$

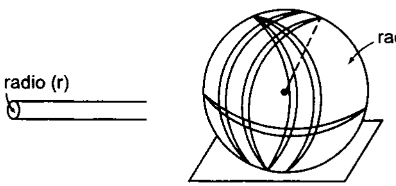
$\Rightarrow h = R - 3 = 5 - 3 = 2$

Cálculo del área del casquete (A_x):

$A_x = (2\pi)(R)(h) = (2\pi)(5)(2) \quad \therefore \ Ax = 20\pi$ m^2

7. Una cuerda de radio r = 2 mm, se enrolla fuertemente, obteniéndose una esfera de radio **R** = 3 cm. Hallar la longitud de la cuerda, suponiendo que no hay espacios libres en el enrollamiento.

Resolución:



Si L, es la longitud de la cuerda (forma cilíndrica) se tendrá:

Volumen del cilindro (cuerda) = Volumen de la esfera (ovillo)

$\Rightarrow \pi r^2 L = \frac{4}{3}\pi R^3 \Rightarrow L = \frac{4R^3}{3r^2}$

Reemplazando datos: $L = \frac{4(3\text{ cm})^3}{3(2\text{ mm})^2}$

$L = 9\,\frac{\text{cm}^3}{\text{mm}^2}$; recordando que: 1 cm = 10 mm

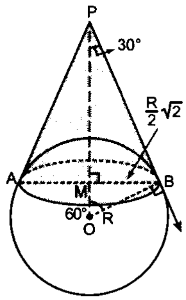
$\Rightarrow L = 9\,\frac{(10\text{ mm})^3}{\text{mm}^2}; = 9000\text{ mm} \quad \therefore \ L = 9\text{ m}$

8. P es un punto exterior a una esfera de centro O. Se trazan todas las rectas tangentes a la superficie esférica, desde P, formándose un cono equilátero, cuya base es un círculo menor de la esfera. Hallar la relación de volúmenes del cono a la esfera.

Resolución:

Por ser el cono equilátero: $\triangle APB$

Sea R: radio de la esfera.



$\triangle OMB \Rightarrow MB = \frac{R}{2}\sqrt{3}$

$\triangle PMB \Rightarrow PM = (MB)\sqrt{3}$

$\Rightarrow PM = \left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)\sqrt{3} = \frac{3}{2}R$

Luego:

$\frac{V_{cono}}{V_{esf.}} = \frac{\frac{\pi}{3}(MB)^2(PM)}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{(MB)^2(P}{4R^3}$

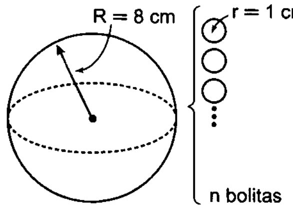
$\therefore \ \frac{V_{cono}}{V_{esf.}} = \frac{\left(\frac{R}{2}\sqrt{3}\right)^2\left(\frac{3}{2}R\right)}{4R^3} = \frac{9}{32}$

9. Se funde una bola de plomo de radio 8 cm para obtener luego bolitas del mismo material, con radio 1 cm cada una. ¿Cuántas bolitas, como máximo, se obtendrán?

Resolución:

Sean "n" bolitas

Como los volúmenes, de la esfera original y la suma de las pequeñas, deben ser iguales:



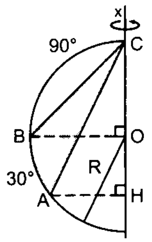
$V_{\text{esfera mayor}} = n(V_{1\ \text{esfera pequeña}})$

$\Rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3 = n\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \quad \Rightarrow n = \frac{R^3}{r^3}$

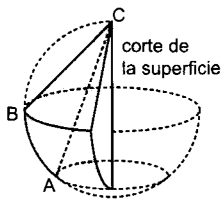
Reemplazando datos:

$n = \frac{(8\text{ cm})^3}{(1\text{ cm})^3} \quad \therefore \ n = 512$

10. En la figura: $\overset{\frown}{AB} = 30°$ y $\overset{\frown}{BC} = 90°$
Hallar el área de la superficie que genera el perímetro de la región sombreada, al girar una vuelta, alrededor del diámetro $\overline{CD}$.



Resolución:
$\overset{\frown}{AB}$, genera una zona esférica.
$\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, generan superficies cónicas.



Se observa que $\overline{BC}$ es lado del cuadrado y $\overline{AC}$ lado del triángulo equilátero, inscritos.
$BC = L_4 \Rightarrow BC = R\sqrt{2}$
$AC = L_3 \Rightarrow AC = R\sqrt{3}$

También se observa que:
$OB = R;\ AH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2};\ \ HC = \dfrac{3}{2}R$ y $OH = \dfrac{R}{2}$

Luego: $S_{\overline{AC}} = \pi(AH)(AC) = \dfrac{3}{2}\pi R^2$

$S_{\overline{BC}} = \pi(OB)(BC) = R^2\sqrt{2}$

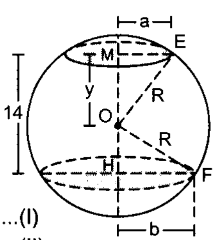
$S_{zona} = S_{\overset{\frown}{AB}} = 2\pi R(OH) = 2\pi R\left(\dfrac{R}{2}\right) \Rightarrow S_{\overset{\frown}{AB}} = \pi R^2$

Área total de la superficie generada:
$S_x = S_{\overline{AC}} + S_{\overline{BC}} + S_{\overset{\frown}{AB}}$

Sustituyendo valores hallados:
$S_x = \dfrac{3}{2}\pi R^2 + \pi R^2\sqrt{2} + \pi R^2 \ \therefore\ S_x = \dfrac{\pi R^2}{2}(5 + 2\sqrt{2})$

11. Dos planos paralelos, distantes 14 cm, determinan sobre una esfera, círculos de áreas 225π cm^2 y 253π cm^2, respectivamente. Hallar el volumen de la esfera, sabiendo que los anteriores planos están a ambos lados del centro.

Resolución:
R: radio de la esfera.
Para los círculos:
$\pi a^2 = 225\pi \Rightarrow a^2 = 225$
$\pi b^2 = 253\pi \Rightarrow b^2 = 253$

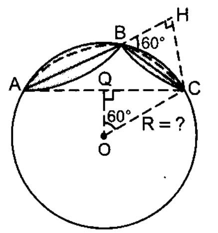


Con el teorema de Pitágoras:
$\triangle OME$: $R^2 = a^2 + y^2$ ...(I)
$\triangle OHF$: $R^2 = b^2 + (14 - y)^2$ ...(II)

Restando miembro a miembro:
$0 = a^2 + y^2 - b^2 - (14 - y)^2$
$0 = 225 + y^2 - 253 - (14 - y)^2$
De donde: $y = 8$
Reemplazando en (I):
$R^2 = a^2 + y^2 = 225 + 64 \Rightarrow R = 17$
$\therefore\ V_{esf} = \dfrac{4}{3}\pi R^3 = \dfrac{4913}{3}\pi$ cm^3

12. Hallar el radio de una esfera en la cual, dos círculos menores están contenidos en planos que forman un diedro de 120° y cuyas circunferencias tienen un punto común. Las áreas de los círculos anteriores, son 9π cm^2 y 16π cm^2.

Resolución:
Consideremos el gráfico: $m\angle ABC = 120°$



Para hallar los radios de los círculos menores.
$\pi\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2 = 16\pi \Rightarrow AB = 8$

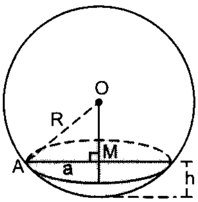
También: $\pi\left(\dfrac{BC}{2}\right)^2 = 9\pi \Rightarrow BC = 6$

En $\triangle BHC$:
$BH = \dfrac{BC}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \ \wedge\ HC = \left(\dfrac{BC}{2}\right)(\sqrt{3}) = 3\sqrt{3}$

En $\triangle AHC$: $AH = AB + BH = 8 + 3 = 11$
$\Rightarrow (AC)^2 = (AH)^2 + (HC)^2 = 11^2 + (3\sqrt{3})^2 \Rightarrow AC = 2\sqrt{37}$
$\Rightarrow QC = \sqrt{37} = \dfrac{R}{2}\sqrt{3} \quad \therefore\ R = \dfrac{2}{3}\sqrt{111}$

13. Hallar el volumen del segmento esférico de una base, en una esfera, cuya superficie tiene área 36π m^2. El área de la superficie total del segmento, es 11π m^2.

Resolución:



El volumen del segmento:
$V_{seg\ esf.} = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3R - h)$ ...(I)
Para la superficie esférica: $4\pi R^2 = 36\pi \Rightarrow R = 3$
La base del segmento, tiene área: πa^2 y el casquete: $2\pi Rh$

Por dato: $\pi a^2 + 2\pi Rh = 11\pi$

$\therefore\ a^2 + 6h = 11 \quad ...(II)$

En el $\triangle AMO$:

$(AM)^2 + (OM)^2 = (OA)^2$

$a^2 + (R - h)^2 = R^2$

$a^2 + (3 - h) = 9 \quad ...(III)$

Restando (II) – (III):

$6h - (3 - h)^2 = 2$

$h^2 - 12h + 11 = 0 \Rightarrow h = 1$

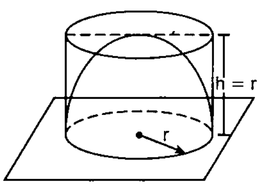
Finalmente, en (I):

$V_{seg\ esf.} = \frac{1}{3}\pi(1)(3 \times 3 - 1) \Rightarrow V_{seg\ esf.} = \frac{8}{3}\pi\ m^3$

14. En un recipiente que tiene la forma de un cilindro circular recto de altura igual al radio, se deposita arena, adoptando esta, la forma de una semiesfera cuyo círculo máximo coincide con la base del cilindro igual al radio de su base. ¿Qué fracción del volumen del recipiente no está ocupado?

Resolución:

Con el gráfico adjunto, el volumen V_x desocupado será:



$V_x = V_{cilindro} - V_{semiesfera} \quad ...(I)$

Siendo: $V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi r^2 r$

$V_{cilindro} = \pi r^3 \quad ...(II)$

$V_{semiesfera} = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad ...(III)$

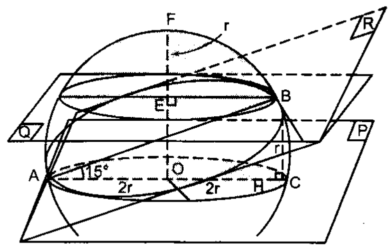
Con (II) y (III), en (I): $V_x = \pi r^3 - \frac{2}{3}\pi r^3$

$\therefore\ V_x = \frac{1}{3}\pi r^3 = \frac{1}{3}(V_{cilindro})$

15. Un plano R que pasa por una recta tangente en A, a una circunferencia máxima de una semiesfera, forma 15° con el plano P que contiene dicho círculo. Calcular la relación entre las áreas del casquete y la zona esférica determinadas en la semiesfera por un plano Q que pasa paralelo al plano P por el extremo B del diámetro $\overline{AB}$ en el círculo determinado por el plano R en la semiesfera.

Resolución:

Sea la figura; llamando 4r al diámetro:



En el $\triangle ABC$ (15°; 75°): $BH = \frac{AC}{4} = r$

Área del casquete:

$A_1 = [2\pi(2r)](EF) \Rightarrow A_1 = 4\pi r(r) \quad ...(1)$

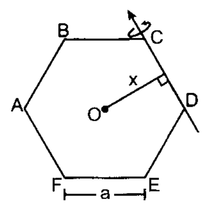
Área de la zona:

$A_2 = [2\pi(2r)](OE) \Rightarrow A_2 = 4\pi r(r) \quad ...(2)$

Luego, (1) ÷ (2): $\frac{A_1}{A_2} = 1$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar el volumen del sólido engendrado al girar el hexágono regular ABCDEF, 360° alrededor del eje $\overline{CD}$.



Resolución:

El volumen pedido, según el teorema de Pappus:

$V = (A_{ABCDEF})(2\pi)(x)$

Donde:

x: distancia del centro O, al eje

x: apotema del hexágono.

Recordando que, la apotema mide: $\frac{a}{2}\sqrt{3}$

$V = \left(\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\right)(2\pi)\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right) \quad \therefore\ V = \frac{9}{2}\pi a^3$

2. El lado de un cuadrado ABCD mide 10. Hallar el volumen del sólido engendrado al girar el cuadrado, una vuelta, alrededor de un eje coplanar que pasa por el punto D, haciendo un ángulo de 8° con $\overline{CD}$, exteriormente al cuadrilátero.

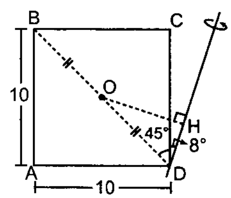
Resolución:

$\triangle BCD$: $BD = 10\sqrt{2}$

$OD = \frac{BD}{2} = 5\sqrt{2}$

$\triangle ODH$: $m\angle HDO = 53°$

$\Rightarrow OH = 4\sqrt{2}$

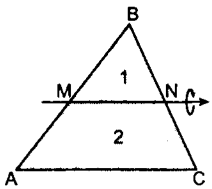


Por teorema de Pappus:

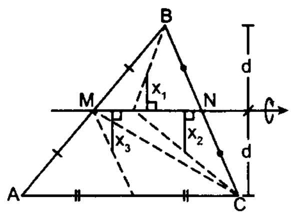
$V = 2\pi(OH)(AD^2) \Rightarrow V = 2\pi(4\sqrt{2})(10^2)$

$\therefore\ V = 800\pi\sqrt{2}$

3. Hallar la relación de volúmenes de los sólidos generados al girar las regiones MBN y AMNC, alrededor del eje $\overline{MN}$, si AM = MB y BN = NC.



Resolución:



Sean: V_{MBN} volumen que genera MBN

V_{AMNC} volumen que genera AMNC

x_1; x_2 y x_3: distancias de los centros de gravedad de las regiones triangulares MBN, MNC y AMC, al eje de giro.

Por propiedad del baricentro para cada región, es fácil deducir, que:

$x_1 = \frac{d}{3};\ x_2 = \frac{d}{3};\ x_3 = \frac{2}{3}d$

Además, la altura del triángulo ABC es el doble del triángulo MAC, pero tienen la misma base, luego:

$S_{AMC} = \frac{S_{ABC}}{2} \wedge S_{MBN} = S_{MNC} = \frac{S_{ABC}}{4}$

Aplicando el teorema de Pappus-Guldin:

$V_{MBN} = S_{MBN}(2\pi)(x_1) \Rightarrow V_{MBN} = \frac{S_{ABC}}{4}\left(2\pi\frac{d}{3}\right)$

$V_{MBN} = \frac{\pi}{6}dS_{ABC}$ ...(1)

$V_{AMNC} = V_{AMC} + V_{MNC}$

$V_{AMNC} = \left(\frac{S_{ABC}}{2}\right)(2\pi)\left(\frac{2}{3}d\right) + \left(\frac{S_{ABC}}{4}\right)\left(2\pi\frac{d}{3}\right)$

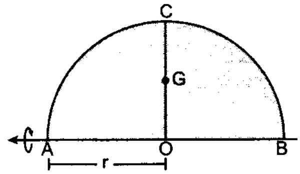
$V_{AMNC} = \frac{5}{6}\pi(d)(S_{ABC})$ ...(2)

Se pide: $\frac{V_{MBN}}{V_{AMNC}}$, relacionando (1) ÷ (2):

$\therefore\ \frac{V_{MBN}}{V_{AMNC}} = \frac{1}{5}$

4. Usando el teorema de Pappus-Guldin, deducir la posición del centro de gravedad de:

I. Una semicircunferencia.
II. Un semicírculo
III. Un cuarto de circunferencia
IV. Un cuarto de círculo



Resolución:

I. Sea ACB, una semicircunferencia de centro O y radio "r".

Al girar $\overset{\frown}{ACB}$, 360° alrededor del eje $\overline{AB}$, se genera la superficie esférica, cuya área es:

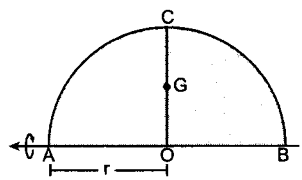
$S_{\overset{\frown}{ABC}} = (\text{longitud de } \overset{\frown}{ABC})(2\pi)(OG)$

Siendo G, el centro de gravedad del arco.

Así: $4\pi r^2 = (\pi r)(2\pi)(OG)$

De donde: $OG = \frac{2r}{\pi}$

II. Si G, es centro de gravedad del semicírculo; su giro alrededor del eje $\overline{AB}$, determina una esfera. Según Pappus:



$V_{generado} = (A_{semicircúlo})(2\pi)(OG)$

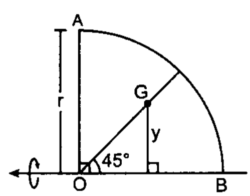
Reemplazando sus equivalentes:

$\frac{4}{3}\pi r^3 = \left(\frac{\pi r^2}{2}\right)(2\pi)(OG)$

De donde: $OG = \frac{4r}{3\pi}$

III. Sea $\overset{\frown}{AB}$ un cuarto de circunferencia, de centro O y radio r. G, es el punto que indica la posición de su centro de gravedad.

Al girar AB, 360° alrededor del eje $\overline{OB}$, se genera media superficie esférica. Según el teorema de Pappus.



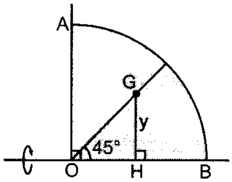
$S_{\overset{\frown}{AB}} = (\text{longitud de } \overset{\frown}{AB})(2\pi)(y)$

Reemplazando equivalentes:

$\frac{4\pi r^2}{2} = \left(\frac{2\pi r}{4}\right)(2\pi)\left(\frac{OG}{\sqrt{2}}\right)$

De donde: $OG = \left(\frac{2r}{\pi}\right)\sqrt{2}\quad \therefore\ y = \frac{2r}{\pi}$

IV. Al girar el cuarto de círculo AOB, 360° alrededor de $\overline{OB}$, el volumen generado corresponde a media esfera.



Por Pappus:

$V_{generado}$ = (área del cuarto de círculo)(2π)(GH)

Reemplazando sus equivalentes:

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = \left(\frac{\pi r^2}{4}\right)(2\pi)(GH) \quad \therefore\ GH = \frac{4r}{3\pi}$$

5. En un tetraedro regular de arista "a", se traza una esfera tangente a sus aristas. Hallar el área de la superficie esférica.

Resolución:

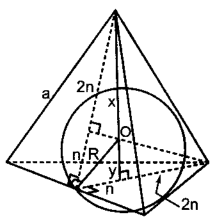
Por Menelao:

$(n)(x)(2n) = (2n)(y)(3n)$

$\Rightarrow x = 3y$

Pero: $x + y = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$3y + y = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow y = \frac{a\sqrt{6}}{12}$



Por Pitágoras:

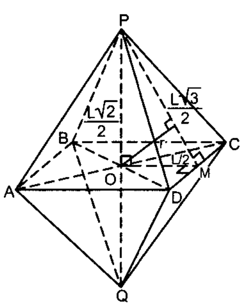
$$R^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{12}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Rightarrow R^2 = \frac{a^2}{8}$$

Luego; el área de la superficie esférica es:

$$S = 4\pi\left(\frac{a^2}{8}\right) \quad \therefore\ S = \frac{\pi a^2}{2}$$

6. En un octaedro regular cuya arista mide L, se inscribe una esfera, hallar el área de la superficie esférica inscrita.

Resolución:



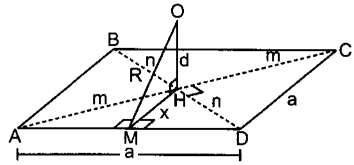
$$\triangle POM: \left(\frac{L\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{L}{2}\right) = r\left(\frac{L\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow r = \frac{L}{6}\sqrt{6}$$

El área de la superficie inscrita es:

$$S = 4\pi\left(\frac{L\sqrt{6}}{6}\right)^2 \quad \therefore\ S = \frac{2\pi L^2}{3}$$

7. El lado de un rombo mide "a"; una superficie esférica de radio R es tangente a todos los lados del rombo. La distancia desde el centro de la esfera al plano del rombo es igual a "d". Calcular el área de la región limitada por el rombo.

Resolución:



Área del rombo:

$S = 2mn$ ...(1)

$\triangle OHM$: $x = \sqrt{R^2 - d^2}$ ...(2)

$\triangle AHD$: $mn = xa$ ...(3)

De: (1); (2) y (3): $S = 2(a)\sqrt{R^2 - d^2}$

$\therefore\ S = 2a\sqrt{R^2 - d^2}$

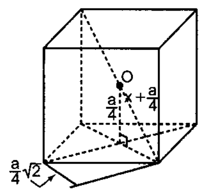
8. En un hexaedro regular de arista "a" se inscriben ocho esferas congruentes de radios a/4. Hallar el radio de una esfera interior al hexaedro y tangente a las esferas.

Resolución:

Por Pitágoras:

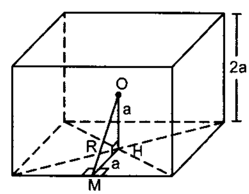
$$\left(x + \frac{a}{4}\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2$$

Efectuando: $x = \frac{a}{4}(\sqrt{3} - 1)$



9. Una superficie esférica es tangente con las aristas de un hexaedro regular, hallar en que relación se encuentran las áreas totales.

Resolución:



R: radio de la esfera tangente con las aristas del cubo.

$\triangle OHM$: $R = a\sqrt{2}$

Se pide hallar: $x = \frac{6(2a)^2}{4\pi(a\sqrt{2})^2} \quad \therefore\ x = \frac{3}{\pi}$

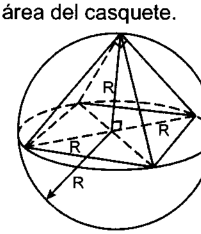
10. Una pirámide regular cuadrangular tiene dos aristas laterales opuestas formando un ángulo recto y su volumen es $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. Si esta pirámide está inscrita en un casquete esférico con su base inscrita en la base del casquete, hallar el área del casquete.

Resolución:

$$V_P = \frac{1}{3}\left(\frac{2R}{2}\right)^2 R$$

$$V_P = \frac{9\sqrt{2}}{2} \Rightarrow R = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

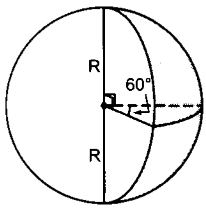
$$A_{CE} = \frac{A_{SE}}{2} = \frac{1}{2}4\pi R^2$$



$A_{CE} = 2\pi\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 \quad \therefore A_{CE} = 9\pi$

11. Dos círculos máximos determinan al intersecarse un ángulo diedro que mide 60° y una cuña esférica de $\frac{500}{4}\pi$ de área total, hallar la longitud del radio de la esfera.

Resolución:



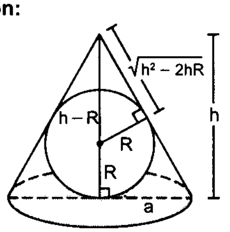
Piden R; dato $A_{T(CE)} = \frac{500\pi}{4}$

$\Rightarrow \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2}{2} + \frac{\pi R^2 60}{90} = \frac{500\pi}{4}$

$\Rightarrow R = 5\sqrt{3}$

12. Un cono recto está circunscrito a una esfera cuyo radio mide R. Hallar la longitud de la altura del cono que tiene el volumen mínimo.

Resolución:



Piden h: cuando V_{cono} es mínimo

$V_{cono} = V_x = \frac{1}{3}\pi a^2 h; \ \frac{a}{h} = \frac{R}{\sqrt{h^2 - 2hR}}$

$V_{cono} = V_x = \frac{1}{3}\pi\frac{hR^2h^2}{(h^2 - 2hR)} = \frac{1}{3}\pi R^2\frac{h^2}{(h - 2R)}$

$f(h) = \frac{h^2}{(h - 2R)} = \frac{df(h)}{d(h)} = 0 \Rightarrow h = 4R$

$\therefore h = 4R$

13. Un hexaedro regular de lado 4 m está inscrito en una esfera. Determinar el volumen de la esfera.

Resolución:

El diámetro de la esfera circunscrita a un cubo de arista L es $L\sqrt{3} = 2R$.

$\Rightarrow 2R = 4\sqrt{3} \Rightarrow R = 2\sqrt{3}$

$V_{ESF} = \frac{4}{3}\pi(2\sqrt{3})^3 \quad \therefore V_{ESF} = 32\pi\sqrt{3}$

14. Al trazar un plano secante a una esfera de radio R, se determina una sección de área 9π, si la distancia del centro de la esfera al plano secante es 4, hallar el valor de R.

Resolución:

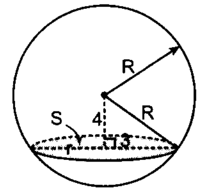
Sabemos:

$S = 9\pi = \pi r^2$

$\Rightarrow r = 3$

Por Pitágoras:

$R^2 = 3^2 + 4^2 \quad \therefore R = 5$



15. Hallar el volumen del segmento esférico de una sola base, si el área del casquete esférico correspondiente es cuatro veces el área de la base, si el radio de la esfera mide $4\sqrt{3}$.

Resolución:

$A_{CE} = 4B \Rightarrow 2\pi Rh = 4\pi a^2$

RM: $a^2 = h(2R - h)$

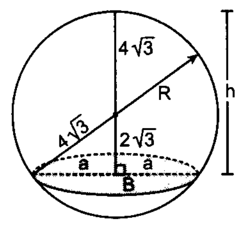
$\Rightarrow 2\pi Rh = 4\pi h(2R - h)$

$\Rightarrow h = \frac{3}{2}R$

$\Rightarrow h = 6\sqrt{3} \wedge a = 6$

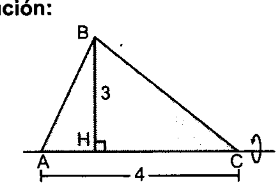
$V_{SE} = \frac{\pi}{6}(6\sqrt{3})^3 + \pi\frac{6^2}{2}6\sqrt{3}$

$\therefore V_{SE} = 216\pi\sqrt{3}$



16. En un triángulo ABC se traza la altura BH, siendo BH = 3 y AC = 4. Si la región triangular ABC gira alrededor de $\overleftrightarrow{AC}$, hallar el volumen del sólido generado.

Resolución:



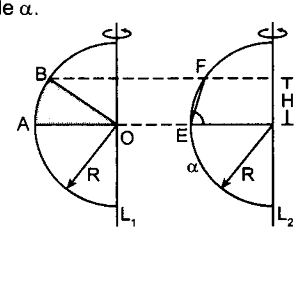
Piden: $V_{SG(\triangle ABC)} = V_x = 2\pi x A$

$x = \frac{0 + 0 + 3}{3} \Rightarrow x = 1$

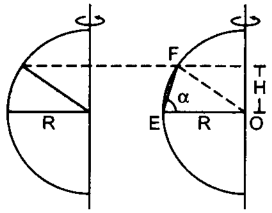
$A = \frac{4 \times 3}{2} \Rightarrow A = 6$

$V_x = 2\pi(1)(6) \quad \therefore V_x = 12\pi$

17. El volumen del sólido generado al girar el sector (AOB) una vuelta alrededor de L_1 es cuatro veces el volumen del sólido generado por el segmento circular EF al girar una vuelta alrededor de L_2. El valor de α.



