SERIES
SERIES ESPECIALES

SERIES

SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES

Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida como $\left\{\dfrac{1}{2^{n-1}}\right\}$, esto es

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots, \frac{1}{2^{n-1}}$$

Y las sumas parciales S_n de n términos de la sucesión $\{a_n\}$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$S_1 = 1 = \frac{1}{1}$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{4} + \frac{1}{8} = \frac{14}{8} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8}$$

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{15}{8} + \frac{1}{16} = \frac{30}{16} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16}$$

$$\vdots$$

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = ?$$

Para determinar la suma n-ésima, determinemos un patrón en las sumas parciales

Estas son $\frac{1}{1},\frac{3}{2},\frac{7}{4},\frac{15}{8},\frac{31}{16},\ldots$

Los denominadores son: 1,2,4,8,16

Estas son las potencias de 2, para n=1, vale 1 por lo que son de la forma 2^{n-1}

Los numeradores son: 1,3,7,15,31 , la relación entre el numerador y el denominador es que el numerador es casi el doble del denominador, falta un 1.

El numerador es $2\left(2^{n-1}\right)-1$

Por lo que

$$S_n=\frac{2\left(2^{n-1}\right)-1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$$

Las sumas parciales $1, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{15}{8}, \frac{31}{16}, \cdots, 2 - \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$ **constituyen la Sucesión de Sumas Parciales**

$\{S_n\} = \left\{2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ **¿ Converge la sucesión de sumas parciales?**

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 2 - \frac{1}{2^{\infty-1}} = 2 - 0 = 2$$

La sucesión converge a 2.

La suma infinita vale 2. $1 + \frac{3}{2} + \frac{7}{4} + \frac{15}{8} + \frac{31}{16} + \cdots + \left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \cdots = 2$

Finalmente notemos que la sucesión original $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots, \frac{1}{2^{n-1}}, \cdots$ **converge a 0.**

Definición: Dada una sucesión de números $\{a_n\}$, una expresión de la forma

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

se denomina serie infinita o simplemente serie.

La sucesión $\{S_n\}$ definida como

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

es la sucesión de sumas parciales de la serie, donde S_n denota la n-ésima suma parcial. Si la sucesión de sumas parciales converge a un límite L, decimos que la serie converge y que su suma es L, y en este caso escribimos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Si la sucesión de sumas parciales $\{S_n\}$ no tiene límite decimos que la serie diverge.

Notación: La serie $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ o por $\sum a_n$.

SERIES ESPECIALES

SERIE GEOMÉTRICA

Dada la serie

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Donde a y r son constantes y a es diferente de cero.

¿Para qué valores de r la serie converge?

Las sumas parciales de la serie geométrica son

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a + ar$$

$$S_3 = a + ar + ar^2$$

$$\vdots$$

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

Como no se tienen los valores de a y r no podemos dar una expresión precisa para cada una de las sumas parciales

Para determinar la n-ésima suma parcial S_n usemos lo siguiente.

Multipliquemos Sn por r

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^n$$

Calculemos la diferencia

$$S_n - rS_n = \left(a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}\right) - \left(ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n\right)$$

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$

$$S_n\left(1 - r\right) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

Así

$$\{S_n\} = \left\{ \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} \right\}$$

Determinemos los valores de r para los cuales converge la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1-r^n\right)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \lim_{n\to\infty} 1-r^n = \frac{a}{1-r}\left(\lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty} r^n\right) = \frac{a}{1-r}\left(1-\lim_{n\to\infty} r^n\right)$$

$$\lim_{n\to\infty} r^n$$

Para calcular el valor del límite, necesitamos hallar

Este se puede determinar por el teorema 2 de sucesiones.

Con lo cual si $|r|<1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, luego

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}\left(1-\lim_{n\to\infty} r^n\right) = \frac{a}{1-r}(1-0) = \frac{a}{1-r}$$

Si $|r|>1$, entonces $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ y $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}\left(1-\lim_{n\to\infty} r^n\right) = \frac{a}{1-r}(1-\infty) = -\infty$, sucesión diverge.

