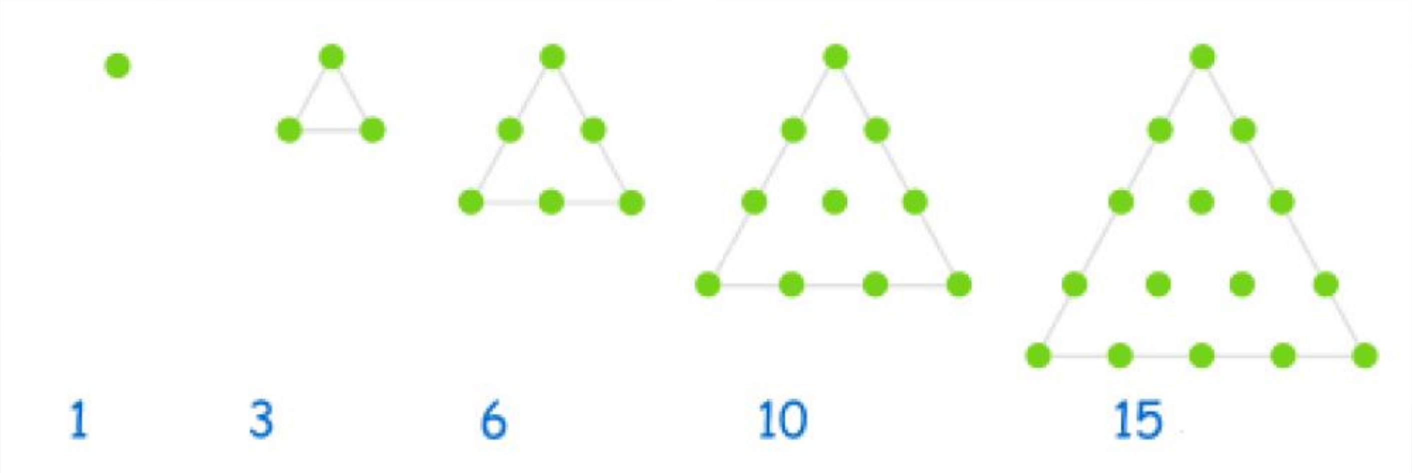
SUCESIONES

Se te han presentado situaciones como

- contar de 2 en 2.
- determinar los múltiplos de 3
- formar figuras como



Situándonos en los múltiplos de 3, podemos decir que

primer múltiplo es 3

segundo múltiplo es 6

tercer múltiplo es 9

cuarto múltiplo es 12

el múltiplo n-ésimo es 3n

De manera informal podemos decir que una sucesión es una lista con un orden definido, de tal forma que podemos decir cual es el primer, segundo, tercer elemento, etc.

DEFINICIÓN: una sucesión infinita o sucesión es una función con dominio los números naturales o enteros positivos.

Una sucesión se puede representar como una lista de números en un orden definido como

$$a_1,\ a_2,\ a_3,\ \dots a_n,\ \dots$$

Donde cada término a_n **tiene su sucesor** a_{n+1}

NOTACIÓN: representamos de una manera explicita a una sucesión por sus términos entre llaves $\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ **o de manera implícita como** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **o** $\{a_n\}$

Cualquier expresión que se usa para definir una función real se puede emplear para una sucesión, así se pueden usar todas las operaciones como son: suma, diferencia, producto, cociente, potencia, etc. y cualquier función como son las algebraicas y las trascendentes, aunque se tiene que en sucesiones se emplea la expresión $(-1)^n$ el cual es un factor que no se emplea en funciones reales.

EJEMPLO 1.

REPRESENTEMOS UNA SUCESIÓN DE DIFERENTES MANERAS

- **Como una función** $a(n)=\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}$
- **Por medio del término n-ésimo** $a_n=\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}$
- **Sucesión implícita, con su término n-ésimo** $\left\{\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}\right\}$
- **Sucesión explicita, indicando todos los términos** $\left\{-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4},-\dfrac{5}{8},\dfrac{7}{16},\dots,\dfrac{(-1)^n(2n-1)}{2^n}\dots\right\}$

- **SON SUCESIONES LAS SIGUIENTES**

$$a(n)=\sqrt{n}\,,\ \left\{\frac{1}{n}\right\},\ a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{n},\ \{3\}\,,\ \left\{\frac{n-1}{n}\right\}\ \text{y}\ \left\{(-1)^{n-1}\left(\frac{n-1}{n}\right)\right\}$$

LA SUCESIÓN CONSTANTE SE REPRESENTA COMO SIGUE.

$$\{5\}=\{5,5,5,5,\cdots,5,\cdots\}$$

EJEMPLO 2.

