SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

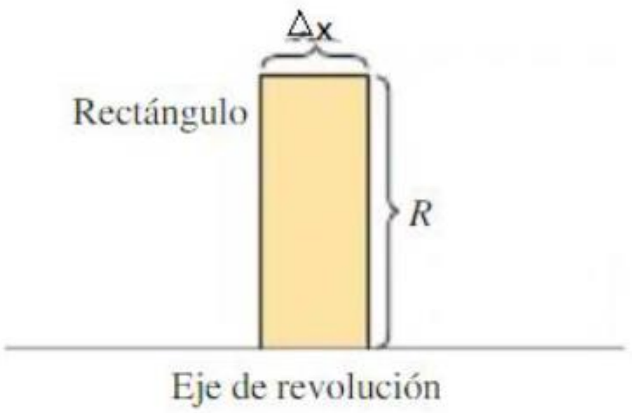
Ya hemos visto que una de las aplicaciones de la integral definida es el cálculo de áreas.

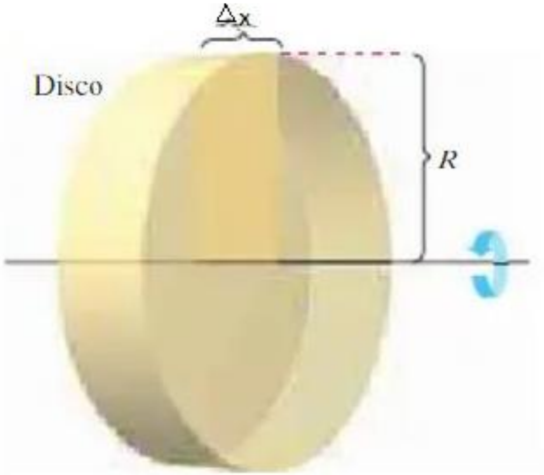
Otra aplicación importante es el cálculo del volumen de un sólido tridimensional cuyas secciones cónicas son similares, como, por ejemplo: embudos, ejes, píldoras, botellas, etc.

Nos surge la pregunta, ¿cómo calculo el volumen de esos sólidos?

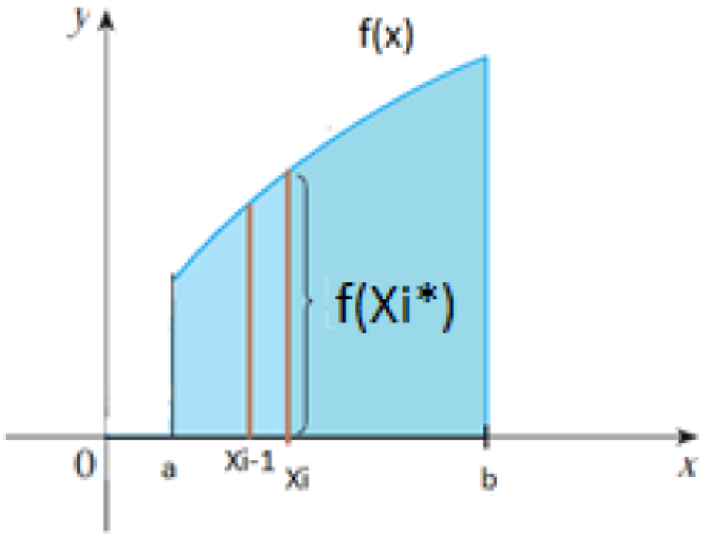
Método de los discos

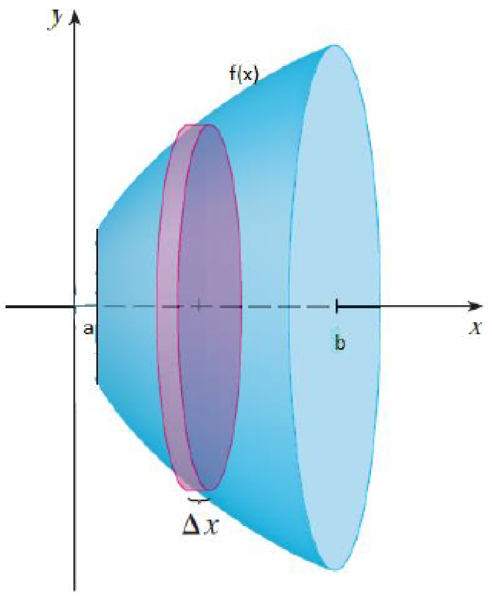
En este método partimos de un rectángulo y al girar en torno a uno de sus lados se genera un disco, como se muestra.



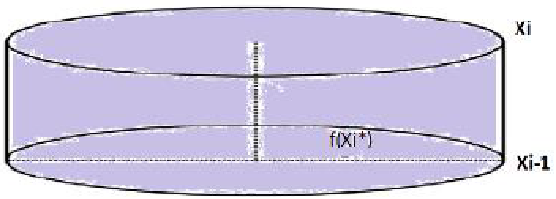


Sea R la región limitada por la función continua y positiva $f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$, tomemos una partición del intervalo $[a,b]$ de n subintervalos de longitud Δx, y el rectángulo que se forma en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de base Δx y altura $f(x_i\,*)$, hacemos girar el rectángulo con respecto al eje x.





Tomamos el disco que se obtiene al girar el rectángulo



El volumen del disco es igual al volumen del cilindro de radio $f(x_i *)$ y altura Δx

$$V_i = \pi\left(f\left(x_i *\right)\right)^2 \Delta x$$

Calculando el volumen de todos los discos y sumando, tenemos

$$V \approx \pi\left(f\left(x_1^*\right)\right)^2 \Delta x + \pi\left(f\left(x_2^*\right)\right)^2 \Delta x + \cdots + \pi\left(f\left(x_i^*\right)\right)^2 \Delta x + \cdots + \pi\left(f\left(x_n^*\right)\right)^2 \Delta x$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} \pi\left(f\left(x_i^*\right)\right)^2 \Delta x$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, se tiene

$$V = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \pi \left(f\left(x_i^* \right) \right)^2 \Delta x$$

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua f, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje x es

$$V = \int_a^b \pi \left(f\left(x \right) \right)^2 dx$$

donde $f\left(x \right)$ es el radio del disco.

Si R es una región de y, se tiene como definición

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua f, el eje y y las rectas $y=c$ y $y=d$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje y es

$$V=\int_{c}^{d}\pi\left(f\left(y\right)\right)^{2}dy$$

donde $f\left(y\right)$ es el radio del disco.

En general se puede determinar el volumen de un sólido de revolución usando el radio del disco que se forma al girar un rectángulo de la región, como sigue

$V = \int_a^b \pi (radio)^2 \, dx$ para una región x.

Y, $V = \int_c^d \pi (radio)^2 \, dy$ para una región y.

Ejemplo 1.

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $f(x)=x^3-6x$ y el eje x en el intervalo $[0,3]$, alrededor del eje x.

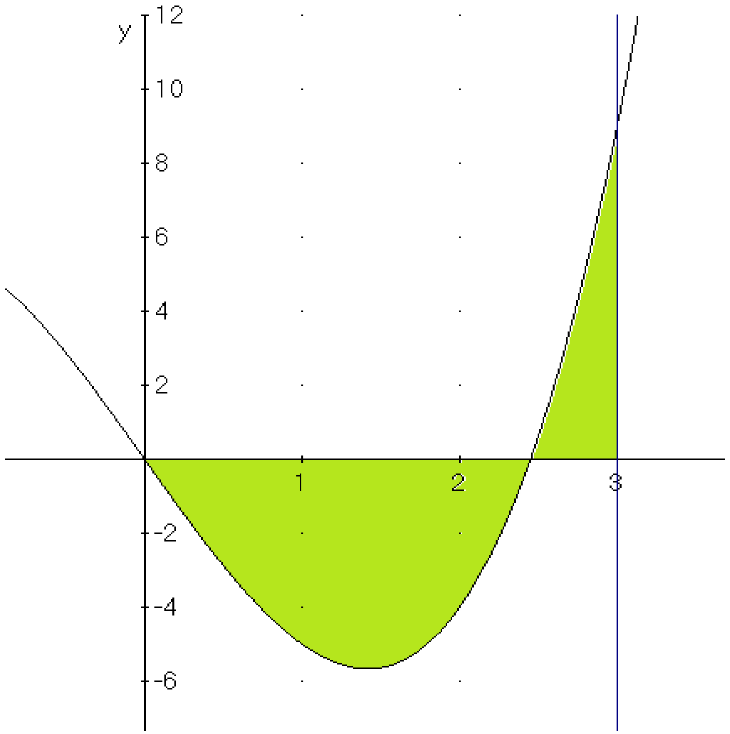
Puntos de intersección

$$x^3-6x=0 \;\Rightarrow\; x\left(x^2-6\right)=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ y } x^2-6=0 \;\Rightarrow\; x=0 \text{ y } x=\pm\sqrt{6}$$

