SERIES DE POTENCIAS

DEFINICIÓN

Una serie de potencias alrededor de $x = 0$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

donde los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes

Una serie de potencias alrededor de $x = a$ es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1 (x-a) + c_2 (x-a)^2 + \cdots + c_n (x-a)^n + \cdots$$

donde el centro a y los coeficientes $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes.

Si en la serie de potencias alrededor de $x=0$ consideramos que $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$, entonces

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

La cual es una serie geométrica con $a=1$ y $r=x$ converge para $|x|<1$ y diverge si $|x|\geq 1$ y su suma es $\dfrac{1}{1-x}$,

RADIO E INTERVALO DE CONVERGENCIA DE UNA SERIE DE POTENCIAS

TEOREMA.

Para una serie de potencias dada $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ solo hay tres posibilidades

i) La serie converge cuando $x = a$

ii) La serie converge para toda x

iii) Hay un número positivo R tal que la serie converge si $|x-a| < R$ y diverge si $|x-a| > R$ la serie puede converge o no en $|x-a| = R$.

El número R se denomina radio de convergencia de la serie de potencias. En (i) el radio de convergencia es $R = 0$ y en (ii) el radio de convergencia es $R = \infty$.

El intervalo de convergencia de una serie consta de todos los valores de x para los cuales la serie converge.

Para determinar el radio e intervalo de convergencia de una serie de potencias, generalmente se emplea el criterio de la razón para la serie de los valores absolutos, ya que de esta forma se tiene una serie de términos positivos, así calculamos el límite $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ y también es posible aplicar el criterio de la raíz para la serie de los valores absolutos, esto es $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$. Recordemos que un teorema en convergencia absoluta nos dice: si la serie converge absolutamente entonces la serie converge.

EJEMPLO 1.

Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

Se tiene que $a_n = n!x^n$ y $a_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$

Calculando el límite para la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!x^{n+1}}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)n!x^n x}{n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|(n+1)x\right| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|x|$$

$\lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \infty$, si $x \neq 0$

Si $x = 0$, $\lim_{n\to\infty}(n+1)|x| = \lim_{n\to\infty}(n+1)|0| = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 < 1$ y por el criterio de la razón converge.

Así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$ converge para $x = 0$, el intervalo de convergencia $\{0\}$, solo es el punto cero.

EJEMPLO 2.

Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Se tiene que $a_n = \frac{x^n}{n!}$ y $a_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$

Calculando el límite para la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^{n+1}}{(n+1)!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!x^n x}{(n+1)n!x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{n+1}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}$$

$$|x|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = |x|(0) = 0 < 1 \quad \forall x$$

la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ converge para $x = \infty$ y el intervalo de convergencia es $I = (-\infty, \infty)$

EJEMPLO 3.

Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}(x-2)^{n}$

Se tiene que $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}(x-2)^{n}$ y $a_{n+1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(x-2)^{n+1}$

Calculando el límite para la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}(x-2)^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)^{n}(x-2)}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}(x-2)^{n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)(x-2)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(-\frac{1}{2}\right)\right||x-2|=\frac{1}{2}|x-2|\lim_{n\to\infty}1=\frac{1}{2}|x-2|$$

De acuerdo al criterio de la razón, la serie converge si $\frac{1}{2}|x-2|<1$, esto es $|x-2|<2$, resolviendo la desigualdad

$$|x-2|<2 \;\Rightarrow\; -2<x-2<2 \;\Rightarrow\; -2+2<x<2+2 \;\Rightarrow\; 0<x<4$$

Luego, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ converge si $0<x<4$

Diverge si $\frac{1}{2}|x-2|>1$, esto es $|x-2|>2$, resolviendo la desigualdad

$$|x-2|>2 \;\Rightarrow\; x-2>2 \;\Rightarrow\; x>4$$

y $-(x-2)>2 \;\Rightarrow\; x-2<-2 \;\Rightarrow\; x<-2+2 \;\Rightarrow\; x<0$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ diverge si $x<0$ y $x>4$.

Falta por determinar si la serie converge o diverge para $\frac{1}{2}|x-2|=1$ de donde

$|x-2|=2 \Rightarrow x-2=2 \Rightarrow x=2+2=4$

y $-(x-2)=2 \Rightarrow x-2=-2 \Rightarrow x=-2+2=0$

Determinemos si la serie converge o diverge para $x=0$ y para $x=4$.

Si $x=0$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(0-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n(-2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(1)^n=\sum_{n=0}^{\infty}1$$

Esta es una serie especial, podemos determinar su convergencia con la definición, es decir con la sucesión de sumas parciales o podemos usar el criterio del n-ésimo término para la divergencia, usemos este último.

