SERIE DE TAYLOR

Supongamos que la función $f(x)$ es la suma de una serie de potencias, donde f es una función que tiene derivadas de todos los órdenes, así

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots$$

Las derivadas de f son

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1} + \ldots$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3(x-a) + 4\cdot 3c_4(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} + \ldots$$

$$f'''(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4(x-a) + 5\cdot 4\cdot 3c_5(x-a)^2 + \ldots + n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3} + \ldots$$

Así

$$f^{n}(x) = n!c_n + \cdots$$

Evaluando en $x = a$, tenemos

$$f(a) = c_0,\ f'(a) = c_1,\ f''(a) = 2c_2,\ f'''(a) = 3 \cdot 2c_3 = 3!c_3,\ \ldots\ f^{n}(a) = n!c_n$$

De donde

$$c_1 = f'(a),\ c_2 = \frac{f''(a)}{2},\ c_3 = \frac{f'''(a)}{3 \cdot 2} = \frac{f'''(a)}{3!},\ \ldots\ c_n = \frac{f^{n}(a)}{n!}$$

Estos deben de ser los coeficientes de la serie de potencias que representa a la función $f(x)$, así

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

TEOREMA.

Si la función f con derivadas de todos los órdenes, tiene una representación en forma de serie de potencias en a, esto es si

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \quad \text{con} \quad |x-a|<R$$

Los coeficientes están expresados por la fórmula $c_n = \dfrac{f^n(a)}{n!}$, así

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\ldots+\frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Esta serie se denomina Serie de Taylor de la función f en a (alrededor de a o centrada en a).

EJEMPLO 1.

Hallar la Serie de Taylor generada por la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ alrededor del punto $a=1$.

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$f(1)=\dfrac{1}{1}=1$	$f(1)=1$
$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$f'(1)=-\dfrac{1}{1^2}=-1$	$f'(1)=-1$
$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$	$f''(1)=\dfrac{2}{1^3}=2$	$f''(1)=2$
$f'''(x)=-\dfrac{2\cdot 3}{x^4}$	$f'''(1)=-\dfrac{2\cdot 3}{1^4}=-2\cdot 3=-6$	$f'''(1)=-6$

$f^{IV}(x) = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{x^5}$	$f^{IV}(1) = \dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{1^5} = 2\cdot 3\cdot 4 = 24$	$f^{IV}(1) = 24$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f^{n}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$	$f^{n}(1) = (-1)^n \dfrac{n!}{1^{n+1}} = (-1)^n n!$	$f^{n}(1) = (-1)^n n!$

$$\frac{1}{x} = 1 - 1(x-1) + \frac{2(x-1)^2}{2!} - \frac{6(x-1)^3}{3!} + \frac{24(x-1)^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n n!(x-1)^n}{n!} + \ldots$$

$$\frac{1}{x} = 1 - 1(x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + (x-1)^4 + \ldots + (-1)^n (x-1)^n + \ldots$$

Así la serie de Taylor es $\dfrac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n$

EJEMPLO 2.

Hallar la Serie de Taylor generada por la función $f(x) = senx$ alrededor del punto $a = \frac{\pi}{4}$

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x) = senx$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(x) = \cos x$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$f''(x) = -senx$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$f^{IV}(x) = senx$	$f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = sen\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$f^{IV}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
		$f^{V}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
		$f^{VI}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
		$f^{VII}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$f^{n}(1) = (-1)^{m}\frac{\sqrt{2}}{2}$

Determinemos la serie de Taylor

$$f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3+\dots+\frac{f^{n}(a)}{n!}(x-a)^n+\dots$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5+\dots$$

Se puede observar que en el término general se tienen los coeficientes $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{n!}$ y el factor $\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ pero no podemos determinar de manera única el signo, por lo que podemos considerar que el término general es $(-1)^m\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^n$ para algún m entero, con lo cual la serie de Taylor queda como sigue:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{5}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{p}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{(n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}+(-1)^{m}\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n}+\ldots$$

Como en todos los términos esta el coeficiente $\frac{\sqrt{2}}{2}$ este puede factorizarse, teniendo

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{3}+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4}+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{5}+\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^{p}\frac{1}{(n-1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n-1}+(-1)^{m}\frac{1}{n!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{n}+\ldots\right)$$

Agrupando los términos de potencia par e impar tenemos.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2}+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{4}-\frac{1}{6!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{6}+\ldots\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{3}+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{5}-\frac{1}{7!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{7}+\ldots\right)\right)$$

Lo que nos permite dar un término general para cada uno de ellos.