Determinar una expresión para el término general a_n de la sucesión dada, suponiendo que en patrón de los primeros términos continua.

a) $\left\{ \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \right\}$

la forma que tienen los elementos de la sucesión son fracciones con numerador fijo 1 y con denominador que varía, los denominadores son 2,4,8,16,... los números en los denominadores son las potencias de 2, luego el término general es $a_n = \frac{1}{2^n}$

La sucesión es $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\}$

b) $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\ldots\right\}$

la forma que tienen los elementos de la sucesión son fracciones con numerador fijo 1 y con denominador que varía, los denominadores son 2,4,6,8,... los números en los denominadores son múltiplos de 2, luego el término general es $a_n = \frac{1}{2n}$

La sucesión es $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$

c) $\left\{-\frac{1}{4},\frac{2}{9},-\frac{3}{16},\frac{4}{25},\dots\right\}$

Para determinar el término general de la sucesión se tiene que determinar tres elementos, el signo, el numerador y el denominador.

El numerador es 1, 2, 3, 4 como n=1,2,3,4,... entonces el numerador es n,

Los denominadores son 4,9,16,25, los cuales son los cuadrados de 2,3,4 y 5 para n=1,2,3 y 4, luego el denominador es el cuadrado de n+1

El signo se determina con la potencia de (-1), empecemos por proponer que es n, observamos con este si se determinan los elementos que nos dan. luego el término general es $a_n=(-1)^n\frac{n}{(n+1)^2}$

La sucesión es $\left\{(-1)^n\frac{n}{(n+1)^2}\right\}$

d) $$\left\{1,-\frac{2}{3},\frac{4}{9},-\frac{8}{27},\cdots\right\}=\left\{\frac{1}{1},-\frac{2}{3},\frac{4}{9},-\frac{8}{27},\cdots\right\}$$

Para determinar el término general de la sucesión se tiene que determinar tres elementos, el signo, el numerador y el denominador.

El numerador es 1, 2, 4, 8, las cuales son potencias de 2, con primer exponente cero, esto llevaría al exponente n-1,

El denominador es 1, 3, 9, 27, las cuales son potencias de 3, con 1er exponente cero, esto llevaría al exponente n-1,

El signo se determina con la potencia de (-1), pero no es n, como el numerador y el denominador tienen exponente n-1, usemos este para el (-1), observamos con este si se determinan los elementos que nos dan. Luego el término general es $$a_n=(-1)^{n-1}\frac{2^{n-1}}{3^{n-1}}=(-1)^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

La sucesión es $$\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

e) $\{0,1,0,1,\cdots\}$

Con esta sucesión inicialmente solo notamos que se intercalan los valores 0 y 1, pero ¿qué función en general nos permite tener estos valores?, una opción es pensar en las funciones seno y coseno, sabemos que para ciertos valores las funciones toman los valores de 0 y 1, así podemos proponer

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Veamos si al sustituir los valores de n se determinan los valores de la sucesión.

$$\text{Si } n=1 \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=1,$$

$$\text{Si } n=2 \Rightarrow \sin(\pi)=0,$$

$$\text{Si } n=3 \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-1,$$

$$\text{Si } n=4 \Rightarrow \sin(2\pi)=0$$

Con esta función, el primer término es 1 y debe de ser cero, así propongamos otra función

Propongamos $\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$

Veamos si al sustituir los valores de n se determinan los valores de la sucesión.

$$\text{Si } n=1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,$$

$$\text{Si } n=2 \Rightarrow \cos(\pi)=-1,$$

$$\text{Si } n=3 \Rightarrow \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)=0,$$

$$\text{Si } n=4 \Rightarrow \cos(2\pi)=1$$

Se cumple que el primer elemento es 0, que el tercero es 0 y que el cuarto es 1, solo el segundo no se cumple por el signo pero si aplicamos el valor absoluto a la función propuesta si se cumple.

