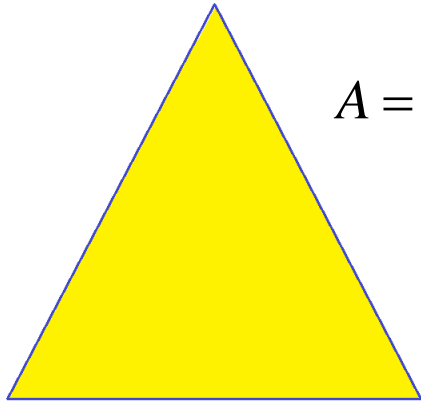


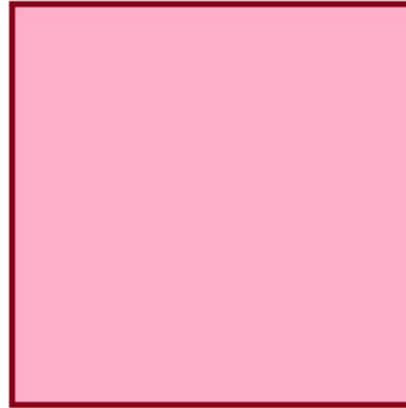
ÁREA BAJO LA CURVA

Sumas de Riemann

Sabemos determinar áreas de figuras geométricas regulares, como:



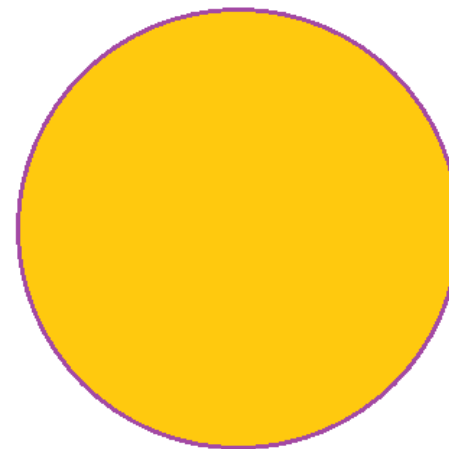
$$A = \frac{(base)(altura)}{2}$$



$$A = (lado)(lado)$$

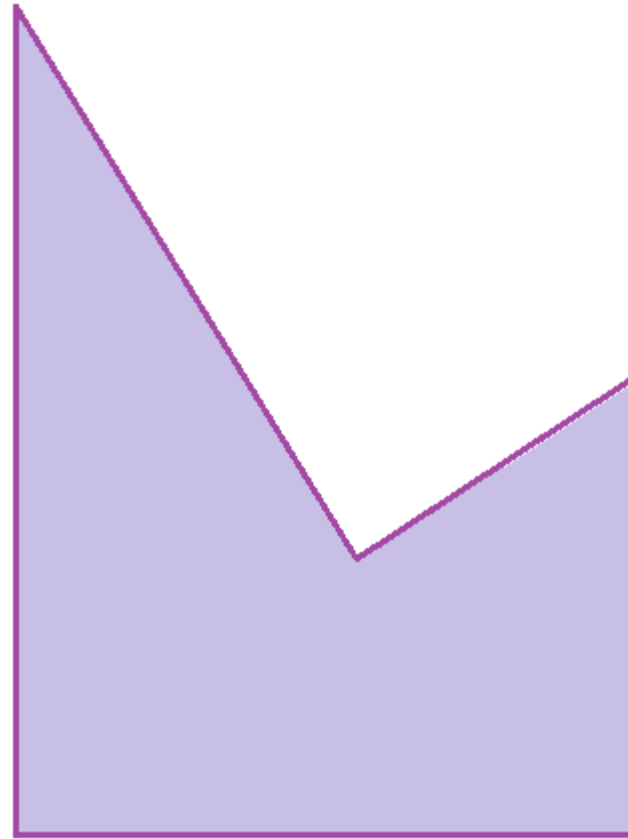


$$A = (base)(altura)$$

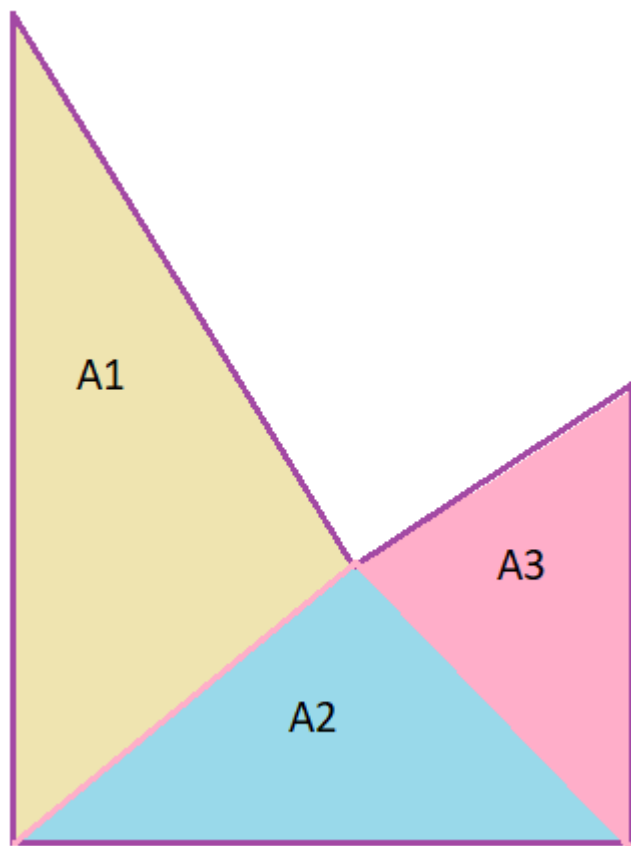


