



## Lista de ejercicios de la lección 1.4.3

Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las rectas y las curvas dadas alrededor del eje indicado (discos):

1.  $y = 9 - x^2$ ,  $y = 0$ ; eje  $x$
4.  $y = -\sqrt{x}$ ,  $y = -2$ ,  $x = 0$ ; eje  $y$
2.  $y = x^3$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ; eje  $x$
5.  $y = \cos x$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ; eje  $y$
3.  $y = \sqrt{9 - x^2}$ ,  $y = 0$ ; eje  $x$
6.  $x = \frac{2}{y+1}$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $y = 3$ ; eje  $y$

Hallar el volumen del sólido generado al rotar la región acotada por las rectas y las curvas dadas alrededor del eje indicado (arandelas).

7.  $y = x$ ,  $y = 1$ ,  $x = 0$ ; eje  $x$
11.  $y = \sec x$ ,  $y = \tan x$ ,  $x = 0$ ,  $x = 1$ ; eje  $x$
8.  $y = 2x$ ,  $y = x$ ,  $x = 1$ ; eje  $x$
12.  $y = \sec x$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{\pi}{4}$ ,  $x = 0$ ; eje  $y$
9.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 2 - x$ ; eje  $x$
13. 1er cuadrante  $x^2 + y^2 = 3$ ,  $y = \sqrt{3}$ ,  $x = \sqrt{3}$ ; eje  $y$
10.  $y = x^2 + 1$ ,  $y = x + 3$ ; eje  $x$
14. 1er cuadrante  $y = x^2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 2$ ; eje  $y$

Representar la región  $R$  acotada por las gráficas de las ecuaciones para calcular el volumen del sólido generado al girar  $R$  alrededor del eje indicado. Trace un rectángulo típico junto con la envolvente cilíndrica que genera.

15.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ; eje  $y$
19.  $y = 9 - x^2$ ,  $y = 0$ ; eje  $x$
16.  $y = x^2 - 5x$ ,  $y = 0$ ; eje  $y$
20.  $y = \sqrt{\cos x}$ ,  $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ ; eje  $x$
17.  $y = x^3 + 1$ ,  $x + 2y = 2$ ,  $x = 1$ ; eje  $y$
21.  $2y = x$ ,  $y = 4$ ,  $x = 1$ ; eje  $x$
18.  $y^3 = x$ ,  $y = 3$ ,  $x = 0$ ; eje  $x$

Hallar los volúmenes de los sólidos generados al girar las regiones acotadas por las curvas y las rectas dadas alrededor del eje  $x$ .

22.  $x + y = 3$ ,  $x^2 + y = 3$
25.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $y = x - 2$
28.  $y = \sec x$ ,  $y = \sqrt{2}$  en  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
23.  $x = 2y - y^2$ ,  $x = y$
26.  $x = 1 + y^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2$
24.  $y = x$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 2$
27.  $x + y = 3$ ,  $x = 4 - (y - 1)^2$



Hallar el volumen del sólido generado al girar cada región alrededor del eje  $y$ .

29.  $y = x^2$ ,  $x = 2$ , *el eje  $x$*     32.  $x = y^2$ ,  $y = x - 6$

30.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = x$     33.  $y = x^3 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 9$

31.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$

Obtener el volumen del sólido de revolución que se forma haciendo rotar la región limitada por las graficas de las ecuaciones dadas, en torno del eje indicado.

34.  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $y = 5$ ; *eje  $y$*

53.  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ; *recta  $y = 5$*

35.  $y = (x - 2)^2$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ; *eje  $x$*

54.  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ; *recta  $x = 2$*

36.  $2x - y - 12 = 0$ ,  $x - 2y - 3 = 0$ ,  $x = 4$ ; *eje  $y$*

55.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ; *recta  $x = 4$*

37.  $x^2 = 4y$ ,  $y = 4$ ; *eje  $x$*

56.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ; *recta  $x = 6$*

38.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 1 - \frac{1}{4}x^2$ ; *eje  $x$*

57.  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = 4$ ; *recta  $y = 2$*