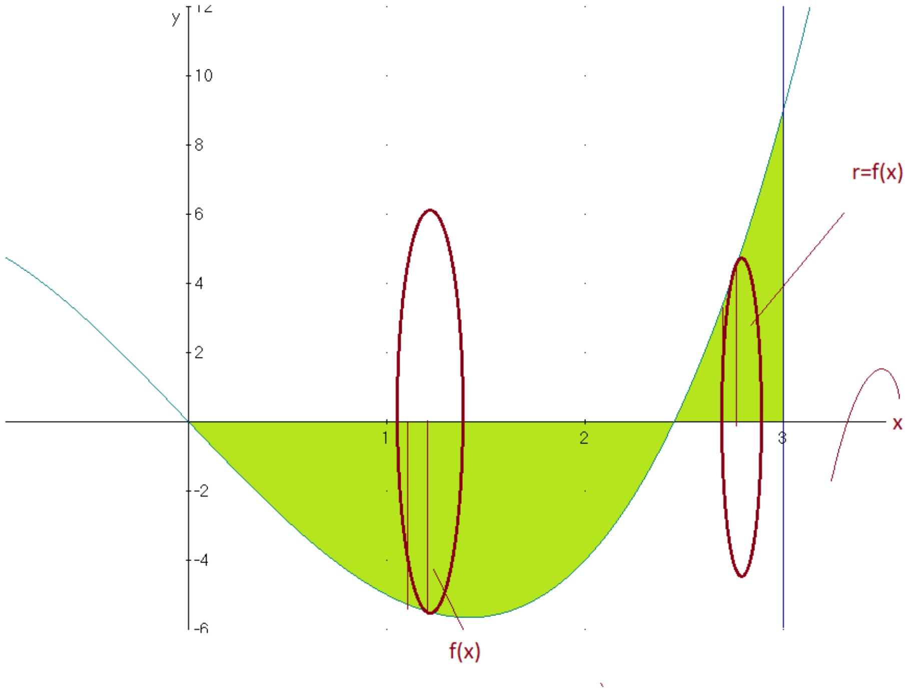
Solo $x=\sqrt{6}$ está dentro del intervalo $[0,3]$

El intervalo se divide, como $[0,3]=\left[0,\sqrt{6}\right]\cup\left[\sqrt{6},3\right]$

Gráfica de la región



Un rectángulo en cada intervalo de la región se hace girar con respecto al eje y



Empecemos por calcular el volumen en $\left[0,\sqrt{6}\right]$.

$$V_1 = \int_0^{\sqrt{6}} \pi\left(x^3-6x\right)^2 dx = \int_0^{\sqrt{6}} \pi\left(x^6-12x^4+36x^2\right)dx = \pi\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{12}{5}x^5+12x^3\right)\Bigg|_0^{\sqrt{6}}$$

$$= \pi\left[\left(\frac{1}{7}\left(\sqrt{6}\right)^7-\frac{12}{5}\left(\sqrt{6}\right)^5+12\left(\sqrt{6}\right)^3\right)-0\right] = \pi\left(\frac{1}{7}\left(\sqrt{6}\right)^6\sqrt{6}-\frac{12}{5}\left(\sqrt{6}\right)^4\sqrt{6}+12\left(\sqrt{6}\right)^2\sqrt{6}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{1}{7}(6)^3\sqrt{6}-\frac{12}{5}(6)^2\sqrt{6}+12(6)\sqrt{6}\right) = \pi\left(\frac{1}{7}(216)\sqrt{6}-\frac{12}{5}(36)\sqrt{6}+12(6)\sqrt{6}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{216}{7}\sqrt{6}-\frac{432}{5}\sqrt{6}+72\sqrt{6}\right) = \frac{576}{35}\sqrt{6}\pi$$

Ahora, calculemos el volumen en $\left[\sqrt{6},3\right]$

$$V_2=\int_{\sqrt{6}}^{3}\pi\left(x^3-6x\right)^2dx=\int_{\sqrt{6}}^{3}\pi\left(x^6-12x^4+36x^2\right)dx=\pi\left(\frac{1}{7}x^7-\frac{12}{5}x^5+12x^3\right)_{\sqrt{6}}^{3}$$

$$=\pi\left[\left(\frac{1}{7}(3)^7-\frac{12}{5}(3)^5+12(3)^3\right)-\left(\frac{1}{7}\left(\sqrt{6}\right)^7-\frac{12}{5}\left(\sqrt{6}\right)^5+12\left(\sqrt{6}\right)^3\right)\right]$$

$$=\pi\left[\left(\frac{2187}{7}-\frac{2916}{5}+324\right)-\left(\frac{216}{7}\sqrt{6}-\frac{432}{5}\sqrt{6}+72\sqrt{6}\right)\right]$$

$$=\pi\left(\frac{1863}{35}-\frac{576}{35}\sqrt{6}\right)$$

$$V=\frac{576}{35}\sqrt{6}\pi+\pi\left(\frac{1863}{35}-\frac{576}{35}\sqrt{6}\right)=\frac{1863}{35}\pi$$

Se tiene

$V = V_1 + V_2 = \int_0^{\sqrt{6}} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx + \int_{\sqrt{6}}^{3} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx = \int_0^{3} \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx$ por las propiedades de la integral, luego es posible calcular el volumen como

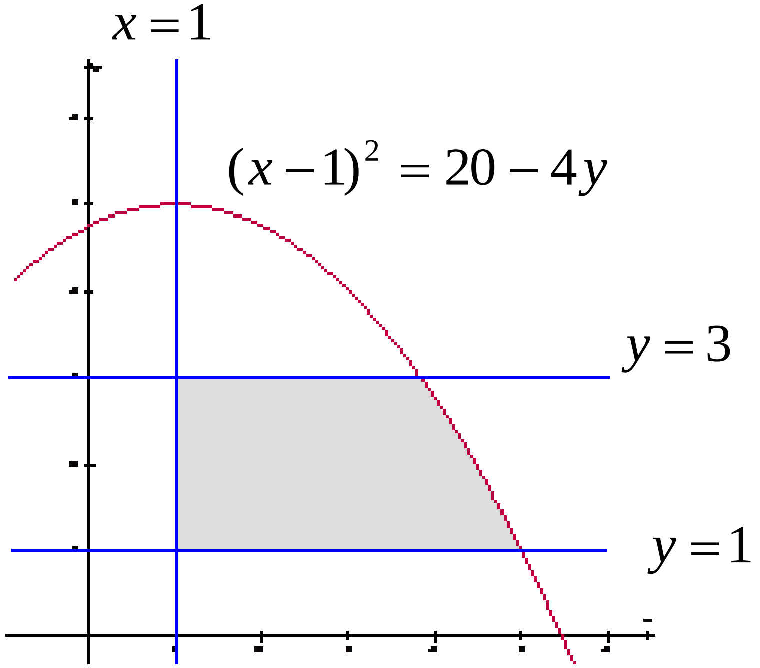
$$V = \int_0^3 \pi\left(x^3 - 6x\right)^2 dx = \int_0^3 \pi\left(x^6 - 12x^4 + 36x^2\right) dx$$

$$= \pi\left(\frac{1}{7}x^7 - \frac{12}{5}x^5 + 12x^3\right)\Bigg|_0^3 = \pi\left[\left(\frac{1}{7}(3)^7 - \frac{12}{5}(3)^5 + 12(3)^3\right) - 0\right] = \frac{1863}{35}\pi$$

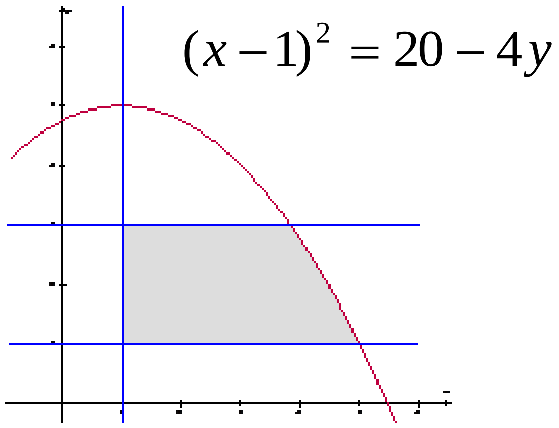
$$V = \frac{1863}{35}\pi\ u^3$$

Ejemplo 2.

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor de la recta $x=1$, la región limitada por la curva $(x-1)^2 = 20-4y$ y las rectas $x=1$, $y=1$, $y=3$.



