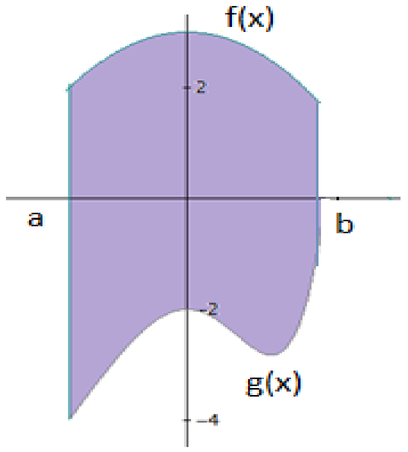
AREA ENTRE CURVAS

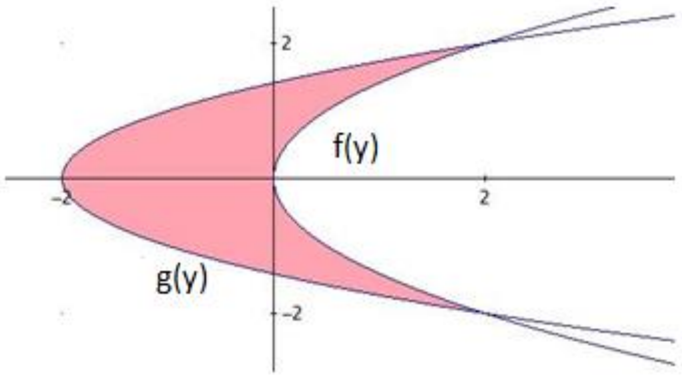
El área bajo la curva se definió para una función positiva $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ como

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Y para una función negativa $f(x)$ en el intervalo $[a,b]$ como $A = -\int_a^b f(x)dx$

Podemos determinar el área de regiones como

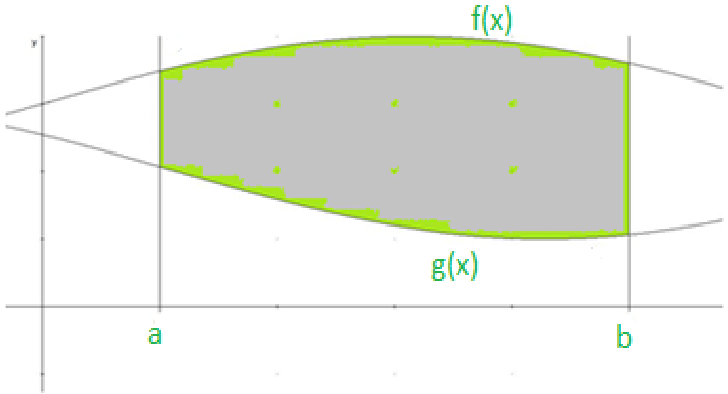




Área entre curvas

Sean las funciones $f(x)$ y $g(x)$ continuas en el intervalo $[a,b]$ tal que $f(x) \geq g(x)$ para toda x en el intervalo $[a,b]$

Caso1. $f(x) \geq 0$ y $g(x) \geq 0$



Para determinar el área de la región entre estas dos curvas, determinadas por las funciones $f(x)$ y $g(x)$, hay que tomar el área más grande, esta es el área bajo la función *f* y restar el área más pequeña, esta es la que se tiene bajo la curva de la función *g*.

Así, el área bajo las funciones f y g son

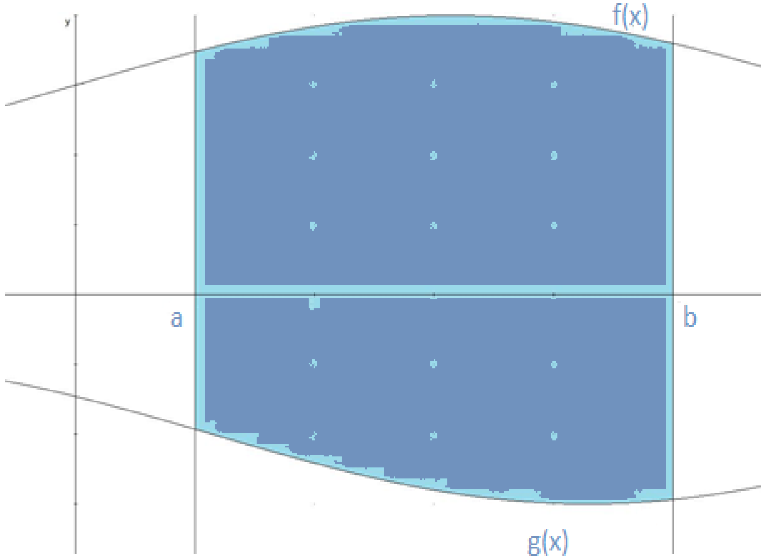
$$A_f = \int_a^b f(x)dx \quad \text{y} \quad A_g = \int_a^b g(x)dx$$

El área entre las curvas es

$$A = A_f - A_g = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

Caso2. $f(x) \geq 0$ y $g(x) \leq 0$



Para determinar el área de la región entre estas dos curvas, determinadas por las funciones $f(x)$ y $g(x)$, hay que sumar el área bajo la función f y el área bajo la curva de la función g.

Así, el área bajo las funciones f y g son

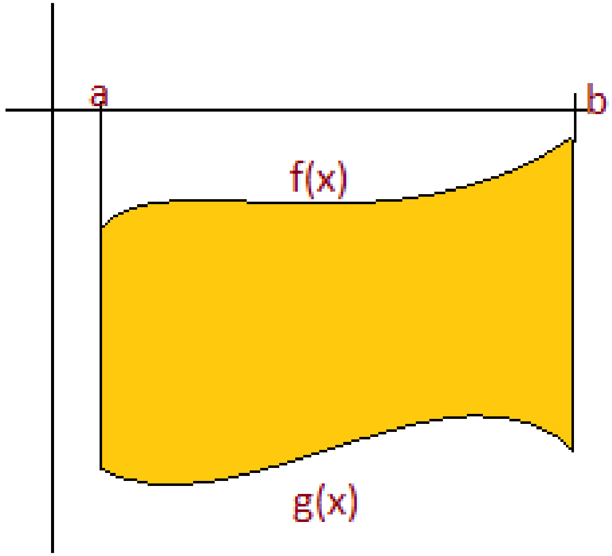
$$A_f = \int_a^b f(x)dx$$ y $$A_g = -\int_a^b g(x)dx$$ porque la función *g* es negativa

El área entre las curvas es

$$A = A_f + A_g = \int_a^b f(x)dx + \left(-\int_a^b g(x)dx\right) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

Caso 3. $f(x) \leq 0$ y $g(x) \leq 0$



Para determinar el área de la región entre estas dos curvas, determinadas por las funciones $f(x)$ y $g(x)$, hay que tomar el área más grande, esta es el área bajo la función g y restar el área más pequeña, esta es la que se tiene bajo la curva de la función f.

