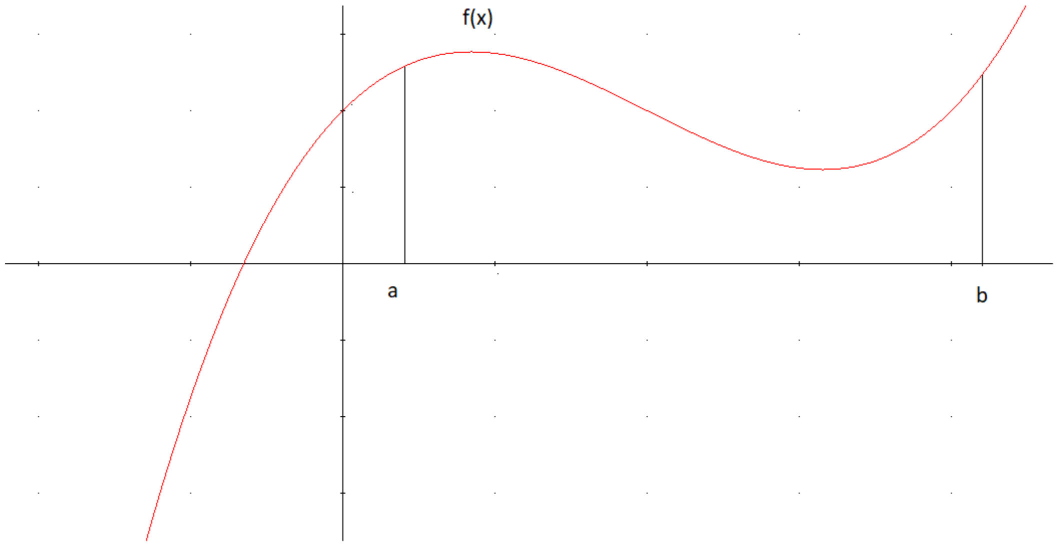
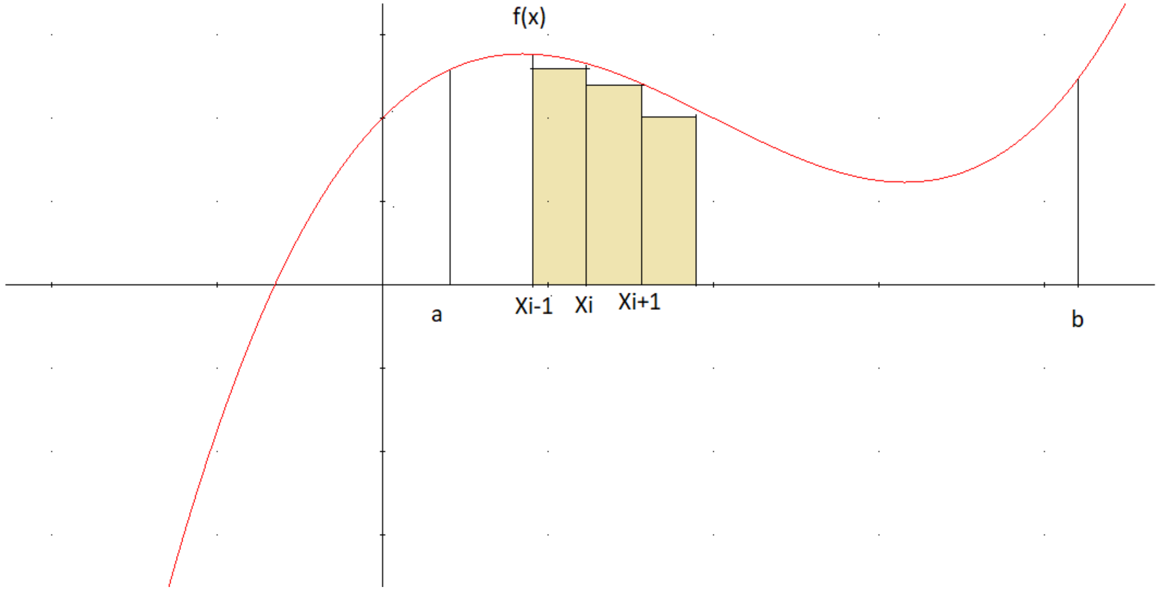
INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Regla del Trapecio