Así el término general para la sucesión es $a_n = \left|\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right|$

Otra opción algebraica que es más directa.

Es emplear el elemento $(-1)^n$

necesitamos determinar una expresión que genere los términos 1 y 0 de manera alterna

El 0 lo podemos obtener sumando y restando el mismo número, esto es a-a, o en particular 1-1, tenemos que el primer término, el tercero y el quinto son 1-1, ¿como lo podemos representar?

Si tomamos la suma $1+(-1)^n$, vemos que al sustituir n=1,3,5 vale 0, con lo que tiene una expresión para los términos impares de la sucesión, veamos si también se obtienen los pares.

Dada la expresión $1+(-1)^n$

Determinemos los valores que se obtiene al sustituir los valores de n

$$\text{Si } n=1 \Rightarrow 1+(-1)^1 = 1-1 = 0\,,$$

$$\text{Si } n=2 \Rightarrow 1+(-1)^2 = 1+1 = 2\,,$$

$$\text{Si } n=3 \Rightarrow 1+(-1)^3 = 1-1 = 0\,,$$

$$\text{Si } n=4 \Rightarrow 1+(-1)^4 = 1+1 = 2$$

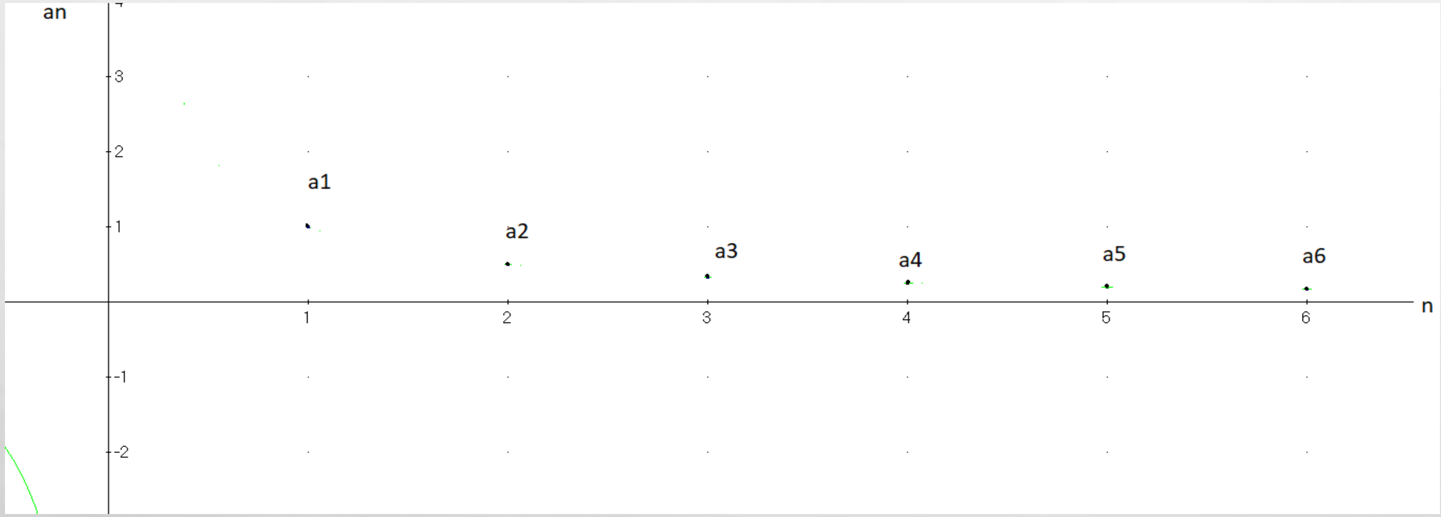
Así para los valores de n impar se obtiene cero y para los valores pares vale 2, necesitamos que sea 1 y no 2, por lo cual el término general es $a_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$