Así, el área bajo las funciones f y g son

$A_f = -\int_a^b f(x)dx$ y $A_g = -\int_a^b g(x)dx$ porque las funciones f y g son negativas

El área entre las curvas es

$$A = A_g - A_f = \left(-\int_a^b g(x)dx\right) - \left(-\int_a^b f(x)dx\right) = -\int_a^b g(x)dx + \int_a^b f(x)dx =$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

$$A = \int_a^b \left[f(x) - g(x)\right]dx$$

Definición: El área de la región limitada por las curvas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$, donde *f* y *g* son funciones continuas y $f(x)\geq g(x)$ para toda *x* en el intervalo $[a,b]$ es

$$A=\int_a^b\left[f(x)-g(x)\right]dx$$

Ejemplo 1

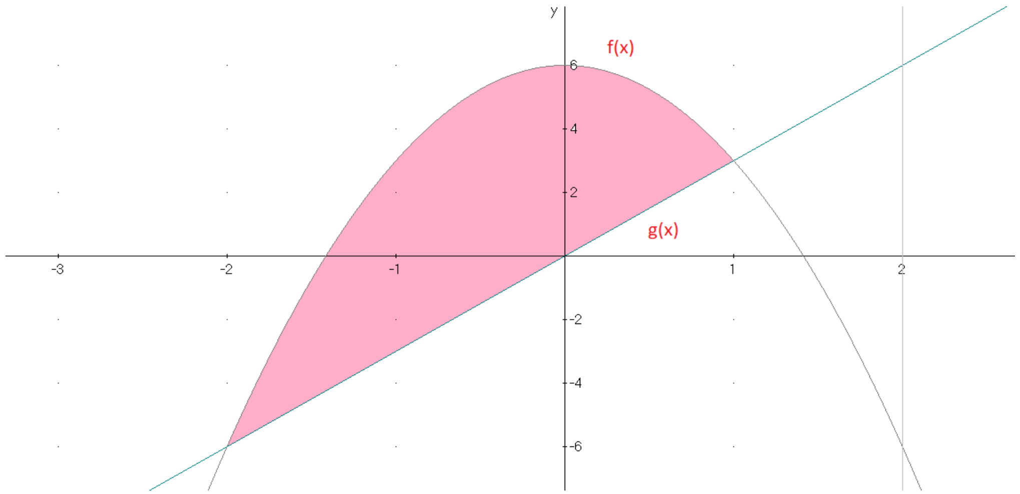
Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas de las funciones $f\left(x\right)=6-3x^2$ y $g\left(x\right)=3x$ en el intervalo $\left[0,2\right]$

Calculando el área

$$A=\int_0^2\left(6-3x^2-3x\right)dx=6x-x^3-\frac{3}{2}x^2\Big|_0^2=\left(12-8-\frac{3}{2}(4)\right)-(0)=4-6=-2$$

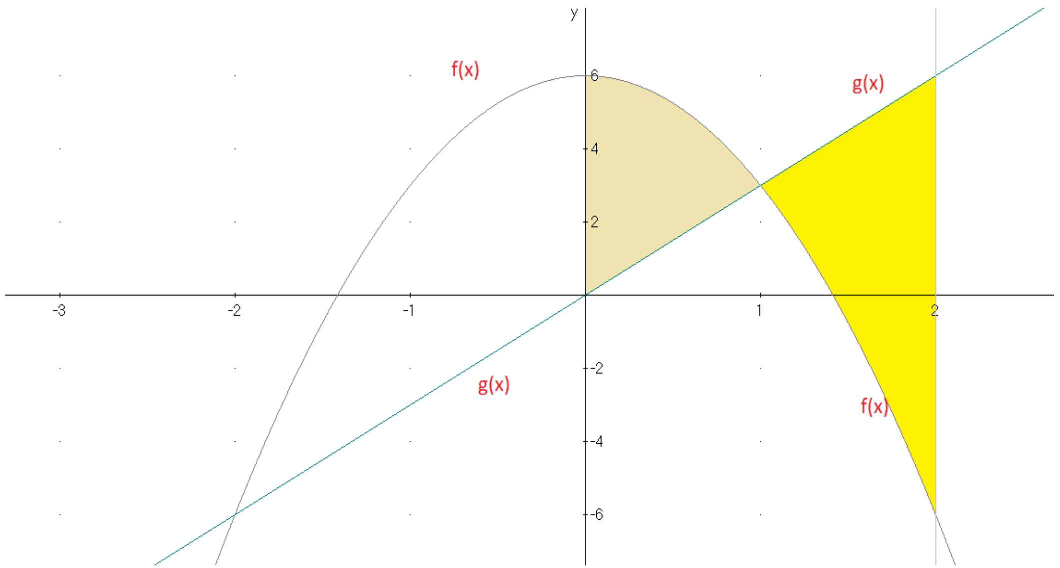
No puede ser negativa el área, hay error.

Gráfica de la región



Esta marcada el área entre las dos curvas en donde efectivamente la función f siempre es mayor a la función g.

Gráfica de la región en el intervalo $[0,2]$



Determinemos el área.

Puntos de intersección de $f(x)=6-3x^2$ y $g(x)=3x$

$$6-3x^2=3x \quad \Rightarrow \quad 3x^2+3x-6=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)(x-1)=0$$

$\Rightarrow \quad x=-2$ y $x=1$

Se deben calcular dos áreas A_1 en $[0,1]$ y A_2 en $[1,2]$

$$A_1 = \int_0^1 \left(6-3x^2-3x\right)dx = 6x - x^3 - \frac{3}{2}x^2\Big|_0^1 = 6-1-\frac{3}{2}-0 = 5-\frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