Potencia par $(-1)^{n}\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}$

Potencia impar $(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}$

Por lo que el término general de la serie de Taylor es:

$$(-1)^n \frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} = (-1)^n \left(\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n} + \frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)$$

Por lo que serie de Taylor es

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\frac{1}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4+\frac{1}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5+\ldots.\right.$$

$$\left.\ldots+(-1)^n\left(\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)+\ldots\right)$$

Luego, la serie de Taylor es:

$$senx = \frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{(2n)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n}+\frac{1}{(2n+1)!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}\right)$$

SERIE DE MCLAURIN

DEFINICIÓN.

Si f es una función con derivada de todos los órdenes, tal que $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ para toda x en un intervalo abierto (-r, r), entonces

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\dots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\dots$$

La Serie de McLaurin puede verse como el caso especial en el que se determina la Serie de Taylor con $a = 0$.

EJEMPLO 3.

Determinar la serie de McLaurin para la función $f(x) = senx$

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x) = senx$	$f(0) = sen(0) = 0$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = \cos(0) = 1$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -senx$	$f''(0) = -sen(0) = 0$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -\cos(0) = -1$	$f'''(0) = -1$
$f^{IV}(x) = senx$	$f^{IV}(0) = sen(0) = 0$	$f^{IV}(0) = 0$
$f^{V}(x) = \cos x$	$f^{V}(0) = \cos(0) = 1$	$f^{V}(0) = 1$
$f^{VI}(x) = -senx$	$f^{VI}(0) = -sen(0) = 0$	$f^{VI}(0) = 0$
$f^{VII}(x) = -\cos x$	$f^{VII}(0) = -\cos(0) = -1$	$f^{VII}(0) = -1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
		$f^{n}(1) = \begin{cases} 0 \\ (-1)^{m} \end{cases}$

En este caso no es posible determinar de manera única cual es la derivada de manera general ya que hay tres opciones, el 0, – 1 y 1.

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+....+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+...$$

$$0+x+\frac{0}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\frac{0}{4!}x^4+\frac{1}{5!}x^5+\frac{0}{6!}x^6-\frac{1}{7!}x^7+\frac{0}{8!}x^8+\frac{1}{9!}x^9+....$$

No podemos determinar el término general a partir de la derivada n-ésima, pero al eliminar los términos que son cero obtenemos

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\frac{1}{9!}x^9+....$$

Con esta última expresión para la serie, se puede apreciar una forma para el término general, quedando como sigue

$$x-\frac{1}{3!}x^{3}+\frac{1}{5!}x^{5}-\frac{1}{7!}x^{7}+\frac{1}{9!}x^{9}+....+(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+...$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$senx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

EJEMPLO 4.

Determinar la Serie de McLaurin para la función $f(x) = (1+x)^{-3}$

Empecemos determinando las derivadas de la función y evaluémoslas en $x = 0$

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x) = (1+x)^{-3}$	$f(0) = (1+0)^{-3} = 1$	$f(0) = 1$
$f'(x) = -3(1+x)^{-4}$	$f'(0) = -3(1+0)^{-4} = -3$	$f'(0) = -3$
$f''(x) = 3 \cdot 4(1+x)^{-5}$	$f''(0) = 3 \cdot 4(1+0)^{-5} = 3 \cdot 4$	$f''(0) = 3 \cdot 4$
$f'''(x) = -3 \cdot 4 \cdot 5(1+x)^{-6}$	$f'''(0) = -3 \cdot 4 \cdot 5(1+0)^{-6}$ $= -3 \cdot 4 \cdot 5$	$f'''(0) = -3 \cdot 4 \cdot 5$
$f^{IV}(x) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(1+x)^{-7}$	$f^{IV}(0) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(1+0)^{-7}$ $= 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$	$f^{IV}(0) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

:	:	:
$f^{n}(x)=(-1)^{n}\frac{(n+2)!}{2}(1+x)^{-(n+3)}$	$f^{n}(0)=(-1)^{n}\frac{(n+2)!}{2}(1+0)^{-(n+3)}$	$f^{n}(0)=(-1)^{n}\frac{(n+2)!}{2}$