Resolución:



Piden α; dato: $V_{SE} = 4V_{AE}$

$\Rightarrow \frac{2}{3}\pi R^2 H = 4\left(\frac{1}{6}\right)(\pi)(EF)^2(H) \Rightarrow EF = R$

ΔEOF: equilátero $\quad \therefore \alpha = 60°$

18. Una región hexagonal regular de lado "a", gira alrededor de un lado. Calcular el volumen del sólido generado.

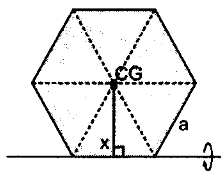
Resolución:

Piden: $V_{SG(hex)} = 2\pi x A$

$A = 6\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right) \wedge x = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

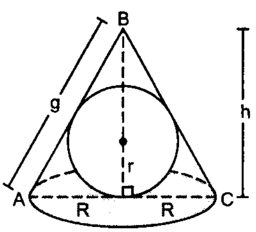
$V_{SG} = 2\pi\left(\frac{a}{2}\sqrt{3}\right)(6)\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\right)$

$\therefore V_{SG} = \frac{9\pi a^3}{2}$



19. Si M y N es el área lateral y el área de la base de un cono de revolución, entonces el radio de la esfera inscrita en el cono recto de revolución mide:

Resolución:



$M = \pi r g \quad \ldots(1)$

$N = \pi R^2 \quad \ldots(2)$

De (1) y (2): $g = M\sqrt{\frac{1}{\pi N}} \quad \wedge \quad R = N\sqrt{\frac{1}{\pi N}}$

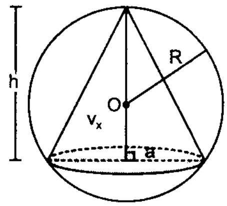
$h^2 = g^2 - R^2 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{M^2 - N^2}{\pi N}}$

$A_{\Delta ABC} = pr \Rightarrow \frac{(2R)(h)}{2} = (g + R)r$

$\therefore r = \sqrt{\frac{N(M-N)}{\pi(M+N)}}$

20. En una esfera de radio R se inscribe un cono circular recto de mayor volumen. Hallar dicho volumen.

Resolución:



Piden: V_{cono} ...máx

$V_x = \frac{1}{3}\pi a^2 h$; RM: $a^2 = h(2R - h)$

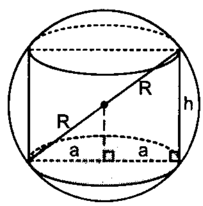
$V_x = \frac{1}{3}\pi(h)(h)(2R - h) = \frac{\pi}{3}(2Rh^2 - h^3) \quad \ldots(1)$

$f(h) = 2Rh^2 - h^3 \Rightarrow \frac{df(h)}{dh} = 0 = 4Rh - 3h^2$

$\Rightarrow h = \frac{4}{3}R$; en (1): $V_x = \frac{32\pi}{81}R^3$

21. En una esfera de radio R, se inscribe un cilindro de revolución de mayor volumen. Hallar sus dimensiones.

Resolución:



Piden: a, h cuando V_{cil} es máximo

$V_{cil} = \pi a^2 h \Rightarrow 4R^2 = 4a^2 + h^2 \quad \ldots(1)$

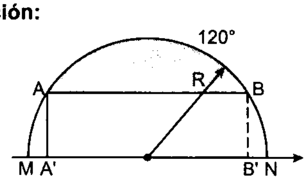
$\Rightarrow V_{cil} = \pi\frac{h(4R^2 - h^2)}{4} = \frac{\pi}{4}(4R^2 h - h^3)$

$f(h) = 4R^2 h - h^3 \Rightarrow \frac{df(h)}{dh} = 0 = 4R^2 - 3h^2$

$\Rightarrow h = \frac{2\sqrt{3}}{3}R$, en (1): $a = \frac{R\sqrt{6}}{3}$

22. En un semicírculo de diámetro MN se traza una cuerda $\overline{AB}$, tal que $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$ y $m\overset{\frown}{AB} = 120°$; si el volumen de una esfera con radio igual al del semicírculo es $24\sqrt{3}$ dm³. Calcular el volumen (en dm³) del sólido que genera el segmento circular AB, alrededor del diámetro MN.

Resolución:



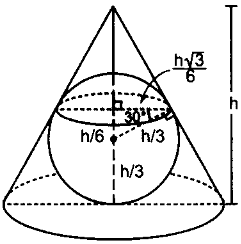
$AB = L_3 = R\sqrt{3} \quad \wedge \quad AB = A'B' = R\sqrt{3}$

Dato: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 24\sqrt{3} \Rightarrow \pi R^3 = 18\sqrt{3}$

$V_{AB} = \frac{1}{6}\pi(AB)^2(A'B') = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3 \quad \therefore V_{AB} = 27$

23. Una esfera está inscrita en un cono equilátero de altura "h". Calcular el volumen del segmento esférico de una base determinado por la circunferencia de tangencia y el casquete tangente a la base del cono.

Resolución:

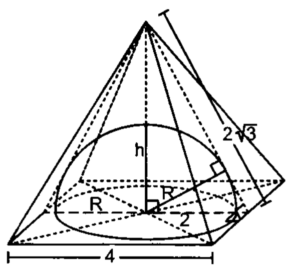


$$V_{SE(1)} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{h}{6} + \frac{h}{3}\right)^3 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{h\sqrt{3}}{6}\right)^2\left(\frac{h}{6} + \frac{h}{3}\right)$$

$$\therefore\ V_{SE(1)} = \frac{\pi h^3}{24}$$

24. El área de la base de una pirámide cuadrangular es 16 y su apotema mide $2\sqrt{3}$. Hallar el área de la superficie total de la semiesfera inscrita en dicha pirámide, donde el círculo máximo está contenido en la base de la pirámide.

Resolución:



$h^2 = (2\sqrt{3})^2 - 2^2 \Rightarrow h = 2\sqrt{2}$

$\triangle$RM: $2(h) = 2\sqrt{3}(R) \Rightarrow R = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

$A_{tot\ semiesf} = A_{SE} + A_D = 2\pi R^2 + \pi R^2$

$\therefore\ A_{tot\ semiesf} = 3\pi\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 8\pi$

25. Hallar el área (en m^2) de una superficie esférica sabiendo que las áreas de los círculos menores paralelos y distantes 3 m y situados a un mismo lado del centro miden π m^2 y 16π m^2.

Resolución:

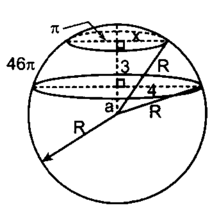
Por teorema de Pitágoras:

$R^2 = a^2 + 4^2$

$R^2 = 1^2 + (a + 3)^2$

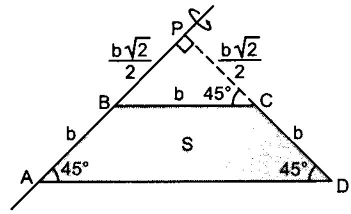
$\Rightarrow R = \sqrt{17}$

$\therefore\ A_{SE} = 4\pi R^2 = 68\pi$



26. En un trapecio isósceles, ángulo agudo mide 45° y las longitudes de los lados laterales son iguales a la longitud de la base menor, y gira alrededor del lado lateral. Si la longitud del lado lateral del trapecio es "b", hallar el volumen del sólido de revolución obtenido.

Resolución:



$V_{SG(S)} = V_{SG(\Delta APD)} - V_{SG(\Delta BDC)}$ ...(1)

$$V_{SG(\Delta APD)} = 2\pi\left[\frac{\left(0 + 0 + b + \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)}{3}\frac{\left(b + \frac{b\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2}\right]$$

$\Rightarrow V_{SG(\Delta APD)} = \frac{\pi}{24}(2b + b\sqrt{2})^3$ ...(2)

$$\Rightarrow V_{SG(\Delta BPC)} = 2\pi\left(\frac{0 + 0 + \frac{b\sqrt{2}}{2}}{3}\right)\left(\frac{\frac{b\sqrt{2}}{2}}{2}\right)^2$$

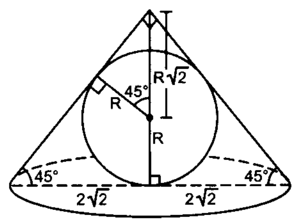
$\Rightarrow V_{SG(\Delta BPC)} = \frac{\pi}{16}(b\sqrt{2})^3$ ...(3)

(3) y (2) en (1):

$\therefore\ V_{SG(S)} = \frac{\pi}{24}(2b + b\sqrt{2})^3 - \frac{\pi}{16}(b\sqrt{2})^3$

27. En un cono de revolución se inscribe una esfera. En el cono 2 generatrices diametralmente opuestas determinan un ángulo que vale 90°. Si el diámetro de la base mide $4\sqrt{2}$ m, hallar el área de la superficie esférica (en m^2).

Resolución:



Pide: $A_{SE} = 4\pi R^2$

$R + R\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow R = 2(2 - \sqrt{2})$

$A_{SE} = 4\pi[2(2 - \sqrt{2})]^2 \quad \therefore\ A_{SE} = 32\pi(3 - 2\sqrt{2})$

28. En una octante de esfera cuyo radio mide R está inscrita una esfera. Hallar el área de dicha superficie esférica.

I. $2(3 - \sqrt{2})R^2\pi$ II. $2(2 - \sqrt{3})R^2\pi$

Resolución:

Para todo sólido circunscrito a una esfera se cumple:

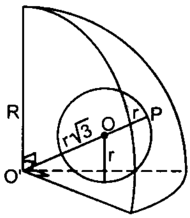
$V_{SO1} = \frac{1}{3}(S_{TOT.})(r)$

$\Rightarrow$ Se nota: $d(O; O') = r\sqrt{3}$

$\Rightarrow r + r\sqrt{3} = R \Rightarrow r = \frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)$

$A_{SE} = 4\pi r^2 = 4\pi\left[\frac{R}{2}(\sqrt{3}-1)\right]^2$

$\therefore A_{SE} = \pi R^2(4 - 2\sqrt{3})$



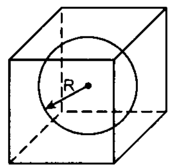
29. Si una esfera está inscrita en un cubo y el área de la superficie esférica es K veces el área lateral del cubo. Calcular K:

Resolución:

Dato: $A_{SE} = KA_{SL(cubo)}$

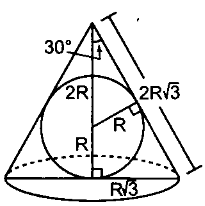
$\Rightarrow 4\pi R^2 = (K)(4)(2R)^2$

$\therefore K = \frac{\pi}{4}$



30. Una esfera está inscrita en un cono equilátero de área total 108. Calcular el área de la superficie esférica.

Resolución:



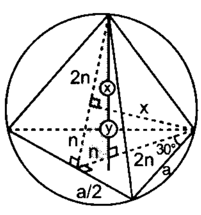
Dato: $108 = 2\pi(R\sqrt{3})(2R\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right) + \pi(R\sqrt{3})^2$

Simplificando: $9\pi R^2 = 108 \Rightarrow R^2 = \frac{12}{\pi}$

Luego: $A_{esfera} = 4\pi R^2 = 4\pi\left(\frac{12}{\pi}\right) \quad \therefore A_{esfera} = 48$

31. Se circunscribe una superficie esférica a un tetraedro regular cuya arista mide "a". Hallar el volumen que determina la superficie esférica.

Resolución:



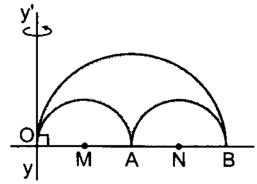
De la figura: $3n = \frac{a}{2}\sqrt{3} \Rightarrow 2n = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Por Menelao: $(n)(x)(2n) = (2n)(y)(3n) \Rightarrow x = 3y$

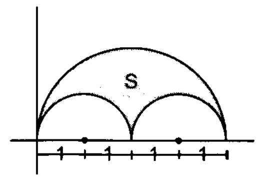
Por Pitágoras: $x^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{a^2}{3} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$\therefore V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{4}\right)^3 = \frac{\pi\sqrt{6}}{8}a^3$

32. Dada la figura, hallar el volumen generado al rotar la superficie sombreada alrededor del eje yy'; R = 2; OA = AB = R.



Resolución:



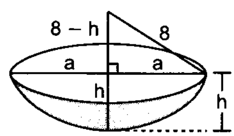
De la figura: $S = \frac{\pi(2)^2}{2} - \pi \Rightarrow S = \pi$

Luego por teorema de Pappus y Guldin:

$V = 2\pi(\bar{x})S \Rightarrow V = 2\pi(2)(\pi) \quad \therefore V = 4\pi^2$

33. En un casquete esférico correspondiente a una superficie esférica de radio 8, se cumple que el área de la base es igual a los 3/16 del área de la superficie esférica. Hallar la longitud de la altura del casquete.

Resolución:



Por dato: $\pi a^2 = (3/16)(4\pi)(8^2)$

$\Rightarrow a^2 = 3(16)$ ...(1)

Por teorema de Pitágoras:

$8^2 = a^2 + (8-h)^2$ ...(2)

Reemplazando (1) en (2):

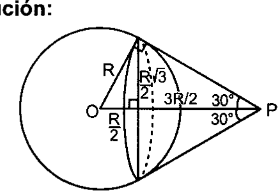
$64 = 3(16) + 64 - 16h + h^2$

$\Rightarrow 0 = h^2 - 16h + 16(3) \Rightarrow (h-12)(h-4) = 0$

$\therefore h = 4$

34. P es un punto exterior a una esfera de centro O, se traza todas las rectas tangentes a la superficie esférica desde P, formándose un cono equilátero cuya base es un círculo menor de la esfera. Hallar la relación de volúmenes del cono y la esfera.

Resolución:



V_c: volumen del cono
V_e: volumen de la esfera

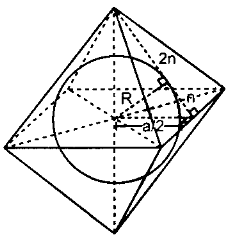
$$\Rightarrow V_c = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2\left(\frac{3R}{2}\right)$$

$$\Rightarrow V_c = \frac{\pi}{3}\left(\frac{3R^2}{4}\right)\frac{3R}{2} = \frac{3\pi R^3}{8};\ V_e = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\text{Luego: } \frac{V_c}{V_e} = \frac{\frac{3\pi R^3}{8}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{9}{32}$$

35. Hallar el volumen de la esfera inscrita en un octaedro regular de arista "a".

Resolución.



De la figura:

$$3n = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow n = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Por teorema de Pitágoras:

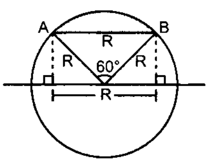
$$\frac{a^2}{4} = R^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

$$\Rightarrow R = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$\therefore\ V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a\sqrt{6}}{6}\right)^3 = \frac{\pi}{27}\sqrt{6}a^3$$

36. En una circunferencia de centro O se tiene el segmento circular determinado por $\overset{\frown}{AB}$, tal que $m\overset{\frown}{AB} = 60°$, donde el área del segmento circular es $3(2\pi - 3\sqrt{3})$. Hallar el volumen generado por este segmento circular al girar alrededor de un diámetro exterior a este segmento.

Resolución:



$$\text{Dato: } 3(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{\pi R^2}{6} - \frac{R\sqrt{3}}{2}\left(\frac{R}{2}\right)$$

$$3(2\pi - 3\sqrt{3}) = \frac{R^2}{12}(2\pi - 3\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow R^2 = 36 \Rightarrow R = 6$$

Luego: $V = \frac{\pi}{6}(AB)^2h$

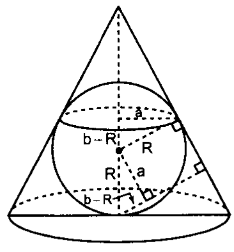
Pero: $h = R$

Reemplazando: $V = \frac{\pi}{6}(6^2)6$

$\therefore\ V = 36\pi$

37. En un cono circular recto (cono de revolución) está inscrita una esfera y el radio de la circunferencia tangente mide "a". Si la distancia del centro de la base del cono a una de sus generatrices mide "b", calcular el volumen de la esfera.

Resolución:



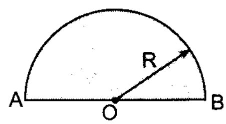
Por teorema de Pitágoras: $R^2 = a^2 + b^2 - 2bR + R^2$

$$\Rightarrow R = \frac{a^2 + b^2}{2b}$$

$$\text{Luego: } V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{a^2+b^2}{2b}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{(a^2+b^2)^3}{8b^3}$$

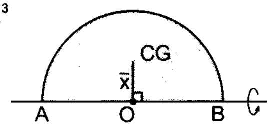
$$\therefore\ V_{esfera} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{a^2+b^2}{b}\right)^3$$

38. Determinar la distancia del centro de gravedad de la región semicircular mostrada al segmento AB:



Resolución:

Por teorema de Pappus y Guldin:



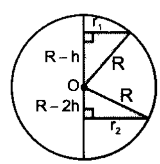
$$V = 2\pi\bar{x}\left(\frac{\pi R^2}{2}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$\Rightarrow \pi\bar{x} = \frac{4}{3}R$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{4R}{3\pi}$$

39. Se tiene una superficie esférica de radio R, se trazan dos planos perpendiculares a un diámetro $\overline{AB}$, de modo que uno de ellos dista del vértice A, h y el otro plano dista del vértice B, 2h. Si la razón de los radios de las secciones determinadas por los planos en la superficie esférica es de $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$, hallar el valor de "h".

Resolución:



Dato: $\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};\ r_1 < r_2$

$$\frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{2}{3} \Rightarrow r_2^2 = \frac{3r_1^2}{2} \qquad ...(1)$$

De la figura:

$$R^2 = r_1^2 + (R - h)^2 \qquad ...(2)$$

$$R^2 = r_2^2 + (R - 2h)^2 \qquad ...(3)$$

$$(2) = (3):\ r_1^2 + (R - h)^2 = r_2^2 + (R - 2h)^2$$

$$\text{De donde: } 2Rh - 3h^2 = r_2^2 - r_1^2 \qquad ...(4)$$

También de la figura:

$$R^2 = r_1^2 + (R - h)^2 \Rightarrow 2Rh - h^2 = r_1^2 \qquad ...(5)$$

$$(1) \text{ en } (4):\ 2Rh - 3h^2 = \frac{3r_1^2}{2} - r_1^2 = \frac{r_1^2}{2}$$

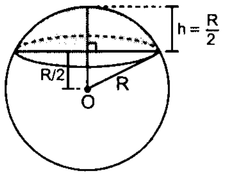
$\Rightarrow 4Rh - 6h^2 = r_1^2 \quad ...(6)$

De (5) y (6): $2Rh - h^2 = 4Rh - 6h^2$

$\therefore h = \frac{2}{5}R$

40. Una esfera tiene 48 de volumen se traza un plano secante a una distancia del centro igual a la mitad del radio. Hallar el volumen del menor segmento esférico que se determina.

Resolución:



Dato: $\frac{4}{3}\pi R^3 = 48 \Rightarrow \pi R^3 = 36 \quad ...(1)$

Luego: $V_{SE} = \frac{\pi}{6}\left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}R}{2}\right)^2$

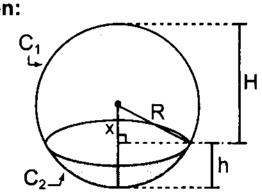
Simplificando: $V_{SE} = \frac{5\pi R^3}{24} \quad ...(2)$

(1) en (2): $V_{SE} = \frac{5}{24}(36) \Rightarrow V_{SE} = \frac{15}{2}$

$\therefore V_{SE} = 7{,}5$

41. En una esfera de radio R, a qué distancia del centro se trazará un plano secante para que las áreas de los casquetes determinados se encuentran en la relación de k_1/k_2 ($k_1 > k_2$).

Resolución:



De la figura: $H = R + x \quad ...(1)$

Por teoría: $A_{C_1} = 2\pi Rh \wedge A_{C_2} = 2\pi Rh$

$\Rightarrow \frac{Ac_1}{Ac_2} = \frac{2\pi RH}{2\pi RH} \Rightarrow \frac{A_{C_1}}{A_{C_2}} = \frac{H}{h} = \frac{k_1}{k_2}$

De donde: $H = \frac{k_1}{k_2}h$; pero: $h = R - x$

$\Rightarrow H = \frac{k_1}{k_2}(R - x) \quad ...(2)$

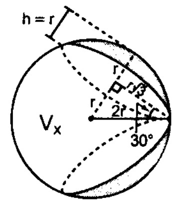
(1) en (2): $R + x = \frac{k_1}{k_2}(R - x)$

$Rk_2 + xk_2 = Rk_1 - xk_1$

$x(k_1 + k_2) = R(k_1 - k_2) \quad \therefore x = \frac{R(k_1 - k_2)}{k_1 + k_2}$

42. Una superficie esférica de área 144π es intersecada por dos planos que forman entre sí un ángulo diedro que mide 60°, de modo que la recta de intersección de los dos planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. Hallar el volumen de la parte de la esfera comprendido en el ángulo diedro.

Resolución:



Por dato: $4\pi(2r)^2 = 144\pi$

$\Rightarrow 4r^2 = 36 \Rightarrow r = 3$

Sea volumen en pedido: V_x

$V_x + 2\left[\frac{\pi r^2}{3} + \frac{1}{2}\pi(r\sqrt{3})^2 r\right] = \frac{4}{3}\pi(2r)^3$

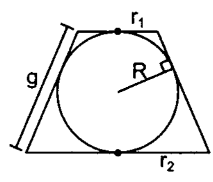
$V_x + 2\left[\frac{\pi r^2}{3}\left(\frac{r}{2} + \frac{9r}{2}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi(8r^3)$

$V_x + \frac{10\pi r^3}{3} = \frac{32\pi r^3}{3} \Rightarrow V_x = \frac{32\pi r^3}{3} - \frac{10\pi r^3}{3}$

$V_x = \frac{22}{3}\pi(3)^3 \quad \therefore V_x = 198\pi$

43. En un tronco de cono de revolución se encuentra inscrita una esfera cuya área total se desea calcular, se sabe que la suma de su diámetro con una de las generatrices del tronco de cono es 25 y la suma de los radios de las bases del tronco es 13.

Resolución:



Dato: $2R + g = 25 \wedge r_1 + r_2 = 13$

Por teorema de Pitot: $2g = 2r_1 + 2r_2 \Rightarrow g = r_1 + r_2$

Luego: $2R + 13 = 25 \Rightarrow 2R = 12 \Rightarrow R = 6$

En consecuencia: $A_{esfera} = 4\pi(6)^2$

$\therefore A_{esfera} = 144\pi$

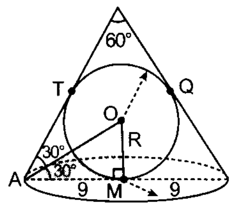
PROBLEMAS DE EXAMEN DE ADMISIÓN UNI

PROBLEMA 1 (UNI 2008 - I)

Se inscribe una esfera en un cono de revolución. Sabiendo que en el cono, dos generatrices opuestas determinan un ángulo de 60° y el diámetro de su base es 18 unidades. Calcule el volumen de la esfera (en unidades cúbicas).

A) $108\pi\sqrt{3}$ B) 324π C) $324\pi\sqrt{3}$
D) 972π E) $972\pi\sqrt{3}$

Resolución:



Piden $V_E = \frac{4}{3}\pi R^3$ ...(I)

Como $\overline{AO}$ es bisectriz del $\angle TAM$:

El ⊾OMA (notable 30° y 60°)

$R\sqrt{3} = 9 \Rightarrow R = 3\sqrt{3}$

Reemplazando en (I):

$V_E = \frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3 \quad \therefore V_E = 108\pi\sqrt{3}$

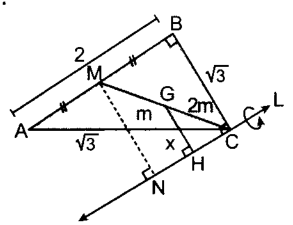
Clave: A

PROBLEMA 2 (UNI 2011 - I)

L es una recta que contiene un punto C, ABC es un triángulo rectángulo (recto en B) cuyo cateto $\overline{AB}$ es paralelo a la recta L. Si $BC = \sqrt{3}$ cm y $AB = 2$ cm, entonces el volumen (en cm^3) del sólido de revolución que se obtiene al girar el triángulo alrededor de L es:

A) 2π B) $\frac{5\pi}{2}$ C) 3π
D) $\frac{7\pi}{2}$ E) 4π

Resolución:



Por semejanza: ⊾CMN ~ ⊾CGH

$\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{2m}{3m};\ x = \frac{2}{3}\sqrt{3}$

Por teorema de Pappus: $V_{\triangle ABC} = 2\pi(x)(\underbrace{\text{Área}_{\triangle ABC}})$

$V_{\triangle ABC} = 2\pi\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)\left(\frac{2\times\sqrt{3}}{2}\right)$

$\Rightarrow V_{\triangle ABC} = 4\pi$

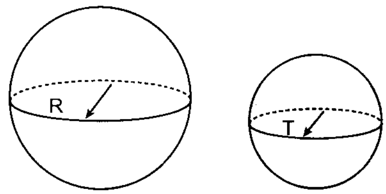
Clave: E

PROBLEMA 3 (UNI 2012 - I)

La razón entre los volúmenes de dos esferas es 8/27. Calcular el volumen de la cuña esférica del ángulo diedro 15° de la esfera mayor.

A) $3{,}5\pi$ B) 3π C) $2{,}5\pi$
D) 2π E) $1{,}5\pi$

Resolución:



Piden: $V_{cuña}$

Por dato: $\frac{V_1}{V_2} = \frac{8}{27} \Rightarrow \left(\frac{r}{R}\right)^3 = \frac{8}{27}$

$r = 2k \wedge R = 3k$

$V_{cuña} = \frac{(\pi R^3)(15)}{270} = 1{,}5\pi k^3 \Rightarrow$ Para $k = 1$

$\Rightarrow V_{cuña} = 1{,}5\pi$

Clave: E

PROBLEMA 4 (UNI 2012 - II)

Determine, en la siguiente figura, el volumen generado al rotar la región sombreada alrededor del eje x.

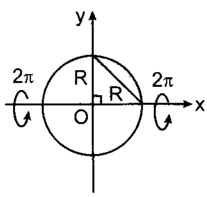
A) πR^3

B) $\frac{\pi R^3}{3}$

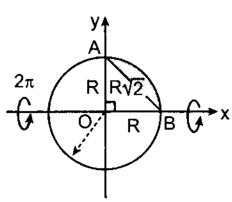
C) $\frac{\pi R^3}{4}$

D) $\frac{\pi R^3}{6}$

E) $\frac{\pi R^3}{9}$



Resolución:



Piden: $V_{sol.gen}$

El segmento circular, cuando gira alrededor de x, genera un anillo esférico.