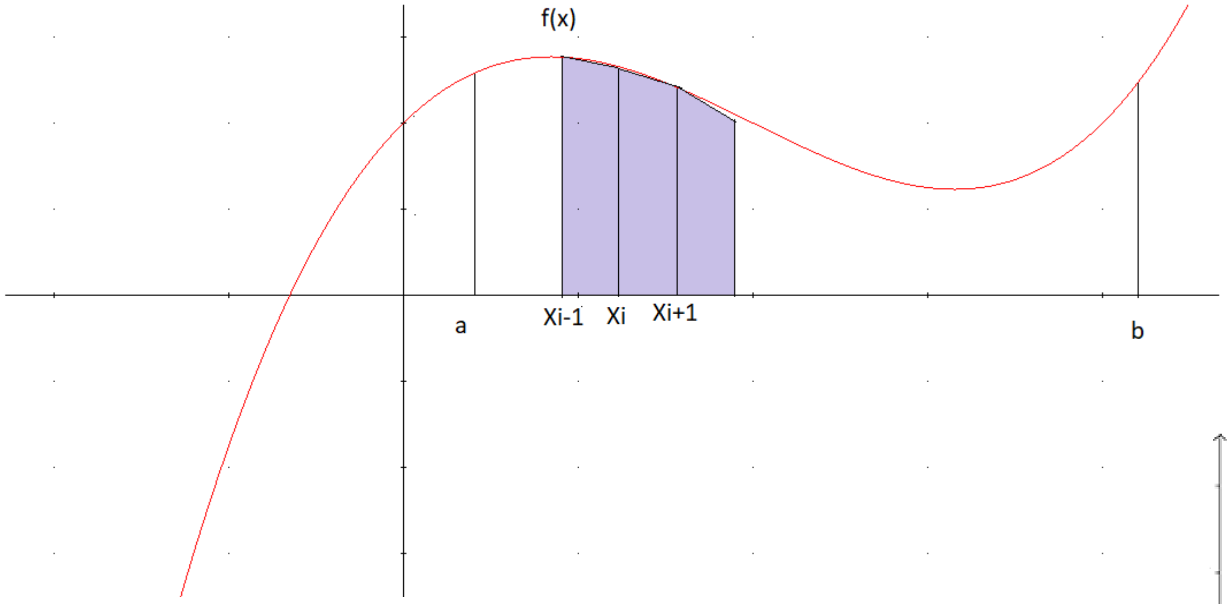
Sea $f(x)$ una función definida en $[a,b]$ y hagamos una partición de este intervalo de n subintervalos de longitud Δx con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