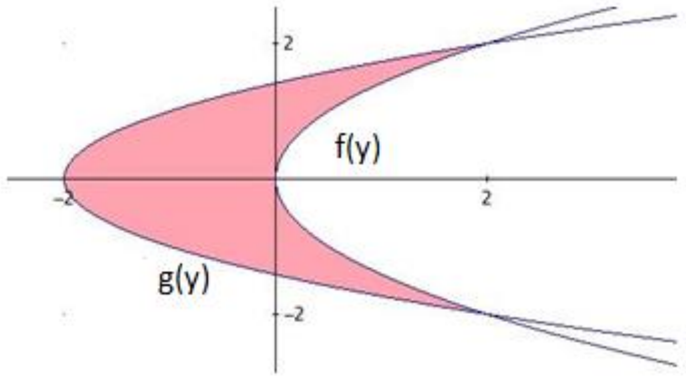
$$A_2 = \int_1^2 3x-\left(6-3x^2\right)dx = \int_1^2 \left(3x-6+3x^2\right)dx = \frac{3}{2}x^2-6x+x^3\Big|_1^2 = \left(\frac{3}{2}(4)-12+8\right)-\left(\frac{3}{2}-6+1\right)$$

$$= 6-4-\frac{3}{2}+5 = 7-\frac{3}{2} = \frac{11}{2}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{7}{2}+\frac{11}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

$$A = 9u^2$$

Para región de variable *y*, como



Definición: El área de la región limitada por las curvas de las funciones $f(y)$ y $g(y)$ y las rectas $y = c$ y $y = d$ donde *f* y *g* son funciones continuas y $f(y) \geq g(y)$ para toda *x* en el intervalo $[c, d]$ es

$$A = \int_c^d \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

Ejemplo 2

Encuentre el área de la región comprendida entre las curvas de las funciones $y^2 = 1 - x$ y $2y = x + 2$

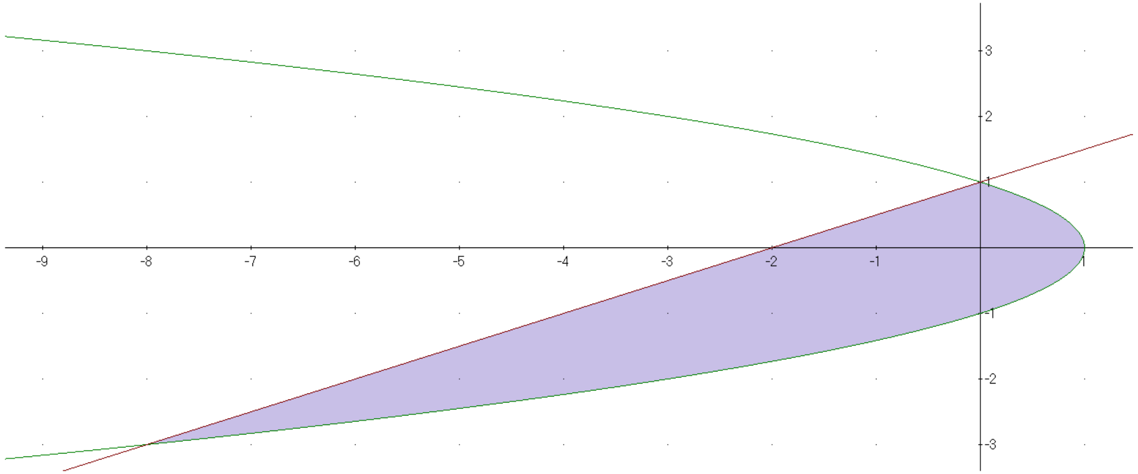
Puntos de intersección

$$y^2 = 1 - x \text{ y } 2y = x + 2 \Rightarrow x = 1 - y^2 \text{ y } x = 2y - 2$$

$$1 - y^2 = 2y - 2 \Rightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Rightarrow (y-1)(y+3) = 0$$

$y = 1$ y $y = -3$

Gráfica de la región



Calculamos el área como una región y.

$$A=\int_{-3}^{1}\Big[\left(1-y^2\right)-\left(2y-2\right)\Big]dy=\int_{-3}^{1}\left(-y^2-2y+3dy\right)=-\frac{1}{3}y^3-y^2+3y\Big|_{-3}^{1}$$

$$=-\frac{1}{3}-1+3-\left(-\frac{1}{3}(-27)-(9)-9\right)=-\frac{1}{3}+2-(9-9-9)=-\frac{1}{3}+2+9=-\frac{1}{3}+11=\frac{32}{3}$$

$$A=\frac{32}{3}u^2$$

Determinando el área de la región como región x

Funciones $y=-\sqrt{1-x}$, $y=\sqrt{1-x}$ y $y=\frac{1}{2}(x+2)$

Puntos de intersección

1) $y=-\sqrt{1-x}$ y $y=\sqrt{1-x}$

$$\sqrt{1-x}=-\sqrt{1-x} \Rightarrow \left(\sqrt{1-x}\right)^2=\left(-\sqrt{1-x}\right)^2 \Rightarrow 1-x=1-x \Rightarrow x-x=1-1$$

No lleva a una solución

$$\sqrt{1-x}=-\sqrt{1-x} \Rightarrow \sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}=0 \Rightarrow 2\sqrt{1-x}=0 \Rightarrow \sqrt{1-x}=0$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{1-x}\right)^2=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1$$

Punto de intersección en $x=1$

2) $y=-\sqrt{1-x}$ y $y=\frac{1}{2}(x+2)$

$$-\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow -2\sqrt{1-x}=(x+2) \Rightarrow \left(-2\sqrt{1-x}\right)^2=(x+2)^2 \Rightarrow 4(1-x)=x^2+4x+4$$

$$\Rightarrow 4-4x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2+8x=0 \Rightarrow x(x+8)=0 \Rightarrow x=0 \text{ y } x=-8$$

La rama negativa de la parábola se intersecta solo en $x=-8$

3) $y=\sqrt{1-x}$ y $y=\frac{1}{2}(x+2)$

$$\sqrt{1-x}=\frac{1}{2}(x+2) \Rightarrow 2\sqrt{1-x}=(x+2) \Rightarrow \left(2\sqrt{1-x}\right)^2=(x+2)^2 \Rightarrow 4(1-x)=x^2+4x+4$$

$$\Rightarrow 4-4x=x^2+4x+4 \Rightarrow x^2+8x=0 \Rightarrow x(x+8)=0 \Rightarrow x=0 \text{ y } x=-8$$

La rama positiva de la parábola se intersecta solo en $x=0$

Se deben calcular dos áreas A_1 en $[-8,0]$ y A_2 en $[0,1]$

$$A_1 = \int_{-8}^{0}\left[\frac{1}{2}(x+2)-\left(-\sqrt{1-x}\right)\right]dx = \int_{-8}^{0}\left(\frac{1}{2}x+1+\sqrt{1-x}\right)dx = \frac{1}{4}x^2 + x - \frac{2(1-x)^{3/2}}{3}\Bigg|_{-8}^{0}$$

Ya que

$$\int\sqrt{1-x}\,dx = \int(1-x)^{1/2}dx = -\int u^{1/2}du = -\frac{2}{3}u^{3/2} = -\frac{2}{3}(1-x)^{3/2}$$

