VOLÚMENES POR SECCIONES TRANSVERSALES

Hay sólidos que no siempre se obtienen del giro de una región con respecto a un eje, sino que se parte del cuerpo sólido.

El volumen de estos sólidos se determinará con el método de Secciones Transversales.

Este método se basa en tomar un cuerpo sólido y ubicarlo con respecto a uno de sus ejes, horizontal o vertical, y cortarlo en “rebanadas”, calcular el volumen de cada rebanada y sumarlas.

Podemos tener sólidos regulares conocidos, como lo es un cono o una pirámide y sólidos no regulares, como lo es un pepino.

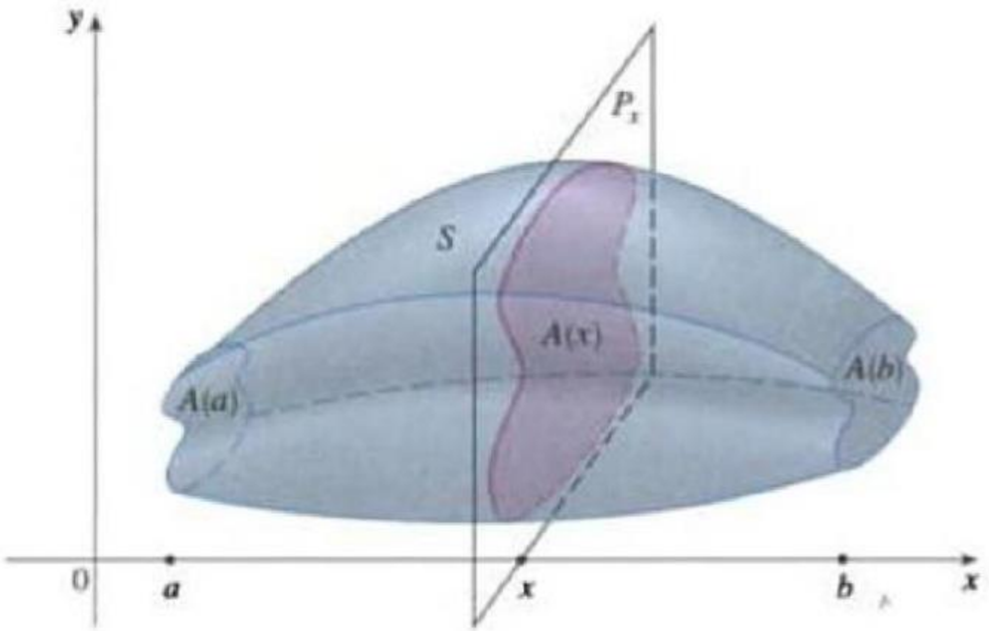
Usando el método se corta el sólido en rebanas, en particular el pepino se obtendría como sigue

Dado un sólido S lo ubicamos en el plano con eje del sólido el eje x.

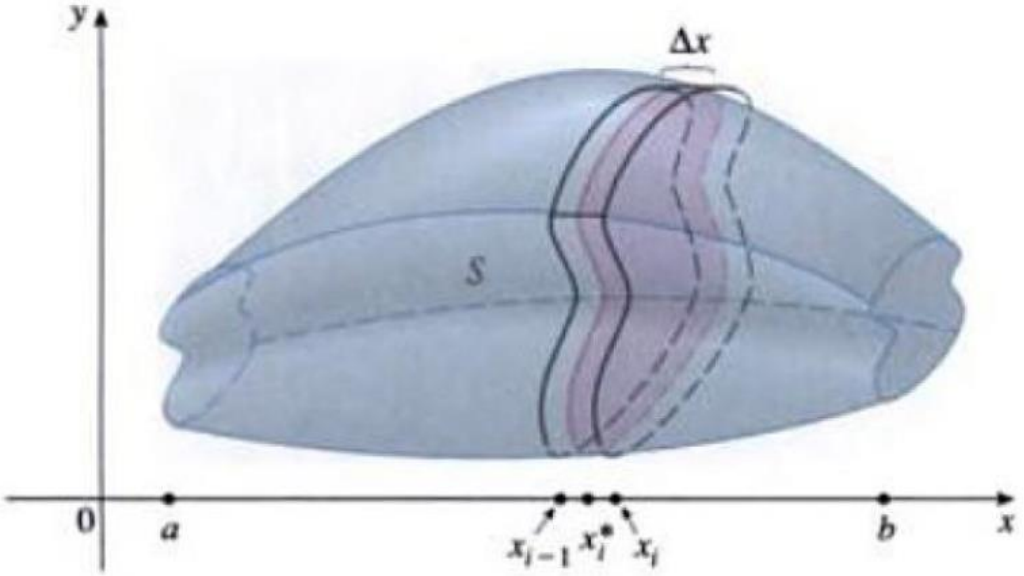
Tomamos la sección transversal que es perpendicular al eje x y que pasa por el punto x

