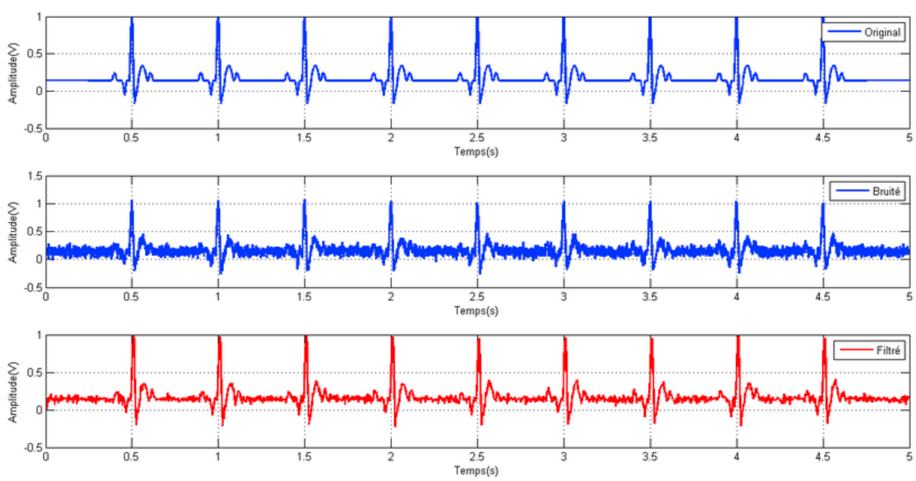
Institut national des sciences appliquées de Rouen

INSA de Rouen

Projet MSRO GM3 - Vague 2 - Sujet 3

Traitement du signal
Etude de deux filtres linéaires



Auteurs :
Thibaut André-Gallis
thibaut.andregallis@insa-rouen.fr
Kévin Gatel
kevin.gatel@insa- rouen.fr

Enseignant :
Natalie Fortier
natalie.fortier@insa-rouen.fr

11 Avril 2021

Table des matières

1 Filtres réalisables ? 3
1.1 Pôles . . . 3
1.1.1 $H(z)$ . . . 3
1.1.2 $G(z)$ . . . 3
1.2 Zéros . . . 4
1.2.1 $H(z)$ . . . 4
1.2.2 $G(z)$ . . . 4
1.3 Représentation dans le plan complexe (zplane) . . . 4
1.4 Réponse en fréquence . . . 5

2 Mise en cascade 6

3 Mise en parallèle 7

Conclusion 8

Annexe 9

Introduction du problème

Soit deux filtres h_k et g_k tels que :

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}}$$
$$G(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}}$$

Dans un premier temps, on cherche à savoir si ces deux filtres sont réalisables physiquement.

On s'intéressera ensuite à la mise en cascade de ces deux filtres pour déterminer s'il agit par équivalence d'un filtre unique.

Enfin nous étudierons leur mise en parallèle avec les mêmes objectifs que pour leur mise en cascade.

1. Filtres réalisables ?

1.1 Pôles

1.1.1 $H(z)$

On a

$$H(z) = \frac{0.3 - 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.8z^{-2}} = \frac{0.3z^2 - 0.2z + 0.4}{z^2 + 0.9z + 0.8}$$

Dénominateur :

$$D_h = z^2 + 0.9z + 0.8$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.9^2 - 4 * 1 * 0.8 \\ &= -2.39 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Dh} &= \frac{-0.9 + i\sqrt{2,39}}{2} \\ &= -0.45 + i\frac{\sqrt{2,39}}{2} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} z_{2Dh} &= \frac{-0.9 - i\sqrt{2,39}}{2} \\ &= -0.45 - i\frac{\sqrt{2,39}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|z_{1Dh}| = |z_{2Dh}| = \sqrt{(-0.45)^2 + \left(\frac{\sqrt{2,39}}{2}\right)^2} \simeq 0.89 < 1$$

$H(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité **donc le filtre est réalisable physiquement**.

1.1.2 $G(z)$

On a

$$G(z) = \frac{0.2 - 0.5z^{-1} + 0.3z^{-2}}{1 + 0.7z^{-1} + 0.85z^{-2}} = \frac{0.2z^2 - 0.5z + 0.3}{z^2 + 0.7z + 0.85}$$

Dénominateur :

$$D_g = z^2 + 0.7z + 0.85$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= 0.7^2 - 4 * 1 * 0.85 \\ &= -2.91 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Dg} &= \frac{-0.7 + i\sqrt{2,91}}{2} \\ &= -0.35 + i\frac{\sqrt{2,91}}{2} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} z_{2Dg} &= \frac{-0.7 - i\sqrt{2,91}}{2} \\ &= -0.35 - i\frac{\sqrt{2,91}}{2} \end{aligned}$$

Ainsi :

$$|z_{1Dg}| = |z_{2Dg}| = \sqrt{(-0.35)^2 + \left(\frac{\sqrt{2,91}}{2}\right)^2} \simeq 0.92 < 1$$

$G(z)$ a tous ses pôles à l'intérieur du cercle unité **donc le filtre est réalisable physiquement**.

