INTEGRAL DEFINIDA TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO ÁREA BAJO LA CURVA

Integral Definida

Definición: Sea *f* una función definida en un intervalo cerrado $[a,b]$. La integral definida de *f* entre *a* y *b* se denota por $\int_a^b f(x)dx$ y está definida como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Si el límite existe.

Ejemplo 1.

Determinar el valor de la integral $\int_{-1}^{3}\left(2+x^{2}\right)dx$ usando Sumas de Riemann.

Por definición, necesitamos calcular $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x$

Sean $f(x)=2+x^{2}$, $a=-1$ y $b=3$

Por lo que $\Delta x=\dfrac{3-(-1)}{n}=\dfrac{4}{n}$

$$x_i=-1+i\Delta x=-1+\frac{4}{n}i$$

$$f\left(x_i\right)=f\left(-1+\frac{4}{n}i\right)=2+\left(-1+\frac{4}{n}i\right)^{2}=2+1-\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^{2}}i^{2}=3-\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^{2}}i^{2}$$

$$\int_{-1}^{3}\left(2+x^2\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3-\frac{8}{n}i+\frac{16}{n^2}i^2\right)\left(\frac{4}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{12}{n}-\frac{32}{n^2}i+\frac{64}{n^3}i^2\right)$$

$$\int_{-1}^{3}\left(2+x^2\right)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}\sum_{i=1}^{n}1-\frac{32}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i+\frac{64}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2=\lim_{n\to\infty}\frac{12}{n}(n)-\frac{32}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)+\frac{64}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$

$$\int_{-1}^{3}\left(2+x^2\right)dx=\lim_{n\to\infty}12-16\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)+\frac{64}{6}\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)\left(\frac{2n+1}{n}\right)$$

$$\int_{-1}^{3}\left(2+x^2\right)dx=\lim_{n\to\infty}12-16\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{32}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)=12-16(1)+\frac{32}{3}(1)(2)$$

$$\int_{-1}^{3}\left(2+x^2\right)dx=12-16+\frac{64}{3}=\frac{52}{3}$$

Ejemplo 2.

Determinar el valor de la integral $\int_0^3 \left(x^3 - 6x\right)dx$ usando la definición.

Necesitamos calcular $\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x$

Sean $f(x) = x^3 - 6x$, $a = 0$ y $b = 3$

Por lo que

$$\Delta x = \frac{3-0}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_i = 0 + i\Delta x = \frac{3}{n} i$$

$$f(x_i) = f\left(\frac{3}{n} i\right) = \left(\frac{3}{n} i\right)^3 - 6\left(\frac{3}{n} i\right) = \frac{27}{n^3} i^3 - \frac{18}{n} i$$

$$\int_0^3 \left(x^3-6x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27}{n^3}i^3-\frac{18}{n}i\right)\left(\frac{3}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{81}{n^4}i^3-\frac{54}{n^2}i\right)$$

$$\int_0^3 \left(x^3-6x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{81}{n^4}\sum_{i=1}^{n}i^3-\frac{54}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{n^4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2-\frac{54}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$\int_0^3 \left(x^3-6x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{4}\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right)^2-\lim_{n\to\infty}\frac{54}{2}\left(\frac{n(n+1)}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{4}\left(\frac{n}{n}\right)^2\left(\frac{n+1}{n}\right)^2-\lim_{n\to\infty}27\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

$$\int_0^3 \left(x^3-6x\right)dx=\lim_{n\to\infty}\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\lim_{n\to\infty}27\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{81}{4}(1)^2-27(1)=\frac{81}{4}-27=-\frac{27}{4}$$

$$\int_0^3 \left(x^3-6x\right)dx=-\frac{27}{4}$$

Propiedades de la integral definida

Teorema 1. Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ o si f tiene a lo sumo un número finito de discontinuidades de salto, entonces la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe y $f(x)$ es integrable en $[a,b]$

Teorema 2. Si $f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 3. Si $f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Propiedades de la integral definida

Teorema 4. $\int_a^b C dx = C(b-a)$ para cualquier constante C.