$V = \frac{1}{6}\pi(AB)^2R$

$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\pi(R\sqrt{2})^2R$

$V = \frac{\pi R^3}{3}$

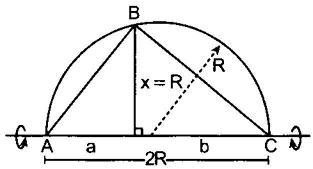
Clave: B

PROBLEMA 5 (UNI 2013 - II)

En un semicírculo cuyo radio mide R cm, se inscribe un triángulo rectángulo ABC ($\overline{AC}$ diámetro) tal que al girar alrededor de la hipotenusa genera un sólido, cuyo volumen es la mitad de la esfera generada por dicho semicírculo. Entonces el área de la superficie esférica es al área de la región triangular ABC como:

A) $\frac{8}{3}\pi$ B) 3π C) 4π D) $\frac{16}{3}\pi$ E) 8π

Resolución:



Piden: $\frac{A_{ESF}}{A_{\Delta ABC}}$

Condición: $V_S = \frac{V_{ESF}}{2}$

$$\frac{1}{3}\pi x^2 a + \frac{1}{3}\pi x^2 b = \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{3}\pi x^2(\underbrace{a+b}_{2R}) = \frac{2\pi}{3}R^3 \Rightarrow x = R$$

$$\frac{A_{ESF}}{A_{\Delta ABC}} = \frac{4\pi R^2}{2\frac{RR}{2}} = 4\pi$$

Clave: C

PROBLEMAS PROPUESTOS

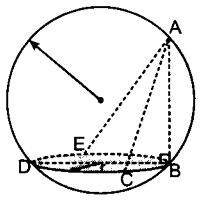
1. Calcular el área de la superficie esférica circunscrita a un cono equilátero, en el cual el área de su superficie total es A.

A) 2A B) 3A C) 25A/3
D) 16A/9 E) 16A/5

2. Dos superficies esféricas, cuyas áreas son 576π y 36π, son tangentes exteriormente y se apoyan en un plano. Calcular la distancia entre los puntos de tangencia con dicho plano.

A) 6 B) 8 C) 12
D) $6\sqrt{2}$ E) $6\sqrt{3}$

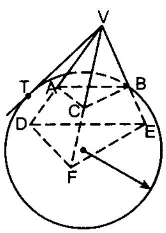
3. En el gráfico, $\overline{AB}$ es perpendicular al plano del círculo de radio r. Si DC = 2(DE) y AE = 2(AC) = 4, calcular el área de la superficie esférica.



A) 18π B) 36π C) 24π
D) 16π E) 20π

4. Según el gráfico, A, B, C, D, E y F pertenecen a la superficie esférica y T es punto de tangencia. Calcular la razón de volúmenes de los sólidos V-ABC y V-DEF. (V-DFE es un triedro equilátero cuya cara mide 30°). Si:

$$\frac{(VT)^6}{(A_{\triangle DVF})(A_{\triangle VFE})(A_{\triangle DVE})} = K$$



A) K/8
B) K/4
C) K/2
D) K/36
E) K/64

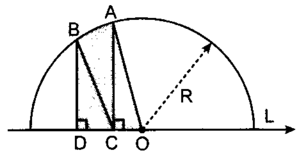
5. Un cuerpo en forma de esfera de volumen V es calentado hasta que su radio aumenta en un décimo de su valor inicial. Calcular el nuevo volumen de la esfera.

A) 1,331V B) 1,227V C) 1,666V
D) 1,343V E) 1,434V

6. El volumen de una esfera es numéricamente igual al área de su superficie y el área del huso correspondiente a dicha esfera es 2/9 del área de la superficie esférica. Calcular el volumen de la cuña esférica determinada por el huso.

A) 8π B) 6π C) 5π
D) $6\sqrt{2}\pi$ E) $6\sqrt{3}\pi$

7. Del gráfico se sabe que OC = 3; CD = 1 y R = 5. Calcular el área total de la superficie del sólido generado por la región sombreada al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{L}$.

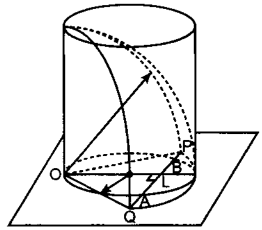


A) 72π B) 60π C) 64π
D) 39π E) 45π

8. Calcular la medida del ángulo que debe girar un semicírculo de radio $\sqrt[3]{28}$, respecto del diámetro como eje de giro, para que el volumen de la cuña esférica sea equivalente a un segmento esférico de una sola base de altura 2 y se encuentre en una esfera de radio 3.

A) 60° B) 90° C) 45°
D) 67°30' E) 75°

9. En el gráfico se muestra un cilindro de revolución y un semicuña esférica. Si AB = 4(AQ) y el volumen del cilindro es 250π, calcular el volumen de la semicuña esférica.



A) $\frac{3700\pi}{27}$ B) $\frac{3601\pi}{25}$ C) $\frac{4601\pi}{25}$
D) $\frac{3500\pi}{27}$ E) $\frac{4601\pi}{27}$

10. Una esfera es tangente a un plano. Un punto de dicho plano dista 13 y 12 del centro y del punto de tangencia, respectivamente. Calcular el volumen de la esfera.

A) $\frac{500\pi}{3}$ B) $\frac{400\pi}{3}$ C) 100π
D) 1205π E) 106π

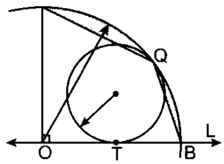
11. El radio de la base de un cilindro de revolución mide $3\sqrt{2}$, una de las bases del cilindro coincide con el círculo máximo de una semiesfera inscrita

en dicho cilindro y la otra base coincide con la base de un cono recto inscrito en el mismo cilindro. Calcular el volumen del segmento esférico comprendido entre la base de la semiesfera y la sección común del cono y la semiesfera.

A) 45π B) 50π C) 52π
D) 60π E) 64π

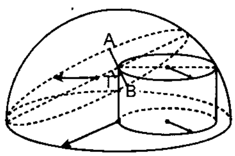
12. En el gráfico, OT = TB. Calcular la razón de volúmenes de los sólidos generados por las regiones sombreadas cuando giran alrededor de $\overleftrightarrow{L}$. (T y Q son puntos de tangencia).

A) 7/3
B) 4/5
C) 9/4
D) 1/8
E) 6/5

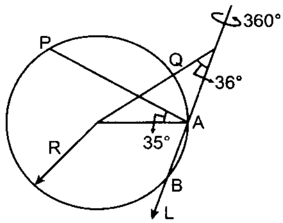


13. La sección mostrada en la esfera determina dos superficies equivalentes en la superficie semiesférica y $AB = 4\sqrt{2}$. Calcular el volumen del cilindro de revolución.

A) 4π
B) 2π
C) 8π
D) 16π
E) 12π



14. Si $m\overset{\frown}{AB} = 32°$; R = 5, calcular el área de la superficie generada por $\overset{\frown}{PQ}$ al girar 360° alrededor $\overleftrightarrow{L}$.



A) $8\pi^2$ B) $10\pi^2$ C) $9{,}6\pi^2$
D) $4{,}8\pi^2$ E) $19{,}2\pi^2$

15. En un romboide, cuyos lados están en la razón de 3 a 7, calcular la razón de volúmenes de los sólidos que se obtienen al girar la región romboidal en torno a sus lados.

A) 2/7 B) 3/7 C) 4/7
D) 6/7 E) 1

16. En un triángulo ABC se ubica su triángulo mediano PQR, tal que $\overline{PR} \parallel \overline{BC}$ y $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$. Si $m\angle ABR = \alpha$ y $m\angle RBC = \theta$, calcular la razón de volúmenes de los sólidos generados por la región triangular PQR al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{BC}$, respectivamente.

A) $\dfrac{\text{sen}2\alpha}{\text{sen}2\theta}$ B) $\dfrac{\tan\alpha}{\tan\theta}$ C) $\dfrac{\text{sen}2\alpha}{\cos\theta}$

D) $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\text{sen}\theta}$ E) $\dfrac{\text{sen}\alpha}{\cos 2\theta}$

17. Un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen de longitud 3 y 4 gira alrededor de su hipotenusa generando dos conos de base común; a éste sólido se le circunscribe una esfera. Calcular el volumen del sólido exterior a los dos conos e interior a la esfera.

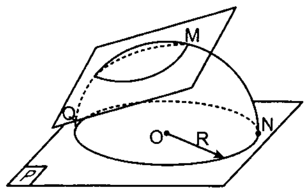
A) $\dfrac{237}{30}\pi$ B) $\dfrac{327}{30}\pi$ C) $\dfrac{337}{30}\pi$

D) $\dfrac{625}{30}\pi$ E) $\dfrac{288}{30}\pi$

18. En una esfera se trazan dos planos paralelos que intersecan a un mismo lado del centro. Sabiendo que la distancia entre ambos es de 7 y la distancia de la sección mayor al centro de las esferas es 4. Calcular el área del casquete esférico correspondiente a la sección menor, si el radio de la esfera es 15.

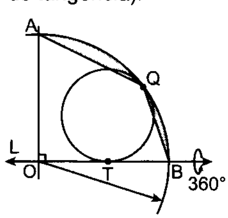
A) 100π B) 120π C) 200π
D) 400π E) 300π

19. En el gráfico, se muestra una semiesfera, donde se traza un plano Q secante a la semiesfera, tal que el ángulo diedro determinado por los planos P y Q, mide 37°, $MN = R\sqrt{2}$. Calcular la razón de volúmenes de los sólidos determinados en la semiesfera.



A) 118/7 B) 118/5 C) 119/7
D) 119/5 E) 119/4

20. En el gráfico, OT = TB. Calcular la razón de volúmenes de los sólidos generados por las regiones sombreadas cuando giran alrededor de $\overleftrightarrow{L}$ (Q y T son puntos de tangencia).

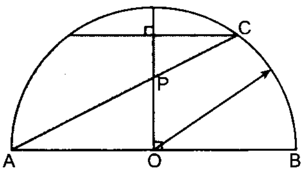


A) 7/3 B) 9/4 C) 1/8
D) 4/5 E) 6/5

21. Si a un polígono se le aumenta en 4 a su número de lados, entonces la suma de sus ángulos internos se duplica. Calcular el número de vértices del polígono regular.

A) 5 B) 6 C) 7 D) 8 E) 9

22. Según el gráfico, AP = 4 y PC = 2. Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{AB}$.

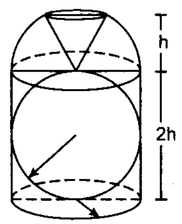


A) $14\pi\sqrt{3}$ B) $8\pi\sqrt{3}$ C) $6\pi\sqrt{3}$
D) $10\pi\sqrt{3}$ E) $13\pi\sqrt{3}$

23. En un tetraedro regular se inscribe y circunscribe esferas. Si el área de la superficie total del tetraedro es $144\sqrt{3}$, calcular el volumen del sólido comprendido entre las dos esferas.

A) $702\sqrt{2}\,\pi$ B) $702\sqrt{3}\,\pi$ C) $208\sqrt{6}\,\pi$
D) $700\sqrt{6}\,\pi$ E) $701\sqrt{6}\,\pi$

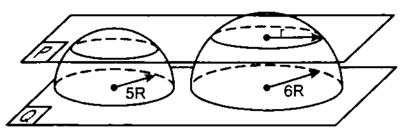
24. Según el gráfico se tiene un segmento esférico de dos bases. Un cilindro de revolución, un cono de revolución y una esfera inscrita en el cilindro. Si el volumen del cono y el cilindro son V_1 y V_2 respectivamente. Calcular el volumen del segmento esférico.



A) $\dfrac{V_1 + 2V_2}{6}$ B) $\dfrac{3V_1 + 2V_2}{6}$ C) $\dfrac{V_1 + 3V_2}{6}$

D) $\dfrac{3V_1 + 2V_2}{3}$ E) $\dfrac{9V_1 + 2V_2}{6}$

25. En el gráfico se muestra dos semiesferas de radios 6R y 5R, dos planos P y Q paralelos donde $r = 2\sqrt{5}\,R$. Calcular la razón de volúmenes de los segmentos esféricos de dos bases.

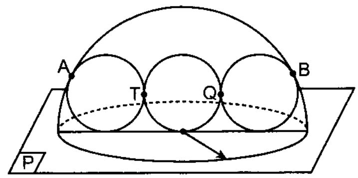


A) 38/7 B) 34/7 C) 32/7
D) 5 E) 37/7

26. Calcular el número de lados de un polígono regular, cuyo lado mide 6, si el número de diagonales es 3 veces su perímetro.

A) 28 B) 30 C) 32
D) 36 E) 39

27. En el gráfico se muestra tres esferas congruentes; calcular la razón de áreas entre el casquete esférico y la zona esférica determinados en la semiesfera por un plano paralelo al plano P y que contiene a los puntos A y B. (A, T, Q y B son puntos de tangencia).

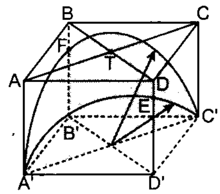


A) $\dfrac{5\sqrt{5}}{3} + 1$ B) $\sqrt{5} - 1$ C) $\dfrac{7\sqrt{5}}{5} - 1$

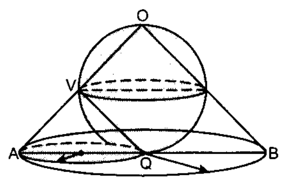
D) $\dfrac{7\sqrt{5}}{3} + 1$ E) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3} - 1$

28. En el gráfico se muestra un prisma recto ABCD-A'B'C'D' cuya base es una región rombal, m∠BCD = 53°. Calcular la razón de volúmenes del prisma y de la cuña esférica. (T es punto de tangencia).

A) $9/2\pi$
B) $7/2\pi$
C) $5/2\pi$
D) $3/2\pi$
E) $9/\pi$

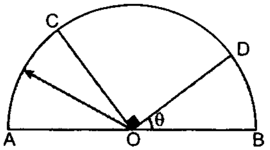


29. En la figura mostrada, la razón de volúmenes de los conos de vértice V y el cono mayor de vértice O es de 1 a $24\sqrt{3}$ respectivamente. Calcular la razón de áreas de los casquetes esféricos determinados. (Q es punto de tangencia).



A) $2\sqrt{2} - 1$ B) $2\sqrt{3} - 1$ C) $\sqrt{3} - 1$
D) $2\sqrt{5} - 1$ E) $3\sqrt{2} - 1$

30. En el gráfico, el semicírculo de diámetro $\overline{AB}$ gira 360° en torno a $\overline{AB}$. Si la razón de los volúmenes de los sólidos generados por las regiones sombreadas es de 2 a 1. Calcular el valor de θ. ($m\overset{\frown}{AC} > m\overset{\frown}{BD}$)



A) 30° B) 37° C) 53°
D) 53°/2 E) 75°

31. En una esfera de radio R se inscribe un cono de altura h y radio de la base r, hallar la relación entre R, h y r.

A) $r^2 + h^2 = 2Rh$ B) $R^2 + h^2 = 2Rr$
C) $R^2 + r^2 = 2Rh$ D) $h = 12 + r$
E) $r^2 + h^2 = 2Rr$

32. Un cono recto está circunscrito a una esfera de radio R, si el volumen del cono es mínimo, hallar la altura del cono.

A) 2R B) 3R C) 4R
D) 5R E) 5R/2

33. El área de un casquete esférico es la quinta parte del área de la esfera. Si la altura del casquete es de 2 dm, hallar el volumen del segmento esférico.

A) $\frac{50}{3}\pi\ dm^3$ B) $\frac{51}{3}\pi\ dm^3$ C) $\frac{52}{3}\pi\ dm^3$

D) $\frac{48}{3}\pi\ dm^3$ E) $\frac{25}{3}\pi\ dm^3$

34. Una esfera está inscrita en un cono equilátero de 108 de área total. Calcular el área de la superficie esférica.

A) 36 B) 42 C) 48
D) 54 E) 60

35. En un tetraedro regular de arista a, calcular la relación de volumen de las esferas inscrita y circunscrita.

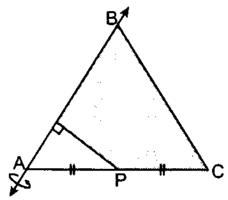
A) 1/25 B) 1/27 C) 1/30
D) 1/20 E) 1/60

36. En una esfera de radio R está inscrito una pirámide hexagonal regular de volumen máximo. Hallar dicho volumen.

A) $\frac{16\sqrt{3}}{21}R^3$ B) $\frac{14\sqrt{3}}{3}R^3$ C) $\frac{16\sqrt{3}}{27}R^3$

D) $\frac{10\sqrt{3}}{3}R^3$ E) $\frac{5}{2}R^3$

37. Calcular el volumen generado por la región sombreada al girar una revolución completa alrededor de AB, si AB = 6 (AB = BC = AC)



A) 54π B) $135\pi/2$ C) $57\pi/2$
D) $130\pi/2$ E) $105\pi/2$

38. Hallar el volumen de un tronco de cilindro circular recto circunscrito a una esfera de radio R, si los planos de sus bases forman un ángulo diedro de 45°.

A) $\pi R^3(3 + \sqrt{6})$ B) $\pi R^3(2 + \sqrt{2})$
C) $\pi R^3(\sqrt{3} + 1)$ D) $\pi R^3(\sqrt{2} + 1)$
e) $\pi R^3(2 + \sqrt{6})$

39. Se dan 2 esferas tangentes exteriormente y cuyos radios miden 1dm y 3dm. Hallar el volumen del cono recto circunscrito a ambas esferas.

A) $18\pi\ dm^3$ B) $28\pi\ dm^3$ C) $38\pi\ dm^3$
D) $81\pi\ dm^3$ E) $58\pi\ dm^3$

40. El área de la superficie esférica inscrita en un cilindro recto es los ... del área total del cilindro.

A) 3/2 B) 2/3 C) 1/3
D) 3/4 E) 2/5

41. Se tiene una semiesfera tal que su volumen es numéricamente igual al área de su círculo máximo. Calcular el área de la superficie de dicho sólido.

A) 9π B) $27\pi/4$ C) $25\pi/4$
D) 18π E) 24π

42. Las medidas de los radios de las esferas inscrita y circunscrita a un tetraedro regular están en la relación como:

A) 1:2 B) 2:3 C) 1:3
D) 2:5 E) 3:5

43. En la octava parte de una esfera de radio $4\sqrt{3}$ m se inscribe un cilindro recto de volumen máximo. Calcular la altura del cilindro.

A) 1 m B) 2 m C) 3 m
D) 4 m E) 5 m

44. La altura de un cono recto es igual a 4 m y el radio de su base es igual a 3 m. Calcular a que distancia de su vértice se debe intersectar dicho cono por un plano paralelo a la base para que la superficie total del pequeño cono obtenido sea equivalente a la superficie lateral del cono dado.

A) $\sqrt{8}$ m B) $\sqrt{7}$ m C) $\sqrt{10}$ m
D) $\sqrt{11}$ m E) $\sqrt{15}$ m

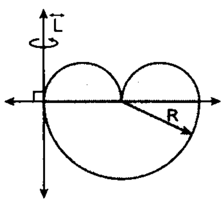
45. De una hoja rectangular ABCD se construye una superficie cónica de revolución y tal que los vértices B y C coinciden. Calcular la medida del mayor ángulo formado por dos generatrices.

A) 60° B) 90° C) 53°
D) 75° E) 30°

46. Se funde una bola de plomo de radio 5 cm, para obtener bolas cuyo radio sean de 1 cm cada una. ¿Cuántas bolas de plomo se obtendrán en el proceso?

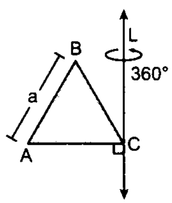
A) 50 B) 100 C) 150
D) 175 E) 125

47. Hallar el volumen generado, al rotar la siguiente superficie alrededor del eje $\overleftrightarrow{L}$.



A) $\frac{\pi^2R^3}{2}$ B) $\frac{3}{2}\pi^2R^3$ C) $\frac{3}{5}\pi R^3$
D) $\frac{4}{7}\pi R^3$ E) $\frac{2}{3}\pi R^3$

48. Hallar el volumen del sólido generado al girar el triángulo equilátero ABC, alrededor de L.



A) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ B) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$ C) $\frac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$
D) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$ E) $\frac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$

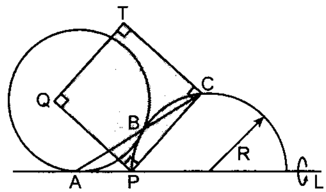
49. A través del vértice de un cono se ha trazado un plano que forma con la base del cono un ángulo diedro cuya medida es 45°. Este plano intersecta a la base por la cuerda $\overline{AB}$ de longitud "a", que une los extremos del arco de la base del cono correspondiente al ángulo central de medida θ. Hallar el volumen del cono.

A) $\frac{\pi a^3}{24}\text{sen}\theta$ B) $\frac{\pi a^2}{12}\text{sen}^2\theta$
C) $\frac{\pi a^3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{24\text{sen}3\theta}$ D) $\frac{\pi a^3\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{24\text{sen}^3\left(\frac{\theta}{2}\right)}$
E) $\frac{\pi a^3}{12}\text{sen}\theta\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

50. Calcular el volumen del tronco de cilindro recto cuya sección recta forma un ángulo α con la base mayor la cual tiene un área A. Las generatrices máxima y mínima miden a y b, respectivamente.

A) $\frac{3}{2}A(a+b)\cos\alpha$ B) $\sqrt{A}(a+b)\cos\alpha$
C) $\frac{2}{3}A(a+b)\cos\alpha$ D) $\frac{A(a+b)}{2}\cos\alpha$
E) $2A(a+b)\cos\alpha$

51. En el gráfico, si A y B son puntos de tangencia y R = 4, calcular el volumen generado por la región cuadrada PCTQ al girar una vuelta con respecto a la recta L.



A) 226π B) 236π C) 256π
D) 296π E) 324π

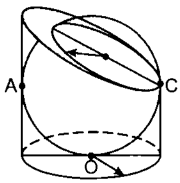
52. Hallar el volumen de un tronco de pirámide regular, de base hexagonal, circunscrito a una esfera, sabiendo que las aristas básicas miden 4 y 9 m.

A) 1097 m³ B) 1297 m³ C) 1197 m³
D) 2197 m³ E) 2097 m³

53. En un triángulo isósceles ABC de incentro L, cuya base es $\overline{AC}$ en el punto T. Si el área de la región triangular ABC, es S y región triangular ABC es S y m∠ITC = α. Calcular el área de la superficie generada por el triángulo ABC al girar una vuelta alrededor de L.

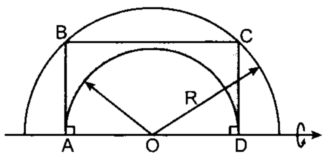
A) πScotα B) 4πScotα C) πStanα
D) 3πScotα E) 2πStanα

54. Según el gráfico, se muestra una esfera y un tronco cilindro de revolución. A, C y O son puntos de tangencia. Si el producto de las áreas determinadas en la esfera y la base superior del tronco de cilindro es numéricamente a BC, calcular el volumen de la esfera.



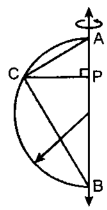
A) 8 B) $8/\pi$ C) 8π
D) $8/3\pi$ E) 8/3

55. Hallar el volumen generado por la región sombreada, si ABCD es un cuadrado y $R = \sqrt{5}$.



A) 10π B) 8π C) $\frac{20}{3}\pi$
D) $\frac{20}{7}\pi$ E) $\frac{10}{3}\pi$

56. Según el gráfico, siendo:
$AB = 5 \wedge (AP)^2 + (PB)^2 = 12$.
Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360° en torno a la recta AB.



A) 5π B) 12π C) 10π
D) 9π E) 25π

57. En una semiesfera está inscrito un cono circular, el vértice coincide con el centro de la circunferencia que sirve de base a la semiesfera; la recta que une el centro de la base del cono con un punto de la circunferencia mayor de la semiesfera determina con el plano de la base del cono un ángulo de 30°. Hallar la razón entre los volúmenes del cono y la semiesfera.

A) $\sqrt{3}/2$ B) $\sqrt{2}/3$ C) $3\sqrt{2}/2$
D) $\sqrt{2}/3$ E) $\sqrt{3}/9$

58. Calcular el volumen que genera un cuadrante cuyo radio mide 3 al girar un ángulo de 40° alrededor de uno de sus radios.

A) 2π B) 3π C) 4π
D) 5π E) 6π

59. Se tiene una zona esférica de una base definida por un plano secante a una superficie esférica cuyo radio mide 8, de modo que la suma del área de la superficie de esta zona y del área de su base es igual a los 7/16 del área de la superficie esférica. Calcular la longitud de la altura de esta zona.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

60. En una semicircunferencia de diámetro $\overline{AB}$ igual a 2R se traza la cuerda $\overline{CD}$ paralela al diámetro y que subtiende un arco cuya medida es 120°. Calcular el volumen del sólido generado por el segmento circular CD al girar alrededor de $\overline{AB}$.

A) $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{3}$ B) $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{4}$ C) $\frac{\pi R^3}{3}$
D) $\frac{\pi R^3\sqrt{3}}{2}$ E) $\frac{\pi R^3\sqrt{2}}{2}$

61. Se tiene un cilindro inscrito en una esfera de radio R, donde el radio de la esfera es el doble del radio de la base del cilindro. ¿A qué distancia del centro debe pasar un plano paralelo a las bases del cilindro, para que la sección comprendida entre la esfera y el cilindro sea equivalente a la base del cilindro?

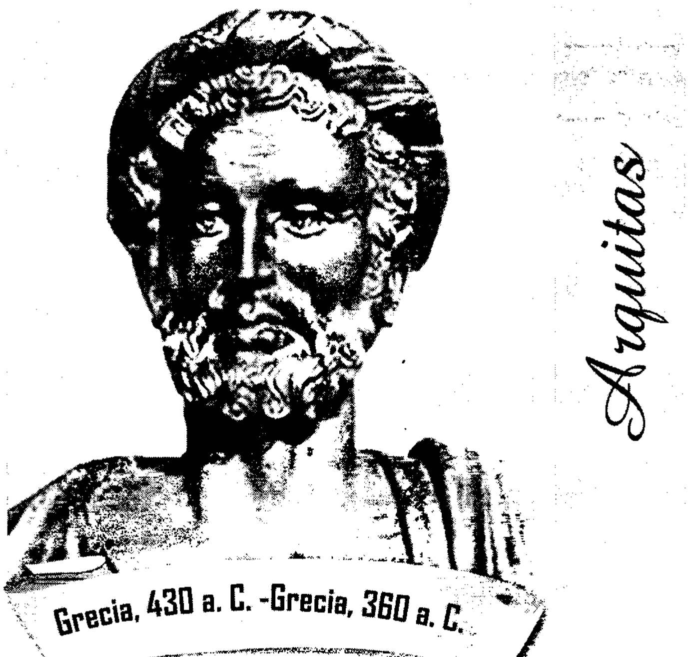
A) $\frac{R\sqrt{2}}{2}$ B) $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ C) $\frac{2R\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{R\sqrt{2}}{3}$ E) $\frac{2R\sqrt{3}}{2}$

CLAVES

1. D	9. A	17. B	25. C	33. A	41. B	49. D	57. E
2. C	10. A	18. B	26. E	34. C	42. C	50. D	58. A
3. E	11. A	19. A	27. B	35. B	43. D	51. C	59. D
4. E	12. D	20. C	28. A	36. C	44. C	52. C	60. D
5. A	13. A	21. B	29. B	37. E	45. A	53. B	61. A
6. A	14. E	22. B	30. B	38. D	46. E	54. D	
7. D	15. B	23. C	31. A	39. D	47. B	55. C	
8. B	16. D	24. E	32. C	40. B	48. B	56. C	

Temas selectos

23 capítulo



Arquitas de Tarento (430 a. C.-360 a. C.) fue un filósofo, matemático, astrónomo, estadista, general y contemporáneo de Platón. Arquitas de Tarento perteneció a los pitagóricos y fue alumno de la escuela de Filolao. Fue amigo de Platón, al que conoció durante el primer viaje que este realizó al sur de Italia y a Sicilia en 388 a. C., tras la muerte de Sócrates. En su Carta Séptima, Platón asegura que Arquitas trató de rescatarlo en sus dificultades con Dionisio II de Siracusa, mediante una carta de recomendación y enviando un barco a Sicilia en 361 a. C.

