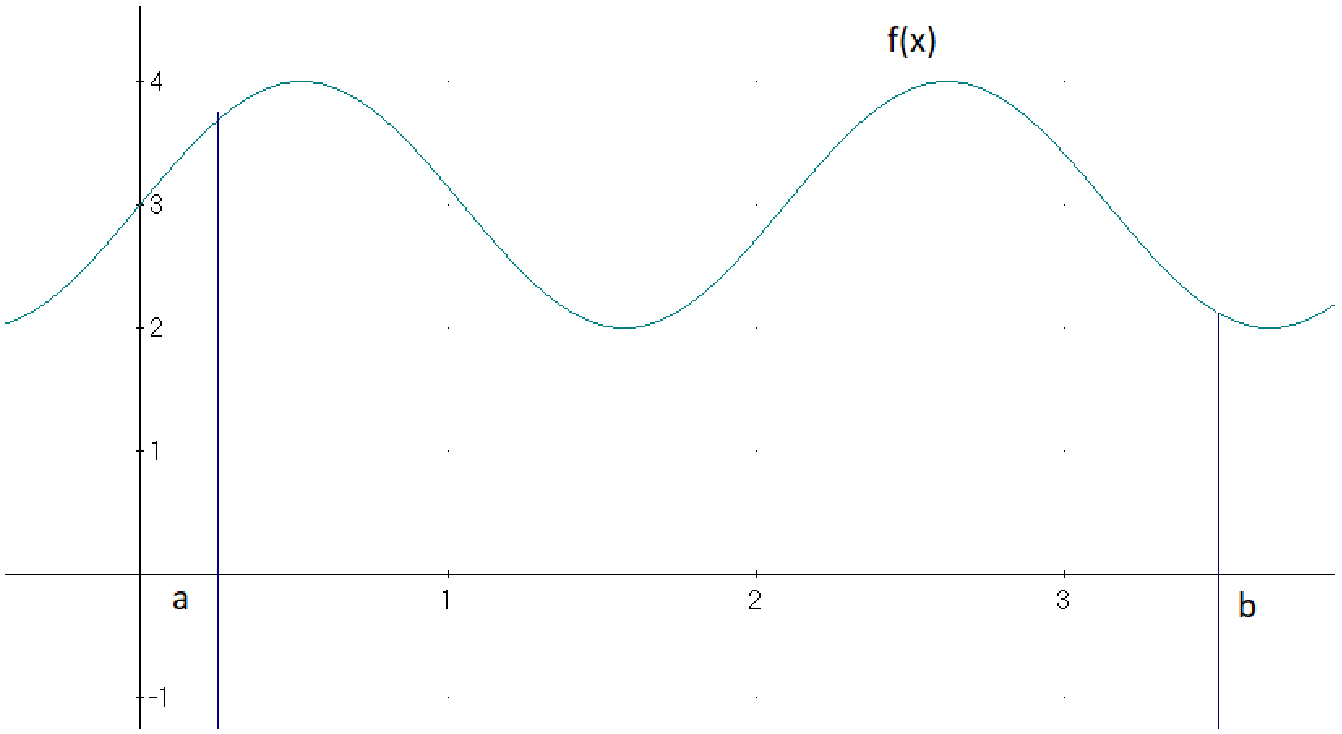
LONGITUD DE ARCO
Y
ÁREA DE SUPERFICIE

LONGITUD DE ARCO

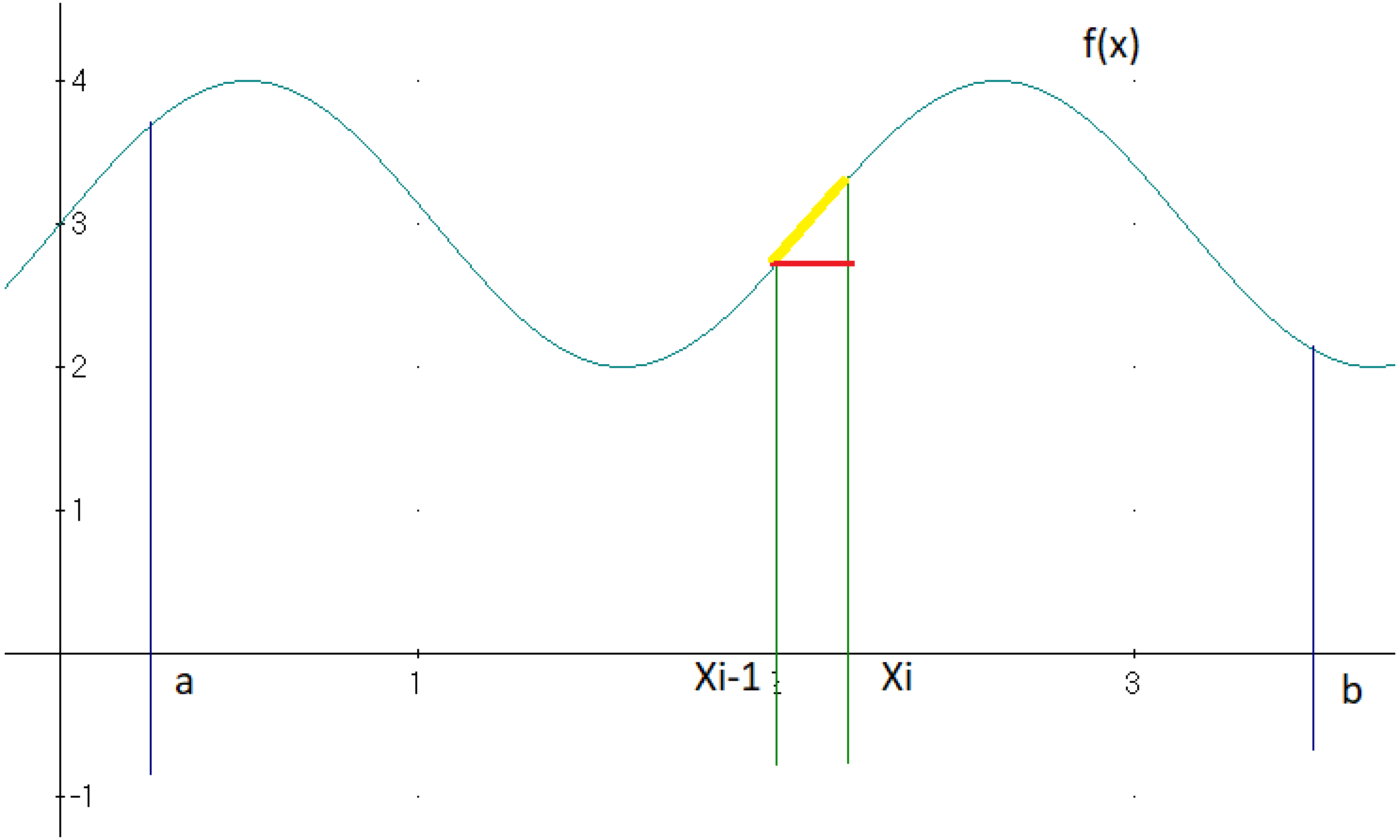
Determinemos la expresión mediante la cual es posible determinar la longitud de una curva.

