Benhammed Azzedine
Carlier Maxime
Cloarec Jonathan
De Laroque Florent
Ducasse Sylvain
Fiche Guénolé

Projet Mathématiques : Modélisation et conseils pour Un jeu de fléchettes

STPI2
Groupe C
A l'attention de M. Knippel

Table des matières

I) Introduction

Le sujet de notre projet mathématique est le jeu de fléchettes. L'objectif final de nos séances de travail était d'être capable de conseiller un joueur sur le point à viser à n'importe quel moment de la partie.

Tout d'abord, il a été nécessaire d'établir une modélisation de la cible pour avoir une base sur laquelle travailler. Nous avons assez vite pensé que le repère polaire $(0,r,\theta)$ ayant pour centre le milieu de la cible (centre de la zone 50) est un bon choix de repère car il est centré sur la cible et les calculs devraient être plus faciles en polaire qu'en cartésien en raison de la forme circulaire de la cible.

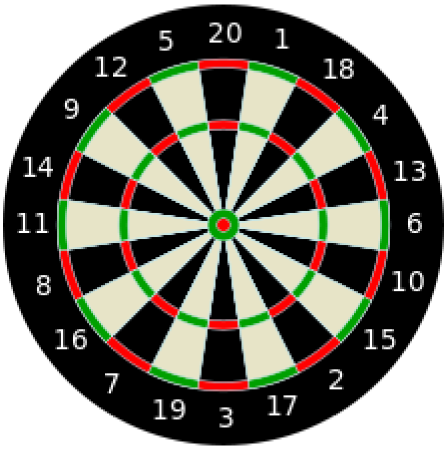
Très rapidement, nous nous sommes fait la remarque que, pour toucher une zone visée, il est préférable de viser le centre de cette zone. Nous avons donc décidé qu'à chaque fois qu'on veut viser une zone, on visera son centre.

Une partie de fléchettes se décompose en deux parties. La première consiste à obtenir le maximum de points pour se rapprocher le plus vite possible de 0. Ensuite, l'objectif est de viser des zones précises pour terminer en touchant une zone double et mettre son compteur à 0 points.

Une grande partie de nos recherches a été consacrée à la première phase d'un jeu de fléchettes car pour conseiller un joueur sur la deuxième phase, plus stratégique, nous nous appuierons des résultats obtenus sur la première phase.

II) Règles officielles du jeu de fléchettes

Le jeu de fléchettes est un jeu d'adresse opposant 2 joueurs ou 2 équipes. Le principe est simple : lancer une fléchette (pointe effilée) sur une cible afin gagner des points et remporter des manches. La cible est divisée en segment marqués de 1 à 20, indiquant leur valeur. La cible est aussi divisée en 4 couronnes : simple, triple, simple, double (de l'intérieur vers l'extérieur), rapportant respectivement 1/3/1/2 fois la valeur du segment. Enfin, le centre de la cible, est défini par la bulle (considéré comme un double) et la demi-bulle, rapportant 50 et 25 points. Chaque zone est définie matériellement par des fils métalliques plaqués sur la surface de la cible.



Cible standard du jeu de fléchette

Les normes standards de la cible sont les suivantes :

