SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS

Hasta el momento hemos visto el concepto de serie y como el determinar la sucesión de sumas parciales de la serie nos permite determinar si la serie converge o diverge; sin embargo, no siempre es posible el determinar una expresión algebraica para la n-ésima suma parcial de la serie.

Las series especiales: geométrica, telescópica y armónica, podemos identificarlas y de acuerdo a su tipo determinar si convergen o divergen, pero también no todas las series son especiales, entonces, ¿cómo poder determinar la convergencia de una serie?, y si esta converge ¿cuál es su suma?

Con este tema ampliamos el tipo de series para poder determinar si son convergentes o divergentes, se tomará el caso particular de series de términos positivos ya que las sumas parciales forman sucesiones no decrecientes, y las sucesiones no decrecientes que están acotadas superiormente convergen. sin embargo, ya no podemos determinar la suma de la serie.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA

PARA LAS SERIES DE TÉRMINOS POSITIVOS, SE DETERMINARÁ LA CONVERGENCIA O DIVERGENCIA DE LA SERIES USANDO LOS CRITERIOS

- CRITERIO DE LA INTEGRAL
- CRITERIO BÁSICO DE COMPARACIÓN
- CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE
- CRITERIO DE LA RAZÓN O DE COCIENTE
- CRITERIO DE LA RAÍZ

CRITERIO DE LA INTEGRAL

Teorema.

Suponga que f es una función positiva, continua y decreciente en $[1,\infty)$ y sea $a_n = f(n)$, entonces la serie infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente si y sólo si la integral impropia $\int_1^{\infty} f(x)dx$ es convergente, esto es:

i) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

ii) Si $\int_1^{\infty} f(x)dx$ diverge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

EJEMPLO 1.

Usar el criterio de la integral para mostrar que la serie armónica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge.**

Como $a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$

Condiciones del criterio.

Función positiva $f(x) = \frac{1}{x}$ es positiva para $x \geq 1$

Función continua $f(x) = \frac{1}{x}$ no es continua para $x = 0$, así $f(x)$ es continua para $x \geq 1$

Función decreciente $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ y se tiene que $-\frac{1}{x^2} < 0$ para toda x, luego $f'(x) < 0$ y la función es decreciente en particular para $x \geq 1$.

Calculando la integral impropia

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \to \infty} \left[\ln x \right] \Big|_{1}^{b} = \lim_{b \to \infty} \left[\ln b - \ln 1 \right] = \lim_{b \to \infty} \ln b = \infty$$

Así la integral impropia diverge y por el criterio de la integral la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **diverge.**

EJEMPLO 2.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

Como $a_n = ne^{-n^2} \Rightarrow f(x) = xe^{-x^2}$

Función positiva

$f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva si $x > 0$ y si $e^{-x^2} > 0$, la función exponencial siempre es positiva, su imagen es $(0, \infty)$, por lo cual, f es positiva para todo $x > 0$. En particular $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva para $x \geq 1$.

Función continua

$f(x) = xe^{-x^2}$ es continua para todo valor de x, ya que no existe un valor de x para el cual se indetermine, En particular $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva para $x \geq 1$.

Función decreciente

Calculemos la derivada $f(x) = x\left(-2xe^{-x^2}\right) + e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(-2x^2 + 1\right)$

Tenemos $e^{-x^2} > 0$ para toda x y $-2x^2 + 1 < 0$ para $x \geq 1$,

luego $f(x) = xe^{-x^2}$ es decreciente si $x \geq 1$

Calculando la integral impropia

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}dx$$

Calculando la integral

$$\int xe^{-x^2}dx \text{ , sea } u=-x^2 \text{ y } du=-2xdx \Rightarrow \int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{u}du=-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

Así

$$\int_1^{\infty} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^{b} xe^{-x^2}dx = \lim_{b\to\infty}-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^b = \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-(1)^2}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-(\infty)^2}+\frac{1}{2}e^{-1}=-\frac{1}{2}e^{-\infty}+\frac{1}{2}e^{-1}=0+\frac{1}{2}e^{-1}=\frac{1}{2}e^{-1}$$

SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ **CONVERGE**

SERIE HIPERARMÓNICA

Teorema: La serie hiperarmónica o serie p, definida como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots$$

Converge si $p > 1$ y diverge si $p \leq 1$.

DEMOSTRACIÓN.

Usemos el criterio de la integral para demostrarlo.