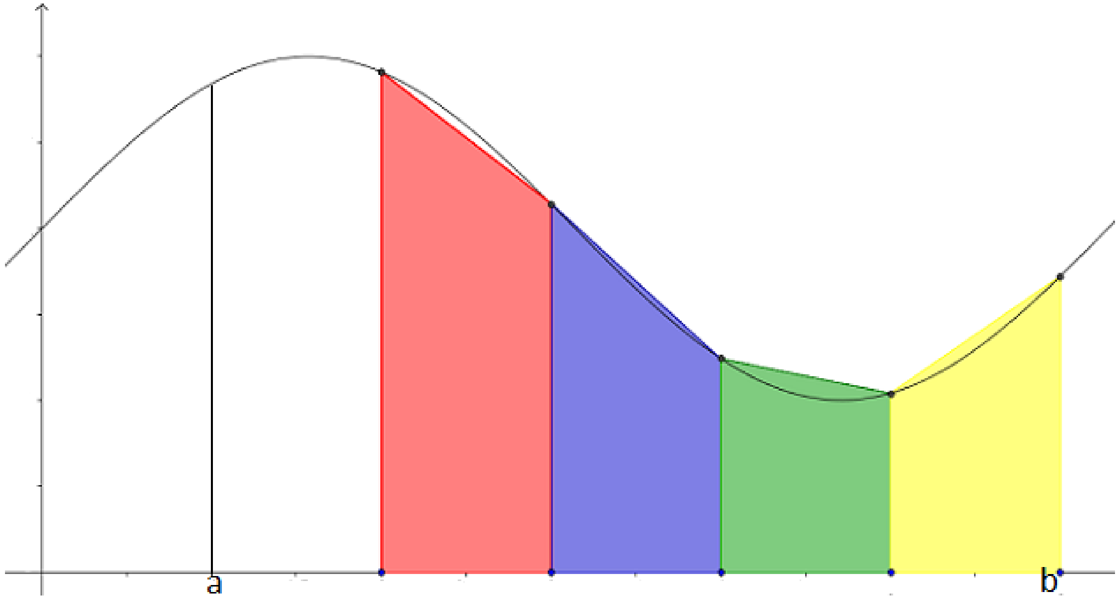


Cuando calculamos le área bajo la curva, sobre cada uno de los subintervalos construimos rectángulos

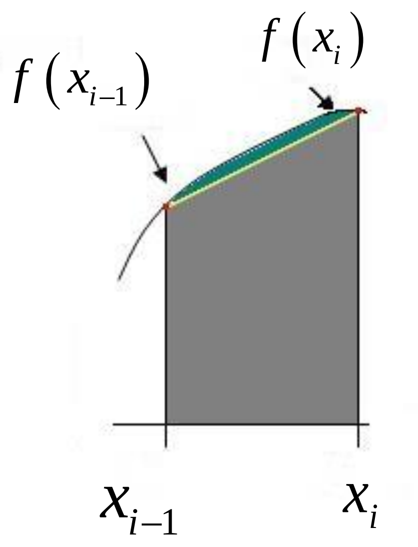


Sobre cada subintervalo construyamos un trapecio





Construyamos el área de uno de los trapecios que se forman, el que se tiene en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$



El área del trapecio es $A = \left(\frac{b+B}{2}\right)h$

Tenemos base menor

Base menor $b = f(x_{i-1})$, Base mayor $B = f(x_i)$

Altura $h = \Delta x$

Área $A_i = \left(\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}\right)\Delta x$

Calculando las áreas de los trapecios tenemos

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_i + \cdots + A_n$$

$$= \left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{f(x_2)+f(x_3)}{2}\right)\Delta x + \cdots + \left(\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}\right)\Delta x + \cdots + \left(\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)\Delta x$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_i)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Regla del Trapecio

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+\cdots+2f(x_i)+\cdots+2f(x_{n-1})+f(x_n)\right)$$

Donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

$$x_i = a + i\Delta x$$

Ejemplo 1.

Usar la regla del Trapecio para aproximar el valor de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ con $n=10$

Para aproximar el valor de la integral debemos de calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f(x_0)+2f(x_1)+2f(x_2)+2f(x_3)+2f(x_4)+2f(x_5)+2f(x_6)+2f(x_7)+2f(x_8)+2f(x_9)+f(x_{10})\right)$$

El valor de $\Delta x = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}$

Los valores de $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ y de $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_n)$ los determinaremos en la tabla siguiente.

x_i	$f(x_i)$	Sumando de la Regla del Trapecio
$x_0 = 1$	$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$	$f(x_1) = f\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{10}{11}$	$2f(x_1) = 2\left(\frac{10}{11}\right) = \frac{20}{11}$
$x_2 = 1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$	$f(x_2) = f\left(\frac{12}{10}\right) = \frac{10}{12}$	$2f(x_2) = 2\left(\frac{10}{12}\right) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$
$x_3 = 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$	$f(x_3) = f\left(\frac{13}{10}\right) = \frac{10}{13}$	$2f(x_3) = 2\left(\frac{10}{13}\right) = \frac{20}{13}$
$x_4 = 1 + \frac{4}{10} = \frac{14}{10}$	$f(x_4) = f\left(\frac{14}{10}\right) = \frac{10}{14}$	$2f(x_4) = 2\left(\frac{10}{14}\right) = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$