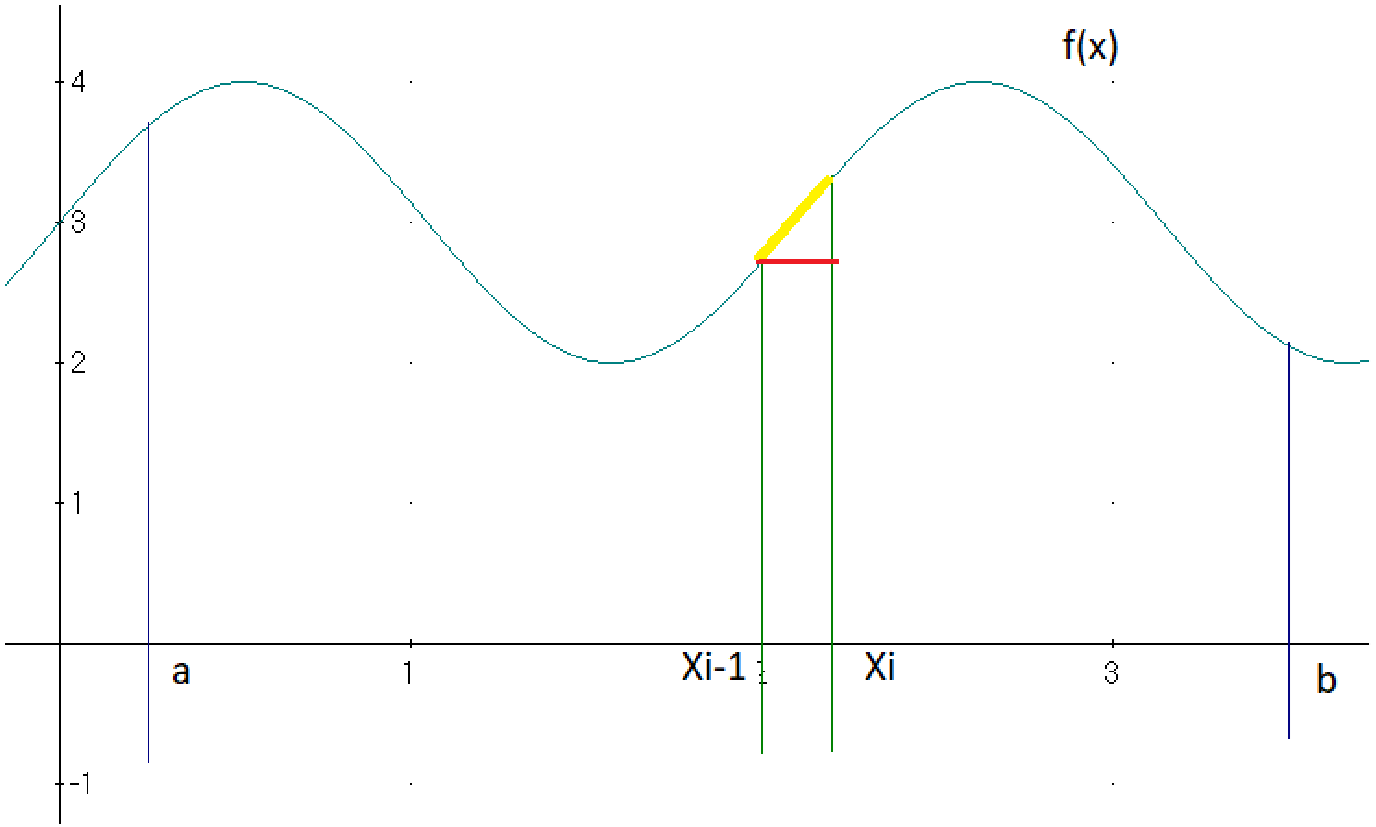
Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a,b]$.



Consideremos una partición del intervalo $[a,b]$ en n sub-intervalos de longitud Δx con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y centrémonos en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$.

