INTEGRALES IMPROPIAS

Integrales con límites de integración infinitos

Definición:

1. Si f es continua en el intervalo $[a,\infty)$, entonces

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

2. Si f es continua en el intervalo $(-\infty,b]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx$$

Se dice que la integral impropia ***converge*** si el límite existe, en caso contrario, la integral impropia ***diverge***.

Ejemplo 1.

Determinar si la integral $\int_1^\infty \frac{dx}{x}$ converge o diverge.

El integrando es la función $f(x) = \frac{1}{x}$, continua en el intervalo $[1, \infty]$

Por definición

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to\infty}[\ln x]_1^b = \lim_{b\to\infty}(\ln b - \ln 1) = \lim_{b\to\infty}(\ln b) = \infty$$

La integral diverge

Ejemplo 2.

Evalúa $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$

El integrando es la función $f(x) = xe^x$, continua en el intervalo $[-\infty, 0]$

Por definición

$$\int_{-\infty}^{0} xe^x dx = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} xe^x dx$$

Integrando por partes

$u = x,\ du = dx$ y $dv = e^x dx, v = e^x$

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Luego

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{0} xe^{x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(xe^{x}-e^{x}\right)\Big|_{a}^{0} = \lim_{a\to-\infty}\left[\left(0e^{0}-e^{0}\right)-\left(ae^{a}-e^{a}\right)\right]$$

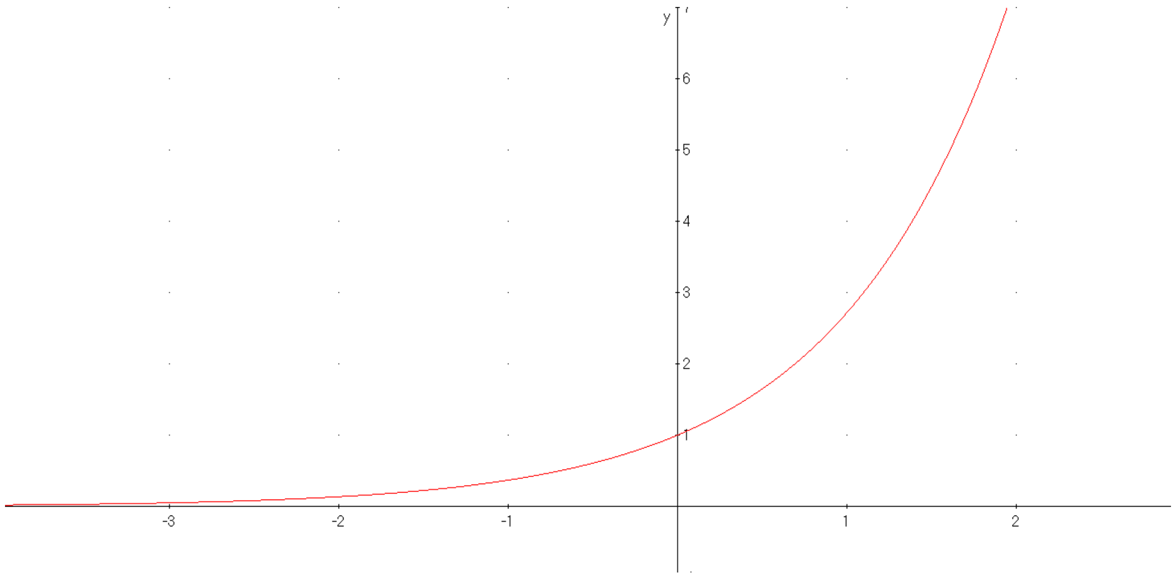
$$= \lim_{a\to-\infty}\left(-1-ae^{a}+e^{a}\right) = \lim_{a\to-\infty}-1+\lim_{a\to-\infty}-ae^{a}+\lim_{a\to-\infty}e^{a}$$

Calculando los límites

$$\text{i) } \lim_{a\to-\infty}-1=-1$$

$$\text{ii) } \lim_{a\to-\infty}e^{a}=e^{-\infty}$$

Hay que determinar el valor del límite de la función exponencial cuando los valores de x tiende a menos infinito, para ello usemos la gráfica de la función exponencial.



