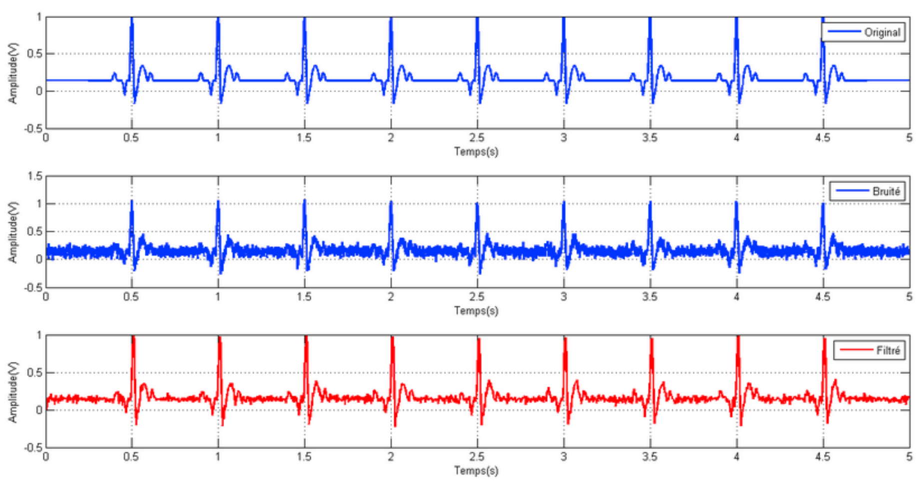
Institut national des sciences appliquées de Rouen

INSA de Rouen

Projet MSRO GM3 - Vague 2 - Sujet 3

Traitement du signal
Etude de deux filtres linéaires



Auteurs :
Thibaut André-Gallis
thibaut.andregallis@insa-rouen.fr
Kévin Gatel
kevin.gatel@insa- rouen.fr

Enseignant :
Natalie Fortier
natalie.fortier@insa-rouen.fr

11 Avril 2021

Table des matières

Introduction du problème

Soit deux filtres h_k et g_k tels que :

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$
$$G(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}}$$

Dans un premier temps, on cherche à savoir si ces deux filtres sont réalisables physiquement.

On s'intéressera ensuite à la mise en cascade de ces deux filtres pour déterminer s'il agit par équivalence d'un unique filtre. On initialisera ensuite un signal d'entrée pour déterminer la sortie du filtre.

Enfin nous étudierons leur mise en parallèle avec les mêmes objectifs que pour la mise en cascade.

1. Filtres réalisables ?

1.1 Pôles

1.1.1 $H(z)$

On a

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} = \frac{0.3z^2 - 0.2z + 0.4}{z^2 + 0.9z + 0.8}$$

Dénominateur :

$$D_h = z^2 + 0.9z + 0.8$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.9^2 - 4 * 1 * 0.8 \\ &= -2.39 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Dh} &= \frac{-0.9 + i\sqrt{2,39}}{2} \\ &= -0.45 + i\frac{\sqrt{2,39}}{2} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} z_{2Dh} &= \frac{-0.9 - i\sqrt{2,39}}{2} \\ &= -0.45 - i\frac{\sqrt{2,39}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|z_{1Dh}| = |z_{2Dh}| = \sqrt{(-0.45)^2 + \left(\frac{\sqrt{2,39}}{2}\right)^2} \simeq 0.89 < 1$$

$H(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité **donc le filtre est réalisable physiquement**.

1.1.2 $G(z)$

On a

$$G(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}} = \frac{0.2z^2 - 0.5z + 0.3}{z^2 + 0.7z + 0.85}$$

Dénominateur :

$$D_g = z^2 + 0.7z + 0.85$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.7^2 - 4 * 1 * 0.85 \\ &= -2.91 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Dg} &= \frac{-0.7 + i\sqrt{2,91}}{2} \\ &= -0.35 + i\frac{\sqrt{2,91}}{2} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} z_{2Dg} &= \frac{-0.7 - i\sqrt{2,91}}{2} \\ &= -0.35 - i\frac{\sqrt{2,91}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|z_{1Dg}| = |z_{2Dg}| = \sqrt{(-0.35)^2 + \left(\frac{\sqrt{2,91}}{2}\right)^2} \simeq 0.92 < 1$$

$G(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité **donc le filtre est réalisable physiquement**.