Teorema 5. Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones integrables en un intervalo $[a,b]$, entonces $f+g$ y Cf son integrables para cualquier constante C, y

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

Teorema 6. Sea $a \leq b \leq c$ y supongamos que $f(x)$ es integrable. Entonces

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx$$

Teorema 3. Si $f(x)$ es una función integrable en un intervalo $[a,b]$, entonces

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Dem. Como la función $f(x)$ es integrable en el intervalo $[a,b]$, por definición

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Determinemos el valor de la integral $\int_a^a f(x)dx$ en este caso se tiene $\Delta x = \dfrac{a-a}{n} = 0$

Luego $\int_a^a f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$

Y el teorema se cumple.

Teorema 5. Si $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ son funciones integrables en un intervalo $\left[a,b\right]$, entonces $f+g$ y Cf son integrables para cualquier constante C, y

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx \qquad \int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx$$

Dem. Como las funciones $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ son integrables en $\left[a,b\right]$, se tiene

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x \text{ y } \int_a^b g(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)\Delta x$$

Determinemos $\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx$

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)+g\left(x_i\right)\right)\Delta x$$ por propiedades de la sumatoria

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)\Delta x+g\left(x_i\right)\Delta x\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x+\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)\Delta x$$

Y como $f\left(x\right)$ y $g\left(x\right)$ son integrables

$$\int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(f\left(x_i\right)\Delta x + g\left(x_i\right)\Delta x\right) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g\left(x_i\right)\Delta x$$

$$= \int_a^b f\left(x\right)dx + \int_a^b g\left(x\right)dx = \int_a^b \left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)dx$$

Para mostrar la segunda parte, tenemos

$$\int_a^b Cf(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} Cf\left(x_i\right)\Delta x = \lim_{n\to\infty} C\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x = C\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(x_i\right)\Delta x = C\int_a^b f(x)dx$$

Con lo que queda demostrado el teorema.

Ejemplo 3.

Sabiendo que $\int_0^5 f(x)dx = 5$ y que $\int_0^5 g(x)dx = 12$, y usando las propiedades de la integral calcular el valor de las integrales siguientes.

a) $\int_0^5 \left(f(x) + g(x) \right) dx$, b) $\int_5^0 g(x)dx$ y c) $\int_0^5 \left(2f(x) - \frac{1}{3} g(x) \right) dx$

a) $\int_0^5 \left(f(x) + g(x) \right) dx = \int_0^5 f(x)dx + \int_0^5 g(x) dx = 5 + 12 = 17$

b) $\int_5^0 g(x)dx = -\int_0^5 g(x)dx = -12$

c) $\int_0^5 \left(2f(x) - \frac{1}{3} g(x) \right) dx = \int_0^5 2f(x)dx + \int_0^5 -\frac{1}{3} g(x) dx = 2\int_0^5 f(x)dx - \frac{1}{3}\int_0^5 g(x) dx = 2(5) - \frac{1}{3}(12) = 10 - 4 = 6$

Ejemplo 4.

Expresa la diferencia $\int_c^{c+h} f(x)dx - \int_c^{h} f(x)dx$ como una sola integral.

Buscaremos usar la propiedad $\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^c g(x)dx$

Tenemos $\int_c^{h} f(x)dx = -\int_h^{c} f(x)dx$

Luego

$$\int_c^{c+h} f(x)dx - \int_c^{h} f(x)dx = \int_c^{c+h} f(x)dx - \left(-\int_h^{c} f(x)dx\right) = \int_c^{c+h} f(x)dx + \int_h^{c} f(x)dx = \int_h^{c} f(x)dx + \int_c^{c+h} f(x)dx = \int_h^{c+h} f(x)dx$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Primera Parte

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, la función definida por

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt \quad \text{para} \quad a\le x\le b$$

es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y $g'(x)=f(x)$

Segunda Parte

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$$

En donde F es cualquier antiderivada de $f(x)$ esto es, una función tal que $F'(x)=f(x)$

La primera parte del Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la derivación y la integración son operaciones inversas, así

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt = f(x) \quad \text{y} \quad \int_a^x f'(t)\,dt = f(x)$$

La segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo, nos permite el calcular las integrales definidas usando las antiderivadas y evaluando el límite superior menos el límite inferior.

Ejemplo 5.