Sea p un número real positivo y $f(x) = \dfrac{1}{x^p} = x^{-p}$, veamos que cumple con las condiciones del criterio

Positiva, $f(x)=\dfrac{1}{x^{p}}=x^{-p}$ es positiva siempre que $x\geq 1$

Continua, $f(x)=\dfrac{1}{x^{p}}=x^{-p}$ no es continua si $x=0$, luego es continua para $x\geq 1$

Decreciente, calculemos la derivada $f'(x)=-px^{-p-1}=-\dfrac{p}{x^{p+1}}$, si $x\geq 1$ entonces $f'\left(x\right)<0$ y

al función $f(x)=\dfrac{1}{x^{p}}=x^{-p}$ es decreciente para $x\geq 1$

CALCULANDO LA INTEGRAL IMPROPIA

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-p}dx = \lim_{b\to\infty}\left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1^{-p+1}}{-p+1} = \lim_{b\to\infty}\frac{b^{-p+1}}{-p+1}-\frac{1}{-p+1}$$

$$=\frac{1}{-p+1}\left(\left(\lim_{b\to\infty} b^{-p+1}\right)-1\right)$$

Determinemos

$$\lim_{b\to\infty} b^{-p+1}$$

$$\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty^{-p+1}$$

El resultado depende del signo del exponente, veámoslo por casos.

Si $-p+1>0 \Rightarrow -p>-1 \Rightarrow p<1$,

para este caso $\lim\limits_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty^{-p+1} = (\infty)^{\text{númeropositivo}} = \infty$

y la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx$ diverge.

Así por el criterio de la integral, la serie diverge.

Si $-p+1<0 \Rightarrow -p<-1 \Rightarrow p>1$,

para este caso $\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \infty^{-p+1} = (\infty)^{\text{númeronegativo}}$, es conveniente que los exponentes sean siempre positivos, así se tiene

$$\lim_{b\to\infty} b^{-p+1} = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^{-(-p+1)}} = \frac{1}{(\infty)^{-(\text{númeronegativo})}} = \frac{1}{(\infty)^{\text{númeropositivo}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Y por tanto, $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}dx = \frac{1}{1-p}\left(\left(\lim_{b\to\infty} b^{1-p}\right)-1\right) = \frac{1}{1-p}(0-1) = -\frac{1}{1-p} = \frac{1}{p-1}$,

la integral impropia converge, así por el criterio de la integral se concluye que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge.

Nos falta analizar qué pasa si $-p+1=0 \Rightarrow p=1$ y al serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ es $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, es decir la serie armónica y ya demostramos que diverge.

Por lo tanto la serie hiperarmónica o serie p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, converge si $p>1$ y diverge si $p \leq 1$.

EJEMPLO 3.

DETERMINAR SI LAS SERIES DADAS CONVERGEN O DIVERGEN

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es una serie hiperarmónica con $p = 2$, como $p > 1$, se concluye que la serie es convergente.

DETERMINAR SI LAS SERIES DADAS CONVERGEN O DIVERGEN

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sqrt{n}}$ se puede representar como $5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 5\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ la cual es una serie hiperarmónica con $p = \frac{1}{2}$ y como $p < 1$, se concluye que la serie es divergente.

CRITERIO BÁSICO DE COMPARACIÓN

Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos.

a) Si $\sum b_n$ converge y $a_n \leq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es convergente.

b) Si $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$ para todo entero positivo n, entonces $\sum a_n$ es divergente.

Observación.

Al aplicar el Criterio Básico de Comparación, se debe de tener presente las series especiales, cuya convergencia o divergencia se pueda determinar fácilmente. Se puede tener series geométricas, las cuales convergen si $|r|<1$ y divergen en otro caso, las series hiperarmónicas, las cuales convergen si $p>1$ y divergen en otro caso, y las series cuyo límite de su n-ésimo término sea diferente de cero ya que estas divergen, esto último aplicando el criterio del n-ésimo termino para la divergencia.

EJEMPLO 4.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3+5^n}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

El término general de la serie es $a_n = \frac{1}{3+5^n}$

Tenemos que determinar la expresión del término general de la sucesión b_n

Sabemos que

$$3+5^n > 5^n \Rightarrow \frac{1}{3+5^n} < \frac{1}{5^n}$$

Así $b_n = \dfrac{1}{5^n}$ y $a_n < b_n$

Determinemos si la serie $\sum b_n$ converge y diverge, para poder aplicar el criterio básico de comparación.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{5}\right)^n$, es una serie geométrica con $r = \dfrac{1}{5}$, como $\left|\dfrac{1}{5}\right| < 1$, la serie converge.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{5^n}$ converge y $a_n = \dfrac{1}{3+5^n} < \dfrac{1}{5^n} = b_n$, esto es $a_n < b_n$.

