FORMAS INDETERMINADAS

La Regla de L'Hospital

Cuando determinamos el límite de una función $\lim_{x \to a} f(x)$, tenemos las opciones siguientes:

1. $\lim_{x \to a} f(x)$ es igual a un número real.
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ no existe.
3. $\lim_{x \to a} f(x)$ es una forma indeterminada.

Las dos primeras opciones dan solución al límite, pero la tercera no.

Cuando encontramos una forma indeterminada necesitamos realizar algún procedimiento que nos permita determinar el valor del límite de la función y eliminar la forma indeterminada que presenta.

Las formas indeterminadas principales son:

- Cocientes indeterminados $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
- Productos indeterminados $0 \cdot \infty$
- Diferencias indeterminadas $\infty - \infty$
- Potencias indeterminadas 0^0, ∞^0 y 1^∞

Coeficientes indeterminados

En cálculo con frecuencia aparecen límites de cocientes, de la forma $\dfrac{f(x)}{g(x)}$,

donde las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen límite 0 cuando x tiende a c.

En consecuencia se dice que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tienen la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ en $x = c$.

Si los límites de $f(x)$ y $g(x)$ son ∞ o bien $-\infty$ cuando $x \to c$,

se dice que $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\dfrac{\infty}{\infty}$ en $x = c$.

Algunos límites que tiene la forma de cociente indeterminado son

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{3x-6},\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{\left(x^2-2\right)^2},\ \lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3},\ \lim_{x\to\infty}\frac{e^{x^2}}{x^2}$$

Las formas indeterminadas que toman respectivamente son

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty}$$

Los dos primeros límites puede calcularse usando técnicas algebraicas, los restantes no pueden determinarse algebraicamente ya que se combinan funciones algebraicas y trascendentes

Regla de L'Hospital

Sea (a,b) un intervalo abierto que contiene a c. Sean f y g funciones definidas y derivables en (a,b), excepto posiblemente en c. Si $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$ y supóngase que

$$\lim_{x \to c} f(x) = 0 \text{ y } \lim_{x \to c} g(x) = 0$$

O que

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y } \lim_{x \to c} g(x) = \pm\infty$$

Esto es que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ o bien $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \pm\frac{\infty}{\infty}$

Entonces $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, siempre que $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista o en su caso $\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

Antes de aplicar la Regla de L'Hospital es muy importante el comprobar que el límite tenga la forma indeterminada de cociente

$$\frac{0}{0} \text{ o } \frac{\infty}{\infty}$$

Ya que si no toma esta forma no es posible aplicar la Regla.

Ejemplo 1.

Determinar el valor del límite $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6}$ si existe.

Al evaluar el límite se tiene una forma indeterminada

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \frac{0}{0}$$

Calculando el valor del límite usando técnicas algebraica

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{3(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{3} = \frac{4}{3}$$

Usando la regla de L´Hospital

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{3x - 6} = \lim_{x \to 2} \frac{2x}{3} = \frac{4}{3}$$

Ejemplo 2.

Determinar el valor del límite $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8}{\left(x^2 - 2\right)^2}$ si existe.

Al evaluar el límite se tiene una forma indeterminada

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8}{\left(x^2 - 2\right)^2} = \frac{\infty}{\infty}$$

Resolviendo algebraicamente

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8}{\left(x^2 - 2\right)^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{\dfrac{x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 3x + 8}{x^4}}{\dfrac{\left(x^2 - 2\right)^2}{x^4}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{8}{x^4}}{\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)^2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2} - \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{8}{x^4}}{\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)^2} = \frac{1 - \dfrac{3}{\infty} + \dfrac{5}{\infty^2} - \dfrac{3}{\infty^3} + \dfrac{8}{\infty^4}}{\left(1 - \dfrac{2}{\infty^2}\right)^2} = 1$$

Usando la Regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4-3x^3+5x^2-3x+8}{\left(x^2-2\right)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{2\left(x^2-2\right)2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{4x\left(x^2-2\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{4x\left(x^2-2\right)}=\frac{\infty}{\infty}$$

Apliquemos nuevamente la regla de L'Hospital

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-9x^2+10x-3}{4x\left(x^2-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+10}{4x(2x)+4\left(x^2-2\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+10}{8x^2+4x^2-8}=\frac{\infty}{\infty}$$

Apliquemos nuevamente la regla de L'Hopital

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{12x^2-18x+10}{12x^2-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{24x-18}{24x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Apliquemos una vez más la regla de L'Hospital

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{24x-18}{24x}=\lim_{x\to\infty}\frac{24}{24}=1$$

Ejemplo 3.