$$A = \pi (radio)^2$$

Y también es posible determinar áreas de figuras irregulares, con lados rectilíneos, como

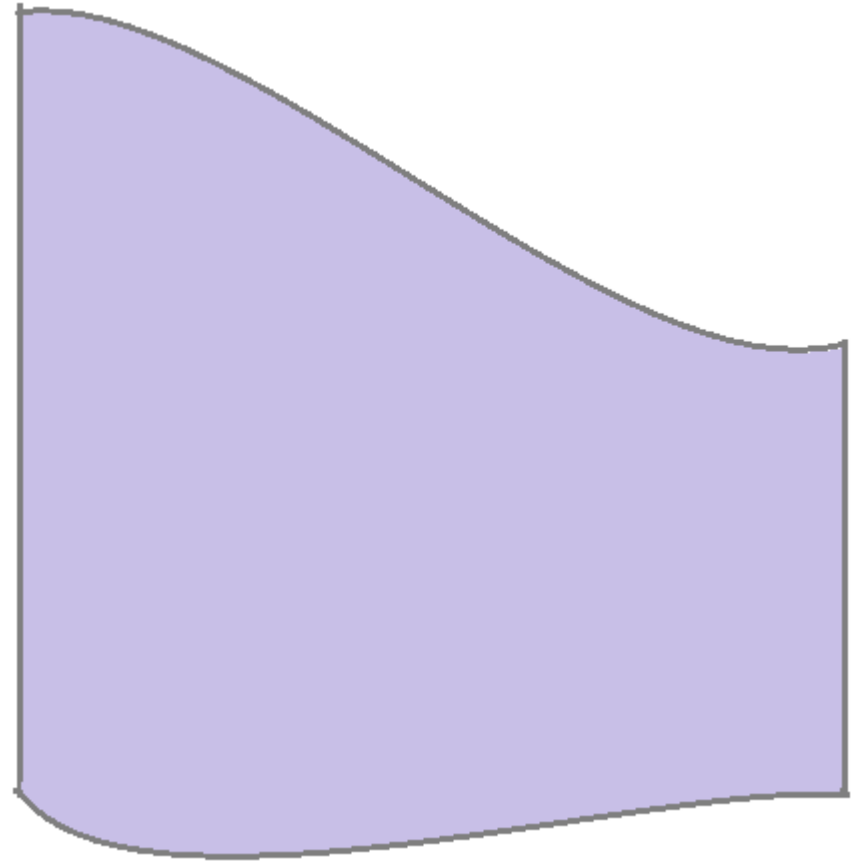
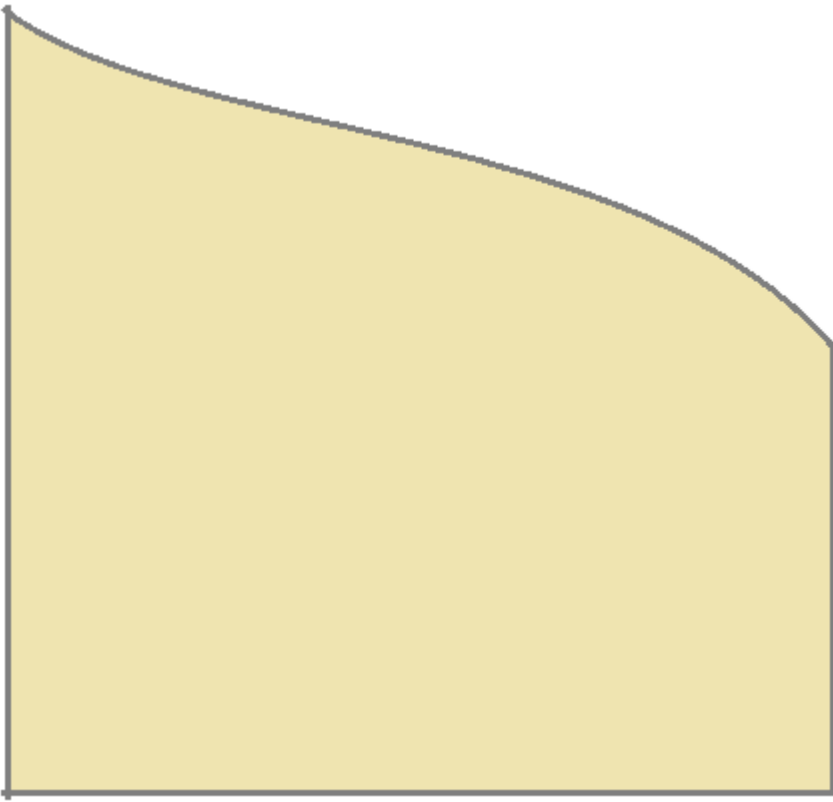