Observamos que si los valores de x decrecen, los valores de y se aproximan a cero, esto es

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{Así } \lim_{a \to -\infty} e^{a} = 0$$

iii) $\lim_{a\to-\infty} -ae^{a} = -(-\infty)e^{-\infty} = \infty \cdot 0$

Esta es una forma indeterminada.

Pasamos de un producto a un cociente

$$\lim_{a\to-\infty} -ae^{a} = \lim_{a\to-\infty} -\frac{a}{e^{-a}}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\lim_{a\to-\infty} -\frac{a}{e^{-a}} = \lim_{a\to-\infty} -\left(\frac{1}{-e^{-a}}\right) = \lim_{a\to-\infty} e^{a} = 0$$

Así

$$\int_{-\infty}^{0} xe^{x}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(-1-ae^{a}+e^{a}\right) = \lim_{a\to-\infty} -1 + \lim_{a\to-\infty} -ae^{a} + \lim_{a\to-\infty} e^{a} = -1+0+0 = -1$$

Y decimos que la integral converge y su valor es -1

¿Cómo calculamos el valor de la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$?

Definición: Si f es continua en $(-\infty,\infty)$ y si tanto $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ convergen, decimos que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ converge y se determina su valor como

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx \qquad \text{donde } c \text{ es un número real}$$

si alguna de las integrales $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ y $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ diverge entonces la $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ diverge.

Ejemplo 3.

Determinar si la integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$ converge o diverge

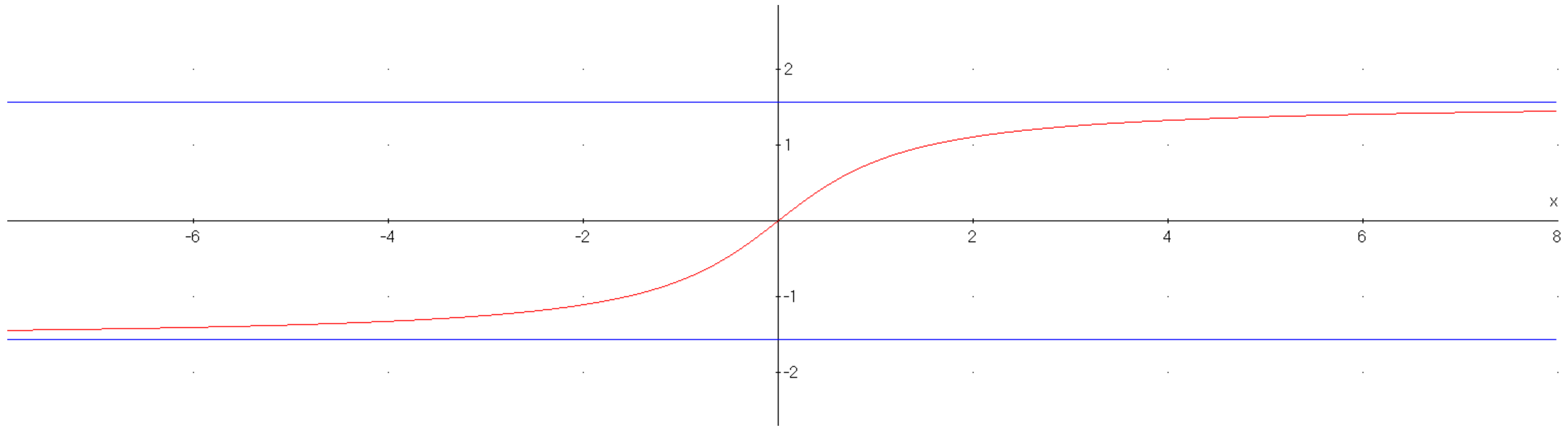
El integrando $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ es continua en $(-\infty,\infty)$, luego decimos que la función $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ es continua en $(-\infty,c]$ y en $[c,\infty)$.