Determinar el valor del límite $\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x}$ si existe.

Al evaluar el límite encontramos la forma indeterminada

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

En este límite se tiene una función en la que se hay funciones transcendentes y algebraicas por lo que no es posible resolverlo con técnicas algebraicas, por lo que usaremos la regla de L´Hospital

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{3^x \ln 3}{1} = 3^0 \ln 3 = \ln 3$$

Ejemplo 4.

Determinar el valor del límite $\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3}$ si existe.

Evaluando el límite se tiene la forma indeterminada

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \frac{0-0}{0} = \frac{0}{0}$$

La función está integrada por funciones trigonométricas y algebraicas, por lo que usaremos la regla de L´Hopital

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$$

Volvemos a aplicar la regla de L´Hospital

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sec x \sec x \tan x}{6x} = \frac{0}{0}$$

Aplicando nuevamente la regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sec x\sec x\tan x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\tan x}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\sec^2 x+4\sec^2 x(\sec x\tan x)\tan x}{6}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^2 x\sec^2 x+4\sec^2 x(\sec x\tan x)\tan x}{6}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sec^4 x+4\sec^3 x\tan^2 x}{6}=\frac{2(1)^4+4(1)^3(0)^2}{6}=\frac{1}{3}$$

Ejemplo 5.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2}$ si existe.

Al evaluar la función se obtiene la siguiente forma indeterminada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \frac{e^{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Usando la regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^{x^2}}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2xe^{x^2}}{2x} = \frac{2(\infty)(\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

Usando nuevamente la regla de L´Hopital

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{4x^2e^{x^2} + 2e^{x^2}}{2} = \frac{4(\infty)(\infty) + 2(\infty)}{2} = \frac{\infty}{2}$$

Por lo que el límite es infinito y decimos que no existe

Ejemplo 6.

Hallar los valores de a y b tales que $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen2x + ax + bx^3}{x^3} = 0$

Evaluando obtenemos $\lim_{x\to 0} \dfrac{sen2x + ax + bx^3}{x^3} = \dfrac{sen(0) + 0 + 0}{0} = \dfrac{0}{0}$ Se obtiene la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$ lo que nos permite aplicar la regla de L´Hospital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen2x + ax + bx^3}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x + a + 3bx^2}{3x^2} = \frac{2\cos 2(0) + a + 3b(0)^2}{3(0)^2} = \frac{2+a}{0}$$

Si $2+a$ es un número real diferente de cero el límite no existiría ya que se tendría $\dfrac{2+a}{0} = \pm\infty$, pero el problema indica que el límite si existe ya que nos dicen que vale 0, así la única opción para el numerador es que sea cero, esto es

$$2 + a = 0 \quad \text{luego} \quad a = -2$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x + a + 3bx^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-4sen2x + 6bx}{6x} = \frac{-4sen2(0) + 6b(0)}{6(0)} = \frac{0}{0}$$

Podemos volver a aplicar la regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to 0}\frac{-4sen2x + 6bx}{6x} = \lim_{x\to 0}\frac{-8\cos 2x + 6b}{6} = \frac{-8\cos(0) + 6b}{6} = \frac{-8 + 6b}{6}$$

Luego el valor del límite es $\frac{-8+6b}{6}$ y en el planteamiento del problema es cero.

Así

$$\frac{-8+6b}{6} = 0 \ \text{ de donde } \ -8+6b = 0 \ \text{ así } \ 6b = 8 \ \text{ y } \ b = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Los valores de a y b para los cuales el límite existe y vale 0 son: $a = -2, \ \ b = \frac{4}{3}$

Producto indeterminado $(0\cdot\infty)$ y diferencia indeterminada $(\infty-\infty)$

Cuando tenemos las formas indeterminadas de producto y diferencia y la función esta compuesta por funciones tanto algebraicas como trascendentes, no es posible determinar el valor del límite con procedimientos algebraicos, así la estrategia para dar solución al límite es aplicar la Regla de L´Hospital, solo que no es posible aplicarla si la forma indeterminada no es un cociente, por lo que se tiene que hacer es modificar algebraicamente la función para que de un producto o de una diferencia se tenga un cociente, al tener un cociente es posible aplicar la Regla de L´Hospital.