El determinar el área de esta figura se divide en triángulos se calcula el área de cada una de ellas.

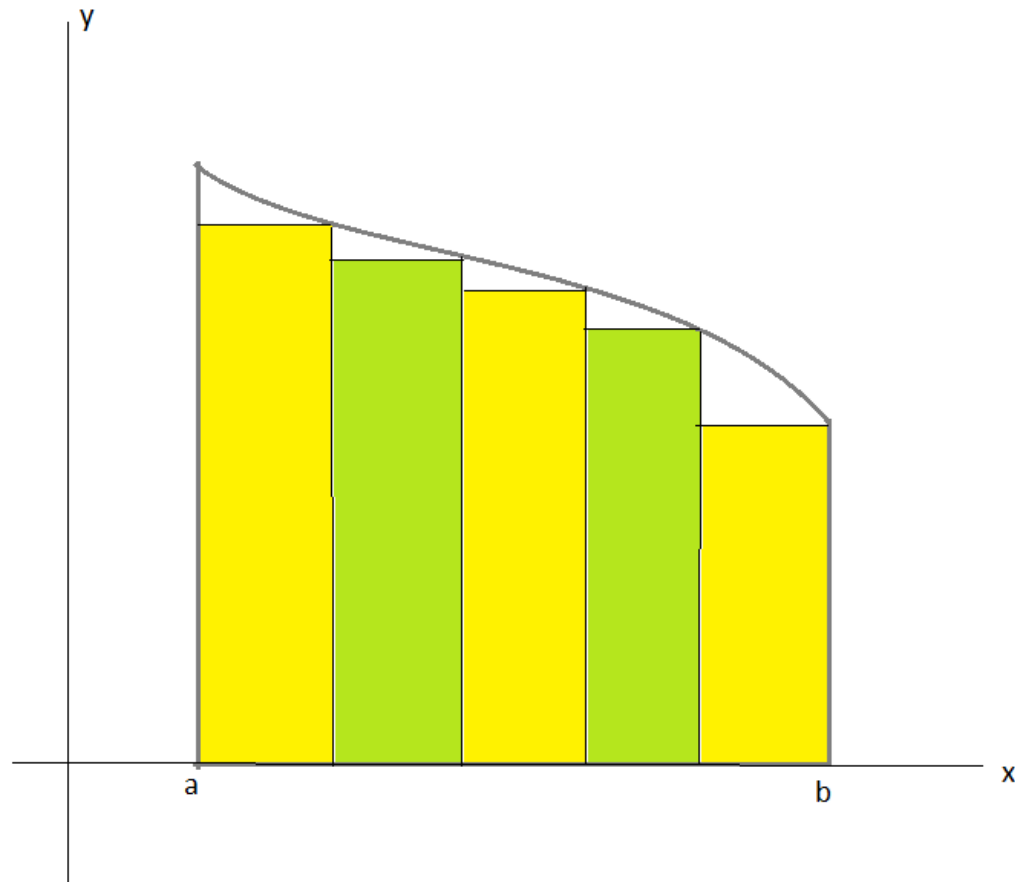


$$A = A_1 + A_2 + A_3$$

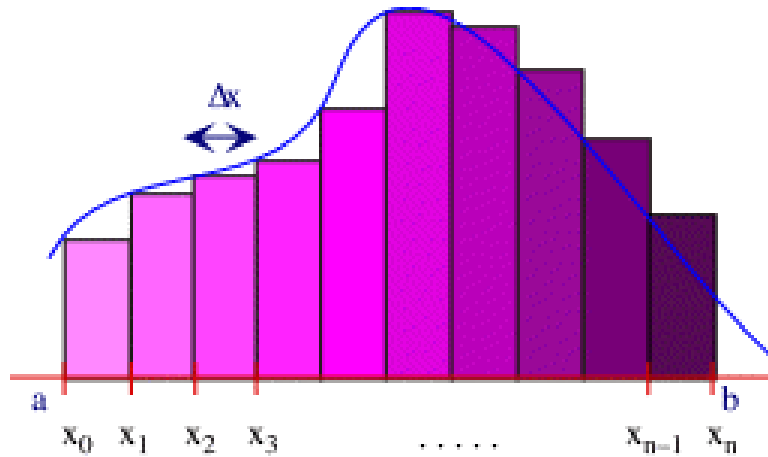
- ¿cómo determinamos el área de figuras irregulares?



Consideremos que la curva es una función y que está definida en el intervalo $[a, b]$,
y dividámosla en rectángulos, como sigue



Consideremos una función $f(x)$ definida en un intervalo $[a, b]$ y dividamos este intervalo en n subintervalos de longitud Δx , los subintervalos van desde x_0 hasta x_n siendo $a = x_0$ y $b = x_n$



Tenemos
$$\Delta x = \frac{b - a}{n}$$

$$a = x_0$$

$$x_1 = a + \Delta x$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = a + 2\Delta x$$

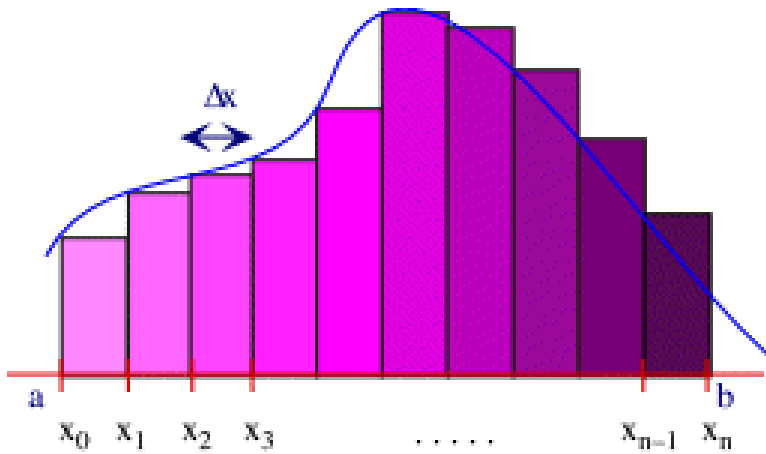
$$\vdots$$

$$x_i = a + i\Delta x$$

$$\vdots$$

$$b = x_n$$

Si nos situamos en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y calculamos el área del rectángulo que se forma dentro de la región



$$A = b \times h \quad \text{donde } b = \Delta x \text{ y } h = f(x_i^*)$$

$$A_i = f(x_i^*)\Delta x \quad x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$$