Tenemos lo siguiente



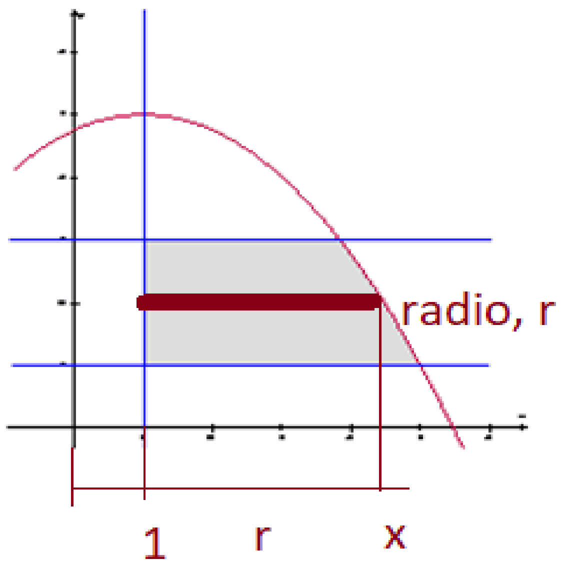
Región y

Funciones: parábola y la recta $x=1$

Límites: las rectas $y=1$, $y=3$.

Despejando x, $x=\sqrt{20-4y}+1$

Representamos un rectángulo, en este caso horizontal porque la región es de variable y



Para determinar el radio,

tenemos $1+r=x \;\Rightarrow\; r=x-1$

$$\Rightarrow\; r=\left(\sqrt{20-4y}+1\right)-1=\sqrt{20-4y}=\sqrt{4(5-y)}=2\sqrt{5-y}$$

El volumen del sólido de revolución estará dado por:

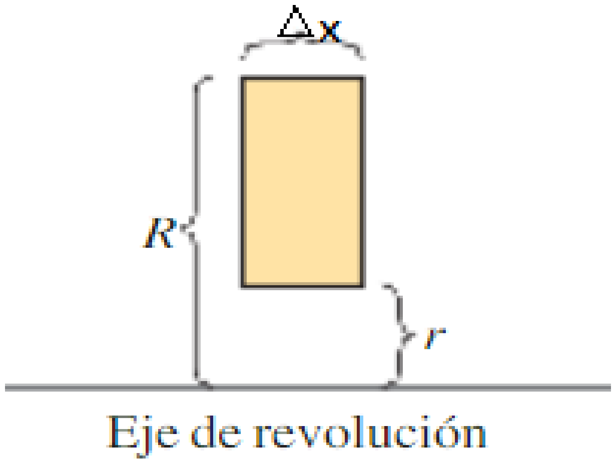
$$V=\int_1^3 \pi\left(2\sqrt{5-y}\right)^2 dy=\pi\int_1^3 4(5-y)\,dy=4\pi\int_1^3 (5-y)\,dy=4\pi\left(5y-\frac{1}{2}y^2\right)_1^3$$

$$=4\pi\left[\left(5(3)-\frac{1}{2}(3)^2\right)-\left(5-\frac{1}{2}\right)\right]=4\pi\left(15-\frac{9}{2}-5+\frac{1}{2}\right)=4\pi(6)=24\pi$$

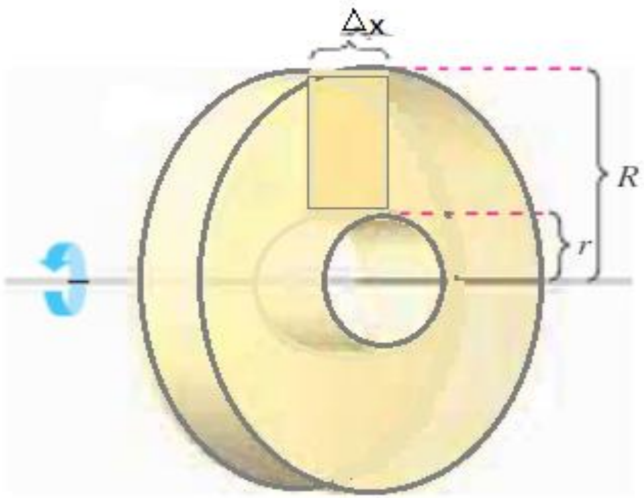
$$V=24\pi\ u^3$$

Método de las arandelas

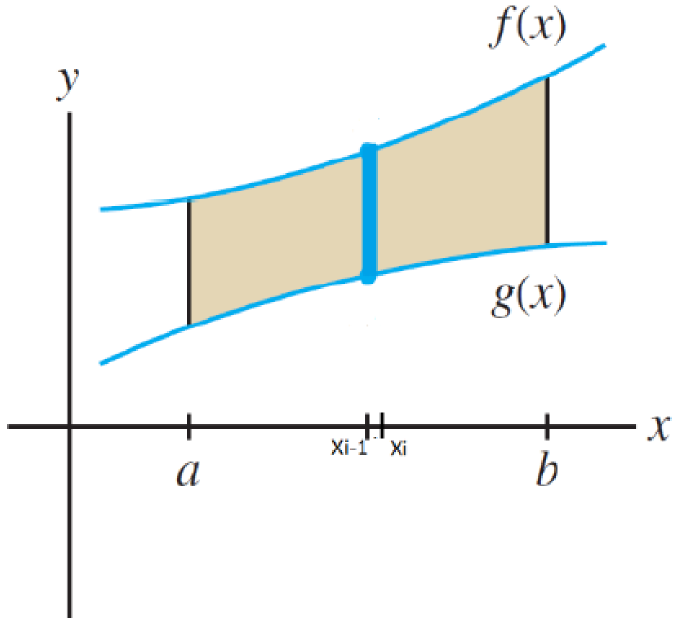
En este método tomamos un rectángulo y se hace girar en torno a un eje que esta fuera de la región, teniendo un rectángulo como el que se muestra.

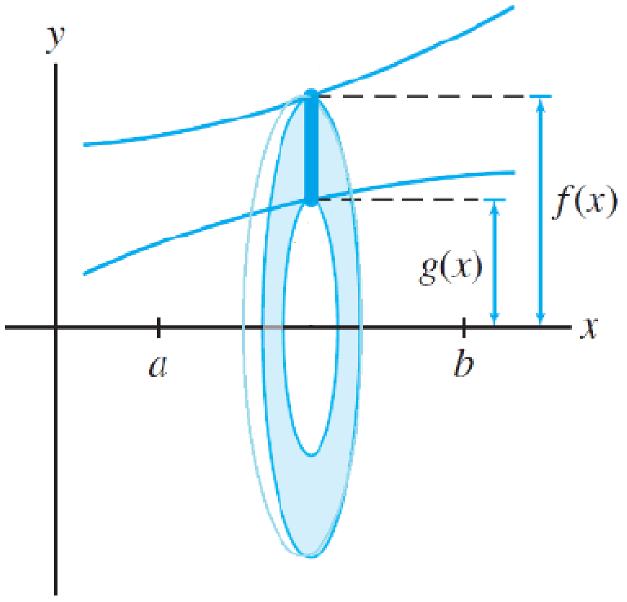


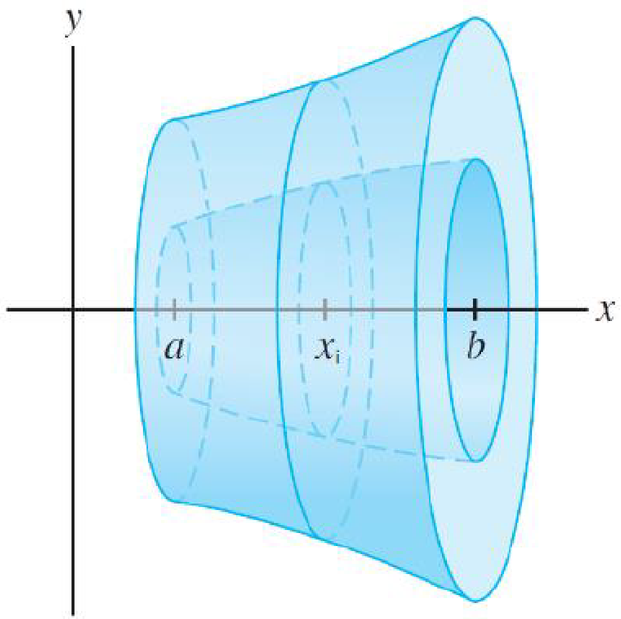
Lo que nos lleva a la arandela siguiente



Dada la región limitada por funciones $f(x)$, $g(x)$ con $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$. Se representa el rectángulo sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, la arandela que se obtiene al girar con respecto a eje x, sobre el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, y el sólido que se obtiene al girar la región con respecto al eje x.