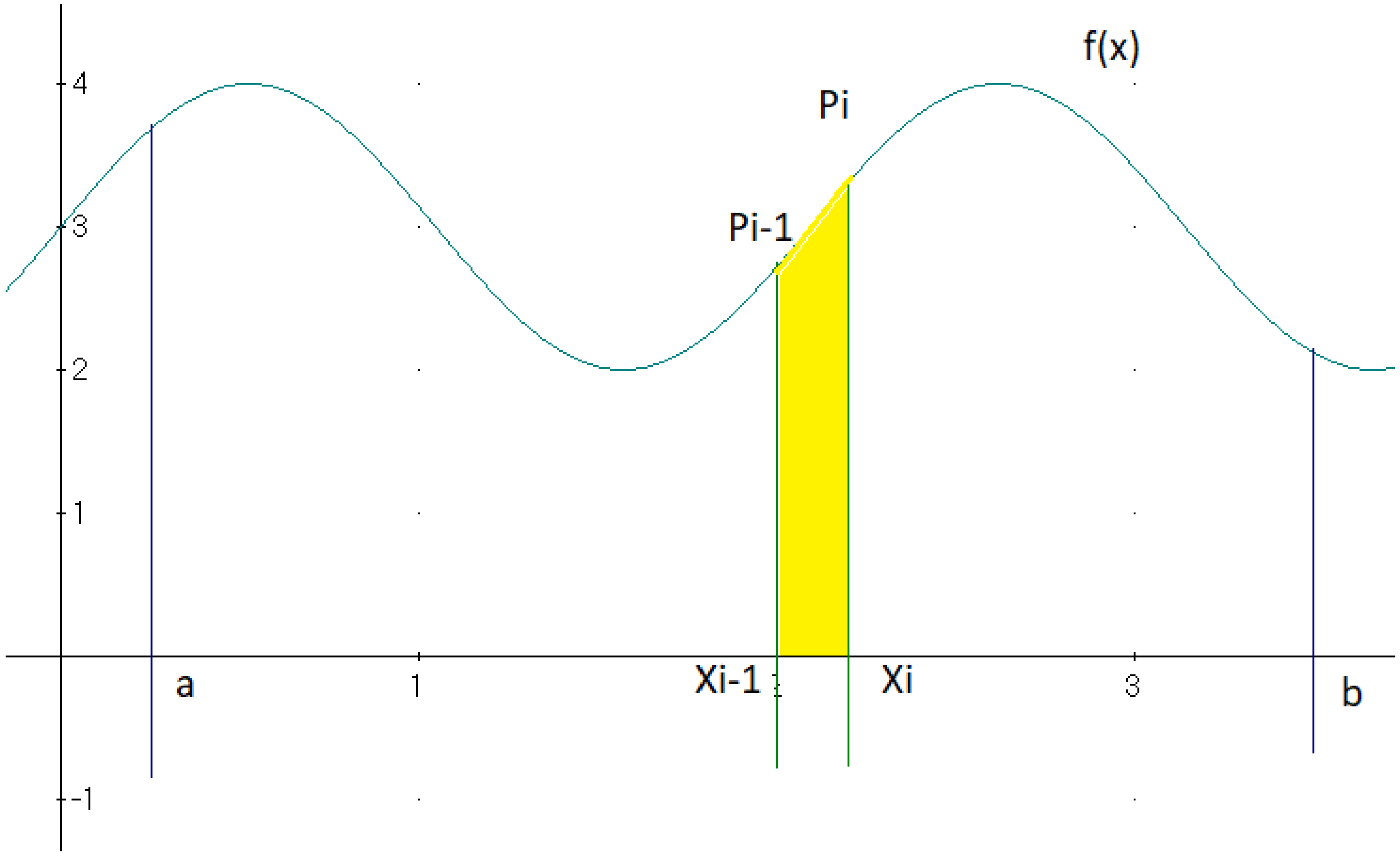
Tomando el rectángulo que se genera en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se tiene

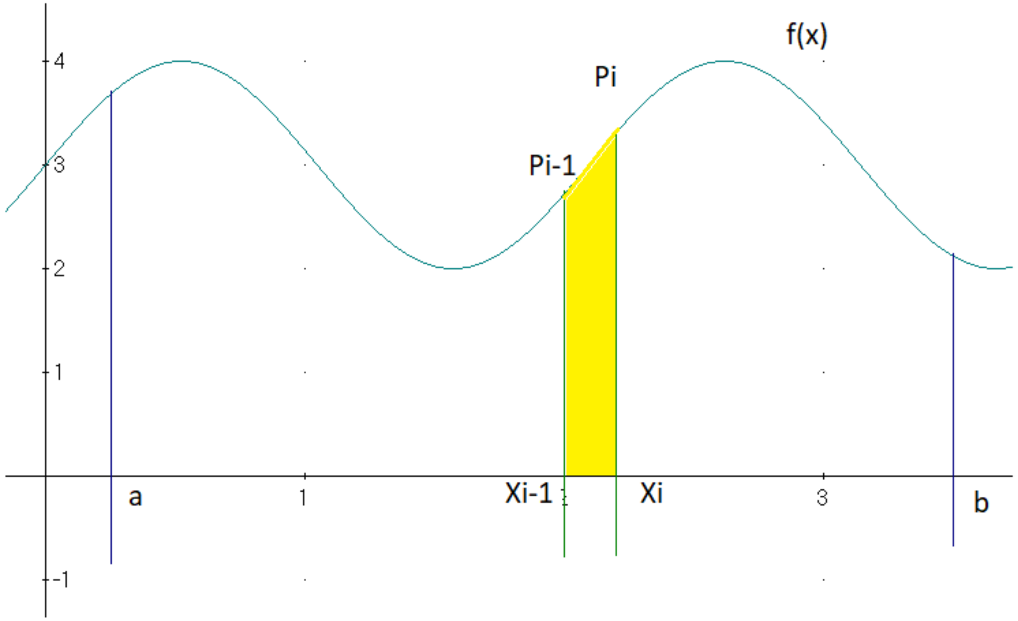




Marcamos con rojo en la parte superior el rectángulo que se forma en el intervalo.
Y marcamos con amarillo la línea que une los dos puntos $P_{i-1}\left(x_{i-1}, f\left(x_{i-1}\right)\right)$ y $P_i\left(x_i, f\left(x_i\right)\right)$ sobre la curva

Tomando el trapecio que se forma en el intervalo i-ésimo





Determinando la longitud L_i de la curva en este intervalo

$$L_i = d(P_{i-1}, P_i)$$

$$L_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Teorema del valor medio

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a) \qquad c\in[a,b]$$

Aplicando

Teorema del Valor Medio para la función $f(x)$ en el intervalo $[x_{i-1},x_i]$

$$f(x_i)-f(x_{i-1})=f'(x_i^*)(x_i-x_{i-1}) \text{ con } x_i^*\in[x_{i-1},x_i]$$

Así

$$L_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f'\left(x_i *\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)\right)^2}$$

$$L_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 + \left(f'\left(x_i *\right)\right)^2 \left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

