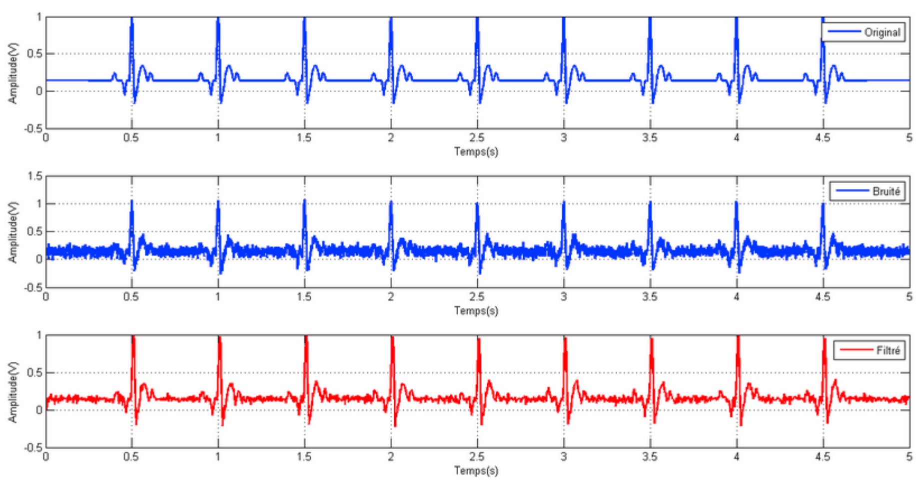
Institut national des sciences appliquées de Rouen

INSA de Rouen

Projet MSRO GM3 - Vague 2 - Sujet 3

# Traitement du signal
# Etude de deux filtres linéaires




*Auteurs :*
Thibaut André-Gallis
thibaut.andregallis@insa-rouen.fr
Kévin Gatel
kevin.gatel@insa- rouen.fr

*Enseignant :*
Natalie Fortier
natalie.fortier@insa-rouen.fr

11 Avril 2021

# Table des matières

# Introduction du problème

Soit deux filtres $h_k$ et $g_k$ tels que :

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$
$$G(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}}$$

Dans un premier temps, on cherche à savoir si ces deux filtres sont réalisables physiquement.

On s'intéressera ensuite à la mise en cascade de ces deux filtres pour déterminer s'il agit par équivalence d'un unique filtre.

Enfin nous étudierons leur mise en parallèle avec les mêmes objectifs que pour la mise en cascade.

# 1. Filtres réalisables ?

## 1.1 Pôles

### 1.1.1 $H(z)$

On a

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} = \frac{0.3z^2 - 0.2z + 0.4}{z^2 + 0.9z + 0.8}$$

Dénominateur :

$$D_h = z^2 + 0.9z + 0.8$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.9^2 - 4 * 1 * 0.8 \\ &= -2.39 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{array}{c|c} \begin{aligned} z_{1Dh} &= \frac{-0.9 + i\sqrt{2,39}}{2} \\ &= -0.45 + i\frac{\sqrt{2,39}}{2} \end{aligned} & \begin{aligned} z_{2Dh} &= \frac{-0.9 - i\sqrt{2,39}}{2} \\ &= -0.45 - i\frac{\sqrt{2,39}}{2} \end{aligned} \end{array}$$

Ainsi :

$$|z_{1Dh}| = |z_{2Dh}| = \sqrt{(-0.45)^2 + \left(\frac{\sqrt{2,39}}{2}\right)^2} \simeq 0.89 < 1$$

$H(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité **donc le filtre est réalisable physiquement**.

### 1.1.2 $G(z)$

On a

$$G(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}} = \frac{0.2z^2 - 0.5z + 0.3}{z^2 + 0.7z + 0.85}$$

Dénominateur :

$$D_g = z^2 + 0.7z + 0.85$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.7^2 - 4 * 1 * 0.85 \\ &= -2.91 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{array}{c|c} \begin{aligned} z_{1Dg} &= \frac{-0.7 + i\sqrt{2,91}}{2} \\ &= -0.35 + i\frac{\sqrt{2,91}}{2} \end{aligned} & \begin{aligned} z_{2Dg} &= \frac{-0.7 - i\sqrt{2,91}}{2} \\ &= -0.35 - i\frac{\sqrt{2,91}}{2} \end{aligned} \end{array}$$

Ainsi :

$$|z_{1Dg}| = |z_{2Dg}| = \sqrt{(-0.35)^2 + \left(\frac{\sqrt{2,91}}{2}\right)^2} \simeq 0.92 < 1$$

$G(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité **donc le filtre est réalisable physiquement**.