El volumen del sólido de revolución de la arandela se obtiene si determinamos los volúmenes del sólido de revolución que se forma al girar la función $f(x)$ y $g(x)$ con respecto al eje x con el método de los discos, y los restamos, esto es $V = V_f - V_g$

$$V_f = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx \text{ y } V_g = \int_a^b \pi\left(g(x)\right)^2 dx$$

Así

$$V = V_f - V_g = \int_a^b \pi\left(f(x)\right)^2 dx - \int_a^b \pi\left(g(x)\right)^2 dx = \int_a^b \pi\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx$$

Con lo cual

$$V = \int_a^b \pi\left[\left(f(x)\right)^2 - \left(g(x)\right)^2\right] dx$$

Definición: Sea R la región delimitada por las funciones continuas $f(x)$ y $g(x)$ con $f(x) \geq g(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje x es

$$V = \int_a^b \pi \left[\left(f(x) \right)^2 - \left(g(x) \right)^2 \right] dx$$

donde $f(x)$ es el radio mayor de la arandela y $g(x)$ el radio menor de la arandela.

Si R es una región de y, se tiene como definición

Definición: Sea R la región delimitada por las funciones continuas $f(y)$ y $g(y)$ con $f(y) \geq g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje y es

$$V = \int_c^d \pi\left[\left(f(y)\right)^2 - \left(g(y)\right)^2\right]dy$$

donde $f(y)$ es el radio mayor de la arandela y $g(y)$ el radio menor de la arandela.

En general se puede determinar el volumen de un sólido de revolución usando el radio del disco que se forma al girar un rectángulo de la región, como sigue

$V = \int_a^b \pi \left[R^2 - r^2 \right] dx$ para una región x.

Y, $V = \int_c^d \pi \left[R^2 - r^2 \right] dy$ para una región y.

Con R radio mayor de la arandela y r radio menor de la arandela.

Ejemplo 3.

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $y = x$, alrededor del eje x.

Puntos de intersección

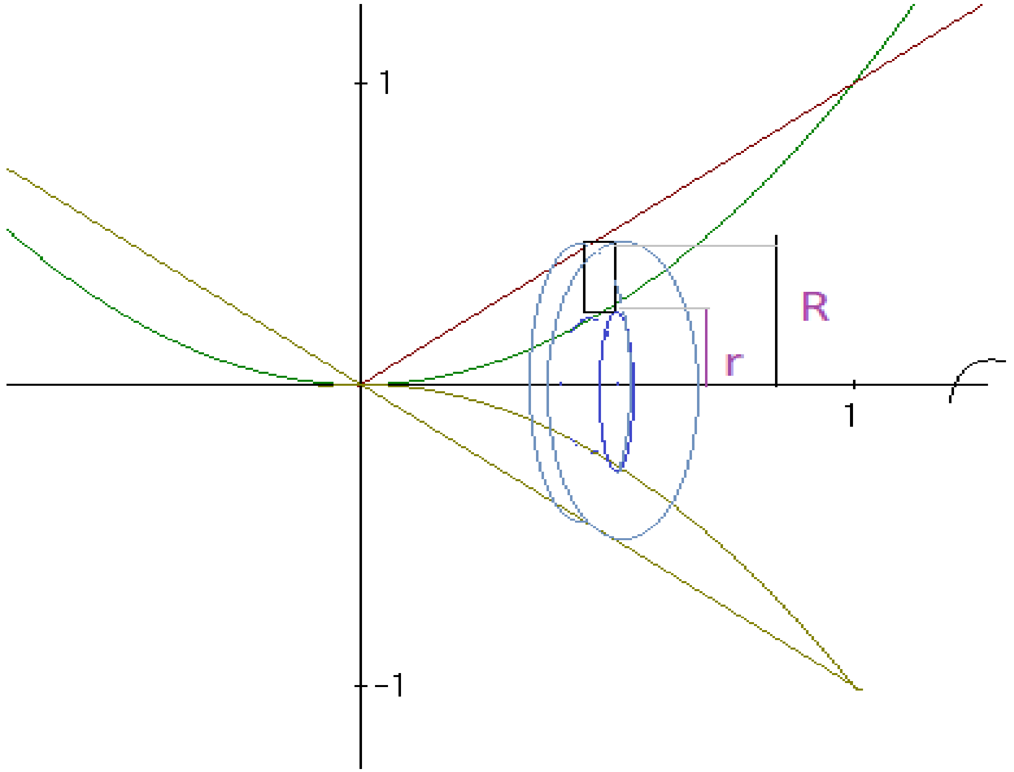
$$y = x^2 \text{ y } y = x$$

$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 1$$

Gráfica de la región



Tenemos

Función mayor $f(x) = x$

Función menor $g(x) = x^2$,

Decimos que $R = x$ y $r = x^2$

Límites $x = 0$ a $x = 1$

Calculando el volumen

$$V = \int_0^1 \pi\left((x)^2 - (x^2)^2\right)dx = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \pi\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right)\Big|_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - 0 = \frac{2}{15}\pi$$

$$V = \frac{2}{15}\pi\ u^3$$

Ejemplo 4.

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $y = x$, alrededor del eje y.

Las funciones son,

$$y = x^2 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{y}\,,$$

como es en el primer cuadrante $x = \sqrt{y}$

y, $y = x \;\Rightarrow\; x = y\,.$

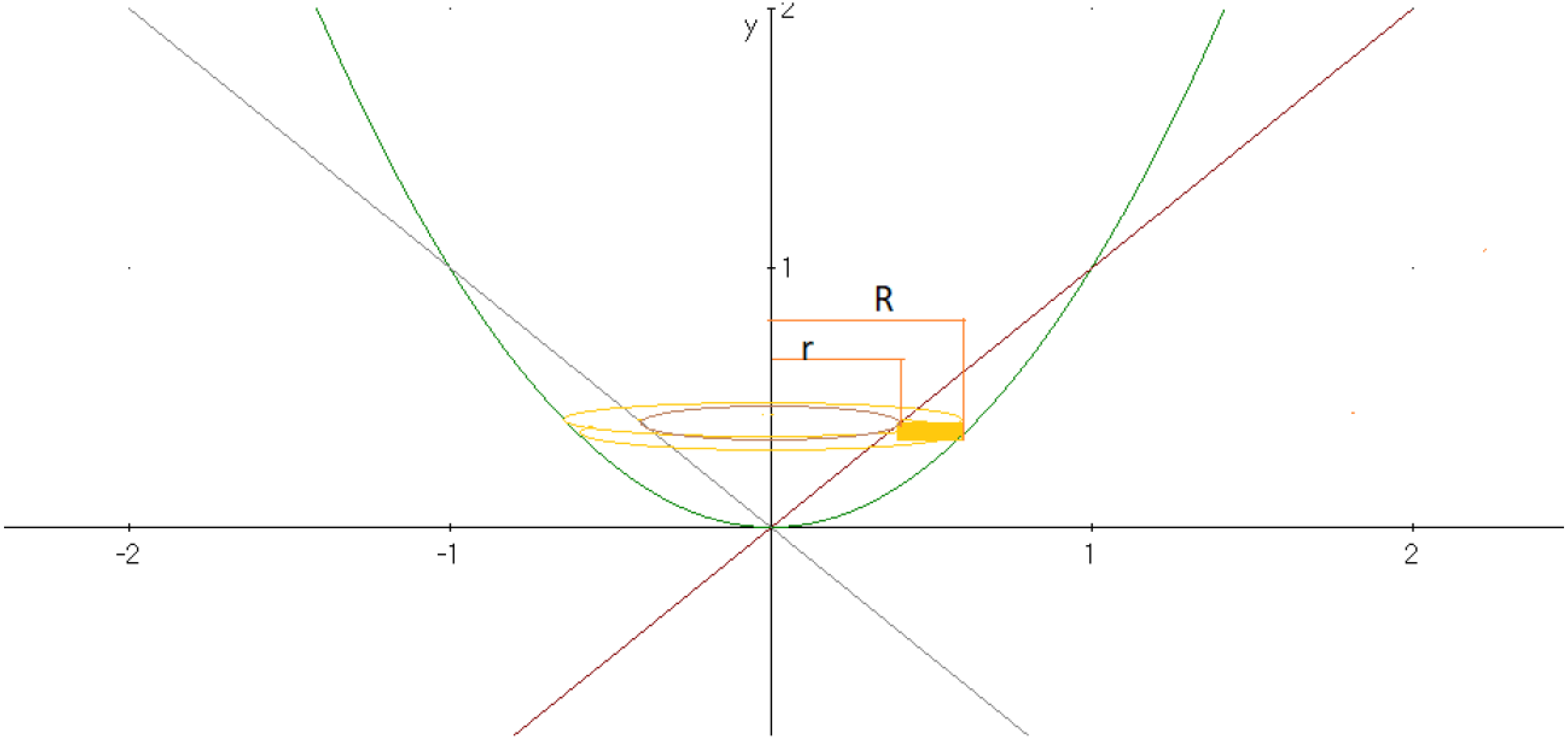
Puntos de intersección.