El sólido se encuentra en donde $[a, b]$

El área de la sección transversal es $A(x)$ y varia conforme lo hace x.



Si se divide el sólido S en n rebanadas de ancho igual a Δx, esto es una partición del intervalo [a, b] a lo largo del eje x.



Consideremos el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y determinemos el volumen de la i-ésima rebanada V_i.

El volumen V_i de la rebanada es igual al área de la sección transversal $A_i(x)$ por su altura Δx, esto es

$$V_i(x) = A_i(x)\Delta x$$

Calculando los volúmenes para cada subintervalo y sumándolos, tenemos

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito, se tiene que el volumen del sólido es

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)\,dx \,.$$

Definición: El volumen del sólido S con área de la sección transversal igual a $A(x)$, desde $x = a$ hasta $x = b$, perpendicular al eje x es

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

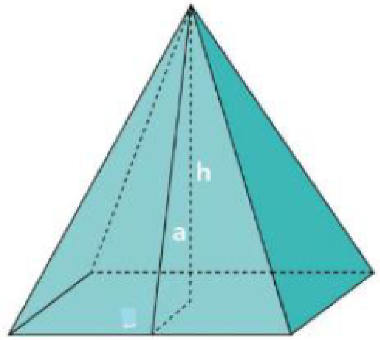
Si se toma la sección transversal perpendicular al eje y

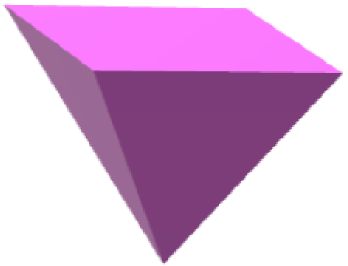
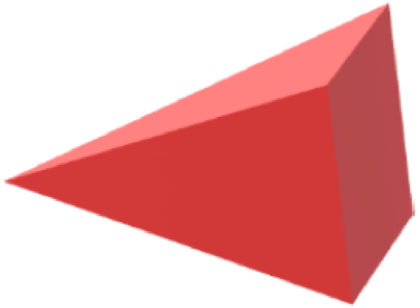
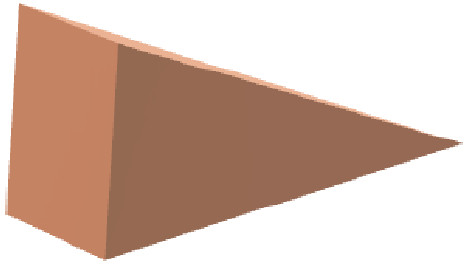
Definición: El volumen del sólido S con área de la sección transversal igual a $A(y)$, desde $y = c$ hasta $y = d$, perpendicular al eje y es