Nos falta determinar si la serie converge o diverge si $|r|=1$, esto es si $r=\pm 1$

Si $r=1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a(1)^{n-1} = a+a+a+a+a\cdots+a+\cdots$

la sucesión de sumas parciales es

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a+a = 2a$$

$$S_3 = a+a+a = 3a$$

$$\vdots$$

$$S_n = a+a+a+\cdots+a = na$$

Calculando el límite de la sucesión de sumas parciales

$$\lim_{n\to\infty} na = a(\infty) = \infty$$

Así, para $r=1$ la serie diverge.

Si $r=-1$, la serie es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a(-1)^{n-1} = a-a+a-a+a-\cdots+(-1)^{n-1}a+\cdots$

la sucesión de sumas parciales es

$$S_1 = a$$

$$S_2 = a - a = 0$$

$$S_3 = a - a + a = a$$

$$S_4 = a - a + a - a = 0$$

$$\vdots$$

La sucesión de sumas parciales es

$$\{a, 0, a, 0, \ldots\}$$

Dividimos la sucesión {a,0,a,0,...} en dos subsucesiones {a,a,a,a,...} y {0,0,0,0,...} la primera de ellas converge a a y la segunda converge a 0. Como converge a valores diferentes la sucesión diverge.

Si r = – 1 la serie diverge.

Por lo tanto la serie converge si $|r|<1$ y su suma es $\dfrac{a}{1-r}$, esto es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$

Hemos demostrado el teorema siguiente.

Teorema: La serie geométrica es

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

Converge si $|r|<1$ y su suma es $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \dfrac{a}{1-r}$ y diverge si $|r| \geq 1$

Observación: Otra opción para representar la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$. Una forma de identificar la serie geométrica es con su representación explicita o desarrollada, esto es mediante la suma de sus elementos $a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$.

EJEMPLO 1.

DETERMINAR SI LA SERIE GEOMÉTRICA DADA CONVERGE O DIVERGE, SI CONVERGE CALCULA SU SUMA.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

la serie tiene la forma $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$, así se tiene $a = \frac{1}{9}$ y $r = \frac{1}{3}$, luego $|r| = \frac{1}{3} < 1$

La serie converge.

Calculando su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{\frac{1}{9}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n}$ **, esta serie no tiene la forma general de la serie geométrica, así usemos la leyes de los exponentes para llegar a la forma general.**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)+1} 5}{4^{(n-1)+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)(-1)^{(n-1)} 5}{4 \cdot 4^{(n-1)}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right) \frac{(-1)^{(n-1)}}{4^{(n-1)}} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-5}{4}\right)\left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1}$$

Ya tiene la forma principal de la serie geométrica con $a = -\frac{5}{4}$ y $r = -\frac{1}{4}$, $|r| = \frac{1}{4} < 1$

La serie converge.

Calculando su suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 5}{4^n} = \frac{-\frac{5}{4}}{1-\left(-\frac{1}{4}\right)} = \frac{-\frac{5}{4}}{\frac{5}{4}} = -1$$

c) $\sum_{n=1}^{\infty}(2)^{2n}\,3^{1-n}$ **, esta serie no tiene la forma general de la serie geométrica, así usemos la leyes de los exponentes para llegar a la forma general.**

$$\sum_{n=1}^{\infty}(2)^{2n}\,3^{1-n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(2^{2}\right)^{n}3^{-(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2^{2}\right)^{n}}{3^{(n-1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4)^{n}}{3^{(n-1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(4)^{n-1}}{3^{(n-1)}}=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}$$

Ya tiene la forma principal de la serie geométrica con $a=4$ y $r=\frac{4}{3}$, $|r|=\frac{4}{3}>1$

La serie diverge.

d) $$0.6+0.06+0.006+\cdots+\frac{6}{10^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n}$$

esta serie no tiene la forma general de la serie geométrica, modifiquémosla.

$$\sum_{n=1}^{\infty}6\frac{1}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{10}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}6\left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{6}{10}\right)\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

Ya tiene la forma general de la serie geométrica con $a=\frac{6}{10}$ y $r=\frac{1}{10}$ y $|r|=\frac{1}{10}<1$

La serie converge.