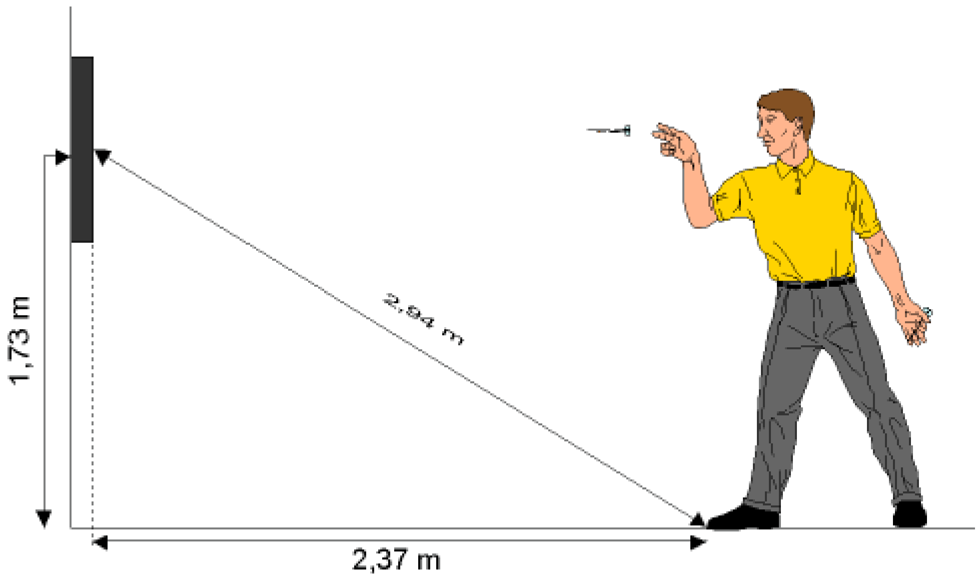
- Largeur intérieure des doubles et des triples : 8 mm
- Diamètre du centre (bulle) : 12,7 mm → rayon=6,35 mm
- Diamètre du demi-centre (demi-bulle) : 31,8 mm → rayon=15,9mm
- Rayon du cercle extérieur de la couronne des doubles : 170 mm
- Rayon du cercle extérieur de la couronne des triples : 107 mm
- Diamètre total de la cible : 457 mm → rayon= 228,5mm
- Epaisseur des fils : minimum 1,6 mm - maximum 1,8 mm

Chaque fléchette doit être lancée à la main, l'une après l'autre et de façon à ce que la pointe soit dirigée vers la cible. Si une fléchette tombe au sol sans avoir touché la cible et sans qu'il y ait eu un mouvement de lancer, alors le joueur peut la rejouer.

Pour qu'une fléchette soit validée, il faut que sa pointe soit fichée dans la surface de la cible, c'est-à-dire à l'intérieur de la zone délimitée par le bord extérieur de la couronne des doubles. Les points sont attribués en fonction de la zone où est fichée la pointe de la fléchette. A noter qu'une fléchette qui rebondit sur la cible est considérée comme nulle.

Enfin, chaque joueur doit disposer de ses propres fléchettes, dont le poids (maximum 50 g) et la taille (maximum 30,5 cm) sont vérifiés avant le match.

Notre projet traite de la variante la plus jouée dans le monde, en individuel : le 501. D'après le règlement intérieur de la fédération française de DARTS :



ARTICLE 314.120 - RÈGLES DU 501

« Chaque joueur ou chaque double démarre avec un capital de 501 points. Les joueurs jouent à tour de rôle, les partenaires alternant au sein d'un double. Une volée consiste en un lancer de trois fléchettes, exception faite du dernier lancer pour le gain d'une manche, qui peut être joué en moins de trois fléchettes. Si un joueur touche une fléchette plantée dans la cible avant la fin du lancer, la volée sera comptée comme achevée. Le score réalisé à chaque volée est déduit du capital de départ, les fléchettes ne pouvant être retirées de la cible qu'une fois le score enregistré par l'arbitre. Gagne la manche le premier joueur à ramener son capital à zéro en finissant par un double.

