SERIES ALTERNANTES CONVERGENCIA ABSOLUTA CONVERGENCIA CONDICIONAL

SERIES ALTERNANTES

DEFINICIÓN.

Decimos que una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie alternante si cambian de signo sus términos de manera alternada, esto es

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots \text{ con } b_i > 0$$

Así una serie alternada se representa como $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n$.

EJEMPLO 1.

Son series alternantes

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{2^{n-1}}$$

Y también lo son

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{n+1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}3^{n-1},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{4}{2^{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n!},\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cos n$$

CRITERIO DE CONVERGENCIA PARA SERIES ALTERNANTES

La serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots + (-1)^{n-1} b_n + \cdots$ con $b_i > 0$

Converge si:

i) $b_{n+1} \leq b_n \quad \forall n$

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = 0$

EJEMPLO 2.

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{2n}{4n^2-3}$ converge o diverge.

Como la serie es alternante, usamos el criterio para series alternantes.

$$a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3} \text{ y } b_n=\frac{2n}{4n^2-3}$$

i) En la primera condición se debe mostrar que es decreciente, por la forma que tiene el termino general, tomamos $f(x)=\dfrac{2x}{4x^2-3}$

Calculemos la derivada

$$f'(x)=\frac{\left(4x^2-3\right)2-2x\left(8x\right)}{\left(4x^2-3\right)^2}=\frac{8x^2-6-16x^2}{\left(4x^2-3\right)^2}=\frac{-6-8x^2}{\left(4x^2-3\right)^2}=-\frac{6+8x^2}{\left(4x^2-3\right)^2}<0 \quad \forall x$$

f es decreciente y la primera condición se cumple.

ii) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n^2-3}=\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n}{n^2}}{\frac{4n^2-3}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2}{n}}{4-\frac{3}{n^2}}=\frac{0}{4-0}=0$$

Con esto se cumple la segunda condición.

Decimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n}{4n^2-3}$ converge

EJEMPLO 3.

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$ converge o diverge.

Como la serie es alternante, usamos el criterio para series alternantes.

$a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}$ y $b_n=\frac{1}{(2n-1)!}$

i) En la primera condición se debe mostrar que es decreciente, como en el término general se tiene al factorial no podemos derivar. Entonces determinemos la comparación entre b_n y b_{n+1}.

$$b_n = \frac{1}{(2n-1)!} \text{ y } b_{n+1} = \frac{1}{(2(n+1)-1)!} = \frac{1}{(2n+2-1)!} = \frac{1}{(2n+1)!}$$

Las expresiones que se tienen en los términos son $(2n-1)!$ y $(2n+1)!$

Por la definición del factorial el mayor es $(2n+1)!$, ya que

$$(2n+1)! = (2n+1)(2n)(2n-1)!$$

Ya que $(2n+1)! > (2n-1)!$

Tomando el recíproco

$$\frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{(2n-1)!}$$

$$b_{b+1} < b_n \quad \forall n$$

Y la primera condición se cumple.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2n-1)!} = \frac{1}{\infty} = 0$

Con esto se cumple la segunda condición.

Decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{(2n-1)!}$ converge

EJEMPLO 4.

Determinar si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$ converge o diverge.

Como la serie es alternante, usamos el criterio para series alternantes.

$a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$ y $b_n = \frac{n+1}{n}$

i) En la primera condición se debe mostrar que es decreciente, por la forma que tiene el termino general, tomamos $f(x) = \frac{x+1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$

Calculemos la derivada

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0 \quad \forall x,\ f$ es decreciente y la primera condición se cumple.

ii) $$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \frac{\infty}{\infty},\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{\infty} = 1 \neq 0$$

Como el límite es diferente de cero no se cumple la segunda condición y la serie diverge.

Decimos que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$ diverge

CONVERGENCIA ABSOLUTA

DEFINICIÓN.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente o es absolutamente convergente si la serie correspondiente de los valores absolutos converge. Esto es, si

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots \text{ converge.}$$

En general si tenemos una serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} b_n$, la serie de los valores absolutos es $\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1} b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\right|\left|b_n\right|$, por la propiedad de valor absoluto, el valor absoluto del producto es igual al producto de los valores absolutos.

Y como $\left|(-1)^{n-1}\right| = 1$ ya que independientemente de que el exponente sea par o impar, $(-1)^{n-1}$ es 1 o -1 y el valor absoluto de este es 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\right|\left|b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right|$$

Cuando definimos la serie alternante se puso como condición en la definición que $b_n > 0$, así $|b_n| = b_n$, por lo que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\right|\left|b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|b_n\right| = \sum_{n=1}^{\infty}b_n$$

EJEMPLO 5.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ converge absolutamente.