Calculando su suma $$0.6+0.06+0.006+\cdots+\frac{6}{10^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6}{10^n}=\frac{\frac{6}{10}}{1-\left(\frac{1}{10}\right)}=\frac{\frac{6}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{10^n} = 0.6 + 0.06 + 0.006 + \cdots + \frac{6}{10^n} + \cdots$ nos representa al número 0.666666... y determinamos que es igual a $\frac{2}{3}$, con lo cual la serie geométrica nos da una opción de representar un número decimal como el cociente de números enteros.

EJEMPLO 2.

Escribir el número 2.3171717… como una razón de números enteros

Podemos descomponer el número como la suma de un número racional y una serie

$$2.3171717\ldots = 2.3 + 0.0171717\ldots = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3} + \frac{17}{10^5} + \frac{17}{10^7} + \cdots$$

$$2.3171717\ldots = \frac{23}{10} + \frac{17}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \cdots\right)$$

La serie es

$$1 + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{10^6} + \cdots + \frac{1}{10^{2n}} + \cdots = 1 + \frac{1}{\left(10^2\right)^1} + \frac{1}{\left(10^2\right)^2} + \frac{1}{\left(10^2\right)^3} + \cdots + \frac{1}{\left(10^2\right)^{n-1}} + \frac{1}{\left(10^2\right)^n} + \cdots$$

$$1+\frac{1}{\left(10^2\right)^1}+\frac{1}{\left(10^2\right)^2}+\frac{1}{\left(10^2\right)^3}+\cdots+\frac{1}{\left(10^2\right)^{n-1}}+\frac{1}{\left(10^2\right)^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(10^2\right)^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}$$

Serie geométrica con $a=1$ y $r=\frac{1}{10^2}$ y $|r|=\frac{1}{10^2}<1$ y la serie converge, su suma es

$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{10^6}+\cdots+\frac{1}{10^{2n}}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{10^2}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\left(\frac{1}{100}\right)}=\frac{1}{\frac{99}{100}}=\frac{100}{99}$$

Luego $2.3171717\ldots=\frac{23}{10}+\frac{17}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^4}+\cdots\right)=\frac{23}{10}+\frac{17}{10^3}\left(\frac{100}{99}\right)=\frac{23}{10}+\frac{17}{990}=\frac{1147}{495}$

SERIE ARMÓNICA

Definición: La serie armónica es la serie infinita divergente

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

SERIE TELESCÓPICA

ESTA SERIE NO TIENE UNA FORMA ESPECIFICA COMO SUCEDE CON LA SERIE GEOMÉTRICA O ARMÓNICA.

LA CARACTERÍSTICA DE LA SERIE TELESCÓPICA ES QUE SE PUEDE EXPRESAR COMO UNA DIFERENCIA DE FUNCIONES DE MANERA TAL QUE AL EXPRESARLA DE FORMA DESARROLLADA ES POSIBLE ELIMINAR LA MAYORÍA DE LOS SUMANDOS QUEDANDO EN GENERAL EL PRIMERO Y EL ÚLTIMO DE LOS TÉRMINOS, DÁNDONOS LA POSIBILIDAD DE TENER UNA EXPRESIÓN PARA LA SUMA ENÉSIMA DE LA SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES.

EJEMPLO 3.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ **CONVERGE O DIVERGE. SI CONVERGE CALCULA SU SUMA.**

La serie es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$

La n-ésima suma parcial es $S_n = \frac{1}{1(2)} + \frac{1}{2(3)} + \frac{1}{3(4)} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}$

Es posible calcular todas las sumas parciales y determinar una expresión para el término general, pero en este caso nos interesa aplicar la serie telescópica.

Expresemos el término general de la serie como una diferencia,

$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$, la forma del término general nos da a oportunidad de aplicar fracciones parciales.

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+Bn}{n(n+1)} = \frac{(A+B)n+A}{n(n+1)}$$

$$A+B=0 \qquad \Rightarrow \qquad A=-B$$

$$A=1 \text{ y } B=-1$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Luego } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

Determinando la sucesión de sumas parciales de la serie, con la diferencia obtenida

$$S_n = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

Simplificando los términos comunes

$$S_n = 1-\frac{1}{n+1}$$

¿CONVERGE LA SUCESIÓN DE SUMAS PARCIALES?