La règle du dépassement (bust) est appliquée. Si un joueur réalise plus de points que le total requis pour achever la manche, les points qu'il vient de réaliser ne lui sont pas décomptés et il conserve le capital qui était le sien avant la dernière volée de son adversaire. »

Règlement intérieur de la Fédération Française de Darts (Mis à jour le 23 juin 2012)[1]

[1] http://iceman29.e-monsite.com/medias/files/reglement-interieur-maj-le-23-juin.pdf

III) Approche générale du sujet

a) Objectif

Pour savoir quelle est la zone à viser pour obtenir le plus de points, il est assez évident que les probabilités vont jouer un grand rôle dans les conseils que nous donnerons au joueur. Notre but va être de regarder, pour chaque point de la cible, quel est le point qui apporte une moyenne de points la plus élevée. Nous allons donc devoir trouver une méthode pour, à partir d'un point visé, trouver l'espérance ; c'est-à-dire faire la somme des probabilités de tomber dans chaque zone et les multiplier par les points que rapporte la zone. Pour cela, nous nécessiterons d'une loi de probabilité (définie plus loin) qui donnera la répartition des probabilités suivant la distance au point visé.

Le point visé qui a l'espérance la plus grande est le point à viser pour maximiser son score.

b) Niveau de joueur

Tous les joueurs n'ont pas le même niveau de jeu. Or, la probabilité d'atteindre la zone visée est différente suivant le niveau du joueur : un très bon joueur aura « plus de chance » de touché la zone qu'il vise. Nous utiliserons donc un paramètre dépendant du niveau du joueur qui interviendra dans l'expression de notre loi de probabilité. Dans les 2 modélisations expliquées plus loin, ce paramètre est noté λ et varie de 0 à 1. Voici quelques valeurs représentatives de λ (valables notamment pour la modélisation discrète) :

λ	1	0.25	0.2	0.05
Niveau du joueur	parfait	bon	médiocre	mauvais

c) Modèles

Le premier modèle que nous avons proposé aurait été le plus précis car il fait moins de simplifications de modèle. Cependant, ce n'est pas le modèle que nous avons retenu en raison de sa complexité. Avec le deuxième modèle, nous avons choisi de faire certaines simplifications, ce qui nous éloigne peut-être un peu plus de la réalité, mais nous sommes capables de conseiller précisément le joueur.

IV) Les modélisations

Le but de notre projet est d'établir un modèle à la fois réaliste et pratique, permettant de guider un joueur en fonction de son niveau. Pour cela, il faut établir la meilleure stratégie afin de terminer une manche avec le moins de fléchettes possible. Nous considérons cette stratégie indépendante des résultats de l'adversaire, c'est pourquoi nous nous intéresserons uniquement à un joueur. Nous avons remarqué que les champions de fléchettes visent les zones rapportant le plus de points, puis quand leur score est faible, ils adaptent une stratégie afin de finir à 0 par un double, le plus rapidement possible.

Prenons un exemple simple pour mieux comprendre : un joueur parfait (il touche donc toujours le point qu'il vise) va d'abord viser 7 fois le triple 20 et une fois le triple 19 et terminer par un double 12, soit 9 fléchettes.

Pour établir cette stratégie, nous avons d'abord pensé à un modèle à valeurs continues.

a) Modélisation à valeurs continues :

Notre première idée était de déterminer la probabilité de toucher n'importe quel point de la cible en fonction du point visé et du niveau du joueur, pour ensuite calculer l'espérance maximale de points. Le point visé est, de façon logique, le centre de zones.
Soit O le centre de la cible, du repère (ux,uy) et du repère (r' ; θ').
Soit V le point visé de coordonnées (x ; y) dans le repère (ux,uy) et l'origine du repère (r ; θ).
Soit T le point touché de coordonnées (x' ; y').

En supposant que les joueurs n'ont pas de tendance particulière à dévier leur lancer vers la gauche ou la droite, nous avons décidé d'utiliser la loi uniforme pour θ. Ce choix simplifie les calculs et est en même temps raisonnable d'après nous car nous ne nous éloignons pas trop de la réalité.

$$p(X = k_1) = \frac{1}{n} = \frac{1}{2\pi}$$

La véritable difficulté repose donc sur r : nous avons décidé d'utiliser la loi exponentielle de paramètre λ (λ correspondant au niveau du joueur).