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+....+\frac{f^{n}(0)}{n!}x^{n}+...$$

Sustituyendo

$$1-3x+\frac{3\cdot4}{2!}x^{2}-\frac{3\cdot4\cdot5}{3!}x^{3}+\frac{3\cdot4\cdot5\cdot6}{4!}x^{4}+....+\frac{(-1)^{n}\frac{(n+2)!}{2}}{n!}x^{n}+...$$

$$1-3x+\frac{3\cdot 4}{2!}x^2-\frac{3\cdot 4\cdot 5}{3!}x^3+\frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{4!}x^4+....+\frac{(-1)^n\frac{(n+2)!}{2}}{n!}x^n+...$$

Realizando las operaciones indicadas

$$1-3x+6x^2-10x^3+15x^4+....+(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n+...$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$(1+x)^{-3}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n$$

EJEMPLO 5.

Determinar la serie de Maclaurin para la función $f(x)=\cosh(x)$

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x)=\cosh x$	$f(0)=\cosh 0=1$	$f(0)=1$
$f'(x)=senhx$	$f'(0)=senh0=0$	$f'(0)=0$
$f''(x)=\cosh x$	$f''(0)=\cosh 0=1$	$f''(0)=1$
$f'''(x)=senhx$	$f'''(0)=senh0=0$	$f'''(0)=0$
$f^{IV}(x)=\cosh x$	$f^{IV}(0)=\cosh 0=1$	$f^{IV}(0)=1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$f^{n}(x)=\begin{cases} senhx & n \text{ impar} \\ \cosh x & n \text{ par} \end{cases}$	$f^{n}(0)=\begin{cases} senh0=0 & n \text{ impar} \\ \cosh 0=1 & n \text{ par} \end{cases}$	$f^{n}(0)=\begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ 1 & n \text{ par} \end{cases}$

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+....+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+...$$

Sustituyendo

$$1+0x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{0}{3!}x^3+\frac{1}{4!}x^4+....+$$

No determinamos el término general ya que depende de que sea par o impar el valor de la n, pero de esta expresión tenemos la siguiente expresión para la Serie de McLaurin

$$1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8+....+\frac{1}{n!}x^n+....$$

En donde ya es posible determinar el término general ya que todos los términos de la serie con números pares por lo cual el termino n-ésimo también debe ser par por lo que podemos verla como sigue

$$1+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\frac{1}{6!}x^6+\frac{1}{8!}x^8+....+\frac{1}{(2n)!}x^{2n}+....$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$\cosh x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}x^{2n}$$

EJEMPLO 6.

Determinar la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \arctan x$

Derivada de la función		Valor de la función
$f(x) = \arctan x$	$f(0) = \arctan 0 = 0$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$	$f'(0) = \dfrac{1}{1+(0)^2} = 1$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$	$f''(0) = -\dfrac{2(0)}{\left(1+(0)^2\right)^2} = 0$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = \dfrac{-2\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$	$f'''(0) = \dfrac{-2\left(1-3(0)^2\right)}{\left(1+(0)^2\right)^3} = -2$	$f'''(0) = -2$

Tercera derivada

$$f'''(x)=\frac{\left(1+x^2\right)^2(-2)-(-2x)2\left(1+x^2\right)2x}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1+x^2\right)^2+8x^2\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

$$=\frac{-2\left(1+x^2\right)\left[\left(1+x^2\right)-4x^2\right]}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{-2\left(1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Cuarta derivada

$$f^{IV}(x)=\frac{\left(1+x^2\right)^3(12x)-\left(-2\left(1-3x^2\right)\right)3\left(1+x^2\right)^2 2x}{\left(1+x^2\right)^6}=\frac{12x\left(1+x^2\right)^3+12x\left(1-3x^2\right)\left(1+x^2\right)^2}{\left(1+x^2\right)^6}$$

$$=\frac{12x\left(1+x^2\right)^2\left[\left(1+x^2\right)+\left(1-3x^2\right)\right]}{\left(1+x^2\right)^6}=\frac{12x\left(1+x^2+1-3x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{12x\left(2-2x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}=\frac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$$