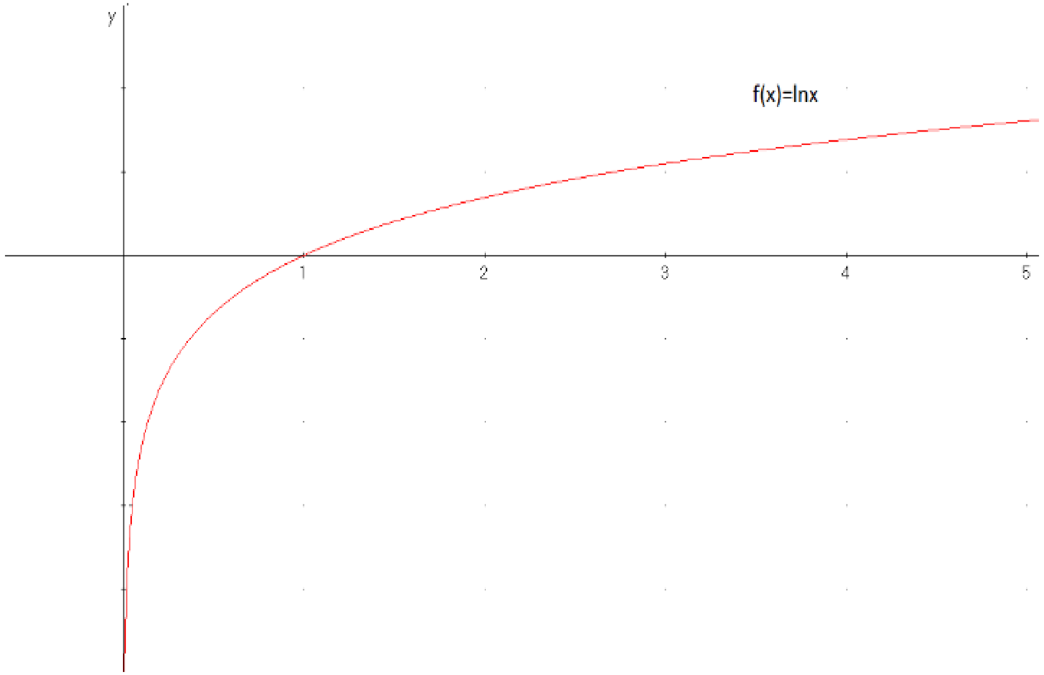
La forma principal del producto indeterminado es $0\cdot\infty$ y también lo es si asociamos el signo negativo, esto es $0(-\infty)$.

Ejemplo 7.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to 0^+} x \ln x$ si existe.

Al evaluar se tiene una forma indeterminada

$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = 0 \ln 0^+$, el valor de $\ln 0^+$ pero lo usamos para indicar que $\lim_{x\to 0^+} \ln x$, el valor de este límite lo podemos determinar a partir de la gráfica de la función



Cuando x se aproxima a cero, los valores del logaritmo natural crecen hacia los valores negativos, así

$$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0(-\infty)$$

Por lo que se tiene la forma indeterminada de producto.

¿Cómo podremos representar el producto $x\ln x$ de forma de un cociente?

Así

$$x\ln x = x^1 \ln x = \frac{1}{x^{-1}}\ln x = \frac{1}{\frac{1}{x}}\ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$$

Calculando el límite

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln 0^+}{\frac{1}{0}} = \frac{-\infty}{\infty}$$

que es ya un cociente indeterminado.

Aplicando la Regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{0}}{-\frac{1}{0}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando nuevamente la regla

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^3}} = \frac{-\frac{1}{0^2}}{\frac{2}{0^3}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Se puede volver a aplicar la Regla de L´Hospital, ¿pero si obtendremos un resultado si se aplica?