Y la sucesión es $\{0,1,0,1,\cdots\} = \left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$

GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

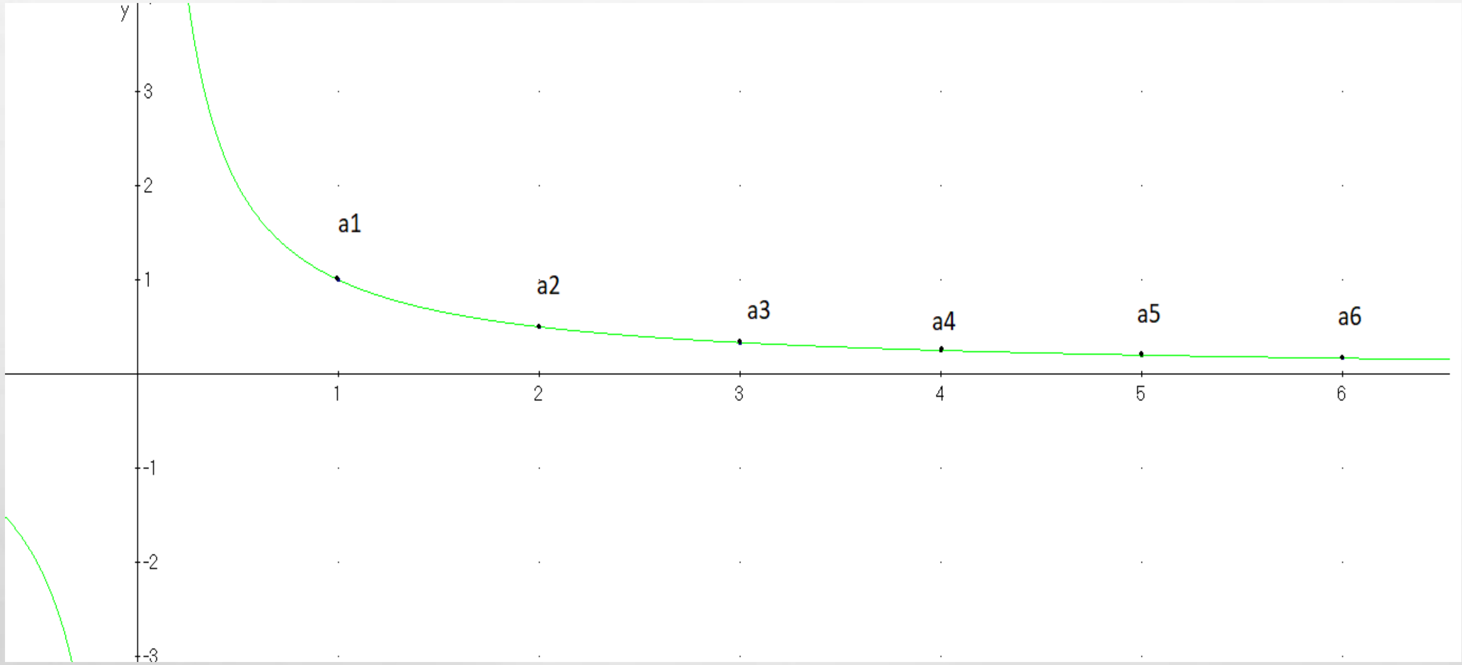
Una sucesión en el plano de ejes n y a_n, queda determinada por los puntos en el plano definidos por $(1,a_1)$, $(2,a_2)$,..., (n,a_n), ...

Grafiquemos la sucesión $$\left\{\frac{1}{n}\right\}=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\frac{1}{6},\dots\right\}$$