Calculamos el límite del término general $\lim_{n\to\infty} 1=1\neq 0$ por lo tanto diverge, Si $x = 4$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (4-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)(2)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

Esta es una serie alternante, determinamos si converge o diverge con el criterio de series alternantes, para ello $b_n = 1$, notamos que no se cumple la segunda condición del criterio debido a que $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0$, por lo cual la serie diverge.

Así determinamos que cuando $|x-2| = 2$, la serie diverge.

Por lo tanto, la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-2)^n$ converge si $0 < x < 4$, el radio de convergencia es $R = 2$ y el intervalo de convergencia es $(0,4)$.

EJEMPLO 4.

Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$

Se tiene que $a_n = (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$ y $a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}$

Calculando el límite para la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^{n+1}}{(n+1)\ln(n+1)}}{(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(-1)\frac{(x-2)(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}}{(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)\frac{(x-2)}{(n+1)\ln(n+1)}}{\frac{1}{n \ln n}}\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|-1\right|\left|\frac{(x-2)n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}\right|=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

$$=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}=\left|x-2\right|\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln(n+1)}$$

Aplicando la regla de L'Hospital

$$=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\left|x-2\right|(1)\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\left|x-2\right|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1}=\left|x-2\right|$$

De acuerdo al criterio de la razón, la serie converge si $|x-2|<1$, resolviendo la desigualdad

$$|x-2|<1 \Rightarrow -1<x-2<1 \Rightarrow -1+2<x<1+2 \Rightarrow 1<x<3$$

Luego, la serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n\ln n}$ converge si $1<x<3$

Diverge si $|x-2|>1$, resolviendo la desigualdad

$$|x-2|>1 \Rightarrow x-2>1 \Rightarrow x>3$$

y $-(x-2)>1 \Rightarrow x-2<-1 \Rightarrow x<-1+2=1 \Rightarrow x<1$

La serie $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n \frac{(x-2)^n}{n\ln n}$ diverge si $x<1$ y $x>3$.

Falta por determinar si la serie converge o diverge para $|x-2|=1$ de donde

$|x-2|=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=1+2=3$

y $-(x-2)=1 \Rightarrow x-2=-1 \Rightarrow x=-1+2=1$

Determinemos si la serie converge o diverge para $x=1$ y para $x=3$.

Si $x=1$, la serie es

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(1-2)^n}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^n}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}((-1)(-1))^n\frac{1}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}(1)^n\frac{1}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

Esta es una serie de términos positivos, determinemos su convergencia con el criterio de la integral.

$f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$, f es positiva para $x>1$, y f no es continua en $x=0$ y $x=1$, luego f es continua para $x>1$.

Calculemos la derivada de la función $f'(x)=\dfrac{x\ln x(0)-1\left(x\left(\dfrac{1}{x}\right)+\ln x\right)}{(x\ln x)^2}=-\dfrac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}<0$ si $x\geq 2$.

Luego la función es decreciente para $x\geq 2$.

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln x}dx$$

Calculando la integral

$\displaystyle\int\frac{1}{x\ln x}dx$, sea $u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx$

$$\int\frac{1}{u}du=\ln u=\ln(\ln x)$$

Así

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}\int_2^{b}\frac{1}{x\ln x}dx=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln x)\Big|_2^b=\lim_{b\to\infty}\ln(\ln b)-\ln(\ln 2)=\infty$$

Luego la serie diverge.

Si $x=3$, la serie es

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(3-2)^n}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)^n}{n\ln n}=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln n}$$

, esta es una serie alternante con $b_n=\dfrac{1}{n\ln n}$, usemos el criterio de convergencia de series alternantes.

i) Sea $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$,

Calculemos la derivada de la función

$$f'(x)=\frac{x\ln x(0)-1\left(x\left(\frac{1}{x}\right)+\ln x\right)}{(x\ln x)^2}=-\frac{1+\ln x}{(x\ln x)^2}<0$$

para $x\geq 2$, luego la función es decreciente y se cumple la primera condición del criterio.

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\infty} = 0$

se cumple la segunda condición y la serie converge.

Por lo tanto, la serie de potencias $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n \ln n}$ converge si $2 < x \leq 3$, el radio de convergencia es $R = 1$ y el intervalo de convergencia es $(0, 4]$.