Calculando el área de todos los rectángulos

$$A_1 = f(x_1^*)\Delta x$$

$$A_2 = f(x_2^*)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$A_i = f(x_i^*)\Delta x$$

$$\vdots$$

$$A_n = f(x_n^*)\Delta x$$

Sumando las áreas de cada rectángulo, tenemos

$$A \approx f(x_1^*)\Delta x + f(x_2^*)\Delta x + \cdots + f(x_i^*)\Delta x + \cdots + f(x_n^*)\Delta x$$

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

Si $n \rightarrow \infty$ entonces $\Delta x \rightarrow 0$

Luego

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*)\Delta x$$

Definición: Sea f una función definida en un intervalo cerrado $[a, b]$ y sea P una partición de $[a, b]$. Una Suma de Riemann de $f(x)$ para P es una expresión de la forma

$$R_P = \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

Donde x_i^* es un número del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, 3, \dots, n$

Definición: El área de la región S que se encuentra bajo la gráfica de la función continua f definida en el intervalo $[a, b]$ es el límite de las Sumas de Riemann, esto es

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$$

Si el límite existe.

Propiedades de la sumatoria

1.
$$\sum_{k=1}^n c = nc$$

2.
$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

3.
$$\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$$

Sumas de enteros positivos

$$1. \sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$3. \sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$4. \sum_{k=1}^n k^4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$$5. \sum_{k=1}^n k^5 = 1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}$$

Ejemplo 1.

Hallar el área de la región entre la parábola $y = x^2$ y el eje x en el intervalo $[0,2]$

Se tiene

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \quad f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \quad \text{y} \quad x_i = 0 + i\Delta x = i\Delta x = i \frac{2}{n}$$

Así

$$f(x_i) = f\left(\frac{2}{n}i\right) = \left(\frac{2}{n}i\right)^2 = \frac{4}{n^2}i^2$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{4}{n^2} i^2 \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{8}{n^3} i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

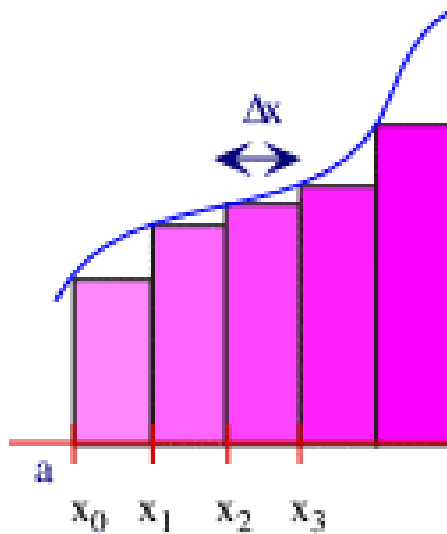
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{8n}{6n} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4n}{3n} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{4}{3} \right) (1)(2) = \frac{8}{3}$$

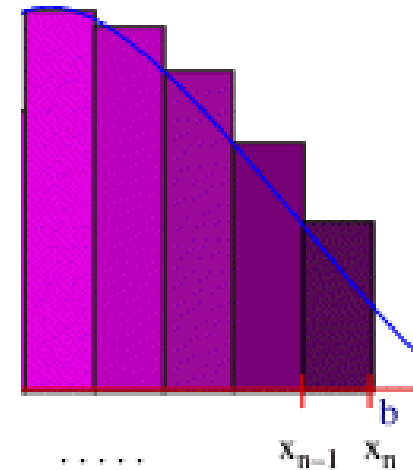
Área por exceso y por defecto

Cuando calculamos el área de una región podemos hacerlo mediante rectángulos inscritos y por rectángulos circunscritos.

Rectángulos inscritos nos generan área por defecto

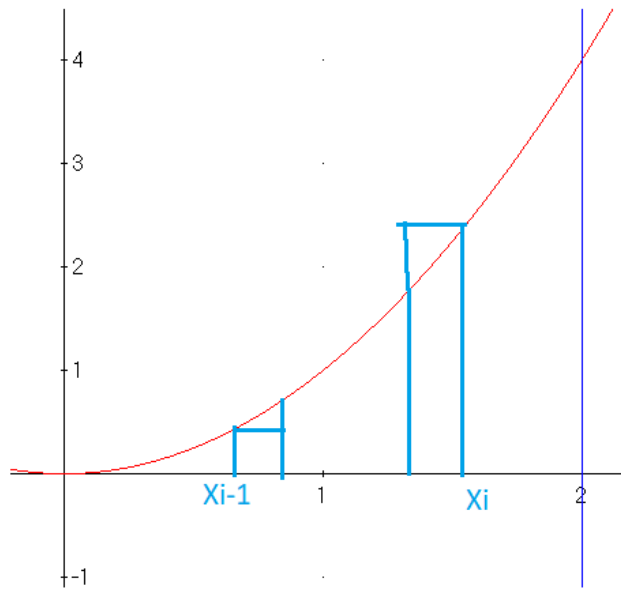


Rectángulos circunscritos nos generan área por exceso



Ejemplo 2.