Como $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ es continua en $(-\infty,c]$, entonces

$$\int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{a\to-\infty} \arctan x\Big|_a^c = \lim_{a\to-\infty}(\arctan c - \arctan a)$$

$$= \arctan c - \lim_{a\to-\infty} \arctan a$$

El límite de la función trigonométrica inversa lo calculamos a partir de su gráfica.



$$\lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2} \text{ y } \lim_{x\to\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Así } \int_{-\infty}^{c} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan c - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arctan c + \frac{\pi}{2}$$

Determinando el valor de la otra integral

Como $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en $[c,\infty)$, entonces

$$\int_c^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_c^b \frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to\infty}\arctan x\Big|_c^b=\lim_{b\to\infty}(\arctan b-\arctan c)$$

$$=\lim_{b\to\infty}\arctan b-\arctan c=\frac{\pi}{2}-\arctan c$$

Luego

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan c+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\arctan c=\pi$$

Así la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}\,dx$ converge y su valor es π

Integrales con integrandos discontinuos

Definición:

Si f es continua en el intervalo $(a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)dx$$

Si f es continua en el intervalo $[a,b)$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx$$

Se dice que la integral impropia ***converge*** si el límite existe, en caso contrario, la integral impropia ***diverge***.

Ejemplo 4.

Determinar si la integral $\int_0^1 x\ln x dx$ converge o diverge.

El integrando es $f(x) = x\ln x$, no es continua en $x = 0$, luego es continua en el intervalo $(0,1]$

Por definición $$\int_0^1 x\ln x dx = \lim_{a\to 0^+} \int_1^b x\ln x dx$$

Resolviendo la integral $\int x\ln x dx$ por partes, tenemos

$$u = \ln x,\ du = \frac{1}{x}dx \qquad dv = dx,\ v = \int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \int \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{x}dx\right) = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2$$

Luego

$$\int_0^1 x\ln x dx = \lim_{a\to 0^+}\int_1^b x\ln x dx = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2\right)_a^1 = \lim_{a\to 0^+}\left(\frac{1}{2}(1)^2\ln 1 - \frac{1}{4}(1)^2\right) - \left(\frac{1}{2}(a)^2\ln a - \frac{1}{4}(a)^2\right)$$

$$\lim_{a\to 0^+}\left(0-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{1}{2}(a)^2\ln a - \frac{1}{4}(a)^2\right) = \lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{4} - \lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2}a^2\ln a - \lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{4}a^2$$

Calculando los límites

$$\lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2}a^2\ln a = \frac{1}{2}0^2\ln 0 = 0\cdot(-\infty)$$

Esta es una forma indeterminada de producto, así pasamos del producto a un cociente

$$\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2}a^2\ln a = \frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\frac{\ln a}{\frac{1}{a^2}} = \frac{\ln 0}{\frac{1}{0}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

Aplicando la Regla de L'Hospital

$$\frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\frac{\ln a}{\frac{1}{a^2}}=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}\frac{\frac{1}{a}}{-\frac{2}{a^3}}=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}-\frac{a^3}{2a}=\frac{1}{2}\lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{2}a^2=0$$

$$\lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{4}a^2=-\frac{1}{4}(0)=0$$

Así

$$\int_0^1 x\ln x dx=\lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{4}-\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{2}a^2\ln a-\lim_{a\to 0^+}-\frac{1}{4}a^2=-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(0)-0=-\frac{1}{4}$$

Ejemplo 5.

Determinar si la integral $\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ converge o diverge.