39.  $y = 1 - x^2$ ,  $y = x^2 - 1$ ; *eje  $y$*

58.  $y = 4x^2$ ,  $4x + y - 8 = 0$ ; *recta  $x = 1$*

40.  $y = x^3$ ,  $x = -2$ ,  $y = 0$ ; *eje  $x$*

59.  $y = 4x^2$ ,  $4x + y - 8 = 0$ ; *recta  $y = 0$*

41.  $y = 2x$ ,  $y = 4x^2$ ; *eje  $y$*

60.  $y = 4x^2$ ,  $4x + y - 8 = 0$ ; *recta  $y = 16$*

42.  $x = y^3$ ,  $x^2 + y = 0$ ; *eje  $x$*

61.  $y = x^3$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ; *recta  $x = 2$*

43.  $x = y^2$ ,  $y - x + 2 = 0$ ; *eje  $y$*

62.  $y = x^3$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ; *recta  $x = 3$*

44.  $x + y = 1$ ,  $y = x + 1$ ,  $x = 2$ ; *eje  $y$*

63.  $y = x^3$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$ ; *recta  $y = -1$*

45.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $y = 0$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = 2$ ; *eje  $y$*

64.  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 0$

46.  $y = \frac{1}{x}$ ,  $x = 1$ ,  $y = 2$ ,  $y = 0$ ,  $x = 0$ ; *eje  $y$*

65.  $x = y - y^3$ , *el eje  $y$* ; *recta  $y = 1$*

47.  $y = x^4$ ,  $y = 1$ , *gira alrededor de  $x = 2$* ,  $y = 1$

66.  $y = 2x - x^2$ ,  $y = x$ ; *recta  $x = 1$*

48. *1er cuadrante*  $y = \sqrt{2}$ ;  $y = \sec x \tan x$ ,  $x = 0$

67.  $x = 4 + 6y - 2y^2$ ,  $x = -4$ ; *recta  $x = -4$*

49. *1er cuadrante*  $y = 2$ ;  $y = 2 \sin x$ ,  $x = 0$ ; *recta  $y = 2$*     68.  $2y = x + 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ; *eje  $x$*

50. *1er cuadrante*  $y = x^2$ ;  $y = 0$ ,  $x = 1$ ; *recta  $x = -1$*     69.  $2y = x + 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ; *eje  $y$*



51. 2do cuadrante  $y = -x^3$ ;  $y = 0$ ,  $x = -1$ ; recta  $x = -2$     70.  $2y = x + 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ; recta  $x = 4$

52.  $y = x^2$ ,  $y = 4$ ; recta  $y = 4$

71.  $2y = x + 4$ ,  $y = x$ ,  $x = 0$ ; recta  $y = 8$

**Nota.** El ejercicio 48 es con la recta  $y = \sqrt{2}$ , y el ejercicio 64 es con la recta  $x = -1$ .

72. Al girar alrededor del eje  $x$  la región limitada por la curva  $y = \sqrt{2x+4}$ , el eje  $x$ , el eje  $y$ , y la recta  $x = c$  con  $c > 0$ , se generó un sólido de revolución. ¿Para qué valor de  $c$  el volumen del sólido será de  $12\pi$  unidades cúbicas?

73. Obtener el volumen del sólido de revolución generado cuando la región acotada por la curva  $y = 1 - \frac{3}{x}$ , el eje  $x$  y la recta  $x = 1$  se gira alrededor del eje  $x$ .

74. Calcular el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por el eje  $x$ , la curva  $y = 1 + \frac{2}{\sqrt{x}}$  y las rectas  $x = 1$  y  $x = 4$  se gira alrededor del eje  $x$ .

75. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de las curvas  $y = e^x$  y  $y = 2^x$ , y la recta  $x = 2$ , alrededor del eje  $x$ .

76. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por las gráficas de  $y = \log_{10} x$ ,  $y = \ln x$  y la recta  $x = 3$ .

77. Calcular el volumen del sólido de revolución generado si la región determinada por la catenaria  $y = 6 \cosh\left(\frac{x}{6}\right)$ , el eje  $x$ , el eje  $y$  y la recta  $x = 6 \ln 6$ , gira alrededor del eje  $x$ .