1.2 Zéros

1.2.1 $H(z)$

On a

$$H(z) = \frac{0.3z^2 - 0.2z + 0.4}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}$$

Numérateur :

$$N_h = 0.3z^2 - 0.2z + 0.4$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-0.2)^2 - 4 * 0.3 * 0.4 \\ &= -0,44 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Nh} &= \frac{0.2 + i\sqrt{0.44}}{2 * 0.3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{5}{3}i\sqrt{0.44} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} z_{2Nh} &= \frac{0.2 - i\sqrt{0.44}}{2 * 0.3} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{5}{3}i\sqrt{0.44} \end{aligned}$$

1.2.2 $G(z)$

On a

$$G(z) = \frac{0.2z^2 - 0.5z + 0.3}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

Numérateur :

$$N_g = 0.2z^2 - 0.5z + 0.3$$

D'où :

$$\begin{aligned} \Delta &= (-0.5)^2 - 4 * 0.2 * 0.3 \\ &= 0.01 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} z_{1Ng} &= \frac{0.5 + \sqrt{0.01}}{2 * 0.2} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} z_{2Ng} &= \frac{0.5 - \sqrt{0.01}}{2 * 0.2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

1.3 Représentation dans le plan complexe (zplane)

On a :

$$H(z) = \frac{(z - z_{1Nh})(z - z_{2Nh})}{(z - z_{1Dh})(z - z_{2Dh})}$$

et

$$G(z) = \frac{(z - z_{1Ng})(z - z_{2Ng})}{(z - z_{1Dg})(z - z_{2Dg})}$$

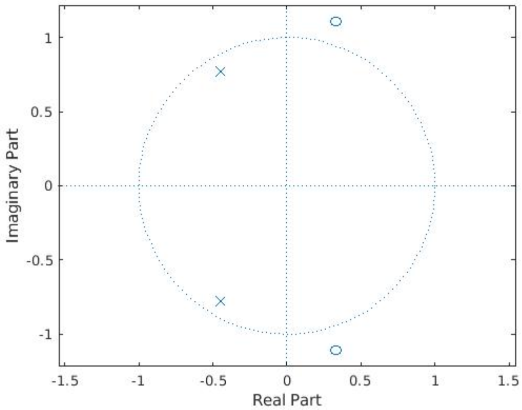


FIGURE 1.1 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre H

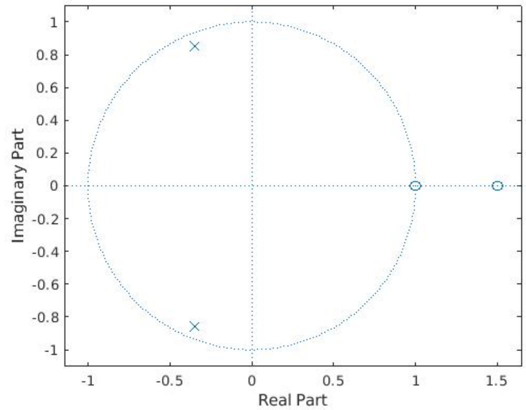


FIGURE 1.2 – Visualisation des pôles et des zéros du filtre G

1.4 Réponse en fréquence

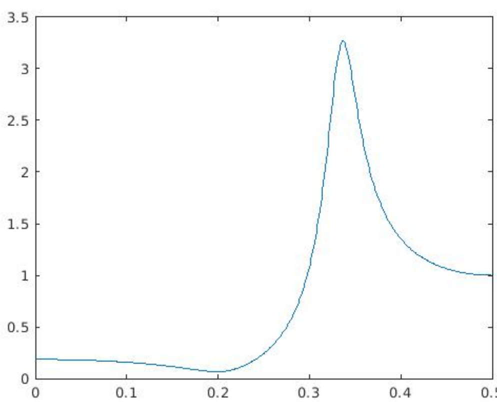


FIGURE 1.3 – Visualisation de $|H(f)|$ sur [0,0.5]

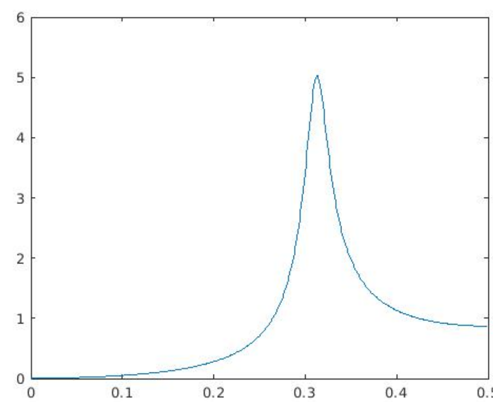


FIGURE 1.4 – Visualisation de $|G(f)|$ sur [0,0.5]

2. Mise en cascade

3. Mise en parallèle

Conclusion

Annexe