$$V = \int_c^d A(y)dy$$

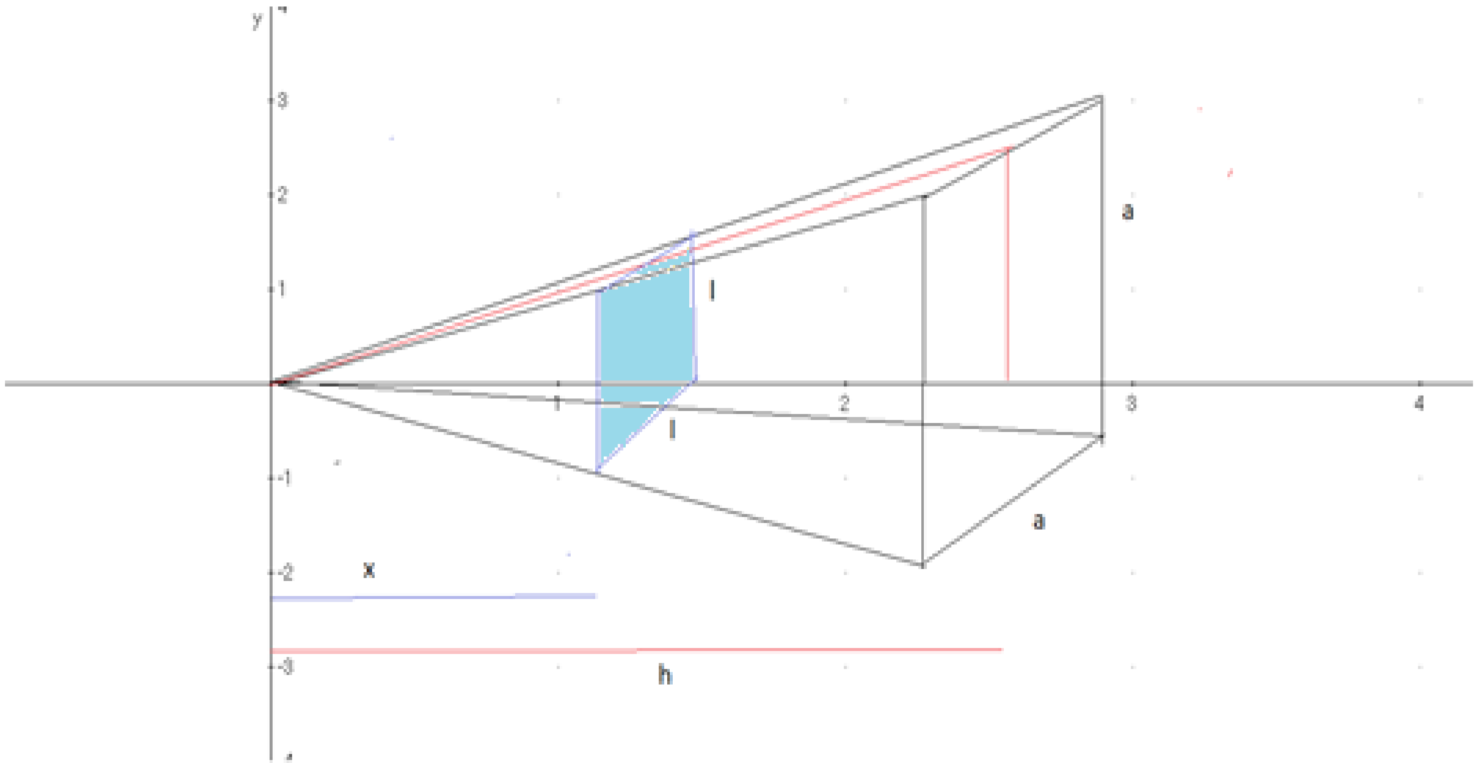
Ejemplo 1.

La pirámide se puede tener de diferentes formas



Consideremos la pirámide de manera horizontal y hacia la derecha, esto para poder ubicar el eje x, como el eje de la pirámide y en la parte positiva, por lo cual se encuentra en el centro de ella sobre la base. Esta se tiene en la figura y tracemos la sección transversal perpendicular al eje x, a una distancia x del origen, esta sección es un cuadrado de lado l.