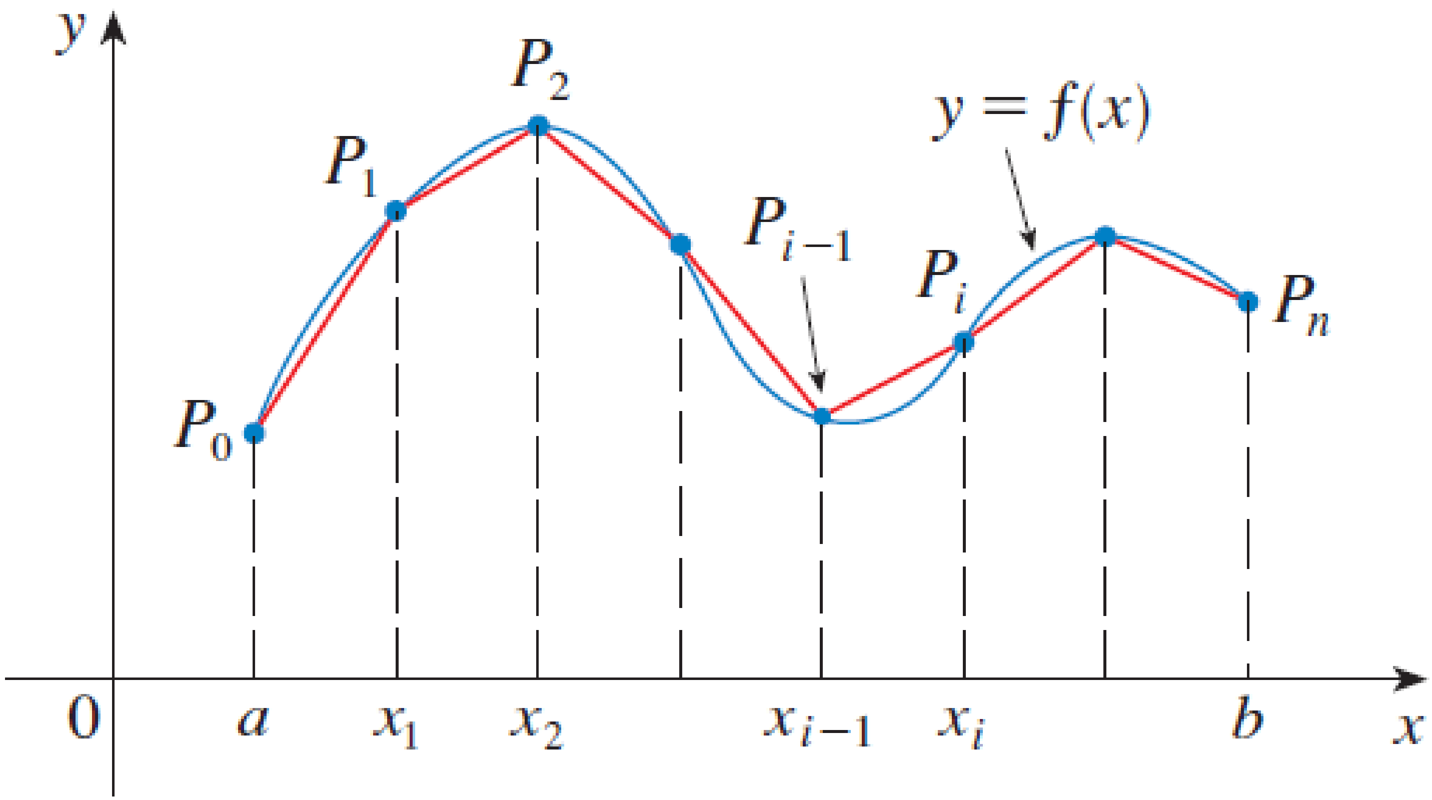
$$L_i = \sqrt{\left(x_i - x_{i-1}\right)^2 \left(1 + \left(f'\left(x_i *\right)\right)^2\right)}$$

$$L_i = \sqrt{\left(1 + \left(f'\left(x_i *\right)\right)^2\right)\left(x_i - x_{i-1}\right)^2}$$

$$L_i = \sqrt{1 + \left(f'\left(x_i *\right)\right)^2} \left(x_i - x_{i-1}\right)$$

$$L_i = \sqrt{1 + \left(f'\left(x_i *\right)\right)^2} \ \Delta x$$

Luego, para aproximarnos a la longitud de la curva $f(x)$ en $[a,b]$, calculamos las longitudes de cada sub-intervalo. Gráficamente tenemos



Sumando las longitudes en cada uno de los intervalos

$$L_1 = \sqrt{1+\left(f'\left(x_1{}^*\right)\right)^2}\ \Delta x$$

$$L_2 = \sqrt{1+\left(f'\left(x_2{}^*\right)\right)^2}\ \Delta x$$

$$\vdots$$

$$L_i = \sqrt{1+\left(f'\left(x_i{}^*\right)\right)^2}\ \Delta x$$

$$\vdots$$

$$L_n = \sqrt{1+\left(f'\left(x_n{}^*\right)\right)^2}\ \Delta x$$

Luego

$$L \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1+\left(f'\left(x_i{}^*\right)\right)^2}\ \Delta x$$

Tomando el límite cuando n tiende a infinito

$$L = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(x_i^*)\right)^2}\ \Delta x$$

De donde

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Definición: Sea f una función suave o alisada en $[a,b]$, esto es $f'(x)$ continua en $[a,b]$, la longitud de la curva $y=f(x)$ para $a \le x \le b$, es $L=\int_a^b \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$