$$p(X = k_2) = \lambda e^{-\lambda k}$$

Ainsi, pour obtenir l'espérance de points gagnés pour chaque lancer, il faut calculer :

$$\sum_{k=1}^{60} \iint_{r\prime,\theta\prime} p(X = r) * p(Y = \theta) dr' d\theta'$$

Or r et θ ne sont pas dans le même référentiel que r' et θ'
En multipliant les 2 probabilités et en changeant de repères, on obtient la probabilité recherchée :

$$p(X = r) = \frac{1}{2\pi} * \lambda e^{-\lambda\sqrt{(x+r\prime cos(\theta\prime))^2+(y+r\prime sin(\theta\prime))^2}}$$

Cependant, nous n'avons pas réussi à calculer l'intégrale double, que ce soit à la main ou à l'aide d'un logiciel de calcul tel que Sage.

Nous avons donc supposé que la fonction était constante sur une petite zone de rayon dr et d'angle dθ que l'on assimile à un rectangle de longueur dr' et de largeur r'*dθ'. La probabilité qu'une flèche tombe dans une zone définie est donc :

$\sum_{rectangles}(dr') * r' * teta' * p(X = r)$.

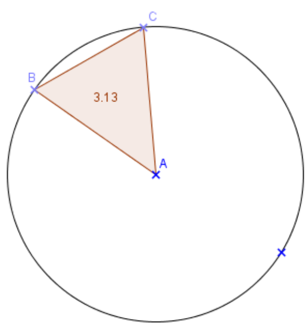
C'est une somme sur tous les rectangles appartenant à la zone définie. On suppose que la fonction soit uniforme sur ce rectangle, on peut donc la sortir de l'intégrale et la calculer plus facilement. On la calcule au point situé au centre du rectangle de coordonnées (r', θ') pour diminuer les erreurs de calcul.

Le programme que nous avons créé pour calculer l'espérance de cette manière ne fonctionnant pas car les résultats trouvés étaient beaucoup trop petits ou trop grand, nous avons donc opté pour un autre modèle, cette fois-ci à valeurs discrètes.

b) Modélisation à valeurs discrètes

Dans le but d'obtenir des résultats concrets à notre problématique, nous avons décidé d'utiliser l'informatique pour réaliser une modélisation. L'objectif est de créer un programme qui peut, à partir du niveau du joueur, calculer l'espérance qu'il a en visant un certain point de la cible.

Le fonctionnement du programme qui représente ce nouveau modèle est assez simple : le joueur ne peut viser que le barycentre des 82 zones différentes de la cible (les 20 doubles, les 20 simples extérieurs, les 20 triples, les 20 simples intérieurs, la couronne du 25 et le 50). Ensuite, on s'intéresse à la probabilité que la fléchette lancée atterrisse sur une autre des 82 zones. Pour chaque zone, nous avons rentré dans un tableau de structure la distance entre le barycentre et le centre de la cible (r), l'angle formé (θ), et l'aire (aire).



$BC = \sqrt{\mathrm{AC}^2 + \mathrm{AB}^2 - \mathrm{AB} * \mathrm{AC} * \cos(\theta)}$

Θ = « angle CAB »

Pour obtenir cette probabilité, nous calculons la distance entre le barycentre de la zone qu'il vise et celui dans laquelle la fléchette atterrit grâce à la loi cosinus. Une fois cette distance calculée, elle sert comme variable dans la loi exponentielle qui détermine donc la probabilité.

Les zones étant de tailles différentes, la probabilité est multipliée par le quotient de la plus grande aire sur l'aire de la zone dans laquelle la fléchette peut atterrir. Cela permet de rendre notre modèle davantage réaliste et précis. Nous aurons désormais une probabilité plus grande de tomber sur une zone simple que sur une zone double si ces deux barycentres sont à égale distance du barycentre visé par le joueur.