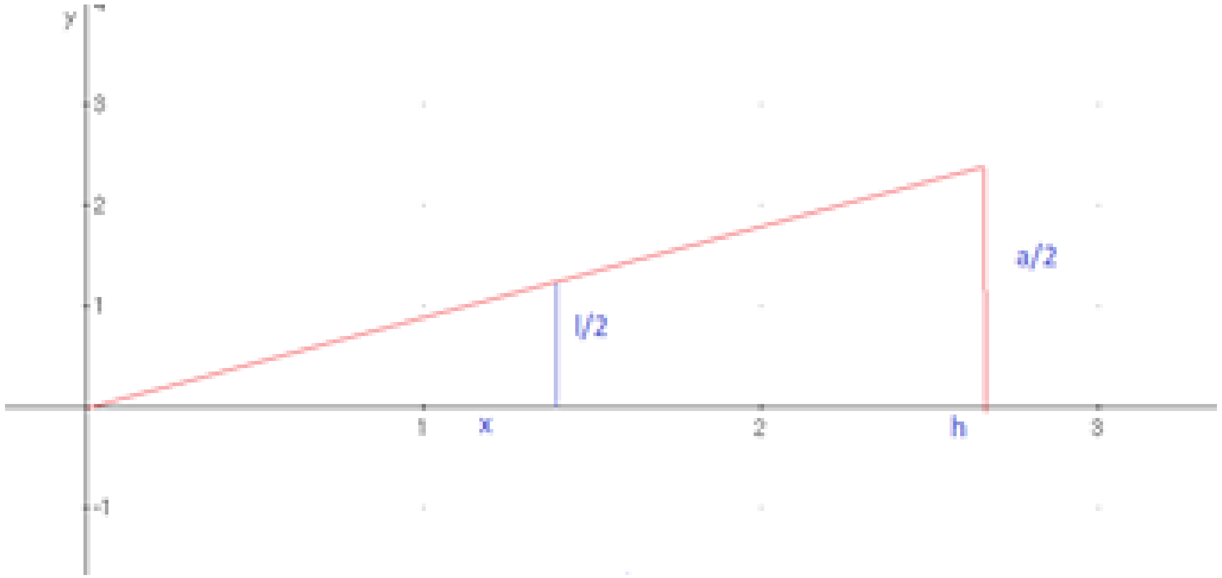


Hay que determinar el área de la sección transversal, como es un cuadrado de lado l,

$$A(l) = l^2$$

La sección se encuentra a una distancia x del origen y se puede tomar de o a h.

Tomemos el triángulo que se forma del origen a la base de la pirámide que pasa por la sección transversal



Por triángulos semejantes tenemos

$$\frac{x}{h}=\frac{l/2}{a/2} \text{ de donde } \frac{x}{h}=\frac{l}{a} \text{ y } l=\frac{ax}{h}$$

De donde $A(x)=\left(\frac{ax}{h}\right)^2=\frac{a^2}{h^2}x^2$

Así $V=\int_0^h \frac{a^2}{h^2}x^2dx=\frac{a^2}{h^2}\int_0^h x^2dx=\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}x^3\right)_0^h$

$$=\frac{a^2}{h^2}\left(\frac{1}{3}h^3-0\right)_0^h=\frac{1}{3}a^2h$$

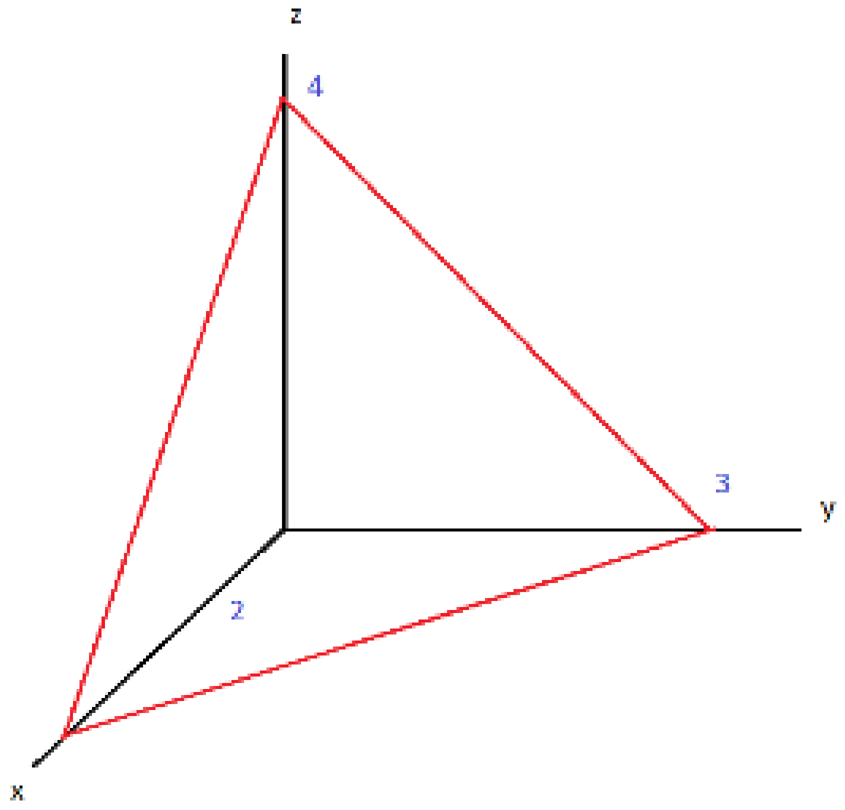
Ejemplo 2.