El integrando es $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}$, no es continua en $x = \pm 1$, luego es continua en el intervalo $[0,1)$

Por definición:

$$\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = \lim_{b\to 1^-} \int_0^b \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

La integral $\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$ se resuelve por cambio de variable,

Tomando $u = x^2$, $du = 2xdx$

$$\int \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = 2\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\,dx = 2\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\,du = 2\arcsin x^2$$

Así

$$\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim_{b\to 1^-}\int_0^b \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \lim_{b\to 1^-} 2\arcsin x^2\Big|_0^b = \lim_{b\to 1^-} 2\arcsin b^2 - 2\arcsin 0^2$$

$$= \lim_{b\to 1^-} 2\arcsin b^2 - 2\arcsin 0 = 2\arcsin 1 - 2\arcsin 0$$

Determinemos los valores de y = arcsin1 y z = arcsin0, usando los valores principales de las funciones trigonométricas

$$y = \arcsin 1 \Rightarrow \sin y = 1 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$$ y $$z = \arcsin 0 \Rightarrow \sin z = 0 \Rightarrow z = 0$$

Así $y = \dfrac{\pi}{2}$ y $z = 0$

Luego $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx = 2\arcsin 1 - 2\arcsin 0 = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - 2(0) = \pi$

Por lo tanto, la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{4x}{\sqrt{1-x^4}}dx$ converge y su valor es π

Ejemplo 6.

Determinar si la integral $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ converge o diverge.

El integrando es $f(x)=\frac{1}{(x-3)^2}$, es continua en $x=0$ y en $x=4$

y no es continua en el punto interior del intervalo $x=3$

la función no es continua en $[0,4]$

la integral es impropia

Luego el punto de discontinuidad nos divide el intervalo $[0,4]$ como $[0,4]=[0,3)\cup(3,4]$.

Determinam

$$\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$$

La integral $\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$ es continua en $[0,3)$, así por definición

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{b\to 3^-}\int_0^b \frac{1}{(x-3)^2}\,dx$$, integrando por cambio de variable tenemos

$$\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{b\to 3^-}\int_0^b \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \lim_{b\to 3^-} -\frac{1}{x-3}\bigg|_0^b = \lim_{b\to 3^-} -\frac{1}{b-3}+\frac{1}{0-3} = -\frac{1}{3^- -3}-\frac{1}{3} = \infty - \frac{1}{3} = \infty$$

Por lo que la integral diverge

Como $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx = \int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}dx + \int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ y determinamos que la $\int_0^3 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ diverge ya no necesitamos determinar el valor de la integral $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$, debido a que si la integral $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ converge su valor será un número real, pero la suma de este con la divergencia de la otra integral nos lleva a que la integral $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ también diverge y si la integral $\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ diverge el hecho de que ambas sean divergentes nos lleva a que la integral $\int_0^4 \frac{1}{(x-3)^2}dx$ también diverge.

Integrales impropias con límites de integración infinitos y con integrandos discontinuos

Al determinar el valor de una integral impropia no necesariamente se debe de tener definido un tipo, podemos tener integrales impropias como la del ejemplo anterior en donde la discontinuidad es un punto interior y puede llevar a que por error se resuelva como una integral no impropia.

Así también nos podemos encontrar integrales impropias que lo son por dos razones, porque hay un límite de integración infinito y porque el integrando no es continua en el intervalo de la integral.

Ejemplo 7.

Determinar si la integral $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx$ converge o diverge.

El integrando es $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$, no es continua en $x = 0$ y en $x = \pm 2$

La integral es impropia debido a que tiene a infinito como limite superior y porque no es continua en x = 2.