Esto es debido a que la serie de los valores absolutos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\right|\left|\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$, porque $\left|(-1)^{n-1}\right|=1$ y $\frac{1}{n^2}$ es positivo.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ es la serie p con $p>1$ y converge.

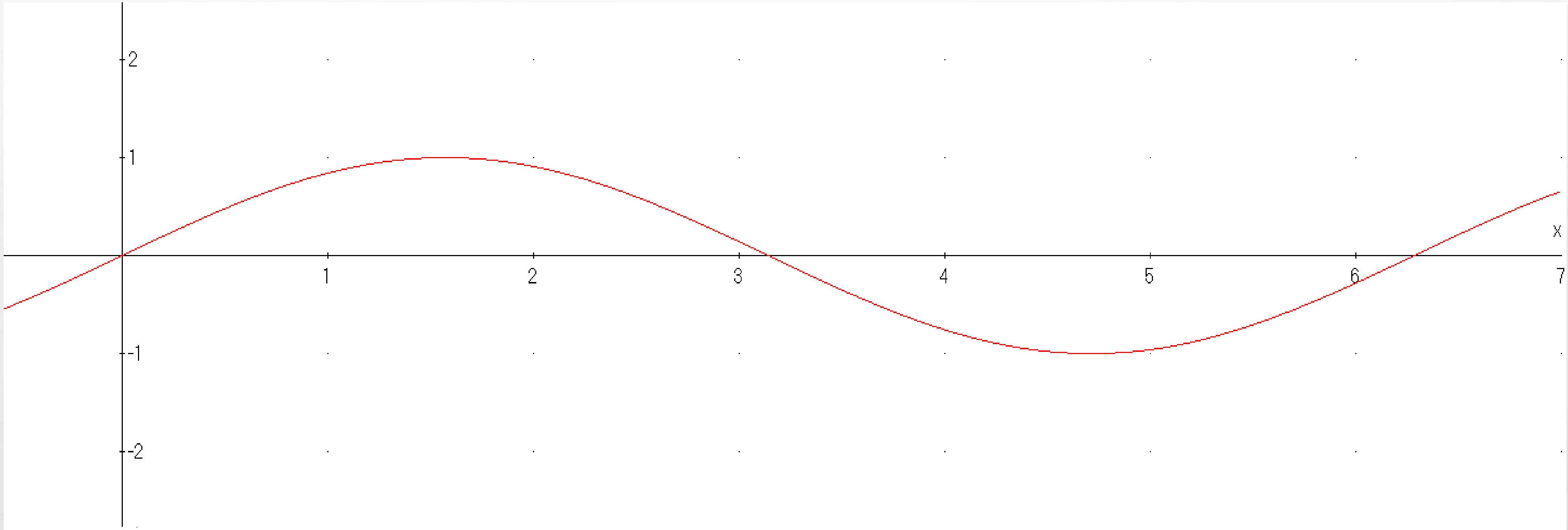
TEOREMA.

Si una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

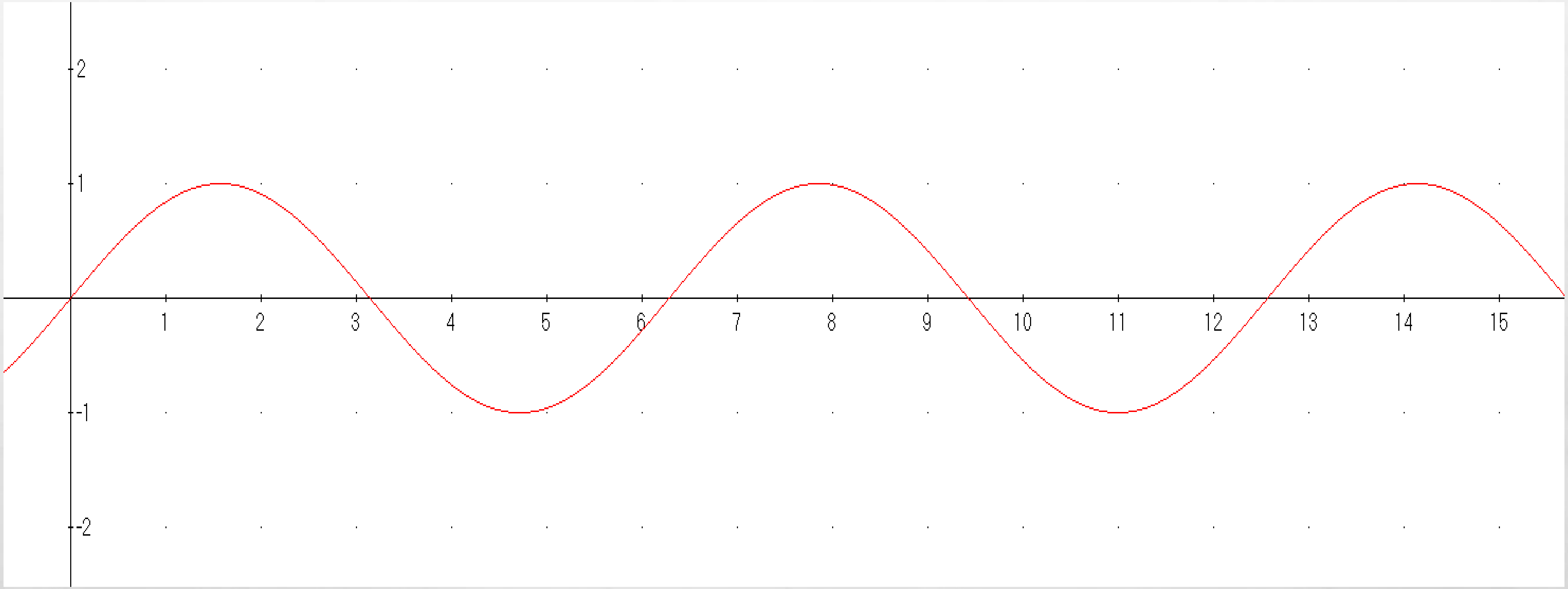
EJEMPLO 6.