Evaluando

$$A_1 = \frac{1}{4}(0)^2 + 0 - \frac{2(1-0)^{3/2}}{3} - \left(\frac{1}{4}(-8)^2 + (-8) - \frac{2(1+8)^{3/2}}{3}\right) = -\frac{2}{3} - \left(\frac{1}{4}(64) - 8 - \frac{2(9)^{3/2}}{3}\right)$$

$$A_1 = -\frac{2}{3} - (8-18) = -\frac{2}{3} - (-10) = -\frac{2}{3} + 10 = \frac{28}{3}$$

$$A_2=\int_0^1\left[\sqrt{1-x}-\left(-\sqrt{1-x}\right)\right]dx=\int_0^1\left(\sqrt{1-x}+\sqrt{1-x}\right)dx=\int_0^1 2\sqrt{1-x}dx=2\int_0^1(1-x)^{1/2}dx$$

$$A_2=-2\int u^{1/2}du=-\frac{4}{3}u^{3/2}=-\frac{4}{3}(1-x)^{3/2}=-\left.\frac{4(1-x)^{3/2}}{3}\right|_0^1=-\frac{4}{3}(1-1)^{3/2}+\frac{4}{3}(1-0)^{3/2}=\frac{4}{3}$$

$$A=A_1+A_2=\frac{28}{3}+\frac{4}{3}=\frac{32}{3}$$

$$A=\frac{32}{3}u^2$$

Ejemplo 3

Determinar el área comprendida entre las siguientes dos curvas $y = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ y $y = x$

Puntos de intersección

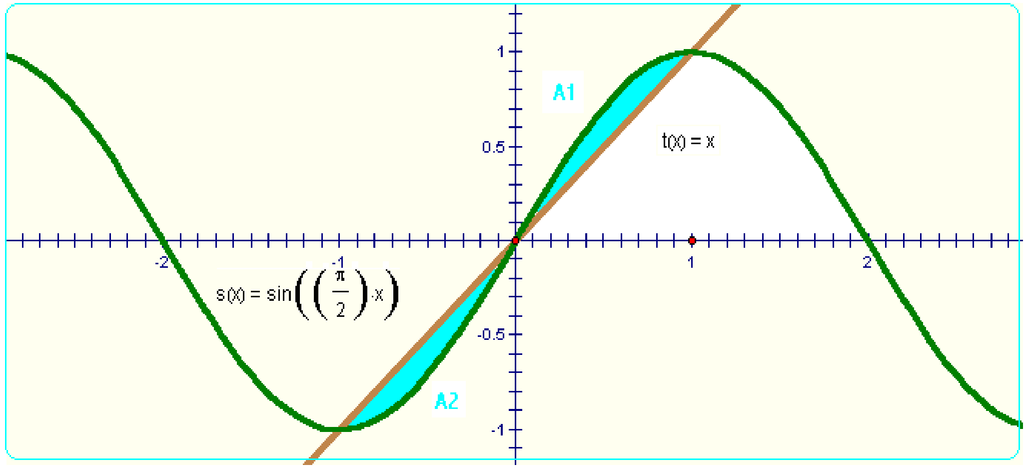
$sen\left(\frac{\pi}{2}x\right) = x$ son funciones de diferente tipo, o hay un procedimiento para determinar los puntos de intersección

La función $y = sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ pasa por los puntos de coordenadas enteras $(-1,-1)$, $(0,0)$ y $(1,1)$

y la función $y = x$ pasa por estos mismos puntos, ya que otros no son enteros o están fuera del rango de la función trigonométrica.

Puntos de intersección $(-1,-1)$, $(0,0)$ y $(1,1)$

Gráfica de la región



Hay que determinar dos áreas, A_1 en $[-1,0]$ y A_2 en $[0,1]$

$$A_1=\int_{-1}^{0}\left(x-sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right]_{-1}^{0}=\left(\frac{(0)^2}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(0)\right)\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(-1)\right)\right)$$

$$A_1=\frac{2}{\pi}(1)-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}(0)=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}$$

$$A_2=\int_{0}^{1}\left(sen\left(\frac{\pi}{2}x\right)-x\right)dx=\left[-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(1)\right)-\frac{(1)^2}{2}\right)-\left(-\frac{2}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{2}(0)\right)-\frac{(0)^2}{2}\right)$$

$$A_2=-\frac{2}{\pi}(0)-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos(0)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}$$

$$A=A_1+A_2=\frac{2}{\pi}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}=\frac{4}{\pi}-1$$

$$A=\left(\frac{4}{\pi}-1\right)u^2$$

Ejemplo 4

Determinar el área comprendida entre las siguientes dos curvas $y-x^3=0$, $2y+x=0$ y $y-x=6$

Puntos de intersección

1) $y-x^3=0$ y $2y+x=0 \Longrightarrow y=x^3$ y $y=-\dfrac{1}{2}x$

$$x^3=-\frac{1}{2}x \Longrightarrow x^3+\frac{1}{2}x=0 \Longrightarrow x\left(x^2+\frac{1}{2}\right)=0 \Longrightarrow x=0 \text{ y } x^2=-\frac{1}{2}$$

Única raíz $x=0$

2) $2y+x=0$ y $y-x=6 \Rightarrow y=-\dfrac{x}{2}$ y $y=x+6$

$$-\frac{x}{2}=x+6 \Longrightarrow \frac{x}{2}+x=-6 \Longrightarrow \frac{3x}{2}=-6 \Longrightarrow x=\frac{2(-6)}{3}=-4$$

3) $y-x^3=0$ y $y-x=6 \Longrightarrow y=x^3$ y $y=x+6$

$$x^3=x+6 \Longrightarrow x^3-x-6=0$$

Resolvemos la ecuación por división sintética.