78. Obtener el volumen del sólido de revolución generado cuando la región limitada por la curva  $y = \sqrt{\sinh x}$ , el eje  $x$  y las rectas  $x = 0$  y  $x = \ln 2$ , se gira alrededor del eje  $x$ .

79. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por  $yx^2 = 1$ ,  $y = 1$  y  $y = 4$ , alrededor de la recta  $y = 5$

80. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las graficas de  $y^2 = x$ ,  $x = 0$ ,  $y = -1$  y  $y = 1$ , gira alrededor de la recta  $y = 2$ .

81. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 8x - 2x^2$ ; en torno de  $x = -2$ .

82. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región limitada por  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ; en torno de  $y = -1$ .

83. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por  $y = x^2 + 1$ ,  $x = 0$ ,  $x = 2$  y  $y = 0$ ;

a) Alrededor de la recta  $x = 3$



- b) Alrededor de la recta  $x = -1$
84. Hallar el volumen del sólido obtenido al girar la región acotada por  $y = 4 - x^2$  y  $y = 0$ ;
- a) Alrededor de la recta  $x = 2$
- b) Alrededor de la recta  $x = -2$
85. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por  $y = \sqrt{x}$  y las rectas  $y = 2$  y  $x = 0$ ;
- a) Alrededor de la recta  $y = 2$
- b) Alrededor de la recta  $x = 4$
86. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por las rectas  $y = 2x$ ,  $y = 0$  y  $x = 1$ ;
- a) Alrededor de la recta  $x = 1$
- b) Alrededor de la recta  $x = 2$
87. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por  $x = y^3$ ,  $x = 8$  y  $y = 0$ , alrededor de la recta  $x = 8$ .
88. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por  $x = y - y^3$  y el eje  $y$ , alrededor de la recta  $y = 1$ .
89. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región acotada por  $y = 2x - x^2$  y  $y = x$ , alrededor de la recta  $x = 1$ .
90. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región  $y = x^4$  y  $y = 1$ , alrededor de  $y = 1$ .
91. Hallar el volumen del sólido generado al girar la región  $y = x^2$  y  $y = 4$ , alrededor de:
- a)  $y = 4$
- b)  $y = 5$
- c)  $x = 2$
92. Obtener el volumen del sólido obtenido al girar la región triangular acotada por las rectas  $2y = x + 4$ ,  $y = x$  y  $x = 0$ , alrededor de:
- a) el eje  $x$



- b) el eje  $y$
- c) la recta  $x = 4$
- d) la recta  $y = 8$

93. Obtener el volumen del sólido obtenido al girar la región en el primer cuadrante acotada por  $y = x^3$  y  $y = 4x$ , alrededor de:

- a) el eje  $x$
- b) la recta  $x = 8$

En los siguientes ejercicios obtener una fórmula para el volumen del sólido inclinado usando una integral definida.

94. Un cono circular recto de altura  $h$  y radio de la base  $r$ .

95. Una esfera de radio  $r$ .

96. Un cono circular recto truncado de altura  $h$ , radio de la base inferior  $R$  y radio de la base superior  $r$ .

97. Un segmento esférico de altura  $h$  y radio de la esfera  $r$ .

Representar la región  $R$  acotada por las gráficas de las ecuaciones dadas y luego plantee la integral o las integrales que se necesitan para calcular el volumen del sólido que se obtiene al girar  $R$  alrededor de la recta indicada. Use todos los métodos posibles en cada ejercicio.

98.  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ ; recta  $y = 8$

102.  $x^2 + y^2 = 1$ ; recta  $x = 5$

99.  $y = x^3$ ,  $y = 4x$ ; recta  $x = 4$

103.  $y = x^{\frac{2}{3}}$ ,  $y = x^2$ ; recta  $y = -1$

100.  $x + y = 3$ ,  $y + x^2 = 3$ ; recta  $x = 2$

104.  $y = 4 - x^2$ ,  $y = 0$ ; recta  $x = -3$

101.  $y = 1 - x^2$ ,  $x - y = 1$ ; recta  $y = 3$