Quinta derivada

$$f^{V}(x) = \frac{\left(1+x^2\right)^4\left[24x\left(-2x\right)+24\left(1-x^2\right)\right]-24x\left(1-x^2\right)\left(4\left(1+x^2\right)^3\right)2x}{\left(1+x^2\right)^8}$$

$$= \frac{\left(1+x^2\right)^4\left(-48x^2+24-24x^2\right)-192x^2\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^3}{\left(1+x^2\right)^8} = \frac{\left(1+x^2\right)^4\left(-72x^2+24\right)-192x^2\left(1-x^2\right)\left(1+x^2\right)^3}{\left(1+x^2\right)^8}$$

$$= \frac{24\left(1+x^2\right)^3\left[\left(1+x^2\right)\left(-3x^2+1\right)-8x^2\left(1-x^2\right)\right]}{\left(1+x^2\right)^8} = \frac{24\left(1+x^2\right)^3\left[-3x^2+1-3x^4+x^2-8x^2+8x^4\right]}{\left(1+x^2\right)^8}$$

$$= \frac{24\left(1-10x^2+5x^4\right)}{\left(1+x^2\right)^5}$$

$f^{IV}(x)=\dfrac{24x\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^4}$	$f^{IV}(0)=\dfrac{24(0)\left(1-(0)^2\right)}{\left(1+(0)^2\right)^4}=0$	$f^{IV}(0)=0$
$f^{V}(x)=\dfrac{24\left(1-10x^2+5x^4\right)}{\left(1+x^2\right)^5}$	$f^{V}(0)=\dfrac{24\left(1-10(0)^2+5(0)^4\right)}{\left(1+(0)^2\right)^5}=24$	$f^{V}(0)=24$
$f^{VI}(x)=-\dfrac{240x\left(3x^4-10x^2+3\right)}{\left(1+x^2\right)^6}$	$f^{VI}(0)=-\dfrac{240(0)\left(3(0)^4-10(0)^2+3\right)}{\left(1+(0)^2\right)^6}=0$	$f^{VI}(0)=0$
$f^{VII}(x)=\dfrac{720\left(7x^6-35x^4+21x^2-1\right)}{\left(1+x^2\right)^7}$	$f^{VII}(0)=$ $\dfrac{720\left(7(0)^6-35(0)^4+21(0)^2-1\right)}{\left(1+(0)^2\right)^7}=-720$	$f^{VII}(0)=-720$

Determinando la Serie de McLaurin

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+....+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+...$$

Sustituyendo

$$0+1x+(0)\frac{1}{2!}x^2+(-2)\frac{1}{3!}x^3+(0)\frac{1}{4!}x^4+(24)\frac{1}{5!}x^5+(0)\frac{1}{6!}x^6+(-720)\frac{1}{7!}x^7+....+$$

Reduciendo

$$1x+(-2)\frac{1}{3!}x^3+(24)\frac{1}{5!}x^5+(-720)\frac{1}{7!}x^7+....+$$

$$x-2!\frac{1}{3!}x^3+4!\frac{1}{5!}x^5-6!\frac{1}{7!}x^7+....+$$

$$x-2!\frac{1}{3\cdot 2!}x^3+4!\frac{1}{5\cdot 4!}x^5-6!\frac{1}{7\cdot 6!}x^7+....+$$

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+....+$$

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+....+$$

Lo que nos permite determinar el término general, recordemos que el primer sumando se debe de obtener para el valor de $n = 0$, el segundo para $n = 1$ y así sucesivamente, el exponente de la variable x y el denominador son iguales y son números impares, la representación general para un número impar es $2n+1$ o $2n-1$ para iniciar en $n = 0$, la que nos determina los elementos es $2n+1$, así el término general es

$$(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

Con lo cual la serie de McLaurin es

$$x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+....+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

SERIE DE POTENCIAS

Sabemos que $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$, por lo cual $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

Y al principio determinamos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

Usando estos hechos para determinar la expresión como serie de potencias de la función $f(x) = \arctan x$, calculamos la integral de la igualdad

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right) dx$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right) dx$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + C = C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

$$\arctan x = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

Determinemos el valor de C para $x = 0$,

$$\arctan 0 = C + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} (0)^{2n+1} \quad \Rightarrow \quad 0 = C + 0 \quad C = 0$$

Por lo cual

$\displaystyle \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$ y su radio de convergencia es $R = 1$.