Nous sommes conscients qu'utiliser une loi exponentielle pour calculer cette probabilité n'est pas très juste mathématiquement, mais nous cherchions à obtenir des résultats qui nous permettent d'avancer dans notre projet, pour pouvoir ensuite conseiller le joueur sur une stratégie à adopter en fonction de son niveau. Les résultats obtenus sont cohérents, nous avons donc décidé de les garder pour mener à bien notre modélisation.

Nous répétons le calcul pour chaque zone et calculons l'espérance en faisant la somme de chaque probabilité multipliée par la valeur de la zone. Cette espérance est utilisée pour calculer, par exemple, la zone à viser pour qu'un joueur d'un certain niveau espère obtenir le plus de points.

Extrait du code permettant de calculer l'espérance

```
function calcEsp (lambda : Real; x : Integer; tab : TS) : Real ;
var a,teta,esp,prob : Real;
z: Integer;

begin
a:=0;
esp:=0;
for z:= 1 to 80 do

    begin

    teta:= Abs(tab[z].angle-tab[x].angle);
    a:= sqrt((tab[z].rayon*tab[z].rayon) + (tab[x].rayon*tab[x].rayon) - (2*tab[x].rayon*tab[z].rayon*cos(teta)));
    prob:=lambda*exp(-lambda*a);
    esp:=esp+tab[z].valeur*prob
    end;

for z:= 81 to 100 do

    begin
    teta:= Abs(tab[z].angle-tab[x].angle);
    a:= sqrt((tab[z].rayon*tab[z].rayon) + (tab[x].rayon*tab[x].rayon) - (2*tab[x].rayon*tab[z].rayon*cos(teta)));
    prob:= prob+lambda*exp(-lambda*a);
    end;

    esp:= esp+25*(prob/20);
    esp:=esp+50*lambda*exp(-lambda*tab[x].rayon);


calcEsp:=esp;
end;
```

La variable z représente les 82 zones de la cibles (ici il y en a 101 car on divise aussi en 20 zones le demi-centre).

V) Stratégie

Lors d'une partie de fléchettes, la stratégie du joueur s'organise en 2 étapes :

- Dans un premier temps, le joueur essaye de faire baisser son score le plus rapidement possible.
- Dans une seconde étape, il tente d'atteindre le score de 0.

Pour la première étape il ne suffit pas de viser le triple 20, en effet un joueur peu précis n'atteindrait presque jamais son objectif et progresserait donc lentement. La tactique que nous pensons être la plus efficace est de viser le point pour lequel le joueur a une espérance maximale (voir partie modélisation). C'est ainsi que son score baissera le plus rapidement et il pourra passer le plus vite possible à l'étape de finition pour atteindre le score de 0 points et ainsi gagner la partie.

Nous nous sommes tout d'abord demandé à quel moment le joueur doit commencer à viser des points différents de celui avec l'espérance maximale. Nous ne tenons pas compte du score de l'adversaire car le but est de finir le plus vite possible, quel que soit le niveau de l'adversaire. Nous ne regardons pas les volées de 3 fléchettes mais plutôt le score du joueur avant chacun de ses lancés. En effet, le joueur peut finir avec n'importe quelle fléchette, il n'est pas obligé d'utiliser les 3 fléchettes de sa dernière volée.

Nous avons, au début, pensé que le joueur devait commencer à viser lorsque son score est tel qu'il peut terminer la partie en une seule fléchette. Néanmoins, le joueur doit finir par un double. Il faut donc obligatoirement que son score soit pair pour qu'il puisse gagner en un lancer. C'est pourquoi nous avons décidé de nous intéresser aux 2 dernières fléchettes : la première pour obtenir un score pair correspondant à une valeur disponible sur la cible et la deuxième pour abaisser son score à 0 points.

De plus, nous privilégions pour la dernière fléchette un score multiple de 4. Ainsi si le joueur touche la zone simple au lieu du double qui lui aurait permis de gagner (ce qui a de grandes chances d'arriver pour un joueur moyen), il peut toujours finir avec la fléchette suivante puisque son score est encore pair.