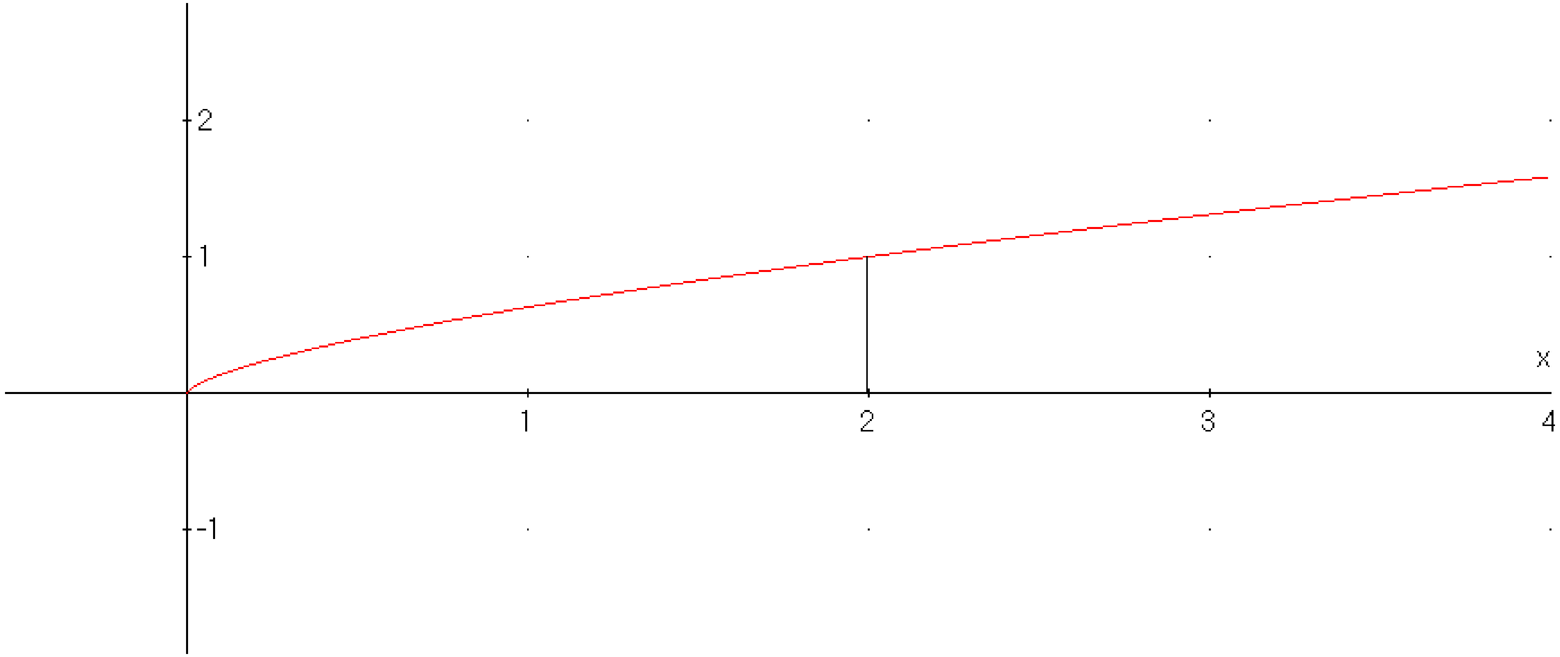
Como región de variable y,

Definición: Sea f una función suave o alisada en $[c,d]$, esto es $f'(y)$ continua en $[c,d]$, la longitud de la curva $x=f(y)$ para $c \le y \le d$, es $L=\int_c^d \sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy$

Ejemplo

Calcular la longitud de de arco de la curva $y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3}$ desde $x=0$ hasta $x=2$

La grafica que nos representa a la curva es



Determinemos si la función es suave, así calculemos la derivada

$$f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/3}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^{1/3}}$$

Luego $f'(x)$ no es continua para $x=0$

Por lo que f no es suave.

Cambiemos de variable, así usemos la función x=f(y)

$$y=\left(\frac{x}{2}\right)^{2/3} \Rightarrow y^{\frac{3}{2}}=\frac{x}{2} \Rightarrow x=2y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f(y)=2y^{\frac{3}{2}}$$

Función de variable y

$$f(y) = 2y^{\frac{3}{2}}$$

Variación de y

$$\text{Si } x = 0 \Rightarrow y = \left(\frac{0}{2}\right)^{2/3} = 0$$

$$\text{Si } x = 2 \Rightarrow y = \left(\frac{2}{2}\right)^{2/3} = 1$$

y varia de $y = 0$ hasta $y = 1$ -

Calculando la derivada

$$f'(y) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(2y^{\frac{1}{2}}\right) = 3y^{\frac{1}{2}} = 3\sqrt{y}$$

$f'(y)$ es continua en $[0,1]$, luego la función es suave.

Calculemos la longitud de la curva

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+\left(3\sqrt{y}\right)^2}\,dy=\int_0^1 \sqrt{1+9y}\,dy$$

$$L=\int_0^1 \sqrt{1+9y}\,dy \qquad u=1+9y \qquad du=9dy$$

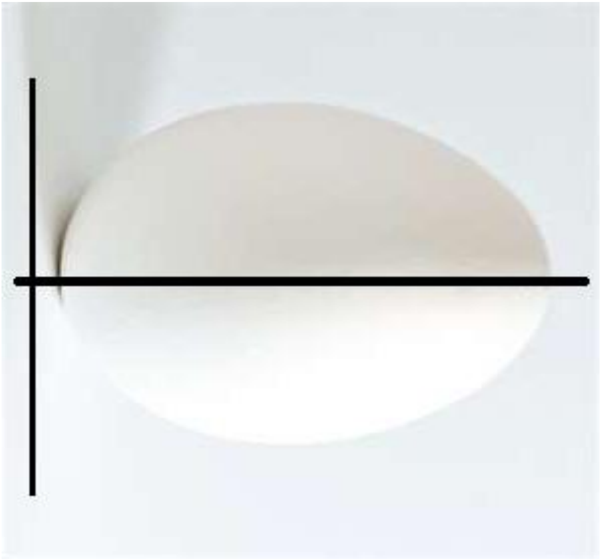
$$L=\frac{1}{9}\int_0^1 \sqrt{1+9y}\,dy=\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}(1+9y)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{27}(1+9y)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1$$

$$=\frac{2}{27}(1+9)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{27}(1)^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{27}(10)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{27}=\frac{2}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right)$$