$$x = \sqrt{y} \text{ y } x = y$$

$$\sqrt{y} = y \;\Rightarrow\; y = y^2 \;\Rightarrow\; y - y^2 = 0$$

$$\Rightarrow\; y(1-y) = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \text{ y } y = 1$$

Gráfica de la región



Tenemos

Función mayor $f\left(y\right)=\sqrt{y}$

Función menor $g\left(y\right)=y$

Decimos que $R=\sqrt{y}$ y $r=y$

Límites $x=0$ a $x=1$

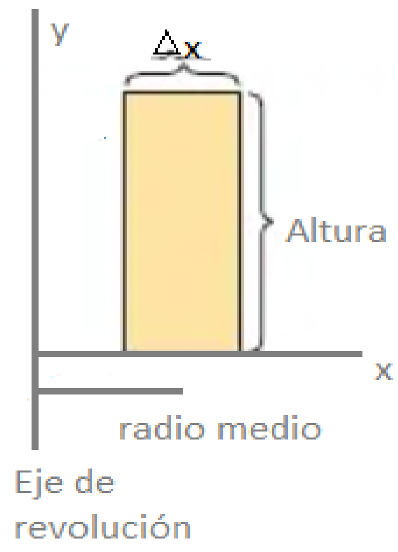
Calculando el volumen

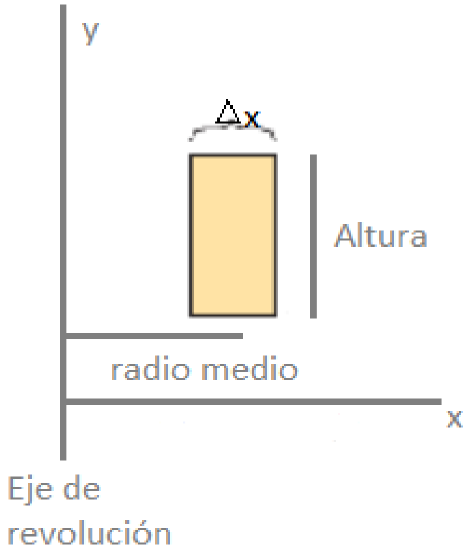
$$V=\int_0^1 \pi\left(\left(\sqrt{y}\right)^2-\left(y\right)^2\right)dy=\pi\int_0^1\left(y-y^2\right)dy=\pi\left(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{3}y^3\right)_0^1=\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0=\frac{1}{6}\pi$$

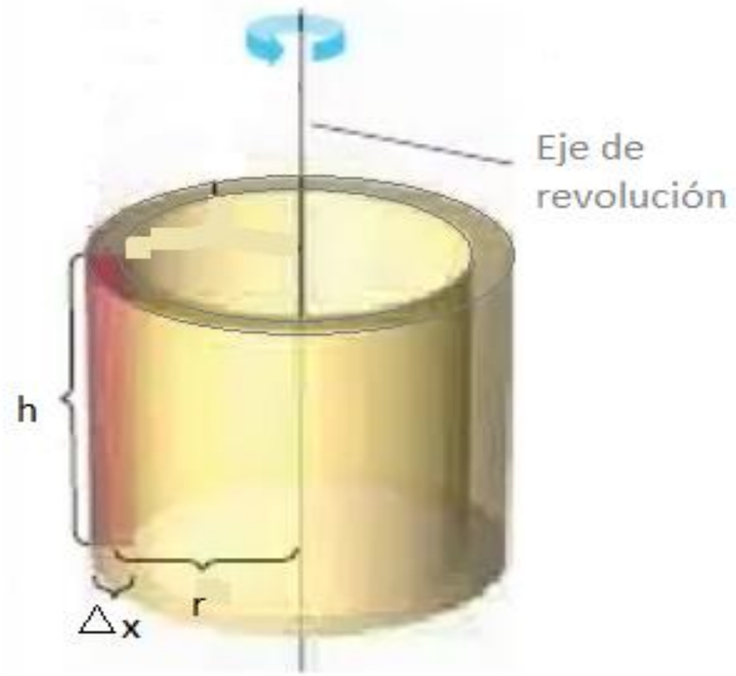
$$V=\frac{1}{6}\pi\ u^3$$

MÉTODO DE LAS ENVOLVENTES CILINDRICAS

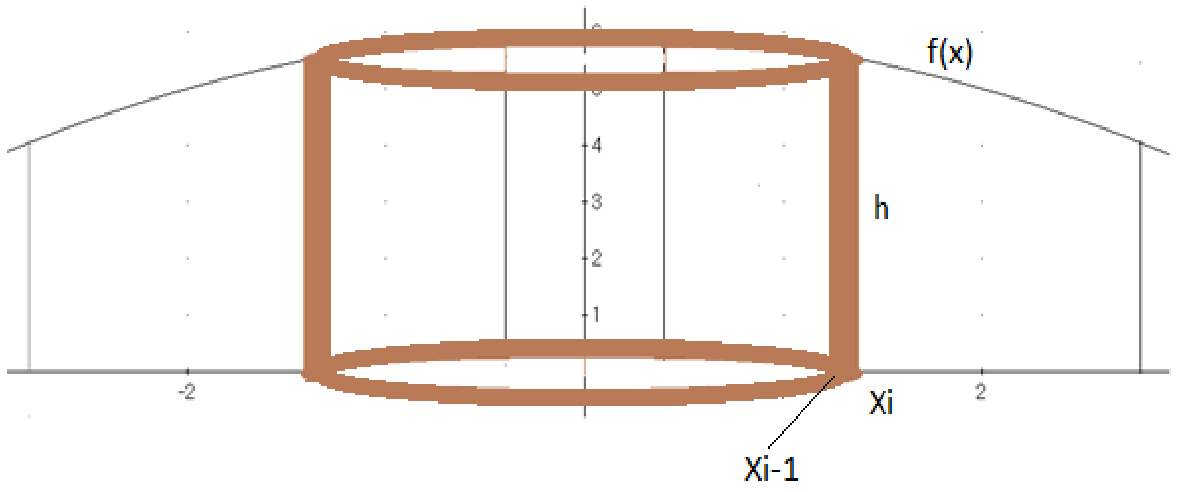
En este método tenemos un rectángulo como los que se muestran a continuación que giran con respecto al eje *y*, al girar este rectángulo se genera una envolvente o capa cilíndrica.



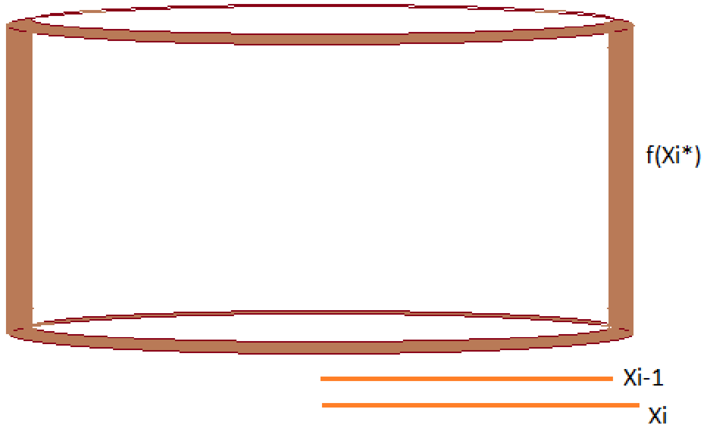




Sea R la región limitada por la función continua y positiva $f(x)$, el eje x y las rectas $x=a$ y $x=b$, tomemos una partición del intervalo $[a,b]$ de n subintervalos de longitud Δx, y el rectángulo que se forma en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, de base Δx y altura $f(x_i*)$, hacemos girar el rectángulo con respecto al eje y.