$x_5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$	$f(x_5) = f\left(\frac{15}{10}\right) = \frac{10}{15}$	$2f(x_5) = 2\left(\frac{10}{15}\right) = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$
$x_6 = 1 + \frac{6}{10} = \frac{16}{10}$	$f(x_6) = f\left(\frac{16}{10}\right) = \frac{10}{16}$	$2f(x_6) = 2\left(\frac{10}{16}\right) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$
$x_7 = 1 + \frac{7}{10} = \frac{17}{10}$	$f(x_7) = f\left(\frac{17}{10}\right) = \frac{10}{17}$	$2f(x_7) = 2\left(\frac{10}{17}\right) = \frac{20}{17}$
$x_8 = 1 + \frac{8}{10} = \frac{18}{10}$	$f(x_8) = f\left(\frac{18}{10}\right) = \frac{10}{18}$	$2f(x_8) = 2\left(\frac{10}{18}\right) = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$
$x_9 = 1 + \frac{9}{10} = \frac{19}{10}$	$f(x_9) = f\left(\frac{19}{10}\right) = \frac{10}{19}$	$2f(x_9) = 2\left(\frac{10}{19}\right) = \frac{20}{19}$
$x_{10} = 1 + \frac{10}{10} = 2$	$f(x_{10}) = f(2) = \frac{1}{2}$	$f(x_{10}) = \frac{1}{2}$

Sumado, tenemos

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{\frac{1}{10}}{2}\left(1+\frac{20}{11}+\frac{5}{3}+\frac{20}{13}+\frac{10}{7}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{20}{17}+\frac{10}{9}+\frac{20}{19}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{20}(13.875428)=0.693771$$

Así

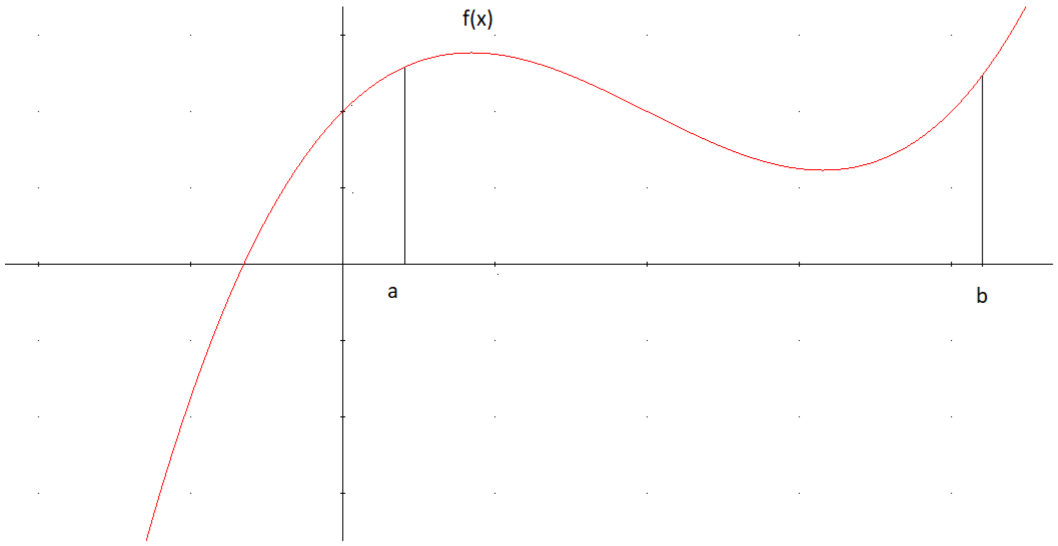
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0.693771$$