Enseñó matemáticas a Eudoxo de Cnidos, siendo a su vez maestro de Menecmo. Fue la primera persona en lograr una buena aproximación al problema de la duplicación del cubo y uno de los primeros que, tras Pitágoras, trabajó en el conocimiento conjunto de la Aritmética, Geometría, Astronomía y Música, el Quadrivium, así como de la Acústica, acotando las matemáticas a disciplinas técnicas, con las cuales se cree haya inventado la polea, el tornillo y una especie de mecanismo articulado con alas, similar a un pájaro, al que logró hacer volar cerca de 300 metros gracias al impulso de un núcleo de vapor comprimido. Según Aristóteles, fue el inventor del sonajero. Otros también aseguran su influencia directa sobre Euclides. Arquitas falleció en un naufragio en las costas de Apulia entre los años 360 y 350 a. C.

Fuente: Wikipedia

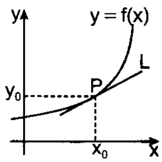
MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Existen muchos casos de la vida diaria en los que es necesario hallar valores extremos (máximos o mínimos), por ejemplo a un empresario le interesa minimizar sus costos y maximizar sus ganancias; en nuestro caso nos interesa maximizar o minimizar áreas, volúmenes, distancias, para ello se utilizan métodos que se estudian en matemática superior cuyo desarrollo escapa de la temática de este libro: sin embargo, a continuación se indican algunas reglas y propiedades que nos permitirán resolver problemas de este tipo. (Si quieres profundizar en el tema te sugiero consultar un libro de cálculo).

Derivadas

Dada una función $y = f(x)$, la derivada de y respecto a x se representa por: $\frac{dy}{dx}$; y'; D_x, y; $f'(x)$.

Geométricamente la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto dado es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.



En el gráfico adjunto $P(x_0; y_0)$ es punto de tangencia, entonces $m_L = f'(x_0)$.

Reglas básicas para el cálculo de derivadas

Función	Derivada
$y = C$(constante)	$y' = 0$
$y = af(x)$ (a = cte)	$y' = af'(x)$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = [f(x)]^n$	$y' = [f(x)]^{n-1}, f'(x)$
$y = f(x) \pm g(x)$	$y = f(x) \pm g'(x)$
$y = f(x).g(x)$	$y = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$y = f(x)/g(x)$	$y' = \frac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Ejemplos:

- $y = 8 \Rightarrow y' = 0$
- $y = 5x \Rightarrow y' = 5$
- $y' = 5x^3 \Rightarrow y' = 15x^2$
- $y = 4x^5 + 7 \Rightarrow y' = 20x^4$
- $y = x(x^3 + 5) \Rightarrow y' = 1(x^3 + 5) + x(3x^2)$
- $y' = x^3 + 5 + 3x^3 = 4x^3 + 5$
- $y = \frac{2x^3+1}{4x^4-3} \Rightarrow y' = \frac{6x^2(4x^4-3)+(2x^3+1)(16x^3)}{(4x^4-3)^2}$

  $y' = \frac{36x^6+16x^3-18x^2}{(4x^4-3)^2}$

Derivadas de funciones trigométricas

Función	Derivadas
$y = \text{sen}x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\text{sen}x$
$y = \tan x$	$y' = \sec^2 x$
$y = \cot x$	$y' = -\csc^2 x$
$y = \sec x$	$y' = \sec x \tan x$
$y = \csc x$	$y' = -\csc x \cot x$
$y = \text{sen}f(x)$	$y' = f'(x)\cos f(x)$
$y = \cos f(x)$	$y' = -f'(x)\text{sen}f(x)$
$y = \tan f(x)$	$y' = f'(x)\sec^2 f(x)$
$y = \cot f(x)$	$y' = -f'(x)\csc^2 f(x)$
$y = \sec f(x)$	$y' = f'(x)\sec f(x)\tan f(x)$
$y = \csc f(x)$	$y' = -f'(x)\csc f(x)\cot f(x)$

Ejemplos:

- $y = \text{sen}2x \Rightarrow y' = \frac{d(2x)}{dx}\cos 2x \Rightarrow y' = 2\cos 2x$
- $y = \cos x^3 \Rightarrow y' = \frac{d(x^3)}{dx}(-\text{sen}x^3) \Rightarrow y' = -3x^2\text{sen}x^3$
- $y = \text{sen}^2 x \Rightarrow y' = 2(\text{sen}x)\frac{d(\text{sen}x)}{dx}$

  $\Rightarrow y' = 2\text{sen}x\cos x$
- $y = \cos^3 5x \Rightarrow y' = 3(\cos^2 5x)\frac{d(\cos 5x)}{dx}$

  $y' = 3\cos^2 5x\frac{-d(5x)}{dx}\text{sen}5x \Rightarrow y' = 15\cos^2 5x\text{sen}5x$

Criterio de la primera derivada (para el cálculo de máximos y mínimos)

Dada una función continua $y = f(x)$ en un intervalo $I = [a; b]$, se denominan números críticos a todos los valores de $x \in I$, tal que su primera derivada es igual a cero o no está definida.

Suponga que "c" es un número crítico, es decir: $f'(c) = 0 \vee f'(c) \nexists$.

I. Si $f'(x) > 0$, para $a < x < c$ y $f'(x) < 0$ para $c < x < b$ (es decir, f' cambia de positiva a negativa en "c"), entonces f' tiene un máximo local en "c".

II. Si $f'(x) < 0$, para $a < x < c$ y $f'(x) > 0$ para $c < x < 0$ (es decir, f' cambia de negativa a positiva en "c"), entonces "f" tiene un mínimo local en "c".

III. Si f' no cambia de signo en "c", entonces "f" no tiene extremo (máximo o mínimo) en "c".

Propiedad:

La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ tiene un máximo o un mínimo en $x = -\frac{b}{2a}$.

(**) Si $a > 0$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es un mínimo.

(**) Si $a < 0$, $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ es un máximo.

Ejemplo:

Hallar los valores extremos de $f(x) = 3x - x^3$

Resolución:

Aplica el criterio de la primera derivada.

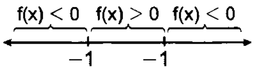
$f(x) = 3x - x^3 \Rightarrow D_xf(x) = D_x(3x) - D_x(x^3)$

$\Rightarrow f'(x) = 3 - 3x^2$

Calcula los números críticos: $f'(x) = 0 \Rightarrow 3 - 3x^2 = 0$

$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = -1 \vee x = 1$

Ubica dichos números en una recta numérica y analiza el signo de $f'(x)$



Observa que antes de -1, $f'(x) < 0$ y después de -1, $f'(x) > 0$, como hay cambio de signo, en $x = -1$, hay mínimo.

Además, antes de 1, $f'(x) > 0$ y después de 1, $f'(x) < 0$, como hay cambio de signo, en $x = 1$, hay máximo.

El mínimo valor de $f(x)$ es:

$f(-1) = 3(-1)-(-1)^3 \Rightarrow f(-1) = -3 + 1 = -2$

El máximo valor de $f(x)$ es: $f(1) = 3(1) - (1)^3$

$f(1) = 3 - 1 = 2$

Aplicaciones:

1. Hallar las dimensiones del rectángulo de perímetro 36 cm, cuya área es máxima.

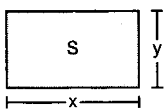
Resolución:

Según dato:

$2x + 2y = 36$

$\Rightarrow x + y = 18$

$y = 18 - x$ ...(1)



El área: $S = xy$

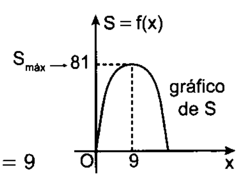
Con (1): $S = x(18 - x) \Rightarrow S = 18x - x^2$

El valor de x que da el máximo de S se encuentra al hacer $\frac{dS}{dx} = 0$

Es decir:

$dx(18x - x^2) = 0$

$18 - 2x = 0 \Rightarrow x = 9$



Reemplazando en (1): $y = 9$

Luego: entre todos los rectángulos que tienen igual perímetro, el cuadrado es de máxima área.

Notar que: $S' = \frac{dS}{dx} = 18 - 2x$, se verifica que lo hallado es un máximo ya que:

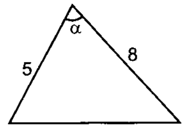
$S'' = \frac{d}{dx}(18 - 2x)$

$S''= -2 < 0$, cumple con el criterio de la segunda derivada.

2. Dos lados de un triángulo tienen longitudes 5 y 8, respectivamente. Hallar el valor máximo del área.

Resolución:

En este caso el ángulo α es variable.



El área se evalúa:

$A = \frac{1}{2}(5)(8)\text{sen}\alpha = 20\text{sen}\alpha$

Hallamos el valor de α que da el máximo valor de A, haciendo $\frac{dA}{d\alpha} = 0$; $\frac{d}{d\alpha}(20\text{sen}\alpha) = 0$

Es decir: $20\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

Entonces, el valor máximo del área será: $A = 20\text{sen}90° \Rightarrow A_{máximo} = 20$

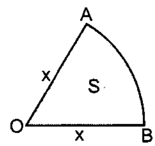
Hemos deducido que dadas las longitudes de dos lados de un triángulo, aquel que tiene área máxima es un triángulo rectángulo que tiene por catetos las longitudes conocidas.

3. Un jardinero posee una cuerda de 100 metros y quiere cercar con ella, en forma de sector circular, un jardín, de modo que el área sea máxima. Hallar dicha área.

Resolución:

Si x es el radio del sector, entonces la longitud del arco AB es $(100 - 2x)$.

El área:



$S = \frac{1}{2}(\text{longitud de } \overset{\frown}{AB})(\text{radio})$

$S = \frac{1}{2}(100 - 2x)(x)$

$S = 50x - x^2$ ...(1)

Para hallar el máximo, hacemos: $\frac{dS}{dx} = 0$

Luego: $50 - 2x = 0$

$\Rightarrow x = 25$; este es el valor de x que da el máximo de S.

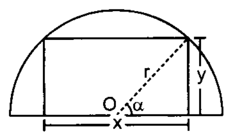
Reemplazando en (1):

$S_{máximo} = 50 \times 25 - 25^2 \quad \therefore S_{máximo} = 625\ m^2$

4. Hallar el valor máximo del área del rectángulo inscrito en un semicírculo de radio "r", si uno de sus lados está sobre el diámetro.

Resolución:

Considerando el gráfico:



$y = r\text{sen}\alpha \wedge x = 2r\cos\alpha$

El área del rectángulo:

$A = xy = 2r^2\text{sen}\alpha\cos\alpha$

$\Rightarrow A = r^2\text{sen}2\alpha$. Se observa que A es función de α, donde $0° < \alpha < 90°$.

Para hallar el valor de α que da el máximo valor de A: $\frac{dA}{d\alpha} = 0$

$r^2(2\cos 2\alpha) = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = 90° \Rightarrow \alpha = 45°$

$\Rightarrow A_{máximo} = r^2 \text{sen}(2 \times 45°) = r^2 \text{sen} 90°$

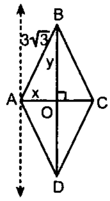
$\therefore A_{máximo} = r^2$

5. En un rombo ABCD cuyo lado mide $3\sqrt{3}$ m, se traza por el vértice A una recta paralela a la diagonal BD, luego se hace girar el rombo en torno a esta recta, una vuelta completa, con lo que se generará un sólido cuyo volumen máximo debe calcularse, así como la longitud de BD, para este volumen.

Resolución:

Sea, según el gráfico:

AO = x; BO = y; con el teorema de Pappus-Guldin, el volumen del sólido generado, es:



$V = 2\pi x(\text{área ABCD})$

$V = 2\pi x\left[\frac{(2x)(2y)}{2}\right] \Rightarrow V = 4\pi x^2 y$ ...(1)

En el $\triangle$AOB: $x^2 = (3\sqrt{3})^2 - y^2$

Reemplazando en (1):

$V = 4\pi(27 - y^2)y$ ...(2)

Como V= f(y), hallamos $\frac{dV}{dy}$ e igualamos a cero para obtener el valor de "y" que da el máximo:

$\frac{dV}{dy} = \frac{d}{dy}(108\pi y - 4\pi y^3) \Rightarrow \frac{dV}{dy} = 108\pi - 12\pi y^2$

$\frac{dV}{dy} = 0 \Rightarrow 108\pi - 12\pi y^2 = 0 \Rightarrow y = 3$

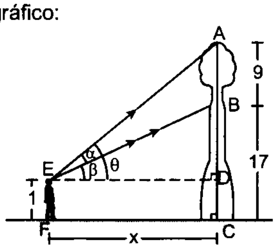
Luego, BD = 6 m y el volumen máximo:

$\therefore V = 216\pi \text{ m}^3$

6. Un árbol de 9 m. de altura se encuentra en la cima de una colina de 17 m. de alto. Si el ojo de un observador se encuentra a 1 m del suelo, ¿a qué distancia debe encontrarse de un punto directamente bajo el árbol, para que sea máximo el ángulo formado por las visuales a la base y a la copa del árbol?

Resolución:

Sea el gráfico:



Incógnita: x, cuando α es máximo.

Se observa: $\alpha = \phi - \beta$

$\therefore \tan\alpha = \tan(\phi - \beta) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\tan\phi - \tan\beta}{1 + \tan\phi\tan\beta}$

Del gráfico: $\tan\phi = \frac{AD}{DE} = \frac{25}{x}$

$\tan\beta = \frac{BD}{DE} = \frac{16}{x}$

Luego: $\tan\alpha = \frac{\frac{25}{x} - \frac{16}{x}}{1 + \left(\frac{25}{x}\right)\left(\frac{16}{x}\right)} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{9x}{x^2 + 400}$

Como $\tan\alpha$ = f(x), (función de x), α será máximo cuando $\tan\alpha$ lo sea.

Luego, derivamos: $f(x) = \frac{9x}{x^2 + 400}$ e igualamos a cero para hallar el valor de x que da el máximo:

$\frac{df(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{9(x^2 + 400) - 9x(2x)}{(x^2 + 400)^2} = 0$

De donde: $9(x^2 + 400) - 18x^2 = 0 \Rightarrow x = 20$ m

7. Determinar las dimensiones del cono circular recto circunscrito a una esfera de radio 2 m, de tal modo que el volumen de dicho cono sea mínimo.

Resolución:

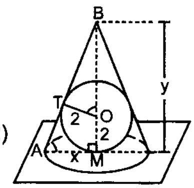
Sean x e y, el radio de la base y la altura del cono, respectivamente. El volumen V, del cono, es:

$V = \frac{\pi}{3}x^2 y$ ...(1)

En el triángulo AMB: $AB = \sqrt{x^2 + y^2}$

Se trata de despejar una de las variables (x o y), en función de la otra, para reemplazar en (1).

$\triangle OTB \sim \triangle AMB$: $\frac{OT}{AM} = \frac{OB}{AB}$



$\frac{2}{x} = \frac{y - 2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

De donde: $x^2 = \frac{4y}{y - 4}$ ...(2)

Reemplazando (2) en (1):

$V = \frac{4\pi y^2}{3(y - 4)} \Rightarrow V = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{y^2}{(y - 4)}\right]$

Derivando respecto a y:

$\frac{dV}{dy} = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{d}{dy}\left(\frac{y^2}{x - 4}\right)\right] \Rightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{4\pi}{3}\left[\frac{y^2 - 8y}{(y - 4)^2}\right]$

Igualando a cero para hallar el valor de y que da el mínimo V.

$\frac{4\pi}{3}\left[\frac{y^2 - 8y}{(y - 4)^2}\right] = 0$, de donde: $y^2 - 8y = 0$

$y = \begin{cases} 0, \text{ de un mínimo} \\ 8, \text{ de el mínimo buscando} \end{cases} \Rightarrow y = 8$

Para hallar x, de (2), expresión anterior:

$x^2 = \frac{4y}{y - 4} = \frac{4(8)}{8 - 4} = 8 \Rightarrow x = 2\sqrt{2}$

Por lo tanto, la altura del cono es 8 m y el radio de la base $2\sqrt{2}$ m.

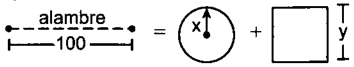
8. Con un alambre de longitud 100 m se forma un cuadrado y una circunferencia. Indicar cómo debe cortarse el alambre para que la suma de las áreas encerradas sea:

I. Mínima. II. Máxima.

Dato: Tomar $\pi = \frac{22}{7}$

Resolución:

Se tiene:



Debe cumplirse: $2\pi x + 4y = 100$

con $\pi = \frac{22}{7} \Rightarrow \frac{44x}{7} + 4y = 100$

De donde: $11x + 7y = 175$

Luego, despejando y: $y = 25 - \frac{11x}{7}$ ...(1)

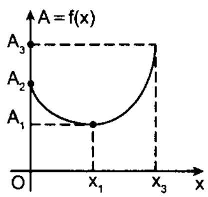
La suma de áreas encerradas: $A = \pi x^2 + y^2$

Con (1):

$A = \frac{22}{7}x^2 + \left(25 - \frac{11x}{7}\right)^2$

$\therefore A = \frac{275}{49}x^2 - \frac{550}{7}x + 625$ ...(2)

Se puede responder a las preguntas planteadas, observando el gráfico de la función A = f(x).



I. x_1, da el mínimo valor A_1 de la función A = f(x), el cual se obtiene haciendo f'(x) = 0.

Veamos: $\frac{dA}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{275}{49}x^2 - \frac{550}{7}x + 625\right)$

$\therefore \frac{dA}{dx} = \frac{550}{49}x - \frac{550}{7}$

Igualando a cero: $\frac{550}{49}x - \frac{550}{7} = 0$

de dónde: x = 7 (este es el valor x_1)

Y se verifica analíticamente que es el mínimo, ya que $f'(x) = \frac{550}{49}x - \frac{550}{7}$

Siendo la segunda derivada: $f''(x) = \frac{550}{49} > 0$

Así, el valor mínimo de A se obtiene al reemplazar x = 7, en (2):

$A_{mínimo} = \frac{275}{49}(7)^2 - \frac{550}{7}(7) + 625$

$A_{mínimo} = 350\ m^2$

El alambre en este caso, debe cortarse para obtener una circunferencia de longitud $2\pi x = 2\left(\frac{22}{7}\right)(7) = 44$ m, siendo el resto de 100 − 44 = 56 m, para formar el cuadrado de lado y = 56/4 = 14 m.

II. De la curva A = f(x), se observa que x^3 da el máximo valor de A, el cual ocurre cuando "x" es máximo. Es decir, cuando "y" sea mínimo. Hecho que ocurre al dedicar todo el alambre a formar una circunferencia.

Entonces: y = 0. De modo que, al reemplazar en (1), se obtiene:

$0 = 25 - \frac{11x}{7} \Rightarrow x = \frac{175}{11}$ valor de x_3

Al sustituir en (2), hallamos el máximo valor de A = f(x):

$A_{máximo} = \frac{275}{49}\left(\frac{175}{11}\right)^2 - \frac{550}{7}\left(\frac{175}{11}\right) + 625$

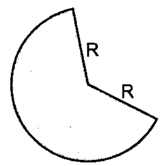
$A_{máximo} = \frac{8750}{11}\ m^2 = 795{,}45\ m^2$

Notar que en la curva A = f(x), el punto A_2 se obtiene para x = 0, dando el valor A = 625 m², en la expresión (II). Esto ocurre cuando todo el alambre se dedica a formar un cuadrado de lado $\frac{100}{4} = 25$ m.

Por lo tanto, en el intervalo $[0; x_3]$, el mínimo es A_1 y el máximo A_3.

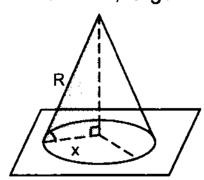
9. La figura muestra una porción de cartulina, en forma de sector circular de radio R, con la cual se quiere obtener la superficie lateral de un cono de revolución de volumen máximo.

Hallar la longitud del radio de la base del cono.



Resolución:

Llamando x, el radio de la base del cono; la generatriz R y la altura $\sqrt{R^2 - x^2}$



El volumen V, se evalúa:

$V = \frac{\pi}{3}x^2\sqrt{R^2 - x^2}$

$\Rightarrow V = \frac{\pi}{3}x^2(R^2 - x^2)^{1/2}$

Hallamos, ahora $V' = \frac{dV}{dx}$

$\Rightarrow V' = \frac{\pi}{3}(2x)(R^2 - x^2)^{1/2} + \frac{\pi}{3}x^2\left(\frac{1}{2}\right)(-2x)(R^2 - x^2)^{1/2-1}$

$V' = \frac{2}{3}\pi x(R^2 - x^2)^{1/2} - \frac{\pi}{3}x^3(R^2 - x^2)^{-1/2}$

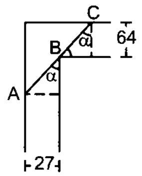
Igualando a cero, para hallar el valor de x que da el máximo V:

$V' = 0 \Rightarrow \frac{2}{3}\pi x(R^2 - x^2)^{1/2} - \frac{\pi}{3}x^3(R^2 - x^2)^{-1/2} = 0$

De donde: $x = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

10. Hallar la longitud máxima de una varilla de acero que se puede trasladar de un corredor a otro, de anchos 27 y 64 pies, respectivamente, suponiendo que la varilla debe permanecer siempre paralela al piso.

Resolución:



La situación es como indica la figura: donde la varilla AC podrá deslizarse a través de A y C.

$AC = AB + BC$

$AC = 27\csc\alpha + 64\sec\alpha$ ...(1)

Se observa que $AC = f(\alpha)$

Luego: $\dfrac{df(\alpha)}{d\alpha} = -27\csc\alpha\cot\alpha + 64\sec\alpha\tan\alpha$

Igualando a cero, para hallar el valor de α que cumple la condición planteada:

$-27\csc\alpha\cot\alpha + 64\sec\alpha\tan\alpha = 0$

De donde: $\tan\alpha = 3/4 \Rightarrow \alpha = 37°$

Finalmente, reemplazando en (1):

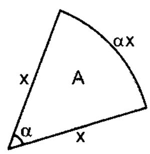
$AC = 27 \times \dfrac{5}{3} + 64 \times \dfrac{5}{4} \Rightarrow AC = 125$ pies.

11. En un sector circular de área conocida A, hallar la medida del ángulo central, para que el perímetro sea mínimo.

Resolución:

Sea x la longitud del radio y α (en radianes), la medida del ángulo central.

La longitud del arco será: αx.



El dato: $\dfrac{\alpha x^2}{2} = A \quad \therefore\ x = \sqrt{\dfrac{2A}{\alpha}}$

Para el perímetro:

$P = 2x + \alpha x = (2 + \alpha)x \Rightarrow P = (2 + \alpha)\sqrt{\dfrac{2A}{\alpha}}$

o mejor: $P = 2\sqrt{2A}\,\alpha^{-1/2} + \sqrt{2A}(\alpha^{1/2})$ ...(1)

Como P es una función de α, para hallar el valor mínimo de P, hacemos: $\dfrac{dP}{d\alpha} = 0$

Así: $P' = \dfrac{dP}{d\alpha} = 2\sqrt{2A}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\alpha^{-\frac{1}{2}-1}\right) + \sqrt{2A}\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(\alpha^{\frac{1}{2}-1}\right)$

$P' = \dfrac{dP}{d\alpha} = -\sqrt{2A}(\alpha^{-3/2}) + \dfrac{\sqrt{2A}}{2}(\alpha^{-1/2})$ ...(2)

Haciendo $P' = 0$, para hallar el valor de α que da el mínimo valor de P: $-\sqrt{2A}(\alpha^{-3/2}) + \dfrac{\sqrt{2A}}{2}(\alpha^{-1/2}) = 0$

De donde: $\alpha = 2$ rad

Nota. Verificamos que α da un mínimo de P, comprobando que $P' > 0$, para $\alpha = 2$. En efecto, derivando respecto a α, la ecuación (2) para hallar P'':

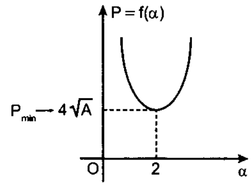
$P'' = \dfrac{d}{d\alpha}(P')$

$P'' = \dfrac{d}{d\alpha}\left(-\sqrt{2A}\,\alpha^{-3/2} + \dfrac{\sqrt{2A}}{2}\alpha^{-1/2}\right)$

$P'' = -\sqrt{2A}\left(-\dfrac{3}{2}\right)\alpha^{-3/2-1} + \dfrac{\sqrt{2A}}{2}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\alpha^{-1/2-1}$

$P'' = \dfrac{3}{2}\sqrt{2A}(\alpha^{-5/2}) - \dfrac{\sqrt{2A}}{4}(\alpha^{-3/2})$

El gráfico P vs α, es:



Para $\alpha = 2$: $P'' = \dfrac{3}{2}\sqrt{2A}(2^{-5/2}) - \dfrac{\sqrt{2A}}{4}(2^{-3/2})$

$\Rightarrow P'' = \dfrac{3}{2}\sqrt{2A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2^5}}\right) - \dfrac{\sqrt{2A}}{4}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2^3}}\right)$

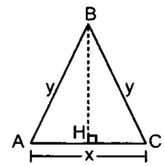
Efectivamente: $P'' = \dfrac{3\sqrt{A}}{8} - \dfrac{\sqrt{A}}{8} = \dfrac{\sqrt{A}}{4} > 0$

$\therefore\ \alpha = 2$, es el mínimo valor de P.