Los posibles valores son -6,-3,-2,-1,1,2,3,6, probemos con x=1

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 0 & -6 & \end{array}$$

x=1 no es solución,

probemos con x=2

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 & \\ 1 & 2 & 4 & 6 & 2 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

x=2 es raíz de la ecuación

Así $$x^3 - x - 6 = (x-2)(x^2+2x+3)$$

Veamos cuales son las raíces de la ecuación cuadrática $x^2+2x+3=0$

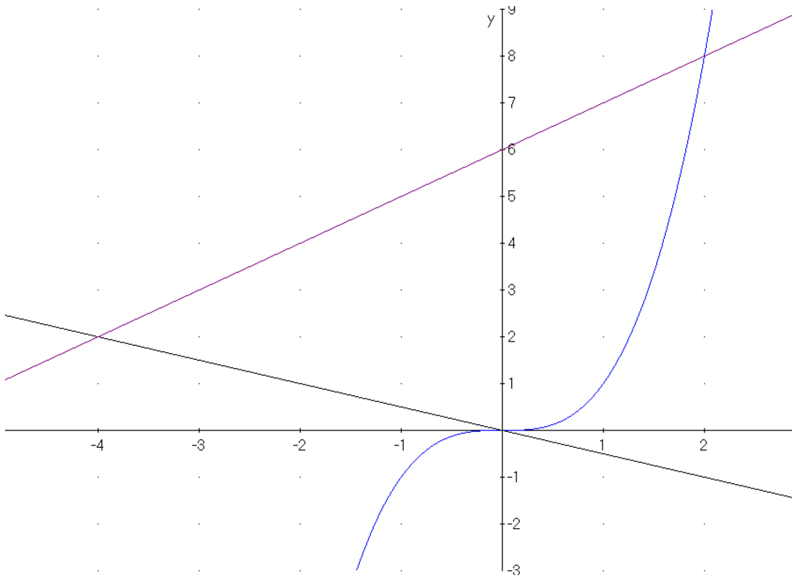
$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4(1)(3)}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

No tiene soluciones reales.

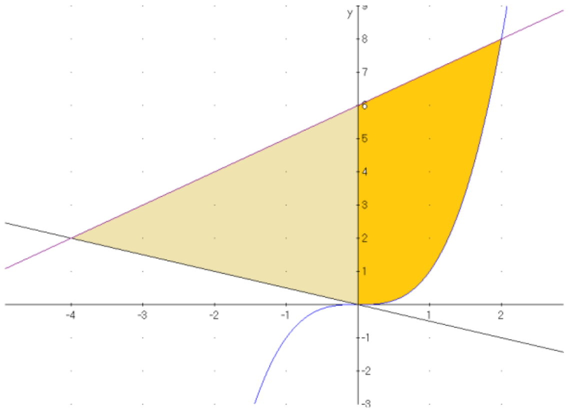
Única solución $x = 2$

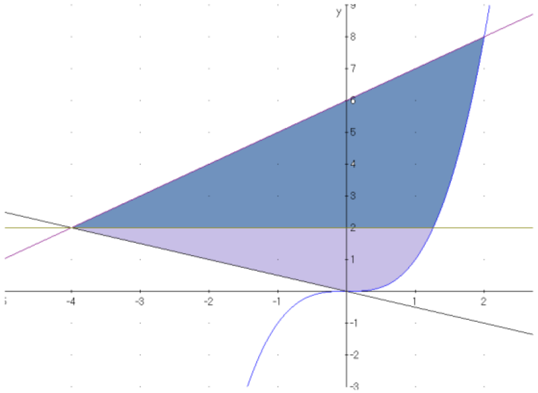
Puntos de intersección $(0,0)$, $(-4,2)$ y $(2,8)$

La gráfica de la región es



La región puede ser de *x* o *y*





Región x

Se dividen en dos áreas, A_1 en $[-4,0]$ y A_2 en $[0,2]$

$$A_1=\int_{-4}^{0}\left(x+6-\left(-\frac{x}{2}\right)\right)dx=\int_{-4}^{0}\left(x+6+\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2}x^2+6x+\frac{1}{4}x^2\Big|_{-4}^{0}$$

$$=0-\left(\frac{1}{2}(-4)^2+6(-4)+\frac{1}{4}(-4)^2\right)=-(8-24+4)=12$$

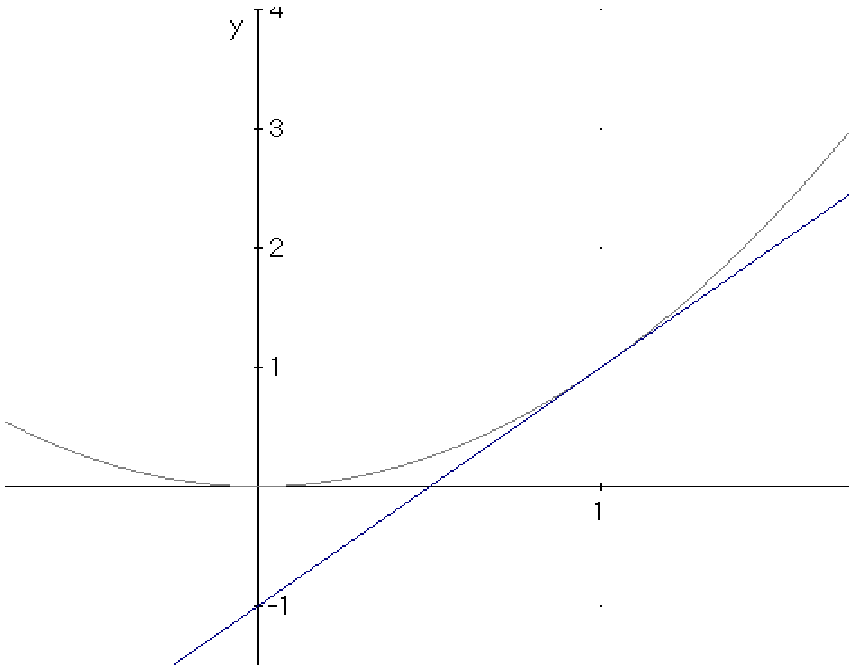
$$A_2=\int_{0}^{2}\left(x+6-x^3\right)dx=\frac{1}{2}x^2+6x-\frac{1}{4}x^4\Big|_{0}^{2}=\frac{1}{2}(4)+12-\frac{1}{4}(16)-0=2+12-4=10$$

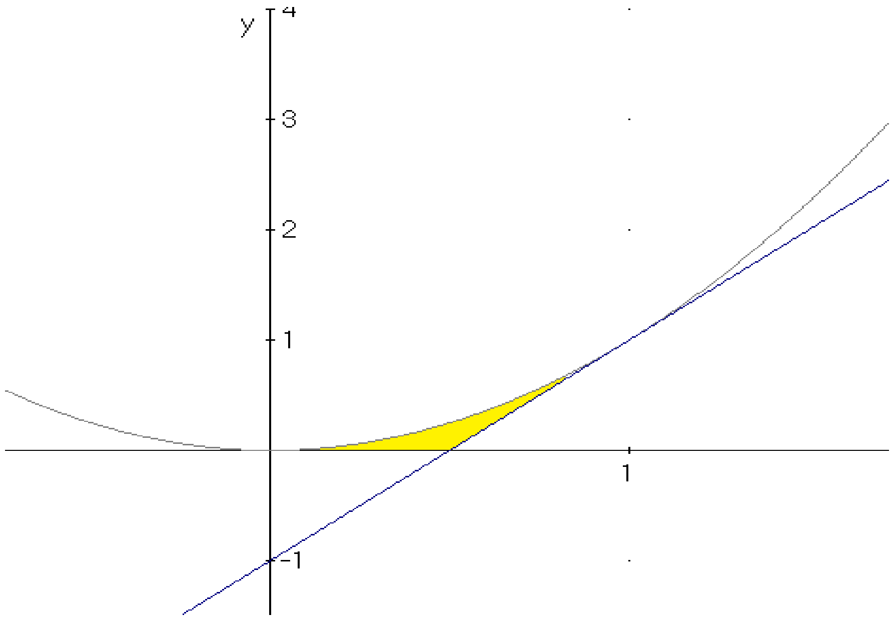
$$A=12+10=22u^2$$

Ejemplo 5

Hallar el área de la región limitada por la parábola $y = x^2$, la recta tangente a esta en el punto $(1,1)$ y el eje x