1.2 Zéros

1.2.1 $H(z)$

On a

$$H(z) = \frac{0.3z^2 - 0.2z + 0.4}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}$$

Numérateur :

$$N_h = 0.3z^2 - 0.2z + 0.4$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-0.2)^2 - 4 * 0.3 * 0.4 \\ &= -0,44 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Nh} &= \frac{0.2 + i\sqrt{0.44}}{2 * 0.3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3}i\sqrt{0.44} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} z_{2Nh} &= \frac{0.2 - i\sqrt{0.44}}{2 * 0.3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\sqrt{0.44} \end{aligned}$$

1.2.2 $G(z)$

On a

$$G(z) = \frac{0.2z^2 - 0.5z + 0.3}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

Numérateur :

$$N_g = 0.2z^2 - 0.5z + 0.3$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-0.5)^2 - 4 * 0.2 * 0.3 \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Ng} &= \frac{0.5 + \sqrt{0.01}}{2 * 0.2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \quad \Bigg| \quad \begin{aligned} z_{2Ng} &= \frac{0.5 - \sqrt{0.01}}{2 * 0.2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.3 Représentation dans le plan complexe (zplane)

On a :

$$H(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}$$

et

$$G(z) = \frac{(z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

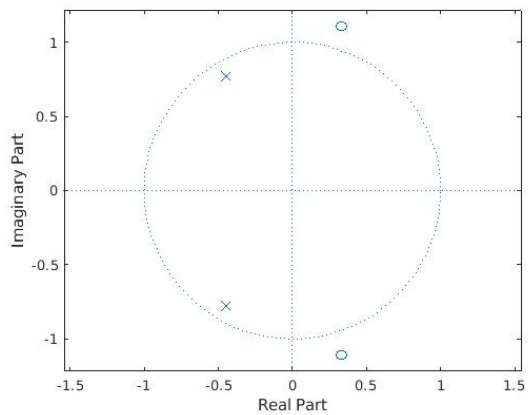


Figure 1.1 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre H

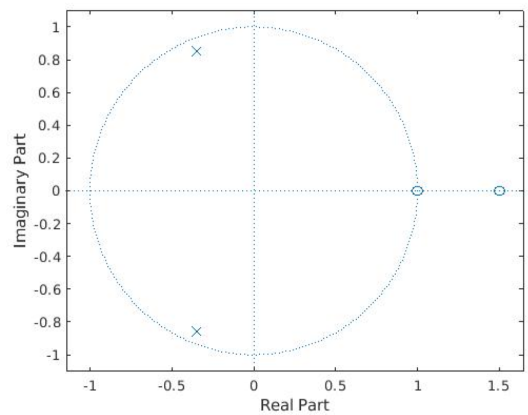


Figure 1.2 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre G

1.4 Réponse en fréquence

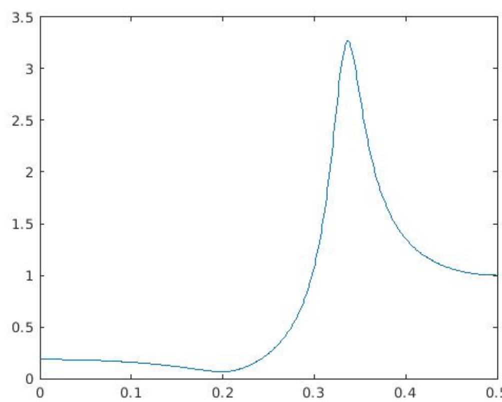


Figure 1.3 – Visualisation de $|H(f)|$ sur [0,0.5]

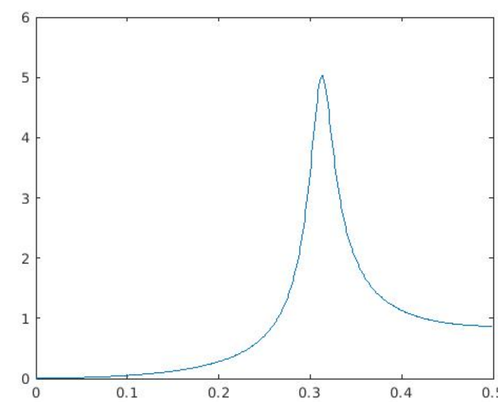


Figure 1.4 – Visualisation de $|G(f)|$ sur [0,0.5]

2. Mise en cascade

2.1 Filtre équivalent

On met en cascade les filtres $H(z)$ et $G(z)$. Posons y_{1k} le filtre équivalent à la convolutée tel que :

$$y_{1k} = h_k * g_k$$

On a :

$$Y_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{1k} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m g_{k-m} \right) z^{-k}$$

On pose $n = k - m$

$$Y_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m g_n \right) z^{-(n+m)}$$

$$Y_1(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} h_m z^{-m} \right) g_n z^{-n}$$

On retrouve

$$Y_1(z) = H(z)G(z)$$

Le filtre équivalent à la mise en cascade des deux filtres est le produit des deux filtres.