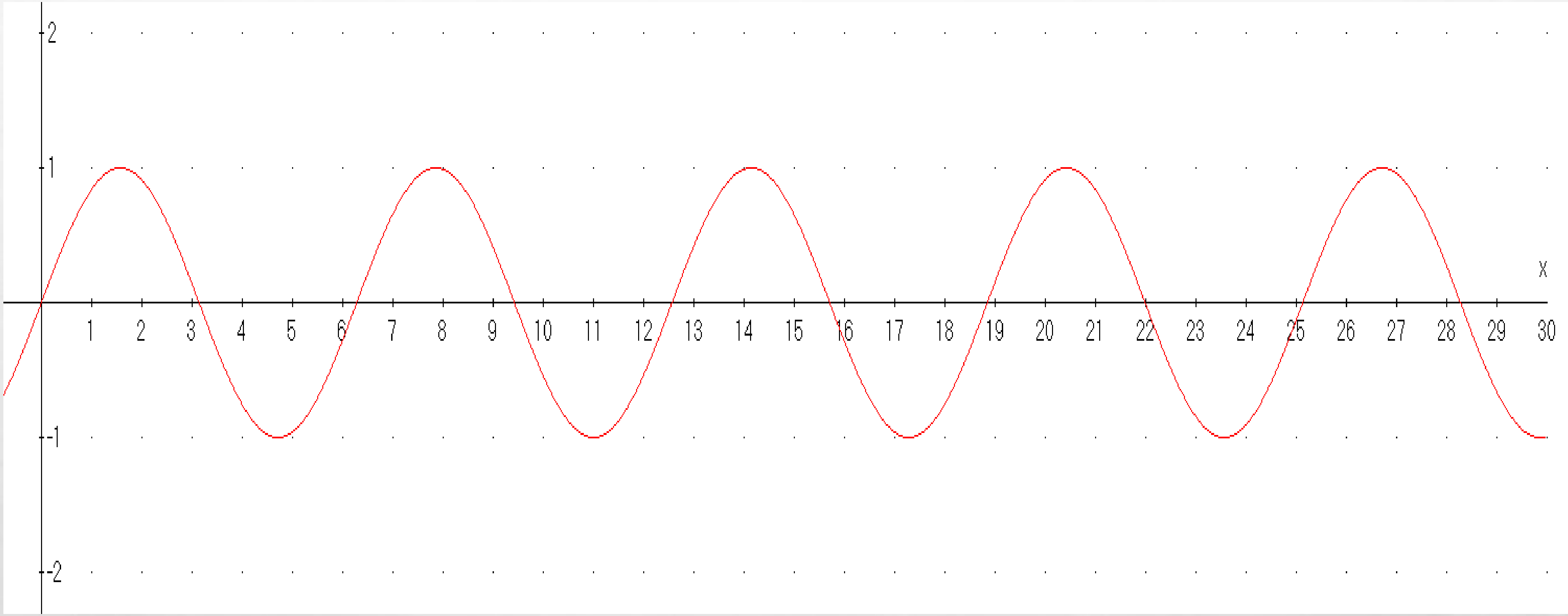
Determinar si la serie $\sin 1 + \frac{\sin 2}{2^2} + \frac{\sin 3}{3^2} + \cdots + \frac{\sin n}{n^2} + \cdots$ converge o diverge.