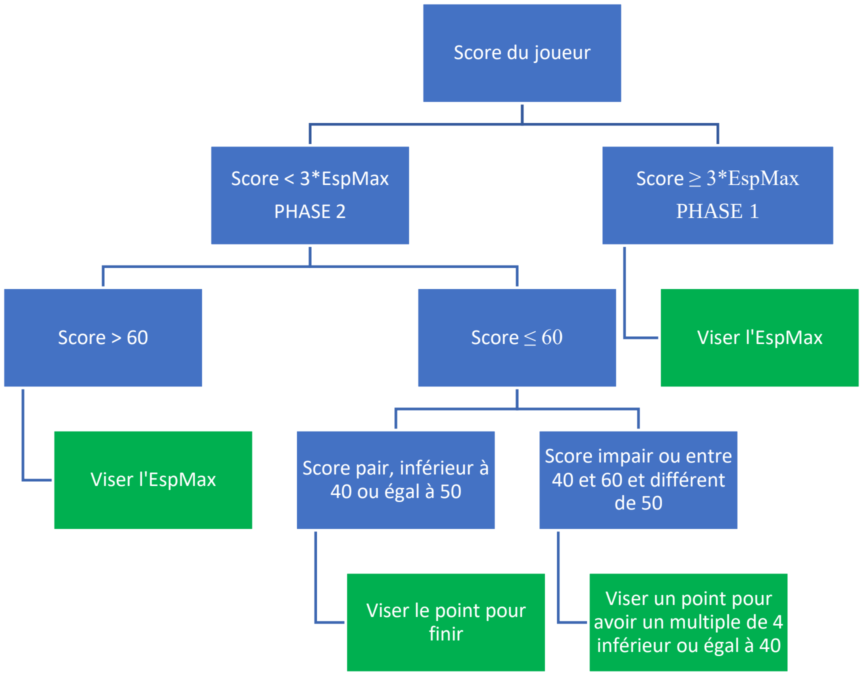
Exemple : Le joueur a un score de 16, il vise donc le double 8.

Il rate le double et touche le 8.

Il peut toujours viser le double 4 et finir la partie en une seule fléchette.

Tant que le score du joueur est supérieur à 3 fois son espérance maximale, on considère qu'il doit continuer à viser ce point pour diminuer son score.

Pour l'avant dernière fléchette, on privilégie des zones simples, que le joueur à des chances raisonnables de toucher. Conseiller à un novice de viser une zone triple serait trop risqué.



<u>Diagramme de notre stratégie</u>

Nous avons codé un programme permettant de conseiller le joueur selon le modèle donné ci-dessus. Le joueur renseigne son niveau et son score actuel ; le programme va alors lui dire quelle zone il doit viser.

Dans la première phase du jeu, le programme conseille de viser le point avec l'espérance maximale, qui a été déterminé à l'aide du programme qui calcule l'espérance pour chaque zone visée. Par la suite, il conseille au joueur de viser les zones qui lui permettent de finir le plus rapidement possible (en privilégiant les zones simples car elles sont plus grandes).

VI) Les difficultés rencontrées

- Nous avons longtemps hésité sur la loi de probabilité à choisir. Dans le premier modèle, la loi exponentielle était favorisée. Dans le second, la loi de Poisson paraissait peut-être plus adéquate car elle est préférable pour les modèles à valeurs discrètes mais nous avons décidé de garder la loi exponentielle car les résultats obtenus nous semblent finalement suffisamment réalistes.