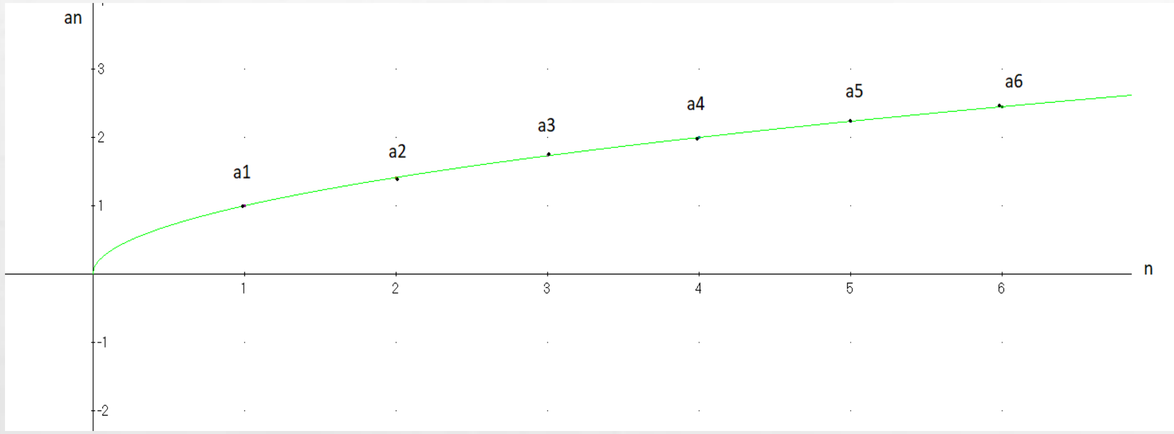
La gráfica de la sucesión la constituyen solo los puntos, ya que solo esta definida para números enteros, lo que impiden unir los puntos.

Podemos usar la función real $f(x) = \frac{1}{x}$ **como base de la gráfica de la función**

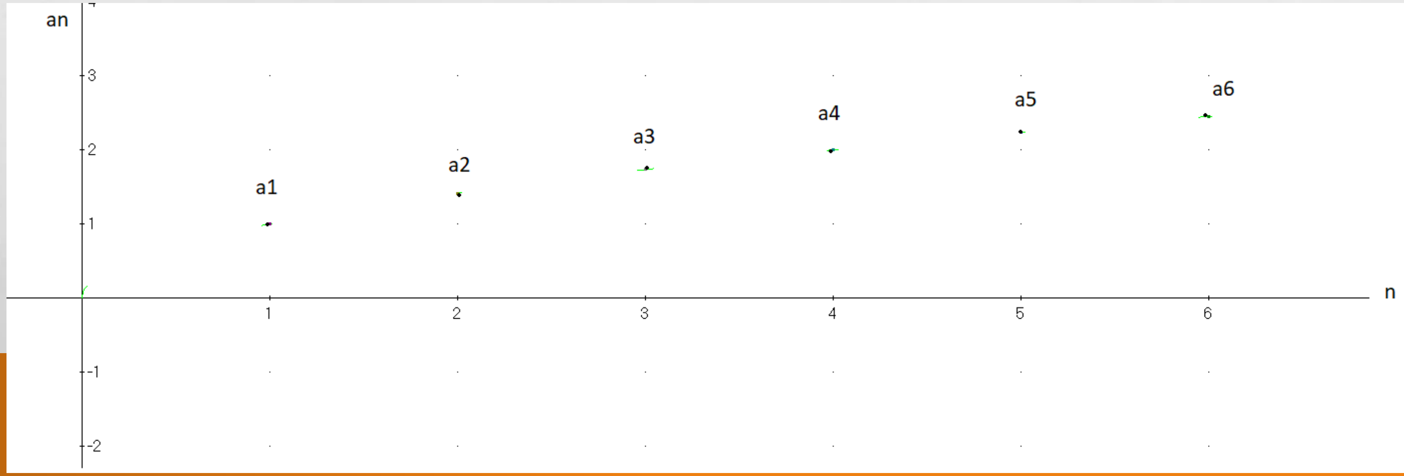


Grafiquemos ahora la sucesión $\left\{\sqrt{n}\right\} = \left\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \cdots\right\}$

Podemos usar como base la función real $f(x) = \sqrt{x}$



La gráfica de sucesión es



PROPIEDADES

Las propiedades de funciones en general son aplicables a sucesiones, enunciamos algunas de las propiedades de sucesiones.