Se genera la envolvente siguiente



Luego el volumen V_i de la envolvente es:

$$V_i = V_{ext} - V_{\text{int}} = \pi x_i^2 f\left(x_i^*\right) - \pi x_{i-1}^2 f\left(x_i^*\right) = \pi f\left(x_i^*\right)\left(x_i^2 - x_{i-1}^2\right)$$

$$= \pi f\left(x_i^*\right)\left(x_i + x_{i-1}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = \pi f\left(x_i^*\right)\left(x_i + x_{i-1}\right)\Delta x$$

$$= 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

Sumando los volúmenes que se generan con las envolventes en cada intervalo, se tiene

$$V \approx 2\pi f\left(x_1^*\right)\left(\frac{x_1 + x_0}{2}\right)\Delta x + 2\pi f\left(x_2^*\right)\left(\frac{x_2 + x_1}{2}\right)\Delta x + \cdots + 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x + \cdots$$

$$+ 2\pi f\left(x_n^*\right)\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)\Delta x$$

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

Tomando el limite cuando n tiende a infinito

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\pi f\left(x_i^*\right)\left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2}\right)\Delta x$$

Luego

$$V=\int_a^b 2\pi f(x)\left(\frac{x+x}{2}\right)dx=\int_a^b 2\pi f(x)\,x\,dx=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua *f* para $0 \le a < b$, el eje *x* y las rectas $x=a$ y $x=b$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *y*, es

$$V=\int_a^b 2\pi x f(x)\,dx$$

donde *x* es el radio de la envolvente y $f(x)$ es la altura de la misma.

Si R es una región de *y*, se tiene como definición

Definición: Sea R la región delimitada por la función continua *f* para $0 \leq c < d$, el eje *y* y las rectas $y = c$ y $y = d$. El volumen del sólido que se obtiene al girar la región R con respecto al eje *x*, es

$$V = \int_{c}^{d} 2\pi y f(y)\, dy$$

donde *y* es el radio de la envolvente y $f(y)$ es la altura de la misma.

En general se puede determinar el volumen de un sólido de revolución por el método de envolventes cilíndricas usando el radio y la altura de la envolvente que se forma al girar un rectángulo de la región, como sigue

$V = \int_a^b 2\pi(radio)(altura)\,dx$ para una región x.

Y, $V = \int_c^d 2\pi(radio)(altura)\,dy$ para una región y.

Ejemplo 5.

Calcular el volumen del sólido de revolución generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $y = x$, alrededor del eje y. Usar el método de envolventes cilíndricas.