Analicemos la gráfica de la función





Ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto (1,1)

$y - y_1 = m(x - x_1)$ donde $m = f'(x_1)$

$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow m = 2x = 2$

La ecuación de la recta

$y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 2 + 1 \Rightarrow y = 2x - 1$

Región x

Funciones $y = x^2$, $y = 2x - 1$ y $y = 0$

Puntos de intersección

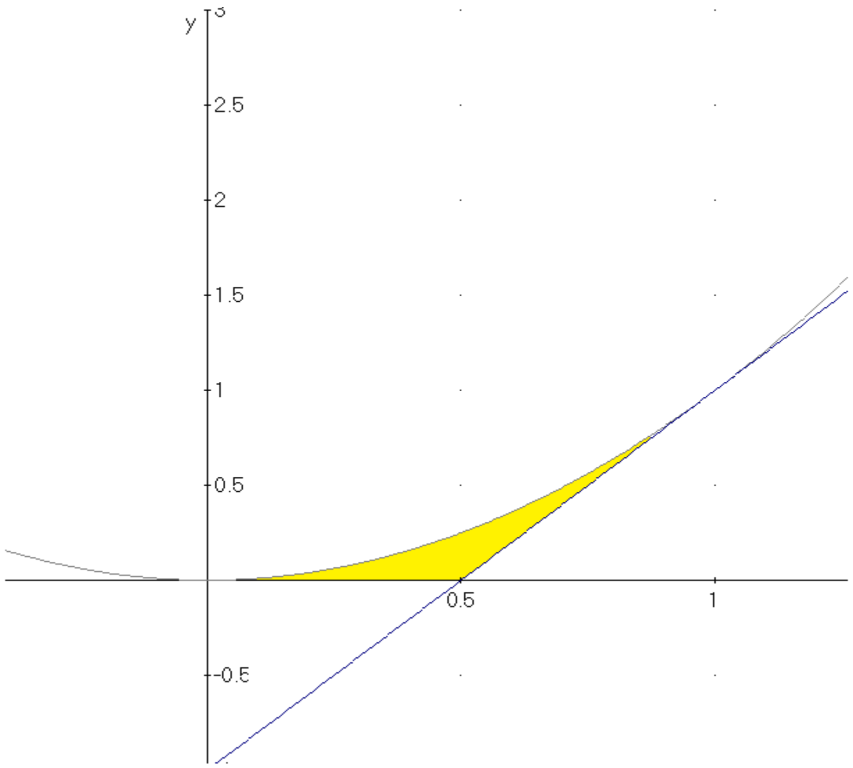
1) $y = x^2$ y $y = 2x - 1 \Rightarrow x^2 = 2x - 1 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$

2) $y = 2x - 1$ y $y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

3) $y = x^2$ y $y = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Puntos de intersección $(1,1)$, $\left(\frac{1}{2},0\right)$ y $(0,0)$

Visualizando la región



Hay que dividir en dos regiones

A_1 en el intervalo $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, con función mayor $y=x^2$

y menor $y=0$

A_2 en el intervalo $\left[\frac{1}{2},1\right]$, con función mayor $y=x^2$

y menor $y=2x-1$

$$A_1 = \int_0^{1/2} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^{1/2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 0 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{24}$$

$$A_2 = \int_{1/2}^{1} \left(x^2 - (2x-1)\right) dx = \int_{1/2}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x\Big|_{1/2}^{1}$$

$$= \frac{1}{3}(1) - (1) + 1 - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{24} - \frac{1}{4} = \frac{8-1-6}{24} = \frac{1}{24}$$

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$$

$$A = \frac{1}{12}u^2$$

Si tomamos la región y

Funciones $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$

$y = 2x - 1 \qquad 2x = y + 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}(y+1)$

$y = 0$, ya no es función, límite de la región

Puntos de intersección

$x = \sqrt{y}$ y $x = \frac{1}{2}(y+1) \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{1}{2}(y+1) \Rightarrow \left(\sqrt{y}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}(y+1)\right)^2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}(y+1)^2$

$\Rightarrow 4y = y^2 + 2y + 1 \Rightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Rightarrow (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1$

Calculemos el área tomando como función mayor $x = \frac{1}{2}(y+1)$ y como función menor $x = \sqrt{y}$ en el intervalo $[0,1]$

$$A=\int_0^1\left(\frac{1}{2}(y+1)-\sqrt{y}\right)dy=\int_0^1\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}-\sqrt{y}\right)dy=\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}y-\frac{2}{3}y^{3/2}\Big|_0^1$$