Por el criterio básico de comparación, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3+5^n}$ converge.

EJEMPLO 5.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}-1}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

El término general de la serie es $a_n = \frac{3}{\sqrt{n}-1}$

Tenemos que determinar la expresión del término general de la sucesión b_n

Sabemos que

$$\sqrt{n}-1 < \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}-1} > \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{3}{\sqrt{n}-1} > \frac{3}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Así $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}-1}$ y $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, esta es una serie hiperarmónica con $p = \dfrac{1}{2} < 1$ y la serie diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge y $a_n = \dfrac{3}{\sqrt{n}-1} > \dfrac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, esto es $a_n > b_n$.

Por el criterio básico de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{3}{\sqrt{n}-1}$ diverge.

EJEMPLO 6.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ CONVERGE O DIVERGE.

El término general de la serie es $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$

Tenemos que determinar la expresión del término general de la sucesión b_n

Sabemos que

$$\sqrt{n}+1 > \sqrt{n} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+1} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Así $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1}$ y $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \dfrac{1}{2} < 1$ y la serie diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge y $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}+1} < \dfrac{1}{\sqrt{n}} = b_n$, esto es $a_n < b_n$.

El criterio básico de comparación no nos permite concluir si la serie converge o diverge. Ya que no se cumplen ambas condiciones, el criterio dice que $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$.

Hay que usar otro criterio y hasta el momento solo conocemos el Criterio de la Integral

Sea $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}$. f es una función positiva y continua para toda $x\geq 0$, en consecuencia también para toda $x\geq 2$.

La derivada de la función es $f'(x)=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)}$ la cual es negativa para todo $x\geq 0$, por lo cual es decreciente para toda $x\geq 2$.

Calculando la integral impropia

$$\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}$$

Calculando $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}$

Sea $u=\sqrt{x} \Rightarrow du=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx \Rightarrow dx=2\sqrt{x}du=2udu$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\int \frac{2udu}{u+1}$$

Tomando $v=u+1 \Rightarrow dv=du$ y $u=v-1$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\int \frac{2udu}{u+1}=2\int \frac{v-1}{v}dv=2\int dv-2\int \frac{dv}{v}$$

$$=2v-2\ln v=2(u+1)-2\ln(u+1)$$

$$=2\left(\sqrt{x}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)$$

RESOLVIENDO LA INTEGRAL IMPROPIA

$$\lim_{b\to\infty}\int_2^b \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \lim_{b\to\infty}\left(2\left(\sqrt{x}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{x}+1\right)\Big|_2^b\right)$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(\left[2\left(\sqrt{b}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{b}+1\right)\right]-\left[2(2)-2\ln 2\right]\right)$$

$$=\left(\lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{b}+1\right)\right)-4+2\ln 2$$

Calculemos el límite

$$\lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{b}+1\right)=\infty-\infty \text{ , forma indeterminada}$$

Resolviendo el límite

$$\lim_{b\to\infty} 2\left(\sqrt{b}+1\right)-2\ln\left(\sqrt{b}+1\right)=2\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}+1\right)-\ln\left(\sqrt{b}+1\right)$$

usando el hecho de que el logaritmo natural y la exponencial son funciones inversas, esto es $a=\ln e^{a}$

Así $\sqrt{b}+1=\ln e^{\sqrt{b}+1}$

$$=2\lim_{b\to\infty}\ln e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}-\ln\left(\sqrt{b}+1\right)=2\lim_{b\to\infty}\ln\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right)=2\ln\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right)=2\ln\left(\frac{e^{\infty}}{\infty}\right)$$

Calculemos el límite $\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right)=\frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la Regla de L´Hospital

$$\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right)=\lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{b}}e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\frac{1}{2\sqrt{b}}}=\lim_{b\to\infty}e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}=e^{\infty}=\infty$$

Luego

$$=2\int_{2}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=2\ln\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{\left(\sqrt{b}+1\right)}}{\sqrt{b}+1}\right)=2\ln\left(\infty\right)=\infty$$

La integral impropia diverge y en consecuencia la serie $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ **diverge.**

EJEMPLO 7.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

El término general de la serie es $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$

Tenemos que determinar la expresión del término general de la sucesión bn

Sabemos que

$$n^2+1 > n^2 \Rightarrow \sqrt[3]{n^2+1} > \sqrt[3]{n^2} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

Así $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ y $b_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \dfrac{2}{3} < 1$ y la serie diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ diverge y $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}} < \dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = b_n$, esto es $a_n < b_n$.