- las sucesiones son acotadas superior e inferiormente, si y sólo si, su imagen es acotada (superior e inferiormente).
- si *a* y *b* son sucesiones, su combinación lineal y su producto son sucesiones.
- dada la sucesión *b* diferente de cero, la recíproca 1/b es también una sucesión así como el cociente a/b, donde b es una sucesión

Definición: Sea $\{a_n\}$ una sucesión, esta es

a) Creciente si $a_n < a_{n+1}$ para todo n positivo.

b) Decreciente si $a_n > a_{n+1}$ para todo n positivo.

CONVERGENCIA DE UNA SUCESIÓN

Definición: La sucesión $\{a_n\}$ tiene límite L o converge a L, lo cual se denota por

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

si dado $\varepsilon > 0$ existe un número positivo N tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon \text{ siempre que } n > N$$

si tal numero L no existe, decimos que la sucesión no tiene límite o que diverge.

La definición de convergencia de una sucesión nos dice que para determinar la convergencia de esta se debe de determinar el limite en infinito del término general de la sucesión, so el límite existe la sucesión converge al valor del límite, si el límite no existe la sucesión diverge.

Para determinar el límite se pueden emplear todas las estrategias conocidas, esto es las técnicas algebraicas y lo desarrollado en formas indeterminadas, sin embargo, agregaremos unos teoremas para calcular algunos limites que aún no tienen solución con las estrategias que se han visto.

TEOREMAS PARA SUCESIONES

Teorema 1. Sean $\{a_n\}$ una sucesión infinita y sea $f(n) = a_n$ donde $f(x)$ existe para todo número real $x \geq 1$

i) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = L$

ii) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$, entonces $\lim_{n\to\infty} f(n) = \pm\infty$

Este Teorema nos permite determinar el límite de una sucesión a partir del límite de la función real.

EJEMPLO 3.

Determinar si las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ y $\left\{\sqrt{n}\right\}$ convergen o divergen.

1. Determinemos si la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge o diverge

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, esto es la sucesión $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0, como se había visto gráficamente.

2. Determinemos si la sucesión $\left\{\sqrt{n}\right\}$ converge o diverge

$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, esto es la sucesión $\left\{\sqrt{n}\right\}$ diverge, como se había visto gráficamente

Teorema 2. Sean $\{a_n\}$ una sucesión con $a_n = r^n$ con r constante

i) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ si $|r| < 1$

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = \infty$ si $|r| > 1$

Este teorema nos permite determinar si una sucesión de la forma $\{a_n\} = \{r^n\}$ converge o diverge a partir del valor de r. Sin embargo, no nos da un resultado si $|r| = 1$, esto es si r = 1 y r = - 1

Determinemos la convergencia o divergencia de la sucesión para estos valores.

(i) Si r = 1, la sucesión es $\left\{(1)^n\right\}$, con término general $a_n = (1)^n$, para determinar si converge o diverge calculemos el límite

$$\lim_{n\to\infty}(1)^n = 1^\infty \text{, forma indeterminada de potencia}$$

$$\lim_{n\to\infty}(1)^n = \lim_{n\to\infty} n\ln(1) = \lim_{n\to\infty} n(0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1)^n = e^0 = 1$$

Luego la sucesión $\left\{(1)^n\right\}$ converge a 1, si analizamos la sucesión esta es $\left\{(1)^n\right\} = \{1,1,1,1,1,\cdots,1,\cdots\}$ es decir la sucesión constante 1, luego converge a 1.

(ii) Si r = – 1, la sucesión es $\left\{(-1)^n\right\}$, con término general $a_n = (-1)^n$, para determinar si converge o diverge calculemos el límite

$\lim_{n\to\infty}(-1)^n$, este límite no lo podemos determinar ya que dependiendo de n varía el resultado, analicemos la sucesión $\left\{(-1)^n\right\}$ para cualquier valor de n.