ÁREA DE SUPERFICIE

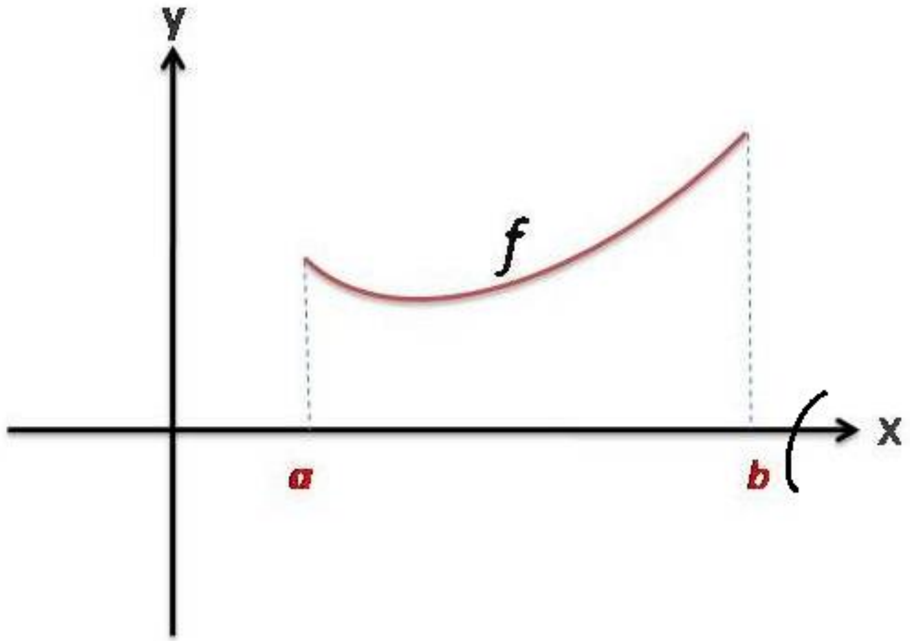
Una superficie de revolución se obtiene al girar una curva llamada *generatriz* alrededor de una recta que se utiliza como *eje* en el plano.

Superficies simétricas que son de revolución, son



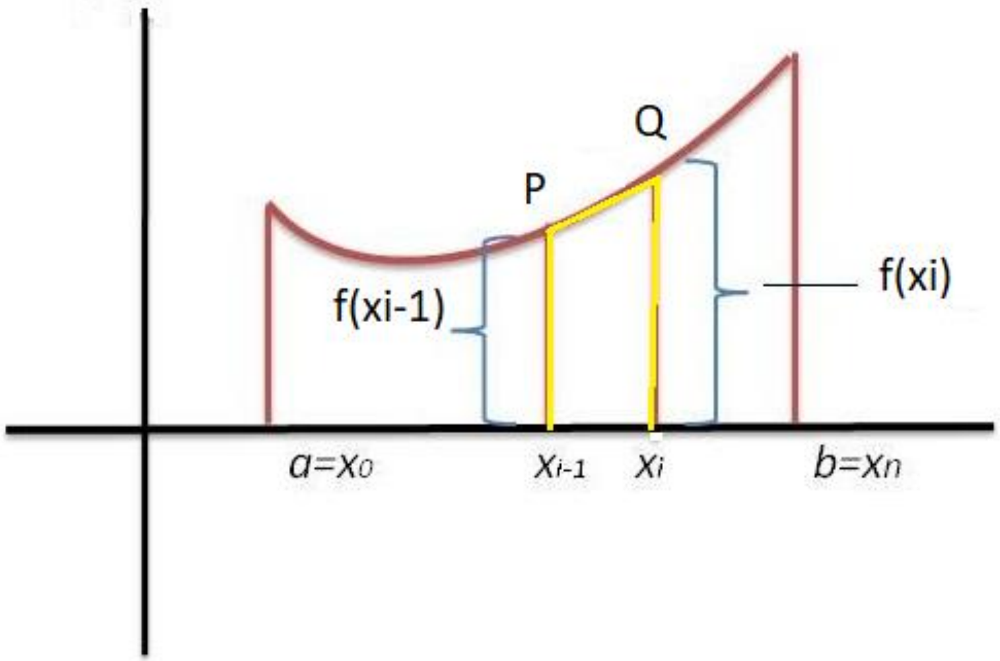
Para calcular el área de la superficie que se genera al girar una función $y = f(x)$ con respecto al eje x.

Supongamos que $y = f(x)$ es una función no negativa y con derivada $f'(x)$ continua en $[a,b]$.

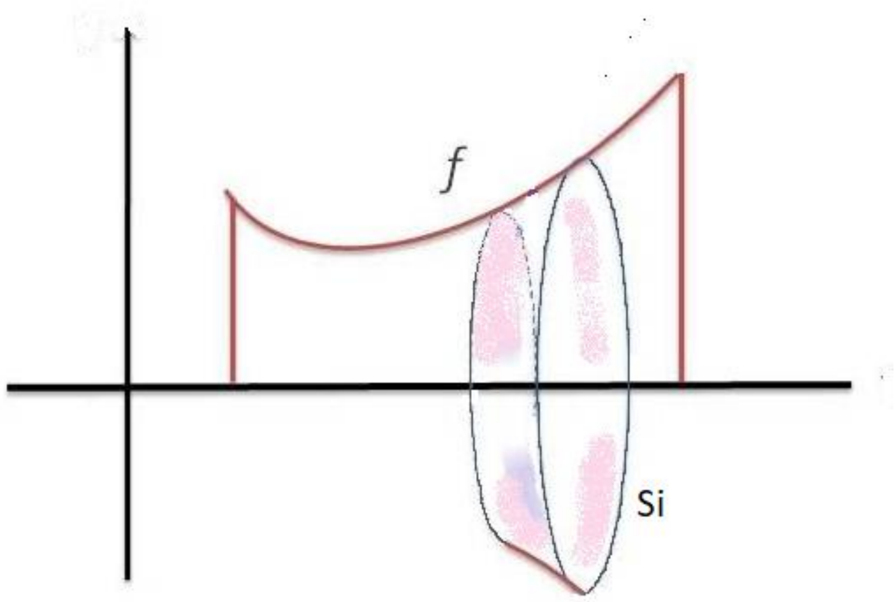


Tomemos una partición del intervalo $[a,b]$ en n sub-intervalos de longitud Δx con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$.