On sait que

$$Y_1(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})} * \frac{(z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

$\Longrightarrow$ mêmes pôles que H et G donc **filtre réalisable physiquement**.

On donc :

$$Y_1(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} * \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}}$$

En développant on trouve :

$$Y_1(z) = \frac{0.06 - 0.19z^{-1} + 0.27z^{-2} - 0.26z^{-3} + 0.12z^{-4}}{1 + 1.6z^{-1} + 2.28z^{-2} + 1.325z^{-3} + 0.68z^{-4}}$$

On peut ainsi représenter les pôles et les zéros de ce filtre sur le plan complexe comme ci-dessous :

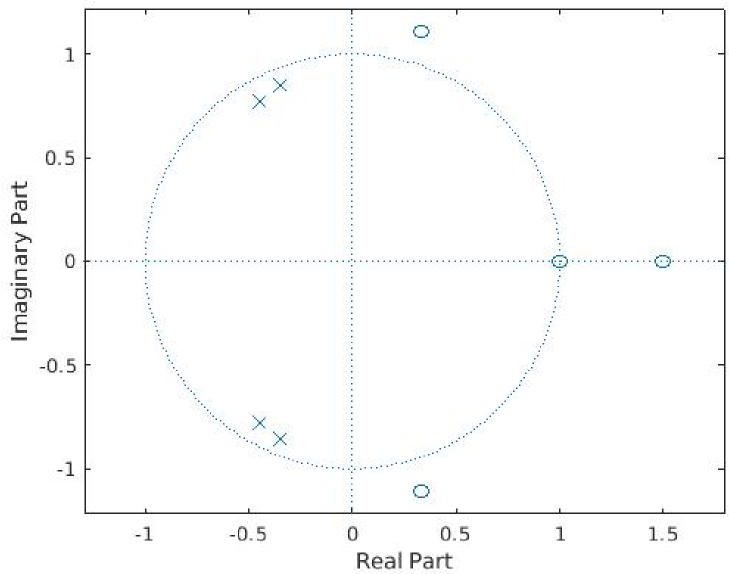


FIGURE 2.1 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre Y_1

On retrouve bien les deux pôles et les deux zéros des filtres respectifs H et G ce qui est cohérent.

On peut également visualiser sa réponse en fréquence ci-dessous :

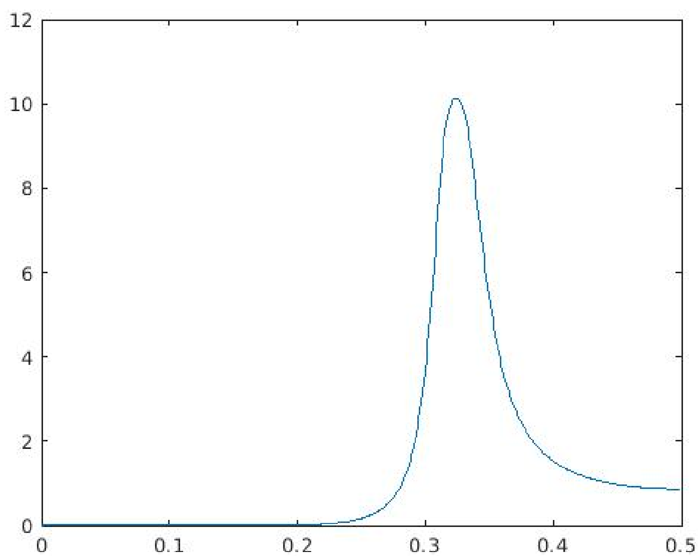


FIGURE 2.2 – Visualisation de $|Y_1(f)|$ sur [0,0.5]

2.2 Mise en pratique du filtre

→ créer un signal d'entrée x_k et étudier la sortie y_k avec la fonction **filter**