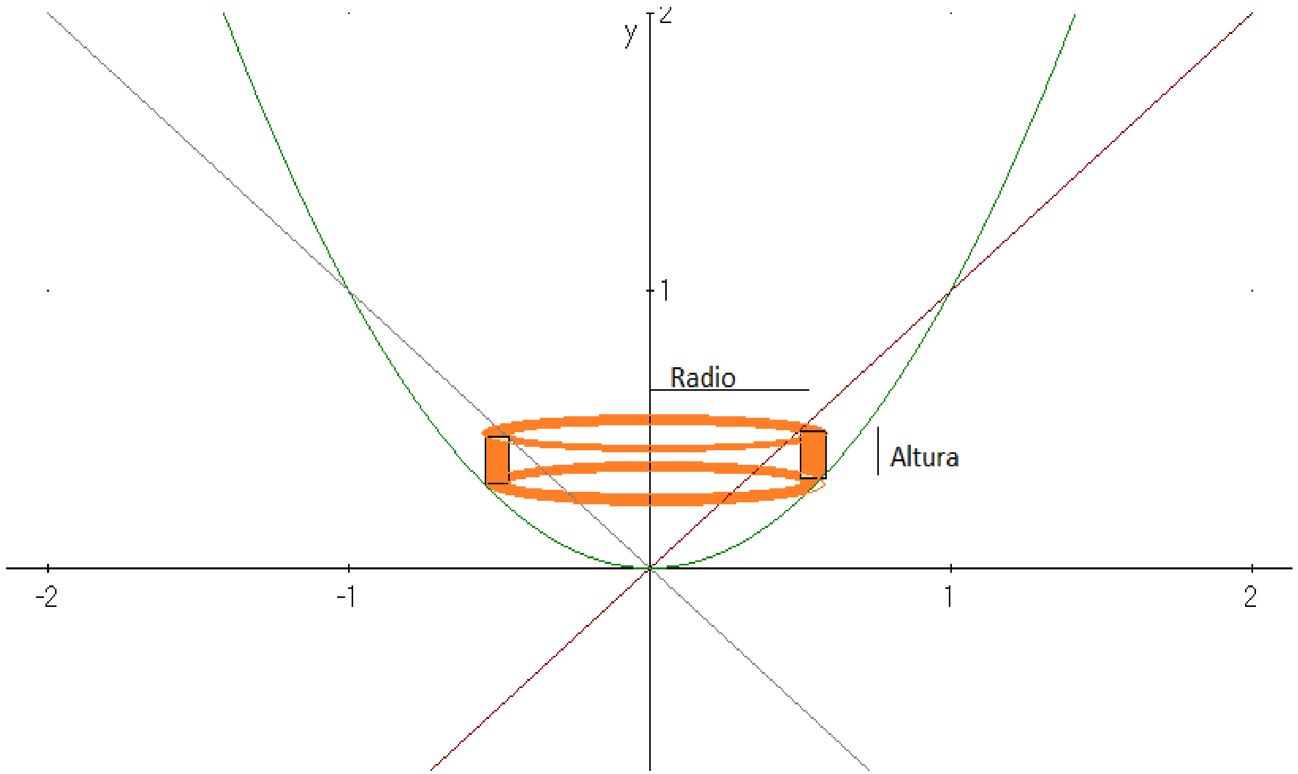
Usamos Región x y eje de giro y

Punto de intersección

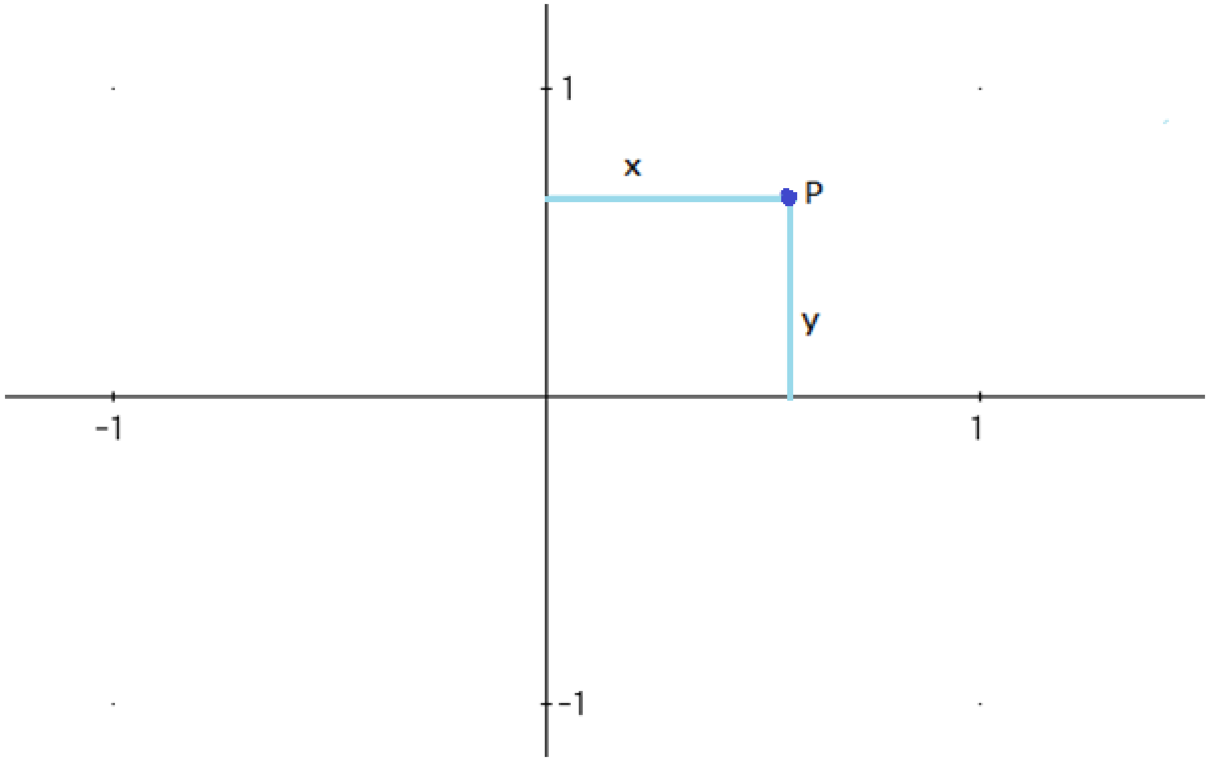
$$y = x^2 \text{ y } y = x$$

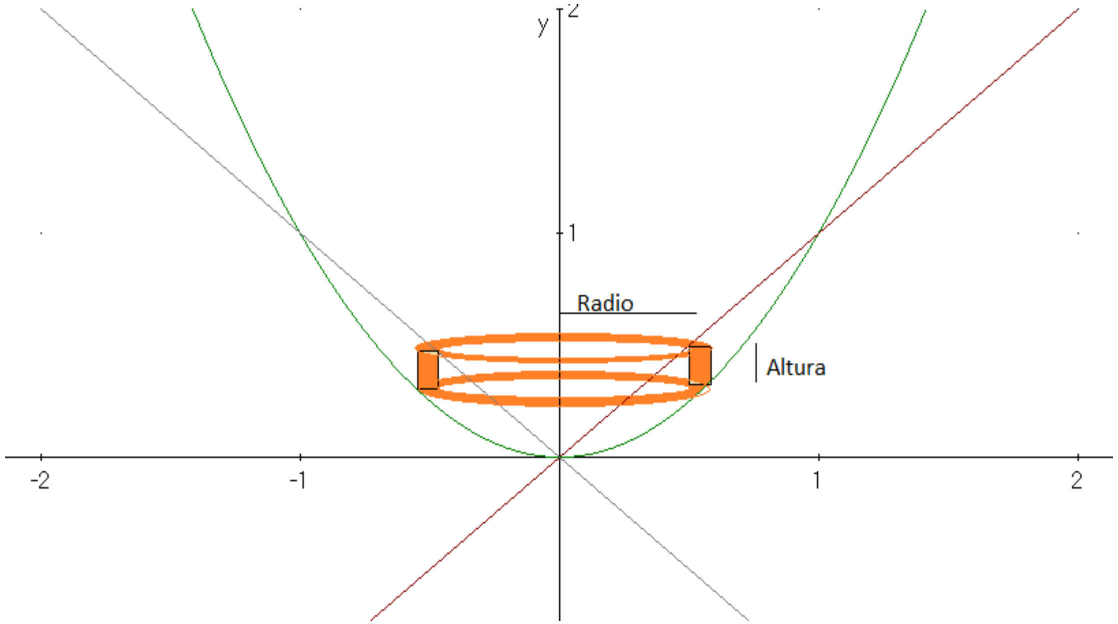
$$x^2 = x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 1$$

Gráfica de la región



Recordemos que cuando se tiene un punto $P(x, y)$, x es la distancia horizontal desde el eje y hasta el punto y y es la distancia vertical desde el eje x hasta el punto, tal y como se indica en la gráfica.

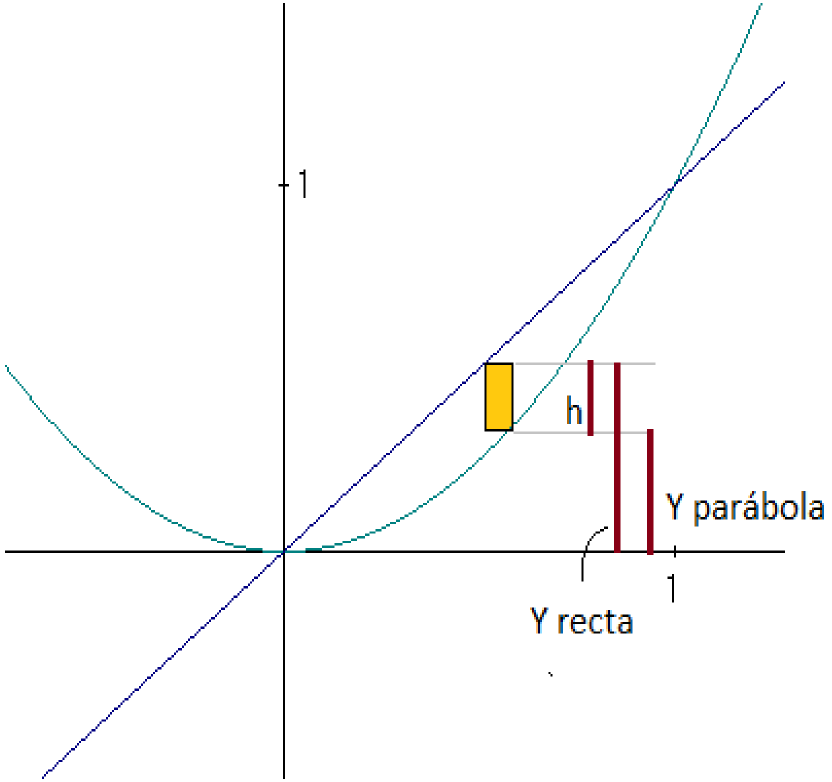




Al obtener la envolvente, notamos que el radio de ésta, es la distancia horizontal desde el eje y al rectángulo, luego esta es igual a x

Luego r = x

Determinemos la altura de la envolvente,



Usemos y_p para la Y parábola y y_r para la Y recta

Las distancias conocidas son las que se tienen hacia el eje x, estas son y_p y y_r y la altura h se determina viendo la relación que se cumple, esta es $y_p + h = y_r$ de donde $h = y_r - y_p$, como la región es en x, la altura debe ser en variable x. así

$$h = y_r - y_p = x - x^2$$

Calculando el volumen

$$V = \int_0^1 2\pi x\left(x - x^2\right)dx = 2\pi\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx = 2\pi\left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - 0 = 2\pi\left(\frac{1}{12}\right) = \frac{1}{6}\pi$$

$$V = \frac{1}{6}\pi\ u^3$$

Ejemplo 6.

Determinar el volumen del sólido que se obtiene al girar la región determinada por $2y = x + 4$, $y = x$ y $x = 0$ alrededor de la recta $x = 4$.

La región está acotada por tres rectas, si tomamos la región de variable x, entonces $x = 0$ es un límite y no una función de x, determinemos la intersección de ellas.

Punto de intersección

$2y = x + 4$ y $y = x$

$$2y = x + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + 2$$

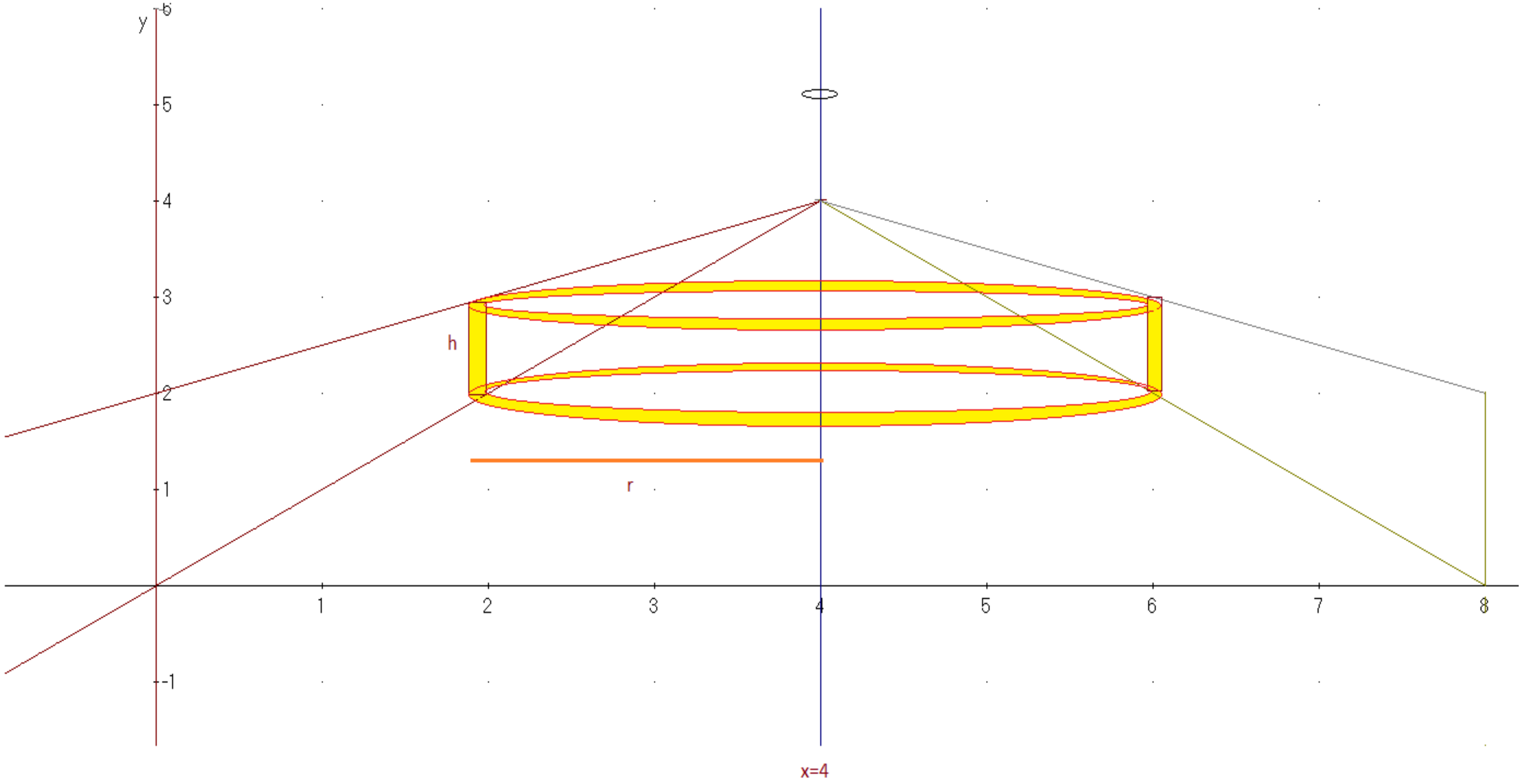
Con lo cual

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \text{ y } y = x \Rightarrow \frac{1}{2}x + 2 = x \Rightarrow \frac{1}{2}x - x = -2 \Rightarrow -\frac{1}{2}x = -2$$

