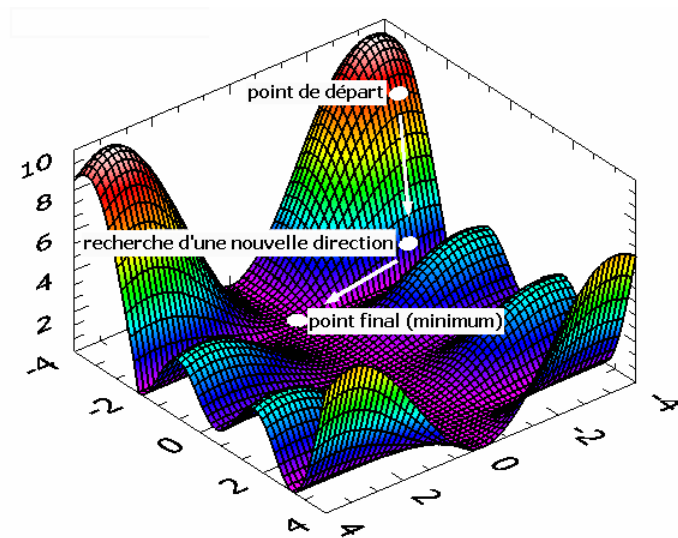


INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUÉES DE
ROUEN



PROJET MMSN GM3 - VAGUE 3 - SUJET 4

Etude des erreurs sur la méthode du Gradient Conjugué



Auteurs :

Thibaut ANDRÉ-GALLIS
thibaut.andregallis@insa-rouen.fr
Kévin GATEL
kevin.gatel@insa-rouen.fr

Enseignants :

Mathieu BOURGAIS
mathieu.bourgaiss@insa-rouen.fr

6 Juin 2021

Table des matières

Introduction	2
1 Présentation du problème	3
2 Vecteur résidu r	4
2.1 Etape 0	4
2.2 Etape 1	4
2.3 Etape 2	4
2.4 Etape 3	4
2.5 Etape 4	4
3 Vecteur solution x	5
3.1 Etape 1	5
3.2 Etape 2	5
3.3 Etape 3	5
3.4 Etape 4	5
4 Analyse numérique du problème	6
Conclusion	7

Introduction

1. Présentation du problème

L'objectif est donc d'étudier les erreurs que fait la machine en utilisant l'arithmétique flottante plutôt que l'ensemble théorique des réels.

Ces erreurs seront étudiées sur la solution du problème linéaire $Ax = b$ avec la méthode du gradient conjugué. En choisissant la matrice A de dimension 4 définie comme ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

FIGURE 1.1 – Matrice de Hilbert de dimension 4

Le nombre d'étape pour trouver la solution sera en théorie inférieur ou égale à 4 (assuré par la méthode du gradient conjugué).

En notant $K_2(A)$ le conditionnement 2 de A tel que :¹

$$K_2(A) = 1.5514 * 10^4$$

On a l'inégalité du conditionnement :

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq K_2(A) \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2}$$

Le test d'arrêt est de la forme

$$tol^2 * (b, b) > (r, r)$$

avec (\bullet, \bullet) le produit scalaire usuel et $tol = 10^{-10}$.

Enfin, le vecteur b est choisi comme ci-dessous :

$$b_i = \sum_{k=1}^4 a_{ik}$$

de manière à avoir

$$x^T = (1 \quad 1 \quad 1 \quad 1)$$

1. conditionnement obtenu sur Matlab

2. Vecteur résidu r

2.1 Etape 0

2.2 Etape 1

2.3 Etape 2

2.4 Etape 3

2.5 Etape 4

3. Vecteur solution x

3.1 Etape 1

3.2 Etape 2

3.3 Etape 3

3.4 Etape 4

4. Analyse numérique du problème

Conclusion

Annexe