Así $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}$ es continua en $(2, \infty)$

Para calcularla hay que dividir el intervalo en dos y calcular la integral impropia en cada uno de ellos.

$$f(x)=\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}} \text{ es continua en } (2,4]\cup[4,\infty)$$

Tenemos

$$\int_2^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx=\int_2^{4}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx+\int_4^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$$

$$\int_2^{4}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx=\lim_{a\to 2^+}\int_a^{4}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx=\lim_{a\to 2^+}\frac{1}{2}arc\sec\frac{x}{2}\Big|_a^4=\frac{1}{2}\lim_{a\to 2^+}\left(arc\sec\frac{4}{2}-arc\sec\frac{a}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)\left(arc\sec 2-arc\sec 1\right)$$

Calculando el valor de las funciones trigonométricas inversas

$$\text{si } \ y = arc\sec 1 \ \Rightarrow \ \sec y = 1 \ \Rightarrow \ \frac{1}{\cos y} = 1 \ \Rightarrow \ \cos y = 1 \ \Rightarrow \ \Rightarrow y = 0$$

Así

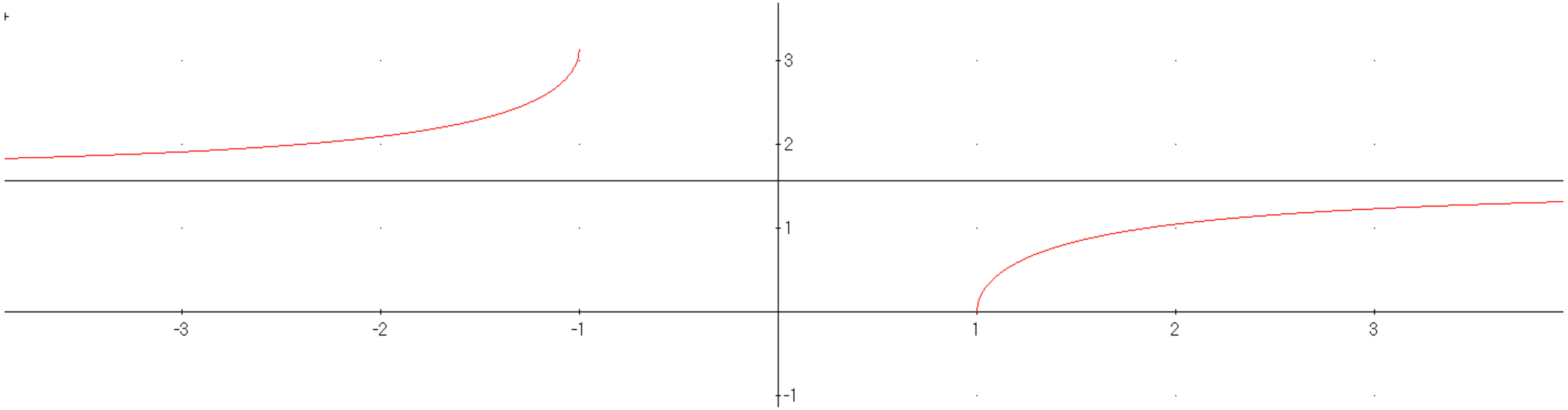
$$\int_2^4 \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 4}} dx = \frac{1}{2}\left(arc\sec 2 - 0\right) = \frac{1}{2} arc\sec 2$$

Calculando la segunda integral

$$\int_4^{\infty}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx=\lim_{b\to\infty}\int_4^{b}\frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}\,dx=\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2}\,arc\sec\frac{x}{2}\Big|_4^b=\frac{1}{2}\lim_{b\to\infty}\left(arc\sec\frac{b}{2}-arc\sec\frac{4}{2}\right)$$

Evaluando

$$\frac{1}{2}\left(arc\sec\frac{\infty}{2}-arc\sec 2\right)=\frac{1}{2}\left(arc\sec\infty-arc\sec 2\right)$$



Cuando $x\to\infty,\ arc\sec x\to\dfrac{\pi}{2}$

Así $\int_4^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}(arc\sec\infty - arc\sec 2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - arc\sec 2\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}arc\sec 2$

Finalmente

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int_2^{4} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx + \int_4^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \frac{1}{2}arc\sec 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}arc\sec 2 = \frac{\pi}{4}$$

La integral $\int_2^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$ converge y su valor es $\frac{\pi}{4}$