Comprobando

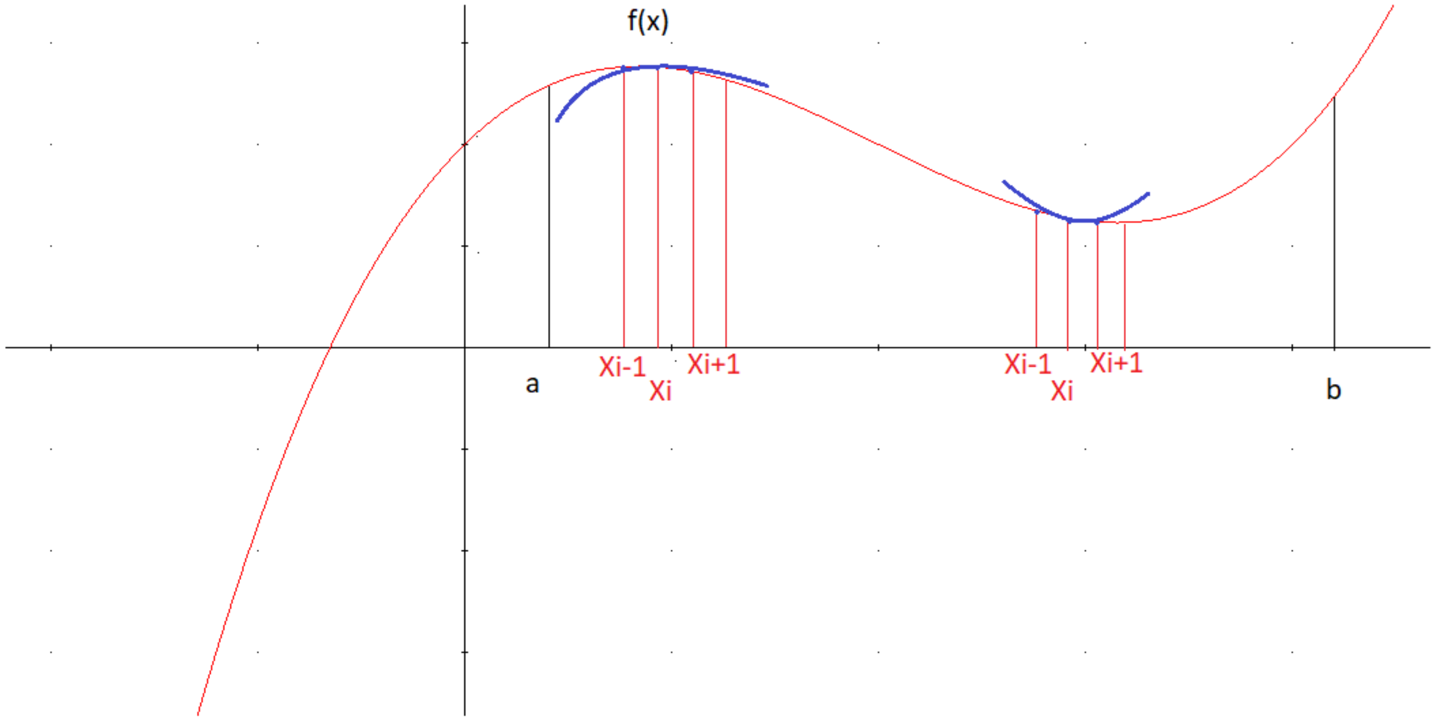
$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2 \approx 0.693147$$

Regla de Simpson

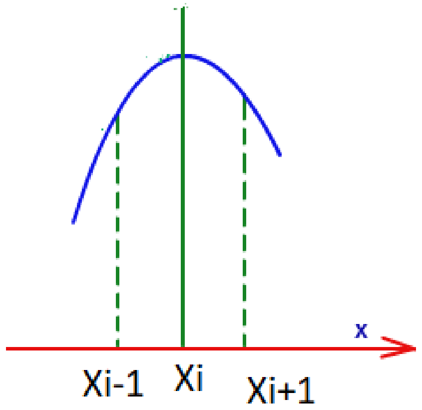
Sea $f(x)$ una función definida en $[a,b]$ y hagamos una partición de este intervalo de n subintervalos de longitud Δx con $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$



Nos aproximaremos a la función con arcos parabólicos, por lo cual necesitaremos tres puntos sobre la función, esto para que nos permita determinar una parábola, en la gráfica mostramos dos opciones de tres puntos consecutivos y una parábola que se puede usar para acercarse a la función