El criterio básico de comparación no nos permite concluir si la serie converge o diverge. Ya que no se cumplen ambas condiciones, el criterio dice que $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$.

Hay que usar otro criterio y hasta el momento solo conocemos el Criterio de la Integral, pero veamos el criterio siguiente para aplicarlo posteriormente.

CRITERIO DE COMPARACIÓN POR LÍMITE

Supongamos que $a_n > 0$ y $b_n > 0 \quad \forall n \geq N$ entero.

1) Si $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = c > 0 \Rightarrow \sum a_n$ y $\sum b_n$ convergen o divergen ambas.

2) Si $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ y si $\sum b_n$ converge entonces $\sum a_n$ converge.

3) Si $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \infty$ y si $\sum b_n$ diverge entonces $\sum a_n$ diverge.

EJEMPLO 8.

DETERMINAR SI LA SERIE $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

Esta es la misma serie que la del ejemplo 7, en donde encontramos que $b_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ **, sin embargo al usar el criterio básico de comparación no obtuvimos un resultado.**

Usemos el criterio de comparación por límite con $a_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **y** $b_n=\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$

CALCULANDO EL LÍMITE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}}{\sqrt[3]{n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{\frac{n^2}{n^2+1}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2+1}}$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n^2}{n^2}}{\dfrac{n^2+1}{n^2}}}=\sqrt[3]{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n^2}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{1+\dfrac{1}{(\infty)^2}}}=\sqrt[3]{\frac{1}{1+0}}=1>0$$

Como el límite es mayor que cero el Criterio de Comparación por Límite nos dice que las dos series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ **y** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ **convergen o divergen.**

Para determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$, hay que determinar la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$$

Esta es una serie hiperarmónica o serie p con p<1 y diverge.

Luego con por el Criterio de Comparación por Límite, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+1}}$ diverge.

EJEMPLO 9.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ CONVERGE O DIVERGE.

Esta es la misma serie que la del ejemplo 6, en donde encontramos que $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$, sin embargo al usar el criterio básico de comparación no obtuvimos un resultado y lo resolvimos con el criterio de la integral.

Usemos el criterio de comparación por límite con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ y $b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$

CALCULANDO EL LÍMITE

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}{\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{\infty}}}=1>0$$

Como el límite es mayor que cero el Criterio de Comparación por Límite nos dice que las dos series $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+1}$ **y** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ **convergen o divergen.**

Para determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ **, hay que determinar la convergencia de la serie**

$$\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Esta es una serie hiperarmónica o serie p con p<1 y diverge.

Luego con por el Criterio de Comparación por Límite, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$ **diverge.**

Estos dos últimos ejemplos ya habíamos intentado resolverlos por el criterio básico de comparación y esto hizo posible que tuviéramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ pero no siempre tenemos que iniciar aplicando este criterio.

Una forma de obtener la expresión para la serie $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ es usando los términos mayores del numerador y de denominador de la función dada en el término general de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

EJEMPLO 10.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

Para determinar b_n tomamos los términos mayores del numerador y del denominador de

$$a_n = \frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$$

Así

$$b_n = \frac{3n^2}{2^n n^2} = \frac{3}{2^n}$$

Usemos el Criterio de Comparación por Límite.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}}{\dfrac{3}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2+5n\right)2^n}{3\cdot 2^n\left(n^2+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(3n^2+5n\right)}{3\left(n^2+1\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^2+5n}{n^2}}{3\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{3n^2+5n}{n^2}}{3\left(\dfrac{n^2+1}{n^2}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{5}{n}}{3\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}=\frac{3+\dfrac{5}{\infty}}{3\left(1+\dfrac{1}{(\infty)^2}\right)}=\frac{3}{3(1)}=1>0$$

Como el límite es mayor que cero, las dos series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$ **y** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2^n}$

convergen o divergen.

Determinemos si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n}$ converge o diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ es geométrica con $r = \frac{1}{2}$ y $|r| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ por lo que la serie converge.