12. Si el perímetro de un triángulo isósceles es L, hallar el valor máximo del área.

Resolución:

Sea el triángulo ABC, con $AB = BC$



Sean: $AB = y$; $AC = x$ (x e y son variables)

Dato: $2y + x = L$ ...(1)

Incógnita: valor máximo del área ABC

Llamemos S al área del triángulo ABC:

$S = \dfrac{1}{2}(AC)(BH)$

Siendo: $AH = HC = \dfrac{x}{2}$; en el triángulo ABH:

$BH = \sqrt{(AB)^2 - (AH)^2} = \sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

Luego: $S = \dfrac{1}{2}(x)\sqrt{y^2 - \dfrac{x^2}{4}}$

Debemos expresar S en función de una sola variable. Para ello, despejamos x en (1):

$x = L - 2y$. En la expresión anterior:

$S = \dfrac{1}{2}(L - 2y)\sqrt{y^2 - \dfrac{(L - 2y)^2}{4}}$

Simplificando:

$S = \left(\dfrac{L}{2} - y\right)\sqrt{Ly - \dfrac{L^2}{4}}$ ...(2)

Para hallar el valor de "y" que da el máximo S, igualamos a cero, la derivada de S respecto a "y".

$$\frac{dS}{dy}=0;\quad \frac{d}{dy}\left[\left(\frac{L}{2}-y\right)\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}\right]=0$$

Efectuando el desarrollo de la derivada del producto de las funciones $\left(\frac{L}{2}-y\right)$; $\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}$ con la regla (V) vista anteriormente, así como la regla (VII):

$$\left(\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}\right)\frac{d}{dy}\left(\frac{L}{2}-y\right)+\left(\frac{L}{2}-y\right)\frac{d}{dy}\left(\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}\right)=0$$

$$\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}(-1)+\left(\frac{L}{2}-y\right)\frac{1}{2}\left(Ly-\frac{L^2}{4}\right)^{-1/2}(L)=0$$

$$-\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}+\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-y\right)\left(Ly-\frac{L^2}{4}\right)^{-1/2}=0$$

Es decir: $\dfrac{L\left(\frac{L}{2}-y\right)}{2\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}}=\sqrt{Ly-\frac{L^2}{4}}$

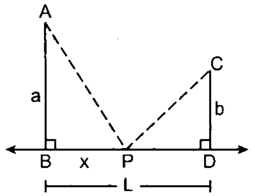
Luego: $\frac{L}{2}\left(\frac{L}{2}-y\right)=\left(Ly-\frac{L^2}{4}\right)$

De donde: $y=\frac{L}{3}$. De modo que al reemplazar en (1): $x=\frac{L}{3}$

Es decir: $AB=BC=AC=\frac{L}{3}$, resultando ABC, un triángulo equilátero. El valor del área es:

$$\left(\frac{L}{3}\right)^2\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{L^2\sqrt{3}}{36}$$

13. En la figura, se conocen las longitudes a, b y L. Hallar el valor de x, de modo que la suma: $S = AP + PC$, sea mínima.



Resolución:

Haciendo uso del teorema de Pitágoras en los triángulos ABP y PDC:

$AP=\sqrt{a^2+x^2}$ y $PC=\sqrt{(L-x)^2+b^2}$

Luego: $S=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(L-x)^2+b^2}$

Para hallar: $S_{mínimo}$ hacemos: $\frac{dS}{dx}=0$

Así: $\frac{d}{dx}\left[\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{(L-x)^2+b^2}\right]=0$

$$\frac{d}{dx}\sqrt{a^2+x^2}+\frac{d}{dx}\sqrt{(L-x)^2+b^2}=0$$

o $\frac{d}{dx}(a^2+x^2)^{1/2}+\frac{d}{dx}\sqrt{(L-x)^2+b^2}=0$

Efectuando: $\frac{1}{2}(a^2+x^2)^{1/2-1}(2x)$

$+\frac{1}{2}[(L-x)^2+b^2]^{1/2-1}(2)(L-x)(-1)=0$

Simplificando: $\dfrac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\dfrac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2+b^2}}=0$

De donde: $(b^2-a^2)x^2+2a^2Lx-a^2L^2=0$

Resolviendo para x:

$$x=\frac{-2a^2L\pm\sqrt{(2a^2L)^2-4(-a^2L^2)(b^2-a^2)}}{2(b^2-a^2)}$$

$$x=\frac{-2a^2L\pm 2abL}{2(b^2-a^2)}$$

Dando: x: $\frac{aL}{b+a}$; si $b\neq a$ $\wedge$ $\frac{aL}{a-b}$

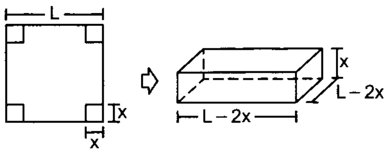
Pero, como $\frac{a}{a-b}>1$, entonces $\frac{aL}{a-b}>L$, por lo cual no se acepta como solución $\frac{aL}{a-b}$, ya que x debe ser menor que L.

Así, la respuesta será: $x=\frac{aL}{a+b}$

14. De una hoja de cartón cuadrada, de lado L, hay que hacer una caja rectangular abierta, de mayor capacidad posible, recortando para ello cuadrados de lado x, en los ángulos de la hoja y doblando después los salientes de la figura, en forma de cruz. Hallar el valor de x.

Resolución:

Se tienen los esquemas:



El volumen V de la caja:

$V=(L-2x)^2x\quad\therefore\ V=L^2x-4Lx^2+4x^3$

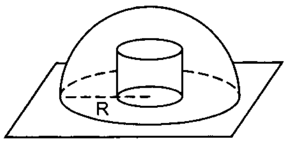
Para el máximo: $\frac{dV}{dx}=0$

$\frac{d}{dx}(L^2x-4Lx^2+4x^3)=0\Rightarrow L^2-8Lx+12x^2=0$

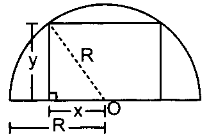
De donde: $x=L/2\ \vee\ x=L/6$

$\therefore$ La solución será: $x=\frac{L}{6}$

15. En una semiesfera de radio R, se inscribe un cilindro circular recto, de volumen máximo. Hallar dicho volumen.



Resolución:



Sean x e y, radio de la base y altura del cilindro, respectivamente.
El volumen V, del cilindro:
$V = \pi x^2 y$ ...(1)
En el triángulo rectángulo, obtenido de la sección indicada:
$x^2 = R^2 - y^2$ ...(2)
Reemplazando (2) en (1):
$V = \pi(R^2 - y^2)y \Rightarrow V = \pi R^2 y - \pi y^3$

Es decir, hemos expresado V como una función de "y". Para hallar el valor de "y", que da el máximo V, se iguala a cero la derivada.

$\frac{dV}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dy}(\pi R^2 y - \pi y^3) = 0$

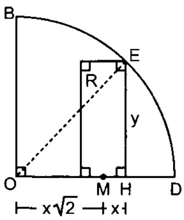
$\Rightarrow \pi R^2 - 3\pi y^2 = 0$

De donde: $y = \frac{R}{3}\sqrt{3}$

Ahora, en (2): $x = \frac{R}{3}\sqrt{6}$

Finalmente en (1): $V_{\text{máximo}} = \frac{2}{9}\pi R^3\sqrt{3}$

16. La figura muestra un octavo de esfera de radio R, en el cual se inscribe un cilindro circular recto, de volumen máximo. Hallar dicho volumen.



Resolución:
Sean "x" e "y", radio de la base y altura del cilindro.
El volumen: $V = \pi x^2 y$ ...(1)
E, es el punto de contacto de la superficie esférica con la circunferencia de la base superior del cilindro.
$\overline{OM}$ biseca el $\angle AOC$, Por lo tanto: $OM = x\sqrt{2}$

En el $\triangle OHE$, de la sección BOD:
$y^2 = R^2 - (x\sqrt{2} + x)^2$
$y^2 = R^2 - x^2(3 + 2\sqrt{2})$

De donde: $x^2 = \dfrac{R^2 - y^2}{3 + 2\sqrt{2}}$ ...(2)

Reemplazando (2), en (1):

$V = \pi\left(\dfrac{R^2 - y^2}{3 + 2\sqrt{2}}\right)y$

$V = \pi(3 - 2\sqrt{2})R^2 y - \pi(3 - 2\sqrt{2})y^3$

Entonces, para el $V_{\text{máximo}}$:

$\frac{dV}{dy} = 0 \Rightarrow \pi(3 - 2\sqrt{2})R^2 - 3\pi(3 - 2\sqrt{2})y^2 = 0$

Efectuando: $y = \frac{R}{3}\sqrt{3}$

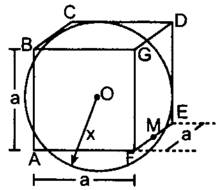
En (2): $x^2 = (3 - 2\sqrt{2})\left(\frac{2}{3}R^2\right)$

Finalmente, en (1): $V_{\text{máximo}} = \frac{2}{9}\pi R^3(3\sqrt{3} - 2\sqrt{6})$

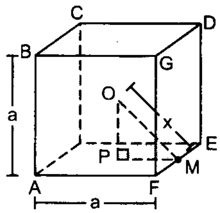
DEMOSTRACIÓN DE TEOREMAS Y PROPIEDADES EN POLIEDROS

Superficie esférica tangente a las aristas de un cubo

Consideremos el cubo ABC...H, cuyas aristas tienen longitud "a". Determinemos la longitud x del radio de la superficie esférica tangente a todas las aristas. El punto de contacto con ellas, es su punto medio. El centro de la esfera es el mismo centro del cubo.



Luego, si M es el punto de tangencia en $\overline{EF}$: $OM = x$.
P, centro de la cara AHEF.

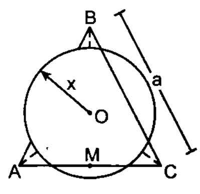


En el $\triangle OPM$: $OP = PM = \frac{a}{2}$ $\therefore$ $x = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Superficie esférica tangente a las aristas de un tetraedro regular

Consideremos un tetraedro regular ABCD, cuyas aristas tienen longitud "a". Queremos hallar la longitud x, del radio de la superficie esférica tangente a todas las aristas del tetraedro. Basta notar que el centro de esta esfera es el mismo que el de la esfera circunscrita, donde:

$$OA = OB = OC = OD = R$$



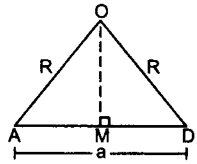
Además, en la sección AOD, $\overline{OM} \perp \overline{AD}$, $OM = x$

Entonces: $MD = \frac{a}{2}$

Y, en el $\triangle OMD$: $x^2 = R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Como se sabe: $R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

$x^2 = \left(\frac{a}{4}\sqrt{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$ $\therefore$ $x = \frac{a}{4}\sqrt{2}$

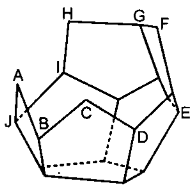


Teorema de Euler

En todo poliedro convexo, el número de caras aumentado en el de vértices, es igual al de aristas más dos. Siendo C el número de caras, V el de vértices y A el de aristas, hay que probar que:

$$\boxed{C + V = A + 2} \qquad ...(1)$$

Sea una superficie poliédrica abierta terminada en una línea poligonal plana o no plana ABCDEFGHIJ.

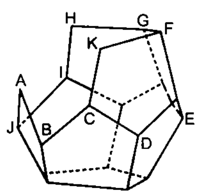


Los elementos de ella cumplirán esta relación:

$$\boxed{C + V = A + 1} \qquad ...(2)$$

En efecto, se cumple en el caso de una sola cara, pues el número de lados es igual al de vértices; bastará probar que si se cumple la fórmula anterior para una superficie de C caras, se cumple para C + 1 caras.

Añadamos a la superficie de C caras una cara más CDEFK, con "m" lados y "m" vértices. Suponiendo que esta nueva cara deje todavía abierta la superficie poliédrica, su contorno no podrá coincidir con la línea que antes limitaba la abertura, solo coincidirán "p" de los "m" lados. Al tener "p" lados comunes con la superficie, tendrá p + 1 vértices comunes, o sea las caras son ahora C + 1, los vértices V + m − (p + 1) y las aristas A + m − p.



Y componiendo la relación que propusimos (2):

$C + 1 + V + m - (p + 1) = A + m - p + 1$

$C + V = A + 1$

Queda, pues, probada la exactitud de la fórmula (2) en virtud del principio de inducción. Pero ocurre que al añadir la última cara que cierra el poliedro, el número de vértices y el de aristas no aumentan, pues unos y otras son comunes a la superficie y a la cara que se añade. En cambio las caras aumentan en una unidad.

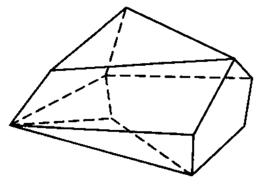
Así, en la fórmula (2), si el primer miembro ha aumentado en una unidad, para que subsista la igualdad habrá que añadir uno al segundo miembro, quedando:

$$C + V = A + 2$$

Demostración de que, en todo poliedro, la suma de la medida de los ángulos en todas las caras es:

$$\boxed{\Sigma\angle \text{ de todas las caras} = 360°(V - 2)}$$

Supongamos un poliedro que tiene
m_1 caras de n_1 lados cada una;
m_2 caras de n_2 lados cada una;
m_3 caras de n_3 lados cada una.



Entonces:

$\Sigma\angle$todas las caras $= m_1[180°(n_1 - 2)] + m_2[180°(n_2 - 2)] + ...$

$\Sigma\angle$todas las caras $= 180°(m_1n_1 + m_2n_2 + ... - 2m_1 - 2m_2 - ...)$

$\Sigma\angle$todas las caras $= 180°[m_1n_1 + m_2n_2 + ... - 2(m_1 + m_2 + ...)]$...(1)

Por otro lado: $m_1 + m_2 + ... = C$, (número total de caras).

y: $m_1n_1 + m_2n_2 + ... = 2A$ = (siendo A, el número total de aristas).

Reemplazando esto en (1):

$\Sigma\angle$todas las caras $= 180°(2A - 2C) = 360°(A - C)$; pero, por el teorema de Euler:

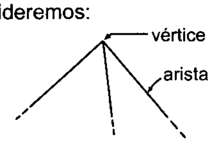
$A + 2 = C + V \Rightarrow A - C = V - 2$

Luego: $\Sigma\angle$todas las caras $= 360°(V - 2)$

Demostración de que solo existen cinco poliedros regulares

Vamos a demostrar que solo existen 5 poliedros regulares, es decir, 5 poliedros convexos cuyas caras, en cada caso, son todas regiones poligonales regulares congruentes. Para ello, consideremos:

C: número de caras.
A: número de aristas.
V: número de vértices.



También:
n: número de lados en cada cara.
m: número de aristas que concurren en cada vértice.

Se tienen: $mV = 2A$ ...(I)

y $nC = 2A$ ...(II)

Igualando los primeros miembros de (I) y (II):

$mV = nC \Rightarrow V = \dfrac{nC}{m}$ ...(III)

Por el teorema de Euler: $C + V = A + 2$

Escribamos esta relación solo en términos del número de caras (C). Para ello, de (II): $A = \dfrac{nC}{2}$

Y, con (III): $C + \dfrac{nC}{m} = \dfrac{nC}{2} + 2$

Despejando: $\boxed{C = \dfrac{4m}{2m + 2n - mn}}$ ...(α)

Ahora estamos en condiciones de averiguar cuántas caras tendrán los poliedros regulares, dando valores a "m" y "n". Es evidente que, el menor valor de "m" es 3. También el menor valor de "n", es 3.

Probando, para "m" primero y luego "n", cuidando que C resulte entero:

1.° Si m = 3, reemplazando en (α), queda: $C = \dfrac{12}{6-n}$
Luego, en esta última expresión de C,
Si n = 3 ⇒ C = 4 (tetraedro regular)
Si n = 4 ⇒ C = 6 (hexaedro regular)
Si n = 5 ⇒ C = 12 (dodecaedro regular)

2.° Para m = 4; en la expresión (α), luego de simplificar, queda: $C = \dfrac{8}{4-n}$
Aquí, el único valor posible de "n", es 3; lo cual conduce a C = 8 (octaedro regular).

3.° Si m = 5, en (α): $C = \dfrac{20}{10-3n}$
Deducimos que, en este caso, el único valor posible de "n"; es 3. Resultando C = 20 (icosaedro regular).

4.° Si m = 6, en (α), queda: $C = \dfrac{6}{3-n}$
Expresión que no lleva a determinar algún otro poliedro.

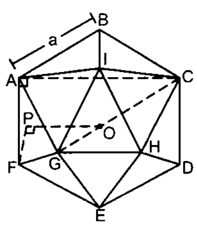
5.° Análogamente, para otros valores de "m", no se logra solución.
Así, queda demostrado que solo existen 5 poliedros regulares.

Volumen del icosaedro regular

Consideremos un icosaedro regular de arista "a".
Tenemos:
$V_{icosaedro} = 20V_{OFAG}$; es decir, 20 veces el volumen de la pirámide OFAG:

$$V_{icosaedro} = 20 \times \frac{1}{3}(\text{área FAG})(OP) \qquad ...(1)$$

La apotema $\overline{OP}$ del icosaedro, se calcula en el △OPF:



$$OP = \sqrt{(OF)^2 - (PF)^2}$$

Siendo, el △FAG, equilátero: $(PF)\sqrt{3} = FG$

$$\Rightarrow (PF)\sqrt{3} = a \Rightarrow PF = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

De otro lado: $OF = \dfrac{FC}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{AF^2 + AC^2}$, en el △FAC.

$\overline{AC}$ es diagonal del pentágono regular ABCHG:

$$AC = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$$\Rightarrow OF = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}(\sqrt{5}+1)^2} = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

Reemplazando en OP:

$$OP = \sqrt{\frac{a^2}{16}(10 + 2\sqrt{5}) - \frac{a^2}{3}} = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{7 + 3\sqrt{5}}{6}}$$

Finalmente, en (1):

$$V_{icosaedro} = \left(\frac{20}{3}\right)\left(a^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{6}}\right)$$

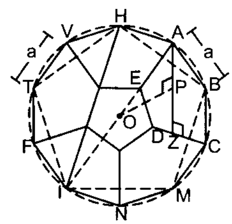
$$V_{icosaedro} = \frac{5a^3}{6}\left(\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}\right)$$

o también: $\boxed{V_{icosaedro} = \dfrac{5}{12}(a^2)(3 + \sqrt{5})}$

Volumen del dodecaedro

Consideremos un dodecaedro regular, cuya arista tiene longitud "a".
El volumen del dodecaedro será 12 veces el volumen de la pirámide OABCDE:

$$V_{dodecaedro} = 12(V_{OABCDE}) \qquad ...(1)$$



$\overline{OP}$ es la perpendicular del centro del dodecaedro, a la cara ABCDE.
$\overline{OP}$ es apotema del poliedro regular. P es centro de la cara ABCDE.
Entonces:

$$V_{OABCDE} = \frac{1}{3}(\text{área ABCDE})(OP) \qquad ...(2)$$

PA es el circunradio del pentágono regular ABCDE.
Se sabe:

$$AB = \frac{PA}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}} \Rightarrow a = \frac{PA}{2}\sqrt{10 - \sqrt{20}}$$

De donde: $PA = \dfrac{20}{\sqrt{10 - \sqrt{20}}}$ ...(α)

En el △OPA: $(OP)^2 = (OA)^2 - (PA)^2$ ...(3)

De otro lado:

$OA = \dfrac{AI}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{(AH)^2 + (HI)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + (HI)^2}$, en el △IHA

$\overline{HI}$ es diagonal del pentágono regular TIMBH:

$$HI = \frac{TH}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

$\overline{TH}$ es diagonal del pentágono regular de lado "a":

$$TH = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

Entonces, reemplazando en lo anterior:

$$HI = \frac{a}{4}(\sqrt{5} + 1)^2$$

$$HI = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{5})$$

y, en $OA = \dfrac{1}{2}\sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}(3 + \sqrt{5})^2}$

$\Rightarrow (OA)^2 = \frac{a^2}{8}(9 + 3\sqrt{5})$ ...(β)

Reemplazando (α) y (β), en (3):

$$(OP)^2 = \frac{a^2}{8}(9 + 3\sqrt{5}) - \frac{4a^2}{10 - \sqrt{20}}$$

De donde: $OP = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}$ ...(4)

El área del pentágono ABCDE:

$$\text{Área ABCDE} = \left(5 \times \frac{1}{2}\right)(DC)(PZ) = \left(\frac{5}{2}a\right)\left(\frac{PA}{4}\right)(\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{Área ABCDE} = \left(\frac{5a}{8}\right)\left(\frac{2a}{\sqrt{10 - \sqrt{20}}}\right)(\sqrt{5} + 1)$$

$$\text{Área ABCDE} = \frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \quad \text{...(5)}$$

Finalmente, reemplazando (4) y (5), en (2) y luego en (1):

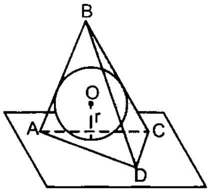
$$V_{\text{dodecaedro}} = \left(12 \times \frac{1}{3}\right)\left(\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\right)\left(\frac{a}{2}\sqrt{\frac{25 + 11\sqrt{5}}{10}}\right)$$

$$V_{\text{dodecaedro}} = \frac{5a^3}{2}\sqrt{\frac{47 + 21\sqrt{5}}{10}}$$

o, también: $\boxed{V_{\text{dodecaedro}} = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})}$

Relación entre las alturas y el radio de la esfera inscrita en un tetraedro

Sean h_a, h_b, h_c y h_d, las longitudes de las alturas del tetraedro ABCD, trazadas desde los vértices A, B, C y D, respectivamente.



Sean, además, "r" el radio de la esfera inscrita y S_a, S_b, S_c y S_d, áreas de las caras opuestas a los mismos vértices.

El volumen V, del tetraedro, se puede escribir:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}(S_a)(h_a) \\ V &= \frac{1}{3}(S_b)(h_b) \\ V &= \frac{1}{3}(S_c)(h_c) \\ V &= \frac{1}{3}(S_d)(h_d) \end{aligned}\right\} (*)$$

Además, al trazar $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ y $\overline{OD}$:

$$V_{OBCD} + V_{OACD} + V_{OABD} + V_{OABC} = V_{ABCD}$$

$$\frac{1}{3}(S_a)(r) + \frac{1}{3}(S_b)(r) + \frac{1}{3}(S_c)(r) + \frac{1}{3}(S_d)(r) = V$$

$$\frac{1}{3}r(S_a + S_b + S_c + S_d) = V$$

Reemplazando aquí, los equivalentes de S_a, S_b, S_c y S_d, según las expresiones de (*):

$$\frac{1}{3}r\left(\frac{3V}{h_a} + \frac{3V}{h_b} + \frac{3V}{h_c} + \frac{3V}{h_d}\right) = V$$

De donde, al simplificar V y 3, pasando luego "r" al primer miembro, queda:

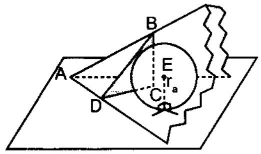
$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d} = \frac{1}{r} \quad \text{...(α)}$$

Relación entre las alturas y los radios de las esferas exinscritas en un tetraedro

Consideremos un tetraedro ABCD: E, centro de la esfera exinscrita relativa a la cara BCD, y r_a su radio. Esta superficie esférica es también tangente a los planos de las otras tres caras.

Llamemos r_b, r_c y r_d los radios de las otras esferas exinscritas (La denominación es tal que las esferas son opuestas a los vértices A, B, C y D, respectivamente).

Sean también h_a, h_b, h_c y h_d, alturas respectivas del tetraedro.



El volumen V del sólido:

$$\therefore\ V = V_{EABC} + V_{EABD} + V_{EACD} - V_{EBCD}$$

$$V = \frac{1}{3}[S_d(r_a) + S_c(r_a) + S_b(r_a) - S_a(r_a)]$$

Es decir: $V = \frac{1}{3}(r_a)(S_d + S_c + S_b - S_a)$

Pero, con las relaciones de la demostración anterior:

$$S_a = \frac{3V}{h_a}$$

Entonces: $V = \frac{1}{3}(r_a)\left(\frac{3V}{h_d} + \frac{3V}{h_c} + \frac{3V}{h_b} - \frac{3V}{h_a}\right)$

De donde: $\boxed{\frac{1}{r_a} - \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}}$ ...(β)

En forma análoga:

$$\frac{1}{r_b} = \frac{1}{h_a} - \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

$$\frac{1}{r_c} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} + \frac{1}{h_d}$$

$$\frac{1}{r_d} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} - \frac{1}{h_d}$$

Caso del tetraedro regular

1.° **Radio de la esfera inscrita:** en la fórmula (α), al reemplazar: $h_a = h_b = h_c = h_d = h$, longitud de la altura del tetraedro regular.

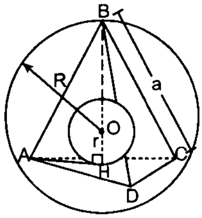
$$\frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h} = \frac{1}{r}$$

De donde: $\boxed{r = \frac{h}{4}}$ ...(γ)

Además, recordando que, si "a" es la longitud de la arista: $h = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. Entonces, la longitud del radio de la esfera inscrita, en términos de la longitud de la arista, es:

$$\boxed{r = \frac{a}{12}\sqrt{6}} \qquad \ldots (\in)$$

2.° Radio de la esfera circunscrita: en el gráfico adjunto, O es el centro común de las esferas inscrita y circunscrita al tetraedro regular ABCD. O, estará sobre la altura $\overline{BH}$ del sólido.
Luego: BO + OH = BH.



$$R + r = h$$

Pero, según (γ): $r = \frac{h}{4}$

$$\boxed{R = \frac{3}{4}h} \quad \boxed{R = 3r} \quad \boxed{R = \frac{a}{4}\sqrt{6}} \qquad \ldots(\delta)$$

3.° Radio de la esfera exinscrita: en la expresión (β):

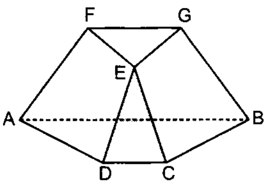
$\frac{1}{r_a} = -\frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h} + \frac{1}{h}$; siendo $r_a = r_b = \ldots = r'$

De donde: $\boxed{r' = \frac{h}{2}}$ $\qquad \ldots(\omega)$

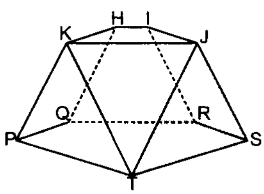
En función de la longitud de la arista: $\boxed{r' = \frac{a}{6}\sqrt{6}}$ $\ldots(\gamma)$

Prismoide o prismatoide

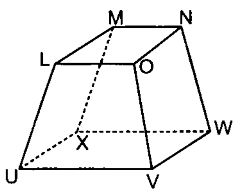
Es el sólido que tiene por bases dos polígonos situados en planos paralelos y cuyas caras laterales son trapecios o triángulos. Algunos ejemplos son:



Prismatoide de bases: ABCD y EFG



Prismatoide de bases: HIJK y PQRST



Prismatoide de bases: UVWX, LMNO

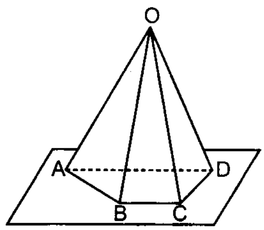
Volumen del prismoide. Si S_1 y S_2, áreas de las bases: "d", distancia entre los planos de dichas bases y S el área de la sección equidistante de ellos, el volumen V del prismatoide viene dado por la fórmula:

$$\boxed{V = \frac{d}{6}(S_1 + S_2 + 4S)}$$

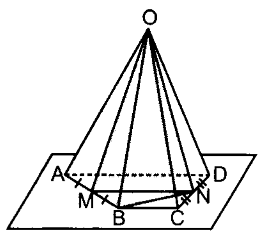
Para demostrar esta expresión, veamos un teorema previo.

Teorema. El volumen de una pirámide trapecial cualquiera, es igual a cuatro veces el volumen de una pirámide que tiene por vértice cualquiera de los vértices del trapecio y por base la región triangular formada al unir el vértice de la pirámide trapecial y los puntos medios de los lados no paralelos del trapecio.