Un tetraedro tiene tres caras perpendiculares entre sí y tres aristas también perpendiculares de 2, 3 y 4 cm de longitud respectivamente. Calcular el volumen.

Un tetraedro es un poliedro de cuatro caras donde cada cara es un triángulo.

Tiene tres caras perpendiculares y tres aristas perpendiculares esto es, tres lados perpendiculares.

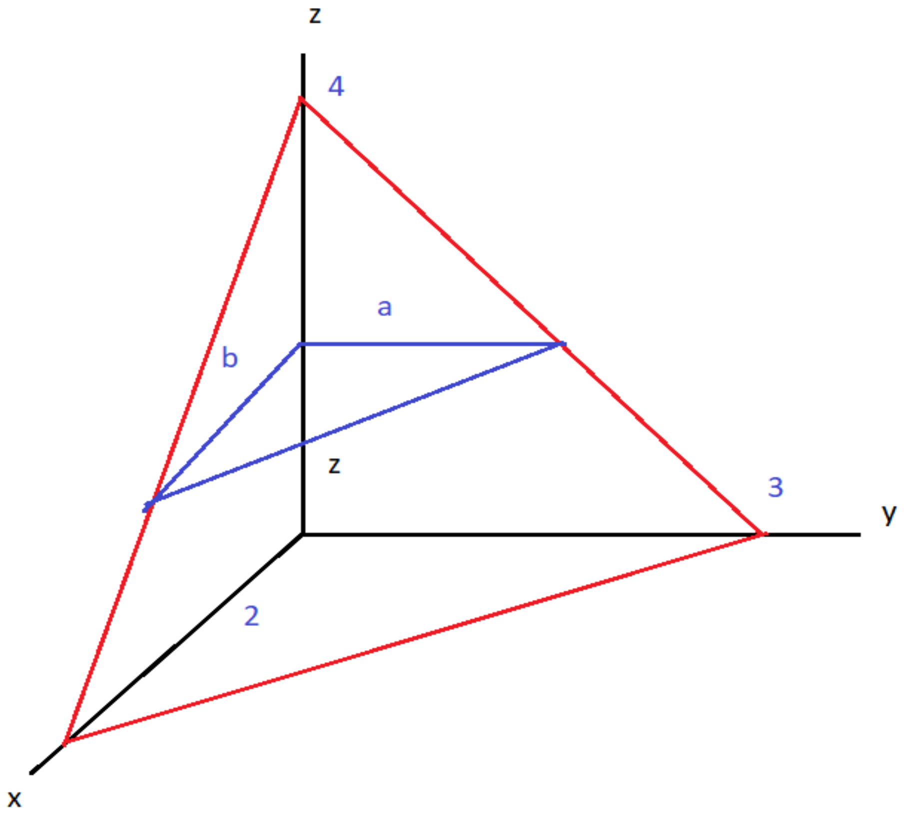
Lo ubicamos sobre R^3 , sobre los ejes *x*, *y* y *z* tenemos tres caras del tetraedro, la cuarta cara se tiene con las rectas que van del eje *x* al eje *y*, del eje *y* al eje *z* y del eje *z* al eje *x*, así tenemos el sólido que se muestra en la figura



Tomaremos a z como eje del sólido.

Las secciones transversales son perpendiculares al eje z

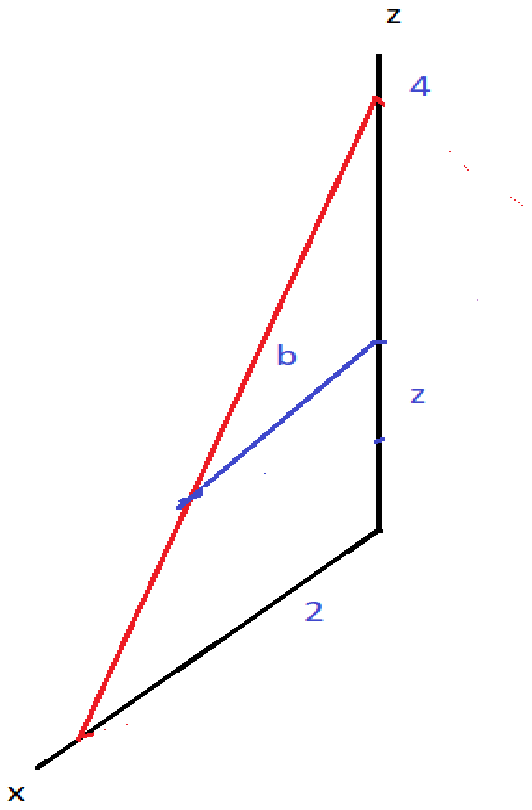
Tomamos una sección a una distancia z del origen