Un arco parabólico es



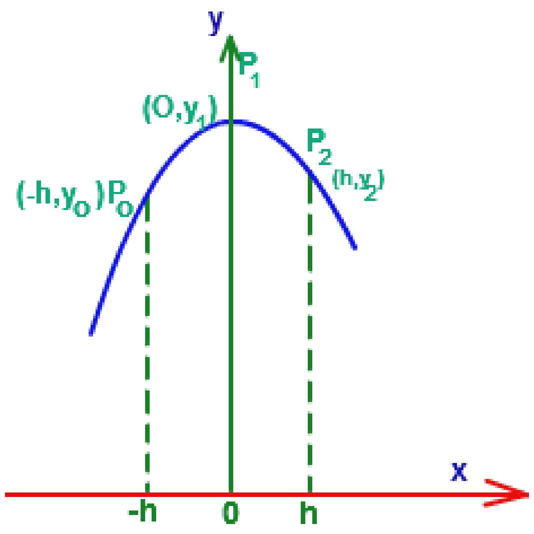
Determinemos el área bajo la parábola, para ello supongamos que en el eje *x*, se tienen los puntos del intervalo $-h, 0, h$ lo que nos genera tres puntos sobre la gráfica

$$(-h, y_0) \qquad (0, y_1) \qquad (h, y_2)$$

y que la expresión para la parábola es $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$

Recordemos que $h = \Delta x$, $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$ y $y_2 = f(x_2)$

Así nos queda el siguiente arco parabólico



Calculemos el área bajo esa curva

$$A_0 = \int_{-h}^{h} \left(Ax^2 + Bx + C\right) dx = \frac{Ax^3}{3} + \frac{Bx^2}{2} + C\,x \Big|_{-h}^{h}$$

$$A_0 = \left(\frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch\right) - \left(\frac{A(-h)^3}{3} + \frac{B(-h)^2}{2} + C(-h)\right) = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch - \left(-\frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} - Ch\right)$$

$$A_0 = \frac{Ah^3}{3} + \frac{Bh^2}{2} + Ch + \frac{Ah^3}{3} - \frac{Bh^2}{2} + Ch = \frac{2Ah^3}{3} + 2Ch = \frac{1}{3}h\left(2Ah^2 + 6Ch\right)$$

$$A_0 = \frac{1}{3}h\left(2Ah^2 + 6Ch\right)$$

La parábola $y = f(x) = Ax^2 + Bx + C$ pasa por los puntos y_0, y_1 y y_2 , así

$$y_0 = A(-h)^2 + B(-h) + C = Ah^2 - Bh + C$$

$$y_1 = A(0)^2 + B(0) + C = C$$

$$y_2 = A(h)^2 + B(h) + C = Ah^2 + Bh + C$$

Sumando

$$y_0 + y_2 = Ah^2 - Bh + C + Ah^2 + Bh + C = 2Ah^2 + 2C$$

Sumando $4y_1$

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = 2Ah^2 + 6C$$

Luego

$$y_0 + 4y_1 + y_2 = A2Ah^2 + 6C$$

Así

$$A_0 = \frac{1}{3}h\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

Determinando las áreas de los demás arcos parabólicos, tenemos

$$A_0 = \frac{1}{3}h\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right)$$

$$A_2 = \frac{1}{3}h\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right)$$

$$A_4 = \frac{1}{3}h\left(y_4 + 4y_5 + y_6\right)$$

$$A_{n-4} = \frac{1}{3}h\left(y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2}\right)$$

$$A_{n-2} = \frac{1}{3}h\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

Sumando las áreas

$$\int_a^b f(x)dx \approx A_0 + A_2 + \cdots + A_{n-4} + A_{n-2} = \frac{1}{3}h\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{1}{3}h\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{3}h\left(y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2}\right) + \frac{1}{3}h\left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h\left[\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) + \cdots + \left(y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2}\right) + \left(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right)\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h\left[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \cdots + y_{n-4} + 4y_{n-3} + y_{n-2} + y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{1}{3}h\left[y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 4y_{n-3} + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right]$$

Regla de Simpson

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\Delta x}{3}\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)+\cdots+2f\left(x_{n-2}\right)+4f\left(x_{n-1}\right)+f\left(x_n\right)\right)$$

Donde

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

Ejemplo 2.