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES COMO SERIES DE POTENCIAS

Cuando en una serie de potencias con centro en el origen $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ se tiene que $c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 1$, la serie es $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$ que como mencionamos al inicio es la serie geométrica con $a = 1$ y $r = x$ y converge para $|x| < 1$ y su suma es $\frac{1}{1-x}$, así podemos decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x} \text{ ó}$$

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, lo que nos dice que la función racional $\frac{1}{1-x}$ puede expresarse como una serie de potencias.

Si en la expresión $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, reemplazamos x con $-x^2$, tenemos $\frac{1}{1-\left(-x^2\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n$, de donde

$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ y converge si $\left|-x^2\right|<1$, esto es si $|x|<1$.

EJEMPLO 5.

Determinar una representación como series de potencias de la expresión $\dfrac{1}{x+4}$.

Sabemos que $\dfrac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, luego tenemos

$$\frac{1}{x+4}=\frac{1}{4+x}=\frac{1}{4-(-x)}=\frac{1}{4\left(1-\left(-\frac{x}{4}\right)\right)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{4}\right)}\right)=$$

$$\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{x}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x}{4}\right)^n=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}}$$

Así $\dfrac{1}{x+4}$ se puede expresar como la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{x^n}{4^{n+1}}$, la serie converge si

$\left|-\dfrac{x}{4}\right|<1 \Rightarrow \left|\dfrac{x}{4}\right|<1 \Rightarrow |x|<4$, por lo que el intervalo de convergencia es $(-4,4)$.

EJEMPLO 6.

Determinar una representación como series de potencias de la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}$

La función dada puede expresarse como

$$f(x)=\frac{x^2}{x+4}=x^2\left(\frac{1}{x+4}\right)$$

Y en el ejemplo 5, determinamos una expresión para $\dfrac{1}{x+4}$ como una serie de potencias, esto es

$\dfrac{1}{x+4}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}}$, hagamos uso de ese hecho.

Luego

$$x^2\left(\frac{1}{x+4}\right)=x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}.$$

Así $f(x)=\dfrac{x^2}{x+4}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}$ y como en el ejemplo 5, el radio de convergencia es $(-4,4)$.

EJEMPLO 7.

Determinar el radio e intervalo de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}$

Se tiene que $a_n = (-1)^n \frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}$ y $a_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{x^{n+3}}{4^{n+2}}$

Calculando el límite para la serie de los valores absolutos

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{x^{n+3}}{4^{n+2}}}{(-1)^n\dfrac{x^{n+2}}{4^{n+1}}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(-1)\dfrac{x^n x^3}{4^n 4^2}}{(-1)^n\dfrac{x^n x^2}{4^n 4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)\dfrac{x^n x^3}{4^n 4^2}}{\dfrac{x^n x^2}{4^n 4}}\right| = \lim_{n\to\infty}|-1|\left|\frac{\dfrac{x^n x^3}{4^n 4^2}}{\dfrac{x^n x^2}{4^n 4}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x}{4}\right| = \left|\frac{x}{4}\right|$$

De acuerdo al criterio de la razón, la serie converge si $\left|\frac{x}{4}\right| < 1$, resolviendo la desigualdad

$$\left|\frac{x}{4}\right| < 1 \Rightarrow |x| < 4 \Rightarrow -4 < x < 4$$

Luego, la serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}$ converge si $-4 < x < 4$

Diverge si $\left|\frac{x}{4}\right| > 1$, resolviendo la desigualdad

$$\left|\frac{x}{4}\right| > 1 \Rightarrow x > 4 \text{ y } -x > 4 \Rightarrow x < -4$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}$ diverge si $x < -4$ y $x > 4$.

Falta por determinar si la serie converge o diverge para $\left|\frac{x}{4}\right| = 1$ de donde

$|x| = 4 \;\Rightarrow\; x = 4$ y $x = -4$

Determinemos si la serie converge o diverge para $x = 4$ y para $x = -4$.

Si $x = 4$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^{n+2}}{4^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, 4$$

esta es una serie alternante con $b_n = 4$, usemos el criterio de convergencia de series alternantes.

Veamos si se cumple la segunda condición

ii) $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 4 = 4 \neq 0$, con lo cual no se cumple la segunda condición y decimos que la serie diverge.

Si $x=-4$, la serie es

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-4)^{n+2}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(-1)^{n+2}\,4^{n+2}}{4^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+n+2}\,4=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2n+2}\,4=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{2(n+1)}\,4$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[(-1)^2\right]^{(n+1)}4=\sum_{n=0}^{\infty}[1]^{(n+1)}4=\sum_{n=0}^{\infty}4$$

Esta es una serie que es constante, podemos determinar si converge o diverge usando el Criterio del n-ésimo término para la divergencia, así

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}4=4\neq 0$ y concluimos que la serie diverge.