Sección transversal: triángulo rectángulo con catetos a y b

$$A = \frac{1}{2}ab$$

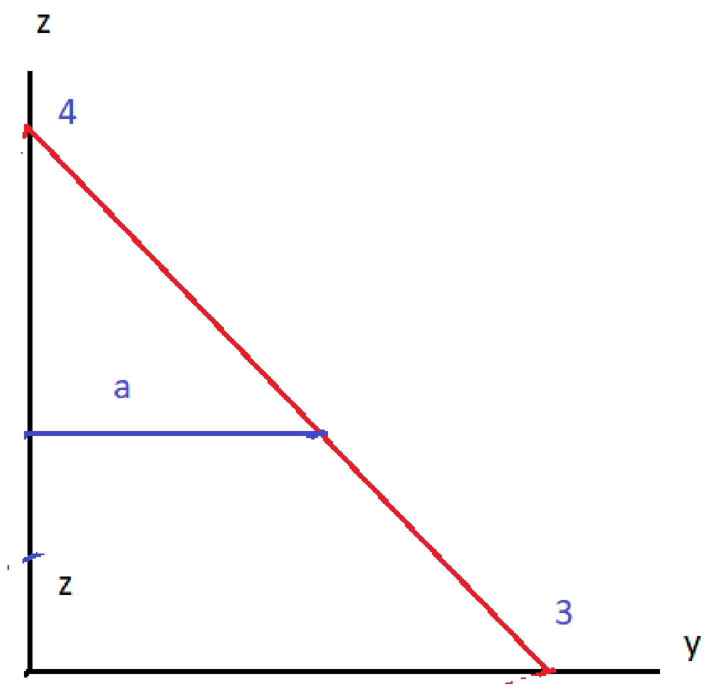
Tomamos el triángulo sobre el eje x y eje z



Por triángulos semejantes tenemos

$$\frac{b}{2}=\frac{4-z}{4} \quad \text{de donde } b=\frac{4-z}{2}$$

Tomando ahora el triángulo del eje y al eje z, tenemos



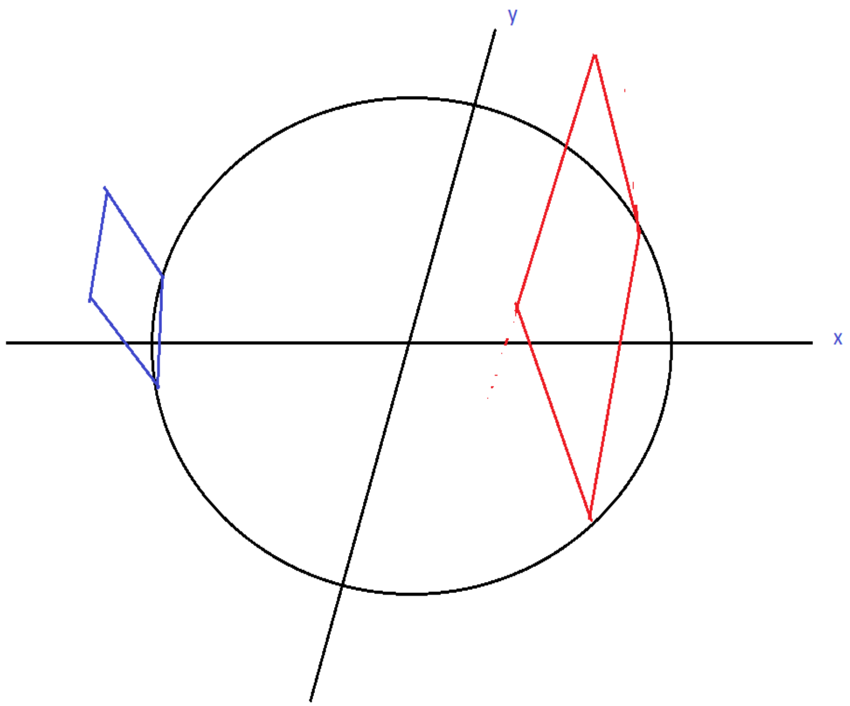
$$\frac{a}{3} = \frac{4-z}{4} \quad \text{de donde} \quad a = 3\left(\frac{4-z}{4}\right) = \frac{3}{4}(4-z)$$