3. Mise en parallèle

3.1 Filtre équivalent

On met en parallèle les filtres $H(z)$ et $G(z)$. Posons y_{2k} le filtre équivalent à la convolutée tel que :

$$y_{2k} = h_k + g_k$$

On a :

$$Y_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y_{2k} z^{-k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (h_k + g_k) z^{-k}$$

D'où :

$$Y_2(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k z^{-k} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k z^{-k}$$

On retrouve :

$$Y_2(z) = H(z) + G(z)$$

On sait que :

$$Y_2(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})} + \frac{(z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

$$Y_2(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg}) + (z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

$\Longrightarrow$ mêmes pôles que H et G donc **filtre réalisable physiquement**.

On a donc :

$$Y_2(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} + \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}}$$

En développant et en sommant on trouve :

$$Y_2(z) = \frac{0.5 - 0.31z^{-1} + 0.525z^{-2} - 0.02z^{-3} + 0.58z^{-4}}{1 + 1.6z^{-1} + 2.28z^{-2} + 1.325z^{-3} + 0.68z^{-4}}$$

On peut ainsi représenter les pôles et les zéros de ce filtre sur le plan complexe comme ci-dessous :

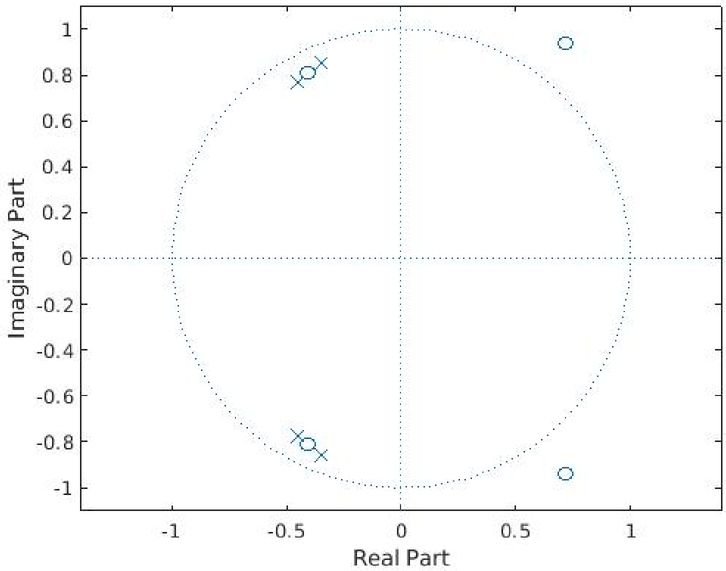


FIGURE 3.1 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre Y_2

On retrouve bien les deux pôles des filtres respectifs H et G. Les zéros de ce filtre sont également bien différents de ceux de H et G ce qui est cohérent.

On peut également visualiser sa réponse en fréquence ci-dessous :

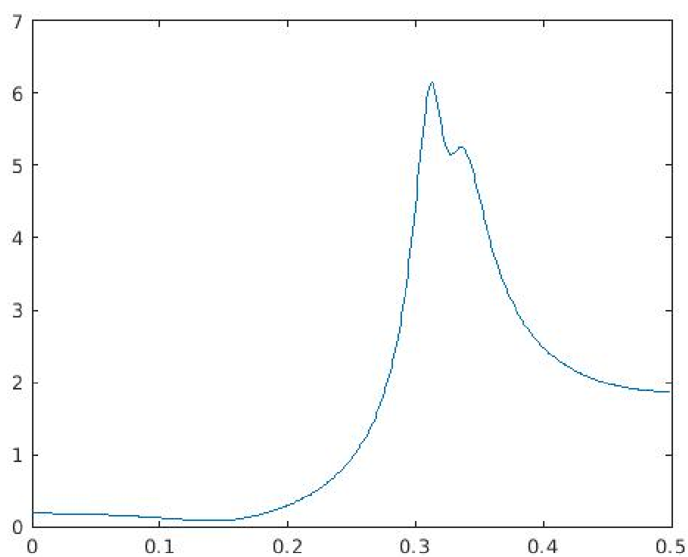


FIGURE 3.2 – Visualisation de $|Y_2(f)|$ sur [0,0.5]

3.2 Mise en pratique du filtre

→ créer un signal d'entrée x_k et étudier la sortie y_k avec la fonction **filter**

Conclusion