- Il nous a été difficile de concilier la facilité de calculs avec la contrainte de la réalité. Notre modèle devait être le plus précis possible, tout en étant capables de le résoudre. Notre modèle final devait nous permettre de conseiller le joueur. Nous ne pouvions pas rendre un travail non abouti.
  Lors du premier modèle, nous avons choisi de privilégier la cohérence avec la réalité. Pour cela, nous avons fait le moins de simplifications possibles (ou alors des simplifications qui modifient peu les résultats).
  Le deuxième modèle à quant à lui été créé sur des bases de travail plus faciles (un seul repère) et une représentation de chaque zone facile à comprendre. Le risque était de perdre beaucoup en précision. Finalement, nous pensons avoir fait suffisamment peu d'approximations pour que les conseils que notre programme nous donne soient interprétables.

- Il a été compliqué de se détacher du premier modèle. En effet, beaucoup de séances étaient déjà passées et nous n'étions pas sûrs d'aboutir à quelque chose de concret avec un autre modèle. D'un autre côté, nous étions bloqués sur ce premier modèle car l'équation finale était trop complexe pour être résolue. Un autre facteur qui a influencé notre choix est la présence de beaucoup de repères différents, donc il y avait des risques de se perdre dans les calculs et que certaines personnes du groupe ne comprennent pas bien le modèle.

VII) Organisation de groupe

Le système de chef de projet nous a permis de tous nous impliquer, pour que personne ne soit vraiment détaché du groupe ou qu'une seule personne ne fasse tout le travail.

De plus, l'obligation de devoir rendre un travail chaque semaine nous a permis de travailler assez régulièrement, ce qui n'aurait peut-être pas été le cas autrement.

Nous nous sommes efforcés de nous retrouver hors des heures de travail pour travailler ensemble, et mettre en commun ce qui avait été cherché chez soi.

Sur la première partie du projet, nous avons surtout discuté ensemble, pour avoir les mêmes bases de travail (repère, loi de probabilité). Ensuite, l'un d'entre nous a proposé un modèle, qu'il a détaillé aux autres du groupe pour que tout le monde soit au même niveau.

Lorsque nous avons compris que ce modèle était compliqué pour être fini dans les temps, un autre étudiant du groupe a proposé son propre modèle, qu'il a immédiatement programmé avec un autre étudiant du groupe. Nous nous sommes ensuite retrouvés tous ensemble pour continuer ce modèle et le finaliser.

Enfin, les derniers jours ont été consacrés à la deuxième phase du jeu : finir la partie. Cette étude a été effectuée par les étudiants qui n'ont pas trouvé les modèles ou programmé. Ces trois étudiants ont discuté du sujet ensemble pour partager leurs idées et avancer rapidement.

Ce projet contient est donc marqué de l'empreinte de chacun de étudiants y ayant participé et nous sommes fiers d'avoir réussi à partager le travail comme cela.

VIII) Conclusion

Finalement, avec ce projet nous avons trouvé une modélisation pour représenter mathématiquement une partie de fléchettes.

Nous avons dû changer notre modélisation après plusieurs semaines de travail sur le premier modèle, ce qui a été assez difficile car beaucoup de temps et de recherches ont été perdus. Mais ceci fut indispensable car nous restions bloqués sur un problème qui empêchait toute progression du projet. Cela nous aura appris à changer de cap quand nous arrivons sur une situation infranchissable et ainsi trouver une autre solution au problème.

Nous avons aussi appris à peser la réalité d'une modélisation mathématique avec un problème ici statistique, mais qui pourrait aussi être un problème de physique.

De plus, travailler dans un grand groupe a été une première pour nous tous ; nous avons ainsi pu découvrir les avantages et les défauts d'être nombreux sur un projet. Cela permet d'avoir plus de points de vue et donc plus de solutions, mais il faut réussir à mettre tout le monde d'accord. Il est également plus difficile de trouver des créneaux pour se voir tous ensemble. Cependant, comme cela a été dit ci-dessus, plus de personnes signifie un travail personnel plus ciblé et donc plus approfondi car le travail est partagé entre tous les membres du groupe.

Le projet mathématique restera pour nous un bon souvenir et une bonne expérience, qui nous aura enrichi mais aussi intéressés à un sujet que nous ne connaissions pas.