Considerando el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y tomando el segmento de recta que se tiene entre los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$ se forma un trapecio.

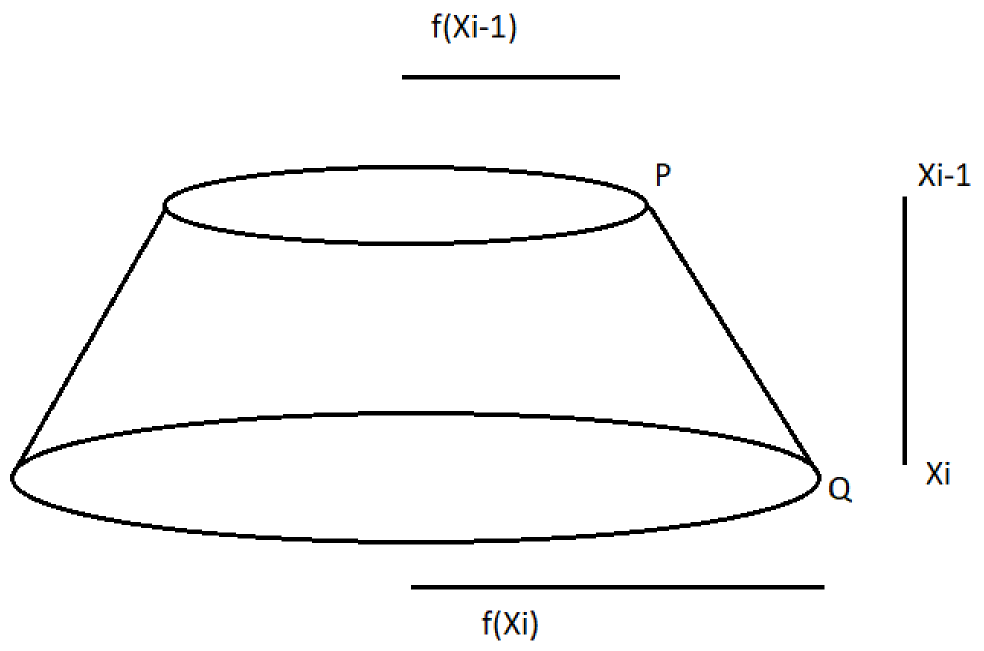


Al girar el trapecio, tenemos un cono truncado



Con área de superficie S_i

Dado el cono truncado



El área de superficie S de un cono truncado es

$$S = 2\pi\,(\text{radio medio})(\text{longitud generatriz})$$

La generatriz es la distancia entre P y Q

$$\text{Radio medio} = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Longitud generatriz $= L_{PQ}$ =Longitud de arco entre los puntos P y Q

$$\text{Longitud generatriz} = \sqrt{1 + \left(f'(x_i\,^*)\right)^2}\,\Delta x$$

El área de la superficie del cono truncado en el i-ésimo intervalo, es

$$S_i = 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1 + \left(f'(x_i\,^*)\right)^2}\,\Delta x$$

Calculando el área de superficie de los conos trucados que se generan sobre cada subintervalo

$$S_1 = 2\pi\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_1*)\right)^2}\,\Delta x$$

$$S_2 = 2\pi\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_2*)\right)^2}\,\Delta x$$

$$\vdots$$

$$S_i = 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_i*)\right)^2}\,\Delta x$$

$$\vdots$$

$$S_n = 2\pi\left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_n*)\right)^2}\,\Delta x$$

Sumando todas las áreas de los conos truncados

$$S \approx 2\pi\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_1^*)\right)^2}\,\Delta x + 2\pi\left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_2^*)\right)^2}\,\Delta x + \cdots$$

$$+\,2\pi\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_i^*)\right)^2}\,\Delta x + \cdots + 2\pi\left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_n^*)\right)^2}\,\Delta x$$

Así

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} 2\pi\left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'(x_i^*)\right)^2}\,\Delta x$$

Tomando el límite cuando *n* tiende a infinito, el área de superficie es

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}2\pi\left(\frac{f\left(x_{i-1}\right)+f\left(x_i\right)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x_i*\right)\right)^2}\,\Delta x$$

$$S=\int_a^b 2\pi\left(\frac{f\left(x\right)+f\left(x\right)}{2}\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}\,dx$$

$$S=\int_a^b 2\pi f\left(x\right)\sqrt{1+\left(f'\left(x\right)\right)^2}\,dx$$

Definición: Sea f una función suave o alisada en $[a,b]$, esto es $f'(x)$ continua en $[a,b]$, el área S de la superficie generada al girar la gráfica de $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$, alrededor del eje x, es

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx$$

siendo $f(x)$ el radio medio del cono truncado que se genera.