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{2}{x^3}}=\frac{-\frac{1}{0^2}}{\frac{2}{0^3}}=-\frac{\infty}{\infty}$$

Al calcular la derivada de $-\frac{1}{x^2}$ nuevamente es un cociente donde el exponente del denominador ahora es 3 y la derivada de $\frac{2}{x^3}$ es un cociente donde es exponente del denominador es 4, y al evaluar nuevamente tenemos la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, si aplicamos nuevamente la Regla de L´Hospital se vuelve a obtener $\frac{\infty}{\infty}$ y se puede seguir aplicando y se vuelve a obtener la misma forma indeterminada y podemos observar que tanto el numerador como el denominador crece por lo que no llegaremos a una solución. Regresando a la aplicación de la primera Regla de L´Hospital,

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}$$

En esta ocasión en vez de evaluar y aplicar la Regla de L´Hospital, vamos a simplificar la función, ya que ambas son funciones algebraicas. Así

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Con este ejemplo notamos:

1. Cuando obtenemos la forma de producto indeterminado para cambiar a un cociente realizamos el procedimiento

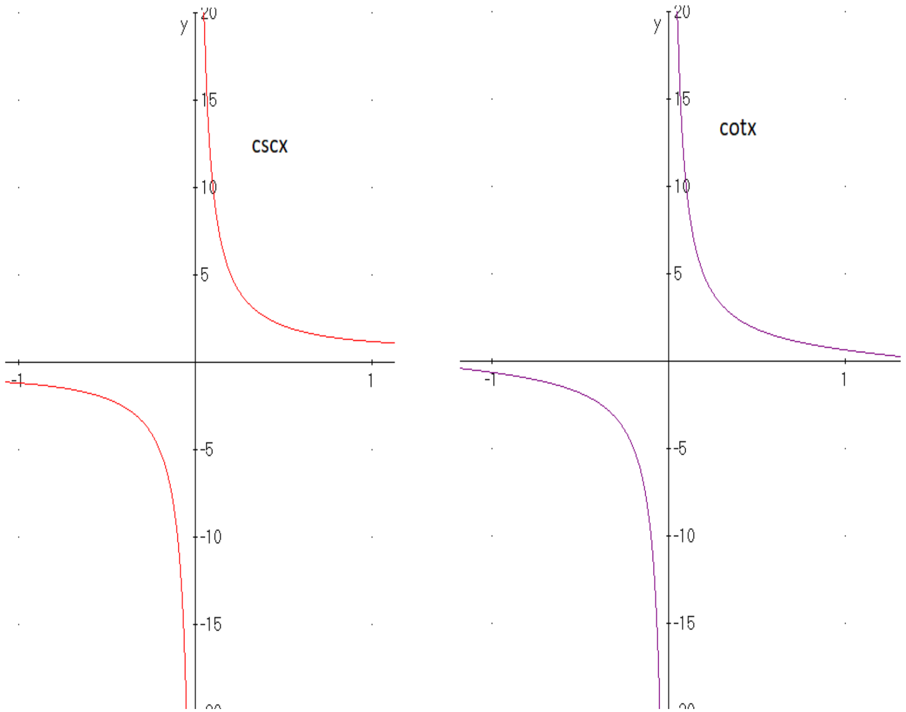
$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \text{ o bien } \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

2. Una vez que se aplicó la Regla de L'Hospital se simplifica y después se evalúa.

Ejemplo 8.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to 0^+}(\csc x - \cot x)$ si existe.

Si evaluamos tenemos $\lim_{x\to 0^+}(\csc x - \cot x) = \csc 0^+ - \cot 0^+$ para determinar el valor de las funciones trigonométricas en cero veamos las gráficas.



Cuando nos aproximamos a cero por la derecha ambas funciones crecen por lo que el límite será infinito

$$\lim_{x\to 0^+}(\csc x - \cot x) = \csc 0^+ - \cot 0^+ = \infty - \infty$$

Hay que pasar a un cociente como son funciones trigonométricas las identidades nos dan esta posibilidad, así

$$\lim_{x\to 0^+}(\csc x-\cot x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos 0}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L´Hospital

$$\lim_{x\to 0^+}(\csc x-\cot x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\sin 0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0$$

Por lo tanto $\lim_{x\to 0^+}(\csc x-\cot x)=0$

Ejemplo 9.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to\infty}\left(\ln 2x-\ln\left(x+1\right)\right)$ si existe.