Sea $g(x)=\int_1^x (t^2-2)dt$ calcular $g(1),\ g'(1)\ \text{y}\ g'(2)$ y determinar una fórmula para $g(x)$

Por la propiedad de la integral definida $g(1)=\int_1^1 (t^2-2)dt=0$

Para hallar $g'(1)\ \text{y}\ g'(2)$ primero calculamos $g'(x)$

$$g'(x)=\frac{d}{dx}g=\frac{d}{dx}\int_1^x (t^2-2)dt=x^2-2$$

Luego

$$g'(1)=(1)^2-2=-1 \qquad g'(2)=(2)^2-2=2$$

Determinamos $g(x)$

$$g(x)=\int_1^x (t^2-2)dt \implies g(x)=\frac{1}{3}t^3-2t\Big|_1^x=\frac{1}{3}x^3-2x-\frac{1}{3}(1)^3+2(1)=\frac{1}{3}x^3-2x+\frac{5}{3}$$

Ejemplo 6.

Hallar una fórmula para la función representada por la integral $g(x)=\int_{3\sqrt{x}}^{x^{3/2}} t^3\,dt$

Aplicando la segunda parte del Teorema Fundamental del Cálculo

$$g(x)=\int_{3\sqrt{x}}^{x^{3/2}} t^3\,dt=\frac{1}{4}t^4\Big|_{3\sqrt{x}}^{x^{3/2}}=\frac{1}{4}\left(x^{3/2}\right)^4-\frac{1}{4}\left(3\sqrt{x}\right)^4=\frac{1}{4}\left(x^{3/2}\right)^4-\frac{1}{4}\left(3\sqrt{x}\right)^4=\frac{1}{4}x^6-\frac{81}{4}x^2$$

Ejemplo 7.

Calcular la derivada $\frac{d}{dt}\int_{100}^{t} \sec(8x-3)\,dx$

Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\frac{d}{dt}\int_{100}^{t} \sec(8x-3)\,dx = \sec(8t-3)$$

Ejemplo 8.

Calcular la derivada $\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-5}^{\cos t} u^5 du$

El límite superior en la integral no es una variable sino una función, por lo cual no se puede aplicar directamente el TFC. Sea $s = \cos t$ con lo cual

$F = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-5}^{\cos t} u^5 du = \dfrac{d}{dt}\int_{-5}^{s} u^5 du$, apliquemos la regla de la Cadena

$$\frac{d}{dt}F = \frac{dF}{ds}\frac{ds}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\int_{-5}^{\cos t} u^5 du = \left(\frac{d}{ds}\int_{-5}^{s} u^5 du\right)\frac{ds}{dt}$$

Por el TFC $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_{-5}^{s} u^5 du = s^5$

y $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\cos t) = -\sin t$

$$\frac{d}{dt}\int_{-5}^{\cos t} u^5 du = \left(\frac{d}{ds}\int_{-5}^{s} u^5 du\right)\frac{ds}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\int_{-5}^{\cos t} u^5 du = s^5(-\sin t)$$ con $s = \cos t$

$$\frac{d}{dt}\int_{-5}^{\cos t} u^5 du = -(\cos t)^5 \sin t = -\cos^5 t \sin t$$

Ejemplo 9.

Calcular la derivada $\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2} \tan t dt$

El Teorema Fundamental del Cálculo nos dice

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

En donde F es cualquier antiderivada de $f(x)$ esto es, una función tal que $F'(x) = f(x)$

Luego

$$\frac{d}{dx}\int_a^b f(x)dx = \frac{d}{dx}\left(F(b) - F(a)\right) = \frac{d}{dx}F(b) - \frac{d}{dx}F(a) = F'(b) - F'(a) = f(b) - f(a)$$

Usando la regla de la Cadena

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\tan t\,dt = F'\left(x^2\right)\frac{d}{dx}\left(x^2\right)-F'\left(\sqrt{x}\right)\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\right)= f\left(x^2\right)(2x)-f\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$$

$$=\tan\left(x^2\right)(2x)-\tan\left(\sqrt{x}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=2x\tan\left(x^2\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\left(\sqrt{x}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sqrt{x}}^{x^2}\tan t\,dt = 2x\tan\left(x^2\right)-\frac{1}{2\sqrt{x}}\tan\left(\sqrt{x}\right)$$

Ejemplo 10.