Para aplicar algún criterio debemos de determinar el tipo de serie. Veamos el signo que tienen los términos, el denominador es positivo ya que es el cuadrado de un número entero positivo, así el signo depende del numerador de la función que es la función $\sin n$, para ello veamos la gráfica de la función



En esta notamos que $\sin 1$, $\sin 2$ *y* $\sin 3$ son mayores que cero y que $\sin 4$, $\sin 5$ *y* $\sin 6$ son negativos, ¿será que el signo se intercala de 3 en 3 elementos?
Veamos la gráfica en otro intervalo


2
1
-1
-2
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15



2
1
-1
-2
X
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30

Los valores de $\sin 22$, $\sin 23$, $\sin 24$ *y* $\sin 25$ son negativos, $\sin 22 = -0.0088$ y $\sin 25 = -0.1323$, luego en este intervalo ya no se tienen 3 valores con el mismo signo sino 4. Por lo cual no hay regularidad en los valores de la serie, así no es una serie de términos positivos y no es una serie alternante. No podemos aplicar los criterios conocidos para determinar su convergencia o divergencia, así usaremos la convergencia absoluta y el teorema anterior.

$$\sin 1+\frac{\sin 2}{2^2}+\frac{\sin 3}{3^2}+\cdots+\frac{\sin n}{n^2}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$$

La serie de los valores absolutos

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$, esta es una serie de términos positivos y para determinar su convergencia o divergencia podemos usar cualquiera de los criterios para este tipo de serie.

Usemos el criterio básico de comparación

$$|\sin n| \leq 1$$

$$\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

Así $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ y $a_n = \dfrac{|\sin n|}{n^2}$

Determinemos si la serie $\sum b_n$ converge o diverge.

La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, es una serie p con $p = 2 > 1$ y la serie converge.

Por lo tanto $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge y $a_n = \frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} = b_n$.

Por el criterio básico de comparación concluimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ converge.

Como es la serie de los valores absolutos se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge absolutamente y por el teorema la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge.

CONVERGENCIA CONDICIONAL

DEFINICIÓN.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge condicionalmente o es condicionalmente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge y la serie de los valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ diverge.

EJEMPLO 7.

Mostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge condicionalmente.

La serie de los valores absolutos es

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\right|\left|\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, esta es la serie armónica y sabemos que diverge.

Luego la serie de los valores absolutos diverge, pero la serie original, ¿converge? O ¿diverge?, esta es una serie alternante, determinemos su convergencia

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$$

$$b_n = \frac{1}{n}$$

i) Si $f(x)=\frac{1}{x}$, derivando $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0 \quad \forall x$, luego la función es decreciente y se cumple la primera condición del criterio.

ii) Si $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, con lo que se cumple la segunda condición.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ converge. Y la serie Converge Condicionalmente.

Con las definiciones de convergencias condicional y absoluta tenemos los siguientes casos de convergencia.

Serie		Serie absoluta		Tipo convergencia
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Converge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Converge	Converge Absolutamente
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Converge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Diverge	Converge Condicionalmente
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Diverge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Converge	No puede darse, por el teorema
$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$	Diverge	$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n \rvert$	Diverge	Diverge

EJEMPLO 8.

Determinar el tipo de convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}$.

Hay que determinar si la serie converge absolutamente, converge condicionalmente o diverge.

Podemos empezar determinando la convergencia de los valores absolutos, ya que si converge de acuerdo al teorema converge también la serie original y con eso daremos solución al problema.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2}$$, esta es una serie de términos positivos.

Como es una función racional, polinomio en el numerador y en denominador, usemos el criterio de comparación por limite.

Así $a_n=\dfrac{1+n}{n^2}$ y $b_n=\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}$

Con lo cual $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, es la serie armónica y sabemos que diverge.

Determinemos el límite

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+n}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(1+n)}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}+1=1>0$$

Luego por el criterio de comparación por limite loas dos series convergen o divergen y como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n}{n^2}$ diverge.

Hay que determinar la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}$, esta es una serie alternante, verifiquemos si converge o diverge.

$$b_n = \frac{1+n}{n^2}$$

i) Sea $f(x)=\frac{1+x}{x^2}$, calculando la derivada

$$f'(x)=\frac{x^2(1)-(1+x)2x}{x^4}=\frac{x^2-2x-2x^2}{x^4}=\frac{-x^2-2x}{x^4}<0 \quad \forall x>0,$$ luego la función f es decreciente y se cumple la primera condición.

ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{n}{n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}=0$, se cumple la segunda condición.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}$ converge.

Luego la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1+n}{n^2}$ converge condicionalmente.