Si evaluamos tenemos $\lim_{x\to\infty}\left(\ln 2x-\ln\left(x+1\right)\right)=\ln\infty-\ln\infty=\infty-\infty$, el $\lim_{x\to\infty}\ln x=\infty$ debido a que cuando x crece también lo hace $\ln x$

Hay que pasar de la diferencia a un cociente, como la función es un logaritmo la propiedad algebraica que se puede aplicar son las leyes de los logaritmos

$$\ln a-\ln b=\ln\frac{a}{b}$$

Así

$$\lim_{x\to\infty}\left(\ln 2x-\ln\left(x+1\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)$$

Si evaluamos $\lim_{x\to\infty}\ln\left(\frac{2x}{x+1}\right)=\ln\left(\frac{2\left(\infty\right)}{\infty+1}\right)\neq\frac{\infty}{\infty}$

El aplicar la propiedad no nos lleva a la forma indeterminada para poder aplicar la Regla de L'Hospital, pero tenemos el Teorema siguiente

Teorema. Si f y g son funciones tales que $\lim_{x\to a} g(x) = b$, y si f es continua en b, entonces

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f(b) = f\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)$$

Este teorema nos permite intercambiar la función y el límite siempre y cuando la función sea continua.

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}\right)$$ esto debido a que la función logaritmo natural es continua

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty}$$ aplicamos la Regla de L'Hospital $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1} = 2$$

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{2x}{x+1}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}\right) = \ln(2)$$

Así $\lim_{x\to\infty}\left(\ln 2x - \ln(x+1)\right) = \ln 2$

Potencias indeterminadas (0^0, ∞^0 y 1^∞)

Para obtener la forma indeterminada de potencia se tiene un límite de la forma

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) \right)^{g(x)}$$

Estas se obtienen debido a que

1. $\lim_{x \to c} f(x) = 0$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$
2. $\lim_{x \to c} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to c} g(x) = 0$
3. $\lim_{x \to c} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to c} g(x) = \infty$

Para determinar el límite de una forma indeterminada de potencia procedemos de la siguiente forma:

1. Se toma la función $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$
2. Se aplica logaritmo natural a ambos lados de la expresión, $\ln(y)=\ln\left(f(x)\right)^{g(x)}$, aplicando propiedades de los logaritmos se tiene que $\ln(y)=g(x)\ln\left(f(x)\right)$.
3. Se aplica el límite cuando x tiende a c a ambos lados de la ecuación, $\lim\limits_{x\to c}\left[\ln(y)\right]=\lim\limits_{x\to c}\left[g(x)\ln\left(f(x)\right)\right]$

4. Al calcular el $\lim_{x\to c}\left[g(x)\ln(f(x))\right]$ se tiene que:

a) Si $\lim_{x\to c} f(x)=0$ y $\lim_{x\to c} g(x)=0$ entonces $\lim_{x\to c}\left[g(x)\ln(f(x))\right]=0\ln(0)=0(-\infty)$

b) Si $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x)=0$ entonces $\lim_{x\to c}\left[g(x)\ln(f(x))\right]=0\ln(\infty)=0(\infty)$

c) Si $\lim_{x\to c} f(x)=1$ y $\lim_{x\to c} g(x)=\infty$ entonces $\lim_{x\to c}\left[g(x)\ln(f(x))\right]=\infty\ln(1)=\infty(0)$

Es decir, en cada caso nos lleva a una forma indeterminada de producto.

5. Si llamamos L al $\lim_{x\to c}\left[g(x)\ln(f(x))\right]$ se tiene que $\lim_{x\to c}\left[\ln(y)\right]=L$.

6. Aplicando exponencial a ambos lados de la ecuación se tiene $e^{\left(\lim_{x\to c}\left[\ln(y)\right]\right)}=e^{(L)}$, es decir $\lim_{x\to c} y=e^{(L)}$.