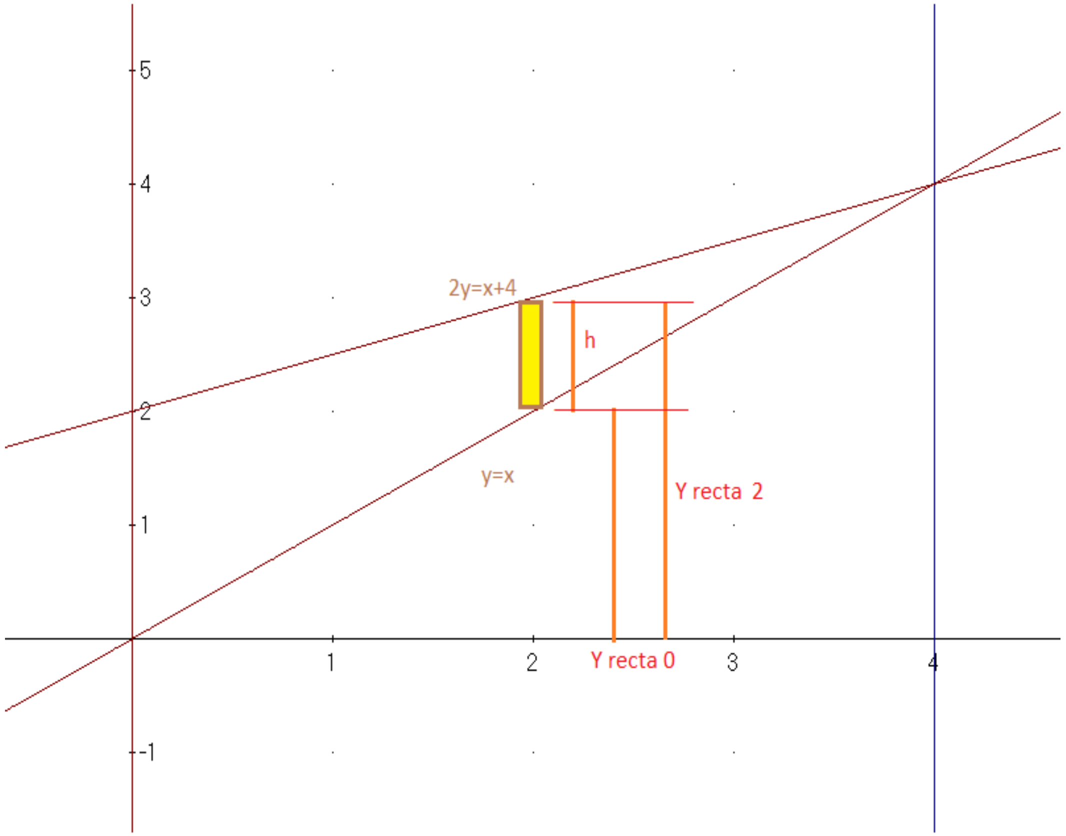
$$x = -2(-2) = 4$$

Punto de intersección $(4,4)$

Gráfica de la región



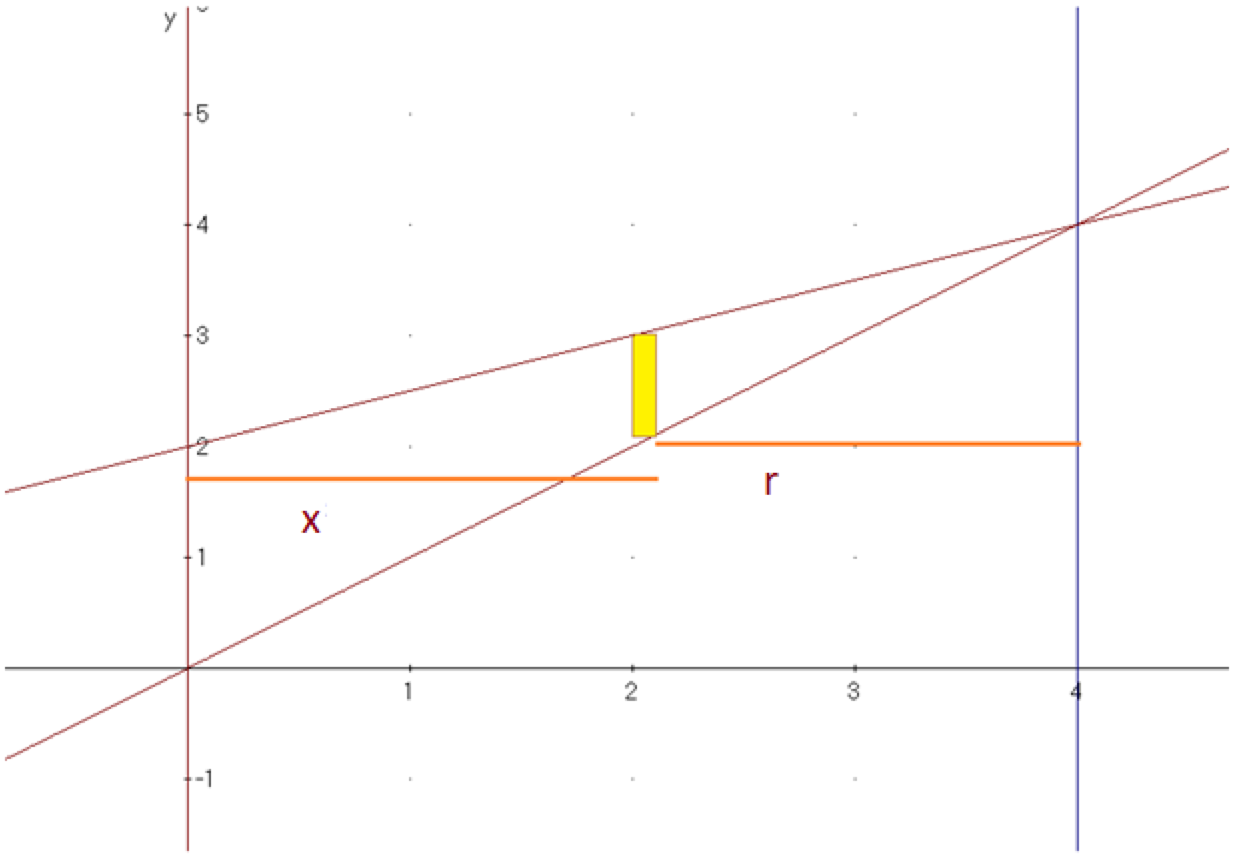
Altura de la envolvente



La altura está determinada por la diferencia de las dos rectas, si $y_{R0} = x$ y $y_{R2} = \frac{1}{2}x + 2$ se tiene $y_{R0} + h = y_{R2}$, de donde

$$h = y_{R2} - y_{R0} = \frac{1}{2}x + 2 - x = -\frac{1}{2}x + 2$$

Radio de la envolvente



El radio no se obtiene de manera directa con la variable, en este caso tenemos $x + r = 4$, por lo que $r = 4 - x$

Determinando el volumen

$$V=\int_0^4 2\pi(radio)(altura)dx=\int_0^4 2\pi(4-x)\left(-\frac{1}{2}x+2\right)dx=2\pi\int_0^4\left(-2x+8+\frac{1}{2}x^2-2x\right)dx$$

$$V=2\pi\int_0^4\left(\frac{1}{2}x^2-4x+8\right)dx=2\pi\left(\frac{1}{6}x^3-2x^2+8x\right)_0^4=2\pi\left(\frac{1}{6}(4)^3-2(4)^2+8(4)\right)-0$$

$$V=2\pi\left(\frac{1}{6}(64)-2(16)+8(4)\right)=2\pi\left(\frac{32}{3}-32+32\right)=\frac{64}{3}\pi$$

$$V=\frac{64}{3}\pi\ u^3$$