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5n}{2^n\left(n^2+1\right)}$ converge.

CRITERIO DE LA RAZÓN O DEL COCIENTE

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

Entonces:

i) Si $L < 1$, la serie converge.

ii) Si $L > 1$, la serie diverge.

iii) Si $L = 1$, el criterio no determina convergencia o divergencia, hay que usar otro criterio.

EJEMPLO 11.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$ CONVERGE O DIVERGE.

Usando el Criterio de la Razón

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!n!} \text{ y } a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2(n+1))!n!n!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!n!n!}{(2n)!(n+1)!(n+1)!}$$

Usando la definición del factorial

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!n!n!}{(2n)!(n+1)n!(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\dfrac{2n+2}{n}\right)\left(\dfrac{2n+1}{n}\right)}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)\left(\dfrac{n+1}{n}\right)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\dfrac{2}{n}\right)\left(2+\dfrac{1}{n}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} = \frac{\left(2+\dfrac{2}{\infty}\right)\left(2+\dfrac{1}{\infty}\right)}{\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)} = \frac{(2)(2)}{(1)(1)} = 4 > 1$$

Por el criterio, la serie diverge.

CRITERIO DE LA RAÍZ

Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos tal que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$$

Entonces:

i) Si $L < 1$, la serie converge.

ii) Si $L > 1$, la serie diverge.

iii) Si $L = 1$, el criterio no determina convergencia o divergencia, hay que usar otro criterio.

EJEMPLO 12.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{n^n}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

Usando el Criterio de la Raíz

$$a_n = \frac{2^{3n+1}}{n^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2^{3n+1}}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2^{3n+1}}}{\sqrt[n]{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2^{3n+1}\right)^{\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3+\frac{1}{n}}}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$= 8 \lim_{n\to\infty} \frac{2^{\frac{1}{n}}}{n} = 8\left(\frac{2^{\frac{1}{\infty}}}{\infty}\right) = 8\left(\frac{2^0}{\infty}\right) = 8(0) = 0 < 1$$

Por lo que la serie converge.

EJEMPLO 13.

DETERMINAR SI LA SERIE $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ **CONVERGE O DIVERGE.**

Primero usemos el Criterio de la Raíz

$$a_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\sqrt[n]{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{\ln n}}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Calculemos cada uno de los límites, para que sea válido el procedimiento ambos limites deben de existir.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{\frac{1}{n}}=(\ln\infty)^{\frac{1}{\infty}}=(\infty)^{0}$$, esta es una forma indeterminada de potencia

Resolviéndola $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(\ln n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)}{n}=\frac{\ln(\ln\infty)}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(\ln n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}\left(\frac{1}{n}\right)}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}=\frac{1}{\infty}=0$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}=e^{0}=1$

Calculando el otro limite $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}=1^{\frac{3}{2}}=1$. Debido al límite importante

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$,

Luego

$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}}=\dfrac{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\ln n}}{\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n]{n}\right)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{1}{1}=1$, luego no se puede determinar si la serie converge o diverge

con este criterio hay que usar otro.

Cuando para determinar la convergencia de una serie aplicamos el criterio de la raíz o de la razón y obtenemos que el valor del límite es uno entonces al aplicar el otro criterio razón o raíz respectivamente también se obtendrá uno.

Apliquemos el Criterio de la Razón.

$$a_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} \text{ y } a_{n+1} = \frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}{\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}} \ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}} \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{\ln n}$$

Calculemos cada uno de los límites, para que el procedimiento sea válido ambos deben de existir.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^{\frac{3}{2}}=1^{\frac{3}{2}}=1$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\frac{\infty}{\infty}$, aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+1)}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1}{1+\frac{1}{\infty}}=1$$

Luego $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{\ln(n+1)}{(n+1)^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{\frac{3}{2}}}{(n+1)^{\frac{3}{2}}} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = (1)(1) = 1$

Luego no se puede determinar si la serie converge o diverge con este criterio hay que usar otro.

Usemos el Criterio Básico de Comparación.

Tenemos $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ **, determinemos bn**

Podemos comparar el logaritmo natural con cualquier potencia de n, en particular comparémosla con n, así

$$\ln n < n$$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{n}{n^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$$

Así $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ **y** $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$, es una serie hiperarmónica con $p = \frac{1}{2} < 1$ y la serie diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ diverge y $a_n = \frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} < \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = b_n$, esto es $a_n < b_n$.