La figura muestra una pirámide de vértice O y base ABCD, donde $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$.



En la figura, $\overline{MN}$ es mediana del trapecio.



Debemos demostrar que:

$$\boxed{V_{OABCD} = 4(V_{BMNO})}$$

En efecto, sabemos, por propiedad para todo cuadrilátero, que:

$$A_{MBN} = \frac{1}{4} A_{ABCD} \qquad \ldots(\alpha)$$

Si "h", es la distancia de O al plano ABCD:

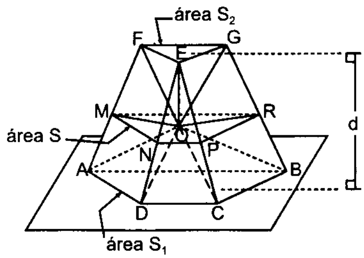
$$V_{OABCD} = \frac{1}{3}(A_{ABCD})(h)$$

$V_{BMNO} = \frac{1}{3}(A_{MBN})(h)$; al tomar por vértice O y base MBN.

Dividiendo miembro a miembro estas dos últimas expresiones:

$$\frac{V_{OABCD}}{V_{BMNO}} = \frac{A_{ABCD}}{A_{MBN}} \text{ y, con } (\alpha)\text{: } V_{OABCD} = 4(V_{BMNO})$$

Demostración de la fórmula del volumen del prismoide



Consideremos el prismatoide de bases FEG (triangular) y ABCD (cuadrangular).
área FEG: S_2
área ABCD: S_1
distancia entre las bases: "d"
MNPR, es la sección equidistante de las bases y tiene área S.

Sea O, un punto de la región MNPR. Los planos determinados por O y las aristas, descomponen al prismatoide en pirámides cuyo vértice común es O y bases las del prismatoide y las caras laterales del mismo.

El volumen V, del prismoide se evalúa sumando los volúmenes de las pirámides:

$$V = V_{OABCD} + V_{OEFG} + V_{OEFAD} + V_{OCDE} + V_{OECBG} + V_{OABGF} \quad ...(1)$$

Siendo: $$V_{OABCD} = \frac{1}{3}(S_1)\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{S_1 d}{6} \quad ...(2)$$

$$V_{OEFG} = \frac{1}{3}(S_2)\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{S_2 d}{6} \quad ...(3)$$

Aplicando el teorema anterior:

$$V_{OEFAD} = 4V_{EMNO} = \left(4\times\frac{1}{3}\right)(A_{OMN})\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{4d}{6}(A_{OMN}) \quad ...(4)$$

$$V_{OCDE} = 4V_{EONP} = \left(4\times\frac{1}{3}\right)(A_{NOP})\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{4d}{6}(A_{NOP}) \quad ...(5)$$

$$V_{OECBG} = 4V_{EOPR} = \left(4\times\frac{1}{3}\right)(A_{OPR})\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{4d}{6}(A_{OPR}) \quad ...(6)$$

$$V_{OABGF} = 4V_{FMOR} = \left(4\times\frac{1}{3}\right)(A_{MOR})\left(\frac{d}{2}\right) = \frac{4d}{6}(A_{MOR}) \quad ...(7)$$

Reemplazando en (1), las expresiones del (2) al (7):

$$V = \frac{S_1 d}{6} + \frac{S_2 d}{6} + \frac{4d}{6}(A_{OMN} + A_{NOP} + A_{OPR} + A_{MOR})$$

$$V = \frac{S_1 d}{6} + \frac{S_2 d}{6} + \frac{4d}{6}(A_{MNPR})$$

Siendo: área MNPR = S

Entonces: $V = \frac{S_1 d}{6} + \frac{S_2 d}{6} + \frac{4d}{6}S$

De donde: $V = \frac{d}{6}(S_1 + S_2 + 4S)$

CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS CON REGLA Y COMPÁS

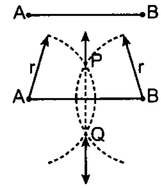
Haciendo uso de una regla sin marcas de unidades y un compás, vamos a solucionar algunos problemas gráficos de construcción.

Problemas básicos

1. Ubicación del punto medio de un segmento

Dado el segmento AB, ubicar su punto medio.

Resolución:

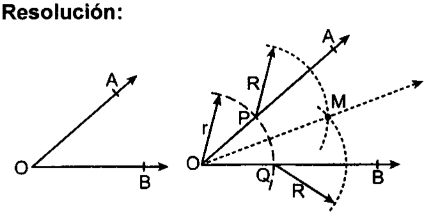


Haciendo centros en A y B, con radios "r", aproximadamente mayor que la mitad de AB, se trazan dos arcos, los cuales se cortan en los puntos P y Q. Si se trazan $\overline{AP}$, $\overline{PB}$, $\overline{AQ}$ y $\overline{QB}$, el cuadrilátero APBQ será un rombo. Entonces, $\overleftrightarrow{PQ}$, es mediatriz de $\overline{AB}$. El punto medio de $\overline{AB}$ es la intersección de $\overline{PQ}$ y $\overline{AB}$.

2. **Trazo de la bisectriz de un ángulo**

Dado el ángulo AOB, trazar su bisectriz.

Resolución:

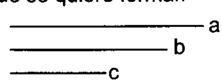


Haciendo centro en O, vértice del ∠AOB, se traza un arco con cualquier radio "r", cortando $\overrightarrow{OA}$ en P y $\overrightarrow{OB}$ en Q.

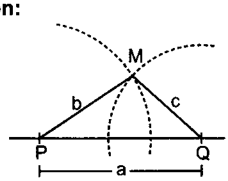
Luego con centros en P y Q, y el mismo radio R (que puede ser igual a "r"), se trazan otros dos arcos, los cuales se cortan en el punto M, interior al ángulo. Entonces, $\overline{OM}$ será la bisectriz del ángulo AOB, ya que los triángulos OPM y OQM son congruentes.

3. Graficar un triángulo, conociendo las longitudes de los tres lados

Sean "a", "b" y "c", las longitudes de los lados del triángulo que se quiere formar.



Resolución:



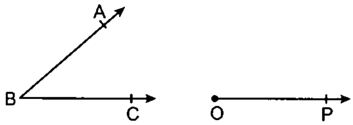
Sobre una recta, tomamos un punto P. Luego, con el compás, medimos una longitud PQ = a.

Con centro en P y radio "b", trazamos un arco. Con centro en Q y radio "c", trazamos otro arco que corta al anterior en el punto M.

PMQ es el triángulo que da la solución.

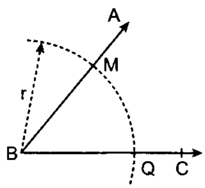
4. Copiar un ángulo dado

Dado un ángulo ABC, copiarlo de modo que uno de sus lados sea el rayo dado $\overline{OP}$.

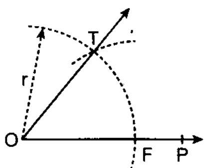


Resolución:

Con centro en B y cualquier radio "r", se traza un arco que corta BA en M y BC en Q.



Haciendo centro en O y radio "r", se traza un arco, que corta $\overline{OP}$ en F.

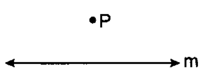


Luego, con centro F y radio $\overline{QM}$, se traza otro arco que corta al anterior en el punto T.

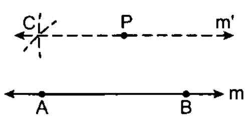
El ángulo TOP es congruente al $\angle$ABC, ya que los triángulos TOF y MBQ son congruentes (LLL).

5. Por un punto exterior dado, trazar una recta paralela a otra dada

Dados el punto P y la recta "m", trazar por P, una recta m', paralela a $\overleftrightarrow{m}$.



Resolución:



Tomemos dos puntos A y B de $\overleftrightarrow{m}$.

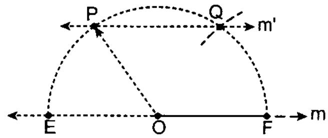
Con centro en P y radio $\overline{AB}$, se traza un arco.

Haciendo centro A y radio $\overline{PB}$, se traza otro arco que corta al anterior en el punto C.

Como PC = AB y AC = PB, entonces ACPB es paralelogramo.

Por lo tanto, m' pasa por P y C.

Otro procedimiento:



Se toma un punto O, de $\overleftrightarrow{m}$ y haciendo centro en él, con radio $\overline{OP}$, se traza una semicircunferencia que corta $\overleftrightarrow{m}$ en E y F.

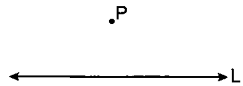
Con centro en F y radio $\overline{EP}$, se traza otro arco que corta al anterior en Q.

Como EP $\equiv$ FQ, entonces $\overleftrightarrow{PQ}$ // $\overleftrightarrow{m}$.

6. Trazar una perpendicular a una recta, por un punto dado

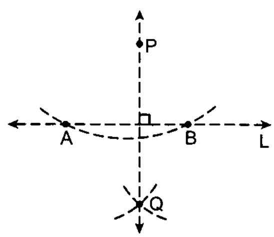
Si el punto está fuera de la recta dada.

Dados: $\overleftrightarrow{L}$ y P.



Resolución:

Haciendo centro P, se traza un arco con radio suficiente, de modo que corte a $\overleftrightarrow{L}$ en los puntos A y B.

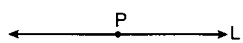


La mediatriz de $\overline{AB}$ dará solución al problema, ya que P equidista A y B.

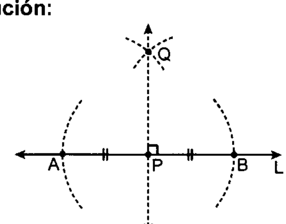
Para trazar dicha mediatriz, basta trazar dos arcos con centros A y B, por debajo de L con el mismo radio y ubicar el punto Q. Entonces, $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{L}$.

Si el punto está en la recta dada.

P, sobre $\overleftrightarrow{L}$



Resolución:

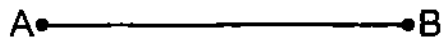


Se traza una circunferencia con centro P y cualquier radio, cortando a $\overleftrightarrow{L}$ en los puntos A y B.

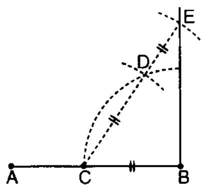
Luego, se traza la mediatriz de $\overline{AB}$.

Por lo tanto, $\overleftrightarrow{PQ}$ da solución al problema.

7. **Otros procedimientos:**
Por el extremo B, trazar una perpendicular al segmento dado AB.



1.ª Resolución:



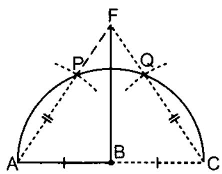
Con centro en B, se traza un arco cualquiera y con el mismo radio, con centro en C, otro arco que corta al anterior en el punto D.

Se prolonga $\overline{CD}$ hasta E, de modo que DE = CD.

Entonces: $\overline{EB} \perp \overline{AB}$, ya que:

$\angle ECB = 60°$, por ser $\triangle CDB$ equilátero y CE = 2CB.

2.ª Resolución:

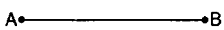


Se traza una semicircunferencia AC, de centro B y radio $\overline{BA}$.

Con el mismo radio y centros A y C, se trazan arcos que cortan al anterior en los puntos P y Q.

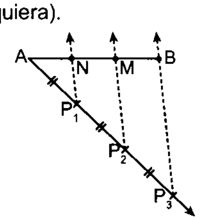
Las prolongaciones de $\overline{AP}$ y $\overline{CQ}$, se encuentran en F, entonces $\overline{FB} \perp \overline{AB}$.

8. **Dividir un segmento en un número dado de segmentos congruentes**
Dividir el segmento AB, en 3 segmentos congruentes.



Resolución:

Por A, se traza un rayo cualquiera, que no esté en $\overleftrightarrow{AB}$.
Sobre este rayo, se toman sucesivamente, con el compás, 3 segmentos congruentes: $\overline{AP_1}$, $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_2P_3}$. (La longitud común a estos segmentos, puede ser cualquiera).



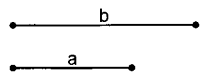
Luego, se traza $\overline{P_3B}$.

Por los puntos P_2 y P_1, se trazan paralelas a $\overline{P_3B}$, obteniéndose los puntos M y N, sobre $\overline{AB}$.
Como $AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3$, entonces: AN = NM = MB, quedando resuelto el problema.

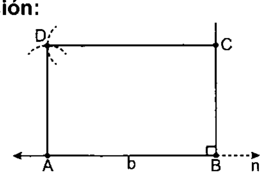
> **Nota**
>
> El procedimiento es el mismo para cualquier otro número de partes congruentes.

Aplicaciones:

1. **Construir un rectángulo, dadas sus dos longitudes**
Dadas "a" y "b", longitudes de los lados de un rectángulo, construir dicha figura.



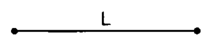
Resolución:



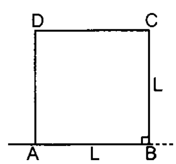
Sobre una recta "n", se toma un punto A, el cual será un vértice del rectángulo.
Desde A, sobre $\overleftrightarrow{n}$, se toma una longitud AB = b.
Por B, con alguno de los procedimientos estudiados se traza una perpendicular a $\overline{AB}$ y sobre ella se toma BC = a.
Con centro en A y radio "a", se traza un arco que corta en D al arco trazado con centro C, y radio "b".
ABCD, es el rectángulo pedido.

> **Nota**
>
> Si se pidiera una longitud $\sqrt{a^2 + b^2}$, la solución sería $\overline{AC}$.

2. **Construir un cuadrado, conociendo la longitud del lado**
Dada la longitud L del lado de un cuadrado, construirlo.



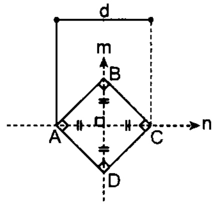
Resolución:



El procedimiento es igual al anterior, haciendo:
a = b = L

3. **Construir un cuadrado, conociendo la longitud de su diagonal**
Dada la longitud "d" de la diagonal de un cuadrado, construir dicha figura.

Resolución:



Sobre una recta "n", se toma un punto A y a partir de él, una longitud AC = d.

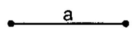
Se traza la mediatriz de $\overline{AC}$, es decir:
$\overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{n}$, en M (punto medio de $\overline{AC}$).

Sobre la recta "m", desde el punto M, se ubican los puntos B y D, de modo que MB = MA y MD = MA.

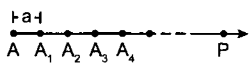
ABCD, da solución al problema.

4. **Conociendo la longitud de un segmento, construir otro de longitud k veces al lado**

Dado el segmento de longitud "a", construir otro de longitud doble, triple, etc.



Resolución:

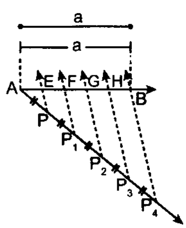


Sobre un rayo cualquiera $\overline{AP}$, se toman los puntos A_1, A_2, A_3,..., de modo que:
$AA_1 = a$; $A_1A_2 = a$; $A_2A_3 = a$; ... ; sucesivamente.
Entonces: $AA_2 = 2a$; $AA_3 = 3a$; $AA_4 = 4a$; ...

Dado el segmento de longitud "a", construir otro cuya longitud sea una fracción de "a".

Por ejemplo, obtener un segmento de longitud $\frac{3}{5}a$

Resolución:



Sobre un rayo cualquiera se toma la longitud AB = a. Por A, se traza otro rayo, en el cual se toman longitudes iguales entre sí:

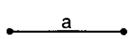
$$AP_1 = P_1P_2 = P_2P_3 = P_3P_4 = P_4P_5$$

(una cantidad igual al numerador de la fracción dada)

Se traza $\overrightarrow{P_5B}$ y luego las paralelas $\overrightarrow{P_1E}$, ...

$\Rightarrow AE = EF = FG = GH = HB$ y $AG = \frac{3}{5}a$, es la solución.

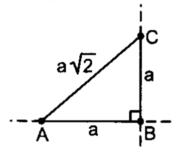
Dado un segmento de longitud "a", construir otros de longitud: $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{3}$; $a\sqrt{5}$.



Resolución:

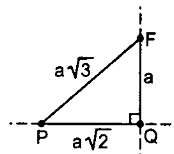
Longitud $a\sqrt{2}$

Se toma una longitud AB = a y luego se traza $\overline{BC} \perp \overline{AB}$, con BC = a



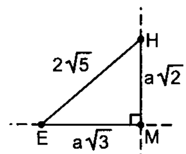
Como el $\triangle ABC$ es isósceles recto en B:
$\therefore AC = a\sqrt{2}$

Longitud $a\sqrt{3}$



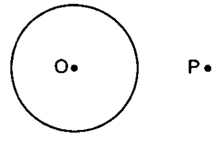
Teniendo las longitudes "a" y $a\sqrt{2}$, se puede graficar un triángulo rectángulo cuyos catetos tienen estas medidas:
$PQ = a\sqrt{2}$ y $QF = a$
$\Rightarrow PF = \sqrt{(PQ)^2 + (QF)^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}$
$\therefore$ $PF = a\sqrt{3}$

Longitud $a\sqrt{5}$

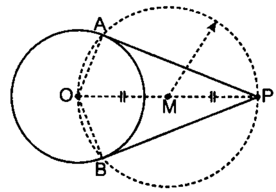


Ahora, con las longitudes conocidas $a\sqrt{3}$ y $a\sqrt{2}$
$EM = a\sqrt{3}$ y $MH = a\sqrt{2}$
$EH = \sqrt{(EM)^2 + (MH)^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{2})^2}$
$\therefore$ $EH = a\sqrt{5}$

5. **Dada una circunferencia, cuyo centro (O) es conocido. Trazar las tangentes a ella, desde un punto (P), exterior.**



Resolución:



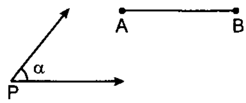
Se traza $\overline{PO}$.

Se ubica M, punto medio de $\overline{PO}$.

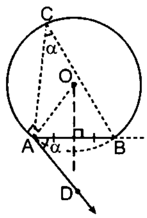
Con centro M, se traza la circunferencia de radio MP, que intersecta a la circunferencia dada, en los puntos A y B.

$\overline{PA}$ y $\overline{PB}$, son las tangentes pedidas ya que los ángulos inscritos OAP y OBP, en la circunferencia de diámetro $\overline{OP}$, son rectos.

6. **Dados un segmento AB y un ángulo P, de medida α construir el arco capaz de dicho ángulo, cuyos extremos sean A y B.**



Resolución:



Se copia el ángulo P, teniendo por vértice A y un lado $\overline{AB}$, obteniéndose $\angle$BAD.

Se traza por A, una perpendicular a $\overline{AD}$.

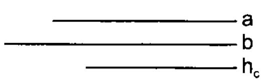
Se traza la mediatriz de $\overline{AB}$.

Ambas perpendiculares se cortan en el punto O.

Con centro O y radio OA, se traza una circunferencia, en la cual el arco ACB da solución al problema,

ya que: $\angle ACB = \angle BAD = \dfrac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

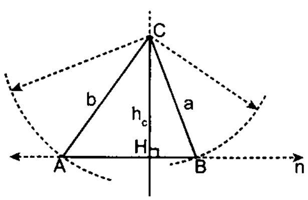
7. **Construir un triángulo, conociendo las longitudes de dos lados (a y b) y la altura h_c, hacia el tercero.**



Resolución:

Sea el $\triangle$ABC. Veamos los casos:

Si A y B, son agudos.



Sobre una recta cualquiera "n", tomamos un punto arbitrario H.

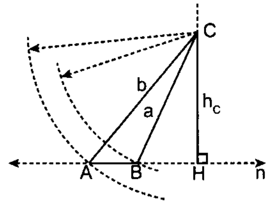
Por H, elevamos una perpendicular a $\overleftrightarrow{n}$, sobre la cual tomamos la longitud HC = h_c.

Con centro C y radio "b", trazamos un arco que corta a $\overleftrightarrow{n}$ en el punto B.

Con centro C y radio "a", trazamos otro arco que corta a $\overleftrightarrow{n}$ en otro punto A, estando H entre A y B.

El $\triangle$ACB, es la solución al problema.

Si uno de los ángulos es obtuso. Por ejemplo $\angle$B.

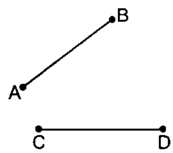


Sobre una recta cualquiera "n", se toma un punto H. Por H, se eleva una perpendicular a $\overleftrightarrow{n}$, sobre la cual se toma HC = h_c.

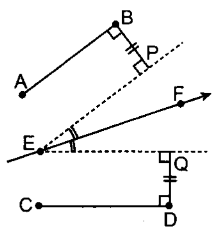
Con centro en C y radio "a", un arco que corta a $\overleftrightarrow{n}$ en B.

Con centro C y radio "b", otro arco, determinándose A. $\triangle$ABC, obtuso en B, da solución al problema.

8. **Dados dos segmentos AB y CD, trazar la bisectriz, del ángulo que determinan.**



Resolución:

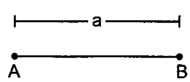


Por B y D, se trazan perpendiculares a $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, respectivamente, sobre las cuales se toman longitudes $\overline{BP}$ y $\overline{DQ}$, en la región interior al ángulo y de modo que BP = DQ.

Por P, paralela a $\overline{AB}$. Por Q, paralela a $\overline{CD}$. E, es el punto de corte de las rectas trazadas.

$\overline{EF}$, bisectriz del ángulo PEQ, da solución al problema.

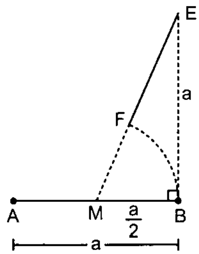
9. **Dado un segmento, construir su porción áurea.**



Sea "a", longitud del segmento dado.

Se quiere construir un segmento de longitud $\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$

Primera resolución:



Se debe encontrar un segmento de longitud: $\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}$

Se ubica M, punto medio del segmento dado $\overline{AB}$.

Por B, se eleva una perpendicular a $\overline{AB}$ y se toma la longitud BE = a.

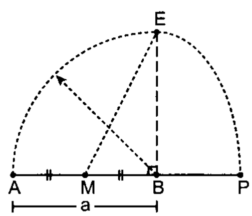
Se traza $\overline{EM}$. Luego: EM = $\frac{a}{2}\sqrt{5}$

Con centro M y radio $\frac{a}{2}$, se traza un arco que corta a EM en el punto F.

Como: MF = $\frac{a}{2}$ $\Rightarrow$ EF = EM – MF = $\frac{a}{2}\sqrt{5}-\frac{a}{2}$

Por lo tanto, EF es solución al problema.

Otra Forma:



Con centro en B y radio "a", se traza un cuarto de circunferencia AE.

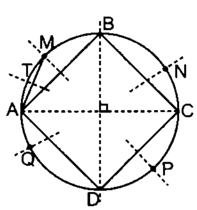
Se ubica el punto medio M, de $\overline{AB}$.

Con centro M y radio $\overline{ME}$, se traza otro arco que corta a la prolongación de $\overline{AB}$ en el punto P.

$\therefore$ $\overline{BP}$ es solución al problema.

10. Dividir una circunferencia en 4; 8; 16; ... partes iguales y construir el cuadrado, octógono regular, polígono regular de 16 lados,...

Resolución:



Para construir el cuadrado, se trazan dos diámetros perpendiculares entre sí, por ejemplo $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$.

ABCD es el cuadrado pedido: $\overline{AB} = L_4$

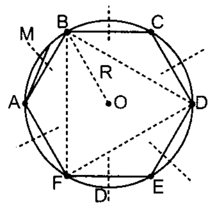
Al trazar las mediatrices de $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ y $\overline{AD}$, se determinan los puntos M, N, P y Q.

Se construye el octógono regular, al unir $\overline{AM}$, $\overline{MB}$, $\overline{BN}$, ... Así: $\overline{AM} = L_8$.

Trazando las mediatrices de los lados del octógono, se encuentran los otros vértices del polígono regular de 16 lados. Se observa: AT = L_{16}.

11. Dividir una circunferencia, en 3; 6; 12; 24; ... partes iguales, y construir el triángulo equilátero, hexágono regular, dodecágono,...

Resolución:



Para dividir la circunferencia en 6 partes iguales, se marca un punto cualquiera A y con radio R (el de la circunferencia dada), se obtiene los punto B y F. Haciendo centros en B y F, con radio R, se ubican C y E, respectivamente. D se obtiene con centro C y radio R.

ABCDEF es el hexágono regular: AB = L_6 = R

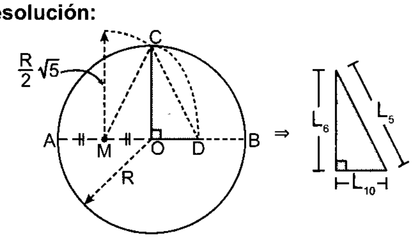
El triángulo equilátero inscrito se logra al unir los vértices del hexágono de dos en dos:

$$BF = L_3 = R\sqrt{3}$$

La mediatriz de $\overline{AB}$, determina el punto M sobre el arco AB. $\overline{AM}$ es el lado del dodecágono regular inscrito: AM = L_{12}.

12. En una circunferencia de radio R, obtener los lados de los polígonos regulares inscritos: pentágono y decágono.

Resolución:



La longitud del lado del decágono regular inscrito, es: $L_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$

Esto se puede lograr con el método visto anteriormente.

Se traza un diámetro $\overline{AB}$ y el radio $\overline{OC}$, perpendicular a él.

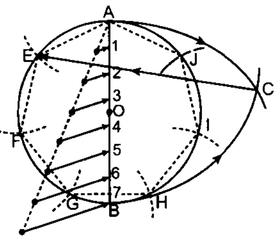
Se ubica M, punto medio de $\overline{AO}$ y con centro en dicho punto y radio $\overline{MC}$, se traza un arco que corta a $\overline{OB}$ en D.

Se verifica: $OD = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow OD = L_{10}$

Además, como $OC = R \Rightarrow OC = L_6$
Y, finalmente: $CD = L_5$

13. Construcción de polígonos regulares (método generalizado)

Dada una circunferencia de centro O y diámetro "d", inscribir en ella un polígono regular de "n" lados (n = 7, en la figura).



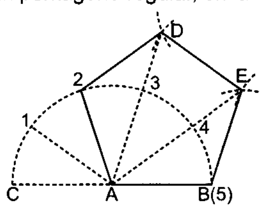
AEFGHIJ: heptágono regular

Se traza un diámetro cualquiera $\overline{AB}$ y se divide en "n" partes iguales.

Con centro en los extremos del diámetro y radio AB se trazan dos arcos de circunferencia que se cortarán en un punto C.

Si une el punto C y el segundo punto de división del diámetro (para cualquier caso, siempre es el segundo punto de división) con una línea recta que se prolonga hasta que corte a la circunferencia: el segmento AE obtenido será el lado del polígono regular buscado, que se lleva sobre la circunferencia en forma sucesiva hasta volver al punto inicial: AE, EF, FG, etc.

Dado un segmento que se sabe es el lado de un polígono regular en "n" lados, construirlo ($\overline{AB}$ es el lado de un pentágono regular, en la figura).