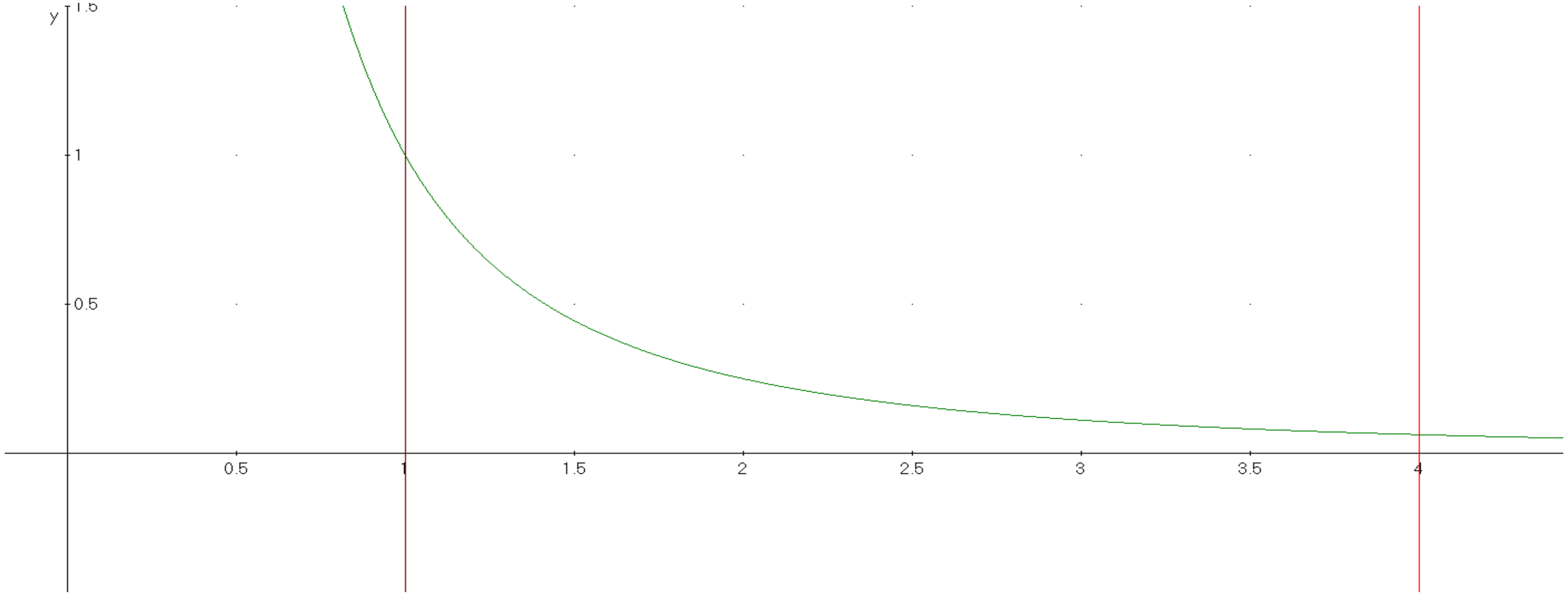
$$=\frac{1}{4}(1)^2+\frac{1}{2}(1)-\frac{2}{3}(1)^{3/2}-0=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}=\frac{6+12-16}{24}=\frac{2}{24}=\frac{1}{12}$$

$$A=\frac{1}{12}u^2$$

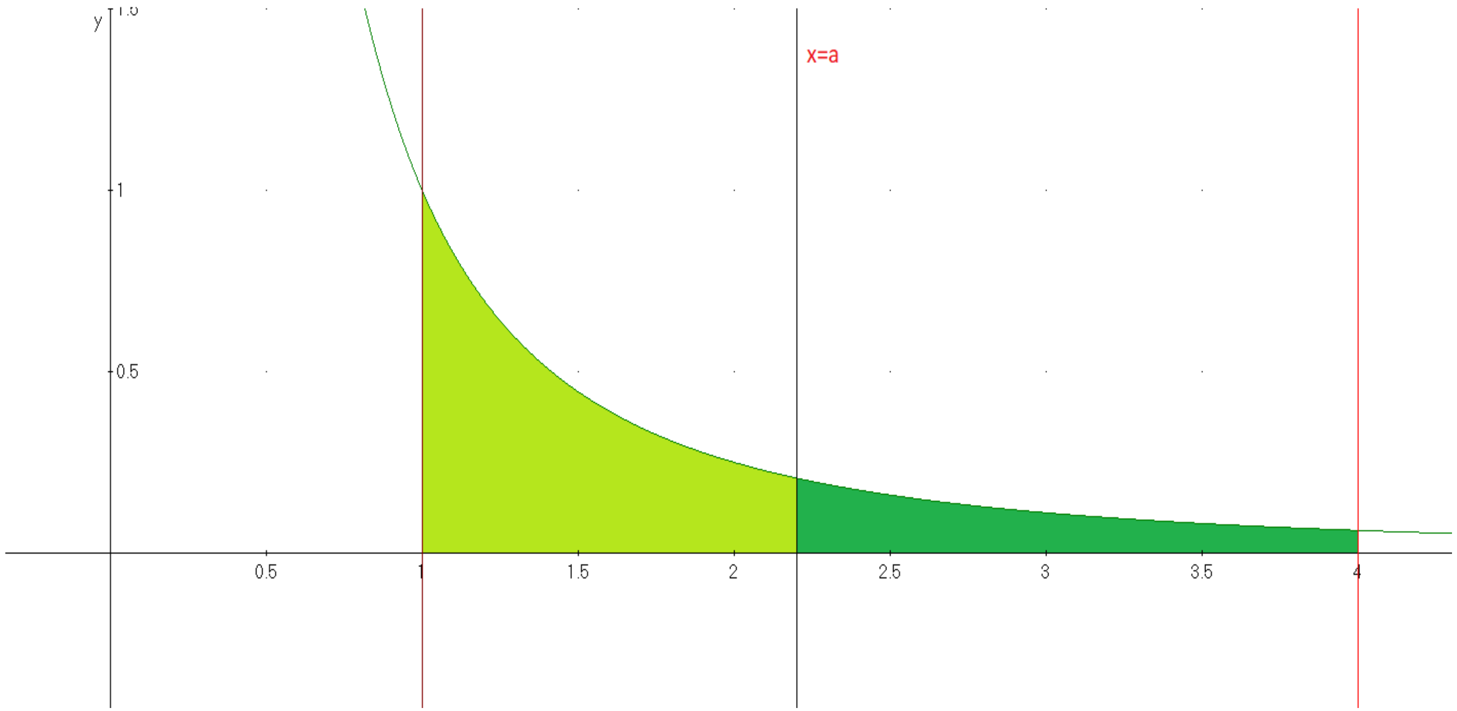
Ejemplo 6.