Usar la regla de Simpson para aproximar el valor de la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ con $n=10$

Para aproximar el valor de la integral debemos de calcular

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx \approx \frac{\Delta x}{2}\left(f\left(x_0\right)+4f\left(x_1\right)+2f\left(x_2\right)+4f\left(x_3\right)+2f\left(x_4\right)+4f\left(x_5\right)+2f\left(x_6\right)+4f\left(x_7\right)+2f\left(x_8\right)+4f\left(x_9\right)+f\left(x_{10}\right)\right)$$

El valor de $\Delta x = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10}$

Los valores de $x_0, x_1, x_2, \cdots x_n$ y de $f\left(x_0\right), f\left(x_1\right), f\left(x_2\right), \cdots f\left(x_n\right)$ los determinaremos en la tabla siguiente.

x_i	$f(x_i)$	Sumando de la Regla de Simpson
$x_0 = 1$	$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{1} = 1$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 1 + \frac{1}{10} = \frac{11}{10}$	$f(x_1) = f\left(\frac{11}{10}\right) = \frac{10}{11}$	$4f(x_1) = 4\left(\frac{10}{11}\right) = \frac{40}{11}$
$x_2 = 1 + \frac{2}{10} = \frac{12}{10}$	$f(x_2) = f\left(\frac{12}{10}\right) = \frac{10}{12}$	$2f(x_2) = 2\left(\frac{10}{12}\right) = \frac{20}{12} = \frac{5}{3}$
$x_3 = 1 + \frac{3}{10} = \frac{13}{10}$	$f(x_3) = f\left(\frac{13}{10}\right) = \frac{10}{13}$	$4f(x_3) = 4\left(\frac{10}{13}\right) = \frac{40}{13}$
$x_4 = 1 + \frac{4}{10} = \frac{14}{10}$	$f(x_4) = f\left(\frac{14}{10}\right) = \frac{10}{14}$	$2f(x_4) = 2\left(\frac{10}{14}\right) = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$
$x_5 = 1 + \frac{5}{10} = \frac{15}{10}$	$f(x_5) = f\left(\frac{15}{10}\right) = \frac{10}{15}$	$4f(x_5) = 4\left(\frac{10}{15}\right) = \frac{40}{15}$
$x_6 = 1 + \frac{6}{10} = \frac{16}{10}$	$f(x_6) = f\left(\frac{16}{10}\right) = \frac{10}{16}$	$2f(x_6) = 2\left(\frac{10}{16}\right) = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$
$x_7 = 1 + \frac{7}{10} = \frac{17}{10}$	$f(x_7) = f\left(\frac{17}{10}\right) = \frac{10}{17}$	$4f(x_7) = 4\left(\frac{10}{17}\right) = \frac{40}{17}$
$x_8 = 1 + \frac{8}{10} = \frac{18}{10}$	$f(x_8) = f\left(\frac{18}{10}\right) = \frac{10}{18}$	$2f(x_8) = 2\left(\frac{10}{18}\right) = \frac{20}{18} = \frac{10}{9}$
$x_9 = 1 + \frac{9}{10} = \frac{19}{10}$	$f(x_9) = f\left(\frac{19}{10}\right) = \frac{10}{19}$	$4f(x_9) = 4\left(\frac{10}{19}\right) = \frac{40}{19}$
$x_{10} = 1 + \frac{10}{10} = 2$	$f(x_{10}) = f(2) = \frac{1}{2}$	$f(x_{10}) = \frac{1}{2}$

Luego

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx \frac{\frac{1}{10}}{3}\left(1+\frac{40}{11}+\frac{5}{3}+\frac{40}{13}+\frac{10}{7}+\frac{40}{15}+\frac{5}{4}+\frac{40}{17}+\frac{10}{9}+\frac{40}{19}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{30}(20.794506)=0.693150$$

Así

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx \approx 0.693150$$

Comprobando

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2 \approx 0.693147$$