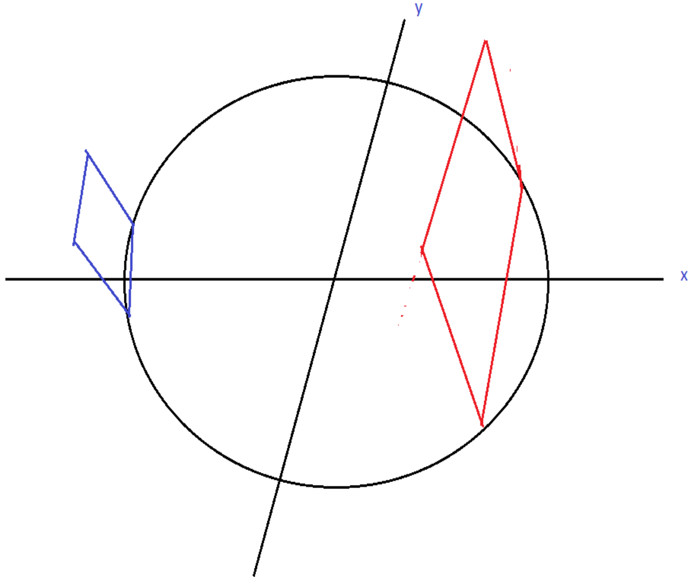
Luego $A(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}(4-z)\right)\left(\frac{4-z}{2}\right)=\frac{3}{16}(4-z)^2$

Así $V=\int_0^4 \frac{3}{16}(4-z)^2\,dz=\frac{3}{16}\int_0^4 (4-z)^2\,dz=-\frac{3}{16}\left(\frac{1}{3}\right)(4-z)^3\Big|_0^4=-\frac{1}{16}\left[(4-4)^3-(4-0)^3\right]=4$

Ejemplo 3.

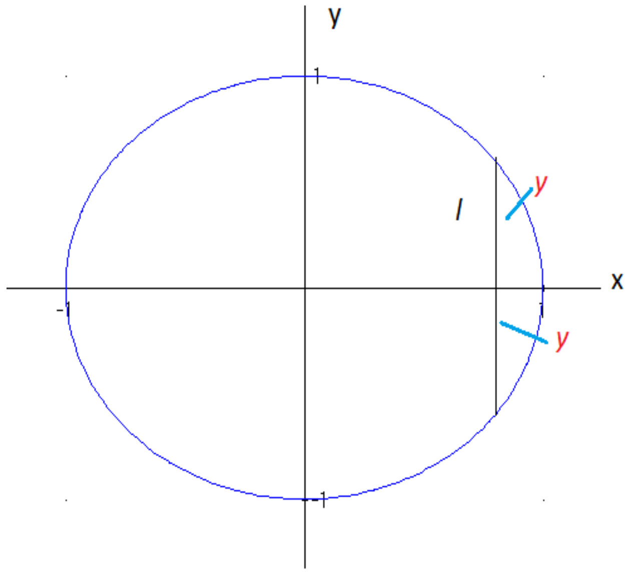
La base de un sólido es la región circular contenida en el plano *xy* acotada por la gráfica de $x^2 + y^2 = a^2$ donde a > 0. Calcular el volumen del sólido suponiendo que todas las secciones transversales correspondientes a planos perpendiculares al eje *x* son cuadrados.





Sección transversal: cuadrado de lado l $A(l) = l^2$

Tomemos la base del sólido y el lado del cuadrado sobre él



Por la simetría de la circunferencia se tiene que el lado del cuadrado es igual a $2y$

Luego

$$A=(2y)^2=4y^2$$

El área debe de ser una función de *x*, como los puntos (x,y) están sobre la circunferencia

$$y^2=a^2-x^2$$

Y

$$A(x)=4\left(a^2-x^2\right)$$

Así

$$V=\int_{-a}^{a}4\left(a^2-x^2\right)dx=2\int_{0}^{a}4\left(a^2-x^2\right)dx=8\int_{0}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx$$

$$V=8\left(a^2x-\frac{1}{3}x^3\right)_0^a=8\left(a^3-\frac{1}{3}a^3\right)=\frac{16}{3}a^3$$