Por lo tanto, la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{4^{n+1}}$ y el intervalo de convergencia es $(-4,4)$.

DERIVACIÓN E INTEGRACIÓN DE SERIES DE POTENCIAS

Si se define la función $f(x)$ como la serie de potencias con centro en cero, esto es

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

Podemos calcular la derivada de la función $f(x)$, como la derivada de una suma, solo que al estar definida la función por una serie, esta serie una suma infinita, así

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1} + \cdots$$

Podemos calcular la segunda derivada

$$f''(x) = 2c_2 + 3\cdot 2c_3 x + 4\cdot 3c_4 x^2 + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2} + \cdots$$

Tercera derivada

$$f'''(x) = 3\cdot 2c_3 + 4\cdot 3\cdot 2c_4 x + 5\cdot 4\cdot 3c_5 x^2 \cdots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3} + \cdots$$

Obteniendo

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

$$f'(x)=c_1+2c_2x+3c_3x^2+\cdots+nc_nx^{n-1}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty} nc_nx^{n-1}$$

$$f''(x)=2c_2+3\cdot 2c_3x+4\cdot 3c_4x^2+\cdots+n(n-1)c_nx^{n-2}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_nx^{n-2}$$

$$f'''(x)=3\cdot 2c_3+4\cdot 3\cdot 2c_4x+5\cdot 4\cdot 3c_5x^2\cdots+n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}+\cdots=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_nx^{n-3}$$

Y así sucesivamente es posible determinar las derivadas.

Si representamos la función como la serie de potencias con centro en a,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$$

Podemos determinar las derivadas de un modo semejante obteniendo.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}$$

$$f'''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}$$

Podemos determinar la integral de la función, como sigue

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots$$

$$\int f(x)dx = \int \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n + \cdots\right)dx$$

$$\int f(x)dx = \int c_0 dx + \int c_1 x dx + \int c_2 x^2 dx + \cdots + \int c_n x^n dx + \cdots$$

$$\int f(x)dx = c_0 x + c_1\left(\frac{x^2}{2}\right) + c_2\left(\frac{x^3}{3}\right) + \cdots + c_n\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) + C = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Si $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots$, la integral es

$$\int f(x)dx = \int \left[c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots \right] dx$$

$$= c_0(x-a) + c_1\frac{(x-a)^2}{2} + c_2\frac{(x-a)^3}{2} + \cdots + c_n\frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

TEOREMA

Si $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ es una serie de potencias con radio de convergencia $R>0$, se define la función

$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ en el intervalo $a-R<x<a+R$.

La función $f(x)$ tiene derivadas de todos los órdenes dentro del intervalo, por lo que es posible obtener la derivada de la función si derivamos la serie original término a término, esto es

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n (x-a)^{n-2}$$

Y así sucesivamente. Cada una de estas series derivadas convergen en todos puntos del intervalo $a-R<x<a+R$.

Y la integral la función la obtenemos si integramos término a término, así

$$\int f(x)dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Esta serie converge en todos puntos del intervalo $a - R < x < a + R$.

Este Teorema nos proporciona las igualdades siguientes.

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\left[c_n (x-a)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (x-a)^{n-1}$$

$$\int \left[\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n\right] dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \left[c_n (x-a)^n\right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

EJEMPLO 8.

Determinar una representación como series de potencias para $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

Sabemos que $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, y que $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Así que si determinamos la derivada de la igualdad $\dfrac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ se tendrá la serie de potencias para $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \frac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + nx^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

Podemos cambiar el valor inicial de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$, haciendo el cambio de variable $m = n - 1$ $\Rightarrow n = m + 1$, así $\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$ es igual a $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1)x^{m}$, expresando la serie con variable n, se tiene que

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} \text{ o } \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{n}$$

EJEMPLO 9.

Determinar una representación como series de potencias de la función para $f(x) = \arctan x$.

Sabemos que $f'(x) = \dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$, por lo cual $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + C$

Y al principio determinamos que

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

Usando estos hechos para determinar la expresión como serie de potencias de la función $f(x) = \arctan x$, calculamos la integral de la igualdad

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \int \left(1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots\right) dx$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + C = C + x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots$$

$$\arctan x = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$

Determinemos el valor de C para $x = 0$,

$$\arctan 0 = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (0)^{2n+1} \Rightarrow 0 = C + 0 \quad C = 0$$

Por lo cual

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}$$ y su radio de convergencia es $R = 1$.