Se traza una semicircunferencia, con centro en A y radio AB para obtener el punto C.

Con el compás de puntas secas se divide la semicircunferencia en tantas partes iguales como lados debe tener el polígono buscado y se numera como se muestra en la figura.

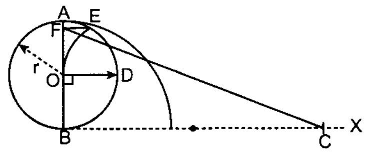
El radio $\overline{A2}$ (siempre A2) será el lado adyacente al lado dado $\overline{AB}$.

Se trazan y prolongan los radios $\overline{A3}$ y $\overline{A4}$ donde estarán los vértices que faltan.

Con centro en 2 y radio AB se obtiene D sobre $\overrightarrow{A3}$ y E se obtiene sobre $\overrightarrow{A4}$, haciendo centro en D o B y con radio AB.

14. Rectificación de circunferencias

Dada una circunferencia de centro O y diámetro "d", rectificarla gráficamente (es decir, obtener un segmento de longitud aproximada a la de dicha circunferencia).



Se traza un diámetro $\overline{AB}$ y perpendicular a él una tangente $\overline{BX}$.

Sobre $\overline{BX}$ se toma una longitud BC igual a tres veces el diámetro.

$$BC = 3(AB)$$

Se traza un radio $\overline{OD}$, perpendicular a $\overline{AB}$.

Con centro en D y radio r(OD) se traza un arco de circunferencia que cortará al arco AD en un punto E.

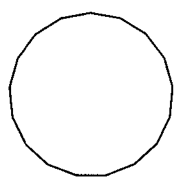
Desde E se traza una paralela a $\overline{OD}$ para obtener el punto F sobre $\overline{AB}$.

Se une C con F, por una recta y este segmento será la circunferencia rectificada con un error de 1: 21 800, aproximadamente.

LOS TRES PROBLEMAS FAMOSOS DE CONSTRUCCIÓN

Los antiguos griegos descubrieron todas las construcciones que hemos estudiado hasta ahora y muchas otras más complicadas. Hubo, sin embargo, varios problemas que los mejores matemáticos griegos trataron de resolver, durante muchos años, sin éxito alguno.

Para lograr una idea de lo difícil que puede ser un problema de construcción, consideremos el problema de dividir con regla y compás una circunferencia en 17 arcos contiguos, de manera que cada arco solo tenga un extremo común con el arco siguiente.

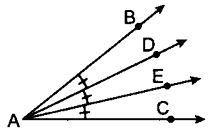


Cuando se dibujan las cuerdas correspondientes, se obtienen una figura llamada polígono regular de 17 lados. Este problema era muy conocido, pero permaneció sin resolver durante más de dos mil años. Finalmente, en el siglo pasado, el matemático alemán C. F. Gauss descubrió la construcción requerida.

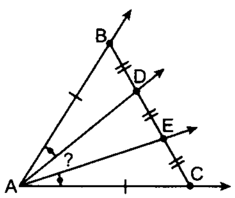
Sin embargo, algunos problemas de los antiguos griegos resultaron mucho más que difíciles; en realidad, sus resoluciones eran imposibles.

El problema de la trisección del ángulo

Se da un ángulo BAC cualquiera; queremos construir dos rayos AD y AE (con D y E en el interior del ∠BAC) de manera que: ∠BAD ≅ ∠DAE ≅ ∠EAC.

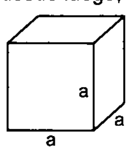


Para esta construcción, solo debemos emplear una regla y un compás. Lo primero que la mayoría de las personas trata de hacer es tomar AB = AC, trazar BC y, luego trisecar BC, como se indica en la figura de la derecha. Esto no funciona; se puede demostrar que los ángulos ∠BAD y ∠EAC son congruentes, pero ninguno de estos ángulos es congruente con el ∠DAE. En realidad, nadie ha encontrado un método que efectúe la construcción.



La duplicación del cubo

Un cubo de arista "a" tiene un volumen igual a a^3. Dado un segmento de longitud "a", queremos construir un segmento de longitud "b", tal que el cubo de arista "b" tenga un volumen doble que el cubo de arista "a". Algebraicamente, desde luego, esto significa que:



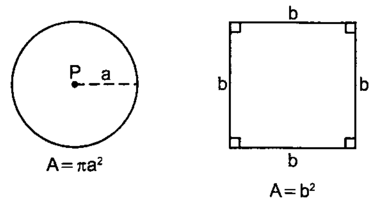
$$b^3 = 2a^3$$
$$b = a\sqrt[3]{2}$$
$$V = a^3$$

Tampoco nadie ha podido resolver este famoso problema. Hay una leyenda curiosa acerca de este. Se cuenta que los habitantes de una cierta ciudad griega se morían en gran número a causa de una plaga, y decidieron consultar al oráculo de Delfos para averiguar el dios que estaba enojado y por qué. La respuesta dada por el oráculo fue que Apolo estaba enojado. El altar dedicado a Apolo en la ciudad consistía en un cubo sólido de oro y Apolo quería que su altar fuese exactamente el doble.

Cuando la gente regresó de Deltos, construyeron un nuevo altar, con una arista doble que la del antiguo. Entonces, la plaga empeoró en lugar de mejorar, y la gente se dio cuenta de que Apolo debió haber estado pensando en el volumen de su altar (desde luego, al hacer la arista el doble, el volumen se multiplicó por ocho en lugar de por dos). Esto planteó el problema. De modo que la primera oportunidad de aplicar la matemática a la salud pública fue un fracaso total.

La cuadratura del círculo

Dado un círculo, de radio "a", queremos construir un cuadrado cuya área sea igual a la del círculo.



Algebraicamente, esto significa que $b = a\sqrt{\pi}$

Durante más de dos mil años, los mejores matemáticos trataron de resolver estos problemas mediante construcciones con regla y compás. Finalmente, se descubrió en tiempos recientes que los tres problemas son imposibles de resolver con solo regla (no graduada, ni con marcas) y compás.

◀ ISOMETRÍAS

Definición 1

Una aplicación del plano, en sí mismo, es una regla que asocia a cada punto del plano, otro punto del mismo plano. Si P es un punto del plano y P' el punto asociado mediante una aplicación, escribiremos: $P \Rightarrow P'$

P' se llamará el valor de la aplicación en el punto P. De otro modo, podemos decir que P' corresponde a P según la aplicación o que P es aplicado en P'.

Las aplicaciones se denotarán con letras mayúsculas. Así, diremos que si F es una aplicación, entonces F(P) = P'.

Definición 2

Dos aplicaciones del plano en sí mismo, F y G, son iguales, sí y solo sí, para todo punto P del plano:

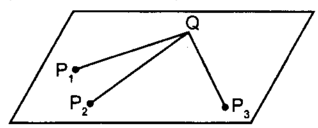
$$F(P) = G(P)$$

Aplicación constante

Sea Q, un punto dado del plano. Si a cada punto P se le asocia el punto Q, se obtiene la aplicación constante. Q es el valor constante. En ese caso, escribiremos.

$$F(P_1) = F(P_2) = F(P_3) = \ldots = Q.$$

Donde F representaría a la aplicación constante.



Aplicación identidad

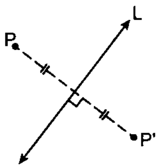
Se representa con la letra I.

A cada punto P asocia el mismo punto P.

$$\therefore\ I(P) = P, \text{ para todo punto P.}$$

Reflexión a través de una recta

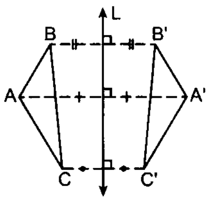
Sea L una recta. Se dice que el punto P' es reflexión del punto P, a través de la recta L, si y solo si, L es mediatriz del segmento PP'; esto es, L interseca a PP' en forma perpendicular y en su punto medio.



Si R_L es la reflexión a través de la recta L, podemos escribir: $R_L(P) = P'$.

Ejemplo:

En la figura, el $\triangle A'B'C'$ es la reflexión del $\triangle ABC$, a través de la recta L.



Luego: $A' = R_L(A)$: $B' = R_L(B)$ y $C' = R_L(C)$

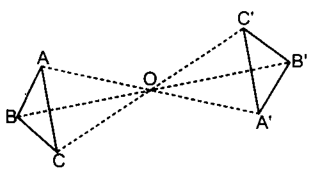
Reflexión a través de un punto

Sea O un punto dado del plano. Se dice que el punto P' es la reflexión del punto P a través del punto O, si y solo si. O es punto medio del segmento PP'. Es decir, O está sobre PP' y d(O; P') = d(O; P).
d(O; P), se lee: distancia del punto, O al punto P.

Si R representa la reflexión a través del punto O, escribiremos: R(P) = P'.

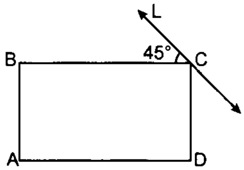
Ejemplos:

1 La figura muestra la reflexión del $\triangle ABC$, a través del punto O.

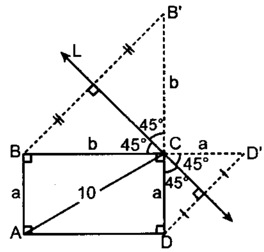


R(A) = A',R(B) = B', R(C) = C', donde R representa la reflexión a través del punto O.

2. La figura es un rectángulo.
d(A; C) = 10. Si R_L es la reflexión a través de la recta L, hallar la suma de las áreas de las regiones $\triangle BCB'$ y $\triangle CDD'$, siendo $B' = R_L(B)$ y $D' = R_L(D)$.



Resolución:



Sean: d(A; B) = a y d(B; C) = b
Luego:

$$A_{\triangle BCB'} = \frac{(b)(b)}{2} = \frac{b^2}{2} \quad \wedge \quad A_{\triangle DCD'} = \frac{(a)(a)}{2} = \frac{a^2}{2}$$

Entonces:

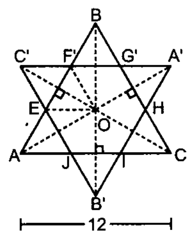
$$A_{\triangle BCB'} + A_{\triangle DCD'} = \frac{b^2}{2} + \frac{a^2}{2} = \frac{1}{2}(b^2 + a^2) \qquad ...(1)$$

Pero, en el $\triangle ABC$: $b^2 + a^2 = (10)^2$
$\Rightarrow b^2 + a^2 = 100$ ... (2)
Sustituyendo (2) en (1):

$$A_{\triangle BCB'} + A_{\triangle DCD'} = \frac{1}{2}(100) = 50$$

3. ABC es un triángulo equilátero, cuyo lado tiene longitud 12. A'B'C' es el triángulo obtenido al reflejar el $\triangle ABC$ respecto al punto O, su ortocentro. Hallar el área de la reglón común al $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$.

Resolución:



El ortocentro es el punto de intersección de las alturas.
EFGHIJ: Región hexagonal (regular) común al $\triangle ABC$ y $\triangle A'B'C'$.

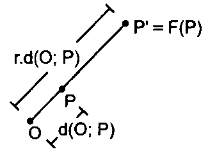
$$EF = \frac{AB}{3} \Rightarrow EF = 4$$

$S_{común} = 6(S_{\triangle EOF})$; $\triangle EOF$ es equilátero.

$$S_{común} = 6\left(4^2\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \quad \therefore \ S_{común} = 24\sqrt{3}$$

Dilatación

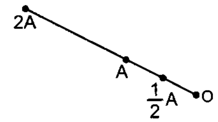
Sea "r" cualquier número real positivo. La dilatación en un factor "r", es la aplicación F_r, con referencia a un punto O, que a cualquier punto P, le asigna el punto $F_r(P)$ ubicado sobre el rayo de vértice O, que pasa por P, a una distancia de O igual a "r" veces la distancia de O a P.



El resultado de hallar $F_r(P)$, también es escribe rP:

$$\boxed{F_r(P) = rP}$$

Una dilatación también recibe el nombre de transformación de semejanza. La figura muestra las dilataciones del punto A, respecto a O factores 2 y 0,5.

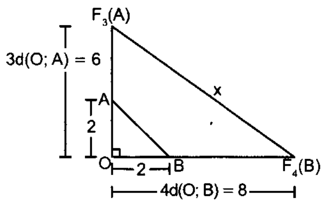


$$F_2(A) = 2A \quad \wedge \quad F_{0,5}(A) = \frac{1}{2}A$$

Ejemplos:

1. Sea AOB un triángulo rectángulo, recto en O. Si la aplicación F es una dilatación respecto a O y d(O; A) = d(O; B) = 2, hallar: d(F_3(A); F_4(B)).

   Resolución:

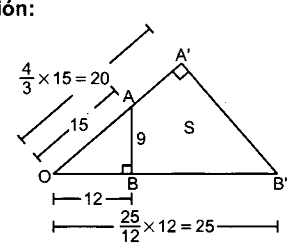


   Sean las distancias:
   d(O; F_3(A)) = 6 $\wedge$ d(O; F_4(B)) = 8

   Luego, con el teorema de Pitágoras:
   $x^2 = 6^2 + 8^2 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow d(F_3(A); F_4(B)) = 10$

2. OBA es un triángulo rectángulo, recto en B, d(O; A) = 15 y d(O; B) = 12; A' y B' son dilataciones de A y B, respecto a O, factores 4/3 y 25/12, respectivamente. Hallar el área de la región AA'B'B, sabiendo que el ángulo AA'B' es recto.

   Resolución:



   Del gráfico: d(O; A') = 20 $\wedge$ d(O; B') = 25

   Luego, con el teorema de Pitágoras en los triángulos OBA y OA'B' se obtienen:

   d(A; B) = 9 $\wedge$ d(A; B) = 15

   El área: $S = A_{\triangle OA'B'} - A_{\triangle OBA}$

$$S = \frac{[d(O;A')][d(A';B')]}{2} - \frac{[d(O;B)][d(A;B)]}{2}$$

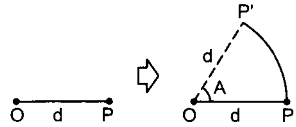
$$S = \frac{20 \times 15}{2} - \frac{12 \times 9}{2} \quad \therefore S = 96$$

Rotación

Sea O un punto dado en el plano y P un punto del mismo, tal que d(O; P) = d. La rotación del punto P, respecto a O, un número de grados A, se logra tomando sobre la circunferencia de centro O y radio "d", un arco PP' tal que el ángulo POP' tenga medida A. (El arco PP' tiene igual medida).

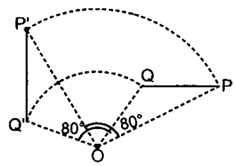
La aplicación que asocia P' a P es llamada una rotación (antihoraria) por A, respecto a O, o relativa a O.

Se denota esta aplicación como G_A. Luego, en la figura $G_A(P) = P'$.

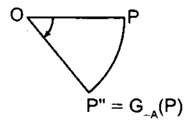


Ejemplos:

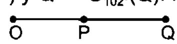
1. La figura muestra la rotación del segmento PQ, 80° respecto al punto O, obteniéndose el segmento P'Q'.



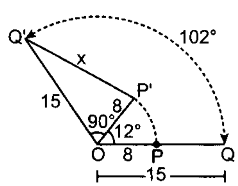
   Una rotación horaria respecto al punto O, se escribe $G_{(-A)}$ y asocia el punto P" al punto P, tal que el ángulo P'OP tenga la misma medida que A.



2. En la figura, O, P y Q son puntos de una recta, d(O; P) = 8 y d (P; Q) = 7. La aplicación G es una rotación respecto al punto O.
   Si: P' = $G_{12°}$(P) y Q' = $G_{102°}$(Q). Hallar d(P'; Q')



   Resolución:



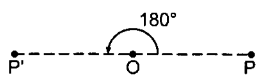
   ∠POP' mide 12°
   ∠QOQ' mide 102°
   ⇒ P'OQ' mide 90°

   d(O; P') = d(O; P') = 8 y
   d(O; Q') = d(O; Q) = 15

   $\triangle$POQ' (teorema de Pitágoras):
   $x^2 = 8^2 + 15^2 \Rightarrow x = 17 \quad \therefore d(P; Q') = 17$

Observaciones.

1.° Una rotación de 180° respecto a O, es lo mismo que una reflexión a través de O.



$\therefore\ G_{180°}(P) = R(P)$
También: $G_{-180°}(P) = R(P)$

2.° Conviene asociar una rotación con un número en lugar de un ángulo. Sea x un número entre 0° y 360°. Sea G_x la rotación en un ángulo de x grados. Luego, siempre es posible escribir x en la forma:

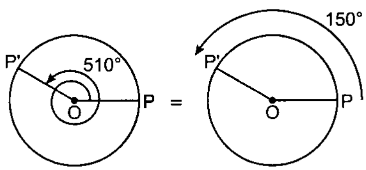
$$x = 360° + nw$$

Siendo "n" un número entero y "w" un número tal que: $0° \leq w < 360°$. Luego: $G_{x°} = G_{w°}$

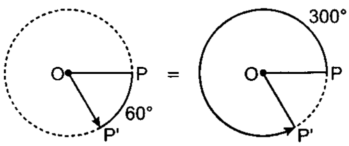
En particular: $\boxed{G_{0°} = G_{360°} = 1}$

Ejemplos:

1. Si x = 510°, escribiremos:
   $x = 360° + 150°$
   $\therefore\ G_{x°} = G_{150°}$
   Es decir, una rotación de 510° es lo mismo que una rotación de 150°.

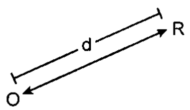


2. Si $x = -60° \Rightarrow x = -360° + 300°$
   $\therefore\ G_x = G_{-60°} = G_{300°}$

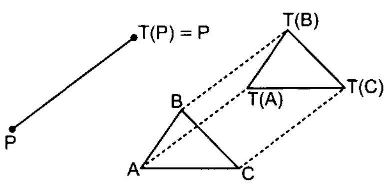


Traslación

La figura muestra una dirección en el plano y una distancia d = d(O; R).



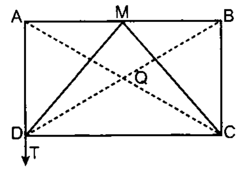
La flecha indica un par ordenado (O; R) de principio O y extremo final R.
La traslación (determinada por la dirección y la distancia), es una aplicación que a cada punto P, asocia el punto P' ubicado a una distancia "d" de P, en la dirección dada OR.
Si T representa la traslación definida anteriormente, entonces escribiremos: P' = T(P).



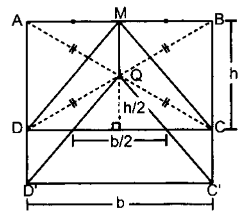
La figura muestra la traslación del punto P y del $\triangle ABC$.

Ejemplo:

ABCD es un rectángulo cuyas diagonales se cortan en Q; M es punto medio de $\overline{AB}$. T es una traslación en la dirección mostrada, tal que T(M) = Q.
¿Qué fracción del área del ABCD es el área de la región triangular que determinan T(D), T(C) y Q?



Resolución:



La traslación T está definida por la dirección dada y la distancia d(M; Q).
Sean: D' = T(D) y C' = T(C).
d(B;C) = h y d(D; C) = b
El área ABCD es: $S_{ABCD} = bh$
El área de la región común a ABCD y D'C'Q es:

$$S_x = \frac{1}{2}\left(\frac{b}{2}\right)\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{bh}{8} \Rightarrow S_x = \frac{bh}{8}$$

$$\therefore\ S_x = \frac{S_{ABCD}}{8} = \frac{1}{8}(S_{ABCD})$$

Definición 3

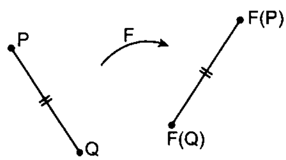
Sea F una aplicación del plano en sí mismo. P es un punto fijo para F, si y solo si; F(P) = 0.
Por ejemplo, la rotación a través de un punto dado O, tiene como punto fijo el mismo punto O.
La reflexión a través de una recta deja fijos todos los puntos de dicha recta.

Definición 4

Si F es una aplicación y P un punto cualquiera del plano, F(P) se llama la imagen de P bajo F.

Definición 5

Sea F una aplicación del plano en sí mismo; P y Q dos puntos cualesquiera, distintos, del plano. Diremos que F es una isometría, si y solo si, la distancia de P a Q es igual a la distancia de F(P) a F(Q).



De la definición anterior, se deducen:

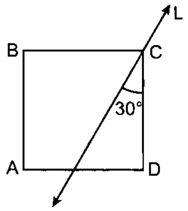
1.° Son dos isometrías: La rotación, la traslación, la reflexión a través de un punto, la reflexión a través de una recta y la aplicación identidad.

2.° La imagen de un segmento, a través de una isometría, es otro segmento congruente al original.

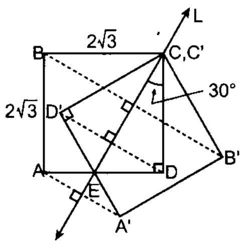
3.° La imagen de cualquier figura geométrica, a través de una isometría, es otra figura congruente a la original.

PROBLEMAS RESUELTOS

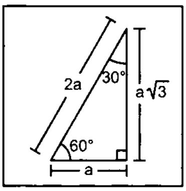
1. El lado del cuadrado ABCD, tiene longitud $2\sqrt{3}$. Luego de reflejar ABCD a través de L, hallar el área de la región común con su imagen.



Resolución:



La región común a ABCD y su imagen, es: D'CDE.
En el $\triangle$CDE, con ángulos notables 30° y 60°:



$$d(E;D)=\frac{d(C;D)}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

$\therefore$ d(E; D) = 2

Luego, el área común:

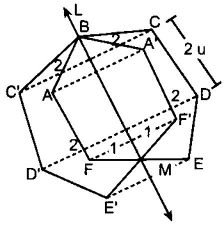
$$S_{D'CDE}=2(S_{EDC})=\frac{2[d(D;C)][d(E;D)]}{2}$$

$$S_{D'CDE}=[d(D;C)][d(E;D)]=2\sqrt{3}\times 2$$

$$\therefore\ S_{D'CDE}=4\sqrt{3}$$

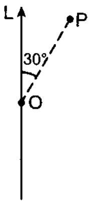
2. ABCDEF es un hexágono regular cuyo lado tiene longitud 2; M es el punto medio del lado $\overline{EF}$.
Se refleja el hexágono a través de la recta que contiene a $\overline{BM}$. Hallar el perímetro de la región común que encierran ABCDEF y su imagen a través de dicha reflexión.

Resolución:

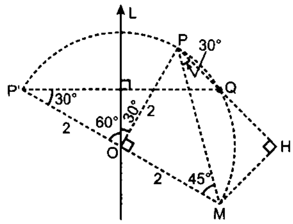


Del gráfico, se observa que:
d(A; B) = d(A; F) = d(A'; B) = d(A'; F') = 2
y d(F; M) = d(F'; M) = 1
$\therefore$ Perímetro = 10

3. En la figura, d(O; P) = 2, G es una rotación de 90° respecto al punto O. F es una reflexión a través de L y H es una reflexión a través de O.
Si: P' = G(P); Q = F(P') y M = H(P'), hallar la distancia de M a $\overleftrightarrow{PQ}$



Resolución:



El gráfico muestra la solución a las aplicaciones planteadas.

Como d(O; P') = d(O; P) = d(O; Q) = d(O; M) = 2, entonces P', P, Q y M están sobre la misma circunferencia.

Incógnita: d(M; H)

Se observa: m$\angle$MPQ = m$\angle$MP'Q = 30°

En el $\triangle$MOP: m$\angle$PMO = 45°

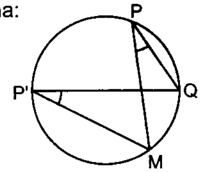
$\therefore$ d(P; M) = $2\sqrt{2}$

Recordar a la geometría plana:
$\angle P'Q = \angle MPQ$

Y, en $\triangle MHP$:

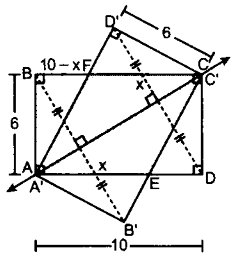
$d(M; H) = \dfrac{d(P;M)}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ d(M; H) = \sqrt{2}$



4. ABCD es un rectángulo; AB = 6 y BC = 10. Se refleja ABCD, a través de una recta que contiene a la diagonal $\overline{AC}$. Hallar el área de la región común al rectángulo dado y su imagen.

Resolución:



Sea A'B'C'D', imagen de ABCD, a través de la reflexión respecto a $\overleftrightarrow{AC}$

Incógnita: S_{AFCE} (área AFCE)

Se tiene:

$S_{AFCE} = (AE)(CD)\Big\}$ Se demuestra que AFCE, es un paralelogramo

$\Rightarrow$ Si AE = x, como CD = 6

$\Rightarrow S_{AFCE} = 6x$ ...(1)

Cálculo de x.

Por propiedad de la mediatriz: CD' = CD; AB' = AB

AD' = AD y CB' = CB $\Rightarrow$ ▭A'B'C'D' $\cong$ ▭ABCD.

Esto demuestra que AFCE es un paralelogramo
$\Rightarrow$ FC = AE = x

También: $\triangle ABF \cong \triangle F'D'C \Rightarrow AF = FC = x$

Luego, en el $\triangle ABF$, por el teorema de Pitágoras:

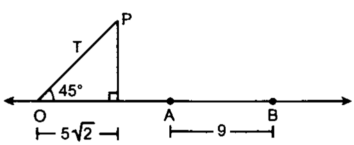
$(AF)^2 = (AB)^2 + (BF)^2 \Rightarrow x^2 = 6^2 + (10 - x)^2$

Efectuando: x = 6,8

Reemplazando en (1):

$\therefore\ S_{AFCE} = 6(6,8) = 40,8$

5. En la figura, T es una traslación con dirección, sentido y módulo indicado. Si G es una rotación de 8°, respecto a B; C = T(B) y D = G(C). Hallar la distancia AD.



Resolución:

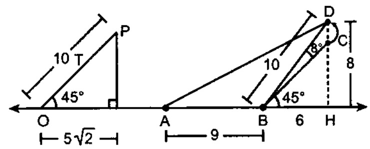
Para hallar C, se traza $\overline{BC}\,//\,\overline{OP}$, tal que BC = OP = 10

Para hallar D, se rota C, 8° respecto a B

$\Rightarrow$ BD = BC = 10

$m\angle DBH = m\angle HBC + m\angle CBD$

$m\angle DBH = 45° + 8° = 53°$

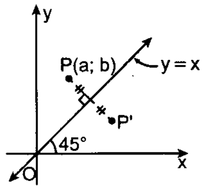


Si trazamos $\overline{DH} \perp \overline{AB}$: $\triangle DHB$ (53°; 37°):

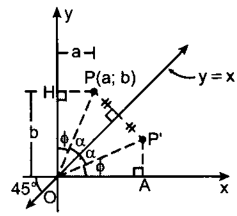
$\Rightarrow$ DH = 8; BH = 6 y AH = 15

$\triangle AHD$: $(AD)^2 = (AH)^2 + (DH)^2 = 15^2 + 8^2$ $\therefore$ AD = 17

6. Dado el sistema de coordenadas cartesianas xy, P(a; b) un punto del mismo y la recta y = x. Demostrar que P', reflexión de P, a través de dicha recta, tiene coordenadas: P'(b; a)



Resolución:



Se trazan: $\overline{PH} \perp \overline{OY}$ $\wedge$ $\overline{P'A} \perp \overline{OX}$

$\Rightarrow$ OH = b y HP = a

$(\alpha + \phi = 45°)$

$\triangle OAP' \cong \triangle OHP$: OA = OH $\wedge$ P'A = HP

$\therefore$ OA = b y P'A = a $\Rightarrow$ P' = (b; a)

Aunque la demostración se ha hecho cuando P está en el primer cuadrante, la propiedad es válida en cualquiera.