(a) Hallar el número *a* tal que $x = a$ biseque el área debajo de la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 4]$

(b) Hallar el número *b* tal que $y = b$ biseque el área debajo de la curva $y = \dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 4]$



Tomando una recta $x = a$



La recta $x = a$ divide a la región en dos y necesitamos determinar el valor de a, tal que estas regiones tengan la misma área, esto es $A_1 = A_2$ pero también sucede que $A = 2A_2$ y $A = 2A_1$

Determinemos el valor de a, a partir de la igualdad $A = 2A_1$

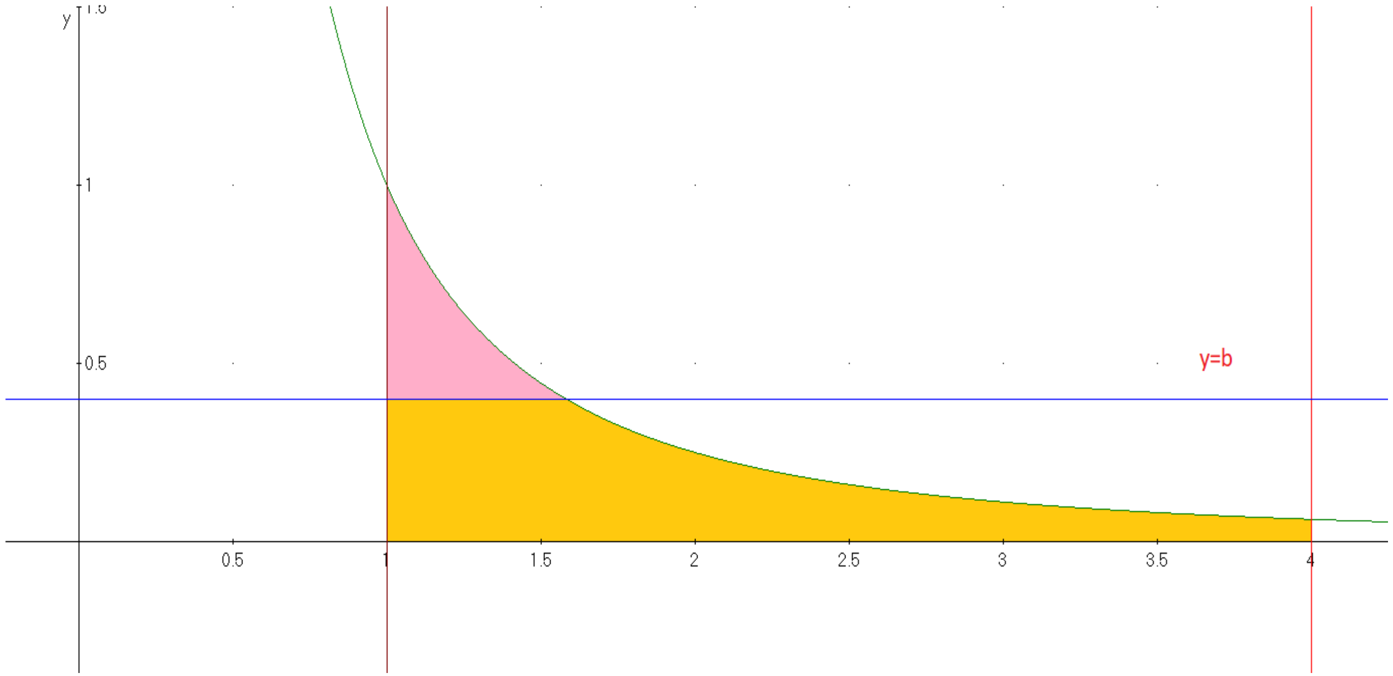
$$A = \int_1^4 \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$$

$$A_1 = \int_1^a \frac{1}{x^2}dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^a = -\frac{1}{a} + 1$$

$$A = 2A_1$$

$$\frac{3}{4} = 2\left(-\frac{1}{a} + 1\right) \Rightarrow \frac{3}{8} = -\frac{1}{a} + 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{a} = -\frac{3}{8} + 1 = \frac{5}{8} \Rightarrow a = \frac{8}{5}$$

Para resolver el inciso (b), determinar el valor de b tal que la recta $y = b$ biseque el área bajo la curva de la función $y = \frac{1}{x^2}$ en el intervalo $[1, 4]$, veamos la región de manera gráfica



Tomándola como región de x

Se divide en las áreas A_1 y A_2

A_1 entre las curvas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$ y $y = b$ desde x=1 hasta el punto de intersección de la hipérbola y la recta horizontal, PI

A_2 se divide en dos áreas, el área del rectángulo desde x=1 a PI y altura b y el área bajo la curva de la hipérbola $y = \frac{1}{x^2}$ desde PI hasta x=4.

Se cumple $A_1 = A_2$, $A = 2A_2$ y $A = 2A_1$

Es más directo determinar el valor de b, con al igualdad $A = 2A_1$

Ya calculamos $A = \int_1^4 \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x}\Big]_1^4 = -\frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{4}$

Puntos de intersección

$$y=\frac{1}{x^2} \text{ y } y=b \Rightarrow \frac{1}{x^2}=b \Rightarrow x^2=\frac{1}{b} \Rightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{b}}$$

$$A_1=\int_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}}\left(\frac{1}{x^2}-b\right)dx=\left(-\frac{1}{x}-bx\right)_1^{\sqrt{\frac{1}{b}}}=\left(-\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{b}}}-b\sqrt{\frac{1}{b}}\right)-\left(-\frac{1}{1}-b(1)\right)=\left(-\sqrt{b}-\sqrt{b}\right)-\left(-1-b\right)=-2\sqrt{b}+1+b$$

Como $A=2A_1$

$$\frac{3}{4}=2\left(-2\sqrt{b}+1+b\right) \Rightarrow \frac{3}{8}=-2\sqrt{b}+1+b \Rightarrow -2\sqrt{b}+1+b-\frac{3}{8}=0 \Rightarrow b-2\sqrt{b}+\frac{5}{8}=0$$

Para determinar el valor de b hay que resolver la ecuación

$b-2\sqrt{b}+\frac{5}{8}=0$, hacemos el cambio de variable $u=\sqrt{b}$

$u^2-2u+\frac{5}{8}=0$, resolviendo

$$u=\frac{2\pm\sqrt{4-4(1)\left(\frac{5}{8}\right)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{4\left(1-\frac{5}{8}\right)}}{2}=\frac{2\pm 2\sqrt{\frac{3}{8}}}{2}=1\pm\sqrt{\frac{3}{8}}$$

Tenemos $u_1=1+\sqrt{\frac{3}{8}}=1.612372$ y $u_2=1-\sqrt{\frac{3}{8}}=0.387627$

Como $u=\sqrt{b}$

$$\sqrt{b_1}=1+\sqrt{\frac{3}{8}}=1.612372 \quad \text{y} \quad \sqrt{b_2}=1-\sqrt{\frac{3}{8}}=0.387627$$

Así

$$b_1 = \left(1+\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 = (1.612372)^2 = 2.599744 \quad \text{y} \quad b_2 = \left(1-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 = (0.387627)^2 = 0.150255$$

b debe de estar en el intervalo $[f(4), f(1)] = \left[\frac{1}{16}, 1\right] = [0.0625, 1]$

$b_1 = 2.599744 > 1$ no es solución

Y $\quad \frac{1}{16} < b_2 = 0.150255 < 1$

Esta dentro del intervalo, luego

La recta que biseca el área de la región es $y = \left(1-\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^2 = 0.150255$