El criterio básico de comparación no nos permite concluir si la serie converge o diverge. Ya que no se cumplen ambas condiciones, el criterio dice que $\sum b_n$ diverge y $a_n \geq b_n$.

Usemos el Criterio de Comparación por Límite.

Tenemos que $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ **y** $b_n = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$

Calculando el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}}{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0\text{, así }\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0\text{ y la serie }\sum_{n=2}^{\infty}b_n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\text{ diverge, por lo}$$

cual el criterio no determina si la serie converge o diverge hay que usar otro criterio.

Usemos el Criterio de la Integral.

Tenemos $a_n = \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$, luego $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}$

Veamos si cumple las condiciones

Positiva, sabemos $\ln x \geq 0$ si $x \geq 1$ y $x^{\frac{3}{2}} > 0$ si $x > 0$, luego la función es positiva si $x \geq 1$

Continua, la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}$, no es continua en $x = 0$ y su dominio es $(0.\infty)$, luego la función es continua si $x \geq 1$

Decreciente, calculemos la derivada

$$f'(x)=\frac{x^{\frac{3}{2}}\left(\frac{1}{x}\right)-\ln x\left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)}{\left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{2}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(x\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{3}{2}\ln x\right)}{x^{3}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{3}{2}\ln x\right)}{x^{3}}$$

Veamos bajo qué condiciones la derivada es negativa,

El denominador x^3 es positivo si $x\geq 1$, $x^{\frac{1}{2}}$ es positiva si $x\geq 1$

Y el factor $1-\frac{3}{2}\ln x$ es negativo si

$1-\frac{3}{2}\ln x<0 \;\Rightarrow\; -\frac{3}{2}\ln x<-1 \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}\ln x>1 \;\Rightarrow\; \ln x>\frac{2}{3}\approx 0.66666$ por lo que podemos decir que f es decreciente si $x\geq 2$.

El criterio de la integral nos permite determinar si la serie dada converge o diverge en el intervalo $(2,\infty)$, pero nos piden determinar el valor de la serie en e intervalo $(1,\infty)$, usaremos el criterio de la integral para determinar si la serie converge o diverge en el intervalo que inicia en 2 y a este resultado le sumamos el valor de a serie en 1 que es el que falta de tomar en cuenta.

La serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}=\frac{\ln 1}{1^{\frac{3}{2}}}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}=0+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$

En este caso la serie en el intervalo $(1,\infty)$ es la misma que en el intervalo $(2,\infty)$

Calculemos la integral impropia

$$\int_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\lim_{b\to\infty}\int_{2}^{b}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$$

Calculemos la integral

$\int\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx$, resolvámosla por partes, sea $u=\ln x \Rightarrow du=\frac{1}{x}dx$ y

$$v=\int\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx \Rightarrow v=\int x^{-\frac{3}{2}}dx=\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\int \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \ln x - \int -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{1}{x} dx \right) = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \ln x + 2 \int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \ln x + 2 \left(-\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \right)$$

Así $\displaystyle \int \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \ln x - \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}}$

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{b \to \infty} \int_2^{b} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \lim_{b \to \infty} -\frac{2}{x^{\frac{1}{2}}} \ln x - \frac{4}{x^{\frac{1}{2}}} \Bigg|_2^b = \lim_{b \to \infty} \left(-\frac{2 \ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} + \frac{2 \ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}} \right)$$

$$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \left(\lim_{b \to \infty} -\frac{2 \ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{2 \ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}}$$

Calculando el limite

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{2\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} = -2\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - 4\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}$$

$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{\infty}{\infty}$, forma indeterminada aplicamos la Regla de L'Hospital

$$\lim_{b\to\infty}\frac{\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{2}b^{-\frac{1}{2}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{2}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}}} = \lim_{b\to\infty}\frac{2b^{\frac{1}{2}}}{b} = \lim_{b\to\infty}\frac{2}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$\displaystyle\lim_{b\to\infty}\frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\infty} = 0$, luego

$$\lim_{b\to\infty} -\frac{2\ln b}{b^{\frac{1}{2}}} - \frac{4}{b^{\frac{1}{2}}} = -2(0) - 4(0) = 0$$

$$\int_{2}^{\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{3}{2}}}dx=(0)+\frac{2\ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2\ln 2}{(2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{4}{(2)^{\frac{1}{2}}}$$

, como el resultado es un número real, entonces la integral converge.

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ converge.