## 1.2 Zéros

### 1.2.1 $H(z)$

On a

$$H(z) = \frac{0.3z^2 - 0.2z + 0.4}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}$$

Numérateur :

$$N_h = 0.3z^2 - 0.2z + 0.4$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-0.2)^2 - 4 * 0.3 * 0.4 \\ &= -0,44 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Nh} &= \frac{0.2 + i\sqrt{0.44}}{2 * 0.3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3}i\sqrt{0.44} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} z_{2Nh} &= \frac{0.2 - i\sqrt{0.44}}{2 * 0.3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\sqrt{0.44} \end{aligned}$$

### 1.2.2 $G(z)$

On a

$$G(z) = \frac{0.2z^2 - 0.5z + 0.3}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

Numérateur :

$$N_g = 0.2z^2 - 0.5z + 0.3$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-0.5)^2 - 4 * 0.2 * 0.3 \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Ng} &= \frac{0.5 + \sqrt{0.01}}{2 * 0.2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} z_{2Ng} &= \frac{0.5 - \sqrt{0.01}}{2 * 0.2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

## 1.3 Représentation dans le plan complexe (zplane)

On a :

$$H(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}$$

et

$$G(z) = \frac{(z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

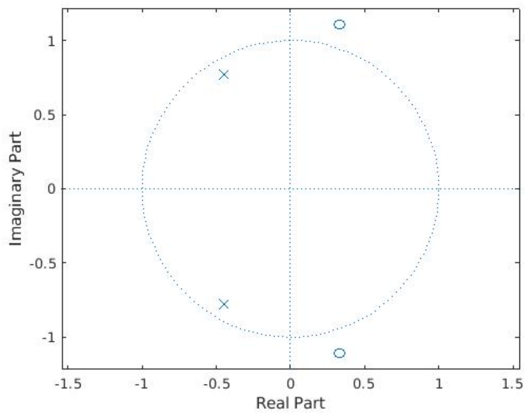



FIGURE 1.1 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre $H$

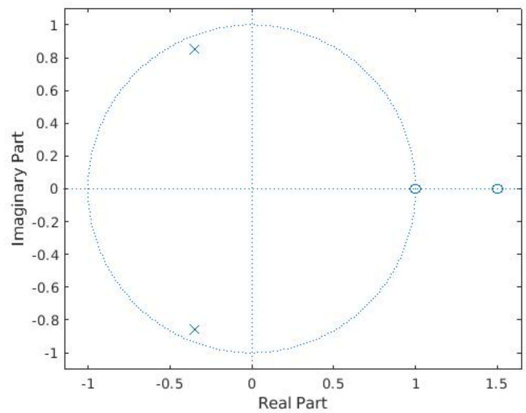



FIGURE 1.2 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre $G$

## 1.4 Réponse en fréquence

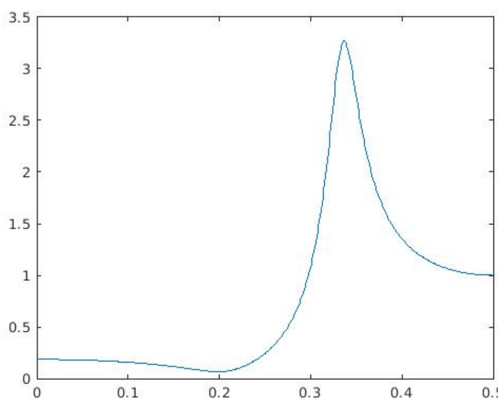


FIGURE 1.3 – Visualisation de $|H(f)|$ sur [0,0.5]