Sea $G(x)=\int_0^x\left[s\int_0^s f(t)\,dt\right]ds$, donde f es continua para todo t real. Determinar

a) $G(0)$, b) $G'(0)$, c) $G''(x)$ y d) $G''(0)$

a) $G(0)=\int_0^0\left[s\int_0^s f(t)\,dt\right]ds=0$

b) Primero calculemos $G'(x)=\dfrac{d}{dx}\int_0^x\left[s\int_0^s f(t)\,dt\right]ds=x\int_0^x f(t)\,dt$

$$G'(0)=0\left(\int_0^0 f(t)\,dt\right)=0$$

c) $G''(x)=\dfrac{d}{dx}G'(x)=\dfrac{d}{dx}x\int_0^x f(t)\,dt=x\dfrac{d}{dx}\int_0^x f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt\dfrac{d}{dx}x=x\;f(x)+\int_0^x f(t)\,dt$

d) $G''(0)=0\big(f(0)\big)+\int_0^0 f(t)\,dt=0+0=0$

Área bajo la curva usando la integral definida

¿es posible determinar el área bajo la curva con una integral definida?

Esto si es posible y se justifica con el teorema

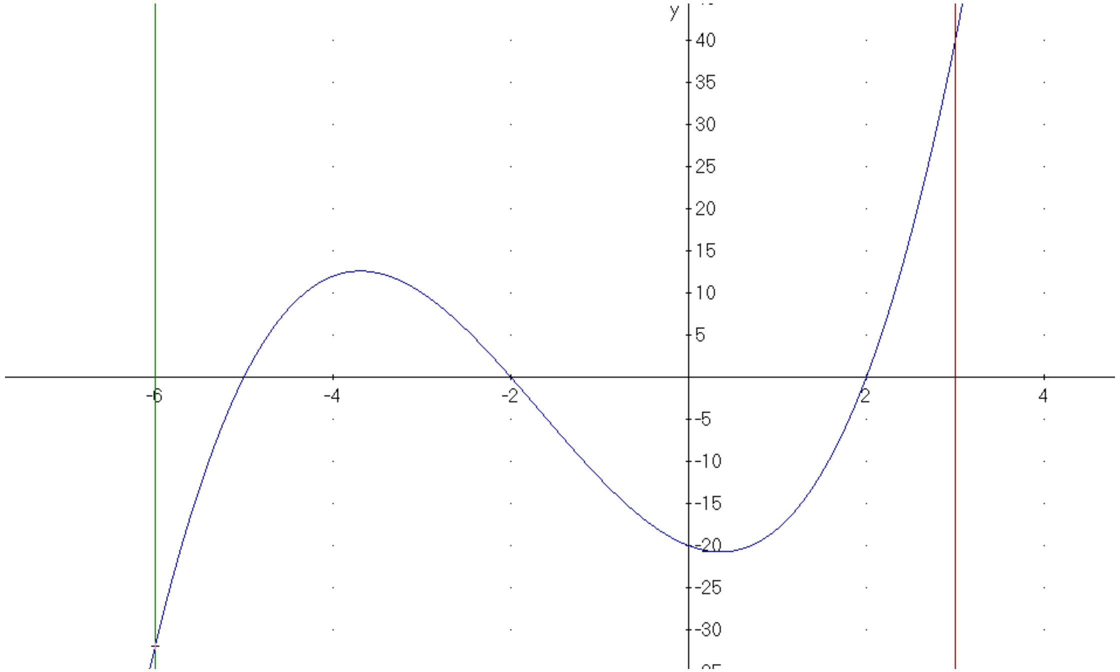
Teorema: Si f es una función integrable y $f(x) \geq 0$ para todo x en $[a,b]$, entonces el área A de la región bajo la gráfica de f entre a y b es