Hallar el área de la región entre la parábola $y = x^2$ y el eje x en el intervalo $[0,2]$ por exceso y por defecto.



Observando la gráfica notamos que el área por defecto se tiene en el extremo izquierdo del intervalo, esto es cuando la variable es x_{i-1} , desde $i = 0$ hasta $i = n - 1$

Y que el área por exceso se tiene en el extremo derecho del intervalo, esto es cuando la variable es x_i , desde $i = 1$ hasta $i = n$

Área por defecto

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i-1}) \Delta x \quad f(x) = x^2 \quad a = 0 \quad b = 2 \quad \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n} \quad x_i = 0 + (i-1) \Delta x = \frac{2}{n}(i-1)$$

$$f(x_{i-1}) = f\left(\frac{2}{n}(i-1)\right) = \left(\frac{2}{n}(i-1)\right)^2 = \frac{4}{n^2}(i-1)^2$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{4}{n^2}(i-1)^2 \left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8}{n^3}(i-1)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i-1)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} (i^2 - 2i + 1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{8}{n^3} (i^2 - 2i + 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i^2 - \frac{16}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{8}{n^3} \sum_{i=0}^{n-1} 1$$

Usando las fórmulas para la suma de potencias de números enteros positivos

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} c = (n-1)c$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{n^3} \left(\frac{(n-1)n}{2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{n^3} (n-1)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8}{6} \left(\frac{(n-1)n(2n-1)}{n^3} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16}{2} \left(\frac{(n-1)n}{n^3} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left(\frac{n-1}{n^3} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{n}{n} \right) \left(\frac{2n-1}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left(\frac{n-1}{n} \right) \left(\frac{n}{n^2} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left(\frac{n-1}{n^3} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{3} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(2 - \frac{1}{n} \right) - \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{1}{n} \right) + \lim_{n \rightarrow \infty} 8 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^3} \right)$$

$$A = \frac{4}{3} (1-0)(2-0) - 8(1-0)(0) + 8(0-0) = \frac{4}{3} (1)(2) - 8(1)(0) + 8(0) = \frac{8}{3}$$

Área por exceso

Como ya se dijo el área por exceso se tiene en el extremo derecho del intervalo, esto es cuando la variable es x_i y varia desde $i = 1$ hasta $i = n$

Por lo que tenemos

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, \quad f(x) = x^2, \quad a = 0, \quad b = 2, \quad \Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}, \quad x_i = \frac{2}{n}i \quad \text{y}$$

$$f(x)_i = f\left(\frac{2}{n}i\right) = \left(\frac{2}{n}i\right)^2 = \frac{4}{n^2}i^2$$

Estas son las mismas condiciones que se tienen en el ejemplo 1, por lo cual

$$A = \frac{8}{3}$$

Ejemplo 3.

Determinar el área de la región entre la función $f(x) = x^3 - 6x$ y el eje x en el intervalo $[0,3]$

Tenemos

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x, f(x) = x^3 - 6x, \Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n} \text{ y } x_i = \frac{3}{n}i$$

$$f(x_i) = f\left(\frac{3}{n}i\right) = \left(\frac{3}{n}i\right)^3 - 6\left(\frac{3}{n}i\right) = \frac{27}{n^3}i^3 - \frac{18}{n}i$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{27}{n^3}i^3 - \frac{18}{n}i \right) \left(\frac{3}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{81}{n^4}i^3 - \frac{54}{n^2}i \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{81}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{54}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{54}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{54}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81}{4} \left(\frac{n(n+1)}{n^2} \right)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{54}{2} \left(\frac{n(n+1)}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81}{4} \left(\frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{54}{2} \left(\frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{81}{4} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 - \lim_{n \rightarrow \infty} 27 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{81}{4} (1)^2 - 27(1) = \frac{81}{4} - 27 = -\frac{27}{4}$$