7. Sea: A(3; 4) un punto del plano cartesiano. Sea B, reflexión de A, a través de la recta y = x. Hallar AC, si C es reflexión de B a través del eje x.

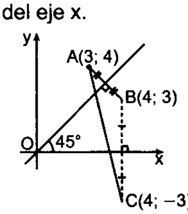
Resolución:

Dato: AC = d(A; C)

Del gráfico:

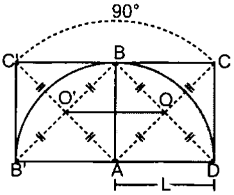
$d(A; C) = \sqrt{(4-3)^2 + (-3-4)^2}$

$\therefore\ d(A; C) = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$



8. Un cuadrado de longitud de lado L, se rota 90°, respecto a un vértice. Hallar la distancia entre los centros del cuadrado dado y su imagen.

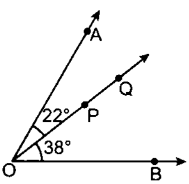
Resolución:



Sea ABCD, el cuadrado, de centro O.

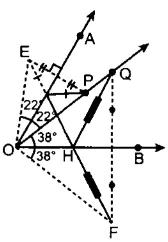
En el $\triangle B'BD$: $OO' = \dfrac{B'D}{2} = \dfrac{2L}{2}$ $\quad\therefore\ OO' = L$

9. En la figura: OP = 3 y PQ = 2. E, reflexión de P, a través de $\overline{OA}$ .F, reflexión de Q, a través de $\overline{OB}$. $\overleftrightarrow{EF}$ corta $\overline{OA}$ en M y $\overline{OB}$ en H. Hallar: PM + MH + HQ



Resolución:

Se traza el gráfico según enunciado y luego $\overline{OE}$; $\overline{OF}$.



OP = 3 $\wedge$ PQ = 2

Por propiedad de la mediatriz:

OE = OP $\Rightarrow$ OE = 3

OF = OQ $\Rightarrow$ OF = 5

Además: EM = PM y HF = HQ

$\Rightarrow$ PM + MH + HQ = EF

Extrayendo el $\triangle EOF$, hallaremos $\overline{EF}$, trazando $\overline{EV} \perp \overline{OF}$; $\triangle EVF$.

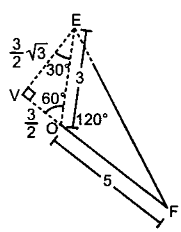
Por teorema de Pitágoras:

$(EF)^2 = (EV)^2 + (VF)^2$

$\Rightarrow (EF)^2 = \dfrac{27}{4} + \dfrac{169}{4}$

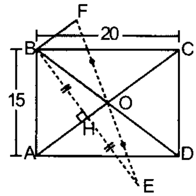
$\Rightarrow$ EF = 7

$\therefore$ PM + MH + HQ = 7



10. ABCD es un rectángulo de centro O, AB = 15 y BC = 20. Sean E, reflexión de B, a través de $\overline{AC}$. F, reflexión de E, a través de O. Hallar $\overline{BF}$.

Resolución:



En el $\triangle EBF$, por el teorema de los puntos medios:

BF = 2(HO) ... (1)

Cálculo de HO:

En el $\triangle ABC$, por el teorema de Pitágoras:

$(AC)^2 = 15^2 + 20^2 \Rightarrow AC = 25$

$\Rightarrow AO = OC = \dfrac{25}{2}$

Por relaciones métricas: $(AB)^2 = (AC)(AH)$

$15^2 = 25(AH) \Rightarrow AH = 9$

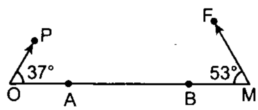
Entonces: $HO = AO - AH = \dfrac{25}{2} - 9 \Rightarrow HO = \dfrac{7}{2}$

Reemplazando lo último, en (1):

$\therefore$ BF = 7

11. En la figura: AB = 20, T_{OP} y T_{MN} son traslaciones definidas por $\overline{OP}$ y $\overline{MN}$, respectivamente (OP = 1 y MN = 4).

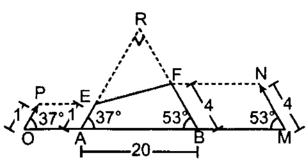
Si $T_{OP}(A) = E$ y $T_{MN}(B) = F$, hallar EF.



Resolución:

Para hallar E, se traza por A: $\overline{AE}$ // $\overline{OP}$, tal que AE = OP = 1

Para F: $\overline{BF}$ // $\overline{MN}$, de modo que BF = MN = 4.



Si prolongamos $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ hasta R: $\overline{AR} \perp \overline{BR}$ y en el $\triangle ARB$ (37°; 53°): AR = 16 y BR = 12

$\Rightarrow$ ER = 15 $\wedge$ RF = 8

Luego: $(EF)^2 = (ER)^2 + (RF)^2$

$(EF)^2 = 15^2 + 8^2$ $\quad\therefore$ EF = 17

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un rectángulo ABCD se inscribe en una circunferencia de radio 4. Calcular el área máxima de la región ABCD.

A) $32\sqrt{2}$ B) 16 C) 32
D) $8\sqrt{6}$ E) $16\sqrt{2}$

2. Dado un rectángulo de perímetro 16, calcular el área máxima de su región rectangular.

A) $4\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) $8\sqrt{2}$
D) 8 E) 6

3. Dado un triángulo ABC, donde AB = 4 y BC = 6, calcular el área máxima de la región triangular ABC.

A) $12\sqrt{2}$ B) 24 C) $10\sqrt{2}$
D) 12 E) $6\sqrt{2}$

4. La menor altura en un triángulo rectángulo ABC (recto en B) mide 6. Calcular el área mínima de la región ABC.

A) 27 B) 72 C) $36\sqrt{2}$
D) 36 E) $18\sqrt{2}$

5. El perímetro de un sector circular es 20, calcular su máxima área.

A) 50 B) $25\sqrt{2}$ C) $12{,}5\sqrt{2}$
D) 20 E) 25

6. Dado un triángulo ABC (recto en B) se traza la altura $\overline{BH}$. Si el triángulo ABC es escaleno o isósceles, AH = a y HC = b, indicar que relación es correcta.

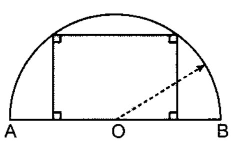
A) $\sqrt{ab} < a + b$ B) $ab = \dfrac{a+b}{2}$
C) $\sqrt{ab} \leq a + b$ D) $\sqrt[3]{ab} \leq \dfrac{a+b}{3}$
E) $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$

7. Dado un segmento de recta AB y sea P un punto de $\overline{AB}$. Calcular AP, si AB = 8 y (AP)(PB) es el mayor posible.

A) 6 B) 4,8 C) 4 D) 2 E) 5

8. La figura muestra a un rectángulo inscrito en la semicircunferencia de radio 2. Calcular el área máxima de la región sombreada.

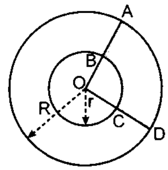
A) $8\sqrt{2}$
B) 8
C) $16\sqrt{2}$
D) 16
E) $4\sqrt{6}$



9. Dado un triángulo ABC, AB + BC = 10 y AC = 8, calcular el área máxima de la región ABC.

A) 18 B) 6 C) 16 D) $12\sqrt{2}$ E) 12

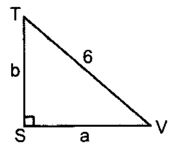
10. La figura muestra a dos circunferencias concéntricas. Si el perímetro de la región sombreada es 4, calcular el área máxima de dicha región.



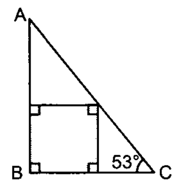
A) 1,5 B) 2,2 C) 0,5 D) 2 E) 1

11. Dada la figura mostrada, calcular el área máxima de la región sombreada.

A) 18
B) $12\sqrt{2}$
C) $9\sqrt{2}$
D) 9
E) $18\sqrt{2}$



12. Dada la figura, si AC = 20, calcular el área máxima de la región sombreada.

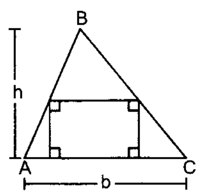


A) 48 B) 24 C) $24\sqrt{2}$
D) $48\sqrt{2}$ E) 96

13. Dado un paralelepípedo rectangular en el cual la suma de todas sus aristas es 12, calcular el volumen máximo del paralelepípedo.

A) 2 B) 1,2 C) 1 D) 3 E) 6

14. En la figura mostrada, si h = 6 y AC = 8, calcular el área máxima de la región sombreada.

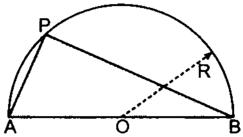


A) 8 B) 6 C) 12
D) 9 E) $6\sqrt{2}$

15. Dado un rectángulo cuya área es 16, calcular el mínimo perímetro de dicha región rectangular.

A) 8 B) 16 C) $8\sqrt{2}$
D) $16\sqrt{2}$ E) $10\sqrt{2}$

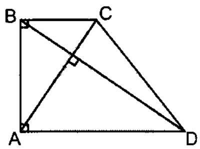
16. En la figura, O es centro y $P \in \widehat{AB}$. Calcular el área máxima de la región ABC (R = 8).



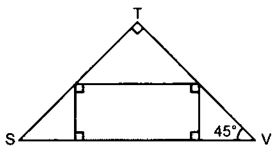
A) $8\sqrt{2}$ B) $16\sqrt{2}$ C) 8
D) 16 E) 32

17. La figura muestra a un trapecio rectángulo ABCD. Si AB = 4, calcular el área mínima de la región ABCD.

A) 32
B) $8\sqrt{2}$
C) 16
D) 24
E) 18



18. La figura muestra a un rectángulo inscrito en el triángulo STV. Si $SV = 8\sqrt{2}$, calcular el área máxima de la región sombreada.



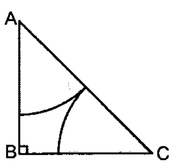
A) 32 B) 24 C) $8\sqrt{2}$
D) $16\sqrt{2}$ E) 16

19. Dado un paralelepípedo rectangular cuya área total es 24, calcular el volumen máximo del rectoedro.

A) 48 B) 16 C) 32
D) $8\sqrt{2}$ E) 8

20. La figura muestra a dos sectores circulares de centros A y C. Si AC = 2 y AB = BC, calcular el área mínima de la región sombreada.

A) $\pi/6$
B) $\pi/16$
C) $\pi/2$
D) $\pi/8$
E) $\pi/4$



21. Dado el volumen de un cilindro circular recto, calcular la razón entre el radio y la altura, sabiendo que la suma de su área lateral y el área de su base es mínima.

A) 2 B) 1 C) 3/2
D) $\sqrt{2}$ E) 4/3

22. Determinar el área lateral máxima de un tronco de cono circular recto, si el perímetro de su sección axial es P.

A) $\frac{\pi P^2}{3}$ B) $\frac{\pi\sqrt{3}P^2}{2}$ C) $\frac{\pi P^2}{4}$
D) $\frac{\pi P^2}{16}$ E) $\frac{3\pi P^2}{8}$

23. La base de la pirámide M-ABCD es un cuadrado ABCD, $\overline{MB}$ es la altura de la pirámide. Calcular el valor mínimo de $\overline{MD}$, si el volumen de la pirámide es 9.

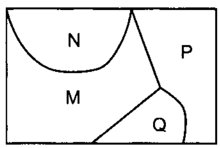
A) 2 B) $\sqrt{3}$ C) 3
D) $3\sqrt{3}$ E) 0,5

24. Indicar el valor de verdad de las siguientes por posiciones:

I. Un ángulo es la unión de dos semirrectas que tienen el mismo origen.
II. La intersección de dos regiones rectangulares siempre es un conjunto convexo.
III. El conjunto de puntos que forman un triángulo es un conjunto convexo.
IV. Los puntos que forman una superficie constituyen un conjunto convexo.

A) FVFV B) VVFV C) VFFV
D) FVFF E) VFFF

25. En la siguiente figura, ¿cuál de los siguientes enunciados es verdadero?



A) M ∪ Q es convexo B) N ∪ Q es convexo
C) Q ∪ P es convexo D) M ∪ N es convexo
E) M ∪ P es convexo

26. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El interior de un ángulo es un conjunto convexo.
II. Si H es el ortocentro de un triángulo obtusángulo ABC y R es la región triangular ABC, entonces RH es un conjunto no convexo.
III. La intersección de dos conjuntos no convexos, es siempre un conjunto no convexo.

A) VFF B) VVF C) VFV
D) FVF E) FFF

27. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La intersección de un ángulo y un plano que no es el plano que contiene al ángulo, siempre es un conjunto convexo.
II. La intersección de tres planos puede ser un conjunto no convexo.
III. La intersección de dos ángulos en el espacio siempre es no convexo.

A) FFF B) FFV C) VFF
D) VFV E) VVV

28. Se desea construir una caja sin tapa y de base cuadrada disponiendo de 300 dm^2 de material. Calcular la altura de dicha caja para que su volumen sea máximo.

A) 4 dm B) 6 dm C) 8 dm
D) 5 dm E) 3 dm

29. ¿Para cuál valor del radio, se hace máximo el área de un sector circular de perímetro 2p?

A) p/5 B) p/4 C) p/3
D) p/2 E) p

30. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Sea C una región no convexa y L una recta, ambas contenidas en un mismo plano, entonces L puede dividir a C en dos regiones convexas.
II. El triángulo, sus puntos interiores y sus puntos exteriores son tres conjuntos de puntos donde uno de ellos es un conjunto convexo.
III. Una recta y un triángulo que no se intersecan, contenidos en un plano, determinan una partición de 5 elementos en ese plano.

A) VFF B) FVV C) VVV
D) FFF E) FVF

31. Dado un triángulo acutángulo, ¿cuál es el triángulo de menor perímetro inscrito en él?

A) Mediano B) Tangencial
C) Exincentral D) Órtico
E) Podal

32. Se tiene un círculo de radio R. Hallar el área máxima de la región triangular que se puede inscribir en dicho círculo.

A) $3R^2\sqrt{3}/4$ B) $2R^2\sqrt{3}/6$ C) $3R^2\sqrt{3}/5$
D) $R^2\sqrt{3}/4$ E) $R^2\sqrt{3}/3$

33. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Una región triangular de la que se han excluido dos de sus lados, es una región convexa.
II. La unión de dos conjuntos convexos es un conjunto convexo.
III. Si A_1, A_2, A_3 y A_4 son cuatro regiones triangulares, tal que: $A_4 \subset (A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, entonces $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ es una región poligonal convexa.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FVV

34. En los siguientes enunciados, indicar (V) si es verdadero o (F) si es falso:

I. Una región poligonal de la que se han excluido sus vértices, es un conjunto convexo.
II. Ninguna región convexa resulta de la reunión de dos regiones no convexas.
III. La reunión de los dos semiespacios determinados por un plano de separación contenido en el espacio tridimensional, es una región convexa.

A) VVF B) VVV C) VFF
D) VFV E) FFF

35. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. El borde de un polígono convexo es una región convexa.
II. El complemento de un plano en el espacio es una región convexa.
III. La diferencia de dos regiones no convexas es una región no convexa.

A) VVV B) VFF C) FFF
D) VVF E) FFV

36. Se tiene un rectángulo de área 60. Si los lados son números enteros, calcular el mínimo perímetro posible.

A) 30 B) 32 C) 34
D) 36 E) 38

37. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La intersección de una recta mediatriz relativa a un lado de un triángulo y la región triangular determinada es un conjunto convexo.
II. La reunión de tres segmentos que unen tres puntos se denomina triángulo.
III. La Intersección de dos triángulos no es un conjunto convexo.

A) VFF B) FVF C) FFV
D) VVF E) FVV

38. Calcular la altura del cono circular recto de volumen máximo que puede ser inscrito en una esfera de radio R.

A) $\frac{4R}{3}$ B) $\frac{2R}{3}$ C) $\frac{5R}{4}$
D) $\frac{3R}{2}$ E) $\frac{5R}{3}$

39. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si T es una región triangular y E un círculo tales que $T \cap E \neq \varnothing$, entonces $T \cap E$ es un conjunto convexo.
II. La intersección no vacía de tres planos es un conjunto convexo.

III. Dos planos paralelos determinan en el espacio, una partición de 4 elementos.

A) VVF B) VVV C) VFF
D) FVF E) FVV

40. Indicar el valor de verdad de las siguientes proposiciones.

I. Toda línea separa el plano que la contiene en dos conjuntos convexos.
II. Si le quitamos un punto a una región rectangular, el conjunto resultante es convexo.
III. La poligonal ABCD no convexa gira 360° alrededor de uno de sus extremos y en el plano que la contiene, luego se determina siempre una región convexa.

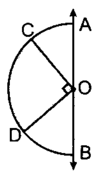
A) FFF B) FFV C) VFV
D) VVV E) VVF

41. Dado un cuadrante AOB de centro O, se traza una recta L tangente a dicho cuadrante. Si las distancias de A y B a dicha recta son 2 y 4, calcular el área de la superficie generada por el arco AB al girar 360° alrededor de L'.

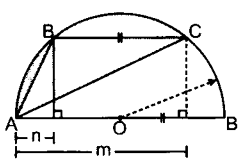
A) $20\pi(5\pi - 14)$ B) $10\pi(3\pi - 1)$
C) $30\pi(\pi - 1)$ D) $10\pi(7\pi - 20)$
E) $15\pi(10\pi - 27)$

42. Según el gráfico $m\overset{\frown}{AC} = 30°$, ¿qué ángulo debe girar aproximadamente el semicírculo alrededor de $\overleftrightarrow{AB}$ para que el sólido generado, sea equivalente al sector esférico generado por el sector circular COD al girar 360° alrededor de $\overline{AB}$?

A) 200°
B) 180°
C) 243°
D) 270°
E) 120°



43. En el gráfico, calcular la suma de volúmenes de los anillos esféricos generados por los segmentos circulares $\overline{AC}$ y $\overline{AB}$ al girar 360° alrededor de $\overleftrightarrow{AD}$. Además ($\overline{CB}$ // $\overline{AD}$).



A) $\frac{\pi}{3}(m^3 + n^3 + mn)$ B) $\frac{\pi}{3}(m^3 + n^3)$

C) $\frac{\pi}{6}[m^3 + n^3 + mn(m + n)]$ D) $\frac{\pi}{6}(m^3 + n^3)$

E) $\frac{\pi}{6}mn(m + n)$

44. Con todas las aristas de un prisma se construye una pirámide, entonces:

I. La pirámide puede tener 27 aristas.
II. El prisma pudo tener 6 vértices.
III. El número de caras de la pirámide puede ser 7.
IV. El número de vértices del prisma es igual al número de caras de la pirámide.

A) I B) II C) III
D) I y IV E) II y IV

45. Si el volumen de un prisma triangular regular es $\frac{\sqrt{3 + 3\sqrt{3}}}{4}$. Calcular la longitud de la arista básica, sabiendo que el ángulo determinado por las diagonales de dos caras laterales que parten del mismo vértice mide 30°.

A) $\sqrt{3}$ B) $2\sqrt{3}$ C) 2
D) $\sqrt{\sqrt{3} + 1}$ E) 1

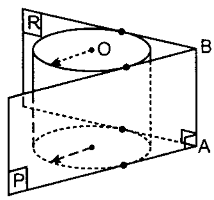
46. En un prisma oblicuo cuya altura mide $3\sqrt{6}$, la suma de las medidas de sus ángulos diedros es 2520°, su sección recta es una región poligonal regular cuyo circunradio es $\sqrt{3}$ cm. Calcular el volumen de dicho prisma, si el plano de su sección recta forma con el plano de su base un diedro que mide 30°.

A) 72 cm^3 B) 70 cm^3 C) $72\sqrt{2}$ cm^3
D) 144 cm^3 E) 36 cm^3

47. En un prisma triangular regular ABC-A'B'C', cuyas bases ABC y A'B'C' tienen baricentros G y G', respectivamente; M es punto medio de $\overline{GG'}$, N es punto medio de $\overline{A'B'}$ y L es un punto de $\overline{AC}$, tal que AL = 2(LC). Calcular la razón de los volúmenes de los sólidos en los que queda dividido dicho prisma por el plano que pasa por N, M y L.

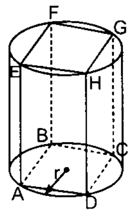
A) 2/3 B) 14/13 C) 7/13
D) 28/13 E) 15/13

48. En la figura mostrada, el ángulo diedro P-AB-R es tangente a la superficie lateral del cilindro circular recto; si la medida del diedro es 60°, AB = 40 m y AO = 50 m, calcular el volumen del cilindro.



A) 3000π m^3 B) 5000π m^3 C) 6000π m^3
D) 9000π m^3 E) $10^3\pi$ m^3

49. En la figura mostrada, el volumen del paralelepípedo es la mitad del volumen del cilindro circular recto. Calcular la distancia de C a $\overline{BD}$ es términos de "r".



A) $\frac{\pi r}{2}$ B) $\frac{\pi r}{4}$ C) $\frac{\pi r}{6}$
D) $\frac{\pi}{3}$ E) $\frac{r}{4}$

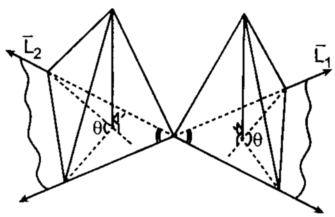
50. En un tetraedro regular A-BCD cuya arista mide "a", en $\overline{AD}$ se ubica el punto O, tal que OD mide igual que la altura de la pirámide O-ABC. Calcular el volumen de la pirámide O-BCD.

A) $\frac{a^3}{6}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ B) $\frac{a^3}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$
C) $a^3(\sqrt{3}+\sqrt{2})$ D) $\frac{a^3}{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})$
E) $\frac{a^3}{3}(\sqrt{6}-2)$

51. En una pirámide cuadrangular regular el lado de la base es L, la medida del ángulo determinando por una arista lateral y la altura es 30°, calcular el área de la sección que se determina al trazar un plano que pasa por un vértice de la base y es perpendicular a la arista lateral opuesta.

A) $\frac{L^3\sqrt{3}}{6}$ B) $\frac{L^2\sqrt{3}}{3}$ C) $\frac{L^2\sqrt{2}}{2}$
D) $\frac{L^2}{2}$ E) L^2

52. En la figura se muestra dos pirámides, en una de ellas las aristas laterales son de igual longitud y en la otra las caras laterales determinan diedros de igual medida con su base. Calcular el valor de θ.



A) 90° B) 60° C) 45°
D) 106° E) 120°

53. Se tiene un cono recto cuya altura mide 2 m y el radio de la base 1 m. En el plano que contiene a la base se considera un punto P desde el cual se traza las tangentes PM y PN a la base del cono. Calcular la medida del diedro determinado por los planos VPM y VPN, siendo V el vértice del cono y sabiendo que la distancia del centro de la base al punto P mide 4 m.

A) 120° B) 90° C) 75°
D) 60° E) 45°

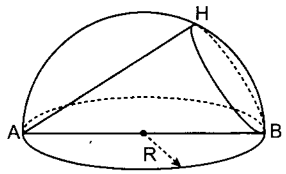
54. En un cono de revolución, de generatriz "g", está inscrito un cilindro cuya superficie total es equivalente a la superficie lateral del cono. El ángulo entre las generatrices del cono en su sección axial mide 90°. Calcular la distancia entre el vértice del cono y la base superior del cilindro.

A) $\frac{g}{5}\sqrt{3}$ B) $\frac{g}{3}\sqrt{2}$ C) $\frac{2g}{5}\sqrt{2}$
D) $\frac{g}{2}$ E) $\frac{2g}{3}$

55. Un triángulo rectángulo, cuyo ángulo agudo mide β, limita una región que al girar alrededor del cateto opuesto a β genera un cono, cuyo desarrollo de su superficie lateral tiene un ángulo que mide θ. Calcular θ en función de β.

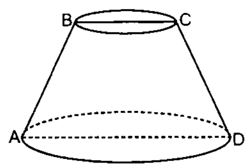
A) β B) β/2 C) 3β/2
D) 360°senβ E) 360°cosβ

56. En la figura se muestra una semiesfera de radio R y en ella se ha inscrito un cono oblicuo de vértice A y cuya base es un círculo menor cuyo único punto en común con el circulo máximo es B. Calcular el volumen máximo de dicho cono.



A) $\frac{4\sqrt{3}}{9}\pi R^3$ B) $\frac{4}{9}\pi R^3$ C) $12\pi R^3$
D) $\frac{4}{3}\pi R^3$ E) $\frac{4\sqrt{3}}{27}\pi R^3$

57. Calcular el área de la superficie lateral máxima del tronco de cono circular recto, si:
AB + BC + CD + AD = k



A) $\frac{\pi k^2}{2}$ B) $\frac{\pi k^2}{4}$ C) $\frac{\pi k^2}{8}$
D) $\frac{\pi k^2}{16}$ E) $\frac{\pi k^2}{32}$

58. Calcular la altura del cono circular recto de volumen mínimo que se pueda circunscribir a una esfera de 4 cm de radio.

A) 16 cm B) 12 cm C) 20 cm
D) 24 cm E) 10 cm

59. En una semicircunferencia de diámetro AD se inscribe el trapecio ABCD. Si AD = 4 m, calcular el área máxima de la región cuadrangular ABCD.

A) $3\sqrt{3}$ m^2 B) 4 m^2 C) 8 m^2
D) 6 m^2 E) $4\sqrt{3}$ m^2

60. Una esfera de radio "a" está inscrita en una pirámide regular cuadrangular de la cual se pide su volumen mínimo.

A) $24a^3$ B) $\frac{64}{3}a^3$ C) $\frac{32}{3}a^3$
D) $\frac{24}{5}a^3$ E) $16a^3$

CLAVES

1. D	9. C	17. A	25. D	33. B	41. A	49. B	57. D
2. D	10. A	18. B	26. A	34. C	42. C	50. D	58. A
3. D	11. A	19. D	27. A	35. C	43. C	51. B	59. A
4. B	12. B	20. A	28. D	36. B	44. C	52. E	60. C
5. E	13. A	21. B	29. D	37. A	45. E	53. D	
6. E	14. D	22. D	30. C	38. A	46. A	54. D	
7. B	15. B	23. D	31. D	39. A	47. B	55. E	
8. D	16. E	24. D	32. A	40. B	48. D	56. E	

Este libro se terminó de imprimir
en los talleres gráficos de Editorial San Marcos, de Aníbal Jesús Paredes Galván
situados en av. Las Lomas 1600, urb. Mangomarca, San Juan de Lurigancho, Lima, Lima
RUC: 10090984344