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

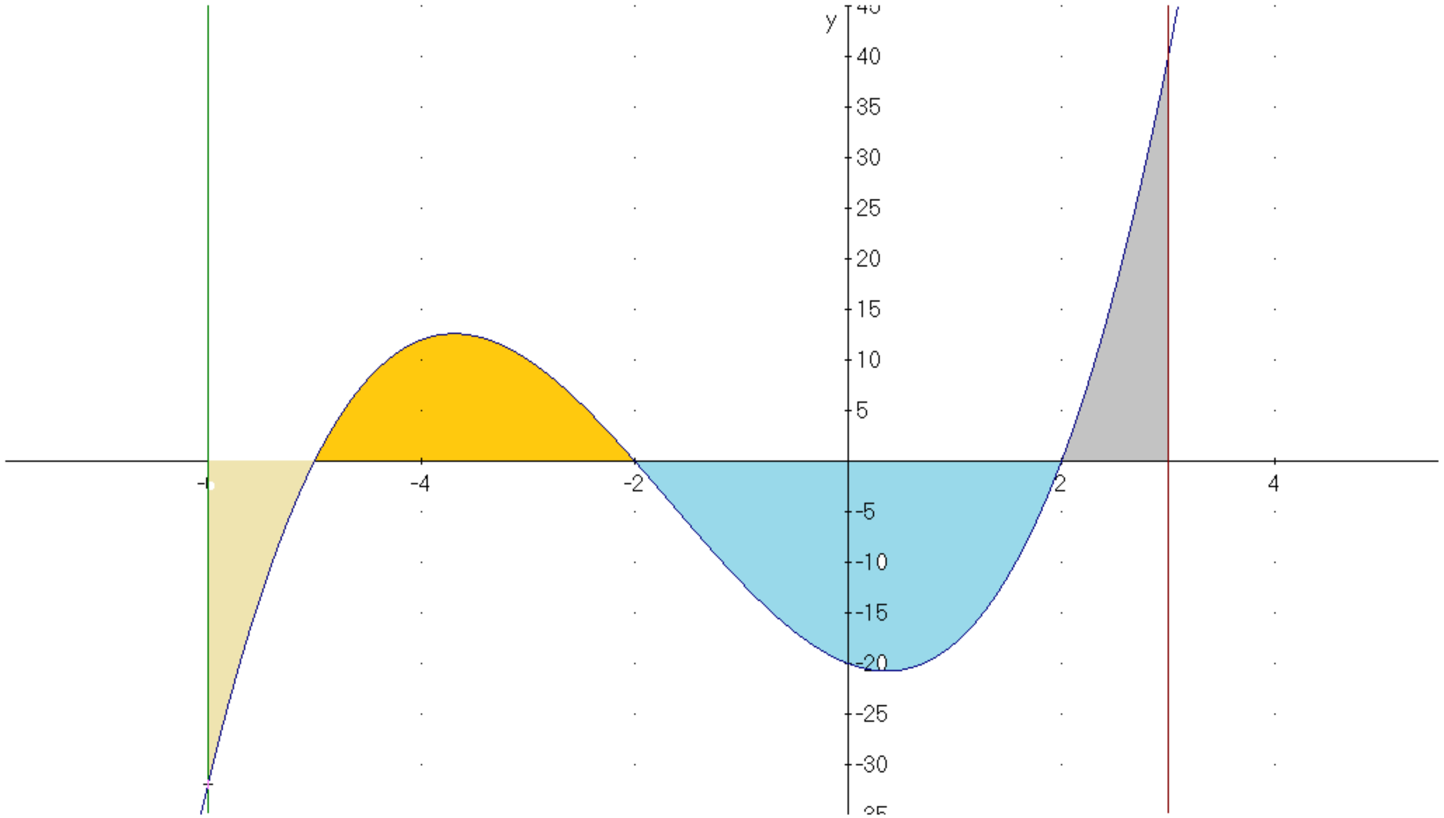
Ejemplo 11.

Hallar el área de la región comprendida entre la curva $y = x^3 + 5x^2 - 4x - 20$ y el eje x en el intervalo $[-6, 3]$.

Gráfica de f



Hay que calcular el área de cuatro regiones



Intersección de la función con el eje *x*

$$y = x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0$$

$$x^3 + 5x^2 - 4x - 20 = 0 \Rightarrow x^2(x+5) - 4(x+5) = 0 \Rightarrow (x+5)(x^2-4) = 0$$

$x + 5 = 0$ y $x^2 - 4 = 0$

$x = -5$ y $x = \pm 2$

Así el intervalo se divide en los siguientes

$[-6,-5]$, $[-5,-2]$, $[-2,2]$ y $[2,3]$

Calculemos el área en cada uno de estos intervalos.