Luego el área de la región es

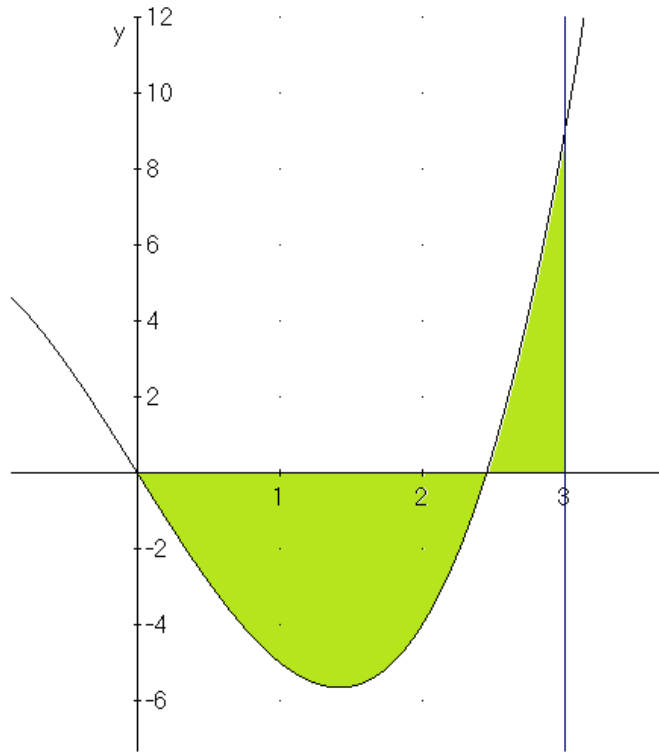
$$A = -\frac{27}{4}$$

¿es posible que un área sea un número negativo?

¿A qué se deberá esto?

Analicemos el área que delimita las condiciones del ejercicio

La región esta definida por la función $f(x) = x^3 - 6x$ y el eje x en el intervalo $[0,3]$



La región queda dividida en dos partes, la primera de ellas bajo el eje x y la segunda sobre el mismo.

La primera parte de esta región no cumple con ser un área bajo la curva,.

¿Que sucede si calculamos el área “sobre la curva” y no bajo la curva?

Si replicamos el proceso que se llevó a cabo con la determinación del área, la diferencia se tiene en que la altura del rectángulo es un número negativo y no un número positivo y nos indica la distancia desde el eje x a la función y no de la función al eje x como sucede con área de una función positiva, si la vemos como distancia esta debe de ser un número positivo así que podemos anteponer un signo negativo para que esta altura sea positiva y obtener ya un área positiva.

OBSERVACIÓN. Cuando calculamos el área de una región es importante determinar donde la función es positiva y donde es negativa, al calcular el área de la parte negativa debemos de multiplicar por un signo negativo.

Regresando a nuestro ejemplo, debemos determinar donde la función es negativa y donde es positiva para ello empecemos con determinar los ceros de la función

$$f(x) = x^3 - 6x = 0 \implies x(x^2 - 6) = 0 \implies x = 0 \text{ y } x = \pm\sqrt{6}$$

Luego $[0, 3]$ se divide como $[0, 3] = [0, \sqrt{6}] \cup [\sqrt{6}, 3]$

De acuerdo a la gráfica en el intervalo $[0, \sqrt{6}]$ la función es negativa y en el intervalo $[\sqrt{6}, 3]$ la función es positiva.

Calculemos las áreas en estos dos intervalos para obtener el área en todo el intervalo solicitado.

En $[0, \sqrt{6}]$, se tiene $A = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, $f(x) = x^3 - 6x$, $a = 0$, $b = \sqrt{6}$, $\Delta x = \frac{\sqrt{6}}{n}$, $x_i = \frac{\sqrt{6}}{n}i$

$$f(x_i) = f\left(\frac{\sqrt{6}}{n}i\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{n}i\right)^3 - 6\left(\frac{\sqrt{6}}{n}i\right) = \frac{6\sqrt{6}}{n^3}i^3 - \frac{6\sqrt{6}}{n}i$$