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1-\frac{1}{\infty+1} = 1-0 = 1$$

LA SUCESIÓN CONVERGE, ENTONCES LA SERIE CONVERGE Y SU SUMA ES 1. ESTO ES $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1$

CRITERIO DEL N-ÉSIMO TÉRMINO PARA LA DIVERGENCIA

Teorema. (Límite del término n-ésimo de una serie convergente)

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Ejemplo 4.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ converge, fue la que se estudió al inicio del tema y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{\infty}} = 0$. Lo que ilustra el teorema.

Teorema. (Criterio del n-ésimo término para la divergencia)

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge si:

i) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$

ii) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no existe

EJEMPLO 5.

APLICAR EL CRITERIO N-ÉSIMO DE LA DIVERGENCIA PARA DETERMINAR SI LAS SERIES DADAS DIVERGEN.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$

Calculando el límite $\lim_{n \to \infty} n^2 = \infty$, el límite no existe y por el criterio del n-ésimo término de la divergencia, a serie diverge.

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2n!+1}$

Calculando el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{2n!+1} = \frac{\infty}{\infty}$ tiene la forma de cociente indeterminado, pero no es posible aplicar la Regla de L'Hospital ya que no hay una expresión para determinar la derivada del factorial.

Dividamos entre n! el numerador y el denominador

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n!}}{\frac{2n!+1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{n!}}{\frac{2n!}{n!}+\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{n!}} = \frac{1}{2+\frac{1}{\infty}} = \frac{1}{2} \neq 0$$

El límite es diferente de cero, por el criterio del n-ésimo término de la divergencia la serie diverge.

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

Calculando el límite $\lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1}$ **al evaluar no llegamos a un resultado, la regla de L'Hospital no se puede aplicar por no ser cociente indeterminado y tampoco se pueden aplicar los teoremas de sucesiones (ya que el límite del valor absoluto del término general no es cero).**

Calculamos el límite para n par y n impar.

$$\text{Si } n \text{ es par } (-1)^{n+1} = -1 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} -1 = -1$$

$$\text{Si } n \text{ es impar } (-1)^{n+1} = 1 \text{ entonces } \lim_{n\to\infty} (-1)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Como los límites son diferentes se aproxima a más de un valor y el límite no existe, por el criterio del n-ésimo término de la divergencia la serie diverge.

D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Calculando el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

como es 0, el criterio del n-ésimo término de la divergencia no determina convergencia o divergencia.

E) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

Calculando el límite $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{\infty(\infty+1)} = 0$

como es 0, el criterio del n-ésimo término de la divergencia no determina convergencia o divergencia.

El criterio del n-ésimo término para la divergencia no determino si las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

divergen pero tampoco si convergen.

Sin embargo la primera de las series, es la Serie Armónica y se dijo que diverge y la segunda serie es telescópica y determinamos que converge.

- EL CRITERIO DEL N-ÉSIMO TÉRMINO PARA LA DIVERGENCIA SOLO NOS DETERMINA SI LA SERIE DIVERGE, NO DETERMINA SI LA SERIE CONVERGE,
- SI $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ LA SERIE PUEDE SER CONVERGENTE O DIVERGENTE,

PROPIEDADES DE LA SERIE

Teorema. Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son series convergentes con sumas A y B respectivamente, entonces

i) Si c es un número real, $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ converge y su suma es cA

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ converge y su suma es A + B

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n)$ converge y su suma es A – B

EJEMPLO 6.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)$ **CONVERGE O DIVERGE.**

Por propiedades $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ es la serie del ejemplo de serie telescópica y determinamos que converge y su suma es 1.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}$ tiene a la variable n solo en el exponente lo que nos sugiere sea una serie geométrica, démosle la forma de esta $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ ya está en la forma de la serie geométrica con $a=1$ y $r=\frac{1}{3}$, donde $|r|=\frac{1}{3}<1$ y por lo tanto converge, y su suma es $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

Así

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{n(n+1)}+\frac{2}{3^{n-1}}\right)=7\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^{n-1}}=7(1)+2\left(\frac{3}{2}\right)=10$$

Por lo tanto la series converge y su suma es 10.