Las principales formas de potencias indeterminadas son 0^0, ∞^0 y 1^∞, el procedimiento de solución será para límites que toman esta forma indeterminada. Si al evaluar un límite determinamos una forma de potencia diferente a las principales hay que modificar algebraicamente la función para llegar a la forma indeterminada principal.

Ejemplo 10.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}$ si existe.

Podemos observar que si $f(x)=(1+ax)$ se tiene que $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}(1+ax)=1$ y si $g(x)=\dfrac{b}{x}$ se tiene que $\lim_{x\to 0} g(x)=\lim_{x\to 0}\dfrac{b}{x}=\dfrac{b}{0}=\infty$, en consecuencia $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}}=1^{\infty}$, la cual es una forma indeterminada de potencia.

Para calcular el límite, primero construimos la función $y=(1+ax)^{\frac{b}{x}}$, aplicando logaritmo natural y propiedades del logaritmo, se obtiene $\ln y=\dfrac{b}{x}\ln(1+ax)$.

Aplicando límite a ambos lados de la ecuación se tiene $\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{b}{x}\ln(1+ax)$, calculando el límite de la derecha observamos que tenemos una forma indeterminada de producto $\lim_{x\to 0}\frac{b}{x}\ln(1+ax) = \frac{b}{0}\ln(1+a\cdot 0) = \infty \ln(1) = \infty \cdot 0$

Rescribiendo la expresión se tiene $\lim_{x\to 0}\frac{b}{x}\ln(1+ax) = \lim_{x\to 0}\frac{b\ln(1+ax)}{x} = \frac{b\ln(1)}{0} = \frac{b\cdot 0}{0} = \frac{0}{0}$ por lo que se sugiere aplicar la regla del L´Hospital. De esta manera se tiene

$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\frac{b\ln(1+ax)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{ab}{1+ax}}{1} = \lim_{x\to 0}\frac{ab}{1+ax} = \frac{ab}{1+a(0)} = ab$. En consecuencia $\lim_{x\to 0}(1+ax)^{\frac{b}{x}} = e^{ab}$

Ejemplo 11.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[(\tan x)^{\cos x}\right]$ si existe.

Al calcular el límite observamos que $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[(\tan x)^{\cos x}\right]=\infty^0$ tiene una forma indeterminada de potencia.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}(\cos x)\left(\ln(\tan x)\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\ln(\tan x)}{\sec x}=\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\left(\frac{1}{\tan x}\right)(\sec^2 x)}{\sec x\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{\sec x}{\tan x}}{\tan x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan^2 x}$$

Usando identidades trigonométricas

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan^2 x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos x}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{\sin^2\frac{\pi}{2}}=\frac{0}{1}=0$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\left[(\tan x)^{\cos x}\right]=e^0=1$

Ejemplo 12.

Determinar el valor del límite $\lim_{x \to 0^+} (x)^x$ si existe.

Este límite tiene una forma indeterminada de potencia (0^0)

$$y = x^x \Rightarrow \ln y = \ln x^x = x \ln x$$

Calculando el límite

$$\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = 0(-\infty)$$

Cambiamos la función a un cociente, así $\lim_{x \to 0^+} \ln y = \lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \dfrac{-\infty}{\infty}$

Aplicando la regla de L´Hospital se tiene $\lim_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} -\dfrac{x^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} x = 0$

Por lo tanto $\lim_{x \to 0^+} y = e^0 = 1$

Ejemplo 13.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ si existe.

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \left(1+\frac{1}{0}\right)^0 = (1+\infty)^0 = \infty^0$$

De donde $y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \Rightarrow \ln y = \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Calculando el límite

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0\ln\left(1+\frac{1}{0}\right) = 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{0}\right)}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(0-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{0}\right)} = \frac{1}{(1+\infty)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