$$A = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{6\sqrt{6}}{n^3} i^3 - \frac{6\sqrt{6}}{n} i \right) \left(\frac{\sqrt{6}}{n} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{6(6)}{n^4} i^3 - \frac{6(6)}{n^2} i \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{36}{n^4} i^3 - \frac{36}{n^2} i \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{36}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 - \frac{36}{n^2} \sum_{i=1}^n i \right)$$

$$A = -\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{36}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - \frac{36}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \right] = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36}{n^4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36}{n^2} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)$$

$$A = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36}{4} \left(\frac{n(n+1)}{n^2} \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36}{2} \left(\frac{n(n+1)}{n^2} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \left(\frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 18 \left(\frac{n}{n} \left(\frac{n+1}{n} \right) \right)$$

$$A = -\lim_{n \rightarrow \infty} 9 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} 18 \left(1 + \frac{1}{n} \right) = -9(1)^2 + 18(1) = -9 + 18 = 9$$

Ahora, calculemos el área en $[\sqrt{6}, 3]$

se tiene $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x$, $f(x) = x^3 - 6x$, $a = \sqrt{6}$, $b = 3$, $\Delta x = \frac{3 - \sqrt{6}}{n}$

$$x_i = \sqrt{6} + i\Delta x = \sqrt{6} + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n} \right) i$$

$$f(x_i) = f\left(\sqrt{6} + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)i\right) = \left(\sqrt{6} + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)i\right)^3 - 6\left(\sqrt{6} + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)i\right)$$

$$f(x_i) = 6\sqrt{6} + 3(6)\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)i + 3\sqrt{6}\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)^2 i^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)^3 i^3 - 6\sqrt{6} - 6\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)i$$

$$f(x_i) = 12\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)i + 3\sqrt{6}\left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)^2 i^2 + \left(\frac{3 - \sqrt{6}}{n}\right)^3 i^3$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(12 \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right) i + 3\sqrt{6} \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^2 i^2 + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^3 i^3 \right) \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(12 \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^2 i + 3\sqrt{6} \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^3 i^2 + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^4 i^3 \right)$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 12 \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^2 \sum_{i=1}^n i + 3\sqrt{6} \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^4 \sum_{i=1}^n i^3$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 12 \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^2 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) + 3\sqrt{6} \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^3 \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) + \left(\frac{3-\sqrt{6}}{n} \right)^4 \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(3 - \sqrt{6} \right)^2 \left(\frac{n}{n} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{6} \left(3 - \sqrt{6} \right)^3 \left(\frac{n}{n} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right) \left(\frac{2n+1}{n} \right) + \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{6} \right)^4 \left(\frac{n^2}{n^2} \right) \left(\frac{n+1}{n} \right)^2$$

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} 6 \left(3 - \sqrt{6} \right)^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{6} \left(3 - \sqrt{6} \right)^3 \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(2 + \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{6} \right)^4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2$$

$$A = 6 \left(3 - \sqrt{6} \right)^2 (1 + 0) + \frac{1}{2} \sqrt{6} \left(3 - \sqrt{6} \right)^3 (1 + 0)(2 + 0) + \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{6} \right)^4 (1 + 0)^2$$

$$A = 6 \left(3 - \sqrt{6} \right)^2 + \sqrt{6} \left(3 - \sqrt{6} \right)^3 + \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{6} \right)^4 = \left(3 - \sqrt{6} \right)^2 \left(6 + \sqrt{6} \left(3 - \sqrt{6} \right) + \frac{1}{4} \left(3 - \sqrt{6} \right)^2 \right)$$

$$A = \left(9 - 6\sqrt{6} + 6 \right) \left(6 + 3\sqrt{6} - 6 + \frac{1}{4} \left(9 - 6\sqrt{6} + 6 \right) \right)$$

$$A = (15 - 6\sqrt{6}) \left(\frac{15}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{6} \right)$$

$$A = \frac{225}{4} + \frac{45}{2}\sqrt{6} - \frac{90}{4}\sqrt{6} - 54 = \frac{225}{4} - 54 = \frac{9}{4}$$

$$A = \frac{9}{4}$$

Luego el área de la región es $A = 9 + \frac{9}{4} = \frac{45}{4}$

Cuando no separamos en intervalos donde la función es positiva y negativa es semejante a tomar

$$A = -9 + \frac{9}{4} = -\frac{36}{4} + \frac{9}{4} = -\frac{27}{4}$$