$\left\{(-1)^n\right\} = \{-1,1,-1,1,-1,1,\cdots\}$, esta puede descomponerse en dos sub-sucesiones

$$\left\{(-1)^n\right\} = \begin{cases} \left\{(-1)^n\right\} & \text{con } n \text{ impar} \\ \left\{(-1)^n\right\} & \text{con } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow \left\{(-1)^n\right\} = \begin{cases} \{-1,-1,-1,-1,\cdots\} & \text{con } n \text{ impar} \\ \{1,1,1,1,\cdots\} & \text{con } n \text{ par} \end{cases}$$

Cada una de estas sub-sucesiones por si sola es una sucesión y cada una de ellas converge ya que

$\lim_{n\to\infty} -1 = -1$ y $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Como las dos sub-sucesiones $\{-1\}$ y $\{1\}$ constituyen la sucesión $\left\{(-1)^n\right\}$, para que esta última converja deberían de converger al mismo valor esto no sucede, luego decimos que la sucesión $\left\{(-1)^n\right\}$ diverge.

Con respecto al límite tenemos que

Para n impar $\lim_{n\to\infty} -1 = -1$

Para n par $\lim_{n\to\infty} 1 = 1$

Luego $\lim_{n\to\infty} (-1)^n$ no existe, ya que se aproxima a dos valores diferentes.

Así para $r = 1$ la sucesión converge y para $r = -1$ la sucesión diverge.

EJEMPLO 4.

Determinar si las sucesiones $\left\{\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right\}$ **y** $\left\{(1.001)^n\right\}$ **convergen o divergen.**

Para determinar si la sucesión converge o diverge, calculamos el límite

a) $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$, como el limite tiene el signo -1 que varía no podemos determinar su valor algebraicamente.

La sucesión tiene la forma $\{r^n\}$ con $r=-\frac{2}{3}$, podemos usar el teorema 2, para aplicarlo necesitamos comparar $|r|$ con 1 y dependiendo del resultado se tendrá el valor del límite.

$|r| = \left|-\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$, luego $\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n = 0$ ya que el teorema 2, nos dice que si el valor es menor a uno el límite es cero.

Luego la sucesión converge a cero.

b) La sucesión $\left\{(1.001)^n\right\}$ tiene la forma $\left\{r^n\right\}$ con $r = 1.001$, usando el teorema 2, comparemos $|r|$ con 1.

$|r| = |1.001| = 1.001 > 1$, luego $\lim_{n\to\infty}(1.001)^n = \infty$

Por lo que la sucesión diverge.

Teorema 3. Sean $\{a_n\}$ una sucesión, si $\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$ entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Este teorema es útil cuando tenemos sucesiones con el factor $(-1)^n$.

EJEMPLO 5.

Determinar si la sucesión $\left\{(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}\right\}$ **converge o diverge.**

Para determinar si la sucesión converge o diverge, calculamos el límite $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{n}$, como el limite tiene el signo -1 que varía no podemos determinar su valor, podemos dividirlo en sub-sucesiones, estas son $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ si n es impar y $\left\{-\dfrac{1}{n}\right\}$ si n es par, determinemos si convergen o divergen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0 \text{ y } \lim_{n\to\infty}-\frac{1}{n}=0 \text{ ambas sucesiones convergen a cero.}$$

Luego el límite $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}=0$ y la sucesión $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0.

Otra opción, es usar el teorema 3.

$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right|$ por propiedades del valor absoluto

$\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$, porque $\left|(-1)^{n+1}\right| = 1$ debido a que el valor absoluto ya sea de 1 o de -1 es 1, y como n es positivo $\frac{1}{n} > 0$ con lo cual $\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$

Así $\lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(-1)^{n+1}\right|\left|\frac{1}{n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$

Por el teorema $\lim_{n\to\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = 0$ y la sucesión $\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$ converge a 0.

Teorema 4. (De intercalación para sucesiones) Si $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ son sucesiones infinitas tal que $a_n \leq b_n \leq c_n$ para todo n y si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L = \lim_{n\to\infty} c_n$$

entonces $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

EJEMPLO 6.

Determinar si la sucesión $\left\{\dfrac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$ **converge o diverge.**

Para determinar si converge o diverge calculemos el límite

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos^2 n}{3^n} = \dfrac{\cos^2 \infty}{3^\infty} = \dfrac{?}{\infty}$, si evaluamos el límite no obtenemos una forma indeterminada, el denominador tiende a infinito, pero en el numerador, la función trigonométrica no permite determinar un valor ya que no se aproxima a un mismo valor, luego este límite no existe.