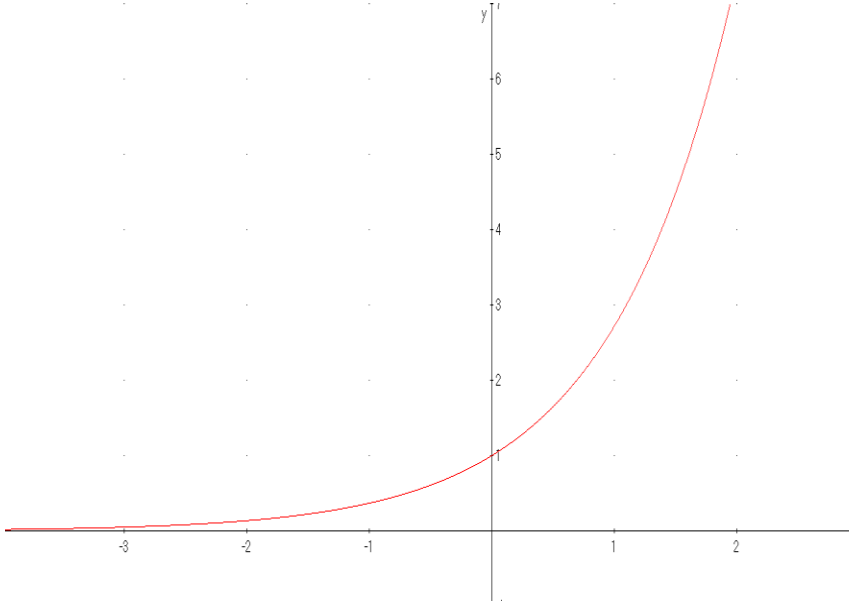
Así $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^0 = 1$ y $\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = 1$

Ejemplo 14.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}}$ si existe.

Evaluando $\lim_{x\to\infty}\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}} = \left(1+e^{\infty}\right)^{e^{-\infty}}$

Hay que determinar el límite de la función exponencial en ∞ y en $-\infty$ para ello usemos la gráfica de la función



Observamos que si los valores de x crecen, esto es si x tiende a infinito, los valores de y también crecen, así, $\lim_{x\to\infty} e^{x} = \infty$

Si los valores de x decrecen, esto es si x tiende a menos infinito, los valores de y se aproximan a cero

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$$

Luego $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}} = \left(1+e^{\infty}\right)^{e^{-\infty}} = \infty^{0}$

$$y=\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}} = e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)$$

Calculando el límite

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right) = e^{-\infty}\ln\left(1+e^{\infty}\right) = 0\ln\left(1+\infty\right) = 0\cdot\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}} = \frac{\ln\left(1+e^{\infty}\right)}{e^{\infty}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+e^{x}}\left(e^{x}\right)}{e^{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+e^{x}} = \frac{1}{1+e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Así $\lim\limits_{x\to 0^{+}}\ln y = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0^{+}} y = e^{0} = 1$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+e^{x}\right)^{e^{-x}} = 1$

Ejemplo 15.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\csc x}$ si existe.

Evaluando el límite $\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\csc x} = (1+3(0))^{\csc 0^+}$, anteriormente determinamos que el $\lim_{x\to 0^+}\csc x = \infty$ a partir de la gráfica de la función, así $\lim_{x\to 0^+}(1+3x)^{\csc x} = (1+3(0))^{\csc 0^+} = 1^\infty$

Luego $y = (1+3x)^{\csc x} \Rightarrow \ln y = \ln(1+3x)^{\csc x} = \csc x \ln(1+3x)$

Calculando el límite

$$\lim_{x\to 0^+}\ln y = \lim_{x\to 0^+}\ln(1+3x)^{\csc x} = \lim_{x\to 0^+}\csc x\ln(1+3x) = \cos 0^+ \ln(1+3(0)) = \infty\cdot\ln 1 = \infty\cdot 0$$

Así

$$\lim_{x\to 0^+} \csc x \ln(1+3x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \frac{\ln(1+3(0))}{\sin 0} = \frac{\ln(1)}{0} = \frac{0}{0}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+3x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+3x}(3)}{\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{(1+3x)\cos x} = \frac{3}{(1+3(0))\cos 0} = \frac{3}{1} = 3$$

Así $\lim_{x\to 0^+} \ln y = 3 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} y = e^3$ y $\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\csc x} = e^3$

Ejemplo 16.

Determinar el valor del límite $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x+1}$ si existe.

Evaluando el límite $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x+1} = (\cos 0)^{0+1} = 1^1 = 1$, aquí no se obtiene una forma indeterminada, por eso siempre es importante el evaluar y después ver si se tiene una forma indeterminada para aplicar el procedimiento.