Lista de ejercicios de la lección 1.2

Instrucciones. Evalué las integrales definidas utilizando la definición.

1. $\displaystyle\int_{-10}^{10} (x^2 + x)\,dx$

2. $\displaystyle\int_{0}^{5} f(x)\,dx \;\; si \;\; f(x) = \begin{cases} 2x \;\; si \;\; 0 < x \leq 1 \\ 2 \;\; si \;\; 1 < x \leq 2 \\ x \;\; si \;\; 2 < x \leq 5 \end{cases}$

3. $\displaystyle\int_{-2}^{1} (2x + \pi)\,dx$

4. $\displaystyle\int_{-2}^{1} (3x^2 + 2)\,dx$

5. $\displaystyle\int_{-1}^{5} f(x)\,dx \;\; si \;\; f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 \;\; si \;\; -1 < x \leq 1 \\ 4 \;\; si \;\; 1 < x \leq 3 \\ -2(x-5) \;\; si \;\; 3 < x \leq 5 \end{cases}$

6. Sea c un número real y $f(x) = c$ para todo x. Sea P una partición arbitraria de $[a, b]$. Demostrar que cualquier suma de Riemann de f es igual a $c(b–a)$. Usando este hecho demostrar que:

$$\int_a^b c\,dx = c(b - a)$$

Interpretar geométricamente para $c > 0$.

7. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x\,dx = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$ completando el argumento siguiente para la partición: $a = x_0 < x_1 < .. < x_n = b$. Elíjase:

$$W_k = \frac{1}{2}(x_{k-1} + x_k) \Rightarrow R_p = \sum_{k=1}^{n} W_k\,\Delta x_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

Simplifique R_p (suma telescópica) y tómese el limite.

8. Demuestre que $\displaystyle\int_a^b x^2\,dx = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$ utilizando un argumento parecido al problema anterior con:

$$W_k = \left[\frac{1}{3}(x_k^2 + x_k\,x_{k-1} + x_{k-1}^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$

9. Demuestre que, si f es continua y par en $[-a, a]$ entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

10. Demuestre que, si f es continua e impar en $[-a, a]$ entonces:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

11. Sea f una función impar y g una función par, y suponga que:

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 g(x)\,dx = 3$$

determinar:

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} |f(x)|\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} -g(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(-x)\,dx$

e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(-x)\,dx$

f) $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$