Área en el intervalo $[-6,-5]$, esta área es negativa.

$$A_1 = -\int_{-6}^{-5}\left(x^3+5x^2-4x-20\right)dx = -\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-2x^2-20x\right)_{-6}^{-5}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}(-5)^4+\frac{5}{3}(-5)^3-2(-5)^2-20(-5)\right)+\left(\frac{1}{4}(-6)^4+\frac{5}{3}(-6)^3-2(-6)^2-20(-6)\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{4}(625)+\frac{5}{3}(-125)-2(25)-20(-5)\right)+\left(\frac{1}{4}(1296)+\frac{5}{3}(-216)-2(36)-20(-6)\right)$$

$$= -\left(\frac{625}{4}-\frac{625}{3}-50+100\right)+\left(\frac{1296}{4}-\frac{1080}{3}-72+120\right)$$

$$= -\frac{625}{4}+\frac{625}{3}-50+12 = -\frac{625}{4}+\frac{625}{3}-38 = \frac{169}{12}$$

Área en el intervalo $[-5,-2]$, esta área es positiva.

$$A_2=\int_{-5}^{-2}\left(x^3+5x^2-4x-20\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4+\frac{5}{3}x^3-2x^2-20x\right)_{-5}^{-2}$$

$$=\left(\frac{1}{4}(-2)^4+\frac{5}{3}(-2)^3-2(-2)^2-20(-2)\right)-\left(\frac{1}{4}(-5)^4+\frac{5}{3}(-5)^3-2(-5)^2-20(-5)\right)$$

$$=\left(\frac{1}{4}(16)+\frac{5}{3}(-8)-2(4)-20(-2)\right)-\left(\frac{1}{4}(625)+\frac{5}{3}(-125)-2(25)-20(-5)\right)$$

$$=\left(4-\frac{40}{3}-8+40\right)-\left(\frac{625}{4}-\frac{625}{3}-50+100\right)$$

$$=-\frac{40}{3}+36-\frac{625}{4}+\frac{625}{3}-50=-\frac{625}{4}+\frac{585}{3}-14=\frac{99}{4}$$

Área en el intervalo $[-2,2]$, esta área es negativa.

$$A_3 = -\int_{-2}^{2} \left(x^3 + 5x^2 - 4x - 20\right) dx = -\left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 - 20x\right)_{-2}^{2}$$

$$= -\left(\frac{1}{4}(2)^4 + \frac{5}{3}(2)^3 - 2(2)^2 - 20(2)\right) + \left(\frac{1}{4}(-2)^4 + \frac{5}{3}(-2)^3 - 2(-2)^2 - 20(-2)\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{4}(16) + \frac{5}{3}(8) - 2(4) - 20(2)\right) + \left(\frac{1}{4}(16) + \frac{5}{3}(-8) - 2(4) - 20(-2)\right)$$

$$= -\left(4 + \frac{40}{3} - 8 - 40\right) + \left(4 - \frac{40}{3} - 8 + 40\right)$$

$$= -\frac{40}{3} + 44 - \frac{40}{3} + 36 = -\frac{80}{3} + 80 = \frac{160}{3}$$

Área en el intervalo $[2,3]$, esta área es positiva.

$$A_4 = \int_2^3 \left(x^3 + 5x^2 - 4x - 20\right) dx = \left(\frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - 2x^2 - 20x\right)_2^3$$

$$= \left(\frac{1}{4}(3)^4 + \frac{5}{3}(3)^3 - 2(3)^2 - 20(3)\right) - \left(\frac{1}{4}(2)^4 + \frac{5}{3}(2)^3 - 2(2)^2 - 20(2)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}(81) + \frac{5}{3}(27) - 2(9) - 20(3)\right) - \left(\frac{1}{4}(16) + \frac{5}{3}(8) - 2(4) - 20(2)\right)$$

$$= \left(\frac{81}{4} + 45 - 18 - 60\right) - \left(4 + \frac{40}{3} - 8 - 40\right)$$

$$= \frac{81}{4} - 33 - \frac{40}{3} + 44 = \frac{81}{4} - \frac{40}{3} + 11 = \frac{215}{12}$$

El área de la región es

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{169}{12} + \frac{99}{4} + \frac{160}{3} + \frac{215}{12} = \frac{1321}{12}$$

$$A = \frac{1321}{12} u^2$$