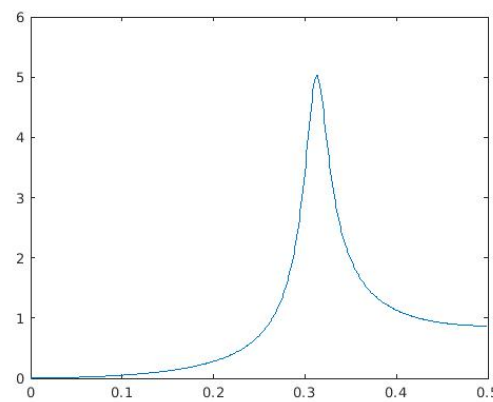


FIGURE 1.4 – Visualisation de $|G(f)|$ sur [0,0.5]

# 2. Mise en cascade

On met en cascade les filtres $H(z)$ et $G(z)$. Posons $y_k$ le filtre équivalent à la convolutée tel que :

$$y_k = h_k * g_k$$

On a :

$$Y(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_k z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m g_{k-m} \right) z^{-k}$$

On pose $n = k - m$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m g_n \right) z^{-(n+m)}$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m z^{-m} \right) g_n z^{-n}$$

On retrouve

$$Y(z) = H(z)G(z)$$

Le filtre équivalent à la mise en cascade des deux filtres est le produit des deux filtres.

On a donc

$$Y(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})} * \frac{(z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

$$Y(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} * \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}}$$

En développant on trouve :

$$Y(z) = \frac{0.06 - 0.19z^{-1} + 0.27z^{-2} - 0.26z^{-3} + 0.12z^{-4}}{1 + 1.6z^{-1} + 2.28z^{-2} + 1.325z^{-3} + 0.68z^{-4}}$$

On peut ainsi représenter les pôles et les zéros de ce filtre sur le plan complexe comme ci-dessous :

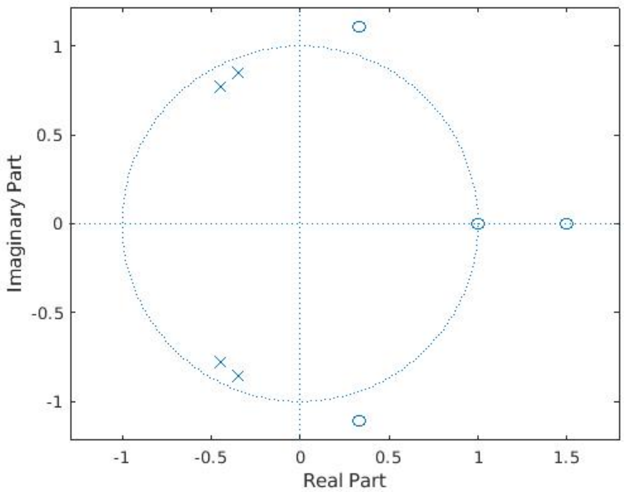



FIGURE 2.1 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre $Y$

On retrouve bien les deux pôles et les deux zéros des filtres respectifs $H$ et $G$.

On peut également visualiser sa réponse en fréquence ci-dessous :

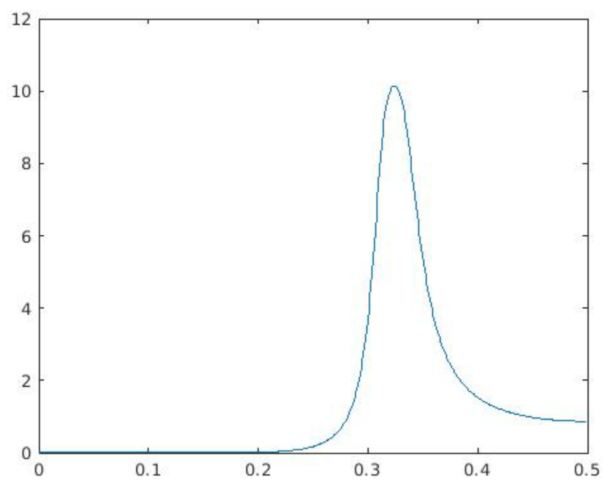



FIGURE 2.2 – Visualisation de $|Y(f)|$ sur [0,0.5]

# 3. Mise en parallèle

# Conclusion

# Annexe