No podemos emplear la regla de L´Hospital porque no llegamos a una forma indeterminada de cociente.

Usemos el teorema de intercalación, para lo cual hay que acotar la sucesión. El término general de la sucesión es $a_n = \dfrac{\cos^2 n}{3^n}$

$-1 \le \cos n \le 1$

$0 \le \cos^2 n \le 1$, dividiendo por la función exponencial

$\dfrac{0}{3^n} \le \dfrac{\cos^2 n}{3^n} \le \dfrac{1}{3^n}$, no cambia el signo de la desigualdad porque la función 3^n siempre se positiva

$0 \le \dfrac{\cos^2 n}{3^n} \le \dfrac{1}{3^n}$

Así

$a_n = \{0\}$, $b_n = \left\{\dfrac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$ y $c_n = \left\{\dfrac{1}{3^n}\right\}$,

Calculando los límites

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^\infty} = 0$$

$$\text{Luego } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 = \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\text{así } \lim_{n\to\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n} = 0$$

La sucesión $\left\{\dfrac{\cos^2 n}{3^n}\right\}$ **converge a cero.**

LÍMITES IMPORTANTES

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

2. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

3. $\lim_{n\to\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$, donde x representa a un número real

4. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{n!} = 0$, donde x representa a un número real

$$1. \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \frac{\ln \infty}{\infty} = \frac{\infty}{\infty}$$

APLICANDO LA REGLA DE L'HOSPITAL

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\text{Luego } \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

2. $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=\lim_{n\to\infty}(n)^{\frac{1}{n}}=\infty^{\frac{1}{\infty}}=\infty^{0}$, forma de potencia indeterminada

Calculamos primero $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n=\frac{1}{\infty}\ln\infty=0(\infty)$, forma de producto indeterminado

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la regla de L'Hospital

$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\frac{1}{\infty}=0$, este es límite que se tienen en (1)

Luego $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=e^{0}=1$

3. $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=\left(1+\frac{x}{\infty}\right)^\infty=(1)^\infty$, forma de potencia indeterminada

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\infty\ln\left(1+\frac{x}{\infty}\right)=\infty\ln(1)=\infty(0)$$ forma de producto indeterminado

$$\lim_{n\to\infty} n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{\ln\left(1+\frac{x}{\infty}\right)}{\frac{1}{\infty}}=\frac{\ln(1)}{0}=\frac{0}{0},$$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\left(-\frac{x}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{1+\frac{x}{n}}\left(-\frac{1}{n^2}\right)}{-\frac{1}{n^2}}\lim_{n\to\infty}\frac{x}{1+\frac{x}{n}}=\frac{x}{1+\frac{x}{\infty}}=x$$

Luego $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

4. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\dfrac{x^\infty}{\infty!}=\dfrac{\infty}{\infty}$, el límite tiene la forma de cociente indeterminado, pero no podemos aplicar la regla de L´Hospital ya que no hay una manera de calcular derivada de $f(x)=x!$, así necesitamos buscar otra opción para determinar el límite.

Expresemos la función de manera desarrollada, así

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x\cdot x\cdot x\ldots\cdot x}{n(n-1)(n-2)\ldots 1}$ tanto en el numerador como el denominador tienen n factores, por lo que es posible asociarlos en cocientes como sigue

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{x\cdot x\cdot x\ldots\cdot x}{n(n-1)(n-2)\ldots 1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n-1}\right)\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right)$$

Por propiedades de los límites, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\left(\frac{x}{n-1}\right)\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1}\right)$$

Evaluando

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-1}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{n-2}\right)\cdots\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{2}\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{1}\right)=\left(\frac{x}{\infty}\right)\left(\frac{x}{\infty-1}\right)\left(\frac{x}{\infty-2}\right)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right)$$

$$=(0)(0)(0)\cdots\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{x}{1}\right)=0$$

Es posible separar los límites porque todos existen, de acuerdo a las propiedades de los límites si uno de ellos no existe no es posible separarlos.

Luego $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$

Como ya demostramos estos límites, cada vez que se presenten, es posible usarlos como si fuera una formula.