Si la región es de la variable y

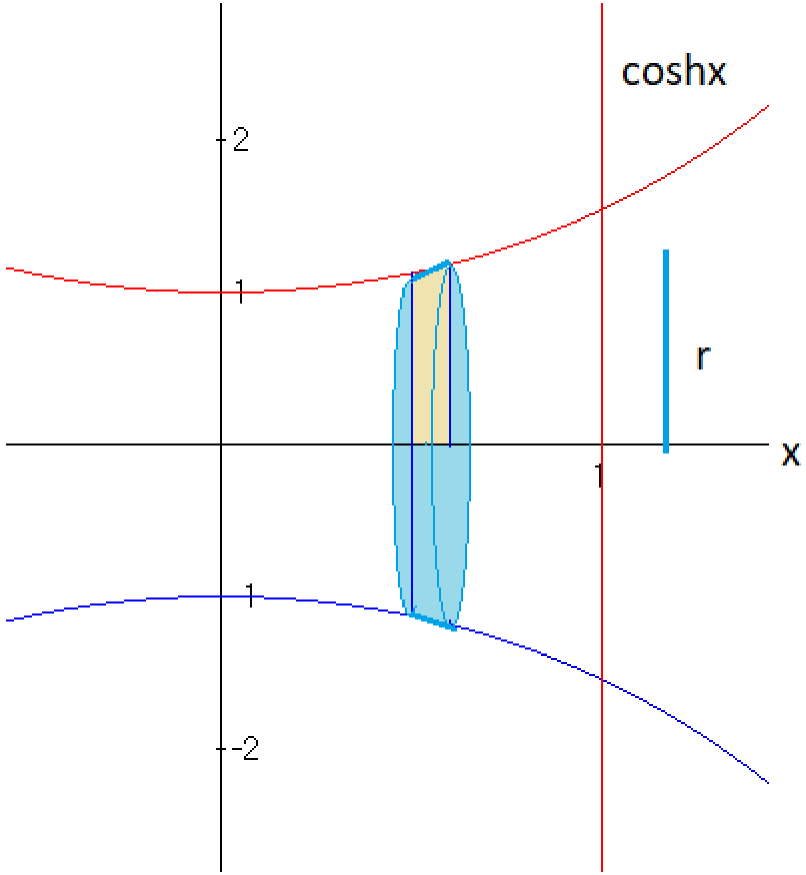
Definición: Sea f una función suave o alisada en $[c,d]$, esto es $f'(y)$ continua en $[c,d]$, el área S de la superficie generada al girar la gráfica de $x=f(y)$ para $c\le y\le d$, alrededor del eje y, es

$$S=\int_c^d 2\pi f(y)\sqrt{1+\left(f'(y)\right)^2}\,dy$$

siendo $f(y)$ el radio medio del cono truncado que se genera.

Ejemplo 1.

Calcular el área de la superficie generada al girar la región limitada por la función $y = \cosh x$ desde $x = 0$ hasta $x = 1$, con respecto del eje x



Radio coincide con la función, así

$$y = f(x) = \cosh x$$

donde x varía de 0 a 1

Veamos si f es suave

$$f'(x) = \sinh x$$

$f'(x)$ es continua para todo x. luego la función es suave

Calculando el área de superficie

$$S=\int_0^1 2\pi\cosh x\sqrt{1+(\sinh x)^2}\,dx \;=\int_0^1 2\pi\cosh x\sqrt{\cosh^2 x}\,dx \;=\int_0^1 2\pi\cosh x\cosh x\,dx$$

$$=\int_0^1 2\pi\cosh^2 x\,dx \;=2\pi\int_0^1 \frac{\cosh 2x+1}{2}\,dx \;=\pi\int_0^1(\cosh 2x+1)\,dx=\pi\left(\frac{1}{2}\sinh 2x+x\right)_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{1}{2}\sinh 2+1-\frac{1}{2}\sinh 0-0\right)=\pi\left(\frac{1}{2}\sinh 2+1\right)=8.8386$$

Ejemplo 2.

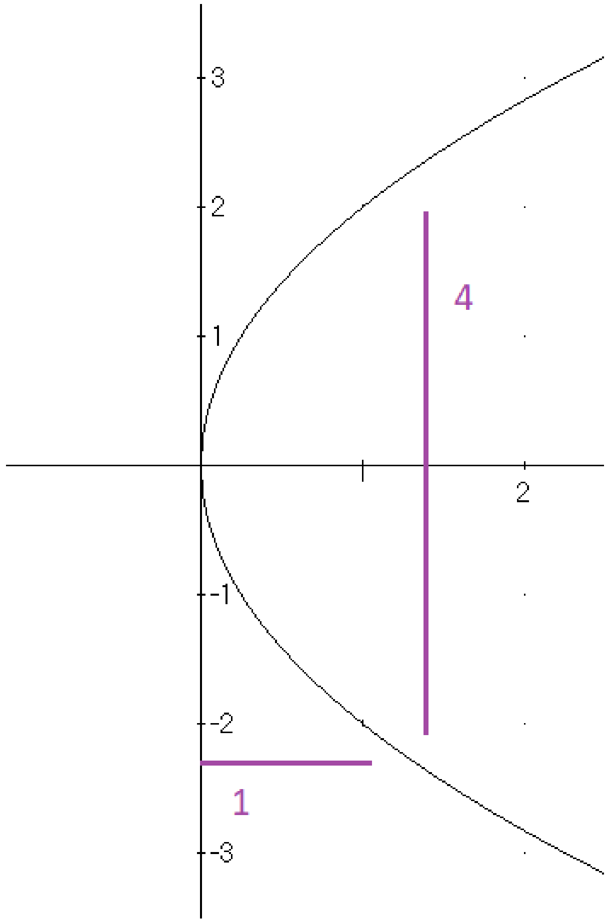
La forma del reflector de un faro se obtiene haciendo girar una parábola alrededor de su eje. Calcular el área de la superficie de un reflector que mide 4 pies de diámetro y tiene una profundidad de 1 pie.

Tenemos un faro como

El reflector del faro tiene la forma de una parábola

Podemos situar la parábola con centro en el origen

Ubicamos la parábola en el plano cartesiano



La parábola pasa por los puntos (1,-2) y (1,2)

Ecuación de la parábola con centro en el origen que abre hacia la derecha

$$y^2 = 4px$$

Como el punto (1,2) esta en la parábola cumple su ecuación

$$(2)^2 = 4p(1) \Rightarrow 4 = 4p \Rightarrow p = 1$$

La función es $y^2 = 4x$

$$y = f(x) = 2\sqrt{x}$$

Veamos si la función es suave en (0,1)

$$y = 2\sqrt{x}$$

$$y' = \frac{2}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

La derivada es continua en (0,1), luego la función es suave

Calculando el área de superficie

$$S = \int_0^1 2\pi\left(2\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx = 4\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}\right)\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)}\,dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{x}\sqrt{\frac{x+1}{x}}\,dx$$

$$= 4\pi\int_0^1 \sqrt{x}\,\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}}\,dx = 4\pi\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \frac{8\pi}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{8\pi}{3}(1+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\pi}{3}(0+1)^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{8\pi}{3}(2)^{\frac{3}{2}} - \frac{8\pi}{3}(1)^{\frac{3}{2}} = \frac{8\pi}{3}\left((2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) = \frac{8\pi}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$$